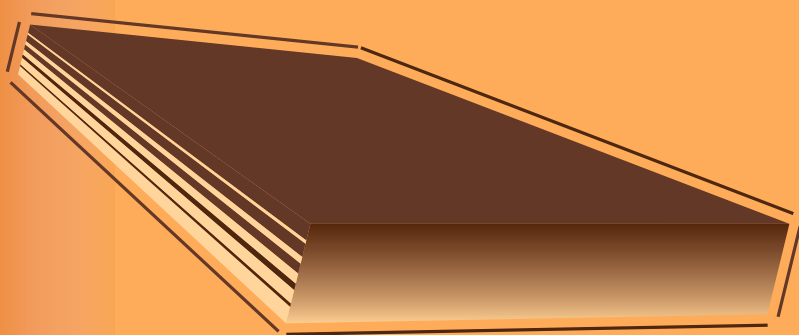


TERMOMECHANIKA LAMINATÓW, PŁYT I POWŁOK O FUNKCYJNEJ GRADACJI WŁASNOŚCI

JAROSŁAW JĘDRYSIAK



MONOGRAFIE POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
ŁÓDŹ 2010

TERMOMECHANIKA LAMINATÓW, PŁYT I POWŁOK O FUNKCYJNEJ GRADACJI WŁASNOŚCI

JAROSŁAW JĘDRYSIAK

**MONOGRAFIE POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
ŁÓDŹ 2010**

Recenzenci: **prof. dr hab. inż. Zbigniew Kołakowski**
dr hab. Ewaryst Wierzbicki, prof. SGGW

KOMITET REDAKCYJNY
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

Przewodniczący: **prof. dr hab. inż. Piotr Wodziński**
Redaktor Naukowy Wydziału: **dr hab. inż. Tadeusz Urban, prof. PŁ**
Redaktor Serii: **prof. dr hab. inż. Piotr Wodziński**

Książka stanowi podsumowanie części badań przeprowadzonych w Katedrze Mechaniki Konstrukcji Politechniki Łódzkiej w ramach projektu badawczego nr N N506 398535, finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego w latach 2008-2010.

© Copyright by Politechnika Łódzka 2010

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223

tel/fax 42 684-07-93

e-mail: a-row-1@adm.p.lodz.pl

www.wydawnictwa.p.lodz.pl

ISBN 978-83-7283-373-0

Nakład 100 egz. Ark druk. 10,0. Papier offset. 80 g 70 x 100
Druk ukończono w październiku 2010 r.
Wykonano w Drukarni Quick-Druk, 90-562 Łódź, ul. Łąkowa 11
Nr 1946

Spis treści

1. Wstęp	7
1.1. Wprowadzenie do tematyki książki	7
1.2. Przegląd wybranych metod modelowania	10
1.3. Cel i zakres opracowania	18
2. Podstawy modelowania	22
2.1. Pojęcia podstawowe	22
2.1.1. Parametr tolerancji	22
2.1.2. Jednorodne i niejednorodne rozłożenie komórek	23
2.1.3. Funkcje tolerancyjnie-periodyczne, wolnozmiennie, silnie oscylujące	23
2.1.4. Uwagi	25
2.2. Założenia modelowania	26
2.2.1. Wybór sposobu uśredniania	26
2.2.2. Założenie mikro-makro dekompozycji	28
2.3. Zarys metody modelowania tolerancyjnego	29
2.3.1. Tolerancyjne uśrednianie funkcjonałów	29
2.3.2. Rozszerzona zasada stacjonarności działania	30
2.3.3. Modelowanie tolerancyjne równań Eulera-Lagrange’a	31
2.4. Zarys metody modelowania asymptotycznego	33
2.4.1. Asymptotyczne uśrednianie funkcjonałów	33
2.4.2. Modelowanie asymptotyczne równań Eulera-Lagrange’a	35
3. Przewodnictwo ciepła w laminatach	37
3.1. Laminaty o poprzecznej gradacji własności	37
3.2. Równania uśrednione	40
3.2.1. Model tolerancyjny	40
3.2.2. Model asymptotyczny	42
3.3. Wybrane zagadnienia	45
3.3.1. Stacjonarny problem przewodnictwa ciepła w kierunku prostopadłym do warstw	45
3.3.1.1. Wprowadzenie	45
3.3.1.2. Rozwiązanie tolerancyjne	45
3.3.1.3. Przypadek laminatu o równomiernym rozłożeniu warstw – wyniki obliczeń	47
3.3.1.4. Przypadek laminatu o nierównomiernym rozłożeniu warstw – wyniki obliczeń	50

3.3.1.5.	<i>Przypadek laminatu o równomiernym rozłożeniu warstw – porównanie wyników obliczeń wg modelu tolerancyjnego z wynikami wg teorii wyższego rzędu</i>	53
3.3.2.	Kontrolowane przewodnictwo ciepła – kierunek prostopadły do warstw	58
3.3.2.1.	<i>Wprowadzenie</i>	58
3.3.2.2.	<i>Analiza zagadnienia w modelu tolerancyjnym – zastosowanie metody różnic skończonych</i>	59
3.3.2.3.	<i>Analiza zagadnienia w teorii wyższego rzędu</i>	61
3.3.2.4.	<i>Porównanie wyników obliczeń</i>	62
3.3.3.	Kontrolowane przewodnictwo ciepła – kierunek równoległy do warstw	64
3.3.3.1.	<i>Wprowadzenie</i>	64
3.3.3.2.	<i>Rozprężnięcie układu równań – zastępcza niewiadoma</i>	65
3.3.3.3.	<i>Rozprężnięcie układu równań – modelowanie źródeł ciepła</i>	67
3.3.3.4.	<i>Wyniki obliczeń</i>	72
3.3.4.	Stacjonarny problem dwukierunkowego przewodnictwa ciepła	75
3.3.4.1.	<i>Równania modelu tolerancyjnego</i>	75
3.3.4.2.	<i>Wyniki obliczeń</i>	76
4.	Elastodynamika laminatów	80
4.1.	Wprowadzenie	80
4.2.	Równania uśrednione	81
4.2.1.	Model tolerancyjny	81
4.2.2.	Model asymptotyczny	83
4.3.	Wybrane zagadnienia – drgania laminatu	85
4.3.1.	Wprowadzenie	85
4.3.2.	Przypadek szczególny – drgania poprzeczne	87
4.3.3.	Wyniki obliczeń	91
4.3.4.	Podsumowanie	93
5.	Zagadnienia termosprężystości w laminatach	94
5.1.	Wprowadzenie	94
5.2.	Równania uśrednione	95
5.2.1.	Model tolerancyjny	95
5.2.2.	Model asymptotyczny	98
6.	Płyty cienkie tolerancyjnie-periodyczne	101
6.1.	Wprowadzenie	101
6.2.	Równania uśrednione	103

6.2.1.	Model tolerancyjny	103
6.2.2.	Model asymptotyczny	106
6.3.	Wybrane zagadnienia – drgania swobodne pasma płytowego	108
6.3.1.	Wprowadzenie	108
6.3.2.	Równania uśrednione	109
6.3.3.	Przykład – zastosowanie metody Ritza	110
6.3.4.	Wyniki obliczeń	112
7.	Powłoki cienkie tolerancyjnie-periodyczne	125
7.1.	Wprowadzenie	125
7.2.	Równania uśrednione	130
7.2.1.	Model tolerancyjny	130
7.2.2.	Model asymptotyczny	134
	Podsumowanie	137
	Indeks	139
	Literatura	141
	Streszczenie	159
	Summary	160

1. Wstęp

1.1. Wprowadzenie do tematyki książki

Obiektami rozważań w niniejszym opracowaniu są *ciała mikroniejednorodne*, takie jak: *laminaty*, *plyty*, *powłoki*, które są zbudowane z bardzo dużej liczby regularnie rozmieszczonych, oddzielnych elementów (np. warstw, żeber), idealnie ze sobą (lub z matrycą) połączonych. Rozpatrywane ciała można podzielić na komórki, przy czym zakładamy (odmiennie niż w przypadku ciał periodycznych), że sąsiednie komórki są prawie takie same, natomiast komórki od siebie oddalone – mogą się bardzo różnić. Budowa taka jest często nazywana *lokalną mikrostrukturą*, co oznacza, że wymiar charakterystyczny komórki jest mały w porównaniu z wymiarem charakterystycznym całego obiektu.

Rozważania będą dotyczyły kompozytów i struktur, które są zarówno mikro- jak i makroniejednorodne. Zakładamy, że obiekty te mają *przestrzennie wolnozmenną mikrostrukturę*. Przykłady takich ciał pokazane są na rys. 1.1 oraz 1.2. Elementy o takiej mikrostrukturze stosowane są wtedy, gdy wymagany jest wolnozmenny rozkład lokalnych makroskopowych charakterystyk materiałowych, por. książka pod redakcją Cz. Woźniaka, Michalaka i Jędrysiaka (2008). Tego rodzaju rozkład charakterystyk materiałowych może być uzyskany na poziomie mikro w postaci wolnozmieniającej się mikrostruktury w sąsiednich komórkach. Mikrostruktura ta ma ogromne znaczenie w projektowaniu materiałów o *funkcyjnej gradacji własności* (ang. *functionally graded materials*, por. Suresh i Mortensen (1998)). W większości takich materiałów makroskopowe własności zmieniają się w sposób łagodny („wolny”) i gładki od własności jednej jednorodnej części ciała do własności innej jednorodnej części, przy dużych różnicach między własnościami tych fragmentów. Ponieważ przejście to jest realizowane na poziomie mikro, potrzebna jest informacja o lokalnych makroskopowych charakterystykach ośrodka mikroniejednorodnego.

Rozpatrywane w książce laminaty, płyty i powłoki charakteryzują się zatem *tolerancyjnie-periodyczną budową na poziomie mikro*, natomiast w skali makro traktujemy je jak wykonane z pewnego materiału zastępczego, tzn. z pewnego rodzaju *materiałów o funkcyjnej gradacji własności*. Przykłady takich kompozytów pokazano na rys. 1.1-1.2. Wymienione wyżej obiekty można podzielić na:

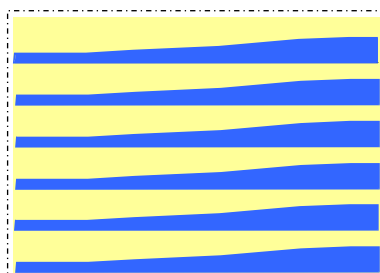
-

Rozważania zostały ograniczone do zagadnień termomechanicznych *laminatów, płyt i powłok o poprzecznej gradacji własności*. Zakładamy, że wszystkie rozpatrywane procesy termiczne i mechaniczne będą opisane znanymi liniowymi równaniami termomechaniki. Przyjmujemy zatem znane analityczne i fizyczne podstawy analizy ciał mikroniejednorodnych w postaci jak dla ciał niejednorodnych bez mikrostruktury, tj.:

- liniową teorię przewodnictwa ciepła Fouriera,
- liniową teorię sprężystości;

a w przypadku mikroniejednorodnych płyt i powłok:

- teorię płyt Kirchhoffa,
- teorię powłok Kirchhoffa-Love'a.



Rys. 1.2. Przykład mikroniejednorodnego kompozytu o funkcyjnej podłużnej gradacji własności, por. Cz. Woźniak, Michałak, Jędrysiak (2008)

Za najważniejszą różnicę pomiędzy makro- i mikromechaniką uznaje się charakterystyki materiałowe ciał mikroniejednorodnych, które są silnie nieciągłymi funkcjami na płaszczyznach kontaktu sąsiednich składników. Liczba płaszczyzn kontaktu jest więc bardzo duża. W związku z tym dla ciał mikroniejednorodnych współczynniki funkcyjne równań różniczkowych cząstkowych, tak przewodnictwa ciepła, jak również teorii sprężystości, są silnie oscylujące i nieciągłe. Z tego powodu podstawowe równania termomechaniki takich ciał nie stanowią dobrego matematycznego narzędzia do opisu szczególnych przypadków i proponowane są różne procedury matematyczne, które mają zastąpić te „niewygodne” równania równaniami o regularnych współczynnikach. Mają one umożliwić prostsze formułowanie problemów brzegowo-początkowych. Ponadto, rozwiązania tych równań powinny uwzględniać wpływ niektórych cech ich mikrostruktury. Otrzymane na takiej drodze nowe równania reprezentują tzw. *model uśredniony* ciała mikroniejednorodnego. W literaturze można znaleźć wiele różnych procedur, które prowadzą od mikro- do makromechaniki, czyli do różnych modeli uśrednionych ciał mikroniejednorodnych.

1.2. Przegląd wybranych metod modelowania

Stosowane w wielu konstrukcjach elementy kompozytowe charakteryzują się zwykle budową mikroperiodyczną. W pewnych zastosowaniach, w których można je uważać za makrojednorodne, ich makroskopowe (uśrednione) własności są stałe. Modele makroskopowe tego typu kompozytów są opisane równaniami różniczkowymi cząstkowymi o stałych współczynnikach. W zastosowaniach coraz większą rolę pełnią jednak kompozyty, których uśrednione własności są określone gładkimi funkcjami współrzędnych przestrzennych. Kompozyty te stanowią zatem szczególny przypadek materiałów o funkcyjnej gradacji własności (por. Suresh i Mortensen (1998)). Celem modelowania takich kompozytów jest, przy obecnym stanie badań, opisanie ich zachowania równaniami różniczkowymi cząstkowymi o wolnozmiennych współczynnikach.

Obiektem rozważań niniejszego opracowania są laminaty, płyty i powłoki o funkcyjnej poprzecznej gradacji własności. Większość technik ich modelowania stanowi rozwinięcie takich technik stosowanych dla struktur periodycznych. W związku z tym, w tym podrozdziale zostanie przedstawiony pewien, subiektywny z punktu widzenia autora, przegląd metod wykorzystywanych w termomechanice kompozytów i struktur o budowie mikroniejednorodnej, zarówno periodycznej, jak i nieperiodycznej.

Omówienie technik modelowania, stosowanych w analizie zagadnień termomechaniki dotyczących kompozytów i struktur zarówno periodycznych, jak również o funkcyjnej gradacji własności można znaleźć w książkach autorów: Bensoussan, Lions i Papanicolau (1978), Sanchez-Palencia (1980), Bakhvalov i Panasenko (1984), Jikov, Kozlov i Oleinik (1994), Hornung (1997), Suresh i Mortensen (1998), Lewiński i Telega (2000), Cz. Woźniak i Wierzbicki (2000), czy pod redakcją Cz. Woźniaka, Michalaka i Jędrysiaka (2008) lub Cz. Woźniaka (2010).

Kryteria klasyfikacji metod modelowania, w tym także matematycznego, stosowanych dla materiałów i struktur mikroniejednorodnych mogą być różne. Na przykład ze względu na możliwość badania pewnych efektów związanych z mikroniejednorodnością można wyróżnić – *metody, których równania uwzględniają wpływ wielkości mikroniejednorodności* oraz *metody opisane równaniami bez tego efektu*; natomiast ze względu na możliwość analizy różnych

ciał mikroniejednorodnych można wskazać – *metody ogólne* i *metody specjalne*. *Metody ogólne* mają szersze zastosowania w badaniu ciał mikroniejednorodnych, bez określania rodzaju mikroniejednorodności. Natomiast *metody specjalne* dotyczą badania pewnych specjalnych rodzajów mikroniejednorodności bądź struktur mikroniejednorodnych i stosowane są tylko dla szczególnych postaci współczynników równań różniczkowych cząstkowych, które je opisują.

Do specjalnych technik modelowania należy tzw. *teoria sztywności efektywnych*, por. Hermann i Achenbach (1967). Wykorzystywana jest ona głównie w analizie zagadnień propagacji fal w periodycznych laminatach, periodycznie i kierunkowo zbrojonych kompozytach. Pozwala ona uwzględnić zjawisko dyspersji związane z mikrostrukturą tych kompozytów. Zastosowania tego podejścia można znaleźć w pracach autorów: Achenbach, Delph, Hermann, Kaul, Sun (por. *Literatura*).

Inną technikę modelowania proponuje tzw. *teoria fal Floquet'a-Bloch'a*, pozwalająca analizować zagadnienia propagacji fal o wyższych częstościach, związanych z periodyczną strukturą kompozytu, por. Stoker (1950), E.H. Lee (1972). Jej zastosowanie jest skomplikowane z obliczeniowego punktu widzenia. Stąd teoria ta została zastosowana jedynie do badania zjawisk dyspersyjnych stosunkowo prostych zagadnień dla jednowymiarowych kompozytów periodycznych, np. laminatów. Wyniki takich rozważań pokazali w swoich pracach np.: Christensen, W. Kohn, Krumhansl, E.H. Lee (por. *Literatura*).

Efekty dyspersyjne w kompozytach włóknistych, np. dodatkowe, „wyższe” prędkości fal bądź częstości, analizowano w pracach teoretycznych i eksperymentalnych Taucherta i Guzelsu (1972), Lorda i Hay'a (1972), Bedforda, Sutherlanda i Lingle'a (1972), Tolfa (1983). Niestety, ze względu na dość skomplikowaną budowę tych kompozytów w porównaniach nie były wykorzystane dokładne relacje dyspersyjne. Jednakże takie porównanie mogło być wykonane dla laminatów, np. w pracy Robinsona i Leppelmeiera (1974).

We wszystkich wymienionych wyżej metodach specjalnych możliwe jest opisywanie *efektów dyspersyjnych*, związanych z niejednorodnością rozpatrywanych obiektów.

Należy także tu uwzględnić makromodelowanie układów dyskretnych, złożonych z wielu drobnych elementów. Do tej grupy należą np. periodyczne struktury siatkowe. Ich specyficzny charakter prowadzi do konieczności formułowania różnych specyficznych modeli opisujących wybrane problemy dla tych

układów, w tym uśrednionych modeli ciągłych. Ciągłe modele gęstych i regularnych struktur siatkowych były proponowane w serii prac Baczyńskiego, Barańskiego, Klemma, Koniecznego, Lewińskiego, Pęty, Pustelnika, Wilmańskiego, Cz. Woźniaka, S. Zielińskiego, Żukowskiego (por. *Literatura*). Niektóre wyniki z tych prac zostały podsumowane w monografii Cz. Woźniaka (1970).

Wymienimy także podejścia kombinowane, stosowane w analizie dwuwymiarowych periodycznych struktur komórkowych, które wykorzystują w istotny sposób cechę periodyczności i metodę elementów skończonych dla komórki podstawowej. Proponowało je wielu autorów, np.: dla rusztów belkowych – Langley, Bardell i Ruino (1997); dla siatek o sześciokątnych komórkach – Ruzzene, Scarpa i Soranna (2003). Zastosowania różnych modeli ciał siatkowych lub komórkowych prezentowali w swoich pracach np.: Horvay (1952), Noor i Nemeth (1980), Gibson, Ashby, Schajer i Robertson (1982). Zagadnienia dynamiczne struktur dyskretnych były także analizowane w ramach znanych technik uśredniania proponowanych dla ciągłych, mikroniejednorodnych kompozytów i struktur. Należy tu wymienić metody o charakterze ogólnym takie, jak metody asymptotyczne teorii homogenizacji, por. Bakhvalov i Panasenko (1984), Jikov, Kozlov i Oleinik (1994). Równania uśrednione wyżej wymienionych modeli pomijają niestety wpływ wielkości mikrostruktury na ogólne zachowanie rozpatrywanego układu.

Wśród ogólnych metod modelowania należy wymienić *homogenizację struktur periodycznych i lokalnie-periodycznych, homogenizację wyższego rzędu struktur periodycznych, technikę tolerancyjnego uśredniania*.

Najbardziej znane są sposoby uśredniania, w których stosuje się homogenizację równań różniczkowych o silnie oscylujących, periodycznych, funkcyjnych współczynnikach. W tym podejściu analizuje się trudne z matematycznego punktu widzenia przejście graniczne z wymiarem komórki periodyczności do zera. Ta interesująca metoda ma szereg wad, z których najważniejszą z punktu widzenia zastosowań jest zacieranie pewnych ważnych cech fizycznych rozważanych struktur. W szczególności uwaga ta dotyczy eliminacji zjawiska dyspersji, bardzo ważnego w poprawnym opisie dynamiki struktur mikroperiodycznych. Wady te są spowodowane faktem, że w otrzymanych w ten sposób uśrednionych równaniach pominięty zostaje wpływ wielkości mikrostruktury na makrodynamikę opisywanego ciała periodycznego. Literatura omawiająca zastoso-

wania tego podejścia jest bardzo obszerna. Obejmuje m.in. monografie takich autorów, jak: Bensoussan, Lions i Papanicolau (1978), Sanchez-Palencia (1980), Bakhvalov i Panasenko (1984), Jikov, Kozlov i Oleinik (1994), Hornung (1997), Lewiński i Telega (2000). Modele matematyczne różnych struktur mikroperiodycznych, w których wykorzystano homogenizację, przedstawili w swoich pracach autorzy, np.: dla kompozytów o mikrobudowie heksagonalnej – Abd El-Sayed, Burgess, Jones; dla kompozytów periodycznie „pofałdowanych” – Kalamkarov, Kudryavtsev, Parton; dla przewodnictwa ciepła i/lub zjawisk dyfuzji – Gałka, Telega i Wojnar (1994), Furmański (1997); dla płyt periodycznych – Duvaut i Metellus (1976), Caillerie (1984), Kohn i Vogelius (1984), Lewiński (1991, 1992) oraz inni – Artola, Ciarlet, Destuynder, Kalamkarov, Telega; dla płyt pofałdowanych – Aganovic, Jurak, Marusic-Paloka, Tutek; dla periodycznych powłok – Lutoborski (1985); dla zagadnień termosprężystości – Wojnar (1990); dla periodycznych struktur siatkowych – Cioranescu i Saint Paulin (1979, 1999).

Innym ogólnym podejściem, które wykorzystuje się w modelowaniu zagadnień termomechanicznych kompozytów i struktur periodycznych, jest *homogenizacja wyższego rzędu*. W ramach tej techniki formułowane są matematyczne recepty dla przybliżeń drugiego i wyższych rzędów. Jednakże ze względu na trudności natury obliczeniowej rozpatrywane są przy jej użyciu raczej fizycznie proste przykłady na bardzo skomplikowanej matematycznej drodze, por. Fish i Wen Chen (2001). Należy podkreślić, że w ramach homogenizacji wyższego rzędu wydaje się być możliwy opis zjawiska dyspersji.

Pewną odmianą homogenizacji jest homogenizacja realizowana przy wykorzystaniu pojęcia *parametrów mikrolokalnych*, por. Matysiak i Cz. Woźniak (1988). W tym podejściu niezwykle użyteczne w zastosowaniach równania modelowe zawierają wprowadzone tu po raz pierwszy pewne dodatkowe niewiadome, zwane *parametrami mikrolokalnymi*. Ich wprowadzenie stanowi propozycję całkowicie nowego opisu zjawisk cieplnych i mechanicznych. Tego rodzaju modele zaproponowano dla różnych problemów termomechanicznych w wielu pracach, np. Cz. Woźniaka (1986, 1987, 1989), Matysiaka i Cz. Woźniaka (1987, 1988), Kaczyńskiego i Matysiaka (1988), Matysiaka i Nagórkę (1989). Wśród zastosowań można wymienić takie, jak: problemy dynamiczne kompozytów warstwowych analizowane przez Bielskiego, Matysiaka, Nagórkę; procesy termiczne i dyfuzyjne w laminatach – Ivanyk, Kaczyński, Kulchytsky-Zhyhailo,

Machyshyn, Matysiak, Mieszkowski, Nagórko, Pauk, Ukhanska, Wągrowa, Cz. Woźniak, Yevtushenko; problemy pękania w kompozytach warstwowych – Kaczyński, Kulchytsky-Zhyhailo, Matysiak; zagadnienia sprężystości w laminatach – Kulchytsky-Zhyhailo, Perkowski, Matysiak, Wągrowa; modelowanie kompozytów piezoelektrycznych – Matysiak, Pauk, Yevtushenko; modelowanie płyt wielowarstwowych – Matysiak, Nagórko. Niektóre prace z tej tematyki zostały wymienione w spisie literatury, a także można je znaleźć w książkach pod redakcją Cz. Woźniaka, Michałaka i Jędrysiaka (2008) lub Cz. Woźniaka (2010). Przedstawione wyżej przykłady dotyczą modelowania kompozytów o jednokierunkowej periodycie, jak laminaty, wielowarstwowe płyty. Homogenizacja przez parametry mikrolokalne nie jest jednak typową metodą szczególną; pewne rozszerzenie na struktury periodyczne nie tylko w jednym kierunku zaproponowano np. w książce pod redakcją Cz. Woźniaka (2010).

Z wyżej wymienionych ogólnych metod modelowania równania uśrednione homogenizacji i homogenizacji przez parametry mikrolokalne pomijają wpływ wielkości mikrostruktury. Efekt ten jest uwzględniany w homogenizacji wyższego rzędu.

Struktury lokalnie-periodyczne (tu nazywane *strukturami tolerancyjnie-periodycznymi*) mogą być często traktowane jak wykonane z materiałów o funkcyjnej gradacji własności (por. Suresh i Mortensen (1998)). W tego rodzaju ciałach nie można wskazać elementu reprezentatywnego (tj. komórki). Pomimo tej niedogodności, własności makroskopowe (uśrednione) tych ciał mogą być określone przy wykorzystaniu technik uśredniania, zdefiniowanych w ramach wyidealizowanej geometrii. Tego rodzaju idealizacje są zwykle podobne do stosowanych dla kompozytów jednorodnych makroskopowo.

Wśród tych technik należy wyróżnić techniki stanowiące uogólnienie procedury homogenizacji, por. Jikov, Kozlov i Oleinik (1994), w wyniku której otrzymuje się tzw. *modele homogenizacyjne struktur lokalnie-periodycznych*. Modele takie wykorzystywano w badaniu różnych zagadnień termomechanicznych w materiałach o funkcyjnej gradacji własności, np. Miller i Lanutti (1993), Itoh, Takahashi i Takano (1996), Schmauder i Weber (2001). Podstawowe podejścia stosowane w modelowaniu tego rodzaju kompozytów i struktur omówili m.in. Reiter, Dworak i Tvergaard (1997), Suresh i Mortensen (1998), gdzie można znaleźć obszerny spis literatury. Wśród innych metod używanych w analizie różnych zagadnień termosprężystości kompozytów i struktur o funkcyjnej

gradacji własności można wymienić: techniki oparte na metodzie Mori-Tanaki – np. Hirano, Teraki i Hamada (1990); tzw. metody konsystentne, stosowane w układach wieloskładnikowych – np. Benveniste, Dworak i Chen (1991); podejścia wykorzystujące zasady modelowania mieszanin – np. Fukui, Takashima i Ponton (1994), Y.-D. Lee i Erdogan (1994/1995), Markworth i Saunders (1995); metoda elementów brzegowych – np. Goldberg i Hopkins (1995); zastosowanie wielomianów w modelowaniu laminatów – np. Kantor, Smetankina i Shupikov (2001), lub funkcji Greena – Kim i Noda (2001, 2002); metody bezsiatkowe – np. J. Śladek, V. Śladek i Zhang (2003); metody korzystające z transformacji Laplace’a – np. Ootao i Tanigawa (2004, 2006); wykorzystanie metody kolokacji – np. Ferreira, Batra, Roque, Qian i Jorge (2006), Roque, Ferreira i Jorge (2007); metoda elementów skończonych – np. Santos, C.M. Mota Soares, C.A. Mota Soares i Reddy (2008), Sadowski, Ataya i Nakonieczny (2009). Pewną alternatywną metodą modelowania materiałów o funkcyjnej gradacji własności, mających mikrostrukturę, jest tzw. teoria wyższego rzędu, która była omówiona w serii prac Aboudi’ego, Arnolda i Pindery (por. *Literatura*). Podsumowanie zastosowań tego podejścia można znaleźć w pracy Aboudi’ego, Pindery i Arnolda (1999), a jego przeformułowanie zaproponowali Bansal i Pindera (2003). Metoda ta została wykorzystana w niniejszym opracowaniu w niektórych przykładach z przewodnictwa ciepła.

W niniejszym opracowaniu wykorzystano nową metodę, zaproponowaną przez profesora Cz. Woźniaka i rozwijaną przez wielu autorów, nazywaną zwykle *techniką tolerancyjnego uśredniania* lub *tolerancyjnym modelowaniem*. Można ją stosować w modelowaniu zarówno ciągłych, jak i dyskretnych mikro-niejednorodnych kompozytów i struktur. W tej technice wykorzystuje się pojęcia tolerancyjnego uśredniania funkcji i funkcjonałów kompozytowych oraz tzw. mikro-makro dekompozycję, które są omówione w *rozdziale 2* tego opracowania. W podejściu tym wykorzystuje się koncepcję *tolerancji*, ściśle związanej z dokładnością prowadzonych obliczeń. W zagadnieniach niestacjonarnych ciał mikroniejednorodnych w ramach tej techniki otrzymuje się równania różniczkowe, w których podstawowymi niewiadomymi są uśrednione pola termomechaniczne (np. uśredniona temperatura, uśrednione przemieszczenia) oraz dodatkowe niewiadome, zwane *amplitudami fluktuacji*. Te podstawowe niewiadome pozwalają uwzględnić w trakcie analizy wpływ wielkości mikrostruktury na ogólne zachowanie kompozytu, por. książka Cz. Woźniaka i Wierzbickiego

(2000), a także monografie pod redakcją Cz. Woźniaka, Michalaka i Jędrysiaka (2008) oraz Cz. Woźniaka (2010). Warto podkreślić, że stosując tu pewną formalną procedurę, zacierającą wpływ mikrostruktury, można dokonać przejścia od modelu tolerancyjnego do modelu często nazywanego modelem asymptotycznym. Otrzymane na tej drodze równania mogą różnić się od równań modelu wyprowadzonego w ramach homogenizacji asymptotycznej jedynie postaciami tzw. modułów efektywnych. Z tego powodu równania homogenizacji asymptotycznej są uznawane najczęściej za szczególny przypadek równań tolerancyjnych. Modele tolerancyjne dotyczące różnych zagadnień termomechanicznych różnych kompozytów lub struktur periodycznych były przedstawione w serii prac zamieszczonych w *Literaturze*. Można tu wymienić takie zagadnienia termomechaniki, jak: przewodnictwo ciepła w kompozytach mikroperiodycznych – np. Cz. Woźniak, Baczyński i M. Woźniak (1996) oraz inni – Baczyński, Ignaczak, Łaciński, Nagórko, Piwowarski, Siedlecka, Wierzbicki, Cz. Woźniak, M. Woźniak, J. Zieliński; zagadnienia termosprężystości – np. Cz. Woźniak i M. Woźniak (1995a), a także Wierzbicki, Cz. Woźniak, M. Woźniak (1997a), Baczyński (2003); problemy elastodynamiki – np. Dell'Isola, Rosa i Cz. Woźniak (1997, 1998) oraz inni – Jędrysiak, Juszczak, Łacińska, Mielczarek, Nagórko, Szymczyk, Wągrowa, Wierzbicki, Cz. Woźniak, M. Woźniak. Modelowanie tolerancyjne zastosowano także do analizy innych szczególnych problemów dotyczących kompozytów periodycznych, takich jak: zagadnienia mikropęknięć – np. praca Cz. Woźniaka i M. Woźniak (1994); stateczność ciał mikroperiodycznych – np. Wierzbicki, Cz. Woźniak i M. Woźniak (1997b); zagadnienia kontaktu ciał o periodycznie pofalowanych brzegach – np. Pauk (1997), Pauk i Cz. Woźniak (1999); przewodnictwo ciepła w kompozycie wieloperiodycznym – Cz. Woźniak (2002); propagacja fal w wieloperiodycznym kompozycie zbrojonym włóknami – praca Jędrysiaka i Cz. Woźniaka (2006). Modele tolerancyjne zaproponowano także dla różnych struktur periodycznych. Modele periodycznych belek dla założeń teorii Eulera-Bernoulli'ego, opisujące problemy dynamiczne oraz stateczności, otrzymano pierwszy raz w pracy Mazur-Śniady (1993), a następnie rozwijano w pracach – Mazur-Śniady, Rystweja, Śniadego, Zielichowskiego-Habera. Podobne zagadnienia dla periodycznych płyt średniej grubości przy założeniach teorii Hencky'ego-Bolle'a były rozpatrywane w pracy Barona i Cz. Woźniaka (1995), następnie przez Barona, Jędrysiaka, a pewne podsumowanie przedstawił Baron (2006b).

Model tolerancyjny cienkich płyt periodycznych, w ramach założeń teorii Kirchhoffa, zaproponowali Jędrzyśiak i Cz. Woźniak (1995). Model ten był wykorzystany w analizie problemów dynamicznych i stateczności takich płyt w kolejnych pracach Barona, Jędrzyśiaka, Michalaka, a częściowego podsumowania dokonał Jędrzyśiak (2001b). Problemy drgań cienkich płyt periodycznie uźebrowanych analizowali Nagórko i Cz. Woźniak (2002, 2003), Nagórko (2010). Natomiast drgania jednorodnych płyt średniej grubości w ramach teorii Hencky’ego-Bolle’a badali Jędrzyśiak i Paś (2005, 2006) oraz Paś (2006). Modele tolerancyjne, opisujące problemy dynamiczne oraz stateczności periodycznych płyt pofałdowanych, zostały zaproponowane i wykorzystane w pracach Michalaka – np. Michalak, Cz. Woźniak i M. Woźniak (1996), a ich zastosowania podsumowano w pracy Michalaka (2001b). Modelowanie tolerancyjne cienkich powłok periodycznych przedstawiono najpierw w pracach Cz. Woźniaka (1999) i Tomczyk (1999), a następnie zastosowania pokazano w pracach Tomczyk (por. *Literatura*). Ciągłe modele tolerancyjne periodycznych struktur siatkowych lub komórkowych zaproponowano w pracy Cieleckiej (1995), a ich wykorzystanie przedstawiono w pracach Cieleckiej, Jędrzyśiaka, Wierzbickiego, Cz. Woźniaka, M. Woźniak.

Przy okazji informacji o zastosowaniach modelowania tolerancyjnego w układach siatkowych i komórkowych warto wspomnieć o pewnym odmiennym podejściu związanym z tą techniką i uwzględniającym wpływ wielkości mikrostruktury, zaproponowanym w pracy Rychlewskiej, Szymczyk i Cz. Woźniaka (1999). Przedstawiony tam model uśredniony jest oparty na podziale simplicjalnym rozpatrywanej dyskretniej lub ciągłej struktury periodycznej. Jego zastosowania pokazano także w pracach: Rychlewskiej, Szymczyk, Cz. Woźniaka, por. *Literatura*.

W ostatnich latach modelowanie tolerancyjne zaadaptowano i rozszerzono na kompozyty i struktury o nieperiodycznej mikroniejednorodności, np. wykonane z materiałów o funkcyjnej gradacji własności. Równania różniczkowe opisujące zagadnienia termomechaniczne tego rodzaju ciał są równaniami o silnie oscylujących, nieciągłych, tolerancyjnie-periodycznych współczynnikach. Technika tolerancyjnego uśredniania pozwala zastąpić te równania równaniami uśrednionymi o wolnozmiennych współczynnikach. Pierwszy raz propozycję tolerancyjnej procedury modelowania dla tego rodzaju ciał pokazano w monografii Cz. Woźniaka i Wierzbickiego (2000). Modele tolerancyjne różnych kom-

pozytów i struktur o funkcyjnej gradacji własności przedstawiono w kolejnych pracach. Zagadnienia przewodnictwa ciepła w kompozytach o tzw. podłużnej gradacji własności były analizowane przez – Michalaka i M. Woźniak (2006), Michalaka, Cz. Woźniaka i M. Woźniak (2007), Michalaka i Ostrowskiego (2007), Ostrowskiego (2009a, 2009b); natomiast w laminatach o tzw. poprzecznej gradacji własności pokazano w pracach – Jędrysiaka i Radzikowskiej (2007, 2008, 2010a, 2010b), Radzikowskiej i Jędrysiaka (2007, 2009), Radzikowskiej (2009/2010). Quasi-liniowe przewodnictwo ciepła w laminatach rozpatrywali Siedlecka, Wierzbicki i Cz. Woźniak (2010). Problemy elastodynamiki w ciałach o funkcyjnej gradacji własności badano w pracach: Jędrysiaka, Wierzbickiego i Cz. Woźniaka (2006), Rychlewskiej, Cz. Woźniaka i M. Woźniak (2006), Rychlewskiej (2006a, 2006b), Rychlewskiej i Cz. Woźniaka (2006a, 2006b, 2010), Szymczyk i Cz. Woźniaka (2006b). W serii prac zaproponowano i zastosowano modele tolerancyjne dla różnych struktur wykonanych z materiałów o funkcyjnej gradacji własności. Pierwszy raz problem drgań cienkich płyt tolerancyjnie-periodycznych (o poprzecznej gradacji własności) przedstawił Jędrysiak (2001b). Natomiast zagadnienia dynamiczne i stateczności rozpatrywano w pracach Jędrysiaka (2010), Jędrysiaka i Michalaka (2010). Płyty o podłużnej gradacji własności były modelowane przez Michalaka (2004, 2010), Wirowskiego (2007, 2008, 2009, 2010a, 2010b), Jędrysiaka i Michalaka (2010). Modelowanie płyt warstwowych o funkcyjnej gradacji własności przedstawili Jędrysiak, Rychlewska i Cz. Woźniak (2005), a tego rodzaju powłok – Cz. Woźniak, Rychlewska i Wierzbicki (2005). Natomiast cienkie powłoki małowyniosłe o funkcyjnej gradacji własności rozpatrywali Jędrysiak i Cz. Woźniak (2009, 2010), a powłoki szkieletowe o podobnej budowie – Michalak i Cz. Woźniak (2009, 2010).

Wyniki otrzymane przy zastosowaniu modelowania tolerancyjnego zostały podsumowane w książce Cz. Woźniaka i Wierzbickiego (2000), a także w monografiach pod redakcją Cz. Woźniaka, Michalaka i Jędrysiaka (2008) oraz Cz. Woźniaka (2010).

1.3. Cel i zakres opracowania

Celem niniejszego opracowania jest przedstawienie, omówienie i zastosowanie techniki tolerancyjnego uśredniania do modelowania zagadnień termomecha-

nicznych *ciał tolerancyjnie-periodycznie mikroniejednorodnych*, których własności w skali makro mają *poprzeczną gradację*, por. rys. 1.1 oraz 1.2.

Część prezentowanych w tym opracowaniu rezultatów została przedstawiona m.in. w pracach: Jędrysiaka, Wierzbickiego i Cz. Woźniaka (2006), Jędrysiaka i Radzikowskiej (2007, 2008, 2010a, 2010b), Radzikowskiej i Jędrysiaka (2007, 2009), Jędrysiaka i Cz. Woźniaka (2009, 2010), Radzikowskiej (2009/2010), Jędrysiaka (2010), Jędrysiaka i Michalaka (2010). Natomiast część wyników była uzyskana i zaprezentowana na konferencjach przez samego autora.

Zawartość książki jest podzielona na siedem rozdziałów. Opracowanie zakończone jest *indeksem pojęć*, *spisem literatury* oraz *streszczeniami* w języku polskim i angielskim. We *Wstępie* omówiono pojęcia podstawowe, dokonano pewnego subiektywnego przeglądu literatury oraz wskazano cel i zakres opracowania. W *rozdziale 2* przedstawione są podstawy *tolerancyjnego modelowania* oraz *modelowania asymptotycznego*. Skorzystano przy tym z omówienia tych metod w książkach pod redakcją Cz. Woźniaka, Michalaka i Jędrysiaka (2008) oraz Cz. Woźniaka (2010). Omówiono tu podstawowe pojęcia obu sposobów modelowania, przedstawiono podstawowe założenia oraz, w pewnym skrócie, zarys procedur modelowania w obu podejściach. Kolejne rozdziały pokazują zastosowania obu technik modelowania w różnych zagadnieniach termomechanicznych laminatów, płyt i powłok o tolerancyjnie-periodycznej mikrostrukturze, a zatem o funkcyjnej gradacji własności w skali makro. W *rozdziale 3* przedstawione jest przewodnictwo ciepła w laminatach. Wyprowadzono, korzystając z ogólnej procedury modelowania, równania różniczkowe *modelu tolerancyjnego* i *asymptotycznego*, opisujące problem przewodnictwa ciepła w takich laminatach. Następnie pokazano zastosowania tych modeli w przypadkach szczególnych, takich jak: stacjonarne przewodnictwo ciepła prostopadle do warstw w laminatach o równomiernym lub nierównomiernym rozłożeniu warstw, niestacjonarne przewodnictwo ciepła w kierunku prostopadłym do warstw w laminatach o równomiernym rozłożeniu warstw, niestacjonarne przewodnictwo ciepła w kierunku równoległym do warstw, dwukierunkowe (płaskie) stacjonarne przewodnictwo ciepła. Ponadto dla przypadków przewodnictwa w kierunku prostopadłym do warstw porównano otrzymane wyniki z wynikami uzyskanymi w ramach teorii wyższego rzędu (por. Aboudi, Pindera i Arnold (1999)). *Rozdział 4* dotyczy modelowania tolerancyjnego i asymptotycznego.

tycznego zagadnień elastodynamiki laminatów. Otrzymano tu uśrednione równania modeli – tolerancyjnego i asymptotycznego, a następnie zastosowano je w analizie szczególnego zagadnienia drgań poprzecznych laminatu o nierównomiernym rozłożeniu warstw, spoczywającego na nieodkształcalnej bazie. W przykładzie tym pokazano, przy jakich dodatkowych założeniach oraz dla jak przyjętych rozkładów własności (dostosowanych do obciążeń jednej z krawędzi laminatu) podstawowe niewiadome obu modeli nie zależą od współrzędnej parametryzującej oś prostopadłą do warstw. W *rozdziale 5* wyprowadzono natomiast równania modelu tolerancyjnego i asymptotycznego, opisujące problemy termosprężystości w rozpatrywanych laminatach.

Kolejne dwa rozdziały dotyczą modelowania zagadnień dynamicznych struktur konstrukcyjnych o funkcyjnej gradacji własności. W *rozdziale 6* omówiono wyprowadzenie równań płyt cienkich tolerancyjnie-periodycznych według procedury tolerancyjnej i asymptotycznej. Następnie otrzymane równania wykorzystano w analizie drgań swobodnych pasma płytowego, stosując metodę Ritza do znalezienia formuł określających częstości tych drgań. Analizę przeprowadzono dla różnych warunków podparcia pasma płytowego oraz różnych funkcji, opisujących rozkład własności. *Rozdział 7* zawiera wyprowadzenie równań różniczkowych cienkich powłok tolerancyjnie-periodycznych w ramach modelowania tolerancyjnego i asymptotycznego.

Książkę kończą – indeks najważniejszych pojęć, spis literatury oraz streszczenia w języku polskim i angielskim.

Przykłady oraz wyniki przedstawione w niniejszym opracowaniu pozwalają zauważyć, że modelowanie tolerancyjne może być skutecznie stosowane w analizie różnorodnych zagadnień termomechanicznych w laminatach, płytach i powłokach mikroniejednorodnych o tolerancyjnie-periodycznej mikrostrukturze, których własności w skali makro są opisane wolnozmiennymi funkcjami. Ponadto, ponieważ zaproponowane modele tolerancyjne uwzględniają wpływ wielkości mikrostruktury już w równaniach, stanowią ciekawą alternatywę dla innych metod w badaniu wielu problemów, w których ten efekt ma znaczącą rolę.

Książka stanowi podsumowanie części badań przeprowadzonych w Katedrze Mechaniki Konstrukcji Politechniki Łódzkiej w ramach projektu badawczego nr N N506 398535, finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego w latach 2008-2010.

Na zakończenie *Wstępu* autor pragnie złożyć podziękowania prof. zw. dr. hab. inż. Czesławowi Woźniakowi, który zainspirował autora do napisania tego opracowania, oraz dr. hab. inż. Bohdanowi Michalakowi, prof. PŁ, i dr. hab. Ewarystowi Wierzbickiemu, prof. SGGW, dyskusje z którymi pozwoliły na lepsze przedstawienie zagadnień rozpatrywanych w książce. Autor przekazuje również podziękowania swoim Kolegom i Współpracownikom, którzy aktywnie uczestniczyli w pracach związanych z tematyką książki: dr. inż. Piotrowi Ostrowskiemu, dr Alinie Radzikowskiej, dr. inż. Arturowi Wirowskiemu.

2. Podstawy modelowania

W technice tolerancyjnego uśredniania, stosowanej w celu uśredniania równań różniczkowych cząstkowych, wykorzystywanych jest szereg pojęć, definicji oraz założeń, które zostały wprowadzone oraz obszernie wyjaśnione w monografiach: Cz. Woźniaka i Wierzbickiego (2000), pod redakcją Cz. Woźniaka, Michalaka i Jędrysiaka (2008) oraz pod redakcją Cz. Woźniaka (2010). Dla zapewnienia spójności rozważań zostaną one w tym rozdziale omówione i dostosowane do potrzeb tego opracowania.

2.1. Pojęcia podstawowe

2.1.1. Parametr tolerancji

Niech X będzie niepustym zbiorem oraz $\approx$ relacją *tolerancji* w zbiorze X . Jest to dowolna relacja binarna, symetryczna, zwrotna i nieprzechodnia. Para $(X, \approx)$ jest zwykle nazywana *przestrzenią tolerancji*, por. Zeman (1965). W dalszym ciągu X będzie unormowaną przestrzenią liniową, natomiast relacja tolerancji $\approx$ dla pewnego parametru $\delta > 0$ będzie rozumiana jako:

$$\forall (x_1, x_2) \in X^2 \quad x_1 \approx x_2 \Leftrightarrow \|x_1 - x_2\|_X \leq \delta. \quad (2.1)$$

Dodatnia stała δ jest nazywana *parametrem tolerancji*, por. książka Cz. Woźniaka i Wierzbickiego (2000) oraz książki pod redakcją: Cz. Woźniaka, Michalaka i Jędrysiaka (2008) oraz Cz. Woźniaka (2010).

Wprowadzone przez Zeemana (1965) pojęcie relacji tolerancji można fizycznie interpretować jako pewną relację „nierozróżnialności”. Jeśli elementy liniowej, unormowanej przestrzeni X reprezentują pewne obiekty fizyczne i relacja tolerancji jest zdefiniowana przez (2.1), to $x_1 \approx x_2$ oznacza, że obiekty x_1, x_2 można uważać za „nierozróżnialne” z obliczeniowego i/lub doświadczalnego punktu widzenia. Parametr tolerancji δ charakteryzuje więc pewną dokładność

obserwacji, pomiarów lub obliczeń dokonywanych na obiektach zbioru X w dowolnym rozpatrywanym zagadnieniu fizycznym, por. Fichera (1992). Więcej szczegółów Czytelnik może znaleźć w wyżej wymienionych monografiach.

2.1.2. Jednorodne i niejednorodne rozłożenie komórek

Niech Ω będzie ograniczonym obszarem w $\mathbb{R}^m$. Punkty obszaru Ω oznaczamy przez $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ bądź $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$. Zbiór $\square \equiv [-\lambda_1/2, \lambda_1/2] \times \dots \times [-\lambda_m/2, \lambda_m/2]$, gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$, będziemy nazywać *komórką podstawową*, a liczbę $\lambda \equiv \text{diam } \square$ – średnicą komórki $\square$ lub *parametrem mikrostruktury*. Załóżmy, że $\lambda \ll L_\Omega$, gdzie L_Ω jest minimalnym wymiarem charakterystycznym obszaru Ω . Z kolei zbiór $\square(x) \equiv x + \square$ nazwiemy komórką o środku w punkcie $x \in \mathbb{R}^m$. W tym miejscu podkreślimy, że przyjęcie przedziałów otwartych lub domkniętych w definicji komórki podstawowej jest umowne i nie ma wpływu na wyniki dalszych rozważań. Zdefiniujmy także klaster w punkcie x jako sumę 2^m komórek o wspólnych brzegach

$$\Omega_x \equiv \Omega \cap \bigcup_{z \in \square(x)} \square(z), \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Jednorodnym rozłożeniem komórek przyporządkowanym obszarowi Ω nazywać będziemy rodzinę $(\Omega, \square) \equiv \{\square(x), x \in \overline{\Omega}\}$.

Niech obszar Ω będzie opisywany przez ortogonalne współrzędne $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m) \in \hat{\Omega}$ ($\hat{\Omega}$ to pewien obszar ograniczony w $\mathbb{R}^m$). Tym samym znane jest gładkie odwzorowanie Φ zbioru Ω na zbiór $\hat{\Omega}$. Dla każdego $\hat{x} \in \hat{\Omega}$ i pewnych dodatnich stałych λ_i , $i=1, \dots, m$, oznaczmy $\hat{\square}(\hat{x}) \equiv [\hat{x}_1 - \lambda_1/2, \hat{x}_1 + \lambda_1/2] \times \dots \times [\hat{x}_m - \lambda_m/2, \hat{x}_m + \lambda_m/2]$. W tym przypadku dla każdego $x \in \Omega$, $x = \Phi^{-1}(\hat{x})$, $\hat{x} \in \hat{\Omega}$, komórkę $\square(x)$ można zdefiniować jako $\square(x) \equiv \Phi^{-1}(\hat{\square}(\hat{x}))$. Oznaczając $\lambda \equiv \sup \text{diam } \square$, $x \in \Omega$, załóżmy, że $\lambda \ll L_\Omega$. Przy spełnieniu tego warunku rodzinę komórek $(\Omega, \square) \equiv \{\square(x), x \in \overline{\Omega}\}$ nazwiemy *niejednorodnym rozłożeniem komórek* przypisanym obszarowi Ω . W tym przypadku parametr λ będziemy nazywać *parametrem mikrostruktury*.

2.1.3. Funkcje tolerancyjnie-periodyczne, wolnozmienne, silnie oscylujące

Niech $\alpha \geq 0$ będzie ustaloną liczbą całkowitą nieujemną. Oznaczmy przez $\partial^i f$ gradient rzędu i funkcji $f=f(x)$, $x \in \Omega$, $i=0, 1, \dots, \alpha$; przyjmujemy $\partial^0 f \equiv f$ dla $\alpha=0$.

Parametr α będzie w dalszym ciągu przyjmowany niezależnie w każdym rozważanym problemie i będzie dotyczyć zakresu zmienności wykładnika rozważanej przestrzeni Sobolewa $H^i(\Omega)$, $i=0,1,\dots,\alpha$. Przestrzeń $\square$ -periodycznych funkcji, całkowalnych z kwadratem i zdefiniowanych w $\mathbb{R}^m$ oznaczmy przez $H^0(\square)$. Wprowadźmy ponadto funkcję $\tilde{f}^{(i)}(\cdot, \cdot)$, $i=0,1,\dots,\alpha$, zdefiniowaną w obszarze $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m$. W celu ułatwienia rozważań załóżmy, że powyższe oznaczenia obowiązują zarówno w przypadku funkcji skalarnych, jak i wektorowych.

Definicja 1

Funkcję $f \in H^\alpha(\Omega)$ nazwiemy *funkcją tolerancyjnie-periodyczną* (TP) (względem komórki $\square$ oraz parametru tolerancji δ), $f \in TP_\delta^\alpha(\Omega, \square)$, gdy dla $i=0,1,\dots,\alpha$ są spełnione następujące warunki:

- (i) $(\forall x \in \Omega) (\exists \tilde{f}^{(i)}(x, \cdot) \in H^0(\square)) \quad (\|\partial^i f|_{\Omega_x}(\cdot) - \tilde{f}^{(i)}(x, \cdot)\|_{H^0(\Omega_x)} \leq \delta),$
- (ii) $\int_{\square(\cdot)} \tilde{f}^{(i)}(\cdot, z) dz \in C^0(\overline{\Omega}).$

Funkcję $\tilde{f}^{(i)}(x, \cdot)$ będziemy nazywać *periodycznym przybliżeniem gradientu* $\partial^i f$ w $\square(x)$, $x \in \Omega$, $i=0,1,\dots,\alpha$.

Należy podkreślić, że dla danej komórki $\square$ każda funkcja stała jest elementem przestrzeni $H^0(\square)$.

Można wykazać, że funkcje tolerancyjnie-periodyczne mają następujące własności:

- 1) $TP_0^\alpha \equiv \bigcap_{\delta > 0} TP_\delta^\alpha = H^\alpha(\square),$
- 2) $TP^\alpha \equiv \bigcup_{\delta \geq 0} TP_\delta^\alpha = H^\alpha(\Omega),$
- 3) $(\forall v \in \mathbb{R}) (\forall f \in TP_\delta^\alpha) (\forall f \in TP_{|v|\delta}^\alpha),$
- 4) $(\forall \delta_1, \delta_2 \geq 0) (TP_{\delta_1}^\alpha \oplus TP_{\delta_2}^\alpha \subset TP_{\delta_1 + \delta_2}^\alpha),$
- 5) $(\forall \delta \geq 0) (TP_\delta^\alpha \oplus TP_0^\alpha = TP_\delta^\alpha),$

gdzie przyjęto $TP_\delta^\alpha \equiv TP_\delta^\alpha(\Omega, \square) \subset H^\alpha(\Omega)$, $\delta \geq 0$, por. książka pod redakcją Cz. Woźniaka (2010).

Definicja 2

Funkcję $u \in H^\alpha(\Omega)$ nazwiemy *funkcją wolnozmienną* (SV – z ang. *slowly varying*) (względem komórki $\square$ oraz parametru tolerancji δ), $u \in SV_\delta^\alpha(\Omega, \square)$, gdy:

- (i) $u \in TP_\delta^\alpha(\Omega, \square)$,
- (ii) $(\forall x \in \Omega) (\tilde{u}^{(i)}(x, \cdot)|_{\square(x)} = \partial^i u(x), i = 0, 1, \dots, \alpha)$.

Należy podkreślić, że periodyczne przybliżenie $\tilde{u}^{(i)}$ pochodnej $\partial^i u(\cdot)$ w $\square(x)$ jest pewną funkcją stałą dla każdego $x \in \Omega$. Można również zauważyć, że jeśli $u \in SV_\delta^\alpha(\Omega, \square)$, to $(\forall x \in \Omega) (\|\partial^i u(\cdot) - \partial^i u(x)\|_{H^0(\square(x))} \leq \delta, i = 0, 1, \dots, \alpha)$, por. książka pod redakcją Cz. Woźniaka (2010).

Definicja 3

Funkcję $h \in H^\alpha(\Omega)$ nazwiemy *funkcją silnie oscylującą* (HO – z ang. *highly oscillating*) (względem komórki $\square$ oraz parametru tolerancji δ), $h \in HO_\delta^\alpha(\Omega, \square)$, gdy:

- (i) $h \in TP_\delta^\alpha(\Omega, \square)$,
- (ii) $(\forall x \in \Omega) (\tilde{h}^{(i)}(x, \cdot)|_{\square(x)} = \partial^i \tilde{h}(x), i = 0, 1, \dots, \alpha)$.
- (iii) $(\forall u \in SV_\delta^\alpha(\Omega, \square)) f \equiv hu \in TP_\delta^\alpha(\Omega, \square)$
 $(\tilde{f}^{(i)}(x, \cdot)|_{\square(x)} = u(x) \partial^i \tilde{h}(x)|_{\square(x)}, i = 0, 1, \dots, \alpha)$.

Dla $\alpha=0$ $\tilde{f} \equiv \tilde{f}^{(0)}$.

Należy zauważyć, że zarówno funkcja wolnozmienna, jak i funkcja silnie oscylująca są szczególnymi przypadkami funkcji tolerancyjnie periodycznych.

2.1.4. Uwagi

Podkreślimy, że przy każdym wykorzystaniu przytoczonych powyżej pojęć powinny być stosowane poniższe ograniczenia, por. książka pod redakcją Cz. Woźniaka (2010).

- Parametr tolerancji δ jest w każdym rozpatrywanym zagadnieniu dowolny, ale ustalony. Nie jest on dany *a priori*, może natomiast być określony *a posteriori*, po wyznaczeniu rozwiązania danego zagadnienia brzegowo-początkowego.

• Niech Ξ będzie regularnym obszarem w $\mathbb{R}^{n-m}$ dla $n \geq m$, takim, że $\Omega \times \Xi$ i Ω są dziedzinami funkcji występujących w rozpatrywanych zagadnieniach. Wprowadźmy funkcje $u(\cdot)$, $v^A(\cdot)$ zdefiniowane na $\Omega \times \Xi$ oraz $h^A(\cdot)$ zdefiniowaną na Ω , $A=1, \dots, N$. Warunki $u(\cdot, \xi), v^A(\cdot, \xi) \in SV_\delta^\alpha(\Omega, \square)$, $\xi \in \Xi$, $h^A(\cdot) \in HO_\delta^\alpha(\Omega, \square)$ takie, że wyrażenie $w = u + h^A v^A$ jest ograniczone przez warunek $w(\cdot, \xi) \in TP_\delta^\alpha(\Omega, \square)$, $\xi \in \Xi$, są konieczne lecz niewystarczające na to, by w było akceptowalnym rozwiązaniem każdego rozważanego problemu.

• Przybliżenia periodyczne pochodnych funkcji w winny być przyjęte w postaci:

$$\tilde{w}^{(i)}(x, z, \xi) = \nabla^i u(x, \xi) + \partial^i \tilde{h}^A(x, z) v^A(x, \xi) + \tilde{h}^A(x, z) \bar{\nabla}^i v^A(x, \xi), \quad z \in \square(x), \xi \in \Xi,$$

dla każdego $x \in \Omega$, $i=0, 1, \dots, \alpha$, gdzie $\partial \equiv \partial/\partial z$, $\tilde{h}^A(x, z)$, $z \in \square(x)$, jest przybliżeniem periodycznym funkcji $h^A(\cdot)$ w $\square(x)$.

2.2. Założenia modelowania

Uśrednianie równań różniczkowych cząstkowych, opisujących różne zagadnienia termomechaniki kompozytów, oraz odpowiadających im funkcjonałów może być przeprowadzone przy zastosowaniu podejść asymptotycznych, np. Bensoussan, Lions i Papanicolau (1978), Jikov, Kozlov i Oleinik (1994). Ponieważ w tych procedurach korzysta się z przejścia granicznego z wymiarem mikrostruktury do zera, otrzymane uśrednione funkcjonały lub równania nie opisują zjawisk związanych z wpływem wielkości mikrostruktury. Z tego powodu w kolejnych rozdziałach zostanie przytoczony odmienny sposób postępowania, wykorzystujący pojęcia wprowadzone w poprzednim podrozdziale, tj. funkcję tolerancyjnie-periodyczną, funkcję wolnozmienną, funkcję silnie oscylującą, oraz dodatkowe założenia, które zostaną poniżej sformułowane, por. książka pod redakcją Cz. Woźniaka (2010). Ta technika modelowania jest nazywana *tolerancyjnym uśrednianiem* lub *modelowaniem tolerancyjnym*.

2.2.1. Wybór sposobu uśredniania

Wprowadźmy funkcję $f(\cdot) \in TP_\delta^\alpha(\Omega, \square)$.

Uśrednieniem funkcji tolerancyjno-periodycznej $f \equiv \partial^0 f$ oraz jej pochodnych $\partial^i f$, $i=1, 2, \dots, \alpha$, będziemy nazywać funkcję $\langle \partial^i f \rangle(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, zdefiniowaną jako:

$$\langle \partial^i f \rangle (x) \equiv \frac{1}{|\square|} \int_{\square(x)} \tilde{f}^i(x, z) dz, \quad i = 0, 1, \dots, \alpha. \quad (2.2)$$

Stąd, jeśli $h \in HO_\delta^g(\Omega, \square)$ i $v \in SV_\delta^g(\Omega, \square)$, to otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \langle \partial^i h \rangle (x) &\equiv \frac{1}{|\square|} \int_{\square(x)} \partial^i \tilde{h}(x, z) dz, \\ \langle \partial^i v \rangle (x) &\equiv \frac{1}{|\square|} \int_{\square(x)} \partial^i v(x) dz = \partial^i v(x), \\ \langle \partial^i (hv) \rangle (x) &\equiv \frac{1}{|\square|} \int_{\square(x)} \partial^i \tilde{h}(x, z) dz v(x), \end{aligned}$$

dla $x \in \Omega$, $i=0, 1, \dots, \alpha$. Można zauważyć, że w przypadku periodycznej funkcji f funkcja $\tilde{f}$ nie zależy od współrzędnej x , zatem uśrednienie $\langle \tilde{f} \rangle$ jest stałe.

Wprowadźmy funkcję złożoną $f(z, \partial^i g(x))$, $i=0, 1, \dots, \alpha$, zdefiniowaną w obszarze Ω , spełniającą warunki: $f(\cdot, \partial^i g) \in HO_\delta^0(\Omega, \square)$, $g(\cdot) \in TP_\delta^g(\Omega, \square)$. Tolerancyjne uśrednianie takiej funkcji definiujemy następująco:

$$\langle f(\cdot, \partial^i g(\cdot)) \rangle (x) \equiv \frac{1}{|\square|} \int_{\square(x)} \tilde{f}(x, z, \tilde{g}^{(i)}(x, z)) dz, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \tilde{f} \equiv \tilde{f}^{(0)}. \quad (2.3)$$

Rozpatrzmy teraz uśrednianie szczególnych przypadków funkcji tolerancyjnie-periodycznych, tj. funkcji wolnozmiennych i funkcji silnie oscylujących.

Rozpatrzmy funkcję $f \in HO_\delta^g(\Omega, \square)$. Wprowadzamy ortonormalną bazę wektorową $(e_1, \dots, e_m)$ w $\mathbb{R}^m$. Oznaczmy zbiór liczb całkowitych przez $\mathbb{I}$ oraz wprowadźmy siatkę Λ w $\mathbb{R}^m$, przyjmując $\Lambda \equiv \{i_1 e_1 \lambda_1 + \dots + i_m e_m \lambda_m, \quad i_1, \dots, i_m \in \mathbb{I}\}$. Ponadto niech Ω_0 będzie pewnym podzbiorem w $\Lambda \cap \Omega$.

Tolerancyjne uśrednianie funkcji $f \in HO_\delta^g(\Omega, \square)$ oraz jej pochodnych $\partial^i f$, $i=1, 2, \dots, \alpha$, zdefiniujemy w postaci:

$$\langle \partial^i f \rangle_0 (x) \equiv \frac{1}{|\square|} \int_{\square(x)} \partial^i f(z) dz, \quad i = 0, 1, \dots, \alpha, \quad x \in \Omega_0.$$

Ponadto przez $\langle \partial^i f \rangle_E (x)$, $i = 0, 1, \dots, \alpha$, $x \in \Omega$, oznaczamy gładkie ekstrapolacje funkcji $\langle \partial^i f \rangle_0 (x)$, $i = 0, 1, \dots, \alpha$, $x \in \Omega_0$, na obszarze Ω .

Podkreślmy (por. monografia pod redakcją Cz. Woźniaka (2010)), że dla każdej funkcji silnie oscylującej $f \in HO_\delta^g(\Omega, \square)$ istnieją periodyczne przybliżenia jej pochodnych $\tilde{f}^{(i)}(x, z)$, $x \in \Omega$, $z \in \square(x)$ oraz podzbiór Ω_0 zbioru Ω takie, że:

$$(i) \quad \langle \partial^i f \rangle_E (x) = \langle \partial^i f \rangle (x),$$

$$(ii) \quad \langle \partial^i f \rangle (\cdot) \in SV_\delta^\alpha(\Omega, \square).$$

Powyższy tok postępowania pozwala tolerancyjnie uśrednić funkcję $f \in HO_\delta^\alpha(\Omega, \square)$ bez określania funkcji periodycznych $\tilde{f}(x, \cdot)$ dla każdego $x \in \Omega$.

2.2.2. Założenie mikro-makro dekompozycji

W rozpatrywanych w tym opracowaniu zagadnieniach wartość α jest w każdym przypadku podana i jest liczbą całkowitą dodatnią. Natomiast w tym rozdziale przyjmujemy $\alpha \geq 1$.

Niech $\Omega \times \Xi$ stanowi obszar ograniczony w $\mathbb{R}^n$ taką, że $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ oraz $\Xi \subset \mathbb{R}^{n-m}$ pod warunkiem, że $n > m$. Punkty zbioru Ω oznaczmy przez $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ lub $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$, a punkty $z \in \Xi$ przez $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-m})$. W przypadku gdy $n = m$, wówczas symbole Ξ oraz ξ są pomijane. Wprowadźmy operatory różniczkowania $\partial f \equiv \text{grad}_z f(z, \xi)$, $\bar{\nabla} \equiv \text{grad}_\xi f(z, \xi)$ dla gładkiej funkcji f zdefiniowanej na $\Omega \times \Xi$, dla $n > m$, takie, że $\nabla f \equiv \partial f + \bar{\nabla} f$. W przypadku $n = m$ symbol $\bar{\nabla}$ jest pomijany oraz $\nabla f = \partial f$.

Dalej będziemy stosować oznaczenie $f(\cdot, \xi) \in TP_\delta^\alpha(\Omega, \square)$ pod warunkiem, że dla każdego $x \in \Omega$ istnieje periodyczne przybliżenie $\tilde{f}^{(i)}(x, z, \xi)$ pochodnych $\nabla^{(i)} f(z, \xi)$, $z \in \square(x)$. Jeśli f jest funkcją złożoną postaci $f = f(z, \nabla^i g(z, \xi))$, $i = 0, 1, \dots, \alpha$, $z \in \Omega$, $\xi \in \Xi$, taką, że $f(\cdot, \nabla^i g) \in TP_\delta^0(\Omega, \square)$, $g(\cdot, \xi) \in TP_\delta^\alpha(\Omega, \square)$, $\xi \in \Xi$, to w miejsce wzoru (2.3) otrzymujemy:

$$\langle f(\cdot, \nabla^i g(\cdot, \xi)) \rangle (x) \equiv \frac{1}{|\square|} \int_{\square(x)} \tilde{f}(x, z, \tilde{g}^{(i)}(x, z, \xi)) dz, \quad x \in \bar{\Omega}, \xi \in \Xi. \quad (2.4)$$

Wprowadzamy teraz funkcję $w \in H^1(\Omega \times \Xi)$, $w = w(z, \xi)$, $z \in \Omega$, $\xi \in \Xi$, oraz funkcjonal postaci:

$$\mathcal{D}(w(\cdot)) = \iint_{\Omega \times \Xi} \mathcal{L}(z, \nabla w(z, \xi), w(z, \xi)) d\xi dz,$$

gdzie $\mathcal{L}(\cdot, \nabla w, w) \in HO_\delta^0(\Omega, \square)$. Oznacza to, że istnieje periodyczne przybliżenie $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}(x, z, \nabla w, w)$, $z \in \square(x)$, funkcjonalu $\mathcal{L}(z, \nabla w, w)$.

Oznaczmy przez $h = \{h^A(\cdot) \in HO_\delta^1(\Omega, \square), A = 1, \dots, N\}$ układ N liniowo-niezależnych funkcji, przyjmowanych *a priori* w każdym rozpatrywanym zagadnieniu. Załóżmy, że dla dowolnego $x \in \bar{\Omega}$ spełniony jest warunek $\langle \rho h^A \rangle (x) = 0$ dla pewnej danej, dodatnio określonej funkcji $\rho \in TP_\delta^0(\Omega, \square)$. Przy czym, w szczególnych przypadkach $\langle h^A \rangle (x) = 0$, $A = 1, \dots, N$.

Podstawowym założeniem techniki tolerancyjnego uśredniania jest założenie zwane *mikro-makro dekompozycją*, zgodnie z którym przyjmujemy, że pole w będące argumentem funkcjonału $\mathcal{L}$ można przedstawić w postaci:

$$w(z, \xi) = w_h(z, \xi) = u(z, \xi) + h^A(z) v_A(z, \xi), \quad (2.5)$$

gdzie obowiązuje konwencja sumacyjna dla wskaźników $A=1, \dots, N$; $u(\cdot, \xi), v_A(\cdot, \xi) \in SV_\delta^1(\Omega, \square)$, $\bar{\nabla} u(\cdot, \xi), \bar{\nabla} v_A(\cdot, \xi) \in SV_\delta^0(\Omega, \square)$ oraz $w(\cdot, \xi) \in TP_\delta^1(\Omega, \square)$ dla każdego $\xi \in \Xi$.

Funkcje u oraz v_A , $A=1, \dots, N$, są nazywane, odpowiednio, *uśrednioną (makro-) zmienną* oraz *amplitudami fluktuacji*. Przyjmowane *a priori* funkcje h^A , $A=1, \dots, N$, to tzw. *fluktuacyjne funkcje kształtu* (FS; ang. – *fluctuation shape functions*), które możemy oznaczać $h^A(\cdot) \in FS_\delta^\alpha(\Omega, \square)$ (tu: $\alpha \geq 1$).

2.3. Zarys metody modelowania tolerancyjnego

2.3.1. Tolerancyjne uśrednianie funkcjonałów

W celu przytoczenia pojęcia tolerancyjnego uśredniania funkcjonału Lagrange'a wprowadźmy funkcje $\tilde{h}^A(x, \cdot)$, $\partial \tilde{h}^A(x, \cdot)$ będące, odpowiednio, periodycznymi przybliżeniami funkcji $h^A(\cdot)$, $\partial h^A(\cdot)$ w $\square(x)$, $x \in \bar{\Omega}$. Zauważmy, że periodyczne przybliżenia funkcji $w_h(\cdot, \xi)$ oraz jej pochodnej $\nabla w_h(\cdot, \xi)$ w $\square(x)$, dla każdego $x \in \bar{\Omega}$, mają postać:

$$\begin{aligned} w_h^{(0)}(x, z, \xi) &= u(x, \xi) + \tilde{h}^A(x, z) v_A(x, \xi), \\ \tilde{w}_h^{(1)}(x, z, \xi) &= \nabla u(x, \xi) + \partial \tilde{h}^A(x, z) v_A(x, \xi) + \tilde{h}^A(x, z) \bar{\nabla} v_A(x, \xi), \end{aligned} \quad (2.6)$$

prawie dla każdego $z \in \square(x)$ i dla każdego $\xi \in \Xi$.

Niech $w = w_h$ oraz $\mathcal{L}_h \equiv \mathcal{L}(z, \nabla w_h, w_h)$. Załóżmy jednocześnie, że $\mathcal{L}_h(\cdot, \nabla w_h, w_h) \in HO_\delta^0(\Omega, \square)$. Istnieje zatem periodyczne przybliżenie tego funkcjonału w każdym $\square(x)$, oznaczone przez $\tilde{\mathcal{L}}_h^{(0)}(x, z, \nabla w_h, w_h)$, $z \in \square(x)$. Uwzględniając relacje (2.6), otrzymujemy periodyczne przybliżenie funkcji złożonej $\mathcal{L}_h(z, \nabla w_h, w_h)$ w postaci $\tilde{\mathcal{L}}_h = \tilde{\mathcal{L}}_h^{(0)}(x, z, \tilde{w}_h^{(1)}(x, z, \xi), \tilde{w}_h^{(0)}(x, z, \xi))$. Tolerancyjne uśrednienie funkcjonału $\mathcal{L}_h$ przy wykorzystaniu mikro-makro dekompozycji (2.5) jest określone przez:

$$\langle \mathcal{L}_h \rangle(x, \nabla u, \bar{\nabla} v_A, u, v_A) \equiv \frac{1}{|\square|} \int_{\square(x)} \tilde{\mathcal{L}}_h(x, z, \tilde{w}_h^{(1)}(x, z, \xi), \tilde{w}_h^{(0)}(x, z, \xi)) dz. \quad (2.7)$$

Funkcjonał

$$\mathcal{D}_h(u(\cdot), v_A(\cdot)) = \iint_{\Omega \times \Xi} \langle \mathcal{L}_h \rangle (x, \nabla u, \bar{\nabla} v_A, u, v_A) d\xi dx, \quad (2.8)$$

z $\langle \mathcal{L}_h \rangle$ zdefiniowanym wzorem (2.7), nazywamy *tolerancyjnym uśrednieniem funkcjonału* $\mathcal{D}(w(\cdot))$.

2.3.2. Rozszerzona zasada stacjonarności działania

Równania różniczkowe cząstkowe, opisujące różne zagadnienia termomechaniki, wyprowadzone z zasady stacjonarności działania w postaci klasycznej, mogą zawierać jedynie pochodne parzystego rzędu względem wszystkich argumentów nieznanymi funkcji. W celu uniknięcia tej wady w monografii pod redakcją Cz. Woźniaka (2010) zaproponowano pewną modyfikację tej zasady, nazwaną *rozszerzoną zasadą stacjonarności działania*. Modyfikacja ta zostanie teraz przytoczona.

Ograniczymy rozważania do funkcji Lagrange'a zależnych jedynie od pierwszych pochodnych niewiadomych pól. W tym przypadku funkcjonal działania $\mathcal{D}(w(\cdot))$ będzie przyjęty, dla danego p , w postaci:

$$\mathcal{D}(w(\cdot), p(\cdot)) = \iint_{\Omega \times \Xi} \mathcal{L}(z, \nabla w(z, \xi), w(z, \xi), p(z, \xi)) d\xi dz, \quad (2.9)$$

gdzie $\mathcal{L}(\cdot, \nabla w, w, p) \in HO_8^0(\Omega, \square)$, $w(\cdot, \xi) \in TO_8^1(\Omega, \square)$, $p(\cdot, \xi) \in TO_8^0(\Omega, \square)$, $\xi \in \Xi$. Funkcje $\nabla w, w$ są więc argumentami funkcji Lagrange'a $\mathcal{L}(\cdot)$, natomiast $p(\cdot)$ jest parametrem. Zapiszmy znane równanie Eulera-Lagrange'a w postaci

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla w} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = 0 \quad (2.10)$$

i załóżmy, że jest ono spełnione w obszarze $\Omega \times \Xi$. Ponadto załóżmy jedynie ciągłość pochodnej $\partial \mathcal{L} / \partial \nabla w$. Wtedy $\nabla \cdot (\partial \mathcal{L} / \partial \nabla w)$ jest dywergencją w słabej postaci.

Założmy też, że funkcja p jest określona następującą zależnością

$$p(z, \xi) = r(z, \nabla w(z, \xi), w(z, \xi)), \quad (2.11)$$

ze znaną, w każdym rozpatrywanym zagadnieniu, funkcją $r(\cdot, \xi, \nabla w, w) \in TO_8^0(\Omega, \square)$. Równanie (2.11) będzie interpretowane jako równanie konstytutywne dla funkcji p .

Rozszerzoną zasadą stacjonarności działania nazywamy przejście od funkcjonału działania (2.9) do równania Eulera-Lagrange'a (2.10), w którym funkcja p , zdefiniowana związkiem konstytutywnym (2.11), nie podlega wariacji, otrzymane jako warunek konieczny istnienia ekstremum opisanego wyżej funkcjonału Lagrange'a. Rozszerzona zasada stacjonarności działania stanowi pewne analityczne narzędzie, służące do wyprowadzania równań, m.in. takich, których nie można otrzymać z zasady stacjonarności działania w znanej postaci. Podstawiając prawą stronę wzoru (2.11) do funkcji Lagrange'a $\mathcal{L}(\cdot, \nabla w, w, p)$ w równaniu (2.10), dostajemy równania, które nie wynikają z zasady stacjonarności działania zastosowanej do funkcjonału (2.9).

Pomimo ograniczenia rozważań do przypadków, w których funkcje $\mathcal{L}(\cdot)$ oraz $p(\cdot)$ zależą tylko od pochodnych pierwszego rzędu funkcji w , otrzymane tutaj wyniki można stosunkowo łatwo uogólnić na przypadki z funkcjami $\mathcal{L}(\cdot)$, $p(\cdot)$ zależnymi od pochodnych w wyższego rzędu.

2.3.3. Modelowanie tolerancyjne równań Eulera-Lagrange'a

W podrozdziale tym pokazana zostanie procedura postępowania mająca na celu tolerancyjne uśrednianie równań Eulera-Lagrange'a. Założmy funkcjonał działania $\mathcal{D}$ w postaci (2.9), funkcję Lagrange'a $\mathcal{L}(\cdot, \nabla w, w, p) \in HO_0^0(\Omega, \square)$ oraz funkcję $p(\cdot, \xi) \in HO_0^0(\Omega, \square)$, określoną równaniem konstytutywnym (2.11). Korzystamy zatem z równania Eulera-Lagrange'a (2.10).

Procedurę tolerancyjnego modelowania w przypadku równania (2.10) można przeprowadzić w dwóch etapach:

- w pierwszym etapie uśrednia się tolerancyjnie funkcjonał działania (2.9), biorąc pod uwagę funkcjonał (2.8) oraz mikro-makro dekompozycję (2.5); w tym etapie funkcję p traktuje się jak parametr;
- w drugim etapie wykorzystuje się rozszerzoną zasadę stacjonarności działania, otrzymując z funkcjonałów (2.8) i (2.9) uśredniony funkcjonał

$$\mathcal{D}_h(u(\cdot), v_A(\cdot), p(\cdot)) = \iint_{\Omega \Xi} (\langle \mathcal{L}_h \rangle(x, \nabla u, \bar{\nabla} v_A, u, v_A, p)) d\xi dx, \quad (2.12)$$

z uśrednioną funkcją Lagrange'a określoną wzorem

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_h \rangle (x, \nabla u, \bar{\nabla} v_A, u, v_A) &= \\
&= \frac{1}{|\square|} \int_{\square(x)} \tilde{\mathcal{L}}(x, z, \nabla u(x, \xi) + \partial \tilde{h}^A(x, z) v_A(x, \xi) + \tilde{h}^A(x, z) \bar{\nabla} v_A(x, \xi), \\
&\quad u(x, \xi) + \tilde{h}^A(x, z) v_A(x, \xi), \tilde{p}(x, z, \xi), \tilde{h}^A(x, z) \tilde{p}(x, z, \xi)) dz,
\end{aligned} \quad (2.13)$$

dla każdego $\xi \in \Xi$. Biorąc pod uwagę rozszerzoną zasadę stacjonarności działania założmy, że funkcja p jest określona przez równanie konstytutywne (2.11). Wówczas uśrednione równania konstytutywne mają postać:

$$\begin{aligned}
\langle p \rangle (x) &\equiv \frac{1}{|\square|} \int_{\square(x)} \tilde{p}(x, z, \xi) dz, \\
\langle ph^A \rangle (x) &\equiv \frac{1}{|\square|} \int_{\square(x)} \tilde{h}^A(x, z) \tilde{p}(x, z, \xi) dz.
\end{aligned} \quad (2.14)$$

Oznaczając:

$$\begin{aligned}
r_h(x, \nabla u, \bar{\nabla} v_A, u, v_A) &\equiv \frac{1}{|\square|} \int_{\square(x)} \tilde{r}(x, z, \xi, \nabla u + \partial \tilde{h}^A(x, z) v_A + \tilde{h}^A(x, z) \bar{\nabla} v_A, u + \tilde{h}^A(x, z) v_A) dz, \\
r_h^A(x, \nabla u, \bar{\nabla} v_A, u, v_A) &\equiv \\
&\equiv \frac{1}{|\square|} \int_{\square(x)} \tilde{h}^A(x, z) \tilde{r}(x, z, \xi, \nabla u + \partial \tilde{h}^A(x, z) v_A + \tilde{h}^A(x, z) \bar{\nabla} v_A, u + \tilde{h}^A(x, z) v_A) dz,
\end{aligned}$$

równania konstytutywne (2.14) możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}
\langle p \rangle (x) &\equiv r_h(x, \nabla u, \bar{\nabla} v_A, u, v_A), \\
\langle ph^A \rangle (x) &\equiv r_h^A(x, \nabla u, \bar{\nabla} v_A, u, v_A).
\end{aligned} \quad (2.15)$$

Korzystając z zasady stacjonarności działania do funkcjonału $\mathcal{D}_h$, otrzymujemy następujący układ równań Eulera-Lagrange'a:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial \nabla u} - \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial u} &= 0, \\
\bar{\nabla} \cdot \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial \bar{\nabla} v_A} - \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial v_A} &= 0, \quad A=1, \dots, N.
\end{aligned} \quad (2.16)$$

Po podstawieniu prawych stron równań (2.13) i (2.15) do (2.16) otrzymujemy końcowy układ równań dla podstawowych niewiadomych $u=u(x, \xi)$, $v_A=v_A(x, \xi)$, $A=1, \dots, N$. Równania (2.16) są *równaniami modelu tolerancyjnego*, przy założeniu mikro-makro dekompozycji (2.5).

Rozwiązania równań (2.16) mają fizyczne znaczenie w danym zagadnieniu wtedy, gdy mikro-makro dekompozycja (2.5) może stanowić odpowiednie przybliżenie funkcji $w(\cdot)$, opisującej zachowanie ciała mikroniejednorodnego. Z taką sytuacją można spotkać się w wielu zagadnieniach termomechaniki kom-

pozytów i konstrukcji, por. książka pod redakcją Cz. Woźniaka (2010). Ponadto, parametr tolerancji δ w definicji funkcji $u(\cdot, \xi)$, $v_A(\cdot, \xi)$, $\xi \in \Xi$, musi być dostatecznie mały. Niestety, wymóg ten może być sprawdzony tylko *a posteriori*, tj. po wyznaczeniu postaci funkcji $u(\cdot, \xi)$, $v_A(\cdot, \xi)$.

2.4. Zarys metody modelowania asymptotycznego

2.4.1. Asymptotyczne uśrednianie funkcjonałów

Niech $f(\cdot) \in HO_\delta^0(\Omega, \square)$. Wtedy dla każdego $x \in \overline{\Omega}$ istnieje funkcja $\tilde{f}(x, z)$, $z \in \square(x)$, będąca periodycznym przybliżeniem funkcji silnie oscylującej $f(\cdot)$ w $\square(x) \cap \overline{\Omega}$.

W podejściu asymptotycznym wprowadzamy do rozważań parametr $\varepsilon = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, w następujący sposób. Niech $\square_\varepsilon \equiv [-\varepsilon\lambda_1/2, \varepsilon\lambda_1/2] \times \dots \times [-\varepsilon\lambda_m/2, \varepsilon\lambda_m/2]$, wtedy $\square_\varepsilon(x) \equiv x + \square_\varepsilon$ nazwiemy ε -komórką o środku w $x \in \overline{\Omega}$. Przyjmijmy też, że funkcja $\tilde{f}(x, \cdot) \in H^1(\square)$ dla dowolnego $x \in \overline{\Omega}$. Zdefiniujmy rodzinę funkcji $\tilde{f}_\varepsilon(x, \cdot) \in H^1(\square_\varepsilon) \subset H^1(\square)$ jako $\tilde{f}_\varepsilon(x, z) \equiv \tilde{f}(x, z/\varepsilon)$, $z \in \square_\varepsilon(x)$, $x \in \overline{\Omega}$.

Rozważmy dla $w \in C^1(\overline{\Omega} \times \Xi)$ funkcję Lagrange'a $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\cdot, \nabla w, w) \in HO_\delta^0(\Omega, \square)$. Ponieważ $\mathcal{L}$ jest silnie oscylującą funkcją w Ω , to dla każdego $x \in \overline{\Omega}$ istnieje $\square(x)$ -periodyczne przybliżenie $\tilde{\mathcal{L}}(x, \cdot, \nabla w, w)$ funkcji Lagrange'a $\mathcal{L}$ w $\square(x)$.

Niech $h^A(\cdot) \in HO_\delta^0(\Omega, \square)$, $A = 1, \dots, N$, będzie układem liniowo-niezależnych, silnie oscylujących funkcji. Dla każdego $x \in \overline{\Omega}$ istnieją więc przybliżenia periodyczne $\tilde{h}^A(x, \cdot)$. Wprowadźmy również rodzinę funkcji

$$\tilde{h}_\varepsilon^A(x, z) \equiv \tilde{h}^A(x, z/\varepsilon), \quad z \in \square_\varepsilon(x). \quad (2.17)$$

Podstawowym założeniem przedstawionej tu procedury asymptotycznej jest zastąpienie mikro-makro dekompozycji (2.5) przez:

$$w_\varepsilon(x, z, \xi) = u(z, \xi) + \varepsilon \tilde{h}_\varepsilon^A(x, z) v_A(z, \xi), \quad z \in \square_\varepsilon(x), \xi \in \Xi, \quad (2.18)$$

(obowiązuje konwencja sumacyjna względem wskaźników $A = 1, \dots, N$). Przyjmujemy, że funkcje u , v_A są ciągłymi, ograniczonymi funkcjami w $\overline{\Omega}$ wraz ze swoimi pierwszymi pochodnymi. Wzór (2.18) będziemy nazywać asymptotyczną dekompozycją pola $w(x, z, \xi)$, $z \in \square(x)$, $\xi \in \Xi$.

Wprowadzając

$$\hat{\tilde{h}}_\varepsilon^A(x, z) \equiv \varepsilon^{-1} \partial \tilde{h}^A(x, \bar{z})|_{\bar{z}=z/\varepsilon}, \quad (2.19)$$

ze wzorów (2.17) i (2.18) otrzymujemy:

$$\nabla w_\varepsilon(x, z, \xi) = \nabla u(z, \xi) + \hat{\tilde{h}}_\varepsilon^A(x, z) v_A(z, \xi) + \varepsilon \tilde{h}_\varepsilon^A(x, z) v_A(z, \xi), \quad z \in \square_\varepsilon(x), \quad (2.20)$$

dla dowolnego, ale ustalonego $x \in \overline{\Omega}$.

Zauważmy, że w przedstawianym tu podejściu asymptotycznym przyjmujemy, że funkcje $u(\cdot)$, $v_A(\cdot)$, $A=1, \dots, N$, są niezależne od ε , co stanowi zasadniczą różnicę między tym podejściem a podejściem stosowanym w teorii homogenizacji (Bensoussan, Lions i Papanicolaou (1978), Jikov, Kozlov i Oleinik (1994)).

Biorąc pod uwagę własność wartości średniej (por. Jikov, Kozlov i Oleinik (1994)), funkcje $\tilde{h}_\varepsilon^A(x, z)$, $z \in \square_\varepsilon(x)$ dla $\varepsilon \rightarrow 0$ mają słabą granicę. Stosując przejście graniczne $\varepsilon \rightarrow 0$, na mocy $z \in \square_\varepsilon(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u(z, \xi) &= u(x, \xi) + O(\varepsilon), & \nabla u(z, \xi) &= \nabla u(x, \xi) + O(\varepsilon), \\ v_A(z, \xi) &= v_A(x, \xi) + O(\varepsilon), & \overline{\nabla} v_A(z, \xi) &= \overline{\nabla} v_A(x, \xi) + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.21)$$

gdzie symbol $O(\varepsilon)$ oznacza składniki rzędu ε (lub wyższego). Korzystając ze wzorów (2.21), zależności (2.18) i (2.20) można zapisać jako:

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(x, z, \xi) &= u(x, \xi) + O(\varepsilon), \\ \nabla w_\varepsilon(x, z, \xi) &= \nabla u(x, \xi) + \hat{\tilde{h}}_\varepsilon^A(x, z) v_A(x, \xi) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Wraz z przejściem granicznym składniki $O(\varepsilon)$ w powyższych równaniach znikają. Wprowadźmy rodzinę funkcji $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ daną przez

$$\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon = \tilde{\mathcal{L}}(x, z/\varepsilon, \nabla u(x, \xi), u(x, \xi), v_A(x, \xi)), \quad z \in \square_\varepsilon(x), x \in \overline{\Omega}.$$

Jeśli $\varepsilon \rightarrow 0$, to $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ jako funkcje argumentu z/ε , $z \in \square_\varepsilon(x)$, przy wykorzystaniu własności wartości średniej (por. Jikov, Kozlov i Oleinik (1994)), dążą słabo w $L_{lok}^\gamma(\mathbb{R}^m)$, $\gamma \geq 1$, do

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_0(x, \nabla u(x, \xi), u(x, \xi), v_A(x, \xi)) = \\ &= \frac{1}{|\square|} \int_{\square(x)} \tilde{\mathcal{L}}(x, z, \nabla u(x, \xi) + \hat{\tilde{h}}^A(x, z) v_A(x, \xi), u(x, \xi)) dz, \quad x \in \overline{\Omega}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Wzór (2.23) jest uśrednioną postacią funkcji Lagrange'a $\mathcal{L}$ w ramach uśredniania asymptotycznego.

Zauważmy, że postać graniczną $\mathcal{L}_0(x, \nabla u(x, \xi), u(x, \xi), v_A(x, \xi))$ można otrzymać bezpośrednio ze wzorów (2.6) oraz (2.7) przez pominięcie składników $\tilde{h}^A(x, z)v_A(x, \xi)$ i $\tilde{h}^A(x, z)\bar{\nabla}v_A(x, \xi)$.

2.4.2. Modelowanie asymptotyczne równań Eulera-Lagrange'a

Procedura modelowania asymptotycznego równań różniczkowych cząstkowych jest tu przedstawiona dla zagadnień opisanych znaną zasadą stacjonarności działania. Uogólnienie rozważań na przypadki opisane przez rozszerzoną zasadę stacjonarności działania wymaga asymptotycznego modelowania również funkcji p we wzorze (2.9) i nie będzie w rozważanym przypadku stosowana.

W ramach modelowania asymptotycznego wprowadźmy asymptotyczny funkcjonal działania określony następująco

$$\mathcal{D}_h^0(u(\cdot), v_A(\cdot)) = \iint_{\Omega \times \Xi} \mathcal{L}_0(x, \nabla u, u, v_A) d\xi dx,$$

gdzie funkcja $\mathcal{L}_0$ jest dana wzorem (2.23).

Zakładając, że pochodna $\partial \mathcal{L}_0 / \partial \nabla u$ jest ciągła, z zasady stacjonarności działania dla $\mathcal{D}_h^0(u, v_A)$ otrzymujemy równania Eulera-Lagrange'a:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \nabla u} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial v_A} &= 0, \quad A = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ponieważ funkcje $\tilde{h}^A(x, \cdot)$, $A = 1, \dots, N$, są przybliżeniami periodycznymi przyjmowanych *a priori* fluktuacyjnych funkcji kształtu $h^A(\cdot)$, zdefiniowanych na zbiorze $x \in \bar{\Omega}$, a funkcja $w(\cdot)$ musi być jednoznacznie określona w $\Omega \times \Xi$, można zauważyć, że funkcja $w(\cdot)$ ma postać:

$$w(z, \xi) = u(z, \xi) + h^A(z)v_A(z, \xi), \quad (2.25)$$

dla każdego $(z, \xi) \in \Omega \times \Xi$. Równania (2.24) wraz z dekompozycją (2.25) stanowią *model asymptotyczny* równań Eulera-Lagrange'a otrzymanych z funkcji Lagrange'a $\mathcal{L}(z, \nabla w, w)$.

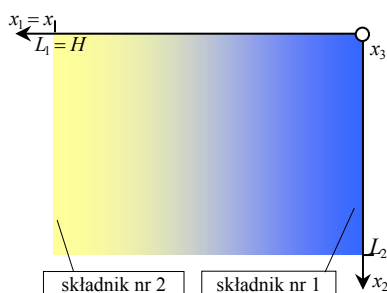
Znana homogenizacja asymptotyczna operatorów różniczkowych prowadzi do otrzymania rozwiązań tzw. zagadnień na komórce periodyczności, por. Jikov, Kozlov i Oleinik (1994). Rozwiązanie takiego zagadnienia umożliwia m.in. wyznaczenie modułów efektywnych rozważanego kompozytu lub struktu-

ry. W większości przypadków znalezienie rozwiązania zagadnienia na komórce nie jest łatwe i nie może być uzyskane w postaci analitycznej. Przedstawione w tym podrozdziale modelowanie asymptotyczne równań różniczkowych nie wymaga analizy zagadnienia na komórce (periodycznego lub lokalnie-periodycznego). Procedura ta wprowadza jednakże dodatkowe niewiadome funkcje, zwane amplitudami fluktuacji. Eliminacja tych niewiadomych z otrzymanych równań, jeśli jest możliwa, pozwala wyznaczyć moduły efektywne, por. książka pod redakcją Cz. Woźniaka, Michalaka i Jędrysiaka (2008) oraz pod redakcją Cz. Woźniaka (2010).

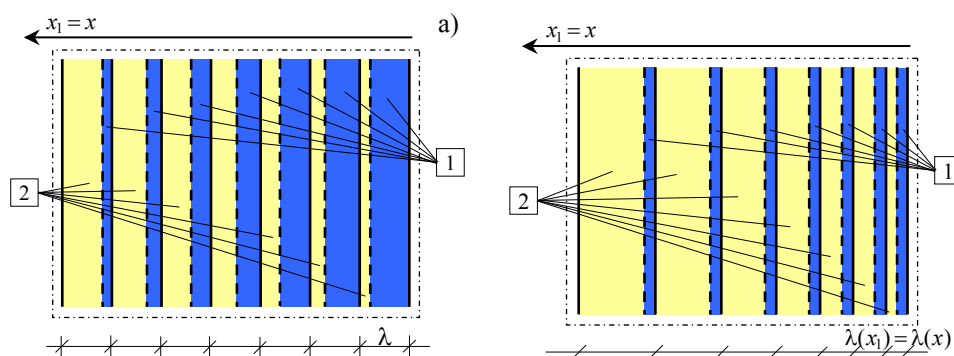
3. Przewodnictwo ciepła w laminatach

3.1. Laminaty o poprzecznej gradacji własności

W tym rozdziale przedmiotem rozważań są dwuskładnikowe kompozyty, złożone z dużej liczby warstw. Rozkład materiałów składowych jest nieperiodyczny wzdłuż kierunku prostopadłego do warstw, tj. osi x_1 , por. rys. 3.1 oraz 3.2. Warstwy, zwane komórkami, mają tę samą grubość λ i wykonane są z dwóch jednorodnych składników (lamin), idealnie połączonych z sobą na płaszczyznach kontaktu. Do rys. 3.1-3.2 będą również odniesienia w *rozdziałach 4-5*.



Rys. 3.1. Fragment kompozytu w skali makro



Rys. 3.2. Fragment kompozytu w skali mikro: a) równomierne rozłożenie warstw, b) nierównomierne rozłożenie warstw; 1 – składnik nr 1, 2 – składnik nr 2

Zakładamy, że w skali makro własności takich laminatów (uśrednione lub makroskopowe) zmieniają się w sposób ciągły i gładki wzdłuż kierunku x_1 . Natomiast w skali mikro laminaty te mogą mieć *równomiernie rozłożone warstwy*, tj. grubość warstw jest stała, $\lambda = \text{const}$ (por. rys. 3.2a) lub *nierównomiernie rozłożone warstwy*, tj. grubość warstw jest określona funkcją $\lambda = \lambda(x_1)$ (por. rys. 3.2b). Przy czym zakłada się, że maksymalna grubość λ jest mała w porównaniu z minimalnym charakterystycznym wymiarem całego laminatu. Takie laminaty są wykonane z *materiałów o funkcyjnej gradacji własności* (ang. *functionally graded materials, FGM*), por. Suresh i Mortensen (1998). Nazywać je będziemy *laminatami o poprzecznej gradacji własności*, por. Wstęp, rys. 1.1.

W rozdziale tym rozpatrywane są zagadnienia przewodnictwa ciepła w laminatach o poprzecznej gradacji własności. W celu uproszczenia analizy tych zagadnień rozważania zostaną ograniczone do problemów płaskich – w płaszczyźnie Ox_1x_2 . Oznaczmy $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$, $x \equiv x_1$, $\xi \equiv x_2$, $\nabla \equiv (\partial_1, \partial_2)$, $\partial \equiv (\partial_1, 0)$, $\bar{\partial} \equiv (0, \partial_2)$. Wymiary laminatu wzdłuż osi $x \equiv x_1$, $\xi \equiv x_2$ oznaczmy przez $H \equiv L_1$, $L \equiv L_2$, odpowiednio. Niech $x \in \Omega \equiv (0, H)$, $\xi \in \Xi \equiv (0, L)$ oraz $\square = [-\lambda/2, \lambda/2]$, a także $\lambda = \text{const}$ lub $\lambda = \lambda(x)$. Tym samym komórką o środku w punkcie $x \in \Omega$ jest $\square(x) \equiv [x - \lambda/2, x + \lambda/2]$. Ponadto, indeksem „prim” oznaczmy wielkości dotyczące składnika nr 1, a indeksem „bis” – składnika nr 2. Niech M stanowi liczbę warstw, a $x = x_1 = x_1^m$, $m = 1, \dots, M$, będzie płaszczyzną środkową m -tej warstwy.

W przypadku laminatów z nierównomiernym rozłożeniem warstw przyjmujemy, że istnieje nieujemna funkcja $\lambda = \lambda(x)$, $x \in [0, H]$, taka, że:

- (i) $\lambda(\cdot) \in SV_8^1(\Omega, \square)$,
- (ii) $\lambda(x_1^m) = \lambda_m$ jest grubością m -tej warstwy, $m = 1, \dots, M$.

Funkcję $\lambda(\cdot)$ będziemy nazywać *funkcją grubości warstw*.

Ze względu na rozpatrywanie dwóch rodzajów mikrouwarstwienia wprowadzamy dwa różne parametry, określające wielkość mikrostruktury laminatu:

– dla równomiernego rozłożenia warstw, $\lambda = \text{const}$, *parametrem mikrostruktury* będziemy nazywać stałą grubość warstwy λ , przy założeniu, że spełniony jest warunek $\lambda/H \ll 1$;

– dla nierównomiernego rozłożenia warstw, $\lambda = \lambda(x)$, *parametrem mikrostruktury* będziemy nazywać stałą grubość l laminy wykonanej ze składnika nr 1 (por. rys. 3.2b), zakładając, że $l/H \ll 1$.

Zakładamy również, że istnieją nieujemne funkcje $v' = v'(x)$, $v'' = v''(x)$, $x \in [0, H]$, takie, że:

$$(i) \quad v'(\cdot), v''(\cdot) \in SV_\delta^1(\Omega, \square),$$

$$(ii) \quad v'(x) + v''(x) = 1,$$

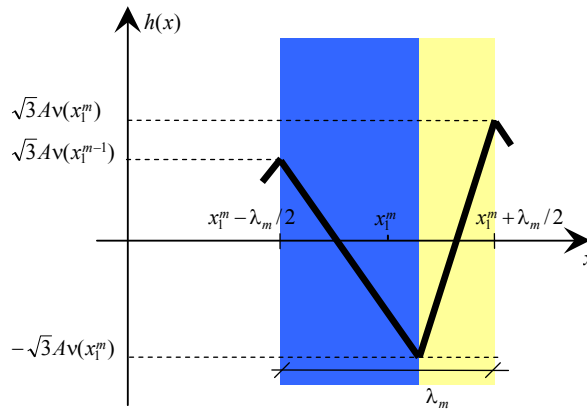
(iii) $v'(x_1^m) = v'_m$ oraz $v''(x_1^m) = v''_m$ określają, odpowiednio, objętościową zawartość składnika nr 1 oraz składnika nr 2 w m -tej warstwie, $m=1, \dots, M$.

Funkcje $v'(\cdot), v''(\cdot)$ będziemy nazywać *funkcjami nasycenia*. Wprowadźmy również tzw. *funkcję niejednorodności*, zdefiniowaną jako $v = \sqrt{v'v''}$, por. książka pod redakcją Cz. Woźniaka, Michałaka i Jędrysiaka (2008).

Ważnym pojęciem wykorzystywanym w tolerancyjnym modelowaniu jest fluktuacyjna funkcja kształtu, por. *podrozdział 2.2*. Dla rozpatrywanych laminatów wprowadzamy jedną taką funkcję $h(x)$, $x \in [0, H]$, którą dla przedziału $\square(x_1^m) \equiv (x_1^m - \lambda_m/2, x_1^m + \lambda_m/2)$ zdefiniujemy następująco

$$h(x) = \begin{cases} -A\sqrt{3} \frac{v}{v'_m} (2 \frac{x}{\lambda_m} + v''_m) & \text{dla } x \in (x_1^m - \frac{1}{2}\lambda_m, x_1^m - \frac{1}{2}\lambda_m + v'_m\lambda_m), \\ A\sqrt{3} \frac{v}{v''_m} (2 \frac{x}{\lambda_m} - v'_m) & \text{dla } x \in [x_1^m + \frac{1}{2}\lambda_m - \lambda_m v''_m, x_1^m + \frac{1}{2}\lambda_m), \end{cases} \quad (3.1)$$

gdzie A jest amplitudą, przyjmowaną zwykle jako wielkość rzędu wymiaru komórki $\square$ lub parametru mikrostruktury w danym zagadnieniu. Wykres funkcji $h(\cdot)$ w przedziale o długości λ_m jest pokazany na rys. 3.3.



Rys. 3.3. Fragment wykresu fluktuacyjnej funkcji kształtu

Wzór (2.2) określający uśrednienie funkcji f przyjmuje postać

$$\langle f \rangle(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda} \int_{x-\lambda/2}^{x+\lambda/2} f(y, \xi) dy, \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega \times \Xi}. \quad (3.2)$$

Jeśli f jest funkcją tolerancyjnie-periodyczną, to $\langle f \rangle_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \overline{\Omega \times \Xi}$, jest wolno-zmienną funkcją będącą w tolerancji z funkcją $\langle f \rangle(\mathbf{x})$.

W kolejnych podrozdziałach przedstawione jest wyprowadzenie uśrednionych równań *modelu tolerancyjnego* oraz *modelu asymptotycznego*, a dalej ich zastosowanie w analizie pewnych szczególnych przypadków stacjonarnego i niestacjonarnego przewodnictwa ciepła.

3.2. Równania uśrednione

3.2.1. Model tolerancyjny

Zakładamy, że oscylacje nieznanego pola temperatury $T=T(x, \xi, t)$, $\mathbf{x}=(x, \xi) \in \overline{\Omega \times \Xi}$, $t \in (t_0, t_1)$, są małe. Wówczas przewodnictwo ciepła w laminacie o poprzecznej gradacji własności może być rozpatrywane w ramach modelu Fouriera, por. także książka pod redakcją Cz. Woźniaka, Michałaka i Jędrysiaka (2008). Możemy zatem wprowadzić tolerancyjnie-periodyczne funkcje argumentu x , opisujące własności termiczne laminatu, tj. ciepło właściwe c oraz tensor przewodnictwa ciepła $\mathbf{K}$, $c(\cdot), \mathbf{K}(\cdot) \in TP_8^0(\Omega, \Xi) \subset H^0(\Omega)$. Przyjmujemy, że funkcje te mają stałe wartości c' , $\mathbf{K}'$ oraz c'' , $\mathbf{K}''$ w składniku nr 1 oraz nr 2, odpowiednio. Wprowadźmy również źródła ciepła $f=f(x, \xi, t)$, $(x, \xi) \in \overline{\Omega \times \Xi}$, $t \in (t_0, t_1)$.

Postępując jak w *rozdziale 2*, zakładamy, że przewodnictwo ciepła w rozpatrywanym laminacie jest opisane funkcjonalą działania (2.9), który przyjmuje postać

$$\mathcal{D}(T, p) = \iint_{\Omega \times \Xi} \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{L}(z, \nabla T(z, \xi, t), T(z, \xi, t), p(z, \xi, t))) dt d\xi dz, \quad (3.3)$$

z funkcją Lagrange'a $\mathcal{L}$ określoną przez

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \nabla T \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla T + pT, \quad (3.4)$$

oraz funkcją p zdefiniowaną równaniem konstytutywnym

$$p = c\dot{T} + f, \quad (3.5)$$

gdzie $f=f(x, \xi, t)$ jest źródłem ciepła. Zakładamy, że $\mathcal{L}(\cdot, \nabla T, T, p)$ oraz $f(\cdot)$ są tolerancyjnie-periodycznymi, silnie oscylującymi funkcjami argumentu x , $x \in \Omega$.

Wykorzystując rozszerzoną zasadę stacjonarności działania dla funkcjonału działania $\mathcal{D}$, (3.3), i funkcji Lagrange'a $\mathcal{L}$, (3.4), otrzymujemy dobrze znane równanie przewodnictwa ciepła modelu Fouriera

$$\nabla \cdot (\mathbf{K} \cdot \nabla T) - c\dot{T} = f. \quad (3.6)$$

Temperatura $T=T(x,\xi,t)$, $\mathbf{x}=(x,\xi) \in \overline{\Omega \times \Xi}$, $t \in (t_0, t_1)$, musi spełniać odpowiednie warunki regularności. Niech $\mathbf{q} = -\mathbf{K} \cdot \nabla T$ będzie strumieniem ciepła, $[\mathbf{q}(\mathbf{x},t)]$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, jego skokiem na Γ (tj. na płaszczyznach kontaktu lamin), a $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, wektorem prostopadłym do Γ . Zakładamy, także warunek ciągłości strumienia ciepła na płaszczyznach Γ w postaci $[\mathbf{q}] \cdot \mathbf{n} = 0$.

Równanie (3.6) ma silnie oscylujące, nieciągłe współczynniki funkcyjne, nie jest więc wygodne w zastosowaniach do analizy zagadnień szczególnych. Za punkt wyjścia tolerancyjnego modelowania weźmiemy zatem funkcjonał działania $\mathcal{D}$, (3.3), wraz z funkcją Lagrange'a $\mathcal{L}$, (3.4), i funkcją p , (3.5). Sformułowanie tych trzech funkcji stanowi pierwszy etap procedury modelowania.

Drugim etapem jest mikro-makro dekompozycja pola temperatury $T(x,\xi,t)$, przyjęta w postaci

$$T_h(x,\xi,t) = \vartheta(x,\xi,t) + h(x)\psi(x,\xi,t), \quad (3.7)$$

gdzie $\vartheta(\cdot, \xi, t), \psi(\cdot, \xi, t) \in SV_8^1(\Omega, \square)$ dla każdej chwili $t \in (t_0, t_1)$. Podstawowymi niewiadomymi są funkcje ϑ oraz ψ , które nazywamy *makrotemperaturą* oraz *amplitudą fluktuacji* (temperatury). Funkcja $h(\cdot) \in FS_8^1(\Omega, \square)$ jest natomiast fluktuacyjną funkcją kształtu, postulowaną w każdym szczególnym, analizowanym zagadnieniu, tu przyjęta w postaci (3.1).

W trzecim etapie modelowania ograniczamy rozważania do dowolnej, ale ustalonej komórki $\square(x) \equiv [x - \lambda/2, x + \lambda/2]$, $x \in \Omega$. Wprowadzamy tolerancyjne przybliżenia $\tilde{\mathbf{K}}(x, \cdot), \tilde{c}(x, \cdot)$ funkcji $\mathbf{K}(\cdot), c(\cdot)$ w $\square(x)$ oraz zakładamy, że $\langle \tilde{c}(x, \cdot) \tilde{h}(x, \cdot) \rangle = 0$. Stosując procedurę tolerancyjnego uśredniania z *podrozdziału 2.3*, otrzymujemy uśredniony funkcjonał działania przy dekompozycji (3.7) dla komórki $\square(x)$:

$$\mathcal{D}_h(\vartheta, \psi, p) = \iint_{\Omega \times \Xi} \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathcal{L}_h \rangle (z, \nabla \vartheta, \vartheta, \partial \psi, \psi, p) dt d\xi dz,$$

w którym uśredniona funkcja Lagrange'a $\mathcal{L}$ jest określona przez

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_h \rangle = & \frac{1}{2} (\nabla \vartheta \cdot \langle \mathbf{K} \rangle \cdot \nabla \vartheta + \psi \langle \partial h \cdot \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \psi + \bar{\partial} \psi \cdot \langle \mathbf{K} h^2 \rangle \cdot \bar{\partial} \psi + \\ & + \nabla \vartheta \cdot \langle \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \psi + \psi \langle \partial h \cdot \mathbf{K} \rangle \cdot \nabla \vartheta) + \langle p \rangle \vartheta + \langle ph \rangle \psi, \end{aligned} \quad (3.8)$$

a równania konstytutywne mają postać:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \langle c \rangle \dot{\vartheta} + \langle f \rangle, \\ \langle ph \rangle &= \langle ch^2 \rangle \dot{\psi} + \langle fh \rangle. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Wykorzystując rozszerzoną zasadę stacjonarności działania do uśrednionej funkcji Lagrange'a (3.8) i traktując wyrażenia (3.9) jak parametry, otrzymujemy równania:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\langle \mathbf{K} \rangle \cdot \nabla \vartheta + \langle \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \psi) - \langle c \rangle \dot{\vartheta} &= \langle f \rangle, \\ \bar{\partial} \cdot (\langle \mathbf{K} h^2 \rangle \cdot \bar{\partial} \psi) - \langle ch^2 \rangle \dot{\psi} - \langle \partial h \cdot \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \psi - \langle \partial h \cdot \mathbf{K} \rangle \cdot \nabla \vartheta &= \langle fh \rangle. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Powyższe równania wraz z mikro-makro dekompozycją (3.7) stanowią narzędzie do analizy *zagadnień przewodnictwa ciepła w laminatach o poprzecznej gradacji własności w ramach modelu tolerancyjnego*. Równania (3.10) mają gładkie, wolnozmiennie współczynniki, w przeciwieństwie do równania (3.6) o nieciągłych, silnie oscylujących współczynnikach. Ponadto równania (3.10) uwzględniają wpływ wielkości mikrostruktury laminatu w przewodnictwie ciepła poprzez składniki podkreślone, zależne od parametru mikrostruktury.

Należy zauważyć, że warunki początkowe muszą być określone dla obu podstawowych niewiadomych $\vartheta(\cdot), \psi(\cdot)$. Natomiast warunki brzegowe dla makrotemperatury ϑ trzeba sformułować na wszystkich brzegach, tj. $x=0, H$; $\xi=0, L$, a dla amplitudy fluktuacji ψ tylko na brzegach $\xi=0, L$. Ponadto rozwiązania $\vartheta(\cdot), \psi(\cdot)$ mają fizyczny sens tylko wtedy, gdy spełnione są warunki $\vartheta(\cdot, \xi, t), \psi(\cdot, \xi, t) \in SV_\delta^1(\Omega, \square)$. Warunki te mogą być wykorzystane do oceny *a posteriori* parametru tolerancji δ , a zatem również do weryfikacji fizycznej poprawności otrzymanych wyników.

3.2.2. Model asymptotyczny

W tym podrozdziale, podobnie jak w 3.2.1, korzystamy z równania przewodnictwa ciepła Fouriera (3.6), które można otrzymać stosując rozszerzoną zasadę stacjonarności działania do funkcjonałów $\mathcal{D}(\cdot)$, (3.3), $\mathcal{L}(\cdot)$, (3.4) oraz $p(\cdot)$, (3.5). Stanowi to punkt wyjścia procedury modelowania.

W modelowaniu asymptotycznym wprowadza się parametr $\varepsilon \in (0, 1]$, przedział $\square_\varepsilon \equiv [-\varepsilon\lambda/2, \varepsilon\lambda/2]$ oraz ε -komórkę $\square_\varepsilon(x) \equiv x + \square_\varepsilon$ o środku w $x \in \overline{\Omega}$.

Następnie formułuje się podstawowe założenie modelowania asymptotycznego, tj. asymptotyczną dekompozycję (2.18), która w tym przypadku przyjmuje postać

$$T_\varepsilon(x, z, \xi, t) = \vartheta(z, \xi, t) + \varepsilon \tilde{h}_\varepsilon(x, z) \psi(z, \xi, t), \quad (3.11)$$

gdzie $z \in \square_\varepsilon(x)$, $\xi \in \Xi$, $t \in (t_0, t_1)$, oraz funkcje T , ϑ , ψ są ciągłe i ograniczone w $\overline{\Omega}$ łącznie ze swoimi pierwszymi pochodnymi. Korzystając z oznaczeń (2.19), pochodne (2.20) dla temperatury można zapisać jako:

$$\begin{aligned} \partial T_\varepsilon(x, z, \xi, t) &= \partial \vartheta(z, \xi, t) + \partial \tilde{h}_\varepsilon(x, z) \psi(z, \xi, t) + \varepsilon \tilde{h}_\varepsilon(x, z) \partial \psi(z, \xi, t), \\ \bar{\partial} T_\varepsilon(x, z, \xi, t) &= \bar{\partial} \vartheta(z, \xi, t) + \varepsilon \tilde{h}_\varepsilon(x, z) \bar{\partial} \psi(z, \xi, t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Uwzględniając $\varepsilon \rightarrow 0$ i korzystając ze wzorów (2.21), zależności (3.11) i (3.12) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(x, z, \xi, t) &= \vartheta(x, \xi, t) + O(\varepsilon), \\ \partial T_\varepsilon(x, z, \xi, t) &= \partial \vartheta(x, \xi, t) + \partial \tilde{h}_\varepsilon(x, z) \psi(x, \xi, t) + O(\varepsilon), \\ \bar{\partial} T_\varepsilon(x, z, \xi, t) &= \bar{\partial} \vartheta(x, \xi, t) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Zakładając przejście z parametrem ε do zera, pomijamy składniki $O(\varepsilon)$ w powyższych formułach.

W kolejnym etapie modelowania wprowadzamy rodzinę $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ funkcji

$$\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon = \tilde{\mathcal{L}}(x, z/\varepsilon, \nabla \vartheta(x, \xi, t), \vartheta(x, \xi, t), \psi(x, \xi, t)), \quad z \in \square_\varepsilon(x), x \in \overline{\Omega}, t \in (t_0, t_1),$$

które są funkcjami Lagrange'a w funkcjonalach działania:

$$\mathcal{D}_h^\varepsilon(\vartheta, \psi, p) = \int \int_{\Omega \Xi} \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon(x, z/\varepsilon, \nabla \vartheta, \vartheta, \psi, p)) dt d\xi dx.$$

Wykorzystując procedurę modelowania asymptotycznego (również dla parametru p), w której dla $\varepsilon \rightarrow 0$ funkcje $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ zmiennej z/ε , $z \in \square_\varepsilon(x)$ dążą do uśrednionej funkcji Lagrange'a $\mathcal{L}_0$, (2.23), przyjmującej postać

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(x, \nabla \vartheta(x, \xi, t), \vartheta(x, \xi, t), \psi(x, \xi, t)) &= \\ = \int_{\square(x)} \tilde{\mathcal{L}}(x, z, \nabla \vartheta(x, \xi, t) + \partial \tilde{h}(x, z) \psi(x, \xi, t), \vartheta(x, \xi, t)) dz, & \quad x \in \overline{\Omega}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

asymptotyczny funkcjonal działania można zapisać jako:

$$\mathcal{D}_h^0(\vartheta, \psi, p) = \iint_{\Omega \Xi} \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}_0(x, \nabla \vartheta, \vartheta, \psi, p) dt d\xi dx.$$

Stosując uśrednianie asymptotyczne wraz z dekompozycją (3.11) i wyrażeniami (3.13), otrzymujemy funkcję Lagrange'a $\mathcal{L}_0$, (3.14),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\nabla \vartheta \cdot \langle \mathbf{K} \rangle \cdot \nabla \vartheta + \psi \langle \partial h \cdot \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \psi + \\ + \nabla \vartheta \cdot \langle \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \psi + \psi \langle \partial h \cdot \mathbf{K} \rangle \cdot \nabla \vartheta) + \langle p \rangle \vartheta, \end{aligned} \quad (3.15)$$

z $\langle p \rangle$ zdefiniowanym równaniem konstytutywnym

$$\langle p \rangle = \langle c \rangle \dot{\vartheta} + \langle f \rangle. \quad (3.16)$$

Wykorzystując rozszerzoną zasadę stacjonarności działania do uśrednionej funkcji Lagrange'a (3.15) i traktując wyrażenie (3.16) jak parametr, otrzymujemy równania Eulera-Lagrange'a:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\langle \mathbf{K} \rangle \cdot \nabla \vartheta + \langle \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \psi) - \langle c \rangle \dot{\vartheta} = \langle f \rangle, \\ \langle \partial h \cdot \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \psi = - \langle \partial h \cdot \mathbf{K} \rangle \cdot \nabla \vartheta. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Powyższe równania wraz z asymptotyczną dekompozycją (3.11) reprezentują *model asymptotyczny*, opisujący zagadnienia przewodnictwa ciepła w laminatach o poprzecznej gradacji własności. Równania (3.17) mają gładkie, wolno-zmienne współczynniki, w przeciwieństwie do równania (3.6) o nieciągłych, silnie oscylujących współczynnikach. Ponadto równania te nie uwzględniają wpływu wielkości mikrostruktury laminatu.

Równania (3.17) można łatwo otrzymać z równań (3.10) modelu tolerancyjnego przez pominięcie w nich składników podkreślonych, zależnych od parametru mikrostruktury.

W modelu asymptotycznym należy sformułować warunek początkowy i warunki brzegowe tylko dla makrotemperatury ϑ . Ponadto funkcje $\vartheta(\cdot), \psi(\cdot)$ muszą spełniać warunki $\vartheta(\cdot, \xi, t), \psi(\cdot, \xi, t) \in SV_\delta^1(\Omega, \square)$.

3.3. Wybrane zagadnienia

3.3.1. Stacjonarny problem przewodnictwa ciepła w kierunku prostopadłym do warstw

3.3.1.1. Wprowadzenie

W tym podrozdziale rozpatrzmy laminaty o poprzecznej gradacji własności, por. rys. 3.2, poddane różnicy temperatur w kierunku równoległym do osi x (czyli prostopadle do warstw). Analizujemy problem stacjonarnego przewodnictwa ciepła, tj. z temperaturą T będącą funkcją jedynie współrzędnej x , $T=T(x)$. W rozważaniach pomijamy źródła ciepła f , tj. $f=0$. Oznaczmy współczynnik przewodzenia ciepła w laminacie przez $k=k_{11}$, a współczynniki składnika nr 1 (warstwy „prim”) oraz składnika nr 2 (warstwy „bis”) przez, odpowiednio, $k'=k'_{11}$ oraz $k''=k''_{11}$.

Poniżej najpierw zostanie przedstawione rozwiązanie problemu, a następnie w przykładach pokazane będą rozkłady temperatur w przypadku laminatu o równomiernym rozłożeniu warstw, laminatu o nierównomiernym rozłożeniu warstw oraz porównanie z rozwiązaniem otrzymanym według tzw. *teorii wyższego rzędu* (ang. *higher-order theory*), którą zaproponowali Aboudi, Pindera i Arnold (1999).

3.3.1.2. Rozwiązanie tolerancyjne

Ponieważ analizujemy stacjonarne przewodnictwo ciepła wzdłuż osi x , podstawowe niewiadome modelu tolerancyjnego są funkcjami argumentu x , tj. $\vartheta=\vartheta(x)$, $\psi=\psi(x)$. Wprowadźmy oznaczenia:

$$K \equiv v'k' + v''k'', \quad \tilde{K} \equiv 2\sqrt{3}v(k' - k''), \quad \tilde{K} \equiv 12(v'k'' + v''k'), \quad (3.18)$$

które otrzymano dla fluktuacyjnej funkcji kształtu przyjętej w postaci (3.1), przy czym przyjęto w niej $A=\lambda=\text{const}$ dla laminatu o równomiernym rozłożeniu warstw, albo $A=l=\text{const}$ dla laminatu o nierównomiernym rozłożeniu warstw; v' oraz v'' są funkcjami nasycenia składnikiem nr 1 oraz nr 2, odpowiednio.

Równania (3.10) modelu tolerancyjnego przewodnictwa ciepła w laminatach o poprzecznej gradacji własności można zatem zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}\partial[K(x)\partial\vartheta + \tilde{K}(x)\psi] &= 0, \\ \tilde{K}(x)\partial\vartheta + K(x)\psi &= 0.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Zauważmy, że amplitudę fluktuacji ψ można obliczyć z równania (3.19)₂:

$$\psi = -\tilde{K}(x)[\tilde{K}(x)]^{-1}\partial\vartheta. \quad (3.20)$$

Podstawiając prawą stronę wzoru (3.20) do równania (3.19)₁ oraz oznaczając

$$K^{ef}(x) \equiv K(x) - [\tilde{K}(x)]^2[K(x)]^{-1}, \quad (3.21)$$

otrzymujemy jedno równanie dla makrotemperatury ϑ :

$$\partial[K^{ef}(x)\partial\vartheta] = 0. \quad (3.22)$$

Powyższe równanie wraz ze wzorem (3.20) dla amplitudy fluktuacji ψ oraz mikro-makro dekompozycją (3.7), która przyjmuje postać

$$T(x) = \vartheta(x) + h(x)\psi(x), \quad (3.23)$$

opisuje stacjonarne przewodnictwo ciepła w kierunku prostopadłym do warstw w laminacie o poprzecznej gradacji własności.

Równanie (3.22) ma wolnozmiennne współczynniki, zdefiniowane przez znane funkcje, np. v' , v'' , v , h , por. (3.1). Stąd, całkując równanie (3.22), jego rozwiązanie analityczne można zapisać jako:

$$\vartheta(x) = C_1 \int [K^{ef}(x)]^{-1} dx + C_2, \quad (3.24)$$

ze stałymi C_1 , C_2 określonymi przez warunki brzegowe. W przypadku rozpatrywanego laminatu o stałych współczynnikach przewodzenia ciepła k' , k'' oraz fluktuacyjnej funkcji kształtu w postaci (3.1) uśredniony (efektywny) współczynnik przewodzenia ciepła K^{ef} , (3.21), wynosi

$$K^{ef}(x) = k'k''[k' + (k'' - k')v'(x)]^{-1}. \quad (3.25)$$

Przyjmijmy następujące warunki brzegowe dla makrotemperatury ϑ :

$$x = 0: \quad \vartheta(0) = T_0; \quad x = H: \quad \vartheta(H) = 0. \quad (3.26)$$

Oznaczając

$$N(x) = \int v'(x) dx, \quad (3.27)$$

oraz wykorzystując warunki brzegowe (3.26) oraz wzory (3.24) i (3.25), otrzymujemy stałe C_1, C_2 :

$$\begin{aligned} C_1 &= T_0 \frac{k'k''}{(k''-k')[N(0)-N(H)]-k'H}, \\ C_2 &= -T_0 \frac{k'H+(k''-k')N(H)}{(k''-k')[N(0)-N(H)]-k'H}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Zatem makrotemperaturę ϑ można zapisać jako

$$\vartheta(x) = C_1[x(k'')^{-1} + (k''-k')(k'k'')^{-1}N(x)] + C_2, \quad (3.29)$$

natomiast amplitudę fluktuacji ψ w postaci

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{3}}{6}(k''-k')(k'k'')^{-1}v(x)C_1. \quad (3.30)$$

Wstawiając podstawowe niewiadome modelu tolerancyjnego (3.29) i (3.30) do mikro-makro dekompozycji (3.7), temperatura T jest równa:

$$T(x) = \{x(k'')^{-1} + (k''-k')(k'k'')^{-1}[N(x) + \frac{\sqrt{3}}{6}h(x)v(x)]\}C_1 + C_2. \quad (3.31)$$

Wzór (3.31) ze stałymi C_1, C_2 , określonymi przez (3.28), oraz fluktuacyjną funkcją kształtu h , (3.1), opisuje „dokładny” rozkład całkowitej temperatury w rozpatrywanym laminacie o poprzecznej gradacji własności w modelu tolerancyjnym.

3.3.1.3. Przypadek laminatu o równomiernym rozłożeniu warstw – wyniki obliczeń

Obliczenia w tym przykładzie wykonano dla laminatu o równomiernym rozłożeniu komórek, por. rys. 3.2a. Przyjęto pięć różnych przypadków rozłożenia składników wzdłuż osi x , przyjmując funkcje nasycenia v', v'' w postaci:

1) funkcji liniowych (oznaczonych liczbą $\phi=1$)

$$v'(x)=x/H, \quad v''(x)=1-v'(x); \quad (3.32)$$

2) wielomianów drugiego stopnia ($\phi=2$)

$$v'(x)=(x/H)^2, \quad v''(x)=1-v'(x); \quad (3.33)$$

3) wielomianów trzeciego stopnia ($\phi=3$)

$$v'(x)=(x/H)^3, \quad v''(x)=1-v'(x); \quad (3.34)$$

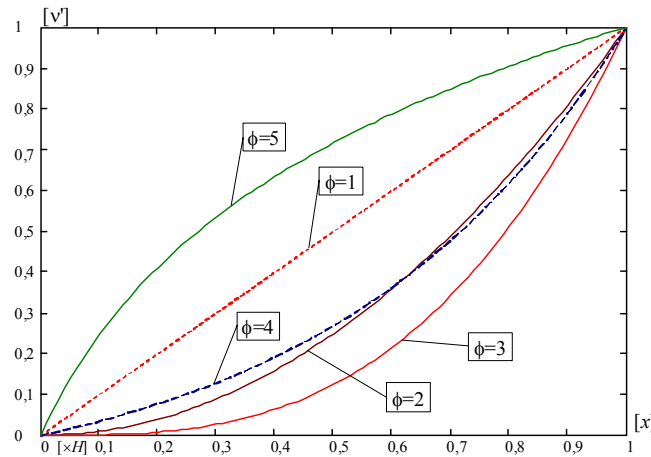
4) funkcji wykładniczych ($\phi=4$)

$$v'(x)=[1-\exp(2x/H)][1-\exp(2)]^{-1}, \quad v''(x)=1-v'(x); \quad (3.35)$$

5) funkcji logarytmicznych ($\phi=5$)

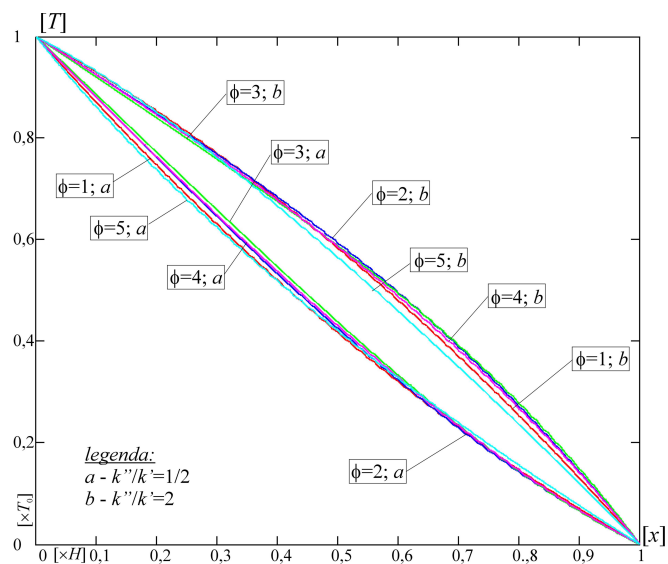
$$v'(x)=\frac{1}{2}\ln[(\exp(2)-1)(x/H)+1], \quad v''(x)=1-v'(x). \quad (3.36)$$

Funkcje $v'(\cdot)$ pokazano na rys. 3.4 i, jak można zauważyć, są one funkcjami rosnącymi argumentu x . Oznacza to, że udział składnika nr 1 rośnie, a składnika nr 2 maleje wraz z tą współrzędną.

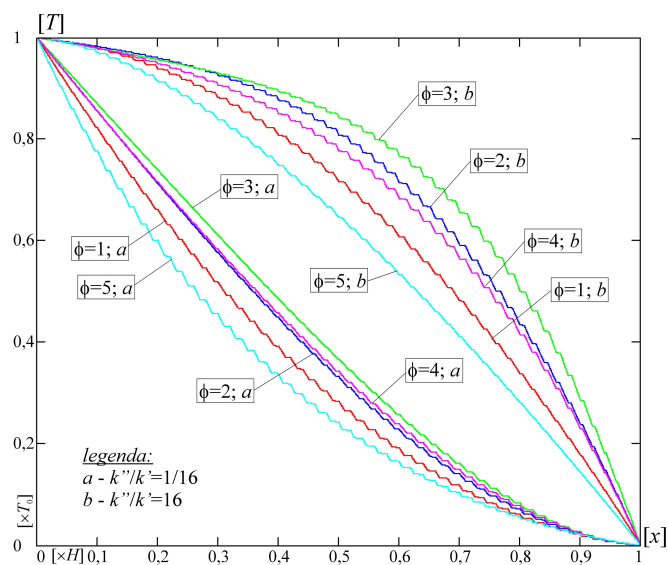


Rys. 3.4. Wykresy funkcji nasycenia v' składnikiem nr 1

Niektóre wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 3.5 oraz rys. 3.6. Na tych rysunkach zaprezentowano wykresy rozkładów temperatury T w laminacie w zależności od współrzędnej $x \in [0, H]$. Temperatura T jest określona wzorem (3.31) wraz ze stałymi (3.28) oraz funkcją kształtu (3.1), w której przyjęto $A=\lambda=\text{const}$ dla laminatu o równomiernym rozłożeniu warstw. Obliczenia wykonano dla funkcji nasycenia (3.32)-(3.36) i bezwymiarowego współczynnika $\lambda/H=0,02$, tj. liczby warstw równej $M=50$. Rys. 3.5 przedstawia wykresy dla parametrów $k''/k'=1/2$ (a) oraz $k''/k'=2$ (b), natomiast rys. 3.6 – dla parametrów $k''/k'=1/16$ (a) oraz $k''/k'=16$ (b). Pewne wyniki dla liniowych funkcji nasycenia pokazano także w pracy Jędrysiaka i Radzikowskiej (2008).



Rys. 3.5. Wykresy temperatury T wzdłuż grubości laminatu dla parametrów: $k''/k'=1/2$ (a) oraz $k''/k'=2$ (b) (dla funkcji nasycień (3.32)-(3.36) ($\phi=1, \dots, 5$); dla $\lambda/H=0,02$)



Rys. 3.6. Wykresy temperatury T wzdłuż grubości laminatu dla parametrów: $k''/k'=1/16$ (a) oraz $k''/k'=16$ (b) (dla funkcji nasycień (3.32)-(3.36) ($\phi=1, \dots, 5$); dla $\lambda/H=0,02$)

Analiza wyników obliczeń pozwala zauważyć, że:

- 1° funkcje rozkładu temperatury całkowitej w laminacie o poprzecznej gradacji własności, otrzymane w modelu tolerancyjnym, uwzględniają wpływ mikrostruktury, rys. 3.5-3.6;
- 2° rozkłady temperatury zależą od rozkładu własności materiałowych, czyli od funkcji nasycen v' , tj.:
 - a) wartości temperatury maleją dla następującej kolejności funkcji nasycenia: (3.36), (3.32), (3.35), (3.33), (3.34):
 - dla argumentów x bliskich 0, jeśli $k'' > k'$,
 - dla argumentów x bliskich H , jeśli $k'' < k'$;
 - b) wartości temperatury maleją dla następującej kolejności funkcji nasycenia: (3.34), (3.33), (3.35), (3.32), (3.36):
 - dla argumentów x bliskich 0 jeśli $k'' < k'$,
 - dla argumentów x bliskich H jeśli $k'' > k'$;
- 3° rozkłady temperatury zależą od różnic między wartościami współczynników przewodzenia ciepła k' , k'' , tj.:
 - a) wartości temperatury dla tej samej funkcji nasycenia są mniejsze dla $k'' < k'$ (np. $k''/k' = 1/2, 1/16$) niż dla $k'' > k'$ (np. $k''/k' = 2, 16$);
 - b) temperatura silniej maleje dla $k'' < k'$ niż dla $k'' > k'$;
 - c) zanikanie temperatury jest silniejsze dla $k''/k' \rightarrow 0$, por. rys. 3.6;
 - d) dla małych różnic między współczynnikami przewodzenia ciepła, np. $k''/k' = 1/2, 2$, por. rys. 3.5, różnice między rozkładami temperatury dla różnych funkcji nasycenia są mniejsze niż dla dużych różnic między tymi współczynnikami, $k''/k' = 1/16, 16$, por. rys. 3.6.

3.3.1.4. Przypadek laminatu o nierównomiernym rozłożeniu warstw – wyniki obliczeń

W tym podrozdziale pokazane są wyniki obliczeń dla przypadku stacjonarnego przewodnictwa ciepła w laminacie o nierównomiernym rozłożeniu komórek, por. rys. 3.2b. Część tych rezultatów przedstawiono w pracy Jędrysiaka i Radzikowskiej (2010b).

Założmy stałą grubość rozpatrywanego laminatu H , która jest związana z parametrem mikrostruktury l (przyp. stała grubość warstwy wykonanej ze składnika nr 1) oraz liczbą warstw M relacją

$$H=2(M-1)l.$$

Funkcję grubości warstw $\lambda(x)$ przyjmujemy w następującej postaci:

- 1) funkcji liniowej (oznaczonej liczbą $\alpha=1$)

$$\lambda(\bar{x}) = \bar{x} \frac{2(H-Ml)}{H(M-1)} + l; \quad (3.37)$$

- 2) wielomianu drugiego stopnia ($\alpha=2$)

$$\lambda(\bar{x}) = \bar{x}^2 \frac{6M(H-Ml)}{(M-1)(2M-1)H^2} + l; \quad (3.38)$$

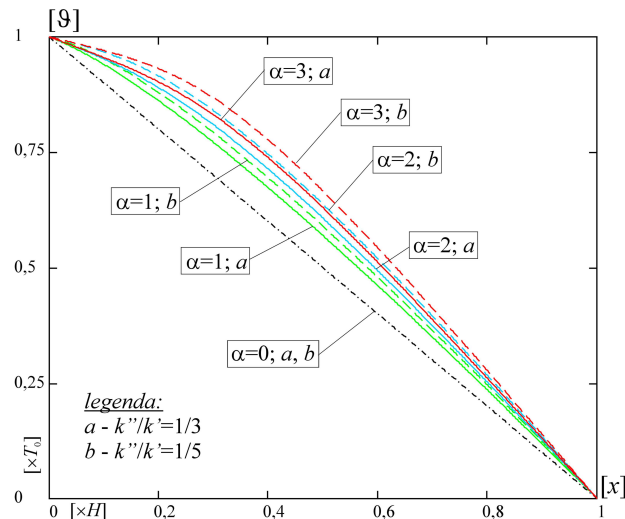
- 3) wielomianu trzeciego stopnia ($\alpha=3$)

$$\lambda(\bar{x}) = \bar{x}^3 \frac{4M(H-Ml)}{(M-1)^2 H^3} + l; \quad (3.39)$$

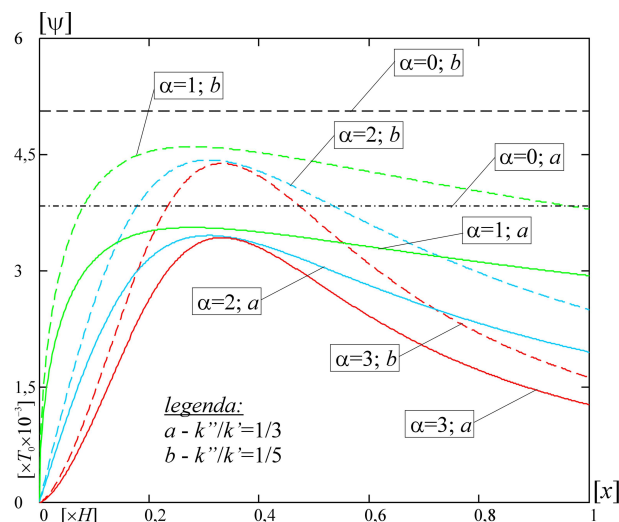
gdzie $\bar{x}$ jest środkiem „komórki”. Dla porównania, rozpatrzono także laminat periodyczny o stałej funkcji grubości warstw $\lambda(x)=2l$ (oznaczony $\alpha=0$). Dla funkcji grubości warstw funkcje nasycenia zdefiniowano następująco:

$$v'(\bar{x}) = l(\lambda(\bar{x}))^{-1}, \quad v''(\bar{x}) = 1 - v'(\bar{x}).$$

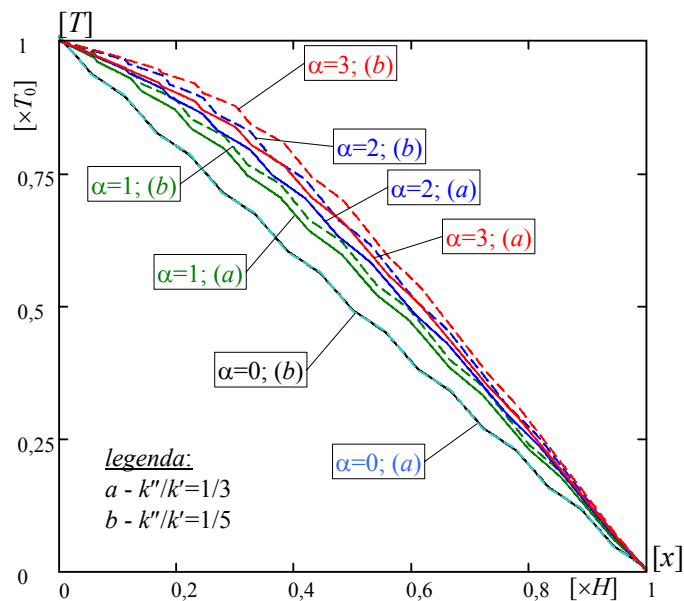
Zatem udział składnika nr 1 maleje, a składnika nr 2 rośnie wraz ze wzrostem współrzędnej x , w przeciwieństwie do przykładu z podrozdziału poprzedniego.



Rys. 3.7. Wykresy makrotemperatury ϑ wzdłuż grubości laminatu (dla funkcji grubości warstw: (3.37), (3.38), (3.39) ($\alpha=1,2,3$) oraz rozkładu periodycznego ($\alpha=0$); $l/H=0,026$)



Rys. 3.8. Wykresy amplitudy fluktuacji ψ wzdłuż grubości laminatu (dla funkcji grubości warstw: (3.37), (3.38), (3.39) ($\alpha=1,2,3$) oraz rozkładu periodycznego ($\alpha=0$); $l/H=0,026$)



Rys. 3.9. Wykresy temperatury T wzdłuż grubości laminatu (dla funkcji grubości warstw: (3.37), (3.38), (3.39) ($\alpha=1,2,3$) oraz rozkładu periodycznego ($\alpha=0$); $l/H=0,026$)

Wyniki obliczeń pokazano na rys. 3.7-3.9. Wykresy wykonano dla $M=20$, stąd $l/H=0,026$. Rys. 3.7 przedstawia krzywe makrotemperatury ϑ , określonej

wzorem (3.29) w zależności od współrzędnej $x \in [0, H]$, a rys. 3.8 – krzywe amplitudy fluktuacji ψ (wzór (3.30)). Natomiast na rys. 3.9 pokazano wykresy całkowitej temperatury T , określonej wzorem (3.31), w zależności od tej współrzędnej. We wzorze tym zastosowano fluktuacyjną funkcję kształtu w postaci (3.1), w której $A=l=\text{const}$ (dla laminatu o nierównomiernym rozłożeniu warstw). Przedstawione wyniki otrzymano dla ilorazów $k''/k'=1/3$ (a) oraz $k''/k'=1/5$ (b).

Na podstawie otrzymanych wyników obliczeń możemy sformułować następujące uwagi:

- 1° wartości makrotemperatury ϑ i amplitudy fluktuacji ψ zależą od funkcji grubości warstw λ , rys. 3.7-3.8;
 - a) najmniejsze wartości – makrotemperatury są dla funkcji liniowej (3.37), a amplitudy fluktuacji – dla wielomianu trzeciego stopnia (3.39);
 - b) największe wartości – makrotemperatury są dla wielomianu trzeciego stopnia (3.39), a amplitudy fluktuacji – dla funkcji liniowej (3.37);
- 2° wartości ϑ i amplitudy fluktuacji ψ zależą od ilorazu współczynników przewodnictwa ciepła k''/k' , rys. 3.7-3.8;
 - a) makrotemperatura rośnie, gdy maleje iloraz k''/k' (rys. 3.7);
 - b) makrotemperatura w laminacie periodycznym ($\alpha=0$, rys. 3.7) nie zależy od ilorazu k''/k' ;
 - c) amplitudy fluktuacji rosną, gdy maleje iloraz k''/k' (rys. 3.8);
 - d) amplitudy fluktuacji w laminacie periodycznym ($\alpha=0$, rys. 3.8) zależą od ilorazu k''/k' i ich wartości są większe niż amplitud w laminacie o poprzecznej gradacji własności;
- 3° wartości temperatury zależą od funkcji grubości warstw oraz od ilorazu współczynników przewodnictwa ciepła k''/k' , w podobny sposób jak wartości makrotemperatury, rys. 3.9.

3.3.1.5. Przypadek laminatu o równomiernym rozłożeniu warstw – porównanie wyników obliczeń wg modelu tolerancyjnego z wynikami wg teorii wyższego rzędu

W tym podrozdziale przedstawione zostanie porównanie wyników obliczeń dla przypadku stacjonarnego przewodnictwa ciepła w laminacie o równomiernym

rozłożeniu komórek, rys. 3.2a, otrzymanych w ramach modelu tolerancyjnego oraz tzw. *teorii wyższego rzędu*, por. Aboudi, Pindera i Arnold (1999).

Ponieważ w niniejszym opracowaniu wykorzystuje się przede wszystkim techniki modelowania tolerancyjnego oraz asymptotycznego, omówione w rozdziale 2, poniżej w skrócie będzie przedstawiona wspomniana *teoria wyższego rzędu*.

Niech x' , x'' będą lokalnymi współrzędnymi w laminach warstwy m -tej, ($m=1, \dots, M$). Podstawowym założeniem tego sposobu modelowania jest przyjęcie rozkładów temperatury w obu składnikach w m -tej warstwie w postaci:

$$\begin{aligned} T'(x') &= T'_0 + x' T'_1 + \frac{1}{2} [3(x')^2 - (\frac{1}{2} \lambda'_m)^2] T'_2, \\ T''(x'') &= T''_0 + x'' T''_1 + \frac{1}{2} [3(x'')^2 - (\frac{1}{2} \lambda''_m)^2] T''_2, \end{aligned} \quad (3.40)$$

gdzie parametry $T'_0, T'_1, T'_2, T''_0, T''_1, T''_2$ są nieznanymi stałymi. Można zauważyć, że w przypadku laminatu złożonego z M warstw, otrzymujemy $6M$ podstawowych niewiadomych modelu. Stąd, w celu obliczenia tych niewiadomych należy sformułować $6M$ dodatkowych warunków.

Wykorzystując wyżej wprowadzone oznaczenia współczynników przewodzenia ciepła k' , k'' obu składników oraz oznaczając pochodną $\partial \equiv \partial/\partial x$, dla $x=x', x''$, można zapisać następujące dodatkowe relacje:

- równania przewodnictwa ciepła w m -tej warstwie

$$-\partial[k'\partial T'(x')] = 0, \quad -\partial[k''\partial T''(x'')] = 0, \quad (3.41)$$

- warunki ciągłości strumienia ciepła w m -tej warstwie

$$k'\partial T'|_{x'=-\frac{1}{2}\lambda'_m}^m = k''\partial T''|_{x''=\frac{1}{2}\lambda''_m}^m, \quad k'\partial T'|_{x'=\frac{1}{2}\lambda'_m}^m = k''\partial T''|_{x''=-\frac{1}{2}\lambda''_{m+1}}^{m+1}, \quad (3.42)$$

- warunki ciągłości temperatury w m -tej warstwie

$$T'|_{x'=-\frac{1}{2}\lambda'_m}^m = T''|_{x''=\frac{1}{2}\lambda''_m}^m, \quad T'|_{x'=\frac{1}{2}\lambda'_m}^m = T''|_{x''=-\frac{1}{2}\lambda''_{m+1}}^{m+1}, \quad (3.43)$$

- warunki brzegowe dla temperatury (przyjęte w postaci (3.26))

$$\begin{aligned} T''|_1 = T_1 = T_0, \quad x' = -\frac{1}{2}\lambda'_1 \quad & \text{(tj. } x=0), \\ T'|^M = T_M = 0, \quad x'' = \frac{1}{2}\lambda''_M \quad & \text{(tj. } x=H), \end{aligned} \quad (3.44)$$

gdzie T_1 oraz T_M to temperatury na brzegach $x=0$ oraz $x=H$, odpowiednio.

Wykorzystując relacje (3.41)-(3.44) oraz wzory (3.40), otrzymujemy układ $6M$ liniowych równań algebraicznych dla $6M$ niewiadomych

$T'_0, T'_1, T'_2, T''_0, T''_1, T''_2$. Należy jednak zauważyć, że równania (3.41) są spełnione wtedy, gdy $T'_2 = T''_2 = 0$, co oznacza uproszczenie wzorów (3.40) do postaci:

$$T'(x') = T'_0 + x'T'_1, \quad T''(x'') = T''_0 + x''T''_1 \quad (3.45)$$

W tym przypadku liczba niewiadomych oraz równań redukuje się do $4M$. Korzystając ze wzorów (3.45), relacje (3.42)-(3.44) można zapisać jako:

- warunki ciągłości strumienia ciepła w m -tej warstwie

$$k'T'_1|^m = k''T''_1|^m, \quad k'T'_1|^m = k''T''_1|^m, \quad (3.46)$$

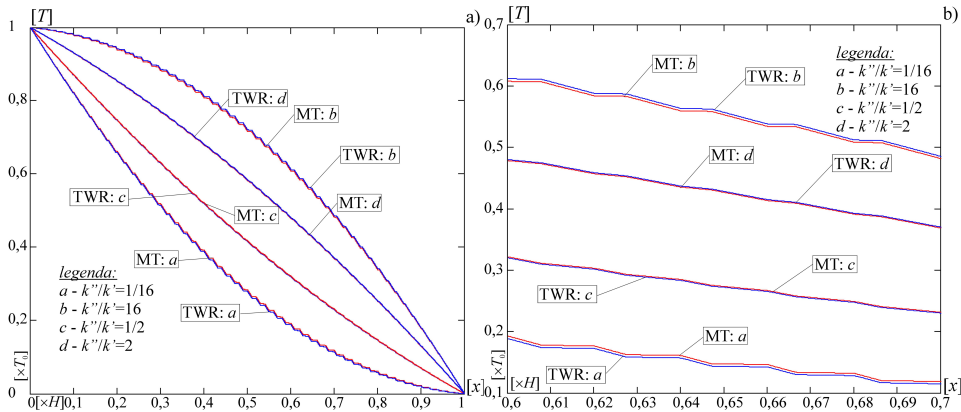
- warunki ciągłości temperatury w m -tej warstwie

$$T'_0 - \frac{1}{2}\lambda'_m T'_1|^m = T''_0 + \frac{1}{2}\lambda''_m T''_1|^m, \quad T'_0 + \frac{1}{2}\lambda'_m T'_1|^m = T''_0 - \frac{1}{2}\lambda''_{m+1} T''_1|^m, \quad (3.47)$$

- warunki brzegowe dla temperatury

$$\begin{aligned} T''_0 - \frac{1}{2}\lambda''_0 T''_1|^1 &= T_0, & x &= 0, \\ T'_0 + \frac{1}{2}\lambda'_M T'_1|^M &= 0, & x &= H. \end{aligned} \quad (3.48)$$

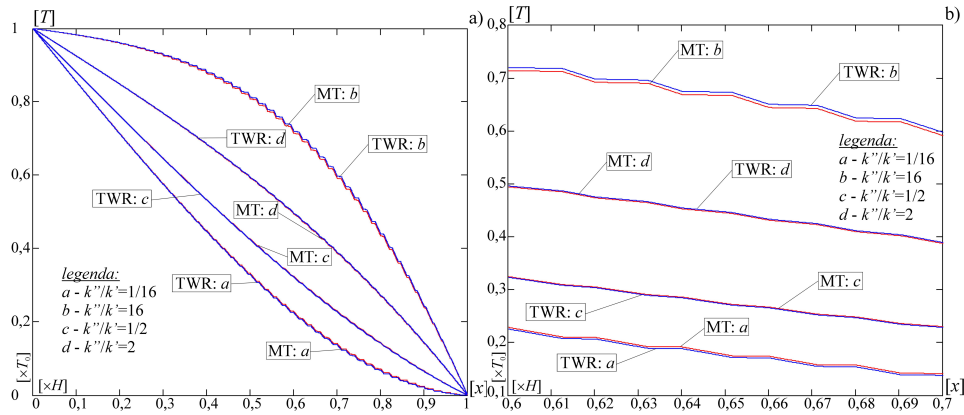
W ten sposób otrzymujemy układ $4M$ liniowych równań algebraicznych dla niewiadomych T'_0, T'_1, T''_0, T''_1 .



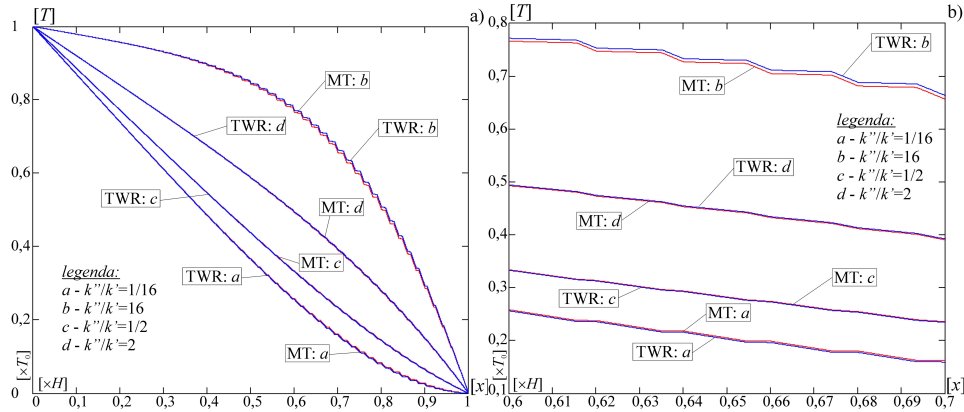
Rys. 3.10. Wykresy temperatury T według modelu tolerancyjnego (MT) i teorii wyższego rzędu (TWR) dla funkcji nasycenia (3.32) ($\phi=1$):
a) w przedziale $[0, H]$; b) w przedziale $[0.6H, 0.7H]$; ($\lambda/H=0.02$)

Wyniki obliczeń uzyskanych w ramach modelu tolerancyjnego, MT (przy zastosowaniu wzorów (3.31), (3.28) i (3.1), gdzie przyjęto $A=\lambda=\text{const}$ – dla laminatu o równomiernym rozłożeniu warstw) oraz teorii wyższego rzędu, TWR, (po wstawieniu rozwiązań układu $4M$ równań do wzorów (3.45)) pokazano na

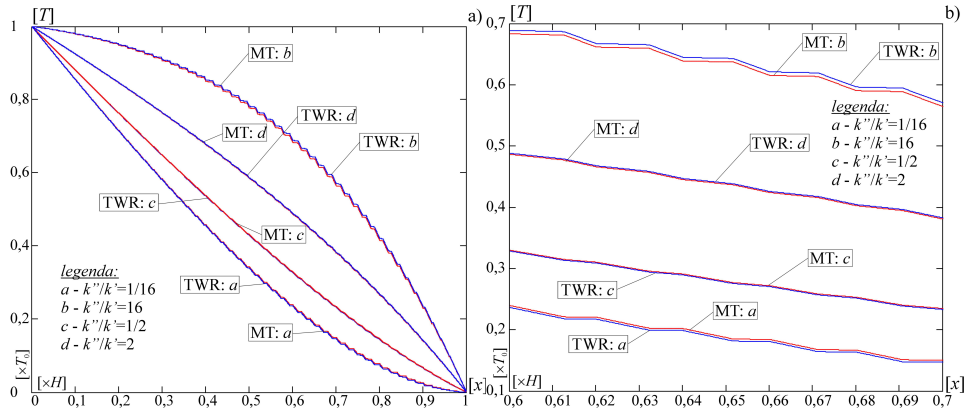
rys. 3.10-3.14. Wykresy wykonano dla ilorazów: $\lambda/H=0,02$ (liczba warstw $M=50$), $k''/k'=1/16$ (a), $k''/k'=16$ (b), $k''/k'=1/2$ (c) oraz $k''/k'=2$ (d). Na rys. 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14 pokazano krzywe wykonane dla funkcji nasycen: liniowych (3.32), wielomianów drugiego rzędu (3.33), wielomianów trzeciego rzędu (3.34), wykładniczych (3.35), logarytmicznych (3.36), odpowiednio. Wyniki przedstawiono dla dwóch przedziałów argumentu x : $[0, H]$ – rys. 3.10a, 3.11a, 3.12a, 3.13a, 3.14a; $[0,6H; 0,7H]$ – rys. 3.10b, 3.11b, 3.12b, 3.13b, 3.14b.



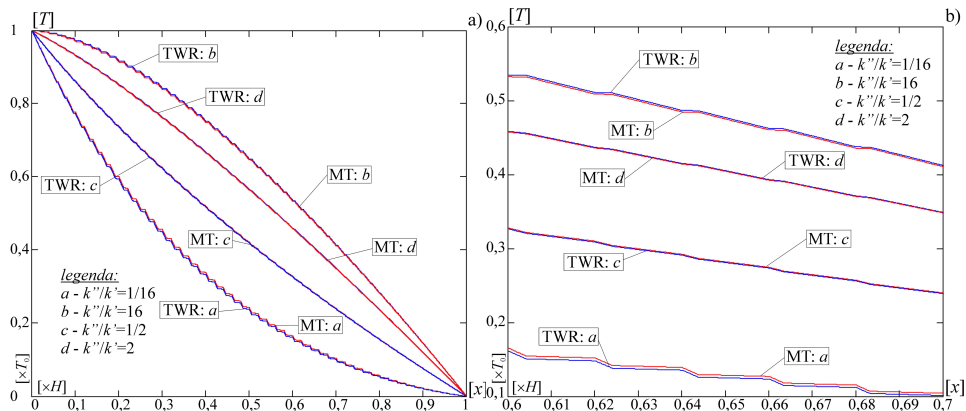
Rys. 3.11. Wykresy temperatury T według modelu tolerancyjnego (MT) i teorii wyższego rzędu (TWR) dla funkcji nasycenia (3.33) ($\phi=2$): a) w przedziale $[0, H]$; b) w przedziale $[0,6H; 0,7H]$; ($\lambda/H=0,02$)



Rys. 3.12. Wykresy temperatury T według modelu tolerancyjnego (MT) i teorii wyższego rzędu (TWR) dla funkcji nasycenia (3.34) ($\phi=3$): a) w przedziale $[0, H]$; b) w przedziale $[0,6H; 0,7H]$; ($\lambda/H=0,02$)



Rys. 3.13. Wykresy temperatury T według modelu tolerancyjnego (MT) i teorii wyższego rzędu (TWR) dla funkcji nasycenia (3.35) ($\phi=4$): a) w przedziale $[0, H]$; b) w przedziale $[0,6H; 0,7H]$; ($\lambda/H=0,02$)



Rys. 3.14. Wykresy temperatury T według modelu tolerancyjnego (MT) i teorii wyższego rzędu (TWR) dla funkcji nasycenia (3.36) ($\phi=5$): a) w przedziale $[0, H]$; b) w przedziale $[0,6H; 0,7H]$; ($\lambda/H=0,02$)

Analizując wyniki obliczeń, przedstawione na rys. 3.10-3.14, można zauważyć, że:

- 1° różnice między rozkładami temperatury T , obliczonymi w ramach modelu tolerancyjnego (MT) i teorii wyższego rzędu (TWR), są bardzo małe, rys. 3.10-3.14;
- 2° wartości temperatury otrzymane w modelu tolerancyjnym są:
 - a) wyższe niż wartości temperatury według teorii wyższego rzędu dla $k'' < k'$, np. $k''/k' = 1/2, 1/16$;

- b) niższe niż wartości temperatury według teorii wyższego rzędu dla $k'' > k'$, np. $k''/k' = 2, 16$;
- 3° różnice między wartościami temperatury, otrzymanymi w modelu tolerancyjnym i teorii wyższego rzędu, można uszeregować malejąco dla przyjętych funkcji nasyczeń w następujący sposób:
 - a) dla $k'' < k'$, np. $k''/k' = 1/2, 1/16$: dla funkcji logarytmicznych (3.36), rys. 3.14; dla funkcji liniowych (3.32), rys. 3.10; dla wielomianów drugiego stopnia (3.33), rys. 3.11; dla funkcji wykładniczych (3.35), rys. 3.13; dla wielomianów trzeciego stopnia (3.34), rys. 3.12;
 - b) dla $k'' > k'$, np. $k''/k' = 2, 16$: dla wielomianów trzeciego stopnia (3.34), rys. 3.12; dla funkcji wykładniczych (3.35), rys. 3.13; dla wielomianów drugiego stopnia (3.33), rys. 3.11; dla funkcji liniowych (3.32), rys. 3.10; dla funkcji logarytmicznych (3.36), rys. 3.14.

3.3.2. Kontrolowane przewodnictwo ciepła – kierunek prostopadły do warstw

3.3.2.1. Wprowadzenie

Obiektem badań w tym podrozdziale są laminaty o poprzecznej gradacji własności o równomiernym rozłożeniu warstw, por. rys. 3.2a, poddane różnicy temperatur w kierunku równoległym do osi x . Analizujemy szczególny problem niestacjonarnego przewodnictwa ciepła, w którym temperatura T jest funkcją współrzędnej x oraz czasu t , tj. $T = T(x, t)$, przy czym zależność od czasu jest dana. W rozważaniach pomijamy źródła ciepła f , tj. $f = 0$. Oznaczmy współczynnik przewodzenia ciepła w laminacie przez $k \equiv k_{11}$, a współczynniki składnika nr 1 (warstwy „prim”) oraz składnika nr 2 (warstwy „bis”) przez, odpowiednio, $k' \equiv k'_{11}$ oraz $k'' \equiv k''_{11}$. Ciepło właściwe dla obu składników jest równe c', c'' .

Poniżej najpierw zostanie przedstawione rozwiązanie problemu w ramach modelu tolerancyjnego przy zastosowaniu metody różnic skończonych, następnie wykorzystana będzie teoria wyższego rzędu, a na zakończenie pokazane będzie porównanie wyników obliczeń otrzymanych według obu metod. Część rezultatów zamieszczono także w pracach Radzikowskiej i Jędrysiaka (2009) oraz Radzikowskiej (2009).

3.3.2.2. Analiza zagadnienia w modelu tolerancyjnym – zastosowanie metody różnic skończonych

Rozpatrując zagadnienie niestacjonarne przewodnictwa ciepła wzdłuż osi x , przyjmujemy, że podstawowe niewiadome modelu tolerancyjnego są funkcjami współrzędnej x oraz czasu t , tj. $\vartheta = \vartheta(x, t)$, $\psi = \psi(x, t)$. Zakładając fluktuacyjną funkcję kształtu w postaci (3.1), w której $A = \lambda = \text{const}$ (dla laminatu o równomiernym rozłożeniu warstw), oraz wprowadzając oznaczenia:

$$K \equiv \langle k \rangle, \quad \tilde{K} \equiv \langle k \partial h \rangle, \quad \tilde{\tilde{K}} \equiv \langle k \partial h \partial h \rangle, \quad C \equiv \langle c \rangle, \quad (3.49)$$

równania (3.10) modelu tolerancyjnego przewodnictwa ciepła w laminatach o poprzecznej gradacji własności można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \partial(K(x)\partial\vartheta) - C(x)\dot{\vartheta} + \partial(\tilde{K}(x)\psi) &= 0, \\ \tilde{\tilde{K}}(x)\partial\vartheta + \tilde{K}(x)\psi + \lambda^2(v(x))^2 C(x)\dot{\psi} &= 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Rozważmy szczególny przypadek niestacjonarnego przewodnictwa ciepła prostopadłe do warstw, w którym warunki brzegowo-początkowe przyjęte są następująco:

– warunki początkowe:

$$\vartheta(x, 0) = u(x), \quad \psi(x, 0) = w(x), \quad (3.51)$$

– warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} \vartheta(0, t) &= u(0) \exp(-\gamma t) = u_0 \exp(-\gamma t), \\ \vartheta(H, t) &= u(H) \exp(-\gamma t) = 0, \end{aligned} \quad (3.52)$$

gdzie parametr $\gamma > 0$. Analizowany problem niestacjonarny można zatem nazwać *zagadnieniem kontrolowanego przewodnictwa ciepła*.

Rozwiązania układu równań (3.50) przyjmijmy w postaci:

$$\vartheta(x, t) = u(x) \exp(-\gamma t), \quad \psi(x, t) = w(x) \exp(-\gamma t), \quad (3.53)$$

gdzie parametr $\gamma > 0$ jest parametrem zanikania temperatury w czasie.

Podstawiając prawe strony wzorów (3.53) do równań (3.50), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \partial(K\partial u) + \gamma C u + \partial(\tilde{K}w) &= 0, \\ \tilde{\tilde{K}}\partial u + (\tilde{K} - \gamma\lambda^2 v^2 C)w &= 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Z równania (3.54)₂ wyznaczmy funkcję w , tj.:

$$w = \frac{\tilde{K}}{\gamma\lambda^2 v^2 C - \tilde{K}} \partial u, \quad (3.55)$$

przy czym można wykazać, że $\gamma\lambda^2 v^2 C - \tilde{K} \neq 0$. Wstawiając (3.55) do równania (3.54)₁, otrzymujemy

$$\partial(K + \frac{\tilde{K}^2}{\gamma\lambda^2 v^2 C - \tilde{K}}) \partial u + \gamma C u = 0. \quad (3.56)$$

Równania (3.56) oraz (3.55) są równaniami o współczynnikach funkcyjnych. Znalezienie ich rozwiązań w sposób analityczny w ogólnym przypadku nie jest możliwe, stąd zostanie zastosowana *metoda różnic skończonych* (MRS).

W celu uproszczenia zapisu równań tej metody wprowadźmy oznaczenia:

$$B(x) \equiv \frac{\tilde{K}(x)}{\gamma\lambda^2 v^2(x)C(x) - \tilde{K}(x)}, \quad A(x) \equiv K(x) + \tilde{K}(x)B(x). \quad (3.57)$$

Wówczas równania (3.56) i (3.55) przyjmują postać:

$$A \partial \partial u + \partial A \partial u + \gamma C u = 0, \quad w = B \partial u. \quad (3.58)$$

W metodzie różnic skończonych dzielimy zbiór $\Omega=(0,H)$ na N przedziałów. Wykorzystując tzw. różnice centralne, odpowiednie pochodne funkcji $g=g(x)$, $x \in \Omega$, względem współrzędnej x można przedstawić w sposób przybliżony:

$$\begin{aligned} g(x) &= g_i, \\ \partial g(x) &= \frac{1}{2\Delta x} (g_{i+1} - g_{i-1}), \\ \partial \partial g(x) &= \frac{1}{(\Delta x)^2} (g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}), \end{aligned} \quad (3.59)$$

gdzie Δx jest przyrostem argumentu x , $i=0,1,\dots,N+1$. Oznaczając:

$$A^{(0)} \equiv A, \quad A^{(1)} \equiv \partial A, \quad C^{(0)} \equiv \gamma C, \quad (3.60)$$

oraz zastępując relacjami (3.59) pochodne podstawowych niewiadomych u oraz w , równania (3.58) zapiszemy w postaci układu równań różnicowych:

$$\begin{aligned} A_i^{(0)} \frac{1}{(\Delta x)^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + A_i^{(1)} \frac{1}{2\Delta x} (u_{i+1} - u_{i-1}) + C_i^{(0)} u_i &= 0, \\ w_i &= B_i \frac{1}{2\Delta x} (u_{i+1} - u_{i-1}). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Wyrażenie (3.61)₁ stanowi układ równań algebraicznych z niewiadomymi u_i .

Korzystając z warunków brzegowych (3.52), w punktach „1” oraz „N+1” podziału mamy:

$$u_1 = u_0, \quad u_{N+1} = 0. \quad (3.62)$$

Uwzględniając warunki (3.62) w równaniach (3.61)₁ oraz odpowiednio je porządkując, otrzymujemy układ $N-1$ równań:

$$\begin{aligned} (C_2^{(0)} - \frac{2}{(\Delta x)^2} A_2^{(0)})u_2 + (\frac{1}{(\Delta x)^2} A_2^{(0)} + \frac{1}{2\Delta x} A_2^{(1)})u_3 &= (\frac{1}{2\Delta x} A_2^{(1)} - \frac{1}{(\Delta x)^2} A_2^{(0)})u_0, \\ (\frac{1}{(\Delta x)^2} A_i^{(0)} - \frac{1}{2\Delta x} A_i^{(1)})u_{i-1} + (C_i^{(0)} - \frac{2}{(\Delta x)^2} A_i^{(0)})u_i + (\frac{1}{(\Delta x)^2} A_i^{(0)} + \frac{1}{2\Delta x} A_i^{(1)})u_{i+1} &= 0, \\ i = 3, 4, \dots, N-1, \\ (\frac{1}{(\Delta x)^2} A_N^{(0)} - \frac{1}{2\Delta x} A_N^{(1)})u_{N-1} + (C_N^{(0)} - \frac{2}{(\Delta x)^2} A_N^{(0)})u_N &= 0. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Po rozwiązaniu układu (3.63) z uwzględnieniem warunków brzegowych (3.62), dostajemy wartości u_i , $i=1, 2, \dots, N$. Następnie obliczamy wartości w_i , wstawiając u_i do wzoru (3.61)₂. Wyniki obliczeń zostaną przedstawione w podrozdziale 3.3.2.4.

3.3.2.3. Analiza zagadnienia w teorii wyższego rzędu

Problem kontrolowanego przewodnictwa ciepła można analizować także wykorzystując teorię wyższego rzędu (por. Aboudi, Pindera i Arnold (1999)), zmodyfikowaną w pracy Radzikowskiej (2009).

Wzory teorii wyższego rzędu (3.40)-(3.44) można zapisać w postaci:

- rozkłady temperatury w obu składnikach w m -tej warstwie ($m=1, \dots, M$)

$$\begin{aligned} T'(x', t) &= \{T_0' + x'T_1' + \frac{1}{2}[3(x')^2 - (\frac{1}{2}\lambda_m')^2]T_2'\} \exp(-\gamma t), \\ T''(x'', t) &= \{T_0'' + x''T_1'' + \frac{1}{2}[3(x'')^2 - (\frac{1}{2}\lambda_m'')^2]T_2''\} \exp(-\gamma t), \end{aligned} \quad (3.64)$$

z nieznanymi stałymi $T_0', T_1', T_2', T_0'', T_1'', T_2''$;

- równania przewodnictwa ciepła w m -tej warstwie

$$-\partial[k'\partial T'(x', t)] + c'\dot{T}'(x', t) = 0, \quad -\partial[k''\partial T''(x'', t)] + c''\dot{T}''(x'', t) = 0, \quad (3.65)$$

z ciepłami właściwymi c', c'' ;

- warunki ciągłości strumienia ciepła w m -tej warstwie

$$\begin{aligned} k'(T_1' - \frac{3}{2}\lambda_m' T_2')|^m &= k''(T_2'' + \frac{3}{2}\lambda_m'' T_2'')|^m, \\ k'(T_1' + \frac{3}{2}\lambda_m' T_2')|^m &= k''(T_2'' - \frac{3}{2}\lambda_{m+1}'' T_2'')|^m; \end{aligned} \quad (3.66)$$

- warunki ciągłości temperatury w m -tej warstwie

$$\begin{aligned} T_0' - \frac{1}{2}\lambda_m' T_1' + \frac{1}{4}(\lambda_m')^2 T_2' &= T_0'' + \frac{1}{2}\lambda_m'' T_1'' + \frac{1}{4}(\lambda_m'')^2 T_2'', \\ T_0' + \frac{1}{2}\lambda_{m+1}' T_1' + \frac{1}{4}(\lambda_{m+1}')^2 T_2' &= T_0'' - \frac{1}{2}\lambda_{m+1}'' T_1'' + \frac{1}{4}(\lambda_{m+1}'')^2 T_2'', \end{aligned} \quad (3.67)$$

– warunki brzegowe dla temperatury w chwili początkowej $t=0$

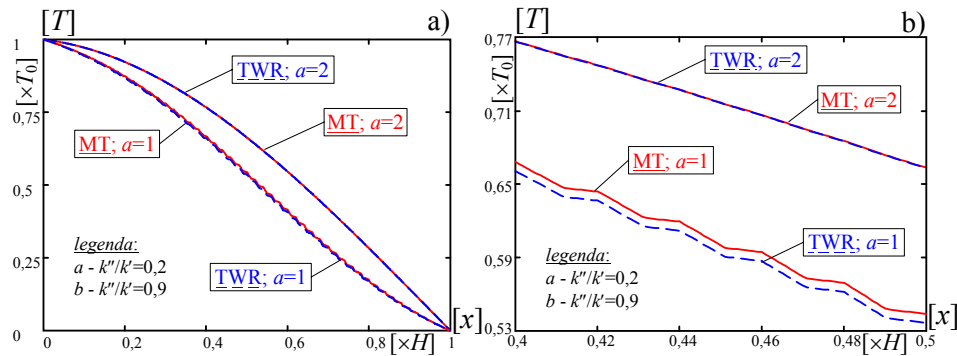
$$\begin{aligned} T_0'' - \frac{1}{2}\lambda_1''T_1'' + \frac{1}{4}(\lambda_1'')^2T_2''| &= T_0, & x=0, \\ T_0' + \frac{1}{2}\lambda_M'T_1' + \frac{1}{4}(\lambda_M')^2T_2'|^M &= 0, & x=H. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Równania (3.64)-(3.68) tworzą układ $6M$ liniowych równań algebraicznych z $6M$ niewiadomymi $T_0', T_1', T_2', T_0'', T_1'', T_2''$.

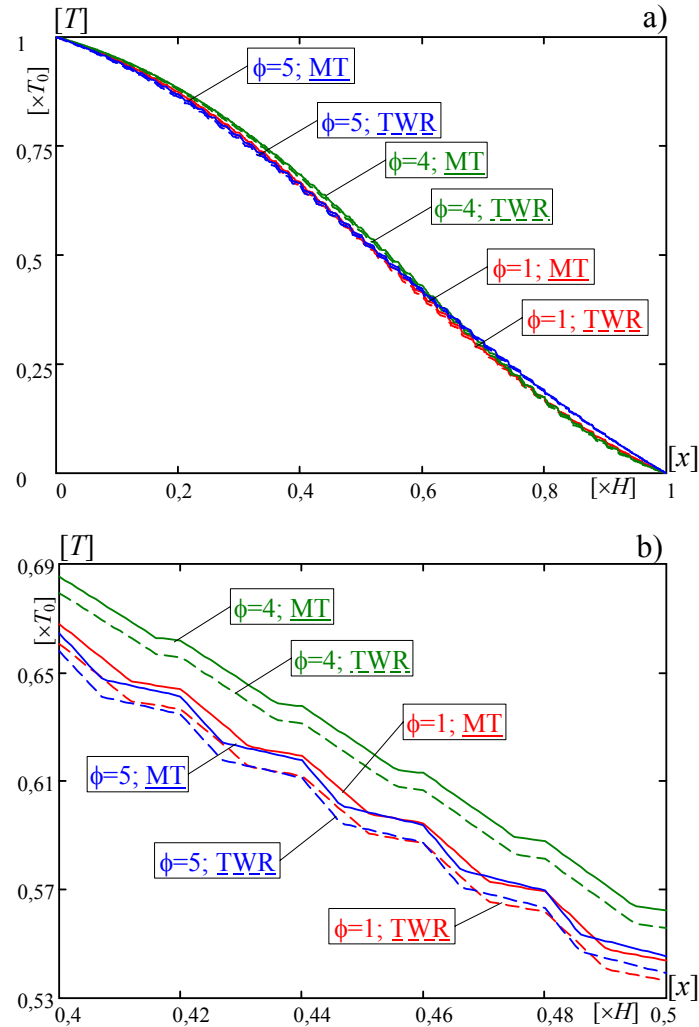
3.3.2.4. Porównanie wyników obliczeń

Porównamy teraz rezultaty otrzymane w przypadku kontrolowanego przewodnictwa ciepła w modelu tolerancyjnym (MT, przy zastosowaniu metody różnic skończonych) oraz teorii wyższego rzędu (TWR).

Wprowadźmy oznaczenia: $d' \equiv k'/c'$, $d'' \equiv k''/c''$, $\zeta \equiv d''/d'$. Wyniki obliczeń pokazano na rys. 3.15-3.17. Wykresy wykonano dla ilorazów: $\lambda/H=0,02$ (liczba warstw $M=50$). Na rys. 3.15a, 3.16a, 3.17a pokazano wykresy temperatury w zależności od współrzędnej $x \in [0, H]$, na rys. 3.15b, 3.16b, 3.17b – dla $x \in [0,4H; 0,5H]$. Rys. 3.15-3.16 przedstawiają wyniki obliczone dla $d'=1/8900 \text{ m}^2/\text{s}$, $\zeta=1$. Na rys. 3.15 pokazano krzywe wykonane dla liniowych funkcji nasycenia (3.32) oraz ilorazu $k''/k'=0,2$; $0,9$; a na rys. 3.16 – dla funkcji nasycenia: liniowych (3.32), $\phi=1$; wykładniczych (3.35), $\phi=4$; logarytmicznych (3.36), $\phi=5$, oraz $k''/k'=0,2$. Natomiast rys. 3.17 przedstawia wykresy dla $d'=1/15400 \text{ m}^2/\text{s}$, $\zeta=5$, $k''/k'=2$ oraz funkcji nasycenia: liniowych (3.32), $\phi=1$; wykładniczych (3.35), $\phi=4$; logarytmicznych (3.36), $\phi=5$.



Rys. 3.15. Wykresy temperatury T według modelu tolerancyjnego (MT) i teorii wyższego rzędu (TWR) dla funkcji nasycenia (3.32), $\phi=1$: a) przedział $[0, H]$; b) przedział $[0,4H; 0,5H]$; ($\lambda/H=0,02$; $d'=1/8900 \text{ m}^2/\text{s}$; $\zeta=1$)

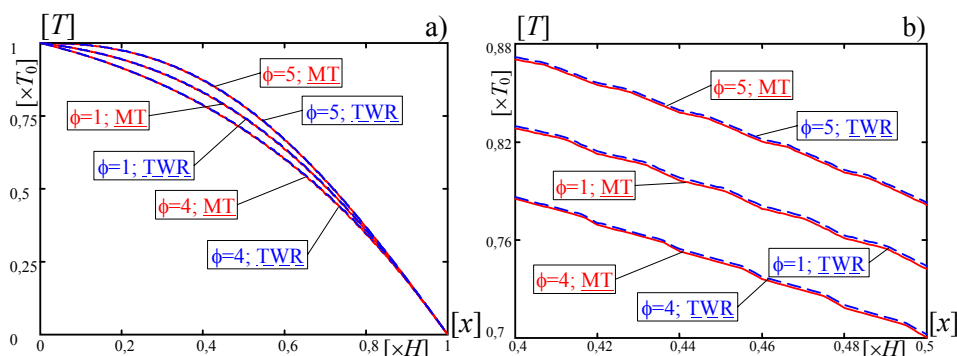


Rys. 3.16. Wykresy temperatury T według modelu tolerancyjnego (MT) i teorii wyższego rzędu (TWR) dla funkcji nasyceń – (3.32), $\phi=1$; (3.35), $\phi=4$; (3.36), $\phi=5$:
a) przedział $[0, H]$; b) przedział $[0,4H; 0,5H]$; ($\lambda/H=0,02$; $d'=1/8900 \text{ m}^2/\text{s}$; $\zeta=1$; $k''/k'=0,2$)

Na podstawie wyników obliczeń z rys. 3.15-3.17 można zauważyć, że:

- 1° różnice między rozkładami temperatury T , obliczonymi w ramach modelu tolerancyjnego (MT) i teorii wyższego rzędu (TWR), są bardzo małe, rys. 3.15-3.17;
- 2° wartości temperatury otrzymane w modelu tolerancyjnym są:

- a) wyższe niż wartości temperatury według teorii wyższego rzędu dla $k'' < k'$, np. $k''/k' = 0,2; 0,9$; rys. 3.15-3.16;
- b) niższe niż wartości temperatury według teorii wyższego rzędu dla $k'' > k'$, np. $k''/k' = 2$; rys. 3.17;
- 3° wartości temperatury, otrzymane w modelu tolerancyjnym i/lub teorii wyższego rzędu, można łatwo uszeregować malejąco/rośnie w zależności od przyjętych funkcji nasycień dla $k'' > k'$, np. $k''/k' = 2$, oraz wyższych wartości parametrów d' , ζ ; rys. 3.17;
- 4° malejące/rośnie uszeregowanie wartości temperatury, w modelu tolerancyjnym i/lub teorii wyższego rzędu, w zależności od przyjętych funkcji nasycień dla $k'' < k'$, np. $k''/k' = 0,2; 0,9$, oraz niższych wartości parametrów d' , ζ , zależy od współrzędnej x określającej położenie w laminacie, rys. 3.16.



Rys. 3.17. Wykresy temperatury T według modelu tolerancyjnego (MT) i teorii wyższego rzędu (TWR) dla funkcji nasycień – (3.32), $\phi=1$; (3.35), $\phi=4$; (3.36), $\phi=5$: a) przedział $[0, H]$; b) przedział $[0,4H; 0,5H]$; ($\lambda/H=0,02$; $d'=1/15400 \text{ m}^2/\text{s}$; $\zeta=5$; $k''/k'=2$)

3.3.3. Kontrolowane przewodnictwo ciepła – kierunek równoległy do warstw

3.3.3.1. Wprowadzenie

Problem przewodnictwa ciepła w laminatach o poprzecznej gradacji własności jest rozpatrywany w tym opracowaniu przede wszystkim w ramach *modelu tolerancyjnego*. Równania tego modelu mają współczynniki, które są ciągłymi, wolnozmiennymi funkcjami współrzędnej x , przy czym niektóre z nich uwzględniają wpływ wielkości mikrostruktury w przewodnictwie ciepła.

W ogólnym przypadku równania modelu tolerancyjnego stanowią układ równań różniczkowych sprzężonych ze sobą, por. (3.10). W pewnych zagadnieniach, zwłaszcza gdy celem jest analiza wybranych, szczególnych efektów, wskazane jest doprowadzenie do rozprzęgnięcia równań modelu. Jednym z takich przypadków jest zbadanie wpływu mikrooscylacji pola temperatury na brzeg laminatu prostopadłym do warstw.

W tym podrozdziale pokazane będą sposoby rozprzęgnięcia równań (3.10), na przykład przez wprowadzenie zastępczej niewiadomej lub przez przyjęcie źródeł ciepła w odpowiedniej postaci tak, aby można było analizować wyżej wymieniony efekt w laminatach o równomiernym rozłożeniu warstw, rys. 3.2a. Problem zostanie także zilustrowany przykładem obliczeniowym dla szczególnych postaci źródeł ciepła. Zaproponowane sposoby rozprzęgnięcia równań (3.10) wymagają dalszej, rozszerzonej analizy w celu potwierdzenia ich przydatności w badaniu przypadków szczególnych.

Punktem wyjścia są równania modelu tolerancyjnego (3.10). Załóżmy, że fluktuacyjna funkcja kształtu ma postać (3.1), gdzie przyjęto $A=\lambda=\text{const}$ (dla laminatu o równomiernym rozłożeniu warstw). Przyjmując, że ciepło właściwe składników nr 1 oraz nr 2 wynosi c' oraz c'' , odpowiednio, a elementy tensora przewodnictwa ciepła obu składników są równe $k'_{11}=k'_{22}=k'$ oraz $k''_{11}=k''_{22}=k''$, a także oznaczając:

$$\begin{aligned} K &\equiv \langle k \rangle, \quad \tilde{K} \equiv \langle k \partial h \rangle, \quad \bar{K} \equiv \langle k \partial h \partial h \rangle, \quad C \equiv \langle c \rangle, \\ F &\equiv \langle f \rangle, \quad \bar{F} \equiv \lambda^{-1} \langle f h \rangle, \end{aligned} \quad (3.69)$$

równania te można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \partial(K\partial\vartheta) + K\bar{\partial}\bar{\partial}\vartheta - C\dot{\vartheta} + \partial(\tilde{K}\psi) &= F, \\ \tilde{K}\partial\vartheta + \bar{K}\psi + \lambda^2\nu^2(C\dot{\psi} - K\bar{\partial}\bar{\partial}\psi) &= -\lambda\bar{F}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

gdzie wszystkie współczynniki są wolnozmiennymi funkcjami x .

3.3.3.2. Rozprzęgnięcie układu równań – zastępcza niewiadoma

Przedstawiony zostanie tutaj sposób rozprzęgnięcia układu równań (3.70) zaproponowany w pracy Jędrysiaka i Radzikowskiej (2007). Podobne podejście było zastosowane dla laminatów periodycznych przez Cz. Woźniaka, Wierzbickiego i Łacińską (2005), a dla laminowanych struktur o funkcyjnej gradacji własności

w artykułach: Jędrysiaka, Rychlewskiej i Cz. Woźniaka (2005) (płyty) oraz Cz. Woźniaka, Rychlewskiej i Wierzbickiego (2005) (powłoki).

Założmy, że źródło ciepła $f=0$. Wówczas

$$F = \bar{F} = 0. \quad (3.71)$$

Równania (3.70) redukują się do postaci:

$$\begin{aligned} \partial(K\partial\vartheta) + K\bar{\partial}\bar{\partial}\vartheta - C\dot{\vartheta} + \partial(\tilde{K}\psi) &= 0, \\ \tilde{K}\partial\vartheta + \tilde{K}\psi + \lambda^2 v^2 (C\dot{\psi} - K\bar{\partial}\bar{\partial}\psi) &= 0, \end{aligned} \quad (3.72)$$

czyli układu równań różniczkowych jednorodnych.

Wprowadźmy nową niewiadomą Ψ w miejsce niewiadomej amplitudy fluktuacji ψ , zdefiniowaną następująco

$$\Psi \equiv \psi + \tilde{K}\tilde{K}^{-1}\partial\vartheta, \quad (3.73)$$

którą będziemy nazywać *zmienną fluktuacyjną*. Ponieważ zarówno makrotemperatura ϑ , jak i amplituda fluktuacji ψ są funkcjami wolnozmiennymi współrzędnej x , nowa niewiadoma Ψ jest również funkcją wolnozmienną tego argumentu. Można zauważyć, że w modelu asymptotycznym, opisanym równaniami (3.17), które przy oznaczeniach (3.69) i warunku (3.71) mają postać:

$$\begin{aligned} \partial(K\partial\vartheta) + K\bar{\partial}\bar{\partial}\vartheta - C\dot{\vartheta} + \partial(\tilde{K}\psi) &= 0, \\ \tilde{K}\partial\vartheta + \tilde{K}\psi &= 0, \end{aligned} \quad (3.74)$$

funkcja Ψ jest równa zero.

Po podstawieniu (3.73) do równań (3.72) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} C\dot{\vartheta} - K\bar{\partial}\bar{\partial}\vartheta - \partial[(K - \tilde{K}^2\tilde{K}^{-1})\partial\vartheta] &= \partial(\tilde{K}\Psi), \\ \tilde{K}\Psi + \lambda^2 v^2 (C\dot{\Psi} - K\bar{\partial}\bar{\partial}\Psi) &= \lambda^2 v^2 \tilde{K}\tilde{K}^{-1}(C\partial\dot{\vartheta} - K\bar{\partial}\bar{\partial}\partial\vartheta). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Wykorzystując równanie (3.75)₁ oraz biorąc pod uwagę, że współczynniki są funkcjami wolnozmiennymi argumentu x , prawą stronę równania (3.75)₂ można zapisać w postaci

$$\lambda^2 v^2 \tilde{K}\tilde{K}^{-1}(C\partial\dot{\vartheta} - K\bar{\partial}\bar{\partial}\partial\vartheta) \cong \lambda^2 v^2 \tilde{K}\tilde{K}^{-1}\partial\partial[(K - \tilde{K}^2\tilde{K}^{-1})\partial\vartheta + \tilde{K}\Psi]. \quad (3.76)$$

Ponieważ makrotemperatura ϑ i amplituda fluktuacji ψ są funkcjami wolnozmiennymi argumentu x , prawą stronę równania (3.75)₂ można uważać za małą w porównaniu z jego lewą stroną. Stąd w tzw. *pierwszym przybliżeniu modelu tolerancyjnego* prawa strona równania (3.75)₂ może być pominięta. Wówczas w miejsce równań (3.75) mamy równania:

$$\begin{aligned} C\dot{\vartheta} - K\bar{\partial}\bar{\partial}\vartheta - \partial[(K - \tilde{K}^2\tilde{K}^{-1})\partial\vartheta] &= \partial(\tilde{K}\Psi), \\ K\Psi + \lambda^2 v^2 (C\Psi - K\bar{\partial}\bar{\partial}\Psi) &= 0. \end{aligned} \quad (3.77)$$

W ten sposób otrzymujemy układ równań różniczkowych (3.77), w którym drugie równanie dla zmiennej fluktuacyjnej Ψ jest niezależne. Równania (3.77) mogą stanowić pierwsze przybliżenie równań (3.72) i opisują pewien *przybliżony model tolerancyjny*, w którym temperaturę całkowitą można przedstawić w postaci

$$T(x, \xi, t) = \vartheta(x, \xi, t) + h(x)[\Psi(x, \xi, t) - \tilde{K}(x)(\tilde{K}(x))^{-1}\partial\vartheta(x, \xi, t)]. \quad (3.78)$$

Zauważmy, że przyjmując jednorodne warunki początkowo-brzegowe dla makrotemperatury ϑ (zarówno na brzegach $x=0, H$ jak i $\xi=0, L$) oraz niejednorodne warunki dla zmiennej fluktuacyjnej Ψ (tylko na brzegach $\xi=0, L$), możemy uwzględnić wpływ mikrooscylacji pola temperatury na brzegu laminatu prostopadłym do warstw na makrotemperaturę i temperaturę całkowitą (por. równanie (3.77)₁ oraz wzór (3.78)).

3.3.3.3. Rozprężnięcie układu równań – modelowanie źródeł ciepła

W tym podrozdziale pokazany będzie sposób rozprężnięcia układu równań (3.70), zaproponowany w pracy Jędrysiaka i Radzikowskiej (2010a).

W przypadku źródła ciepła f , które może być funkcją współrzędnych $x \in \Omega$, $\xi \in \Xi$, oraz czasu $t \in (t_0, t_1)$, zakładamy podobnie jak o temperaturze T , że jest funkcją tolerancyjnie-periodyczną argumentu x . Możemy zatem wprowadzić dekompozycję funkcji f w postaci:

$$f(x, \xi, t) = \tilde{f}(x, \xi, t) + \hat{f}(x, \xi, t), \quad (3.79)$$

gdzie $\tilde{f}(\cdot, \xi, t)$ jest uśrednionym źródłem ciepła, o którym zakładamy, że jest wolnozmienną funkcją argumentu x , natomiast funkcja $\hat{f}(\cdot, \xi, t)$ stanowi fluktuację źródła ciepła i jest tolerancyjnie-periodyczną funkcją x . Ponadto, funkcje te są znane, czyli można je przyjąć w określonej postaci.

Można pokazać, wykorzystując tolerancyjne uśrednianie, że między składnikami dekompozycji (3.79) źródła ciepła f a prawymi stronami równań (3.70) zdefiniowanymi przez (3.69)_{5,6} zachodzą relacje:

$$F = \langle f \rangle \approx \langle \tilde{f} \rangle, \quad \lambda \bar{F} = \langle hf \rangle \approx \langle h\hat{f} \rangle.$$

Poniżej zostaną pokazane trzy warianty przyjęcia źródła ciepła f tak, aby układ równań (3.70) uległ rozprzęgnięciu. Zostały one zaproponowane w pracy Jędrysiaka i Radzikowskiej (2010).

a) Wariant 1

Przyjmijmy źródło ciepła f w takiej postaci, że spełnione są warunki:

$$F = 0, \quad \lambda \bar{F} = -\tilde{K} \partial \vartheta. \quad (3.80)$$

Przy założeniach (3.80) równania (3.70) redukują się do postaci:

$$\begin{aligned} \partial(K \partial \vartheta) + K \bar{\partial} \bar{\partial} \vartheta - C \dot{\vartheta} &= -\partial(\tilde{K} \psi), \\ \tilde{K} \psi + \lambda^2 v^2 (C \dot{\psi} - K \bar{\partial} \bar{\partial} \psi) &= 0. \end{aligned} \quad (3.81)$$

W powyższym układzie równań równanie (3.81)₂ – to niezależne, jednorodne równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu ze względu na amplitudę fluktuacji ψ , natomiast (3.81)₁ – to niejednorodne równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu ze względu na makrotemperaturę ϑ .

Łatwo zauważyć, że, podobnie jak w poprzednim podrozdziale, przyjmując jednorodne warunki początkowo-brzegowe dla makrotemperatury ϑ (zarówno na brzegach $x=0, H$, jak i $\xi=0, L$) oraz niejednorodne warunki dla amplitudy fluktuacji ψ (tylko na brzegach $\xi=0, L$), możemy uwzględnić wpływ mikrooscylacji pola temperatury na brzegu laminatu prostopadłym do warstw na makrotemperaturę i temperaturę całkowitą.

b) Wariant 2

Przyjmijmy źródło ciepła f w takiej postaci, że spełnione są warunki:

$$F = \partial(\tilde{K} \psi), \quad \bar{F} = 0. \quad (3.82)$$

Powyższe założenia prowadzą do redukcji równań (3.70) do postaci:

$$\begin{aligned} \partial(K \partial \vartheta) + K \bar{\partial} \bar{\partial} \vartheta - C \dot{\vartheta} &= 0, \\ \tilde{K} \psi + \lambda^2 v^2 (C \dot{\psi} - K \bar{\partial} \bar{\partial} \psi) &= -\tilde{K} \partial \vartheta. \end{aligned} \quad (3.83)$$

W tym układzie równań równanie (3.83)₁ jest niezależnym, jednorodnym równaniem różniczkowym cząstkowym drugiego rzędu ze względu na makrotemperaturę ϑ , natomiast (3.83)₂ – to niejednorodne równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu ze względu na amplitudę fluktuacji ψ .

Zauważmy, że przyjmując jednorodne warunki początkowo-brzegowe dla makrotemperatury ϑ (zarówno na brzegach $x=0, H$, jak i $\xi=0, L$) oraz niejedno-

rodne warunki dla amplitudy fluktuacji ψ (tylko na brzegach $\xi=0, L$), możemy uwzględnić wpływ mikrooscytacji pola temperatury na brzegu laminatu prostopadłym do warstw na temperaturę całkowitą. Zatem pomimo zerowej makrotemperatury ϑ temperatura całkowita T jest różna od zera.

c) *Wariant 3*

W trzecim wariacie przyjmijmy możliwość emisji ciepła przez źródło ciepła f w takiej postaci, że spełnione są warunki:

$$F = \partial(\tilde{K}\psi), \quad \lambda \bar{F} = -\tilde{K}\partial\vartheta. \quad (3.84)$$

Przy tych założeniach równania (3.70) redukują się do postaci:

$$\begin{aligned} \partial(K\partial\vartheta) + K\bar{\partial}\bar{\partial}\vartheta - C\dot{\vartheta} &= 0, \\ \tilde{K}\psi + \lambda^2\nu^2(C\dot{\psi} - K\bar{\partial}\bar{\partial}\psi) &= 0. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Układ (3.85) tworzą dwa niezależne, jednorodne równania. Równanie (3.85)₁ jest równaniem różniczkowym cząstkowym drugiego rzędu ze względu na makrotemperaturę ϑ , natomiast (3.85)₂ – równaniem różniczkowym cząstkowym drugiego rzędu ze względu na amplitudę fluktuacji ψ .

Rozpatrywany *wariant 3* przyjęcia postaci źródła ciepła f jest wygodny do znalezienia rozwiązań analitycznych modelu tolerancyjnego. W związku z tym przyjmijmy dla rozwiązań równań (3.85) następujące warunki początkowe-brzegowe:

- warunki początkowe ($t=0$):

- dla makrotemperatury

$$\vartheta(x, \xi, 0) = 0, \quad (3.86)$$

- dla amplitudy fluktuacji

$$\psi(x, \xi, 0) = s^\psi(x, \xi), \quad (3.87)$$

- warunki brzegowe:

- dla makrotemperatury (na brzegach $\xi=0, \xi=L$ oraz $x=0, x=H$)

$$\vartheta(x, 0, t) = \vartheta(x, L, t) = 0, \quad \vartheta(0, \xi, t) = \vartheta(H, \xi, t) = 0, \quad (3.88)$$

- dla amplitudy fluktuacji (tylko na brzegach $\xi=0, \xi=L$)

$$\begin{aligned} \psi(x, 0, t) &= s^\psi(x, 0)\exp(-\gamma t) = s_0^\psi(x)\exp(-\gamma t), \\ \psi(x, L, t) &= 0, \end{aligned} \quad (3.89)$$

gdzie $\gamma \geq 0$ jest „parametrem zanikania amplitudy fluktuacji temperatury w czasie”. Dla $\gamma = 0$ otrzymujemy stacjonarne zagadnienie przewodnictwa ciepła, a dla $\gamma > 0$ – zagadnienie „kontrolowanego przewodnictwa ciepła”.

Zauważmy, że jednorodne warunki początkowe (3.86) i brzegowe (3.88), przyjęte dla makrotemperatury ϑ , prowadzą do rozwiązania zerowego równania (3.85)₁, tj.

$$\vartheta(x, \xi, t) = 0. \quad (3.90)$$

Dla amplitudy fluktuacji przyjęto warunki początkowe w postaci (3.87), a warunki brzegowe – tylko dla brzegów $\xi = 0$ i $\xi = L$, w postaci (3.89). Rozpatrujemy zatem szczególny przypadek tzw. *kontrolowanego przewodnictwa ciepła w kierunku równoległym do warstw*, wywołany jedynie przez amplitudę fluktuacji ψ . Rozwiązanie równania (3.85)₂ można zapisać jako

$$\psi(x, \xi, t) = s^\psi(x, \xi) \exp(-\gamma t). \quad (3.91)$$

Po podstawieniu rozwiązania (3.91) do równania (3.85)₂ oraz wykorzystaniu (3.90) w miejsce równań (3.85) otrzymujemy jedno równanie różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego tylko dla amplitudy fluktuacji

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial s^\psi}{\partial \xi} - \frac{\bar{K} - \gamma \lambda^2 v^2 C}{\lambda^2 v^2 K} s^\psi = 0. \quad (3.92)$$

Można wykazać, że dla każdego $x \in \Omega$ współczynniki występujące w równaniu (3.92) są dodatnie, tj.:

$$C(x)(K(x))^{-1} > 0, \quad \bar{K}(x) > 0, \quad \lambda^2 v^2(x) C(x) > 0, \quad \lambda^2 v^2(x) K(x) > 0.$$

W celu znalezienia rozwiązań równania (3.92) ustalamy chwilowo argument x (traktując go jak parametr). Zauważmy, że wówczas równanie (3.92) można traktować jak równanie różniczkowe liniowe jednorodne dla niewiadomej s^ψ względem zmiennej ξ o stałych współczynnikach.

Rozpatrzmy równanie (3.92) dla warunku $\gamma > 0$. Rozwiązania tego równania zależą od wartości wyrażenia $\bar{K} - \gamma \lambda^2 v^2 C$. W celu znalezienia tych rozwiązań rozpatrujemy trzy przypadki.

1° Jeżeli $\bar{K} > \gamma \lambda^2 v^2 C$ oraz $\eta(x) \equiv [(\bar{K} - \gamma \lambda^2 v^2 C)(\lambda^2 v^2 K)^{-1}]^{1/2}$, to rozwiązanie równania (3.92) ma postać

$$s^\psi(x, \xi) = C_1^\psi(x) \exp(\eta(x)\xi) + C_2^\psi(x) \exp(-\eta(x)\xi). \quad (3.93)$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych (3.89), otrzymując:

$$C_1^\Psi(x) = \frac{s_0^\Psi(x)\exp(-r_1(x)L)}{\exp(-r_1(x)L) - \exp(r_1(x)L)}, \quad C_2^\Psi(x) = \frac{s_0^\Psi(x)\exp(r_1(x)L)}{\exp(r_1(x)L) - \exp(-r_1(x)L)}. \quad (3.94)$$

Stąd rozwiązanie równania (3.92) ma postać

$$s^\Psi(x, \xi) = s_0^\Psi(x)\exp(r_1(x)\xi) \frac{\exp(2r_1(x)(L - \xi)) - 1}{\exp(2r_1(x)L) - 1}, \quad (3.95)$$

a amplituda fluktuacji ψ jest w tym przypadku określona zależnością

$$\psi(x, \xi, t) = s_0^\Psi(x)\exp(r_1(x)\xi) \frac{\exp(2r_1(x)(L - \xi)) - 1}{\exp(2r_1(x)L) - 1} \exp(-\gamma t). \quad (3.96)$$

2° Jeżeli $\bar{K} < \gamma\lambda^2\nu^2 C$ oraz $r_2(x) \equiv [(\gamma\lambda^2\nu^2 C - \bar{K})(\lambda^2\nu^2 K)^{-1}]^{1/2}$, to rozwiązanie równania (3.92) ma postać

$$s^\Psi(x, \xi) = C_1^\Psi(x)\cos(r_1(x)\xi) + C_2^\Psi(x)\cos(r_2(x)\xi). \quad (3.97)$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych (3.89), zakładając, że $\sin(r_2(x)L) \neq 0$. Otrzymujemy:

$$C_1^\Psi(x) = s_0^\Psi(x), \quad C_2^\Psi(x) = -s_0^\Psi(x) \frac{\cos(r_2(x)L)}{\sin(r_2(x)L)}. \quad (3.98)$$

Rozwiązanie równania (3.92) ma więc postać

$$s^\Psi(x, \xi) = s_0^\Psi(x) \left[\cos(r_2(x)\xi) - \frac{\cos(r_2(x)L)}{\sin(r_2(x)L)} \sin(r_2(x)\xi) \right], \quad (3.99)$$

natomiast amplituda fluktuacji ψ jest określona wzorem

$$\psi(x, \xi, t) = s_0^\Psi(x) \left[\cos(r_2(x)\xi) - \frac{\cos(r_2(x)L)}{\sin(r_2(x)L)} \sin(r_2(x)\xi) \right] \exp(-\gamma t). \quad (3.100)$$

3° Jeżeli $\bar{K} = \gamma\lambda^2\nu^2 C$, to rozwiązanie równania (3.92) ma postać

$$s^\Psi(x, \xi) = C_1^\Psi(x)\xi + C_2^\Psi(x). \quad (3.101)$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych (3.89) i otrzymujemy:

$$C_1^\Psi(x) = -s_0^\Psi(x)/L, \quad C_2^\Psi(x) = s_0^\Psi(x). \quad (3.102)$$

Rozwiązanie równania (3.92) ma zatem postać

$$s^\Psi(x, \xi) = s_0^\Psi(x)(1 - \xi/L), \quad (3.103)$$

a amplituda fluktuacji ψ jest określona zależnością

$$\psi(x, \xi, t) = s_0^\Psi(x)(1 - \xi/L)\exp(-\gamma t). \quad (3.104)$$

Rozwiązania (3.95), (3.99) i (3.103) zostaną wykorzystane w przykładzie obliczeniowym.

Na zakończenie tego podrozdziału przyjmijmy, że zachodzi warunek $\gamma=0$. Można zauważyć, że to założenie w odniesieniu do równania (3.92) sprawia, że mamy do czynienia z przypadkiem 1°. Zatem rozwiązanie tego równania jest szczególną postacią rozwiązania (3.95) uzyskanego dla tego przypadku.

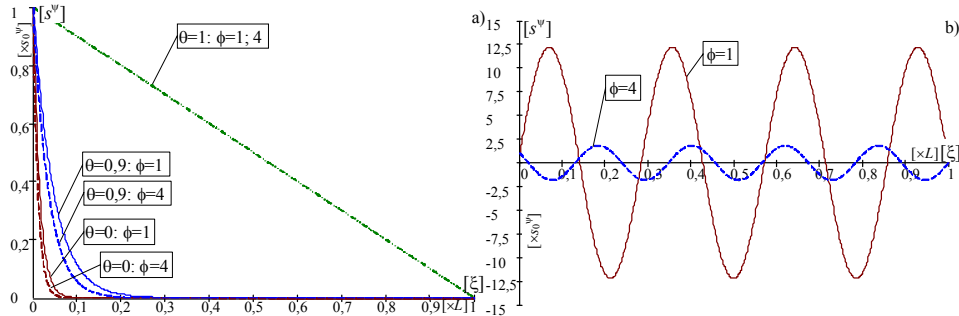
Rozpatrywany wyżej *variant 3* rozprężnięcia układu równań (3.70) odpowiada szczególnemu problemowi niestacjonarnego przewodnictwa ciepła, który został nazwany *kontrolowanym przewodnictwem ciepła w kierunku równoległym do warstw* (por. Jędrusiak i Radzikowska (2007); Siedlecka, Wierzbicki i Cz. Woźniak (2010)). Otrzymane rozwiązania (3.95), (3.99) i (3.103) zależą nie tylko od współrzędnej ξ (w kierunku równoległym do warstw) oraz czasu t , ale również od współrzędnej x . Jednakże w tych rozwiązaniach występuje funkcja $s_0^\Psi(x)$, która jest zadaną funkcją określającą amplitudę fluktuacji temperatury ψ na brzegu $\xi=0$. Odpowiedni dobór tej funkcji brzegowej, wraz z przyjętymi warunkami dla źródła ciepła f , powinien zapewnić przewodnictwo wzdłuż warstw. Jednakże przedstawione w tym opracowaniu omówienie tego problemu nie wydaje się dostatecznie wyczerpujące, a samo zagadnienie pozostaje nadal otwarte i wymaga dalszej analizy.

3.3.3.4. Wyniki obliczeń

Rozpatrzmy tutaj przykład ilustrujący przedstawiony wcześniej problem kontrolowanego przewodnictwa ciepła wzdłuż warstw, opisany równaniem (3.92), przy wykorzystaniu rozwiązania dla makrotemperatury w postaci (3.90). Ponieważ rozwiązania równania (3.92), tj. (3.95), (3.99) i (3.103), zależą od wartości wyrażenia $\bar{K} - \gamma\lambda^2\nu^2C$, wprowadźmy oznaczenie:

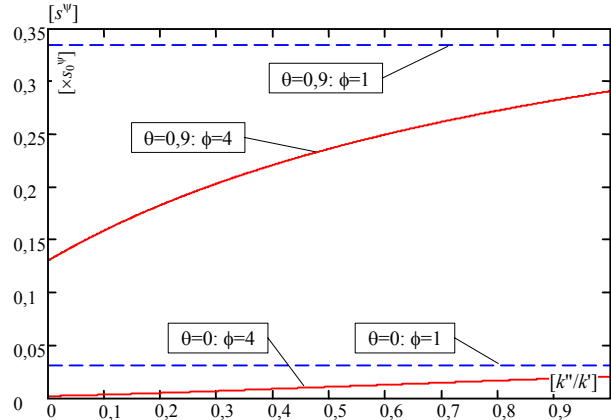
$$\theta(x) \equiv \gamma\lambda^2\nu^2(x)C(x)/\bar{K}(x), \quad x \in \Omega. \quad (3.105)$$

Rozpatrywanym w poprzednim podrozdziale trzem przypadkom (1°-3°) odpowiadają wartości parametru θ : 1° – dla $\theta \in [0,1)$, 2° – dla $\theta \in (1,\infty)$, 3° – dla $\theta=1$.



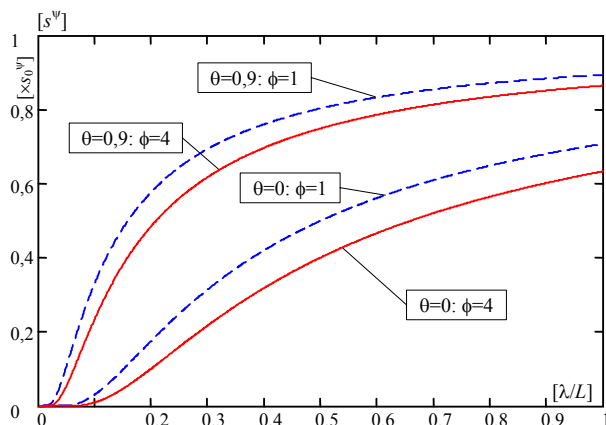
Rys. 3.18. Wykresy funkcji s^ψ dla funkcji nasycen (3.32) ($\phi=1$) i (3.35) ($\phi=4$):
a) zanikające ($\theta \leq 1$: $\theta=0; 0,9; 1$); b) oscylujące ($\theta > 1$: $\theta=1,1$);
($\lambda/L=0,1$; $k''/k'=0,5$, $x/H=0,5$)

Wyniki przedstawiono w postaci wykresów funkcji s^ψ na rys. 3.18-3.20. Wykonano je dla liniowych funkcji nasycenia składnikami nr 1 oraz nr 2 (wzory (3.32), $\phi=1$) oraz funkcji wykładniczych (wzory (3.35), $\phi=4$). Na rys. 3.18 pokazano krzywe w zależności od współrzędnej $\xi \in \Xi = [0, L]$ dla parametrów: $\lambda/L=0,1$, $k''/k'=0,5$, $x/H=0,5$. Rys. 3.18a zawiera rozwiązania zanikające, (3.95) i (3.103), dla $\theta=0; 0,9; 1$, a rys. 3.18b – oscylujące, (3.99), dla $\theta=1,1$.



Rys. 3.19. Wykresy rozwiązań zanikających s^ψ w zależności od ilorazu k''/k' dla funkcji nasycen (3.32) ($\phi=1$) i (3.35) ($\phi=4$); ($\lambda/L=0,1$; $x/H=0,5$; $\xi/L=0,05$)

Z przedstawionych rozwiązań (3.95), (3.99) i (3.103) rozwiązania oscylujące (3.99) (dla $\theta > 1$, np. $\theta=1,1$) nie są funkcjami wolnozmiennymi argumentu x , zatem nie spełniają odpowiedniego warunku w ramach modelu tolerancyjnego. Z tego względu poniżej rozpatrywane są tylko rozwiązania zanikające.



Rys. 3.20. Wykresy rozwiązań zanikających s^ψ w zależności od ilorazu λ/L dla funkcji nasycen (3.32) ($\phi=1$) i (3.35) ($\phi=4$); ($k''/k'=0,5$; $x/H=0,5$; $\xi/L=0,05$)

Rys. 3.19 przedstawia wykresy funkcji s^ψ w zależności od ilorazu współczynników przewodzenia ciepła k''/k' , dla rozwiązań zanikających (3.95), dla parametrów: $\theta=0; 0,9$, $\lambda/L=0,1$, $x/H=0,5$, $\xi/L=0,05$, oraz funkcji nasycen (3.32), $\phi=1$, (3.35), $\phi=4$. Na rys. 3.20 są natomiast wykresy funkcji s^ψ w zależności od parametru mikrostruktury λ , dla rozwiązań zanikających (3.95), dla parametrów: $\theta=0; 0,9$; $k''/k'=0,5$, $x/H=0,5$, $\xi/L=0,05$, oraz obu funkcji nasycen.

Analizując wyniki obliczeń przedstawione na rys. 3.18-3.20, można sformułować następujące uwagi szczegółowe:

- 1° funkcje s^ψ , będące składowymi amplitud fluktuacji ψ , zależą od parametru θ , (3.105), por. rys. 3.18, tj.:
 - a) zanikają wykładniczo dla $\theta \in [0,1)$;
 - b) zanikają liniowo dla $\theta=1$;
 - c) oscylują dla $\theta \in (1,\infty)$;
- 2° na podstawie wykresów rozwiązań pokazanych na rys. 3.18 można założyć, że:
 - a) funkcje s^ψ silnie zanikają dla małych wartości parametru θ i dla małych wartości ilorazów λ/L , k''/k' , rys. 3.18a;
 - b) rozwiązania s^ψ silniej zanikają dla wykładniczych funkcji nasycenia (3.35), $\phi=4$, niż dla funkcji liniowych (3.32), $\phi=1$, rys. 3.18a;
 - c) ze wzrostem parametru θ ($\theta > 1$) amplituda fluktuacji silnie oscyluje, rys. 3.18b;

- 3° wartości funkcji s^w rosną wraz ze wzrostem ilorazu k''/k' dla wykładniczych funkcji nasycenia (3.35), $\phi=4$, natomiast dla funkcji liniowych (3.32), $\phi=1$, funkcje s^w są stałe, rys. 3.19;
- 4° rozwiązania s^w rosną wraz ze wzrostem parametru mikrostruktury λ dla obu funkcji nasycen, rys. 3.20.

3.3.4. Stacjonarny problem dwukierunkowego przewodnictwa ciepła

3.3.4.1. Równania modelu tolerancyjnego

W tym podrozdziale analizowane jest zagadnienie stacjonarnego przewodnictwa ciepła w dwóch kierunkach w laminatach o poprzecznej gradacji własności. W badaniu tego problemu zastosowano model tolerancyjny, przyjmując, że elementy tensora przewodnictwa ciepła obu składników laminatu są równe $k'_{11}=k'_{22}=k'$ oraz $k''_{11}=k''_{22}=k''$, a temperatura T nie zależy od czasu t , tj. $T=T(x,\xi)$, $x \in \Omega$, $\xi \in \Xi$. Ponadto fluktuacyjna funkcja kształtu ma postać (3.1), w której przyjęto $A=\lambda=\text{const}$ dla laminatu o równomiernym rozłożeniu warstw. Równania modelu (3.10) przy wprowadzeniu oznaczeń (3.69) oraz pominięciu źródła ciepła f przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \partial(K\partial\vartheta) + K\bar{\partial}\bar{\partial}\vartheta + \partial(\tilde{K}\psi) &= 0, \\ \tilde{K}\partial\vartheta + \tilde{K}\psi - \lambda^2\nabla^2 K\bar{\partial}\bar{\partial}\psi &= 0. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Układ równań (3.106) jest układem równań różniczkowych cząstkowych rzędu drugiego względem współrzędnych przestrzennych x , ξ dla dwóch nieznanymi funkcji – makrotemperatury ϑ oraz amplitudy fluktuacji ψ , które są funkcjami wolnozmiennymi argumentu x , $\vartheta(\cdot, \xi), \psi(\cdot, \xi) \in SV_\delta^1(\Omega, \square)$. Dla makrotemperatury ϑ należy sformułować po dwa warunki brzegowe dla każdej współrzędnej, tj. x , ξ , natomiast dla amplitudy fluktuacji ψ wprowadzamy dwa warunki brzegowe tylko dla współrzędnej ξ . Całkowita temperatura T jest natomiast wyrażona wzorem (3.7), który przyjmuje postać

$$T_h(x, \xi) = \vartheta(x, \xi) + h(x)\psi(x, \xi), \quad (3.107)$$

gdzie fluktuacyjna funkcja kształtu $h(\cdot)$ jest określona przez (3.1), z $A=\lambda=\text{const}$ (dla laminatu o równomiernym rozłożeniu warstw).

Ponieważ równania (3.106) są równaniami o współczynnikach będących wolnozmiennymi funkcjami argumentu x , znalezienie ich rozwiązań w ogólnym przypadku nie jest możliwe. W celu otrzymania rozwiązań dla pewnych zadanych warunków brzegowych wykorzystano metodę różnic skończonych (podobnie jak w zagadnieniu kontrolowanego przewodnictwa ciepła – por. *podrozdział 3.3.2*) oraz program obliczeniowy przygotowany przez Wirowskiego (2010c).

3.3.4.2. Wyniki obliczeń

W przykładzie rozpatrzono zagadnienie stacjonarnego, dwukierunkowego przewodnictwa ciepła w laminacie o jednakowych wymiarach wzdłuż osi x , ξ , tj. $H=L$. Przyjęto liczbę warstw wzdłuż osi x równą $M=20$. Składniki nr 1 oraz nr 2 są rozłożone zgodnie z wykładniczymi funkcjami nasycenia określonymi wzorami (3.35). Obliczenia przeprowadzono dla różnych warunków brzegowych dla makrotemperatury ϑ , tj.:

$$\begin{aligned}\vartheta(x,0) &= \vartheta(x,H) = 25 \text{ } [^{\circ}\text{C}], \\ \vartheta(0,\xi) &= \vartheta(H,\xi) = \frac{100}{H^2} \xi^2 - \frac{100}{H} \xi + 25 \text{ } [^{\circ}\text{C}];\end{aligned}\quad (3.108)$$

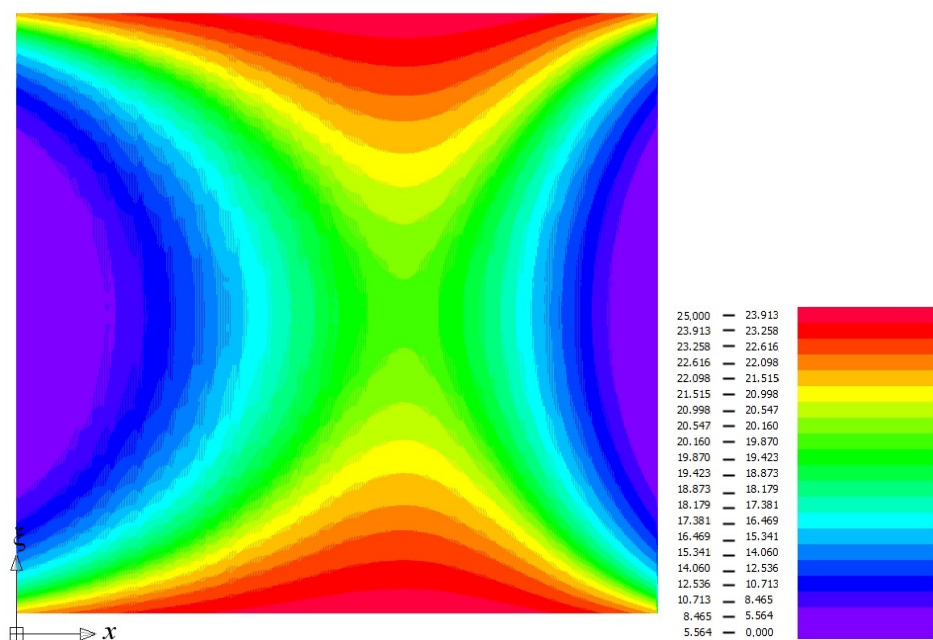
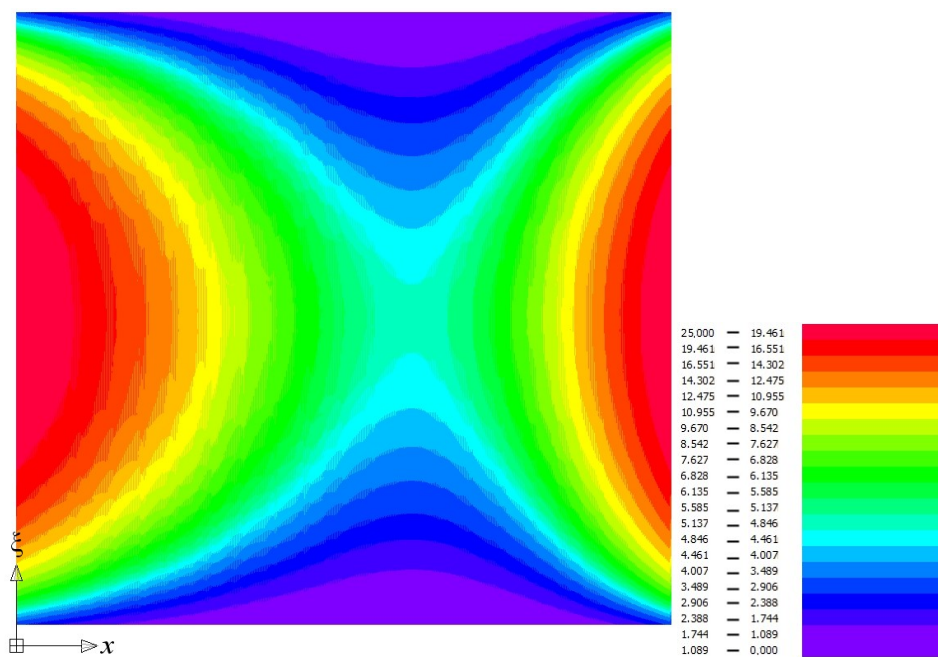
$$\begin{aligned}\vartheta(x,0) &= \vartheta(x,H) = 0 \text{ } [^{\circ}\text{C}], \\ \vartheta(0,\xi) &= \vartheta(H,\xi) = -\frac{100}{H^2} \xi^2 + \frac{100}{H} \xi \text{ } [^{\circ}\text{C}];\end{aligned}\quad (3.109)$$

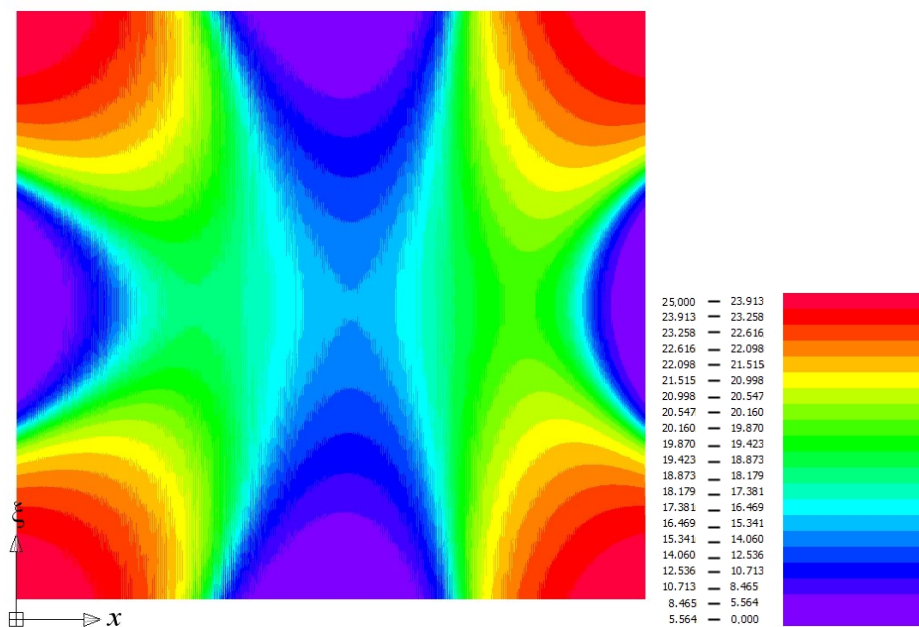
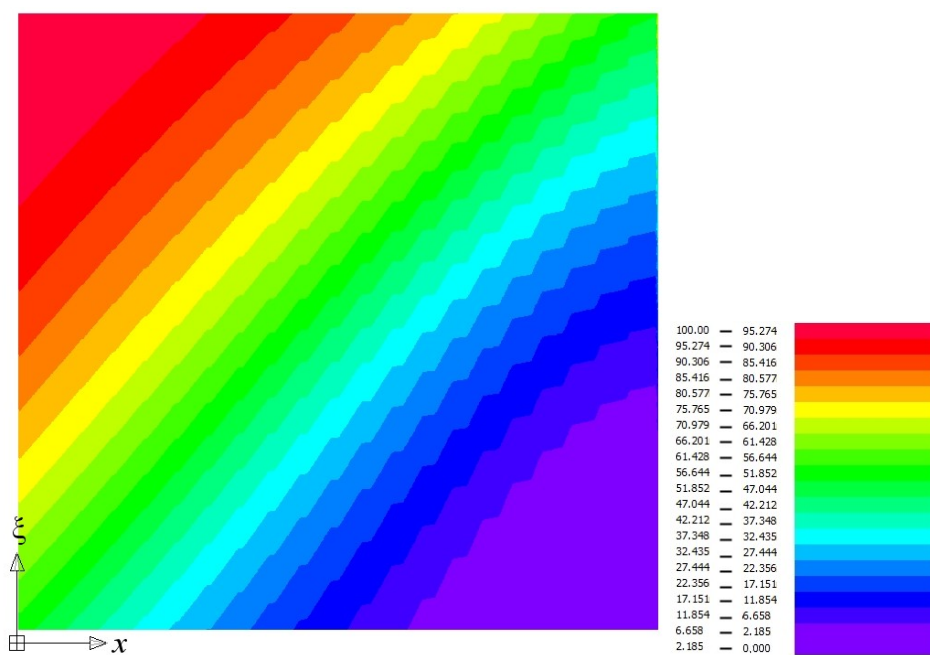
$$\begin{aligned}\vartheta(x,0) &= \vartheta(x,H) = \frac{100}{H^2} x^2 - \frac{100}{H} x + 25 \text{ } [^{\circ}\text{C}], \\ \vartheta(0,\xi) &= \vartheta(H,\xi) = \frac{100}{H^2} \xi^2 - \frac{100}{H} \xi + 25 \text{ } [^{\circ}\text{C}];\end{aligned}\quad (3.110)$$

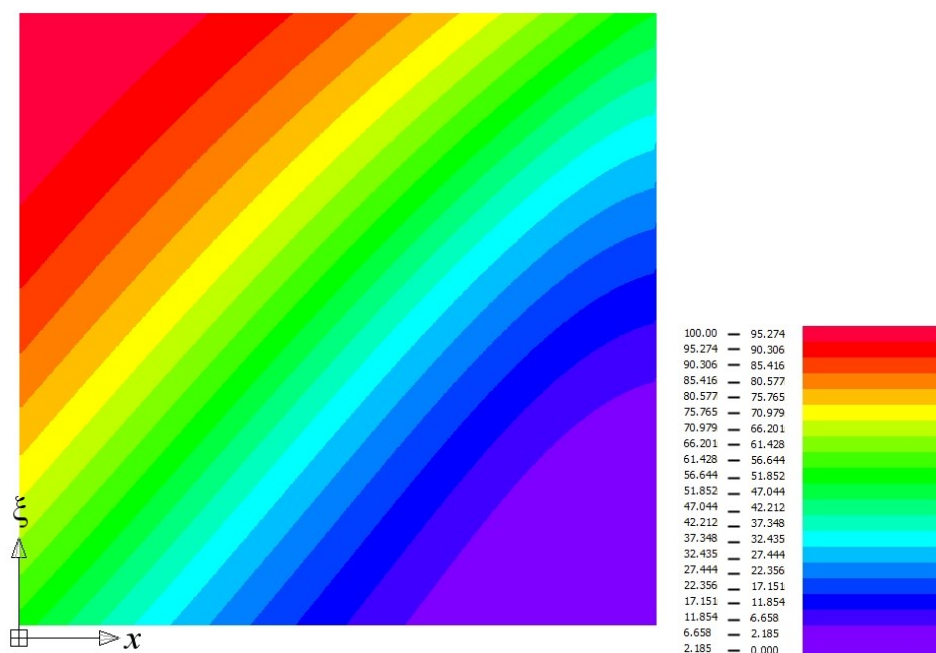
$$\begin{aligned}\vartheta(x,0) &= 50 - \frac{50}{H} x \text{ } [^{\circ}\text{C}], \\ \vartheta(x,H) &= 100 - \frac{50}{H} x \text{ } [^{\circ}\text{C}], \\ \vartheta(0,\xi) &= \frac{50}{H} \xi + 50 \text{ } [^{\circ}\text{C}], \\ \vartheta(H,\xi) &= \frac{50}{H} \xi \text{ } [^{\circ}\text{C}];\end{aligned}\quad (3.111)$$

oraz jednorodnych warunków brzegowych dla amplitudy fluktuacji ψ . Całkowita temperatura T została obliczona według wzoru (3.107), przy wykorzystaniu fluktuacyjnej funkcji kształtu (3.1).

Wyniki obliczeń w postaci wykresów całkowitej temperatury T dla warunków brzegowych (3.108), (3.109), (3.110) pokazano na rys. 3.21, 3.22, 3.23, odpowiednio. Wykresy te otrzymano dla ilorazu współczynników przewodzenia ciepła $k''/k'=10$. Dla porównania pokazano również wykresy temperatury całkowitej T , rys. 3.24, i makrotemperatury ϑ , rys. 3.25, wykonane dla warunków brzegowych (3.111) oraz ilorazu $k''/k'=0,1$.

Rys. 3.21. Temperatura całkowita T , [°C], dla warunków brzegowych (3.108); $k''/k'=10$ Rys. 3.22. Temperatura całkowita T , [°C], dla warunków brzegowych (3.109); $k''/k'=10$

Rys. 3.23. Temperatura całkowita T , [°C], dla warunków brzegowych (3.110); $k''/k'=10$ Rys. 3.24. Temperatura całkowita T , [°C], dla warunków brzegowych (3.111); $k''/k'=0,1$



Rys. 3.25. Makrotemperatura ϑ , [°C], dla warunków brzegowych (3.111); $k''/k'=0,1$

Na podstawie analizy wyników obliczeń przedstawionych na rys. 3.21-3.25 można zauważyć, że:

- 1° model tolerancyjny pozwala uwzględnić wpływ mikrostruktury laminatu na rozkład całkowitej temperatury dla różnych warunków brzegowych, rys. 3.21-3.24;
- 2° wpływ mikrostruktury na makrotemperaturę, czyli temperaturę uśrednioną (którą można badać w modelu asymptotycznym), nie jest widoczny, rys. 3.25.

Problem stacjonarnego przewodnictwa ciepła w dwóch kierunkach w laminacie o porzecznej gradacji własności wymaga szeregu dalszych analiz, na przykład porównawczych w celu weryfikacji modelu tolerancyjnego. Wydaje się również, że efekty związane z występowaniem w równaniach tego modelu, np. (3.106), składników z parametrem mikrostruktury λ mogą odgrywać znaczącą rolę w tzw. zagadnieniach warstwy brzegowej, por. Jędrusiak (2000b, 2001b) (dla cienkich płyt o periodycy w jednym kierunku), Łaciński (2005) (w przewodnictwie ciepła w periodycznych laminatach), Wierzbicki, Cz. Woźniak i Łacińska (2005) (w drganiach periodycznych laminatów).

4. Elastodynamika laminatów

4.1. Wprowadzenie

W tym rozdziale, podobnie jak w *rozdziale 3*, obiektami rozważań są kompozyty dwuskładnikowe, złożone z dużej liczby warstw. Zakładamy, że rozkład materiałów składowych jest nieperiodyczny wzdłuż kierunku prostopadłego do warstw, tj. osi x_1 , por. rys. 3.1-3.2. Przyjmujemy, że w skali mikro laminaty mogą mieć budowę z *równomiernym rozłożeniem warstw*, tj. stała grubość warstw (por. rys. 3.2a), lub z *nierównomiernym rozłożeniem warstw*, tj. grubość warstw jest określona funkcją (por. rys. 3.2b); natomiast na poziomie makro własności laminatów zmieniają się w sposób ciągły i gładki wzdłuż kierunku x_1 . Stąd takie kompozyty nazywamy *laminatami o poprzecznej gradacji własności*.

Wykorzystamy pojęcia wprowadzone w *rozdziale 3*: funkcja grubości warstw $\lambda(\cdot)$, funkcje nasycenia $v'(\cdot)$, $v''(\cdot)$, funkcja niejednorodności $v(\cdot)$, fluktuacyjna funkcja kształtu $h(\cdot)$, (3.1), pokazana na rys. 3.3.

Zakładamy, że rozważania prowadzimy w prostokątnym kartezjańskim układzie współrzędnych $Ox_1x_2x_3$. Przyjmijmy $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$, $x \equiv x_1$, $\xi \equiv (x_2, x_3)$, $\nabla \equiv (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$, $\partial \equiv (\partial_1, 0)$, $\bar{\nabla} \equiv (0, \partial_2, \partial_3)$. Niech wymiary laminatu wzdłuż osi $x \equiv x_1$, x_2 , x_3 wynoszą, odpowiednio, $H \equiv L_1$, L_2 , L_3 . Wprowadźmy zbiory $x \in \Omega \equiv (0, H)$, $\xi \in \Xi \equiv (0, L_1) \times (0, L_2)$ oraz przedział $\square = [-\lambda/2, \lambda/2]$, będący komórką w przedziale $\bar{\Omega}$ (przy czym $\lambda = \text{const}$ lub $\lambda = \lambda(x)$). Komórkę o środku w punkcie $x \in \Omega$ oznaczmy przez $\square(x) \equiv [x - \lambda/2, x + \lambda/2]$.

Wzór (2.2) określający uśrednienie funkcji f przyjmuje postać

$$\langle f \rangle(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda} \int_{x-\lambda/2}^{x+\lambda/2} f(y, \xi) dy, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \times \bar{\Xi}. \quad (4.1)$$

Zauważmy, że jeśli f jest funkcją tolerancyjnie-periodyczną, to $\langle f \rangle_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \bar{\Omega} \times \bar{\Xi}$, jest wolnozmienną funkcją będącą w tolerancji z funkcją $\langle f \rangle(\mathbf{x})$.

Tematyką tego rozdziału jest modelowanie zagadnień elastodynamiki laminatów. Wprowadźmy zatem funkcje opisujące własności sprężyste i inercyjne laminatu, tj. tensor modułów sprężystości $\mathbb{C}$ oraz gęstość masy ρ . Zakładamy, że są one funkcjami tolerancyjnie-periodycznymi argumentu x , $\mathbb{C}(\cdot), \rho(\cdot) \in TP_8^0(\Omega, \square)$, i przyjmują stałe wartości $\mathbb{C}'$, ρ' oraz $\mathbb{C}''$, ρ'' w składniku nr 1 oraz nr 2, odpowiednio. Oznaczmy pole przemieszczeń kompozytu przez $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, ze składowymi u_i ($i=1,2,3$) wzdłuż osi x_i , $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Xi}$, $t \in (t_0, t_1)$, a wektor sił objętościowych przez $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$. O niewiadomym polu przemieszczeń zakładamy, że jest funkcją tolerancyjnie-periodyczną współrzędnej $x=x_1$, tj. $\mathbf{u}(\cdot, \xi, t) \in TP_8^1(\Omega, \square)$, tzn. ma charakter zgodny z mikrostrukturą laminatu. Podobne założenie można przyjąć dla obciążenia $\mathbf{p}$, tj. $\mathbf{p}(\cdot, \xi, t) \in TP_8^1(\Omega, \square)$.

W kolejnych podrozdziałach przedstawione zostanie wyprowadzenie równań uśrednionych *modelu tolerancyjnego* oraz *modelu asymptotycznego*, opisujących elastodynamikę rozpatrywanych laminatów, a także zastosowanie otrzymanych równań w analizie pewnego przypadku drgań takiego laminatu.

4.2. Równania uśrednione

4.2.1. Model tolerancyjny

Przy wyprowadzeniu równań uśrednionych korzystamy z procedury opisanej w rozdziale 2. Zakładamy zatem, że zagadnienie elastodynamiki rozpatrywanego laminatu jest opisane funkcjonałem działania (2.9), przyjmującym postać

$$\mathcal{D}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = \iint_{\Omega \times \Xi} \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{L}(z, \nabla \mathbf{u}(z, \xi, t), \dot{\mathbf{u}}(z, \xi, t), \mathbf{u}(z, \xi, t), \mathbf{p}(z, \xi, t))) dt d\xi dz, \quad (4.2)$$

z funkcją Lagrange'a $\mathcal{L}$ określoną wzorem

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} - \nabla \mathbf{u} : \mathbb{C} : \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}, \quad (4.3)$$

gdzie $\mathbf{p}$ jest wektorem obciążenia. Przyjmujemy, że $\mathcal{L}(\cdot, \nabla \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ oraz $\mathbf{p}(\cdot)$ są tolerancyjnie-periodycznymi, silnie oscylującymi funkcjami argumentu x , $x \in \Omega$.

Korzystamy z zasady stacjonarności działania dla funkcjonału działania $\mathcal{D}$, (4.2), i funkcji Lagrange'a $\mathcal{L}$, (4.3), otrzymując w ten sposób dobrze znane równanie elastodynamiki, które można zapisać w postaci:

$$\nabla \cdot (\mathbb{C} : \nabla \mathbf{u}) - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{p} . \quad (4.4)$$

Podstawowa niewiadoma, tj. wektor przemieszczeń $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, \xi, t)$, $\mathbf{x} = (x, \xi) \in \overline{\Omega \times \Xi}$, $t \in (t_0, t_1)$, musi spełniać odpowiednie warunki regularności.

Równanie (4.4) ma silnie oscylujące, tolerancyjnie-periodyczne, nieciągłe współczynniki funkcyjne. W związku z tym nie jest wygodne w zastosowaniach do analizy zagadnień szczególnych. Za punkt wyjścia tolerancyjnego modelowania weźmy funkcjonal działania $\mathcal{D}$, (4.2), oraz funkcję Lagrange'a $\mathcal{L}$, (4.3). Sformułowanie tych funkcji stanowi pierwszy etap procedury modelowania.

Drugim etapem jest mikro-makro dekompozycja podstawowej niewiadomej, tj. pola przemieszczeń $\mathbf{u}(x, \xi, t)$, w postaci

$$\mathbf{u}_h(x, \xi, t) = \mathbf{w}(x, \xi, t) + h(x)\mathbf{v}(x, \xi, t), \quad (4.5)$$

gdzie $\mathbf{w}(\cdot, \xi, t)$, $\mathbf{v}(\cdot, \xi, t) \in SV_\delta^1(\Omega, \square)$, $t \in (t_0, t_1)$, $\xi \in \Xi$. Podstawowymi niewiadomymi są funkcje $\mathbf{w}$ oraz $\mathbf{v}$, nazywane *makroprzemieszczeniami* oraz *amplitudami fluktuacji przemieszczeń*. Natomiast funkcja $h(\cdot) \in FS_\delta^1(\Omega, \square)$ to znana fluktuacyjna funkcja kształtu, postulowana w każdym szczególnym, analizowanym problemie.

W trzecim etapie modelowania ograniczamy rozważania do dowolnej, ale ustalonej komórki $\square(x) \equiv [x - \lambda/2, x + \lambda/2]$, $x \in \Omega$. Wprowadzamy tolerancyjne przybliżenia $\tilde{\mathbb{C}}(x, \cdot)$, $\tilde{\rho}(x, \cdot)$ funkcji $\mathbb{C}(x, \cdot)$, $\rho(x, \cdot)$ w $\square(x)$ oraz zakładamy, że $\langle \tilde{\rho}(x, \cdot) \tilde{h}(x, \cdot) \rangle = 0$. Stosując procedurę tolerancyjnego uśredniania z podrozdziału 2.3, otrzymujemy uśredniony funkcjonal działania przy dekompozycji (4.5) dla komórki $\square(x)$

$$\mathcal{D}_h(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{p}) = \iint_{\Omega \times t_0}^{t_1} \langle \mathcal{L}_h \rangle(z, \nabla \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \mathbf{w}, \nabla \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v}, \mathbf{p}) dt d\xi dz,$$

w którym uśredniona funkcja Lagrange'a $\mathcal{L}$ jest określona przez

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_h \rangle = & \frac{1}{2} (\langle \rho \rangle \dot{\mathbf{w}} \cdot \dot{\mathbf{w}} + \langle \rho h h \rangle \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} - \nabla \mathbf{w} : \langle \mathbb{C} \rangle : \nabla \mathbf{w} - \\ & - \mathbf{v} \cdot \langle \partial h \cdot \langle \mathbb{C} \rangle : \nabla \mathbf{w} - \nabla \mathbf{w} : \langle \mathbb{C} \cdot \partial h \rangle \cdot \mathbf{v} - \\ & - \mathbf{v} \cdot \langle \partial h \cdot \langle \mathbb{C} \cdot \partial h \rangle \cdot \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v} : \langle \mathbb{C} h h \rangle : \nabla \mathbf{v}) + \langle \mathbf{p} \rangle \cdot \mathbf{w} + \langle \mathbf{p} h \rangle \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Wykorzystując zasadę stacjonarności działania do uśrednionej funkcji Lagrange'a (4.5), otrzymujemy równania:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\langle \mathbb{C} \rangle : \nabla \mathbf{w} + \langle \mathbb{C} \cdot \partial h \rangle \cdot \mathbf{v}) - \langle \rho \rangle \ddot{\mathbf{w}} &= \langle \mathbf{p} \rangle, \\ - \nabla \cdot (\langle \mathbb{C} h h \rangle : \nabla \mathbf{v}) + \langle \partial h \cdot \langle \mathbb{C} \cdot \partial h \rangle \cdot \mathbf{v} + \langle \mathbb{C} \cdot \partial h \rangle : \nabla \mathbf{w} + \langle \rho h h \rangle \ddot{\mathbf{v}} &= \langle \mathbf{p} h \rangle. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Powyższe równania, wraz z mikro-makro dekompozycją (4.5), są narzędziem do analizy zagadnień elastodynamiki laminatów o poprzecznej gradacji własności w ramach *modelu tolerancyjnego*. Współczynniki równań (4.7) są gładkimi, wolnozmiennymi funkcjami argumentu x , w przeciwieństwie do współczynników równania (4.4) – nieciągłych i silnie oscylujących. Równania (4.7) opisują wpływ wielkości mikrostruktury laminatu w problemach elastodynamiki poprzez zależne od parametru mikrostruktury składniki podkreślone.

Warunki początkowe należy sformułować dla podstawowych niewiadomych $\mathbf{w}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot)$. Warunki brzegowe na wszystkich brzegach, tj. $x=0, H$; $x_2=0, L_2$, $x_3=0, L_3$, muszą być określone dla makroprzemieszczeń $\mathbf{w}$, natomiast dla amplitud fluktuacji przemieszczeń $\mathbf{v}$ tylko na brzegach $x_2=0, L_2$, $x_3=0, L_3$. Ponadto rozwiązania $\mathbf{w}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot)$ mają fizyczny sens wtedy, gdy spełnione są warunki $\mathbf{w}(\cdot, \xi, t), \mathbf{v}(\cdot, \xi, t) \in SV_\delta^1(\Omega, \square)$. Można je wykorzystać do oceny *a posteriori* parametru tolerancji δ , czyli do weryfikacji poprawności fizycznej otrzymanych wyników.

4.2.2. Model asymptotyczny

Podobnie jak w *podrozdziale 4.2.1* korzystamy tu z równania elastodynamiki (4.4), które można otrzymać z zasady stacjonarności działania zastosowanej do funkcjonałów $\mathcal{D}(\cdot)$, (4.2), $\mathcal{L}(\cdot)$, (4.3). Stanowi to punkt wyjścia procedury modelowania.

W modelowaniu asymptotycznym wprowadzamy parametr $\varepsilon \in (0, 1]$, przedział $\square_\varepsilon \equiv [-\varepsilon\lambda/2, \varepsilon\lambda/2]$ oraz ε -komórkę $\square_\varepsilon(x) \equiv x + \square_\varepsilon$ o środku w $x \in \overline{\Omega}$.

Podstawowym założeniem modelowania asymptotycznego jest asymptotyczna dekompozycja (2.18), która dla pola przemieszczeń $\mathbf{u}(x, \xi, t)$ ma postać

$$\mathbf{u}_\varepsilon(x, z, \xi, t) = \mathbf{w}(z, \xi, t) + \varepsilon \tilde{h}_\varepsilon(x, z) \mathbf{v}(z, \xi, t), \quad (4.8)$$

gdzie $z \in \square_\varepsilon(x)$, $\xi \in \Xi$, $t \in (t_0, t_1)$, oraz funkcje $\mathbf{w}, \mathbf{v}$ są ciągłe i ograniczone w $\overline{\Omega}$ łącznie ze swoimi pierwszymi pochodnymi. Przy oznaczeniach (2.19) pochodne (2.20) dla przemieszczeń można zapisać jako:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{u}_\varepsilon(x, z, \xi, t) &= \partial \mathbf{w}(z, \xi, t) + \hat{\partial} \tilde{h}_\varepsilon(x, z) \mathbf{v}(z, \xi, t) + \varepsilon \tilde{h}_\varepsilon(x, z) \partial \mathbf{v}(z, \xi, t), \\ \nabla \mathbf{u}_\varepsilon(x, z, \xi, t) &= \nabla \mathbf{w}(z, \xi, t) + \varepsilon \tilde{h}_\varepsilon(x, z) \nabla \mathbf{v}(z, \xi, t). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Uwzględniając $\varepsilon \rightarrow 0$ i korzystając ze wzorów (2.21), zależności (4.8) oraz (4.9) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\varepsilon(x, z, \xi, t) &= \mathbf{w}(x, \xi, t) + O(\varepsilon), \\ \partial \mathbf{u}_\varepsilon(x, z, \xi, t) &= \partial \mathbf{w}(x, \xi, t) + \hat{\partial} \tilde{h}_\varepsilon(x, z) \mathbf{v}(x, \xi, t) + O(\varepsilon), \\ \bar{\nabla} \mathbf{u}_\varepsilon(x, z, \xi, t) &= \bar{\nabla} \mathbf{w}(x, \xi, t) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dokonując przejścia z parametrem ε do zera, w powyższych formułach pomijamy składniki $O(\varepsilon)$.

W następnym etapie modelowania wprowadzamy rodzinę $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ funkcji

$$\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon = \tilde{\mathcal{L}}(x, z/\varepsilon, \nabla \mathbf{w}(x, \xi, t), \dot{\mathbf{w}}(x, \xi, t), \mathbf{w}(x, \xi, t), \mathbf{v}(x, \xi, t)), \quad z \in \square_\varepsilon(x), x \in \bar{\Omega}, t \in (t_0, t_1),$$

które są funkcjami Lagrange'a w funkcjonalach działania

$$\mathcal{D}_h^\varepsilon(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{p}) = \int_{\Omega} \int_{\Xi} \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon(x, z/\varepsilon, \nabla \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{p})) dt d\xi dx.$$

W procedurze modelowania asymptotycznego dla $\varepsilon \rightarrow 0$ funkcje $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ zmiennej z/ε , $z \in \square_\varepsilon(x)$, dążą do uśrednionej funkcji Lagrange'a $\mathcal{L}_0$, (2.23), przyjmującej postać

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(x, \nabla \mathbf{w}(x, \xi, t), \dot{\mathbf{w}}(x, \xi, t), \mathbf{w}(x, \xi, t), \mathbf{v}(x, \xi, t)) &= \\ = \frac{1}{|\square|} \int_{\square(x)} \tilde{\mathcal{L}}(x, z, \nabla \mathbf{w}(x, \xi, t) + \partial \tilde{h}(x, z) \mathbf{v}(x, \xi, t), \dot{\mathbf{w}}(x, \xi, t), \mathbf{w}(x, \xi, t)) dz, & \quad x \in \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Wówczas asymptotyczny funkcjonal działania można zapisać jako

$$\mathcal{D}_h^0(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{p}) = \int_{\Omega} \int_{\Xi} \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}_0(x, \nabla \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{p}) dt d\xi dx.$$

Po asymptotycznym uśrednianiu i wykorzystaniu dekompozycji (4.8) oraz wyrażeń (4.10), dostajemy funkcję Lagrange'a $\mathcal{L}_0$, (4.11), w postaci

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \langle \rho \rangle &\dot{\mathbf{w}} \cdot \dot{\mathbf{w}} - \nabla \mathbf{w} : \langle \mathbb{C} \rangle : \nabla \mathbf{w} - \mathbf{v} \cdot \langle \partial h \cdot \mathbb{C} \rangle : \nabla \mathbf{w} - \\ & - \nabla \mathbf{w} : \langle \mathbb{C} \cdot \partial h \rangle \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \langle \partial h \cdot \mathbb{C} \cdot \partial h \rangle \cdot \mathbf{v} + \langle \mathbf{p} \rangle \cdot \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Stosując zasadę stacjonarności działania do uśrednionej funkcji Lagrange'a (4.12), otrzymujemy równania Eulera-Lagrange'a:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\langle \mathbb{C} \rangle : \nabla \mathbf{w} + \langle \mathbb{C} \cdot \partial h \rangle \cdot \mathbf{v}) - \langle \rho \rangle \dot{\mathbf{w}} &= \langle \mathbf{p} \rangle, \\ \langle \partial h \cdot \mathbb{C} \cdot \partial h \rangle \cdot \mathbf{v} &= - \langle \mathbb{C} \cdot \partial h \rangle : \nabla \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Powyższe równania wraz z asymptotyczną dekompozycją (4.8) reprezentują *model asymptotyczny*, opisujący zagadnienia elastodynamiki laminatów o poprzecznej gradacji własności. Równania (4.13) są równaniami o gładkich, wol-

nozmiennych współczynnikach, w przeciwieństwie do równań (4.4), mających współczynniki nieciągłe i silnie oscylujące. Równania te nie uwzględniają wpływu wielkości mikrostruktury laminatu.

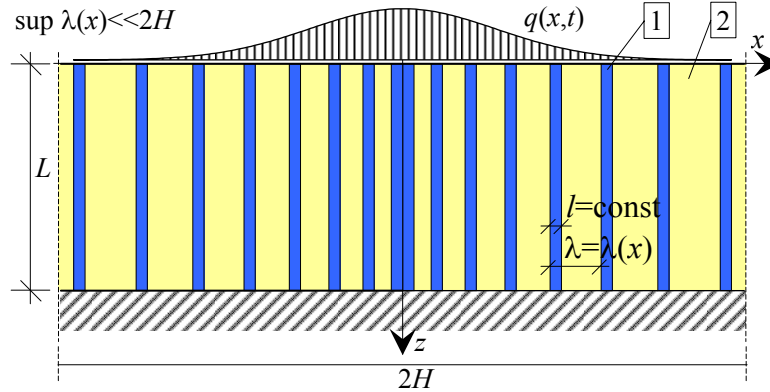
Łatwo zauważyć, że równania (4.13) można otrzymać z równań (4.7) modelu tolerancyjnego, pomijając w nich składniki podkreślone, zależne od parametru mikrostruktury.

W modelu asymptotycznym należy sformułować warunek początkowy i warunki brzegowe tylko dla makroprzemieszczeń $\mathbf{w}$. Funkcje $\mathbf{w}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot)$ muszą spełniać warunki $\mathbf{w}(\cdot, \xi, t), \mathbf{v}(\cdot, \xi, t) \in SV_\delta^1(\Omega, \square)$.

4.3. Wybrane zagadnienia – drgania laminatu

4.3.1. Wprowadzenie

W tym podrozdziale przedstawiony będzie pewien szczególny przykład drgań laminatu o poprzecznej gradacji własności, który charakteryzuje się nierównomiernym rozłożeniem komórek, por. rys. 3.2b. Załóżmy, że rozpatrujemy zagadnienie w płaszczyźnie Ox_1x_2 , tzn. przyjmujemy, że jest ono niezależne od współrzędnej x_3 . Oznaczmy $x=x_1, z=x_2, \nabla \equiv (\partial_1, \partial_2), \partial \equiv (\partial_1, 0), \bar{\partial} \equiv (0, \partial_2)$.

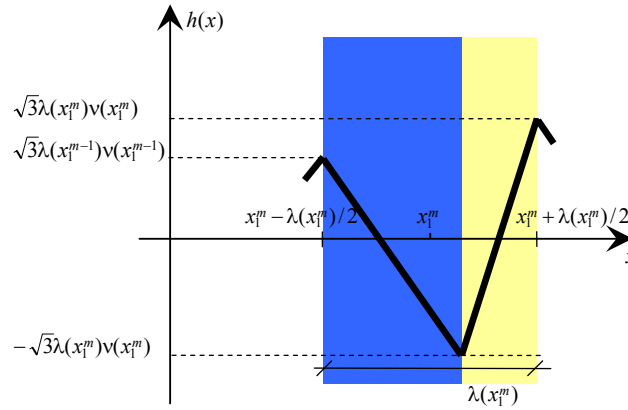


Rys. 4.1. Fragment rozpatrywanego laminatu; 1 – składnik nr 1, 2 – składnik nr 2

Niech wymiary laminatu wzdłuż osi x oraz z wynoszą, odpowiednio, $2H$ oraz L . Zakładamy, że rozpatrywany laminat spoczywa na nieodkształcalnej bazie wzdłuż dolnej krawędzi prostopadłej do warstw, tj. $z=L$; natomiast na górnej

krawędzi, $z=0$, jest obciążony obciążeniem o składowych: $q_1=q$ oraz $q_2=0$. Fragment takiego laminatu pokazano na rys. 4.1.

Oznaczmy elementy tensora sprężystości $\mathbb{C}$ przez $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\alpha, \beta, \dots = 1, 2$, przy czym dla składnika nr 1 przez $C'_{\alpha\beta\gamma\delta}$, a dla składnika nr 2 przez $C''_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Natomiast gęstości tych materiałów są równe ρ' oraz ρ'' . Ponadto przyjmujemy, że wektor przemieszczeń $\mathbf{u}$ ma dwie składowe – u_α , wzdłuż osi x_α , $\alpha=1, 2$, a zatem w mikro-makro dekompozycji (4.5) występują niewiadome: dwa makroprzemieszczenia w_α oraz dwie amplitudy fluktuacji v_α .



Rys. 4.2. Fragment fluktuacyjnej funkcji kształtu

W takim przypadku uśrednione równania (4.7) modelu tolerancyjnego mają postać:

$$\begin{aligned}
 & \langle \rho \rangle \ddot{w}_1 - \langle C_{2121} \rangle \partial(\bar{\partial} w_1 + \partial w_2) - \partial(\langle C_{2211} \rangle \bar{\partial} w_2) - \partial(\langle C_{1111} \rangle \partial w_1) - \\
 & - \langle C_{2121} \partial h \rangle \bar{\partial} v_2 - \partial(\langle C_{1111} \partial h \rangle v_1) = -\langle p_1 \rangle, \\
 & \langle \rho \rangle \ddot{w}_2 - \langle C_{2222} \rangle \bar{\partial} \bar{\partial} w_2 - \langle C_{2211} \rangle \partial \bar{\partial} w_1 - \partial[\langle C_{2121} \rangle (\partial w_2 + \bar{\partial} w_1)] - \\
 & - \langle C_{2211} \partial h \rangle \bar{\partial} v_1 - \partial(\langle C_{2121} \partial h \rangle v_2) = -\langle p_2 \rangle, \\
 & \underline{\langle \rho(h)^2 \rangle v_1} + \langle C_{2211} \partial h \rangle \bar{\partial} w_2 + \langle C_{1111} \partial h \rangle \partial w_1 + \\
 & + \langle C_{1111} (\partial h)^2 \rangle v_1 - \underline{\langle C_{1212}(h)^2 \rangle \bar{\partial} \bar{\partial} v_1} = \underline{\langle p_1 h \rangle}, \\
 & \underline{\langle \rho(h)^2 \rangle v_2} + \langle C_{2121} \partial h \rangle (\partial w_2 + \bar{\partial} w_1) + \\
 & + \underline{\langle C_{2121} (\partial h)^2 \rangle v_2} - \underline{\langle C_{2222}(h)^2 \rangle \bar{\partial} \bar{\partial} v_2} = \underline{\langle p_2 h \rangle},
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

gdzie wyrazy podkreślone zależą od parametru λ , czyli od grubości warstw. W powyższych równaniach przyjęto fluktuacyjną funkcję kształtu w postaci, por. rys. 4.2:

$$h(x) = \begin{cases} -\lambda\sqrt{3} \frac{v}{v'_m} (2 \frac{x}{\lambda_m} + v''_m) & \text{dla } x \in (x_1^m - \frac{1}{2}\lambda_m, x_1^m - \frac{1}{2}\lambda_m + v'_m\lambda_m), \\ \lambda\sqrt{3} \frac{v}{v''_m} (2 \frac{x}{\lambda_m} - v'_m) & \text{dla } x \in [x_1^m + \frac{1}{2}\lambda_m - \lambda_m v''_m, x_1^m + \frac{1}{2}\lambda_m). \end{cases} \quad (4.15)$$

4.3.2. Przypadek szczególny – drgania poprzeczne

Ograniczmy rozważania do przypadku drgań poprzecznych, tj. takich, w których występują tylko niewiadome w_2 oraz v_2 . Warunek, przy którym zachodzi $w_1(x,z,t)=0$, $v_1(x,z,t)=0$ jest spełniony, gdy wprowadzimy następujące warunki brzegowe na lewej i prawej krawędzi laminatu:

$$\begin{aligned} w_1(-H,z,t) &= w_1(H,z,t) = 0, \\ v_1(-H,z,t) &= v_1(H,z,t) = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Przyjmijmy również

$$\partial w_2(-H,z,t) = \partial w_2(H,z,t) = 0. \quad (4.17)$$

W takim przypadku, po wprowadzeniu oznaczeń $p \equiv p_2$, $w \equiv w_2$, $v \equiv v_2$, równania (4.14) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &\ddot{w} - \langle C_{2222} \rangle \overline{\partial \partial} w - \partial (\langle C_{2121} \rangle \partial w) - \partial (\langle C_{2121} \rangle \partial h) \langle v \rangle = - \langle p \rangle, \\ \langle \rho(h)^2 \rangle \ddot{v} + \langle C_{2121} \rangle \partial h \partial w + \langle C_{2121} \rangle (\partial h)^2 \langle v \rangle - \langle C_{2222}(h)^2 \rangle \overline{\partial \partial} v &= \langle ph \rangle. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Wprowadźmy kolejne założenia upraszczające rozważania, tj. przyjmijmy niezależność podstawowych niewiadomych w oraz v od współrzędnej x , czyli $w=w(z,t)$, $v=v(z,t)$, oraz niech siły objętościowe p spełniają warunki: $\langle p \rangle = \partial \langle C_{2121} \rangle \partial h \langle v \rangle$, $\langle ph \rangle = 0$. Wówczas równania (4.18) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle \ddot{w} - \langle C_{2222} \rangle \overline{\partial \partial} w &= 0, \\ \langle \rho(h)^2 \rangle \ddot{v} + \langle C_{2121} \rangle (\partial h)^2 \langle v \rangle - \langle C_{2222}(h)^2 \rangle \overline{\partial \partial} v &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Model tolerancyjny określony równaniami (4.19), ze względu na wprowadzone uproszczenia, można nazwać *przybliżonym modelem tolerancyjnym*, opisującym zagadnienie drgań poprzecznych rozpatrywanego laminatu. Dla porównania, równania (4.13) modelu asymptotycznego mają w tym przypadku postać:

$$\langle p \rangle \ddot{w} - \langle C_{2222} \rangle \overline{\partial \partial} w = 0,$$

czyli jest to jedno równanie identyczne z (4.19)₁.

Przyjęte założenia doprowadziły do układu niezależnych równań różniczkowych (4.19) (w modelu tolerancyjnym) bądź jednego równania (4.19)₁ (w modelu asymptotycznym), o współczynnikach będących wolnozmiennymi funkcjami argumentu x . Celem rozpatrywanego przykładu jest pokazanie, przy jakich warunkach podstawowe niewiadome tych równań w oraz v są niezależne od współrzędnej x , tj. $w=w(z,t)$, $v=v(z,t)$.

Można zauważyć, że równanie (4.19)₁ opisuje tzw. *makrodrżania*, a równanie (4.19)₂ – tzw. *mikrodrżania*.

Przyjmijmy, że funkcję grubości warstw $\lambda=\lambda(x)$ można wyrazić w postaci

$$\lambda(x) = l\bar{\lambda}(x), \quad (4.20)$$

gdzie $\bar{\lambda}(x)$ jest bezwymiarową wolnozmienną funkcją argumentu x , a l jest stałą grubością lamin, wykonanych ze składnika nr 1, por. rys. 4.1. W takim przypadku funkcje nasycen składnikami nr 1 oraz nr 2 można przedstawić jako:

$$v'(x) = \frac{1}{\bar{\lambda}(x)}, \quad v''(x) = \frac{\bar{\lambda}(x) - 1}{\bar{\lambda}(x)}. \quad (4.21)$$

Wprowadźmy teraz warunki brzegowe dla niewiadomych w oraz v na górnej i dolnej krawędzi laminatu. W tym celu przyjmijmy obciążenie q na górnej krawędzi w postaci funkcji tolerancyjnie-periodycznej argumentu x . Zatem obciążenie to można poddać dekompozycji w postaci

$$q(x,t) = s(x,t) + r(x,t), \quad (4.22)$$

gdzie $s(x,t)$ jest częścią uśrednioną obciążenia (tzw. makroobciążenie), a $r(x,t)$ – częścią oscylującą (tzw. mikroobciążenie). Funkcje te przyjmijmy w postaci:

$$s(x,t) = Q_0 \bar{s}(x) \exp(i\omega t), \quad r(x,t) = R_0 R(x) \bar{r}(x) \exp(i\omega t), \quad (4.23)$$

gdzie $\bar{s}$ oraz $\bar{r}$ są wolnozmiennymi funkcjami x , zwanymi amplitudami makroobciążenia oraz mikroobciążenia, odpowiednio; R jest funkcją oscylującą x ; Q_0 oraz R_0 są stałymi; ω jest częstością. Przy założeniu części składowych obciążenia w postaci (4.23) rozwiązań równań (4.19) szukamy jako:

$$w(z,t) = W(z) \exp(i\omega t), \quad v(z,t) = V(z) \exp(i\omega t), \quad (4.24)$$

gdzie funkcje U oraz V muszą spełniać warunki brzegowe dla $z=0, L$.

Podstawiając rozwiązania (4.24) do równań (4.19) oraz oznaczając:

$$\begin{aligned}
\bar{C} &\equiv \langle C_{2222} \rangle = C'_{2222} v' + C''_{2222} v'' = [C'_{2222} - C''_{2222} + C''_{2222} \bar{\lambda}(x)] / \bar{\lambda}(x), \\
\bar{C} &= 12(C'_{1212} v'' + C''_{1212} v') = 12[C'_{1212} - C''_{1212} + C''_{1212} \bar{\lambda}(x)] / \bar{\lambda}(x), \\
\bar{\rho} &\equiv \langle \rho \rangle = \rho' v' + \rho'' v'' = [\rho' - \rho'' + \rho'' \bar{\lambda}(x)] / \bar{\lambda}(x),
\end{aligned} \quad (4.25)$$

otrzymujemy równanie makrodrgań (w modelu tolerancyjnym i asymptotycznym)

$$\bar{\partial} \bar{\partial} W + \frac{\bar{\rho}}{\bar{C}} \omega^2 W = 0, \quad (4.26)$$

oraz równanie mikrodrgań (tylko w modelu tolerancyjnym)

$$\bar{\partial} \bar{\partial} V + \left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{C}} \omega^2 - \frac{\bar{C}}{\lambda^2 v^2 \bar{C}} \right) V = 0. \quad (4.27)$$

W rozpatrywanym przykładzie warunki brzegowe na brzegu górnym ($z=0$) oraz dolnym ($z=L$) mają postać,

– dla makroprzemieszczenia W :

$$\begin{aligned}
\bar{\partial} W(0) &= -\frac{Q_0 \bar{s}(x)}{A \langle C_{2222} \rangle (x)} = -\frac{Q_0 \bar{s}(x) \bar{\lambda}(x)}{A [C'_{2222} - C''_{2222} + C''_{2222} \bar{\lambda}(x)]}, \\
W(L) &= 0;
\end{aligned} \quad (4.28)$$

– dla amplitudy fluktuacji V :

$$\begin{aligned}
\bar{\partial} V(0) &= -\frac{\langle h^2 \rangle (x)}{l \langle C_{2222} h^2 \rangle (x)} R_0 \bar{r}(x) = -\frac{R_0 \bar{r}(x) \bar{\lambda}(x)}{l [C'_{2222} - C''_{2222} + C''_{2222} \bar{\lambda}(x)]}, \\
V(L) &= 0.
\end{aligned} \quad (4.29)$$

We wzorze (4.28) A jest stałą, natomiast w (4.29) – l jest stałą grubością lamin, wykonanych ze składnika nr 1.

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\begin{aligned}
\varsigma^2 &\equiv \frac{C''_{2222}}{\bar{\rho}''} = \frac{C'_{2222}}{\rho'} = \text{const}, \quad \beta \equiv \frac{C''_{2222}}{C'_{2222}}, \\
\omega^2 &\equiv \frac{\bar{C}}{\bar{\rho} L^2} = \frac{\varsigma^2}{L^2} = \text{const}, \quad \eta^2 \equiv \frac{R_0 \bar{\lambda}(z) \bar{r}(z)}{C'_{2222} - C''_{2222} + C''_{2222} \bar{\lambda}(z)}.
\end{aligned} \quad (4.30)$$

Przyjmując amplitudy makro- i mikroobciążenia wyrażone wzorem

$$\bar{s}(x) = \bar{r}(x) = \frac{1 - \beta + \beta \bar{\lambda}(x)}{\bar{\lambda}(x)}, \quad (4.31)$$

warunki brzegowe (4.28) można zapisać jako:

$$\bar{\delta}W(0) = -\frac{Q_0}{AC'_{2222}}, \quad W(L) = 0; \quad (4.32)$$

a warunki (4.29):

$$\bar{\delta}V(0) = -\frac{R_0}{lC'_{2222}}, \quad V(L) = 0. \quad (4.33)$$

Oznacza to, że warunki brzegowe (4.32), (4.33) są niezależne od współrzędnej x .

Równania (4.26) i (4.27) można zapisać w postaci bezwymiarowej.

W tym celu wprowadźmy oznaczenia:

$$\begin{aligned} \zeta &\equiv \frac{z}{L}, \quad \eta \equiv \frac{l}{L}, \quad \Omega^2 \equiv \frac{\omega^2}{\bar{\omega}^2}, \quad ()' \equiv \frac{d}{d\zeta}, \\ \chi &\equiv \frac{C'_{1212}}{C'_{2222}} = \frac{C''_{1212}}{C''_{2222}} = \text{const}, \quad \phi(\zeta) \equiv \frac{AC'_{2222}}{LQ_0}W(\zeta L), \quad \psi(\zeta) \equiv \frac{\eta}{g^2}V(\zeta L), \\ \gamma^2 &\equiv \Omega^2 - \frac{\bar{C}L^2}{\lambda^2\nu^2\bar{C}}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Zakładając, że $C'_{2222} \gg C''_{2222}$, $C'_{1212} \gg C''_{1212}$ mamy $1 + C''_{2222}/C'_{2222} \cong 1$, $1 + C''_{1212}/C'_{1212} \cong 1$, a stąd

$$\gamma^2 = \Omega^2 - 12\chi/\eta^2 = \text{const}. \quad (4.35)$$

Korzystając z oznaczeń (4.34), postaci bezwymiarowe (4.26) i (4.27) są następujące:

– równanie makrodrgań

$$\phi'' + \Omega^2\phi = 0, \quad (4.36)$$

– równanie mikrodrgań

$$\psi'' + \gamma^2\psi = 0, \quad (4.37)$$

w których funkcje ϕ oraz ψ są bezwymiarowymi funkcjami, odpowiadającymi makroprzemieszczeniu W oraz amplitudzie fluktuacji V . Natomiast warunki brzegowe (4.32) zapisane bezwymiarowo mają postać:

$$\phi(0) = -1, \quad \phi(1) = 0; \quad (4.38)$$

a warunki (4.33):

$$\psi'(0) = -1, \quad \psi(1) = 0. \quad (4.39)$$

Równanie (4.36) wraz z warunkami brzegowymi (4.38) określa makro-drgania rozpatrywanego laminatu przy zadanym obciążeniu q , (4.22) wraz z (4.23) i (4.31), a równanie (4.37) z warunkami (4.39) opisuje mikro-drgania laminatu przy obciążeniu q , (4.22) wraz z (4.23) i (4.31).

Rozwiązania równania makro-drgań (4.36), spełniające (4.38) mają postać:

1° zagadnienie stacjonarne ($\Omega^2=0$)

$$\phi(\zeta) = 1 - \zeta; \quad (4.40)$$

2° zagadnienie niestacjonarne ($\Omega^2>0$)

$$\phi(\zeta) = \Omega^{-1}(\tan \Omega \cos(\Omega \zeta) - \sin(\Omega \zeta)); \quad (4.41)$$

3° rezonans ($\Omega^2 = (\frac{\pi}{2} + n\pi)^2$, $n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$).

Rozwiązania równania mikro-drgań (4.37), spełniające (4.39) mają postać:

1° rozwiązania zanikające ($\gamma^2 < 0$, $\mu^2 = -\gamma^2 = 12\chi/\eta^2 - \Omega^2$)

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\exp(-\mu\zeta)}{1 + \exp(-2\mu)} - \frac{\exp(\mu\zeta)}{1 + \exp(2\mu)} \right]; \quad (4.42)$$

2° rozwiązania zanikające liniowo ($\gamma^2=0$)

$$\psi(\zeta) = 1 - \zeta; \quad (4.43)$$

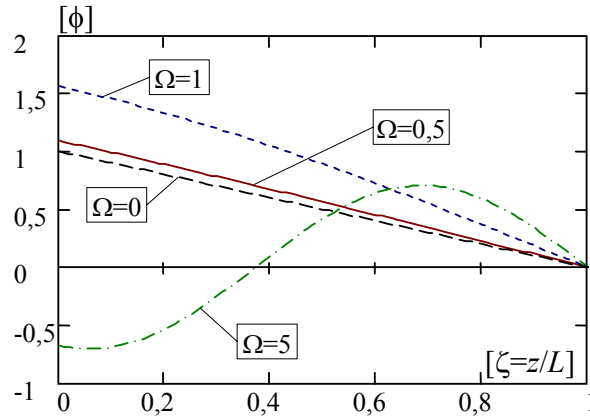
3° rozwiązania oscylujące ($\gamma^2>0$)

$$\psi(\zeta) = \gamma^{-1}(\tan \gamma \cos(\gamma\zeta) - \sin(\gamma\zeta)). \quad (4.44)$$

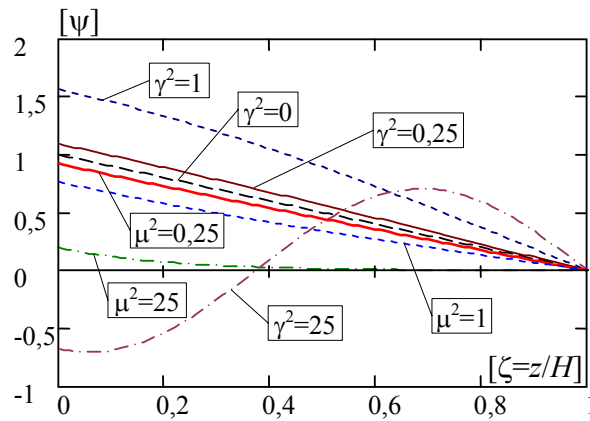
Podobny przypadek, ale ograniczony tylko do makro-drgań, był rozpatrywany w pracy Jędrysiaka, Wierzbickiego i Cz. Woźniaka (2006).

4.3.3. Wyniki obliczeń

Wyniki obliczeń, które przeprowadzono przy zastosowaniu wzorów (4.40)-(4.44), pokazano na rys. 4.3-4.4. Rys. 4.3 przedstawia wykresy bezwymiarowej funkcji ϕ , opisującej makroprzemieszczenia laminatu. Natomiast na rys. 4.4 znajdują się krzywe bezwymiarowej funkcji ψ , określającej amplitudę fluktuacji laminatu. Wykresy z rys. 4.3 sporządzono dla różnych wartości parametru Ω , czyli ilorazu częstości obciążenia brzegowego q na górnej krawędzi do częstości „drgań swobodnych” laminatu. Krzywe na rys. 4.4 otrzymano dla różnych wartości parametru γ^2 lub μ^2 ($\mu^2 = -\gamma^2$).



Rys. 4.3. Wykresy bezwymiarowej funkcji ϕ określającej makroprzeszyczenie w zależności od współrzędnej ζ



Rys. 4.4. Wykresy bezwymiarowej funkcji ψ określającej amplitudę fluktuacji w zależności od współrzędnej ζ ($\mu^2 = -\gamma^2 = 12\chi/\eta^2 - \Omega^2$)

Na podstawie analizy wyników przedstawionych na rys. 4.3-4.4 zauważmy, że:

- 1° postać makrodrgań (opisanych bezwymiarową funkcją ϕ , rys. 4.3) zależy od częstości obciążenia brzegowego, tj. wraz ze wzrostem tej częstości w stosunku do częstości „drgań swobodnych” laminatu staje się silniej oscylująca;
- 2° postać mikrodrgań (opisanych bezwymiarową funkcją ψ , rys. 4.4) zależy od bezwymiarowego parametru γ^2 (który uwzględnia częstość obciążenia brzegowego):

- a) dla wartości $\gamma^2 < 0$ (tj. $\mu^2 > 0$, $\mu^2 = -\gamma^2$) mikrodrgania zanikają wykładniczo (w tym dla przypadku stacjonarnego obciążenia, tj. $\omega = 0$);
- b) dla wartości $\gamma^2 = 0$ mikrodrgania zanikają liniowo;
- c) dla wartości $\gamma^2 > 0$ mikrodrgania oscylują, przy czym im większa wartość γ^2 , tym oscylacje są silniejsze.

4.3.4. Podsumowanie

Na podstawie rezultatów uzyskanych w ramach zaproponowanego przykładu można sformułować następujące uwagi o charakterze ogólnym:

- 1° model tolerancyjny pozwala uwzględniać wpływ mikrostruktury laminatu, który przejawia się w możliwości analizy tzw. mikrodrgań (równanie (4.27) lub (4.37)), co jest niemożliwe w modelu asymptotycznym;
- 2° model tolerancyjny, w przeciwieństwie do modelu asymptotycznego, pozwala uwzględniać wpływ mikrooscytacji obciążenia brzegowego (np. (4.23) i (4.31)), który przejawia się w postaci tzw. mikrodrgań;
- 3° pokazano, w jaki sposób postać funkcji grubości warstw, opisującej rozkład własności w laminacie, powinna być związana z postacią obciążenia brzegowego, zarówno jego części uśrednionej, jak i oscylującej, aby postacie makro- i mikrodrgań laminatu były niezależne od współrzędnej x .

Przykład przedstawiony w tym podrozdziale jest typowym „przykładem obliczeniowym”, który pokazuje możliwości zaproponowanego modelu tolerancyjnego. Przy przyjętych założeniach upraszczających możliwe było uzyskanie w ramach tego modelu rozwiązań analitycznych. Problem drgań laminatów o porzeczej gradacji własności omawianych w tym rozdziale wymaga szeregu dalszych analiz, na przykład porównawczych w celu weryfikacji modelu tolerancyjnego.

5. Zagadnienia termosprężystości w laminatach

5.1. Wprowadzenie

Podobnie jak w *rozdziałach 3* oraz *4* obiektami rozważań są tutaj dwuskładnikowe kompozyty, złożone z dużej liczby warstw. Przyjmujemy nieperiodyczny rozkład materiałów składowych wzdłuż kierunku prostopadłego do warstw, tj. osi x_1 , por. rys. 3.1-3.2. Na poziomie mikro laminaty mogą mieć budowę z *równomiernym rozłożeniem warstw*, tj. grubość warstw jest stała (por. rys. 3.2a), lub z *nierównomiernym rozłożeniem warstw*, tj. grubość warstw jest określona funkcją (por. rys. 3.2b). Natomiast ich własności w skali makro zmieniają się w sposób ciągły i gładki wzdłuż kierunku x_1 . Kompozyty tego rodzaju nazywamy więc *laminatami o poprzecznej gradacji własności*.

Będziemy korzystać z takich pojęć wprowadzonych w *rozdziale 3*, jak funkcja grubości warstw $\lambda(\cdot)$, funkcje nasycenia $v(\cdot)$, $v''(\cdot)$, funkcja niejednorodności $v(\cdot)$, fluktuacyjna funkcja kształtu $h(\cdot)$, określona wzorem (3.1), której fragment pokazany jest na rys. 3.3.

Rozważania prowadzimy w prostokątnym kartezjańskim układzie współrzędnych $Ox_1x_2x_3$. Oznaczmy $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$, $x \equiv x_1$, $\boldsymbol{\xi} \equiv (x_2, x_3)$, $\nabla \equiv (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$, $\partial \equiv (\partial_1, 0)$, $\bar{\nabla} \equiv (0, \partial_2, \partial_3)$. Wymiary laminatu wzdłuż osi $x \equiv x_1$, x_2 , x_3 niech wynoszą $H \equiv L_1$, L_2 , L_3 , odpowiednio. Załóżmy zbiory $x \in \Omega \equiv (0, H)$, $\boldsymbol{\xi} \in \Xi \equiv (0, L_1) \times (0, L_2)$ oraz przedział $\square = [-\lambda/2, \lambda/2]$, będący komórką w przedziale $\bar{\Omega}$ (przy czym $\lambda = \text{const}$ lub $\lambda = \lambda(x)$). Natomiast komórka o środku w punkcie $x \in \Omega$ jest oznaczona przez $\square(x) \equiv [x - \lambda/2, x + \lambda/2]$.

Wzór (2.2) określający uśrednienie funkcji f przyjmuje postać (4.1). Zatem jeśli f jest funkcją tolerancyjnie-periodyczną, to $\langle f \rangle_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \bar{\Omega} \times \Xi$, jest wolnozmienną funkcją będącą w tolerancji z funkcją $\langle f \rangle(\mathbf{x})$.

W tym rozdziale zajmujemy się modelowaniem zagadnień termosprężystości w laminatach. Wprowadźmy więc funkcje opisujące własności termiczne i sprężyste laminatu, tj. ciepło właściwe c , tensor przewodnictwa ciepła $\mathbf{K}$, ten-

sor modułów sprężystości $\mathbb{C}$, tensor modułów termicznych $\mathbf{B}$ oraz gęstość masy ρ . Zakładamy, że funkcje te są tolerancyjnie-periodyczne względem argumentu x , $c(\cdot), \mathbf{K}(\cdot), \mathbb{C}(\cdot), \mathbf{B}(\cdot), \rho(\cdot) \in TP_8^0(\Omega, \square)$, a także że przyjmują stałe wartości $c', \mathbf{K}', \mathbb{C}', \mathbf{B}', \rho'$ oraz $c'', \mathbf{K}'', \mathbb{C}'', \mathbf{B}'', \rho''$ w składniku nr 1 oraz nr 2, odpowiednio. Pole przemieszczeń kompozytu oznaczmy przez $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, ze składowymi u_i ($i=1,2,3$) wzdłuż osi x_i , natomiast pole temperatury przez $T=T(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x}=(x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \Xi$, $t \in (t_0, t_1)$. O obu niewiadomych polach zakładamy, że są funkcjami tolerancyjnie-periodycznymi współrzędnej $x=x_1$, tj. $\mathbf{u}(\cdot, \xi, t), T(\cdot, \xi, t) \in TP_8^1(\Omega, \square)$, czyli mają charakter zgodny z mikrostrukturą laminatu.

W następnych podrozdziałach zostaną przedstawione równania uśrednione *modelu tolerancyjnego* oraz *modelu asymptotycznego* termosprężystości w rozpatrywanych laminatach.

5.2. Równania uśrednione

5.2.1. Model tolerancyjny

Procedura postępowania została opisana w *rozdziale 2*. Zakładamy zatem, że zagadnienie sprzężonej termosprężystości w rozpatrywanym laminacie jest opisane funkcjonalem działania (2.9), który przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{u}, T, \mathbf{p}, f) &= \\ &= \iint_{\Omega} \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{L}(z, \nabla \mathbf{u}(z, \xi, t), \dot{\mathbf{u}}(z, \xi, t), \mathbf{u}(z, \xi, t), \nabla T(z, \xi, t), T(z, \xi, t), \mathbf{p}(z, \xi, t), f(z, \xi, t)) dt d\xi dz, \end{aligned} \quad (5.1)$$

z funkcją Lagrange'a $\mathcal{L}$ określoną wzorem

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} - \nabla \mathbf{u} : \mathbb{C} : \nabla \mathbf{u} + \nabla T \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla T) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} + fT, \quad (5.2)$$

oraz funkcjami $\mathbf{p}, f$ zdefiniowanymi równaniami konstytutywnymi:

$$\mathbf{p} = \nabla \cdot (\mathbf{B}T), \quad f = c\dot{T} + \Theta_0 \mathbf{B} \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}}, \quad (5.3)$$

gdzie Θ_0 jest pewną stałą temperaturą. Przyjmujemy, że $\mathcal{L}(\cdot, \nabla \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \nabla T, T, \mathbf{p}, f)$ oraz $\mathbf{p}(\cdot), f(\cdot)$ są tolerancyjnie-periodycznymi, silnie oscylującymi funkcjami argumentu $x, x \in \Omega$.

Korzystamy z rozszerzonej zasady stacjonarności działania dla funkcjonału działania $\mathcal{D}$, (5.1), i funkcji Lagrange'a $\mathcal{L}$, (5.2). Otrzymujemy w ten sposób dobrze znane równania sprzężonej termosprężystości, które można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbb{C} : \nabla \mathbf{u}) - \rho \ddot{\mathbf{u}} &= \nabla \cdot (\mathbf{B} T), \\ \nabla \cdot (\mathbf{K} \cdot \nabla T) - c \dot{T} &= \Theta_0 \mathbf{B} \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}}.\end{aligned}\quad (5.4)$$

Podstawowe niewiadome, tj. temperatura $T=T(x, \xi, t)$ oraz wektor przemieszczeń $\mathbf{u}=\mathbf{u}(x, \xi, t)$, $\mathbf{x}=(x, \xi) \in \overline{\Omega \times \Xi}$, $t \in (t_0, t_1)$, muszą spełniać odpowiednie warunki regularności.

Równania (5.4) mają silnie oscylujące, tolerancyjnie-periodyczne, nieciągłe współczynniki funkcyjne, nie są zatem wygodne w zastosowaniach do analizy zagadnień szczególnych. Za punkt wyjścia tolerancyjnego modelowania weźmy funkcjonał działania $\mathcal{D}$, (5.1), wraz z funkcją Lagrange'a $\mathcal{L}$, (5.2), oraz funkcjami $\mathbf{p}, f$, (5.3). Sformułowanie tych funkcji jest pierwszym etapem procedury modelowania.

Drugim etapem jest mikro-makro dekompozycja podstawowych niewiadomych pól, tj.:

- pola temperatury $T(x, \xi, t)$, przyjęta w postaci

$$T_h(x, \xi, t) = \vartheta(x, \xi, t) + g(x)\psi(x, \xi, t), \quad (5.5)$$

- pola przemieszczeń $\mathbf{u}(x, \xi, t)$ w postaci

$$\mathbf{u}_h(x, \xi, t) = \mathbf{w}(x, \xi, t) + h(x)\mathbf{v}(x, \xi, t), \quad (5.6)$$

gdzie $\vartheta(\cdot, \xi, t), \psi(\cdot, \xi, t), \mathbf{w}(\cdot, \xi, t), \mathbf{v}(\cdot, \xi, t) \in SV_8^1(\Omega, \square)$ dla każdej chwili $t \in (t_0, t_1)$. Podstawowe niewiadome to funkcje ϑ oraz ψ , które nazywamy *makrotemperaturą* oraz *amplitudą fluktuacji temperatury*, a także funkcje $\mathbf{w}$ oraz $\mathbf{v}$, nazywane *makroprzemieszczeniami* oraz *amplitudami fluktuacji przemieszczeń*. Natomiast funkcje $g(\cdot), h(\cdot) \in FS_8^1(\Omega, \square)$ to fluktuacyjne funkcje kształtu, postulowane w każdym szczególnym, analizowanym zagadnieniu.

W trzecim etapie modelowania ograniczamy rozważania do dowolnej, ale ustalonej komórki $\square(x) \equiv [x - \lambda/2, x + \lambda/2]$, $x \in \Omega$. Wprowadzamy tolerancyjne przybliżenia $\tilde{\mathbf{K}}(x, \cdot), \tilde{c}(x, \cdot), \tilde{\mathbb{C}}(x, \cdot), \tilde{\mathbf{B}}(x, \cdot), \tilde{\rho}(x, \cdot)$ funkcji $\mathbf{K}(x, \cdot), c(x, \cdot), \mathbb{C}(x, \cdot), \mathbf{B}(x, \cdot), \rho(x, \cdot)$ w $\square(x)$ oraz zakładamy, że $\langle \tilde{c}(x, \cdot) \tilde{g}(x, \cdot) \rangle = 0, \langle \tilde{\rho}(x, \cdot) \tilde{h}(x, \cdot) \rangle = 0$. Zastosowanie procedury tolerancyjnego uśredniania z *podrozdziału 2.3* prowa-

dzi do otrzymania uśrednionego funkcjonału działania przy dekompozycjach (5.5) i (5.6) dla komórki $\square(x)$

$$\mathcal{D}_{hg}(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \vartheta, \psi, \mathbf{p}, f) = \iiint_{\Omega \Xi t_0}^{t_1} \langle \mathcal{L}_{hg} \rangle (z, \nabla \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \mathbf{w}, \bar{\nabla} \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v}, \nabla \vartheta, \vartheta, \bar{\nabla} \psi, \psi, \mathbf{p}, f) dt d\xi dz,$$

w którym uśredniona funkcja Lagrange'a $\mathcal{L}$ jest określona przez

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{hg} \rangle = & \frac{1}{2} (\nabla \vartheta \cdot \langle \mathbf{K} \rangle \cdot \nabla \vartheta + \psi \langle \partial g \cdot \mathbf{K} \cdot \partial g \rangle \psi + \bar{\nabla} \psi \cdot \langle \mathbf{K} g g \rangle \cdot \bar{\nabla} \psi + \\ & + \nabla \vartheta \cdot \langle \mathbf{K} \cdot \partial g \rangle \psi + \psi \langle \partial g \cdot \mathbf{K} \rangle \cdot \nabla \vartheta + \\ & + \langle \rho \rangle \dot{\mathbf{w}} \cdot \dot{\mathbf{w}} + \langle \rho h h \rangle \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} - \nabla \mathbf{w} : \langle \mathbb{C} \rangle : \nabla \mathbf{w} - \\ & - \mathbf{v} \cdot \langle \partial h \cdot \mathbb{C} \rangle : \nabla \mathbf{w} - \nabla \mathbf{w} : \langle \mathbb{C} \cdot \partial h \rangle \cdot \mathbf{v} - \\ & - \mathbf{v} \cdot \langle \partial h \cdot \mathbb{C} \cdot \partial h \rangle \cdot \mathbf{v} - \bar{\nabla} \mathbf{v} : \langle \mathbb{C} h h \rangle : \bar{\nabla} \mathbf{v}) + \\ & + \langle f \rangle \vartheta + \langle f g \rangle \psi + \langle \mathbf{p} \rangle \cdot \mathbf{w} + \langle \mathbf{p} h \rangle \cdot \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

a równania konstytutywne mają postać:

$$\begin{aligned} \langle f \rangle &= \langle c \rangle \dot{\vartheta} + \langle \Theta_0 \mathbf{B} \rangle \cdot \nabla \dot{\mathbf{w}} + \langle \Theta_0 \mathbf{B} \cdot \partial h \rangle \cdot \dot{\mathbf{v}}, \\ \langle f g \rangle &= \langle c g g \rangle \dot{\psi} + \langle \Theta_0 \mathbf{B} h g \rangle \cdot \bar{\nabla} \dot{\mathbf{v}}, \\ \langle \mathbf{p} \rangle &= \langle \mathbf{B} \rangle \cdot \nabla \vartheta + \partial \cdot \langle \mathbf{B} \rangle \vartheta, \\ \langle \mathbf{p} h \rangle &= - \langle \mathbf{B} \cdot \partial g \rangle \vartheta + \langle \mathbf{B} g h \rangle \cdot \bar{\nabla} \psi. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Wykorzystując rozszerzoną zasadę stacjonarności działania do uśrednionej funkcji Lagrange'a (5.7) i traktując wyrażenia (5.8) jak parametry, otrzymujemy równania:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\langle \mathbb{C} \rangle : \nabla \mathbf{w} + \langle \mathbb{C} \cdot \partial h \rangle \cdot \mathbf{v}) - \langle \rho \rangle \ddot{\mathbf{w}} &= \langle \mathbf{B} \rangle \cdot \nabla \vartheta + \partial \cdot \langle \mathbf{B} \rangle \vartheta, \\ - \bar{\nabla} \cdot (\langle \mathbb{C} h h \rangle : \bar{\nabla} \mathbf{v}) + \langle \partial h \cdot \mathbb{C} \cdot \partial h \rangle \cdot \mathbf{v} + \langle \mathbb{C} \cdot \partial h \rangle : \nabla \mathbf{w} + \langle \rho h h \rangle \ddot{\mathbf{v}} &= \langle \mathbf{B} g h \rangle \cdot \bar{\nabla} \psi - \langle \mathbf{B} \cdot \partial g \rangle \vartheta, \\ \nabla \cdot (\langle \mathbf{K} \rangle \cdot \nabla \vartheta + \langle \mathbf{K} \cdot \partial g \rangle \psi) - \langle c \rangle \ddot{\vartheta} &= \langle \Theta_0 \mathbf{B} \rangle \cdot \nabla \dot{\mathbf{w}} + \langle \Theta_0 \mathbf{B} \cdot \partial h \rangle \cdot \dot{\mathbf{v}}, \\ \bar{\nabla} \cdot (\langle \mathbf{K} g g \rangle \cdot \bar{\nabla} \psi) - \langle c g g \rangle \ddot{\psi} - \langle \partial g \cdot \mathbf{K} \cdot \partial g \rangle \psi - \langle \partial g \cdot \mathbf{K} \rangle \cdot \nabla \vartheta &= \langle \Theta_0 \mathbf{B} h g \rangle \cdot \bar{\nabla} \dot{\mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Powyższe równania, wraz z mikro-makro dekompozycjami (5.5) i (5.6), są narzędziem do analizy zagadnień termosprężystości w laminatach o poprzecznej gradacji własności w ramach *modelu tolerancyjnego*. Współczynniki równań (5.9) są gładkimi, wolnozmiennymi funkcjami argumentu x , w przeciwieństwie do współczynników równań (5.4) – nieciągłych i silnie oscylujących. Równania (5.9) uwzględniają wpływ wielkości mikrostruktury laminatu w problemach termosprężystości poprzez zależne od parametru mikrostruktury składniki podkreślone.

Warunki początkowe muszą być określone dla podstawowych niewiadomych $\vartheta(\cdot), \psi(\cdot), \mathbf{w}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot)$. Warunki brzegowe na wszystkich brzegach, tj. $x=0, H; x_2=0, L_2, x_3=0, L_3$, należy sformułować dla makrotemperatury ϑ oraz makroprzemieszczeń $\mathbf{w}$, natomiast dla amplitudy fluktuacji temperatury ψ oraz amplitud fluktuacji przemieszczeń $\mathbf{v}$ tylko na brzegach $x_2=0, L_2, x_3=0, L_3$. Ponadto, rozwiązania $\vartheta(\cdot), \psi(\cdot), \mathbf{w}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot)$ mają fizyczny sens tylko wtedy, gdy spełnione są warunki $\vartheta(\cdot, \xi, t), \psi(\cdot, \xi, t), \mathbf{w}(\cdot, \xi, t), \mathbf{v}(\cdot, \xi, t) \in SV_\delta^1(\Omega, \square)$. Warunki te można wykorzystać do oceny *a posteriori* parametru tolerancji δ , czyli także do weryfikacji poprawności fizycznej otrzymanych wyników.

5.2.2. Model asymptotyczny

W tym podrozdziale, tak jak w 5.2.1, korzystamy z równań sprzężonej termosprężystości (5.4), które można otrzymać z rozszerzonej zasady stacjonarności działania zastosowanej do funkcjonałów $\mathcal{D}(\cdot)$, (5.1), $\mathcal{L}(\cdot)$, (5.2), oraz $\mathbf{p}(\cdot), \mathbf{f}(\cdot)$, (5.3). Stanowi to punkt wyjścia procedury modelowania.

Podobnie jak w poprzednich rozdziałach, w modelowaniu asymptotycznym wprowadzamy parametr $\varepsilon \in (0, 1]$, przedział $\square_\varepsilon \equiv [-\varepsilon\lambda/2, \varepsilon\lambda/2]$ oraz ε -kómkę $\square_\varepsilon(x) \equiv x + \square_\varepsilon$ o środku w $x \in \bar{\Omega}$.

Podstawowe założenie modelowania asymptotycznego, tj. asymptotyczna dekompozycja (2.18), przyjmuje postać:

- dla pola temperatury $T(x, \xi, t)$

$$T_\varepsilon(x, z, \xi, t) = \vartheta(z, \xi, t) + \varepsilon \tilde{g}_\varepsilon(x, z) \psi(z, \xi, t), \quad (5.10)$$

- pola przemieszczeń $\mathbf{u}(x, \xi, t)$ w postaci

$$\mathbf{u}_\varepsilon(x, z, \xi, t) = \mathbf{w}(z, \xi, t) + \varepsilon \tilde{h}_\varepsilon(x, z) \mathbf{v}(z, \xi, t), \quad (5.11)$$

gdzie $z \in \square_\varepsilon(x)$, $\xi \in \Xi$, $t \in (t_0, t_1)$, oraz funkcje $\vartheta, \psi, \mathbf{w}, \mathbf{v}$ są ciągłe i ograniczone w $\bar{\Omega}$ łącznie ze swoimi pierwszymi pochodnymi. Korzystając z oznaczeń (2.19), pochodne (2.20) dla temperatury można zapisać jako:

$$\begin{aligned} \partial T_\varepsilon(x, z, \xi, t) &= \partial \vartheta(z, \xi, t) + \partial \tilde{g}_\varepsilon(x, z) \psi(z, \xi, t) + \varepsilon \tilde{g}_\varepsilon(x, z) \partial \psi(z, \xi, t), \\ \bar{\nabla} T_\varepsilon(x, z, \xi, t) &= \bar{\nabla} \vartheta(z, \xi, t) + \varepsilon \tilde{g}_\varepsilon(x, z) \bar{\nabla} \psi(z, \xi, t), \end{aligned} \quad (5.12)$$

a dla przemieszczeń:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{u}_\varepsilon(x, z, \xi, t) &= \partial \mathbf{w}(z, \xi, t) + \partial \tilde{h}_\varepsilon(x, z) \mathbf{v}(z, \xi, t) + \varepsilon \tilde{h}_\varepsilon(x, z) \partial \mathbf{v}(z, \xi, t), \\ \bar{\nabla} \mathbf{u}_\varepsilon(x, z, \xi, t) &= \bar{\nabla} \mathbf{w}(z, \xi, t) + \varepsilon \tilde{h}_\varepsilon(x, z) \bar{\nabla} \mathbf{v}(z, \xi, t). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Uwzględniając $\varepsilon \rightarrow 0$ i korzystając ze wzorów (2.21), zależności (5.10)-(5.11) oraz (5.12)-(5.13) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(x, z, \xi, t) &= \vartheta(x, \xi, t) + O(\varepsilon), \\ \mathbf{u}_\varepsilon(x, z, \xi, t) &= \mathbf{w}(x, \xi, t) + O(\varepsilon), \\ \partial T_\varepsilon(x, z, \xi, t) &= \partial \vartheta(x, \xi, t) + \hat{\partial} \tilde{g}_\varepsilon(x, z) \psi(x, \xi, t) + O(\varepsilon), \\ \bar{\nabla} T_\varepsilon(x, z, \xi, t) &= \bar{\nabla} \vartheta(x, \xi, t) + O(\varepsilon), \\ \partial \mathbf{u}_\varepsilon(x, z, \xi, t) &= \partial \mathbf{w}(x, \xi, t) + \hat{\partial} \tilde{h}_\varepsilon(x, z) \mathbf{v}(x, \xi, t) + O(\varepsilon), \\ \bar{\nabla} \mathbf{u}_\varepsilon(x, z, \xi, t) &= \bar{\nabla} \mathbf{w}(x, \xi, t) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Dokonując przejścia z parametrem ε do zera, w powyższych formułach pomijamy składniki $O(\varepsilon)$.

W następnym etapie modelowania wprowadzamy rodzinę $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ funkcji

$$\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon = \tilde{\mathcal{L}}(x, z/\varepsilon, \nabla \mathbf{w}(x, \xi, t), \dot{\mathbf{w}}(x, \xi, t), \mathbf{w}(x, \xi, t), \mathbf{v}(x, \xi, t), \nabla \vartheta(x, \xi, t), \vartheta(x, \xi, t), \psi(x, \xi, t)), \\ z \in \square_\varepsilon(x), x \in \bar{\Omega}, t \in (t_0, t_1),$$

które są funkcjami Lagrange'a w funkcjonalach działania:

$$\mathcal{D}_{hg}^\varepsilon(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \vartheta, \psi, \mathbf{p}, f) = \int \int_{\Omega \Xi} \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon(x, z/\varepsilon, \nabla \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \nabla \vartheta, \vartheta, \psi, \mathbf{p}, f)) dt d\xi dx.$$

Wykorzystując procedurę modelowania asymptotycznego (także dla parametrów $\mathbf{p}, f$), w której dla $\varepsilon \rightarrow 0$ funkcje $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ zmiennej z/ε , $z \in \square_\varepsilon(x)$, dążą do uśrednionej funkcji Lagrange'a $\mathcal{L}_0$, (2.23), przyjmującej postać

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(x, \nabla \mathbf{w}(x, \xi, t), \dot{\mathbf{w}}(x, \xi, t), \mathbf{w}(x, \xi, t), \mathbf{v}(x, \xi, t), \nabla \vartheta(x, \xi, t), \vartheta(x, \xi, t), \psi(x, \xi, t)) = \\ = \frac{1}{|\square|} \int_{\square(x)} \tilde{\mathcal{L}}(x, z, \nabla \mathbf{w}(x, \xi, t) + \partial \tilde{h}(x, z) \mathbf{v}(x, \xi, t), \dot{\mathbf{w}}(x, \xi, t), \mathbf{w}(x, \xi, t), \\ \nabla \vartheta(x, \xi, t) + \partial \tilde{g}(x, z) \psi(x, \xi, t), \vartheta(x, \xi, t)) dz, \quad x \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

asymptotyczny funkcjonal działania można zapisać jako

$$\mathcal{D}_{hg}^0(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \vartheta, \psi, \mathbf{p}, f) = \int \int_{\Omega \Xi} \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}_0(x, \nabla \mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \nabla \vartheta, \vartheta, \psi, \mathbf{p}, f) dt d\xi dx.$$

Uśredniając asymptotycznie i korzystając z dekompozycji (5.10)-(5.11) oraz wyrażeń (5.14), otrzymujemy funkcję Lagrange'a $\mathcal{L}_0$, (5.15):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\nabla \vartheta \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \vartheta + \psi \cdot \partial g \cdot \mathbf{K} \cdot \partial g \cdot \psi + \\ + \nabla \vartheta \cdot \mathbf{K} \cdot \partial g \cdot \psi + \psi \cdot \partial g \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \vartheta + \\ + \langle \rho \rangle \cdot \dot{\mathbf{w}} \cdot \dot{\mathbf{w}} - \nabla \mathbf{w} : \langle \mathbb{C} \rangle : \nabla \mathbf{w} - \mathbf{v} \cdot \langle \partial h \cdot \mathbb{C} \rangle : \nabla \mathbf{w} - \\ - \nabla \mathbf{w} : \langle \mathbb{C} \cdot \partial h \rangle \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \langle \partial h \cdot \mathbb{C} \cdot \partial h \rangle \cdot \mathbf{v}) + \langle f \rangle \vartheta + \langle \mathbf{p} \rangle \cdot \mathbf{w}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

z $\langle \mathbf{p} \rangle$ oraz $\langle f \rangle$ zdefiniowanymi równaniami konstytutywnymi:

$$\begin{aligned} \langle f \rangle &= \langle c \rangle \dot{\vartheta} + \langle \Theta_0 \mathbf{B} \rangle \cdot \nabla \mathbf{w} + \langle \Theta_0 \mathbf{B} \rangle \cdot \partial h \cdot \dot{\mathbf{v}}, \\ \langle \mathbf{p} \rangle &= \langle \mathbf{B} \rangle \cdot \nabla \vartheta + \partial \cdot \langle \mathbf{B} \rangle \vartheta. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Stosując rozszerzoną zasadę stacjonarności działania do uśrednionej funkcji Lagrange'a (5.16) i traktując wyrażenia (5.17) jak parametry, otrzymujemy równania Eulera-Lagrange'a:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\langle \mathbb{C} \rangle : \nabla \mathbf{w} + \langle \mathbb{C} \rangle \cdot \partial h \cdot \dot{\mathbf{v}}) - \langle \rho \rangle \dot{\mathbf{w}} &= \langle \mathbf{B} \rangle \cdot \nabla \vartheta + \partial \cdot \langle \mathbf{B} \rangle \vartheta, \\ \langle \partial h \cdot \mathbb{C} \cdot \partial h \rangle \cdot \dot{\mathbf{v}} &= - \langle \mathbb{C} \cdot \partial h \rangle : \nabla \mathbf{w} - \langle \mathbf{B} \cdot \partial g \rangle \vartheta, \\ \nabla \cdot (\langle \mathbf{K} \rangle \cdot \nabla \vartheta + \langle \mathbf{K} \rangle \cdot \partial g \cdot \psi) - \langle c \rangle \dot{\vartheta} &= \langle \Theta_0 \mathbf{B} \rangle \cdot \nabla \mathbf{w} + \langle \Theta_0 \mathbf{B} \rangle \cdot \partial h \cdot \dot{\mathbf{v}}, \\ \langle \partial g \cdot \mathbf{K} \cdot \partial g \rangle \psi &= - \langle \partial g \cdot \mathbf{K} \rangle \cdot \nabla \vartheta. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Powyższe równania wraz z asymptotycznymi dekompozycjami (5.10)-(5.11) reprezentują *model asymptotyczny*, który opisuje zagadnienia termosprężystości w laminatach o poprzecznej gradacji własności. Równania (5.18) to równania o gładkich, wolnozmiennych współczynnikach, w przeciwieństwie do równań (5.4) o współczynnikach nieciągłych i silnie oscylujących. Ponadto równania te nie uwzględniają wpływu wielkości mikrostruktury laminatu.

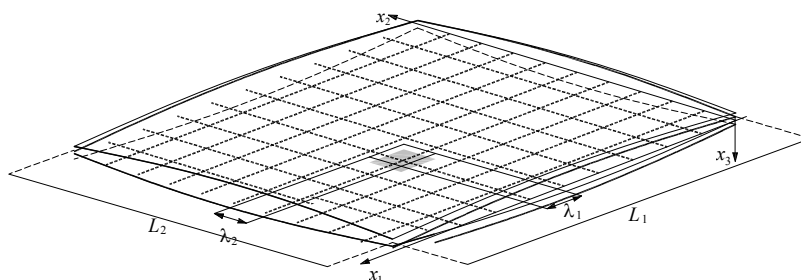
Zauważmy, że równania (5.18) można łatwo otrzymać z równań (5.9) modelu tolerancyjnego, pomijając w nich składniki podkreślone, zależne od parametru mikrostruktury.

W modelu asymptotycznym należy sformułować warunek początkowy i warunki brzegowe tylko dla makrotemperatury ϑ oraz makroprzemieszczeń $\mathbf{w}$. Funkcje $\vartheta(\cdot, \xi, t)$, $\psi(\cdot, \xi, t)$, $\mathbf{w}(\cdot, \xi, t)$ muszą spełniać warunki $\vartheta(\cdot, \xi, t), \psi(\cdot, \xi, t) \in SV_\delta^1(\Omega, \square)$, $\mathbf{w}(\cdot, \xi, t), \mathbf{v}(\cdot, \xi, t) \in SV_\delta^1(\Omega, \square)$.

6. Płyty cienkie tolerancyjnie-periodyczne

6.1. Wprowadzenie

W tym rozdziale obiektami rozważań są cienkie, liniowo-sprężyste płyty, wykonane z dwóch materiałów. Zakłada się, że własności makroskopowe (uśrednione) płyt mogą zmieniać się w sposób ciągły w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny środkowej płyty wzdłuż dwóch prostopadłych kierunków. Natomiast w skali mikro oba materiały są rozmieszczone w sposób tolerancyjnie-periodyczny wzdłuż tych kierunków. Fragment takiej płyty jest przedstawiony na rys. 6.1.



Rys. 6.1. Fragment cienkiej płyty o budowie tolerancyjnie-periodycznej (por. Jędrusiak i Michalak (2010))

W skali mikro tego rodzaju płyty są zbudowane z wielu małych elementów, zwanych „komórkami”, które odmiennie niż w płytach periodycznych, por. Jędrusiak (2001b), nie są powtarzalne. Zakładamy, że sąsiadujące z sobą komórki mogą być prawie identyczne, natomiast komórki odległe – mogą się od siebie bardzo różnić. Natomiast w skali makro własności płyty w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny środkowej są opisane funkcjami wolnozmiennymi. Płyty te możemy nazywać *cienkimi płytami tolerancyjnie-periodycznymi* bądź *cienkimi płytami o funkcyjnej (poprzecznej) gradacji własności*, por. Jędrusiak (2010), Jędrusiak i Michalak (2010).

Płyty rozpatrujemy w prostokątnym kartezjańskim układzie współrzędnych $Ox_1x_2x_3$, natomiast czas jest oznaczony przez t , $t \in (t_0, t_1)$. Indeksy dolne $i, j, \dots$ (związane z układem $Ox_1x_2x_3$) przyjmują wartości 1, 2, 3, indeksy dolne $\alpha, \beta, \dots$ (związane z Ox_1x_2) – wartości 1, 2, a górne indeksy $A, B, \dots$ – wartości $1, \dots, N$; zachowana jest konwencja sumacyjna dla tych indeksów. Ponadto ∂_α są pochodnymi względem współrzędnych x_α , $\alpha=1,2$, $\partial_{\alpha\dots\delta} \equiv \partial_\alpha \dots \partial_\delta$. Oznaczając $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$, $z \equiv x_3$, niezdeformowana płyta zajmuje obszar $\Pi \equiv \{(\mathbf{x}, z) : -d(\mathbf{x})/2 \leq z \leq d(\mathbf{x})/2, \mathbf{x} \in \Omega\}$, gdzie $d(\cdot)$ jest grubością płyty, a Ω – płaszczyznę środkową, zdefiniowaną jako $\Omega \equiv (0, L_1) \times (0, L_2)$.

W płytach tolerancyjnie-periodycznych możemy wprowadzić „komórkę” $\square = [-\lambda_1/2, \lambda_1/2] \times [-\lambda_2/2, \lambda_2/2]$ w zbiorze $\overline{\Omega}$ oraz $\square(\mathbf{x}) = \square(x_1, x_2) \equiv [x_1 - \lambda_1/2, x_1 + \lambda_1/2] \times [x_2 - \lambda_2/2, x_2 + \lambda_2/2]$, będącą komórką o środku w punkcie $\mathbf{x} \in \Omega$, gdzie λ_1, λ_2 są jej długościami wzdłuż osi x_1, x_2 . Wielkość komórki określa stały parametr λ , zdefiniowany jako $\lambda \equiv ((\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2)^{1/2}$. Zakładamy, że parametr ten spełnia warunek $\lambda \ll \min(L_1, L_2)$. Parametr ten nazywać można *parametrem mikrostruktury*. Dodatkowym założeniem jest $\max(d) \ll \lambda$.

Ponadto przyjmujemy, że grubość płyty d może być funkcją tolerancyjnie-periodyczną argumentu $\mathbf{x}$, a składniki tensora modułów sprężystości A_{ijkl} , gęstość masy ρ mogą być funkcjami tolerancyjnie-periodycznymi $\mathbf{x}$ oraz parzystymi z . Zakładamy też, że poziome płaszczyzny są płaszczyznami symetrii sprężystej. Stąd $A_{3\alpha\beta\gamma} = A_{333\gamma} = 0$ oraz $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $A_{\alpha\beta 33}$, A_{3333} są różne od zera. Ugięcie płaszczyzny środkowej w punkcie $\mathbf{x} \in \Omega$ oznaczmy przez $u(\mathbf{x}, t)$, a obciążenia pionowe (wzdłuż osi z) przez $p(\mathbf{x}, t)$.

Rozważania przedstawione w tym rozdziale są oparte na dobrze znanych założeniach teorii płyt cienkich Kirchhoffa, tj. *związkach kinematycznych, związkach odkształcenia-przemieszczenia, związkach naprężenia-odkształcenia* (z założeniem płaskiego stanu naprężenia), por. Timoshenko i Woinowky-Krieger (1959), książka pod red. Cz. Woźniaka (2001), Jędrusiak (2001b).

W następnych podrozdziałach zostaną wyprowadzone uśrednione równania *modelu tolerancyjnego* i *modelu asymptotycznego*, opisujące drgania cienkich płyt tolerancyjnie-periodycznych, a następnie pokazane będą zastosowania tych modeli w przypadku analizy drgań swobodnych.

6.2. Równania uśrednione

6.2.1. Model tolerancyjny

W tym podrozdziale wyprowadzimy uśrednione równania cienkich płyt tolerancyjnie-periodycznych. Korzystając z warunków symetrii, oznaczmy $C_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv A_{\alpha\beta\gamma\delta} - A_{\alpha\beta 33} A_{\gamma\delta 33} (A_{3333})^{-1}$. Wprowadźmy również następujące oznaczenia funkcji tolerancyjnie-periodycznych:

$$\mu(\mathbf{x}) \equiv \int_{-d/2}^{d/2} \rho(\mathbf{x}, z) dz, \quad \vartheta(\mathbf{x}) \equiv \int_{-d/2}^{d/2} \rho(\mathbf{x}, z) z^2 dz, \quad B_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-d/2}^{d/2} C_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{x}, z) z^2 dz, \quad (6.1)$$

opisujących takie własności płyty, jak: gęstość masy na jednostkę powierzchni, inercję obrotową, sztywności zginania.

Ponadto wzór (2.2) określający uśrednienie funkcji f przyjmuje postać

$$\langle f \rangle(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_1} \int_{\square(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega}. \quad (6.2)$$

W przypadku gdy f jest funkcją tolerancyjnie-periodyczną, to $\langle f \rangle_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, jest wolnozmienną funkcją będącą w tolerancji z funkcją $\langle f \rangle(\mathbf{x})$.

Postępując zgodnie z procedurą przedstawioną w *rozdziale 2*, zakładamy, że zagadnienia dynamiczne płyt cienkich są opisane funkcjonałem działania (2.9), przyjmującym postać

$$\mathcal{D}(u, p) = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\mathbf{y}, \partial_{\alpha} u, \dot{u}, u, p) dt d\mathbf{y}, \quad (6.3)$$

w którym funkcja Lagrange'a $\mathcal{L}$ jest określona wzorem

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{E} + \mathcal{F}, \quad (6.4)$$

gdzie: $\mathcal{E}$ to energia potencjalna, $\mathcal{K}$ – energia kinetyczna, $\mathcal{F}$ – praca sił zewnętrznych. Korzystając z założeń teorii płyt cienkich, wyrażenia na $\mathcal{E}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{F}$ można zapisać w postaci:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} B_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\alpha\beta} u \partial_{\gamma\delta} u, \quad \mathcal{K} = \frac{1}{2} (\mu \dot{u} \dot{u} + \vartheta \partial_{\alpha} \dot{u} \partial_{\beta} \dot{u} \delta_{\alpha\beta}), \quad \mathcal{F} = p u. \quad (6.5)$$

W dalszych rozważaniach będzie pomijany wpływ inercji obrotowej rozpatrywanej płyty cienkiej, opisany przez składnik podkreślony we wzorze na energię kinetyczną. Po podstawieniu (6.5) do (6.4) funkcja Lagrange'a $\mathcal{L}$ ma postać

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mu \dot{u} \dot{u} - B_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\alpha\beta} u \partial_{\gamma\delta} u) + pu. \quad (6.6)$$

Funkcja $\mathcal{L}(\cdot, \partial_{\alpha} u, \dot{u}, u, p)$ jest tolerancyjnie-periodyczną, silnie oscylującą funkcją argumentu $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \Omega$.

Korzystając z zasady stacjonarności działania dla funkcjonału działania $\mathcal{D}$, (6.3), i funkcji Lagrange'a $\mathcal{L}$, (6.6), otrzymujemy równanie Eulera-Lagrange'a opisujące zagadnienia dynamiczne cienkich płyt, które można przedstawić w postaci

$$\partial_{\alpha\beta}(B_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta} u) + \mu \ddot{u} = p. \quad (6.7)$$

Podstawową niewiadomą jest ugięcie $u(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$, $t \in (t_0, t_1)$, które musi spełniać odpowiednie warunki regularności.

Równanie (6.7) to równanie różniczkowe cząstkowe o silnie oscylujących, tolerancyjnie-periodycznych, nieciągłych współczynnikach funkcyjnych. Równanie to nie jest więc wygodne w zastosowaniach do analizy zagadnień szczególnych. Punktem wyjścia tolerancyjnego modelowania jest funkcjonał działania $\mathcal{D}$, (6.3), wraz z funkcją Lagrange'a $\mathcal{L}$, (6.6). Sformułowanie tych funkcji stanowi pierwszy etap procedury modelowania.

W drugim etapie przyjmuje się mikro-makro dekompozycję podstawowej niewiadomej, czyli ugięcia płyty $u(\mathbf{x}, t)$

$$u(\mathbf{x}, t) = w(\mathbf{x}, t) + h^A(\mathbf{x})v^A(\mathbf{x}, t), \quad (6.8)$$

gdzie $w(\cdot, t), v^A(\cdot, t) \in SV_{\delta}^2(\Omega, \square)$ dla każdej chwili $t \in (t_0, t_1)$. Podstawową niewiadomą jest funkcja w , którą nazywamy *makrougięciem*, a dodatkowymi niewiadomymi kinematycznymi są funkcje v^A , $A=1, \dots, N$, nazywane *amplitudami fluktuacji ugięcia*. Natomiast funkcje $h^A(\cdot) \in FS_{\delta}^2(\Omega, \square)$ są fluktuacyjnymi funkcjami kształtu, postulowanymi w każdym szczególnym, analizowanym zagadnieniu. Ponieważ funkcje te powinny opisywać charakter oscylacji ugięcia płyty, wywołanych jej niejednorodnością, można je przyjmować jako rozwiązania (dokładne lub przybliżone) pewnego zagadnienia własnego dla komórki $\square(\mathbf{x})$, por. Jędrysiak (2001b, 2009).

W trzecim etapie modelowania rozważania ograniczamy do dowolnej, ale ustalonej komórki $\square(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Korzystamy z tolerancyjnych przybliżeń

$\tilde{B}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{x}, \cdot), \tilde{\mu}(\mathbf{x}, \cdot)$ w $\square(\mathbf{x})$ funkcji $B_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{x}, \cdot), \mu(\mathbf{x}, \cdot)$ zdefiniowanych przez (6.1) oraz zakładamy, że $\langle \tilde{\mu}(\mathbf{x}, \cdot) \tilde{h}^A(\mathbf{x}, \cdot) \rangle = 0$. Stosując procedurę tolerancyjnego uśredniania, przedstawioną w *podrozdziale 2.3*, otrzymujemy uśredniony funkcjonal działania przy mikro-makro dekompozycji (6.8) dla komórki $\square(\mathbf{x})$

$$\mathcal{D}_h(w, v^A, p) = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathcal{L}_h \rangle(\mathbf{y}, \partial_\alpha w, \dot{w}, w, \dot{v}^A, v^A, p) dt d\mathbf{y},$$

z uśrednioną funkcją Lagrange'a $\mathcal{L}$ wyrażoną wzorem podobnym do (6.4)

$$\langle \mathcal{L}_h \rangle = \langle \mathcal{K} \rangle - \langle \mathcal{E} \rangle + \langle \mathcal{F} \rangle. \quad (6.9)$$

Oznaczając:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \langle B_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle, & B_{\alpha\beta}^A &= \langle B_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta} h^A \rangle, & B^{AB} &= \langle B_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\alpha\beta} h^A \partial_{\gamma\delta} h^B \rangle, \\ \hat{\mu} &= \langle \mu \rangle, & \mu^{AB} &= \langle \mu h^A h^B \rangle, & \hat{p} &= \langle p \rangle, & p^A &= \langle p h^A \rangle, \end{aligned} \quad (6.10)$$

oraz wykorzystując wyrażenia na uśrednioną energię potencjalną $\langle \mathcal{E} \rangle$, uśrednioną energię kinetyczną $\langle \mathcal{K} \rangle$, uśrednioną pracę sił zewnętrznych $\langle \mathcal{F} \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E} \rangle &= \frac{1}{2} (\hat{B}_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\alpha\beta} w \partial_{\gamma\delta} w + 2 B_{\gamma\delta}^B \partial_{\gamma\delta} w v^B + B^{AB} v^A v^B), \\ \langle \mathcal{K} \rangle &= \frac{1}{2} (\hat{\mu} \dot{w} \dot{w} + \underline{\mu^{AB} \dot{v}^A \dot{v}^B}), & \langle \mathcal{F} \rangle &= \hat{p} w + \underline{p^A v^A}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

funkcja $\langle \mathcal{L}_h \rangle$ przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_h \rangle &= \frac{1}{2} (\hat{\mu} \dot{w} \dot{w} + \underline{\mu^{AB} \dot{v}^A \dot{v}^B}) - \hat{B}_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\alpha\beta} w \partial_{\gamma\delta} w - 2 B_{\gamma\delta}^B \partial_{\gamma\delta} w v^B - B^{AB} v^A v^B + \\ &\quad + \hat{p} w + \underline{p^A v^A}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

gdzie składniki podkreślone zależą od parametru mikrostruktury. Korzystając z zasady stacjonarności działania dla uśrednionej funkcji Lagrange'a (6.12), otrzymujemy uśrednione równania Eulera-Lagrange'a:

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha\beta} (\hat{B}_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta} w + B_{\alpha\beta}^B v^B) + \hat{\mu} \dot{w} &= \hat{p}, \\ B_{\alpha\beta}^A \partial_{\alpha\beta} w + B^{AB} v^B + \underline{\mu^{AB} \dot{v}^B} &= \underline{p^A}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Równania (6.13), wraz z mikro-makro dekompozycją (6.8), stanowią narzędzie do analizy zagadnień dynamicznych cienkich płyt tolerancyjnie-periodycznych w ramach *modelu tolerancyjnego*. Współczynniki równań (6.13) są gładkimi, wolnozmiennymi funkcjami argumentów x_1, x_2 , w przeciwieństwie do współczynników równania (6.7) – nieciągłych i silnie oscylujących. Równania (6.13)

uwzględniają wpływ wielkości mikrostruktury płyty w zagadnieniach dynamicznych poprzez zależne od parametru mikrostruktury składniki podkreślone.

Warunki początkowe należy określić dla podstawowych niewiadomych w, v^A (dwa warunki dla każdej). Warunki brzegowe na wszystkich brzegach, tj. $x_1=0, L_1; x_2=0, L_2$, muszą być sformułowane dla makrougięcia w (łącznie cztery warunki). Ponadto, rozwiązania w, v^A mają fizyczny sens wtedy, gdy spełnione są warunki $w(\cdot, t), v^A(\cdot, t) \in SV_0^2(\Omega, \square)$, które mogą być wykorzystane do weryfikacji poprawności fizycznej otrzymanych wyników.

6.2.2. Model asymptotyczny

Punktem wyjścia procedury modelowania asymptotycznego jest równanie opisujące zagadnienia dynamiczne rozpatrywanych płyt (6.7), które można otrzymać z zasady stacjonarności działania zastosowanej do funkcjonalów $\mathcal{D}(\cdot)$, (6.3), $\mathcal{L}(\cdot)$, (6.6).

W modelowaniu asymptotycznym wprowadzamy parametr $\varepsilon \in (0, 1]$, przedział $\square_\varepsilon \equiv [-\varepsilon\lambda_1/2, \varepsilon\lambda_1/2] \times [-\varepsilon\lambda_2/2, \varepsilon\lambda_2/2]$ oraz ε -komórkę $\square_\varepsilon(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x} + \square_\varepsilon$ o środku w punkcie $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$.

Podstawowe założenie modelowania asymptotycznego, tj. asymptotyczna dekompozycja (2.18), dla ugięcia $u(\mathbf{x}, t)$ ma postać

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = w(\mathbf{y}, t) + \varepsilon \tilde{h}_\varepsilon^A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v^A(\mathbf{y}, t), \quad (6.14)$$

gdzie $\mathbf{y} \in \square_\varepsilon(\mathbf{x}), t \in (t_0, t_1)$, oraz funkcje u, w, v^A ($A=1, \dots, N$) są ciągłe i ograniczone w $\overline{\Omega}$ wraz ze swoimi pierwszymi pochodnymi. Korzystając z oznaczeń (2.19) pochodne (2.20) dla ugięcia można zapisać jako

$$\partial_\alpha u_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \partial_\alpha w(\mathbf{y}, t) + \hat{\partial}_\alpha \tilde{h}_\varepsilon^A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v^A(\mathbf{y}, t) + \varepsilon \tilde{h}_\varepsilon^A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \partial_\alpha v^A(\mathbf{y}, t). \quad (6.15)$$

Uwzględniając $\varepsilon \rightarrow 0$ i korzystając ze wzorów (2.21), zależności (6.14)-(6.15) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= w(\mathbf{x}, t) + O(\varepsilon), \\ \partial_\alpha u_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= \partial_\alpha w(\mathbf{x}, t) + \hat{\partial}_\alpha \tilde{h}_\varepsilon^A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v^A(\mathbf{x}, t) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Dokonując przejścia z parametrem ε do zera, w powyższych wzorach pomijamy składniki $O(\varepsilon)$.

Kolejny etap modelowania to wprowadzenie rodziny $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ funkcji

$$\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon = \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \mathbf{y} / \varepsilon, \partial_\alpha w(\mathbf{x}, t), \dot{w}(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t), v^A(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{y} \in \square_\varepsilon(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \overline{\Omega}, t \in (t_0, t_1),$$

które są funkcjami Lagrange'a w funkcjonalach działania

$$\mathcal{D}_h^\varepsilon(w, v^A) = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y} / \varepsilon, \partial_\alpha w, \dot{w}, w, v^A) dt d\mathbf{x}.$$

Korzystając z procedury modelowania asymptotycznego, w której dla $\varepsilon \rightarrow 0$ funkcje $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ zmiennej $\mathbf{y} / \varepsilon$, $\mathbf{y} \in \square_\varepsilon(\mathbf{x})$, dążą do uśrednionej funkcji Lagrange'a $\mathcal{L}_0$, (2.23), w postaci

$$\mathcal{L}_0(\mathbf{x}, \partial_\alpha w(\mathbf{x}, t), \dot{w}(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t), v^A(\mathbf{x}, t)) = \frac{1}{|\square|} \int_{\square(\mathbf{x})} \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \partial_\alpha w, \dot{w}, w, v^A) d\mathbf{y}, \mathbf{x} \in \overline{\Omega}, \quad (6.17)$$

asymptotyczny funkcjonal działania można zapisać jako

$$\mathcal{D}_h^0(w, v^A) = \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}_0(\mathbf{x}, \partial_\alpha w, \dot{w}, w, v^A) dt d\mathbf{x}.$$

Uśredniając asymptotycznie i wykorzystując dekompozycję (6.14) oraz wyrażenia (6.16), otrzymujemy funkcję Lagrange'a $\mathcal{L}_0$, (6.17):

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\hat{\mu}\dot{w}\dot{w} - \hat{B}_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_{\alpha\beta}w\partial_{\gamma\delta}w - 2B_{\gamma\delta}^B\partial_{\gamma\delta}wv^B - B^{AB}v^Av^B) + \hat{p}w, \quad (6.18)$$

Po zastosowaniu zasady stacjonarności działania do uśrednionej funkcji Lagrange'a (6.18), otrzymujemy równania Eulera-Lagrange'a:

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha\beta}(\hat{B}_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_{\gamma\delta}w + B_{\alpha\beta}^Bv^B) + \hat{\mu}\dot{w} &= \hat{p}, \\ B_{\alpha\beta}^A\partial_{\alpha\beta}w + B^{AB}v^B &= 0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Powyższe równania razem z asymptotyczną dekompozycją (6.14) reprezentują *model asymptotyczny*, opisujący zagadnienia dynamiczne płyt tolerancyjnie-periodycznych (o poprzecznej gradacji własności) na poziomie makro. Równania (6.19) są równaniami o gładkich, wolnozmiennych współczynnikach, w przeciwieństwie do równania (6.7) o współczynnikach nieciągłych i silnie oscylujących. Ponadto równania te nie uwzględniają wpływu wielkości mikrostruktury płyty.

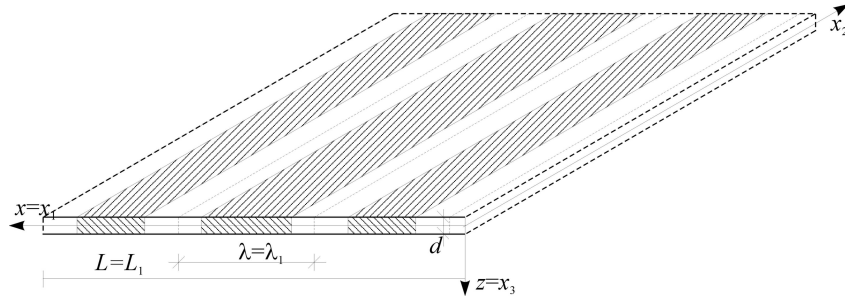
Łatwo zauważyć, że równania (6.19) można otrzymać z równań (6.13) modelu tolerancyjnego, pomijając w nich składniki podkreślone, zależne od parametru mikrostruktury.

W modelu asymptotycznym formułujemy warunki początkowe i warunki brzegowe dla makrougięcia w . Funkcje w, v^A muszą spełniać warunki $w(\cdot, t), v^A(\cdot, t) \in SV_\delta^2(\Omega, \square)$.

6.3. Wybrane zagadnienia – drgania swobodne pasma płytowego

6.3.1. Wprowadzenie

W tym podrozdziale, jako przykład zastosowania równań modelu tolerancyjnego i asymptotycznego, rozpatrzmy drgania swobodne płyty o rozpiętości $L \equiv L_1$ wzdłuż osi x_1 oraz nieograniczonej wzdłuż osi x_2 , czyli tzw. pasma płytowego. Zakładamy, że grubość d pasma jest stała oraz własności materiałowe są niezależne od współrzędnej x_2 . Fragment takiego pasma pokazano na rys. 6.2.



Rys. 6.2. Fragment pasma płytowego o budowie tolerancyjnie-periodycznej (por. Jędrusiak (2010))

Oznaczmy $x \equiv x_1, z \equiv x_3, L \equiv L_1$. W rozpatrywanym przypadku $x \in \Omega = (0, L)$, a komórką podstawową jest przedział $\square \equiv [-\lambda/2, \lambda/2]$ w zbiorze $\overline{\Omega}$. Zatem λ jest długością komórki, spełniającą warunki $d \ll \lambda \ll L$, którą nazywamy parametrem mikrostruktury. Ponadto, komórka o środku w punkcie $x \in \Omega$ jest oznaczona przez $\square(x) \equiv [x - \lambda/2, x + \lambda/2]$.

Przyjmujemy, że pasmo płytowe wykonane jest z dwóch sprężystych, izotropowych materiałów o własnościach określonych przez moduły Young'a E', E'' , współczynniki Poisson'a ν', ν'' oraz gęstości masy ρ', ρ'' . Zakładamy, że $E(x), \rho(x), x \in \Omega$, są tolerancyjnie-periodycznymi funkcjami x , $E(\cdot), \rho(\cdot) \in TP_\delta^0(\Omega, \square) \subset H^0(\Omega)$, natomiast współczynnik Poisson'a $\nu = \nu' = \nu''$ jest stały. Zatem, przy warunku, że $E' \neq E''$ oraz/lub $\rho' \neq \rho''$ budowa materiałowa pa-

sma może być uważana za funkcyjnie zmienną wzdłuż osi x , czyli jest to *pasmo o funkcyjnej (poprzecznej) gradacji własności*.

6.3.2. Równania uśrednione

Korzystając z definicji funkcji tolerancyjnie-periodycznych (6.1), opisujących własności płyty, otrzymujemy dla rozpatrywanego pasma płytowego:

$$\mu(x) \equiv dp(x), \quad B(x) \equiv \frac{d^3}{12(1-\nu^2)} E(x), \quad (6.20)$$

Rozpatrując zagadnienie drgań swobodnych mamy $p=0$. Ugięcie pasma jest oznaczone przez $u(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \in (t_0, t_1)$; natomiast pochodna względem x jako $\partial \equiv \partial_1$. Ponadto zakładamy, że w mikro-makro dekompozycji (6.8) ugięcia możemy przyjąć tylko jedną fluktuacyjną funkcję kształtu, tj. $A=N=1$, czyli $h(x)=h^1(x)$, por. Jędrusiak (2001b, 2009). Zatem wzór (6.8) ma postać

$$u(x,t) = w(x,t) + h(x)v(x,t), \quad (6.21)$$

gdzie $w(\cdot, t), v(\cdot, t) \in SV_0^2(\Omega, \square)$ dla każdej chwili $t \in (t_0, t_1)$, oraz $h(\cdot) \in FS_0^2(\Omega, \square)$.

Wprowadzając oznaczenia:

$$\begin{aligned} \hat{B} &\equiv \hat{B}_{1111} = \langle B \rangle, & B_{11} &\equiv B_{11}^1 = \langle B \partial \partial h \rangle, & B^{11} &= \langle B \partial \partial h \partial \partial h \rangle, \\ \hat{\mu} &= \langle \mu \rangle, & \mu^{11} &= \langle \mu h h \rangle, \end{aligned} \quad (6.22)$$

równania (6.13) modelu tolerancyjnego można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \partial \partial (\hat{B} \partial \partial w + B_{11} v) + \hat{\mu} \ddot{w} &= 0, \\ B_{11} \partial \partial w + B^{11} v + \mu^{11} \ddot{v} &= 0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Natomiast równania (6.19) modelu asymptotycznego mają postać:

$$\begin{aligned} \partial \partial (\hat{B} \partial \partial w + B_{11} v) + \hat{\mu} \ddot{w} &= 0, \\ B_{11} \partial \partial w + B^{11} v &= 0. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Wyznaczając z równania (6.24)₂ amplitudę fluktuacji v oraz wstawiając do równania (6.24)₁ otrzymujemy tylko jedno równanie dla makrougięcia w

$$\partial \partial [(\hat{B} - (B_{11})^2 / B^{11}) \partial \partial w] + \hat{\mu} \ddot{w} = 0. \quad (6.25)$$

Równania (6.23) oraz (6.25) są równaniami o wolnozmiennych współczynnikach funkcyjnych.

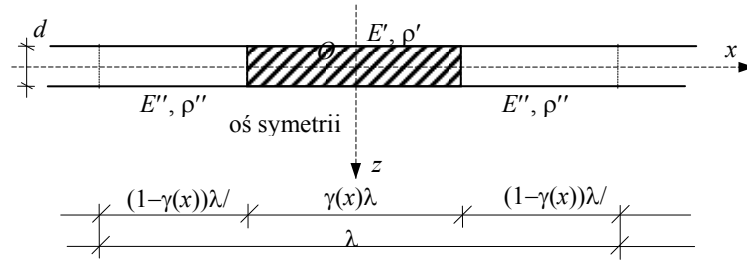
6.3.3. Przykład – zastosowanie metody Ritza

Założmy, że własności pasma płytowego są opisane następującymi funkcjami:

$$\rho(\cdot, z) = \begin{cases} \rho', & \text{dla } z \in ((1-\gamma(x))\lambda/2, (1+\gamma(x))\lambda/2), \\ \rho'', & \text{dla } z \in [0, (1-\gamma(x))\lambda/2] \cup [(1+\gamma(x))\lambda/2, \lambda], \end{cases} \quad (6.26)$$

$$E(\cdot, z) = \begin{cases} E', & \text{dla } z \in ((1-\gamma(x))\lambda/2, (1+\gamma(x))\lambda/2), \\ E'', & \text{dla } z \in [0, (1-\gamma(x))\lambda/2] \cup [(1+\gamma(x))\lambda/2, \lambda], \end{cases} \quad (6.27)$$

gdzie $\gamma(x)$ jest funkcją rozkładu własności materiałowych, por. rys. 6.3.



Rys. 6.3. Komórka pasma płytowego tolerancyjnie-periodycznego

Dla przyjętej komórki $\square(x)$, $x \in \Omega$, pasma, pokazanej na rys. 6.3, zakładamy periodyczne przybliżenie fluktuacyjnej funkcji kształtu $h(x)$ w postaci

$$\tilde{h}(x, z) = \lambda^2 [\cos(2\pi z / \lambda) + c(x)], \quad z \in \square(x), \quad x \in \overline{\Omega},$$

gdzie $c(x)$ obliczamy z warunku $\langle \tilde{\mu} \tilde{h} \rangle = 0$. Wielkość $c(x)$ jest funkcją wolno-zmienną argumentu x i ma postać

$$c = c(x) = \frac{\sin[\pi \tilde{\gamma}(x)](\rho' - \rho'')}{\pi \{\rho' \tilde{\gamma}(x) + \rho'' [1 - \tilde{\gamma}(x)]\}},$$

gdzie $\tilde{\gamma}(x)$ periodycznym przybliżeniem funkcji rozkładu własności $\gamma(x)$. Przy wyznaczaniu pochodnych fluktuacyjnej funkcji kształtu $\partial \tilde{h} / \partial \partial \tilde{h}$ wielkość $c(x)$ traktujemy jak stałą. Stąd:

$$\partial h(z) = -2\pi \lambda \sin(2\pi z / \lambda), \quad \partial \partial h(z) = -4\pi^2 \cos(2\pi z / \lambda).$$

Ponieważ znalezienie analitycznych rozwiązań równań modelu tolerancyjnego (6.23) lub modelu asymptotycznego (6.25) w ogólnym przypadku nie jest możliwe, można zastosować przybliżony sposób rozwiązania.

Na przykład, przybliżone wzory częstości drgań swobodnych można otrzymać, korzystając z metody Ritza, por. Jędrusiak (2001b, 2010), Jędrusiak i Michalak (2010). W tej metodzie wyznaczamy wyrażenia określające maksymalną energię potencjalną $\mathcal{E}_{\max}$ oraz maksymalną energię kinetyczną $\mathcal{K}_{\max}$ układu. W tym celu, w przypadku pasma płytowego o rozpiętości L zakładamy przybliżone postacie rozwiązań, tj. makrougięcia $w(x,t)$ oraz amplitudy fluktuacji $v(x,t)$:

$$w(x,t) = A_w \Phi(\alpha x) \cos(\omega t), \quad v(x,t) = A_v \Psi(\alpha x) \cos(\omega t), \quad (6.28)$$

gdzie α jest liczbą falową, ω jest częstością drgań swobodnych, $\Phi(\cdot)$ oraz $\Psi(\cdot)$ są tzw. funkcjami własnymi (postaciami drgań swobodnych) dla makrougięcia oraz amplitudy fluktuacji, odpowiednio, spełniającymi zadane warunki brzegowe dla $x=0, L$.

Wprowadźmy oznaczenia dla drugich pochodnych funkcji $\Phi(\cdot)$ i $\Psi(\cdot)$:

$$\partial\partial\Phi(\alpha x) \equiv \alpha^2 \bar{\Phi}(\alpha x), \quad \partial\partial\Psi(\alpha x) \equiv \alpha^2 \bar{\Psi}(\alpha x), \quad (6.29)$$

oraz współczynników:

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \frac{d^3}{12(1-\nu^2)} \int_0^L \{E''[1-\tilde{\gamma}(x)] + \tilde{\gamma}(x)E'\} [\bar{\Phi}(\alpha x)]^2 dx, \\ \bar{B} &= \frac{(\pi d)^3}{3(1-\nu^2)} \int_0^L \{(E' - E'')[2\pi\tilde{\gamma}(x) + \sin(2\pi\tilde{\gamma}(x))] + 2\pi E''\} [\Psi(\alpha x)]^2 dx, \\ \bar{B} &= \frac{\pi d^3}{3(1-\nu^2)} (E' - E'') \int_0^L \sin(\pi\tilde{\gamma}(x)) \bar{\Phi}(\alpha x) \Psi(\alpha x) dx, \\ \bar{\mu} &= d \int_0^L \{[1-\tilde{\gamma}(x)]\rho'' + \tilde{\gamma}(x)\rho'\} [\Phi(\alpha x)]^2 dx, \\ \bar{\mu} &= \frac{d}{4\pi} \int_0^L \{(\rho' - \rho'')[2\pi\tilde{\gamma}(x) + \sin(2\pi\tilde{\gamma}(x))] + 2\pi\rho''\} [\Psi(\alpha x)]^2 dx + \\ &\quad + \frac{d}{\pi} (\rho' - \rho'') \int_0^L c(x) [\pi c(x)\tilde{\gamma}(x) - 2\sin(\pi\tilde{\gamma}(x))] [\Psi(\alpha x)]^2 dx + \\ &\quad + d\rho'' \int_0^L [c(x)]^2 [\Psi(\alpha x)]^2 dx. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Korzystając z (6.28), możemy zapisać wyrażenia określające maksymalną energię – potencjalną $\mathcal{E}_{\max}$ i kinetyczną $\mathcal{K}_{\max}$, pasma płytowego:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\max} &= \frac{1}{2}[(\bar{B}A_u^2\alpha^2 - 2\bar{B}A_uA_v)\alpha^2 + \bar{B}A_v^2], \\ \mathcal{K}_{\max} &= \frac{1}{2}(A_u^2\bar{\mu} + A_v^2\lambda^4\bar{\mu})\omega^2.\end{aligned}\quad (6.31)$$

Dla energii (6.31) stosujemy warunki metody Ritza:

$$\frac{\partial(\mathcal{E}_{\max} - \mathcal{K}_{\max})}{\partial A_u} = 0, \quad \frac{\partial(\mathcal{E}_{\max} - \mathcal{K}_{\max})}{\partial A_v} = 0,$$

otrzymując układ liniowych równań algebraicznych:

$$\begin{aligned}A_u(\bar{B}\alpha^4 - \omega^2\bar{\mu}) - \bar{B}\alpha^2 A_v &= 0, \\ -A_u\bar{B}\alpha^2 + A_v(\bar{B} - \omega^2\lambda^4\bar{\mu}) &= 0.\end{aligned}\quad (6.32)$$

Przyrównując wyznacznik układu równań (6.32) do zera dostajemy:

$$\begin{aligned}(\omega_-)^2 &\equiv \frac{(\alpha\lambda)^4\bar{\mu}\bar{B} + \bar{\mu}\bar{B} - \sqrt{[\bar{B}(\alpha\lambda)^4\bar{\mu} - \bar{\mu}\bar{B}]^2 + 4(\alpha\lambda)^4\bar{\mu}\bar{\mu}\bar{B}^2}}{2\bar{\mu}\bar{\mu}\lambda^4}, \\ (\omega_+)^2 &\equiv \frac{(\alpha\lambda)^4\bar{\mu}\bar{B} + \bar{\mu}\bar{B} + \sqrt{[\bar{B}(\alpha\lambda)^4\bar{\mu} - \bar{\mu}\bar{B}]^2 + 4(\alpha\lambda)^4\bar{\mu}\bar{\mu}\bar{B}^2}}{2\bar{\mu}\bar{\mu}\lambda^4},\end{aligned}\quad (6.33)$$

gdzie ω_- oraz ω_+ są, odpowiednio, *niższą* oraz *wyższą częstotliwością drgań swobodnych* w modelu tolerancyjnym.

Postępując w podobny sposób w ramach modelu asymptotycznego, określonego równaniem (6.25), po zastosowaniu metody Ritza otrzymujemy wzór

$$\omega^2 \equiv \alpha^4 \frac{\bar{B}\bar{B} - \bar{B}^2}{\bar{\mu}\bar{B}}, \quad (6.34)$$

na *częstość drgań swobodnych* ω w modelu asymptotycznym.

Zauważmy, że model tolerancyjny pozwala badać wpływ mikroniejednorodnej budowy pasma płytowego w postaci wyższych częstotliwości drgań swobodnych, (6.33)₂, natomiast zastosowanie modelu asymptotycznego prowadzi tylko do podstawowej, niższej częstotliwości drgań, (6.34).

6.3.4. Wyniki obliczeń

W przykładzie obliczeniowym rozpatrzmy cztery różne sposoby podparcia pasma płytowego na końcach, tj.:

1° pasmo obustronnie przegubowo podparte

$$\Phi(0) = \partial\partial\Phi(0) = \Phi(L) = \partial\partial\Phi(L) = 0; \quad (6.35)$$

2° pasmo obustronnie utwierdzone

$$\Phi(0) = \partial\Phi(0) = \Phi(L) = \partial\Phi(L) = 0 ; \quad (6.36)$$

3° pasmo lewostronnie utwierdzone, prawostronnie – przegubowo podparte

$$\Phi(0) = \partial\Phi(0) = \Phi(L) = \partial\partial\Phi(L) = 0 ; \quad (6.37)$$

4° pasmo wspornikowe

$$\Phi(0) = \partial\Phi(0) = \partial\partial\Phi(L) = \partial\partial\partial\Phi(L) = 0 . \quad (6.38)$$

Wykorzystując funkcje trygonometryczno-hiperboliczne Kryłowa-Pragera

$$\begin{aligned} S(\alpha x) &= \frac{1}{2}[\cosh(\alpha x) + \cos(\alpha x)], & T(\alpha x) &= \frac{1}{2}[\sinh(\alpha x) + \sin(\alpha x)], \\ U(\alpha x) &= \frac{1}{2}[\cosh(\alpha x) - \cos(\alpha x)], & V(\alpha x) &= \frac{1}{2}[\sinh(\alpha x) - \sin(\alpha x)], \end{aligned} \quad (6.39)$$

funkcje własne $\Phi(\cdot)$ oraz $\Psi(\cdot)$ z rozwiązań (6.28) przyjmujemy w postaci jak dla pasma jednorodnego, spełniającej powyższe warunki brzegowe (6.35)-(6.38), tj.:

1° pasmo obustronnie przegubowo podparte

$$\Phi(\alpha x) = \sin(\alpha x), \quad \Psi(\alpha x) = \sin(\alpha x); \quad (6.40)$$

2° pasmo obustronnie utwierdzone

$$\Phi(\alpha x) = \Psi(\alpha x) = U(\alpha x) - \frac{\cosh(\alpha L) - \cos(\alpha L)}{\sinh(\alpha L) - \sin(\alpha L)} V(\alpha x); \quad (6.41)$$

3° pasmo lewostronnie utwierdzone, prawostronnie – przegubowo podparte

$$\Phi(\alpha x) = \Psi(\alpha x) = U(\alpha x) - \coth(\alpha L) V(\alpha x); \quad (6.42)$$

4° pasmo wspornikowe

$$\Phi(\alpha x) = \Psi(\alpha x) = U(\alpha x) - \frac{\sinh(\alpha L) - \sin(\alpha L)}{\cosh(\alpha L) + \cos(\alpha L)} V(\alpha x) . \quad (6.43)$$

Ponadto rozpatrzymy cztery funkcje rozkładu własności materiałowych $\gamma(x)$, przyjmując ich przybliżenia periodyczne w postaci:

1° wariant nr 1 ($\phi=1$)

$$\tilde{\gamma}(x) = \sin^2(\pi x / L); \quad (6.44)$$

2° wariant nr 2 ($\phi=2$)

$$\tilde{\gamma}(x) = \cos^2(\pi x / L); \quad (6.45)$$

3° wariant nr 3 ($\phi=3$)

$$\tilde{\gamma}(x) = (x/L)^2; \quad (6.46)$$

4° wariant nr 4 ($\phi=4$) – pasmo płytowe periodyczne

$$\tilde{\gamma}(x) = \gamma = 0,5. \quad (6.47)$$

Wprowadźmy bezwymiarowe parametry:

$$q \equiv \alpha\lambda, \quad \eta \equiv d/\lambda, \quad \varepsilon \equiv E''/E', \quad \varsigma \equiv \rho''/\rho',$$

gdzie q jest bezwymiarową liczbą falową; $\eta \ll 1$; $\varepsilon, \varsigma \in [0,1]$, a także bezwymiarowe parametry częstości, określone wzorami:

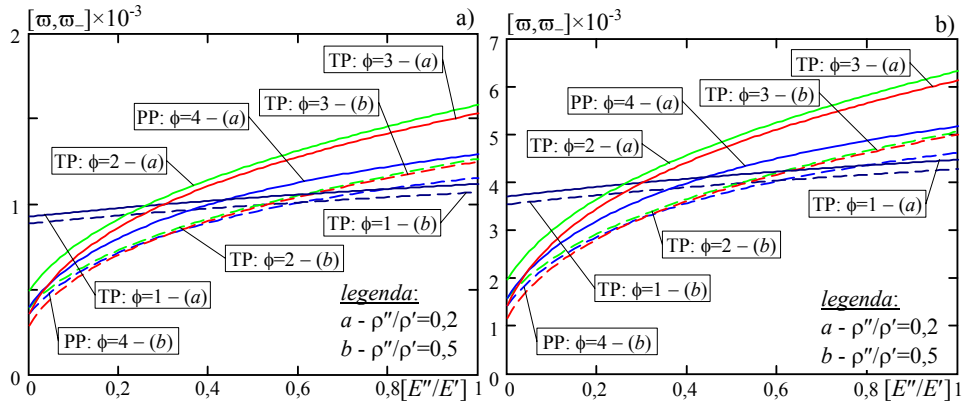
$$(\varpi_{-,+})^2 \equiv \frac{12(1-\nu^2)\rho'}{E'} \lambda^2 (\omega_{-,+})^2, \quad (\varpi)^2 \equiv \frac{12(1-\nu^2)\rho'}{E'} \lambda^2 \omega^2, \quad (6.48)$$

z częstościami ω_- , ω_+ , ω według wzorów (6.33), (6.34).

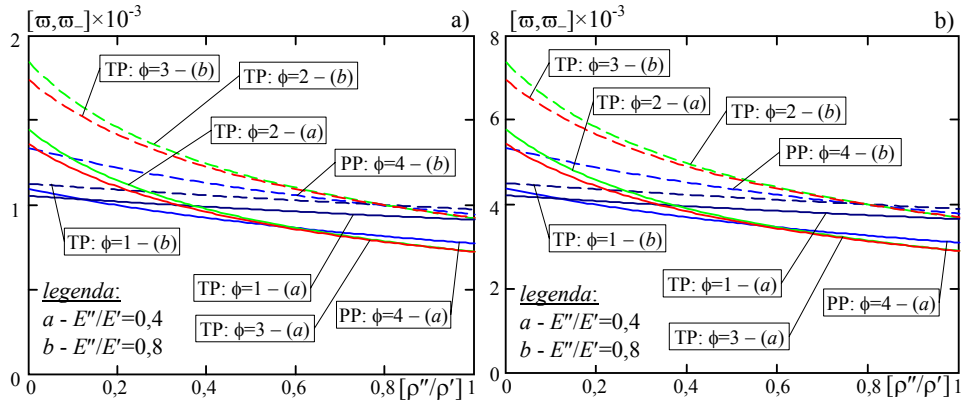
Wyniki obliczeń przeprowadzonych przy wykorzystaniu relacji (6.48) są przedstawione w postaci wykresów na rys. 6.4-6.15. Wykresy te sporządzono dla czterech funkcji rozkładu własności materiałowych $\gamma(x)$ przybliżonych wzorami (6.44)-(6.47) (odpowiednie krzywe oznaczono przez $\phi=1,2,3,4$) oraz czterech przypadków warunków brzegowych, tj. pasma płytowego przegubowo podpartego (6.35) – rys. 6.4-6.6, pasma obustronnie utwierdzonego (6.36) – rys. 6.7-6.9, pasma lewostronnie utwierdzonego i prawostronnie podpartego przegubowo (6.37) – rys. 6.10-6.12, pasma wspornikowego (6.38) – rys. 6.13-6.15. Przyjęto, że grubość płyty spełnia warunek $d/\lambda=0,1$, natomiast liczba falowa α odpowiada pierwszej postaci drgań swobodnych dla każdego ze sposobów podparcia pasma, tj. $\alpha=\pi$ dla (6.35), $\alpha=4,7300$ dla (6.36), $\alpha=3,9266$ dla (6.37) oraz $\alpha=1,8751$ dla (6.38).

Na rys. 6.4, 6.7, 6.10, 6.13 pokazane są krzywe parametrów niższych częstości ϖ_- , ϖ w zależności od ilorazu modułów Younga E''/E' (dla $\rho''/\rho'=0,2; 0,5$), a na rys. 6.5, 6.8, 6.11, 6.14 – w zależności od ilorazu gęstości ρ''/ρ' (dla $E''/E'=0,4; 0,8$). Przy czym, na rysunkach a) są wyniki dla bezwymiarowej liczby falowej $q=0,1$, a na rysunkach b) – dla $q=0,2$.

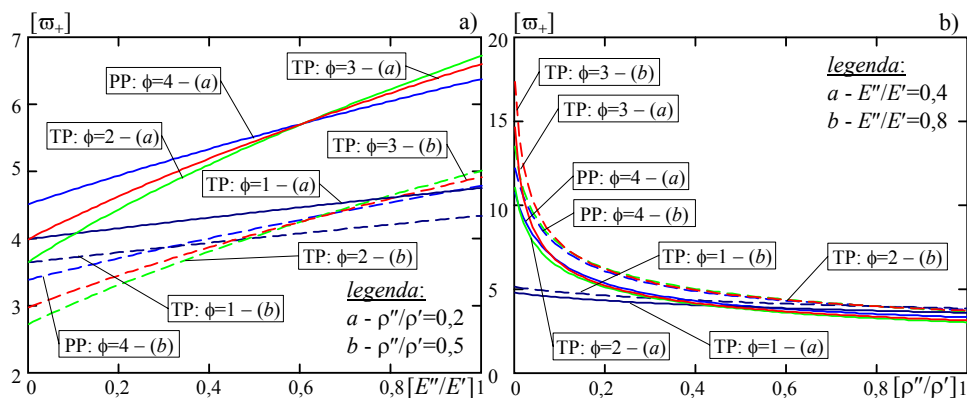
Rys. 6.6, 6.9, 6.12, 6.15 przedstawiają wykresy parametrów wyższych częstości ϖ_+ w zależności od ilorazu modułów Younga E''/E' (rysunki a) – dla $\rho''/\rho'=0,2; 0,5$) oraz w zależności od ilorazu gęstości ρ''/ρ' (rysunki b) – dla $E''/E'=0,4; 0,8$). Obliczenia przeprowadzono dla bezwymiarowej liczby falowej $q=0,1$.



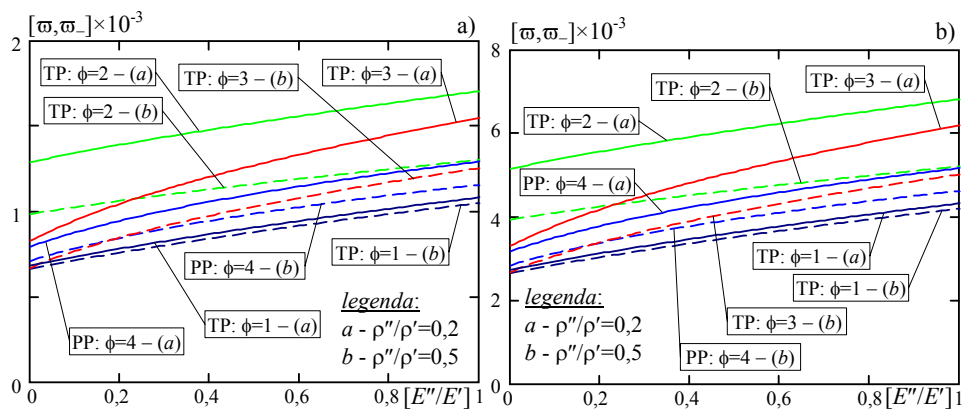
Rys. 6.4. Wykresy parametrów niższych częstotliwości dla pasma płytowego przegubowo podpartego ($\phi=1,2,3,4$) $\omega-E''/E'$, $\omega_{-}E''/E'$: a) dla $q=0,1$; b) dla $q=0,2$; (TP – pasmo płytowe tolerancyjnie-periodyczne, PP – pasmo płytowe periodyczne)



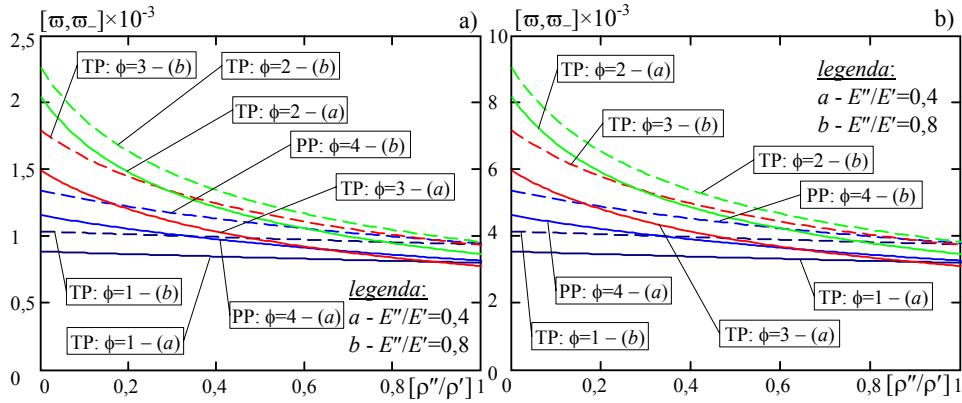
Rys. 6.5. Wykresy parametrów niższych częstotliwości dla pasma płytowego przegubowo podpartego ($\phi=1,2,3,4$) $\omega-\rho''/\rho'$, $\omega_{-}\rho''/\rho'$: a) dla $q=0,1$; b) dla $q=0,2$; (TP – pasmo płytowe tolerancyjnie-periodyczne, PP – pasmo płytowe periodyczne)



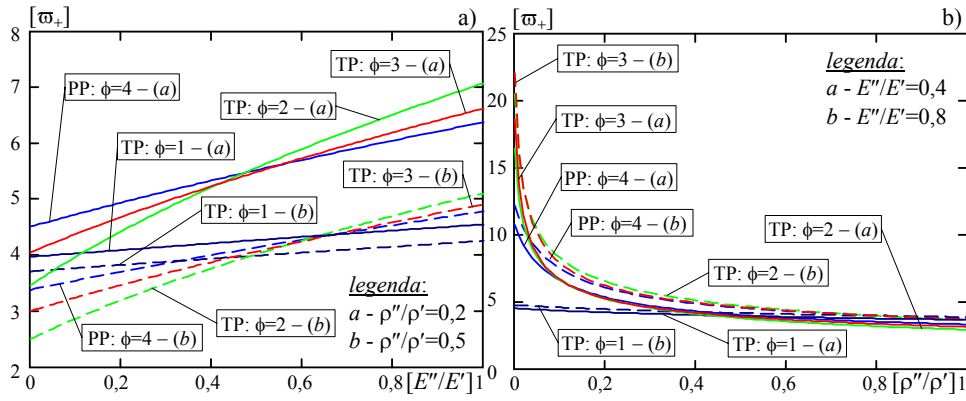
Rys. 6.6. Wykresy parametrów wyższych częstotliwości dla pasma płytowego przegubowo podpartego ($\phi=1,2,3,4$): a) ω_+-E''/E' ; b) $\omega_+-\rho''/\rho'$; (TP – pasmo płytowe tolerancyjnie-periodyczne, PP – pasmo płytowe peryodyczne)



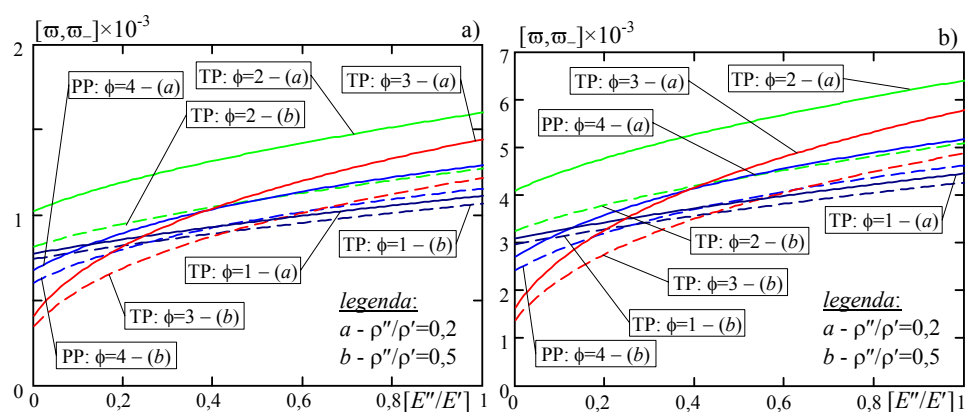
Rys. 6.7. Wykresy parametrów niższych częstotliwości dla pasma płytowego obustronnie utwardzonego ($\phi=1,2,3,4$) $\omega-E''/E'$, ω_--E''/E' : a) dla $q=0,1$; b) dla $q=0,2$; (TP – pasmo płytowe tolerancyjnie-periodyczne, PP – pasmo płytowe peryodyczne)



Rys. 6.8. Wykresy parametrów niższych częstotliwości dla pasma płytowego obustronnie utwardzonego ($\phi=1,2,3,4$) $\omega-\rho''/\rho'$, $\omega_{\pm}-\rho''/\rho'$: a) dla $q=0,1$; b) dla $q=0,2$; (TP – pasmo płytowe tolerancyjnie-periodyczne, PP – pasmo płytowe periodyczne)



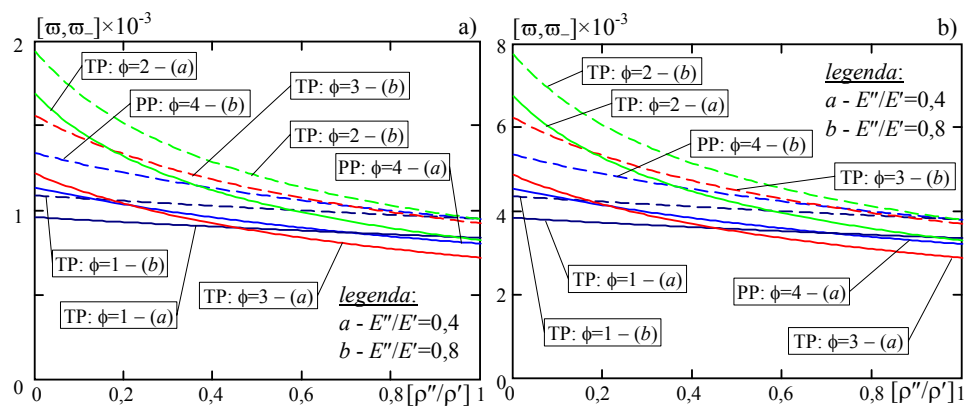
Rys. 6.9. Wykresy parametrów wyższych częstotliwości dla pasma płytowego obustronnie utwardzonego ($\phi=1,2,3,4$): a) $\omega_{+}-E''/E'$; b) $\omega_{+}-\rho''/\rho'$; (TP – pasmo płytowe tolerancyjnie-periodyczne, PP – pasmo płytowe periodyczne)



Rys. 6.10. Wykresy parametrów niższych częstotliwości dla pasma płytowego lewostronnie utwierdzonego i prawostronnie podpartego przegubowo ($\phi=1,2,3,4$) $\omega-E''/E'$, $\omega_{-}E''/E'$:

a) dla $q=0,1$; b) dla $q=0,2$;

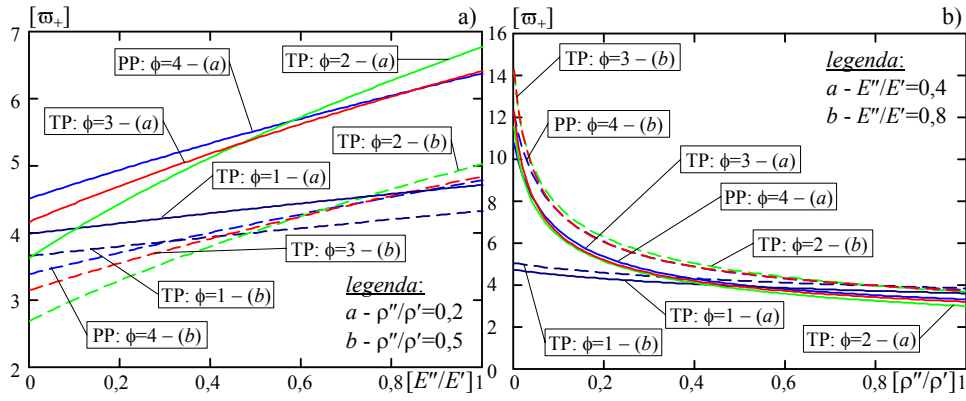
(TP – pasmo płytowe tolerancyjnie-periodyczne, PP – pasmo płytowe periodyczne)



Rys. 6.11. Wykresy parametrów niższych częstotliwości dla pasma płytowego lewostronnie utwierdzonego i prawostronnie podpartego przegubowo ($\phi=1,2,3,4$) $\omega-\rho''/\rho'$, $\omega_{-}\rho''/\rho'$:

a) dla $q=0,1$; b) dla $q=0,2$;

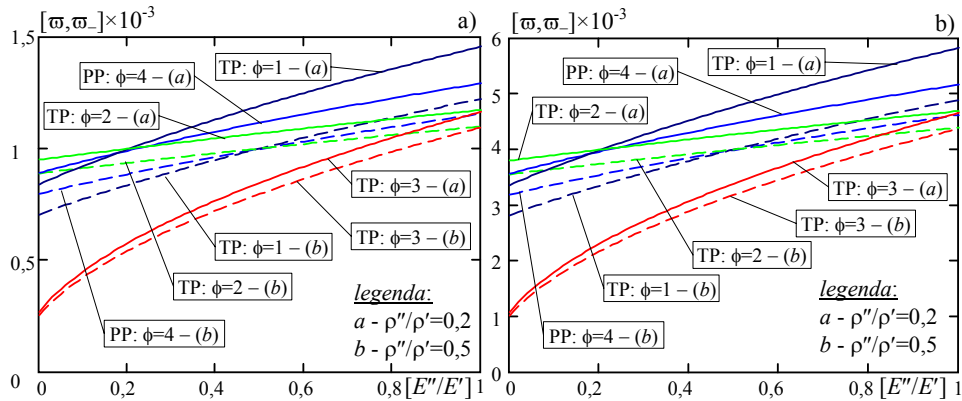
(TP – pasmo płytowe tolerancyjnie-periodyczne, PP – pasmo płytowe periodyczne)



Rys. 6.12. Wykresy parametrów wyższych częstotliwości dla pasma płytowego lewostronnie utwardzonego i prawostronnie podpartego przegubowo ($\phi=1,2,3,4$):

a) $\omega_+ - E''/E'$; b) $\omega_+ - \rho''/\rho'$;

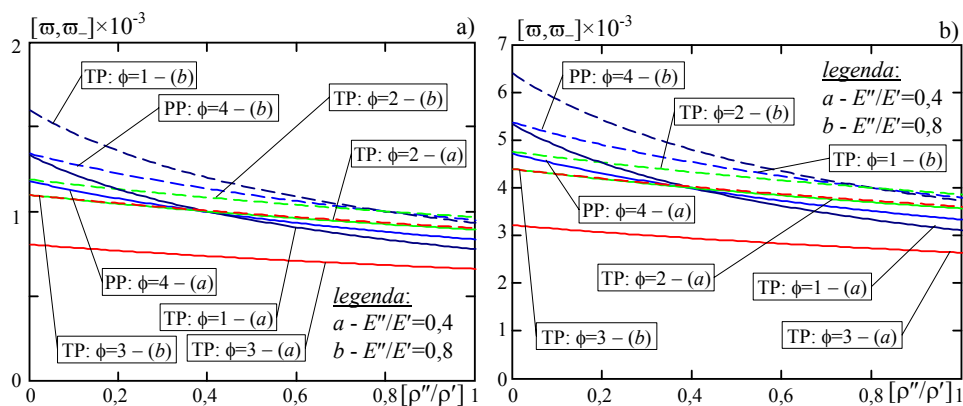
(TP – pasmo płytowe tolerancyjnie-periodyczne, PP – pasmo płytowe periodyczne)



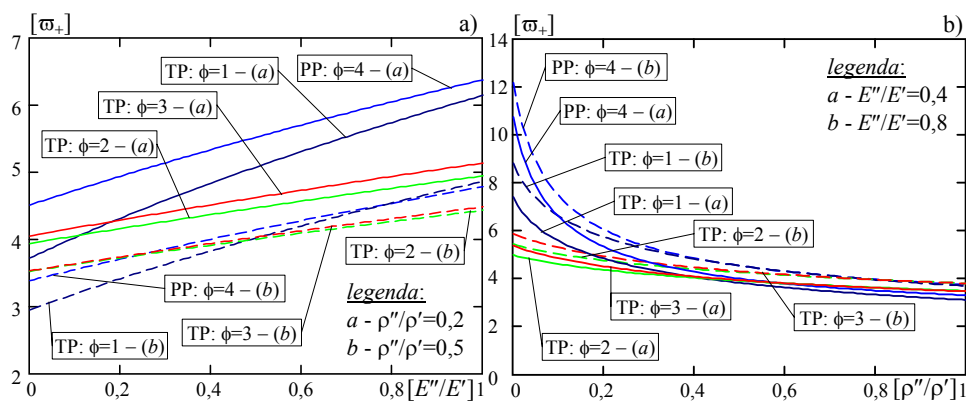
Rys. 6.13. Wykresy parametrów niższych częstotliwości dla pasma płytowego

wspornikowego ($\phi=1,2,3,4$) $\omega - E''/E'$, $\omega_- - E''/E'$: a) dla $q=0,1$; b) dla $q=0,2$;

(TP – pasmo płytowe tolerancyjnie-periodyczne, PP – pasmo płytowe periodyczne)



Rys. 6.14. Wykresy parametrów niższych częstotliwości dla pasma płytowego wspornikowego ($\phi=1,2,3,4$) $\omega-\rho''/\rho'$, $\omega_--\rho''/\rho'$: a) dla $q=0,1$; b) dla $q=0,2$; (TP – pasmo płytowe tolerancyjnie-periodyczne, PP – pasmo płytowe peryodyczne)



Rys. 6.15. Wykresy parametrów wyższych częstotliwości dla pasma płytowego wspornikowego ($\phi=1,2,3,4$): a) ω_+-E''/E' ; b) $\omega_+-\rho''/\rho'$; (TP – pasmo płytowe tolerancyjnie-periodyczne, PP – pasmo płytowe peryodyczne)

Analizując wyniki przedstawione na rys. 6.4-6.15, można sformułować następujące uwagi.

- 1° Wartości parametrów częstotliwości niższych otrzymanych w ramach modelu tolerancyjnego i modelu asymptotycznego są prawie identyczne, por. rys. 6.4-6.5, 6.7-6.8, 6.10-6.11, 6.13-6.14.
- 2° Wyższe wartości parametrów częstotliwości niższych otrzymuje się dla większej bezwymiarowej liczby falowej q , por. rys. 6.4-6.5, 6.7-6.8, 6.10-6.11, 6.13-6.14.

- 3° Wartości parametrów częstości niższych rosną wraz ze wzrostem ilorazu E''/E' (rys. 6.4, 6.7, 6.10, 6.13), a maleją wraz ze wzrostem ilorazu ρ''/ρ' (rys. 6.5, 6.8, 6.11, 6.14):
- dla pasma płytowego przegubowo podpartego najbardziej łagodny wzrost (rys. 6.4) lub spadek (rys. 6.5) tych wartości jest dla funkcji rozkładu własności (6.44), $\phi=1$;
 - dla pasma płytowego obustronnie utwierdzonego najbardziej łagodny wzrost (rys. 6.7) lub spadek (rys. 6.8) tych wartości jest także dla funkcji rozkładu własności (6.44), $\phi=1$;
 - dla pasma płytowego lewostronnie utwierdzonego i prawostronnie podpartego przegubowo najbardziej łagodny wzrost (rys. 6.10) lub spadek (rys. 6.11) tych wartości jest również dla funkcji rozkładu własności (6.44), $\phi=1$;
 - dla pasma płytowego wspornikowego najbardziej łagodny wzrost (rys. 6.13) lub spadek (rys. 6.14) tych wartości jest dla funkcji rozkładu własności (6.45), $\phi=2$.
- 4° Najwyższe wartości parametrów częstości niższych przy ustalonych parametrach d/λ , q oraz E''/E' otrzymujemy:
- pasmo płytowe przegubowo podparte – dla funkcji rozkładu własności (6.45), $\phi=2$, gdy $\rho''/\rho' < \zeta_0$, a dla funkcji (6.44), $\phi=1$, gdy $\rho''/\rho' \geq \zeta_0$, rys. 6.5;
 - pasmo płytowe obustronnie utwierdzone – dla funkcji rozkładu własności (6.45), $\phi=2$, gdy $\rho''/\rho' \in [0,1]$, rys. 6.8;
 - pasmo płytowe lewostronnie utwierdzone i prawostronnie przegubowo podparte – dla funkcji rozkładu własności (6.45), $\phi=2$, gdy $\rho''/\rho' < \zeta_0$, a dla funkcji (6.44), $\phi=1$, gdy $\rho''/\rho' \geq \zeta_0$, rys. 6.11;
 - pasmo płytowe wspornikowe – dla funkcji rozkładu własności (6.44), $\phi=1$, gdy $\rho''/\rho' < \zeta_0$, a dla funkcji (6.45), $\phi=2$, gdy $\rho''/\rho' \geq \zeta_0$, rys. 6.14.
- 5° Najniższe wartości parametrów częstości niższych przy ustalonych parametrach d/λ , q oraz E''/E' otrzymujemy:
- pasmo płytowe przegubowo podparte – dla funkcji rozkładu własności (6.44), $\phi=1$, gdy $\rho''/\rho' < \zeta_0$; dla funkcji (6.47), $\phi=4$ (pasmo periodyczne), gdy $\zeta_0 \leq \rho''/\rho' < \zeta_1$; oraz dla funkcji (6.46), $\phi=3$, gdy $\zeta_1 \leq \rho''/\rho'$, rys. 6.5;

- b) pasmo płytowe obustronnie utwierdzone – dla funkcji rozkładu własności (6.44), $\phi=1$, gdy $\rho''/\rho' < \zeta_0$; dla funkcji (6.46), $\phi=3$, gdy $\zeta_0 \leq \rho''/\rho'$, rys. 6.8;
 - c) pasmo płytowe lewostronnie utwierdzone i prawostronnie przegubowo podparte – dla funkcji rozkładu własności (6.44), $\phi=1$, gdy $\rho''/\rho' < \zeta_0$; dla funkcji (6.46), $\phi=3$, gdy $\zeta_0 \leq \rho''/\rho'$, rys. 6.11;
 - d) pasmo płytowe wspornikowe – dla funkcji rozkładu własności (6.46), $\phi=3$, gdy $\rho''/\rho' \in [0,1]$, rys. 6.14.
- 6° Wartości parametrów częstości wyższych rosną wraz ze wzrostem ilorazu E''/E' (rys. 6.6a, 6.9a, 6.12a, 6.15a), a maleją wraz ze wzrostem ilorazu ρ''/ρ' (rys. 6.6b, 6.9b, 6.12b, 6.15b):
- a) dla pasma płytowego przegubowo podpartego najbardziej łagodny wzrost (rys. 6.6a) lub spadek (rys. 6.6b) tych wartości jest dla funkcji rozkładu własności (6.44), $\phi=1$;
 - b) dla pasma płytowego obustronnie utwierdzonego najbardziej łagodny wzrost (rys. 6.9a) lub spadek (rys. 6.9b) tych wartości jest także dla funkcji rozkładu własności (6.44), $\phi=1$;
 - c) dla pasma płytowego lewostronnie utwierdzonego i prawostronnie podpartego przegubowo najbardziej łagodny wzrost (rys. 6.12a) lub spadek (rys. 6.12b) tych wartości jest również dla funkcji rozkładu własności (6.44), $\phi=1$;
 - d) dla pasma płytowego wspornikowego najbardziej łagodny wzrost (rys. 6.15a) lub spadek (rys. 6.15b) tych wartości jest dla funkcji rozkładu własności (6.45), $\phi=2$.
- 7° Najwyższe wartości parametrów częstości wyższych przy ustalonych parametrach d/λ , q otrzymujemy:
- a) pasmo płytowe przegubowo podparte
 - gdy $\rho''/\rho'=0,2$ – dla funkcji rozkładu własności (6.47), $\phi=4$, gdy $E''/E' < \varepsilon_0$, a dla funkcji (6.45), $\phi=2$, gdy $E''/E' \geq \varepsilon_0$, rys. 6.6a;
 - gdy $\rho''/\rho'=0,5$ – dla funkcji rozkładu własności (6.44), $\phi=1$, gdy $E''/E' < \varepsilon_0$; dla funkcji (6.47), $\phi=4$, gdy $\varepsilon_0 \leq E''/E' < \varepsilon_1$; dla funkcji (6.45), $\phi=2$, gdy $\varepsilon_1 < E''/E'$, rys. 6.6a;
 - b) pasmo płytowe obustronnie utwierdzone
 - gdy $\rho''/\rho'=0,2$ – dla funkcji rozkładu własności (6.47), $\phi=4$, gdy $E''/E' < \varepsilon_0$, a dla funkcji (6.45), $\phi=2$, gdy $E''/E' \geq \varepsilon_0$, rys. 6.9a;

- gdy $\rho''/\rho'=0,5$ – dla funkcji rozkładu własności (6.44), $\phi=1$, gdy $E''/E'<\varepsilon_0$; dla funkcji (6.47), $\phi=4$, gdy $\varepsilon_0\leq E''/E'<\varepsilon_1$; dla funkcji (6.45), $\phi=2$, gdy $\varepsilon_1<E''/E'$, rys. 6.9a;
 - c) pasmo płytowe lewostronnie utwierdzone i prawostronnie przegubowo podparte
 - gdy $\rho''/\rho'=0,2$ – dla funkcji rozkładu własności (6.47), $\phi=4$, gdy $E''/E'<\varepsilon_0$, a dla funkcji (6.45), $\phi=2$, gdy $E''/E'\geq\varepsilon_0$, rys. 6.12a;
 - gdy $\rho''/\rho'=0,5$ – dla funkcji rozkładu własności (6.44), $\phi=1$, gdy $E''/E'<\varepsilon_0$; dla funkcji (6.47), $\phi=4$, gdy $\varepsilon_0\leq E''/E'<\varepsilon_1$; dla funkcji (6.45), $\phi=2$, gdy $\varepsilon_1<E''/E'$, rys. 6.12a;
 - d) pasmo płytowe wspornikowe
 - gdy $\rho''/\rho'=0,2$ – dla funkcji rozkładu własności (6.47), $\phi=4$, gdy $E''/E'\in[0,1]$, rys. 6.15a;
 - gdy $\rho''/\rho'=0,5$ – dla funkcji rozkładu własności (6.46), $\phi=3$, gdy $E''/E'<\varepsilon_0$; dla funkcji (6.47), $\phi=4$, gdy $\varepsilon_0\leq E''/E'<\varepsilon_1$; dla funkcji (6.44), $\phi=1$, gdy $\varepsilon_1<E''/E'$, rys. 6.15a.
- 8° Najniższe wartości parametrów częstości wyższych przy ustalonych parametrach d/λ , q otrzymujemy:
- a) pasmo płytowe przegubowo podparte
 - gdy $\rho''/\rho'=0,2$ – dla funkcji rozkładu własności (6.45), $\phi=2$, gdy $E''/E'<\varepsilon_0$, a dla funkcji (6.44), $\phi=1$, gdy $E''/E'\geq\varepsilon_0$, rys. 6.6a;
 - gdy $\rho''/\rho'=0,5$ – dla funkcji rozkładu własności (6.45), $\phi=2$, gdy $E''/E'<\varepsilon_0$; a dla funkcji (6.44), $\phi=1$, gdy $\varepsilon_0\leq E''/E'$, rys. 6.6a;
 - b) pasmo płytowe obustronnie utwierdzone
 - gdy $\rho''/\rho'=0,2$ – dla funkcji rozkładu własności (6.45), $\phi=2$, gdy $E''/E'<\varepsilon_0$, a dla funkcji (6.44), $\phi=1$, gdy $E''/E'\geq\varepsilon_0$, rys. 6.9a;
 - gdy $\rho''/\rho'=0,5$ – dla funkcji rozkładu własności (6.45), $\phi=2$, gdy $E''/E'<\varepsilon_0$, a dla funkcji (6.44), $\phi=1$, gdy $E''/E'\geq\varepsilon_0$, rys. 6.9a;
 - c) pasmo płytowe lewostronnie utwierdzone i prawostronnie przegubowo podparte
 - gdy $\rho''/\rho'=0,2$ – dla funkcji rozkładu własności (6.45), $\phi=2$, gdy $E''/E'<\varepsilon_0$, a dla funkcji (6.44), $\phi=1$, gdy $E''/E'\geq\varepsilon_0$, rys. 6.12a;
 - gdy $\rho''/\rho'=0,5$ – dla funkcji rozkładu własności (6.45), $\phi=2$, gdy $E''/E'<\varepsilon_0$, a dla funkcji (6.44), $\phi=1$, gdy $E''/E'\geq\varepsilon_0$, rys. 6.12a;

d) pasmo płytowe wspornikowe

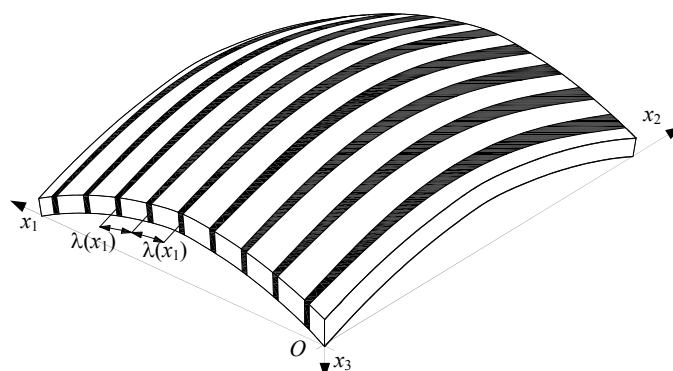
- gdy $\rho''/\rho'=0,2$ – dla funkcji rozkładu własności (6.44), $\phi=1$, gdy $E''/E'<\varepsilon_0$, a dla funkcji (6.45), $\phi=2$, gdy $E''/E'\geq\varepsilon_0$, rys. 6.15a;
- gdy $\rho''/\rho'=0,5$ – dla funkcji rozkładu własności (6.44), $\phi=1$, gdy $E''/E'<\varepsilon_0$, a dla funkcji (6.45), $\phi=2$, gdy $E''/E'\geq\varepsilon_0$, rys. 6.15a.

Przeprowadzona w tym podrozdziale analiza częstości drgań swobodnych dla różnych warunków podparcia pasma płytowego i różnych funkcji rozkładu własności nie jest niestety pełna. Do znalezienia tych częstości wykorzystano przybliżoną metodę Ritza. W przyszłości przewiduje się zbadanie wpływu innych rozkładów własności na częstości, porównanie w ramach modelu tolerancyjnego z rozwiązaniem uzyskanym przy zastosowaniu metody różnic skończonych, a w przypadku częstości niższych – podstawowych, również porównanie z wynikami otrzymanymi metodą elementów skończonych.

7. Powłoki cienkie tolerancyjnie-periodyczne

7.1. Wprowadzenie

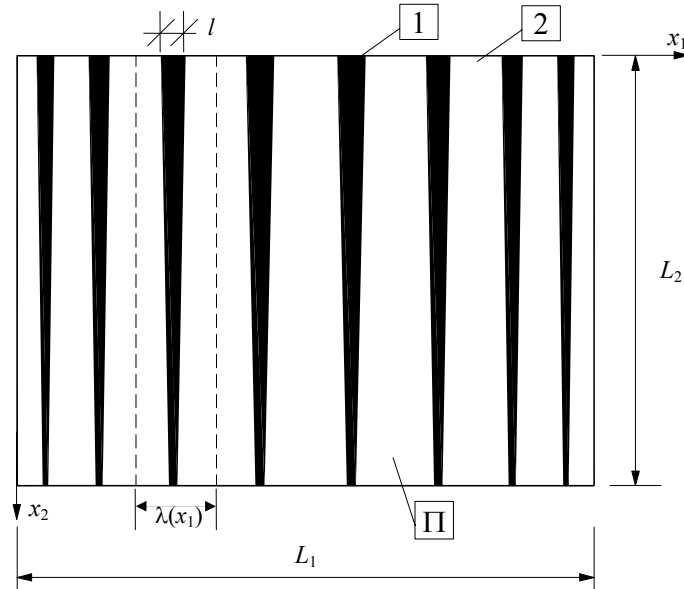
Obiektami rozważań w tym rozdziale są cienkie, małowyniosłe, sprężyste powłoki o stałej grubości, wykonane z dwóch składników. Zakłada się, że własności makroskopowe (uśrednione) tych powłok zmieniają się w sposób ciągły wzdłuż jednego lub dwóch kierunków. Natomiast w skali mikro oba składniki rozmieszczone są w sposób tolerancyjnie-periodyczny tylko wzdłuż jednego kierunku. Fragment takiej powłoki pokazano na rys. 7.1.



Rys. 7.1. Fragment cienkiej powłoki o budowie tolerancyjnie-periodycznej
(por. Jędrzyak i Cz. Woźniak (2010))

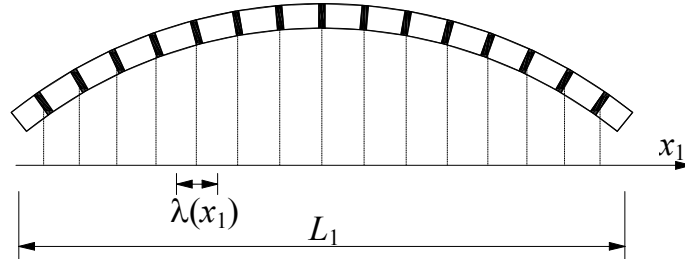
Zauważmy, że w skali mikro powłoki te złożone są z wielu małych elementów, zwanych „komórkami”, które w przeciwieństwie do powłok periodycznych, por. Tomczyk (2003a), nie są powtarzalne. Przyjmujemy, że sąsiadujące z sobą komórki są prawie identyczne, natomiast komórki odległe – mogą się od siebie bardzo różnić. Natomiast w skali makro własności powłoki w obu kierunkach opisane są funkcjami wolnozmiennymi. Powłoki tego rodzaju możemy zatem nazywać *cienkimi powłokami tolerancyjno-periodycznymi* bądź *cienkimi powłokami o funkcyjnej gradacji własności*.

Zakładamy, że rozważania prowadzimy w prostokątnym kartezjańskim układzie współrzędnych $Ox_1x_2x_3$. Niech $\Pi \equiv (0, L_1) \times (0, L_2)$ będzie rzutem powłoki na płaszczyznę $x_3=0$, por. rys. 7.2, gdzie L_1, L_2 są wymiarami rzutu, które można nazwać rozpiętościami powłoki. Indeksy $i, j, \dots$ (związane z układem $Ox_1x_2x_3$) przyjmują wartości 1, 2, 3, a indeksy $\alpha, \beta, \dots$ (związane z Ox_1x_2) – wartości 1, 2; przy czym zachowana jest konwencja sumacyjna dla tych indeksów. Wprowadźmy oznaczenia $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$, $z \equiv x_3$, gdzie $x_1 \in \Omega = (0, L_1)$, $x_2 \in \Xi = (0, L_2)$, $z \in [-d/2, d/2]$, oraz $t, t \in (t_0, t_1)$, dla czasu. Ponadto ∂_α są pochodnymi względem współrzędnych x_α , $\alpha=1, 2$; $\partial_{\alpha\dots\delta} \equiv \partial_\alpha \dots \partial_\delta$.



Rys. 7.2. Rzut powłoki na płaszczyznę $x_3=0$; 1 – składnik nr 1, 2 – składnik nr 2 (por. Jędrzyak i Cz. Woźniak (2010))

Niech wzdłuż kierunku x_1 mikrostruktura powłoki ma charakter tolerancyjnie-periodyczny. Wprowadźmy „komórkę” $\square = [-\lambda/2, \lambda/2]$ w zbiorze $\overline{\Omega}$ oraz $\square(x_1) \equiv [x_1 - \lambda/2, x_1 + \lambda/2]$, będącą komórką o środku w punkcie $x_1 \in \Omega$. Parametr λ jest długością komórki, która może być stała (*powłoka o równomiernym rozłożeniu komórek*) lub określona wolnozmienną funkcją $\lambda = \lambda(x_1)$ (*powłoka o nierównomiernym rozłożeniu komórek*), por. rozdział 3. Przy czym zakłada się, że $\lambda \ll \min(L_1, L_2)$. Fragmenty przykładów powłok pokazano na rys. 7.2, przedstawiającym rzut powłoki, oraz rys. 7.3, na którym jest przekrój poprzeczny powłoki.



Rys. 7.3. Przekrój poprzeczny powłoki (por. Jędrusiak i Cz. Woźniak (2010))

Podobnie jak dla laminatów (por. *rozdział 3*), indeksem „prim” oznaczmy wielkości dotyczące składnika nr 1, a indeksem „bis” – składnika nr 2. Niech M będzie liczbą komórek, a $x_1 = x_1^m$, $m=1, \dots, M$, – płaszczyzną symetrii m -tej komórki.

Ponadto, w przypadku powłok z nierównomiernym rozłożeniem komórek przyjmujemy, że istnieje nieujemna funkcja $\lambda = \lambda(x_1)$, $x_1 \in [0, L_1]$, taka, że:

- (i) $\lambda(\cdot) \in SV_8^1(\Omega, \square)$,
- (ii) $\lambda(x_1^m) = \lambda_m$ jest długością m -tej komórki, $m=1, \dots, M$.

Funkcję $\lambda(\cdot)$ będziemy nazywać *funkcją długości komórek*.

Wprowadzamy dwa różne parametry, określające wielkość mikrostruktury powłoki:

- dla równomiernego rozłożenia komórek, $\lambda = \text{const}$, *parametrem mikrostruktury* będziemy nazywać stałą długość komórki λ , przy założeniu, że spełniony jest warunek $\lambda/L_1 \ll 1$;
- dla nierównomiernego rozłożenia komórek, $\lambda = \lambda(x_1)$, *parametrem mikrostruktury* będziemy nazywać długość l fragmentu komórki wykonanego ze składnika nr 1 (por. rys. 7.2), zakładając, że $l/L_1 \ll 1$.

Zauważmy, że długość l fragmentu komórki wykonanego ze składnika nr 1 może być w ogólnym przypadku funkcją współrzędnych x_1, x_2 , tj. $l = l(x_1, x_2)$. W związku z tym, możemy mieć do czynienia, między innymi, z następującymi szczególnymi przypadkami powłok:

1° powłoka o równomiernym rozłożeniu komórek, czyli $\lambda = \text{const}$, w której $l = \text{const}$; powłokę taką nazywamy *powłoką o jednokierunkowej periodycy* (tylko wzdłuż kierunku x_1), por. Tomczyk (2003a);

2° powłoka o równomiernym rozłożeniu komórek, czyli $\lambda = \text{const}$, w której $l = l(x_2)$; ma ona budowę periodyczną wzdłuż kierunku x_1 , natomiast wzdłuż x_2 – funkcyjną gradację własności; powłokę taką nazywamy *powłoką o podłużnej*

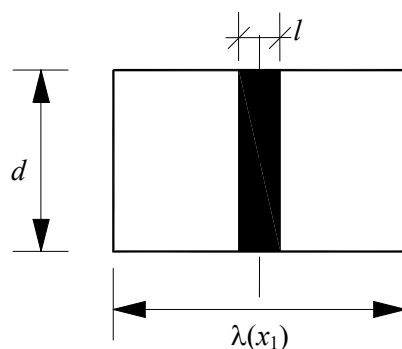
gradacji własności (tj. wzdłuż kierunku x_2), por. Wirowski (2007, 2008, 2009, 2010a);

3° powłoka o równomiernym rozłożeniu komórek, czyli $\lambda = \text{const}$, w której $l = l(x_1, x_2)$; ma ona budowę tolerancyjnie-periodyczną wzdłuż kierunku x_1 , natomiast wzdłuż x_2 – funkcyjną gradację własności; powłokę taką nazywamy *powłoką o funkcyjnej gradacji własności*, por. Jędrysiak i Cz. Woźniak (2009, 2010);

4° powłoka o równomiernym rozłożeniu komórek, czyli $\lambda = \text{const}$, w której $l = l(x_1)$; ma ona budowę tolerancyjnie-periodyczną wzdłuż kierunku x_1 , natomiast wzdłuż x_2 – własności są stałe; powłokę taką nazywamy *powłoką o poprzecznej gradacji własności* (tj. wzdłuż kierunku x_1), por. Jędrysiak i Cz. Woźniak (2009, 2010);

5° powłoka o nierównomiernym rozłożeniu komórek, czyli $\lambda = \lambda(x_1)$, w której $l = \text{const}$; ma ona budowę o podobnym charakterze jak w przypadku 4°, nazywamy ją *powłoką o poprzecznej gradacji własności* (tj. wzdłuż kierunku x_1), por. Jędrysiak i Cz. Woźniak (2009, 2010).

Poniższe rozważania są ograniczone do przypadków 4° oraz 5°, czyli takich *powłok tolerancyjnie-periodycznych*, które można nazwać *powłokami o poprzecznej gradacji własności*. Stosunkowo łatwo można je rozszerzyć na przypadek 3°, co w pewnym zakresie zostało pokazane w wymienionych wyżej pracach Jędrysiaka i Woźniaka.



Rys. 7.4. Komórka powłoki tolerancyjnie-periodycznej

W tym rozdziale rozpatrujemy zagadnienia dynamiczne powyższych powłok. Zakładamy, że gęstość masy ρ oraz tensor modułów sprężystości $\mathbb{C}$ są funkcjami tolerancyjnie-periodycznymi x_1 oraz parzystymi współrzędnej z , natomiast są niezależne od x_2 , czyli $\rho = \rho(x_1, z)$, $\mathbb{C} = \mathbb{C}(x_1, z)$. Ponadto elementy $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$

tensora $\mathbb{C}$ są określone przez założenie płaskiego stanu naprężenia. Przyjmujemy również, że grubość powłoki d jest stała oraz jest tego samego rzędu co parametr mikrostruktury, por. rys. 7.4.

Podobnie jak dla laminatów, por. *rozdział 3*, wprowadzamy nieujemne funkcje $v' = v'(x_1)$, $v'' = v''(x_1)$, $x_1 \in [0, L_1]$, takie, że:

$$(i) \quad v'(\cdot), v''(\cdot) \in SV_\delta^1(\Omega, \square),$$

$$(ii) \quad v'(x_1) + v''(x_1) = 1,$$

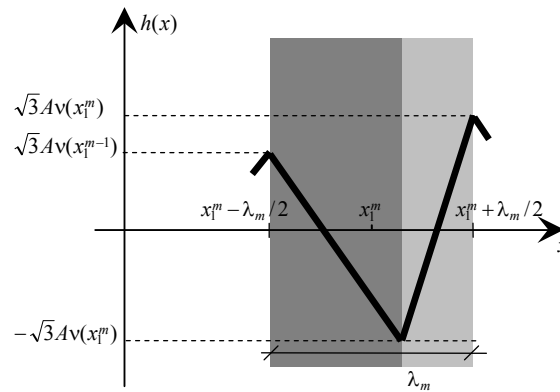
(iii) $v'(x_1^m) = v'_m$ oraz $v''(x_1^m) = v''_m$ określają, odpowiednio, objętościową zawartość składnika nr 1 oraz składnika nr 2 w m -tej komórce, $m=1, \dots, M$.

Funkcje $v'(\cdot), v''(\cdot)$ są *funkcjami nasycenia*. Wprowadźmy również *funkcję niejednorodności*, zdefiniowaną jako $v = \sqrt{v'v''}$.

W tolerancyjnym modelowaniu korzystamy z pojęcia fluktuacyjnej funkcji kształtu, por. *podrozdział 2.2*. Dla rozpatrywanych powłok wprowadzamy jedną funkcję $h(x_1)$, $x_1 \in [0, L_1]$. Przyjmując komórkę $\square(x_1^m) \equiv [x_1^m - \lambda_m/2, x_1^m + \lambda_m/2]$ w postaci przedstawionej na rys. 7.4 oraz pamiętając, że grubość powłoki d jest tego samego rzędu co parametr mikrostruktury, funkcję $h(\cdot)$ zdefiniujemy następująco

$$h(x) = \begin{cases} -A\sqrt{3} \frac{v}{v'_m} (2\frac{x}{\lambda_m} + v''_m) & \text{dla } x \in (x_1^m - \frac{1}{2}\lambda_m, x_1^m - \frac{1}{2}\lambda_m + v'_m\lambda_m), \\ A\sqrt{3} \frac{v}{v''_m} (2\frac{x}{\lambda_m} - v'_m) & \text{dla } x \in [x_1^m + \frac{1}{2}\lambda_m - \lambda_m v''_m, x_1^m + \frac{1}{2}\lambda_m), \end{cases} \quad (7.1)$$

gdzie $A=\lambda$ dla powłok o równomiernym rozłożeniu komórek lub $A=l$ dla powłok o nierównomiernym rozłożeniu komórek. Wykres funkcji $h(\cdot)$ w przedziale o długości λ_m pokazany jest na rys. 7.5.



Rys. 7.5. Fragment wykresu fluktuacyjnej funkcji kształtu

Wzór (2.2) określający uśrednienie funkcji f przyjmuje postać:

$$\langle f \rangle(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda} \int_{x_1 - \lambda/2}^{x_1 + \lambda/2} f(y_1, x_2) dy_1, \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega \times \Xi}. \quad (7.2)$$

Zauważmy, że jeśli f jest funkcją tolerancyjnie-periodyczną, to $\langle f \rangle_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \overline{\Omega \times \Xi}$, jest wolnozmienną funkcją będącą w tolerancji z funkcją $\langle f \rangle(\mathbf{x})$.

Zakładamy dalej, że tensor modułów sprężystości $\mathbb{C}$ oraz gęstość masy ρ , będąc funkcjami tolerancyjnie-periodycznymi argumentu x_1 , $\mathbb{C}(\cdot), \rho(\cdot) \in TP_\delta^0(\Omega, \square) \subset H^0(\Omega)$, przyjmują stałe wartości $\mathbb{C}'$, ρ' oraz $\mathbb{C}''$, ρ'' w składniku nr 1 oraz nr 2, odpowiednio. Oznaczmy pole przemieszczeń powłoki przez $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, z, t)$, ze składowymi u_i ($i=1,2,3$) wzdłuż osi x_i , $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \overline{\Pi}$, $z \in [-d/2, d/2]$, $t \in (t_0, t_1)$. Zakładamy, że przemieszczenia $\mathbf{u}$ są funkcjami tolerancyjnie-periodycznymi argumentu x_1 , tj. $\mathbf{u}(\cdot, x_2, z, t) \in TP_\delta^l(\Omega, \square)$, czyli mają charakter zgodny z mikrostrukturą powłoki.

W poniższych podrozdziałach pokazane są uśrednione równania *modelu tolerancyjnego* oraz *modelu asymptotycznego* cienkich powłok tolerancyjnie-periodycznych.

7.2. Równania uśrednione

7.2.1. Model tolerancyjny

Postępując zgodnie z procedurą przedstawioną w *rozdziale 2*, zakładamy, że zagadnienia dynamiczne cienkich powłok są opisane funkcjonałem działania (2.9), przyjmującym postać

$$\mathcal{D}(u_i, p^i) = \iint_{\Omega \times \Xi} \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(y_1, \nabla u_i, \dot{u}_i, u_i, p^i) dt dx_2 dy_1, \quad (7.3)$$

gdzie funkcję Lagrange'a $\mathcal{L}$ określa wzór

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{E} + \mathcal{F}, \quad (7.4)$$

w którym $\mathcal{E}$ jest energią potencjalną, $\mathcal{K}$ jest energią kinetyczną, a $\mathcal{F}$ – pracą sił zewnętrznych. Ponieważ rozpatrywane powłoki są cienkie i małowyniosłe, wprowadzamy następujące założenia kinematyczne:

$$\begin{aligned} u_3(\mathbf{x}, z, t) &= u_3^0(\mathbf{x}, t), \\ u_\alpha(\mathbf{x}, z, t) &= -\partial_\alpha u_3^0(\mathbf{x}, t)z + u_\alpha^0(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (7.5)$$

gdzie u_α^0 to przemieszczenia styczne do powierzchni środkowej powłoki, u_3^0 to przemieszczenia normalne do tej powierzchni. Oznaczając:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha u_\beta(\mathbf{x}, z, t) &= \partial_\alpha u_\beta(\mathbf{x}, z, t) - b_{\alpha\beta} u_3^0(\mathbf{x}, t), \\ \nabla_\alpha u_3(\mathbf{x}, z, t) &= \partial_\alpha u_3(\mathbf{x}, z, t) + b_\alpha^\beta u_\beta^0(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (7.6)$$

gdzie $b_{\alpha\beta}$, b_α^β są tensorami metrycznymi, wyrażenia na energię potencjalną $\mathcal{E}$, energię kinetyczną $\mathcal{K}$, pracę sił zewnętrznych $\mathcal{F}$, można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \int_{-d/2}^{d/2} C^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\alpha u_\beta \nabla_\gamma u_\delta dz, \\ \mathcal{K} &= \frac{1}{2} \int_{-d/2}^{d/2} \rho (\dot{u}_3 \dot{u}_3 + \dot{u}_\alpha \dot{u}_\beta \delta^{\alpha\beta}) dz, \\ \mathcal{F} &= p^3 u_3 + \int_{-d/2}^{d/2} p^\alpha u_\alpha dz. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Wstawiając (7.7) do (7.4), funkcja Lagrange'a $\mathcal{L}$ przyjmuje postać

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_{-d/2}^{d/2} (\rho (\dot{u}_3 \dot{u}_3 + \dot{u}_\alpha \dot{u}_\beta \delta^{\alpha\beta}) - C^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\alpha u_\beta \nabla_\gamma u_\delta) dz + p^3 u_3 + \int_{-d/2}^{d/2} p^\alpha u_\alpha dz. \quad (7.8)$$

Funkcje $\mathcal{L}(\cdot, \nabla u_i, \dot{u}_i, u_i, p^i)$ oraz $p^i(\cdot)$ są tolerancyjnie-periodycznymi, silnie oscylującymi funkcjami argumentu x_1 , $x_1 \in \Omega$.

Korzystając z zasady stacjonarności działania dla funkcjonału działania $\mathcal{D}$, (7.3), i funkcji Lagrange'a $\mathcal{L}$, (7.8), otrzymujemy równania Eulera-Lagrange'a opisujące zagadnienia dynamiczne cienkich powłok w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_3^0} + \partial_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\alpha\beta} u_3^0} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_3} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\beta^0} + \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\alpha u_\beta^0} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\beta^0} &= 0. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Podstawowe niewiadome, czyli przemieszczenia $u_i^0 = u_i^0(x_1, x_2, t)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \overline{\Pi}$, $t \in (t_0, t_1)$, muszą spełniać odpowiednie warunki regularności.

Równania (7.9) są równaniami o silnie oscylujących, tolerancyjnie-periodycznych, nieciągłych współczynnikach funkcyjnych. Zatem nie są one wygodne w zastosowaniach do analizy zagadnień szczególnych. Punktem wyjścia tolerancyjnego modelowania jest funkcjonał działania $\mathcal{D}$, (7.3), wraz z funkcją Lagrange'a $\mathcal{L}$, (7.8). Sformułowanie tych funkcji jest pierwszym etapem procedury modelowania.

Drugim etapem jest przyjęcie mikro-makro dekompozycji podstawowych niewiadomych, czyli pola przemieszczeń $\mathbf{u}(\mathbf{x}, z, t)$:

$$\begin{aligned} u_3(\mathbf{x}, z, t) &= w_3(\mathbf{x}, t), \\ u_\alpha(\mathbf{x}, z, t) &= [-\partial_\alpha w_3(\mathbf{x}, t) + h(x_1)\varphi_\alpha(\mathbf{x}, t)]z + w_\alpha(\mathbf{x}, t) + h(x_1)v_\alpha(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (7.10)$$

gdzie $w_3(\cdot, x_2, t) \in SV_\delta^2(\Omega, \square)$, $\varphi_\alpha(\cdot, x_2, t)$, $w_\alpha(\cdot, x_2, t)$, $v_\alpha(\cdot, x_2, t) \in SV_\delta^1(\Omega, \square)$ dla każdej chwili $t \in (t_0, t_1)$. Podstawowe niewiadome to funkcje w_i , $i=1,2,3$, które nazywamy *makroprzemieszczeniami*, a także funkcje φ_α oraz v_α , nazywane *amplitudami fluktuacji przemieszczeń*. Natomiast funkcja $h(\cdot) \in FS_\delta^1(\Omega, \square)$ to fluktuacyjna funkcja kształtu, postulowana w każdym szczególnym, analizowanym zagadnieniu, i która ze względu na to, że grubość płyty d jest tego samego rzędu co parametr mikrostruktury, może być przyjęta w postaci (7.1).

W trzecim etapie modelowania zawężamy rozważania do dowolnej, ale ustalonej komórki $\square(x_1) \equiv [x_1 - \lambda/2, x_1 + \lambda/2]$, $x_1 \in \Omega$. Wprowadźmy oznaczenia wielkości opisujących uśrednione po grubości charakterystyki sprężyste i inercyjne powłoki:

$$D^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \int_{-d/2}^{d/2} C^{\alpha\beta\gamma\delta} dz, \quad B^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \int_{-d/2}^{d/2} C^{\alpha\beta\gamma\delta} z^2 dz, \quad \mu \equiv \int_{-d/2}^{d/2} \rho dz, \quad (7.11)$$

które są funkcjami tolerancyjnie-periodycznymi argumentu x_1 . Wykorzystamy dalej z tolerancyjnych przybliżeń tych funkcji, tj. $\tilde{D}^{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, \cdot)$, $\tilde{B}^{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, \cdot)$, $\tilde{\mu}(x_1, \cdot)$ w $\square(x_1)$ oraz zakładamy, że $\langle \tilde{\mu}(x_1, \cdot) \tilde{h}(x_1, \cdot) \rangle = 0$. Procedura tolerancyjnego uśredniania przedstawiona w *podrozdziale 2.3*, prowadzi do otrzymania uśrednionego funkcjonału działania przy mikro-makro dekompozycji (7.10) dla komórki $\square(x_1)$

$$\mathcal{D}_h(w_i, \varphi_\alpha, v_\alpha, p^i) = \iiint_{\Omega \Xi t_0}^{t_1} \langle \mathcal{L}_h \rangle (y_1, \partial_\alpha w_i, \dot{w}_i, w_i, \partial_2 \varphi_\alpha, \varphi_\alpha, \partial_2 v_\alpha, \dot{v}_\alpha, v_\alpha, p^i) dt dx_2 dy_1,$$

w którym uśredniona funkcja Lagrange'a $\mathcal{L}$ może być wyrażona wzorem podobnym do (7.4)

$$\langle \mathcal{L}_h \rangle = \langle \mathcal{K} \rangle - \langle \mathcal{E} \rangle + \langle \mathcal{F} \rangle. \quad (7.12)$$

Oznaczając:

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \langle B^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle, & \tilde{B}^{\alpha\beta\delta} &= \langle B^{\alpha\beta 1\delta} \partial_1 h \rangle, & \tilde{B}^{\beta\delta} &= \langle B^{1\beta 1\delta} \partial_1 h \partial_1 h \rangle, \\
 \tilde{B}^{\beta\delta} &= \langle B^{2\beta 2\delta} h h \rangle, & \tilde{D}^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle, & \tilde{D}^{\alpha\beta\delta} &= \langle D^{\alpha\beta 1\delta} \partial_1 h \rangle, \\
 \tilde{D}^{\beta\delta} &= \langle D^{1\beta 1\delta} \partial_1 h \partial_1 h \rangle, & \tilde{D}^{\beta\delta} &= \langle D^{2\beta 2\delta} h h \rangle, & \tilde{D}^{\alpha\beta} &= \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} b_{\gamma\delta} \rangle, \\
 \hat{D}^\alpha &= \langle D^{\gamma\delta 1\alpha} \partial_1 \varphi b_{\gamma\delta} \rangle, & \hat{D} &= \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} b_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} \rangle, \\
 \tilde{\mu} &= \langle \mu \rangle, & \tilde{\mu} &= \langle \mu h h \rangle, & \tilde{p} &= \langle p^3 \rangle, & \tilde{p}^\alpha &= \langle p^\alpha \rangle,
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

oraz wykorzystując wyrażenia na uśrednioną energię potencjalną $\langle \mathcal{E} \rangle$, uśrednioną energię kinetyczną $\langle \mathcal{K} \rangle$ i uśrednioną pracę sił zewnętrznych $\langle \mathcal{F} \rangle$:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{E} \rangle &= \frac{1}{2} (\tilde{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\alpha\beta} w_3 \partial_{\gamma\delta} w_3 - 2\tilde{B}^{\alpha\beta\gamma} \partial_{\alpha\beta} w_3 \varphi_\gamma + \tilde{B}^{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta + \tilde{B}^{\alpha\beta} \partial_2 \varphi_\alpha \partial_2 \varphi_\beta + \\
 &\quad + \tilde{D}^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\alpha w_\beta \partial_\gamma w_\delta + 2\tilde{D}^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha w_\beta v_\gamma + \tilde{D}^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta + \tilde{D}^{\alpha\beta} \partial_2 v_\alpha \partial_2 v_\beta - \\
 &\quad - 2\hat{D}^{\alpha\beta} w_3 \partial_\alpha w_\beta - 2\hat{D}^\alpha w_3 v_\alpha + \hat{D} w_3 w_3), \\
 \langle \mathcal{K} \rangle &= \frac{1}{2} [\tilde{\mu} (\dot{w}_3 \dot{w}_3 + \dot{w}_\alpha \dot{w}_\beta \delta^{\alpha\beta}) + \tilde{\mu} \dot{v}_\alpha \dot{v}_\beta \delta^{\alpha\beta}], \\
 \langle \mathcal{F} \rangle &= \tilde{p} w_3 + \tilde{p}^\alpha w_\alpha
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

funkcja $\langle \mathcal{L}_h \rangle$ ma postać

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{L}_h \rangle &= \frac{1}{2} [\tilde{\mu} (\dot{w}_3 \dot{w}_3 + \dot{w}_\alpha \dot{w}_\beta \delta^{\alpha\beta}) + \tilde{\mu} \dot{v}_\alpha \dot{v}_\beta \delta^{\alpha\beta}] - \\
 &\quad - \frac{1}{2} (\tilde{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\alpha\beta} w_3 \partial_{\gamma\delta} w_3 - 2\tilde{B}^{\alpha\beta\gamma} \partial_{\alpha\beta} w_3 \varphi_\gamma + \tilde{B}^{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta + \tilde{B}^{\alpha\beta} \partial_2 \varphi_\alpha \partial_2 \varphi_\beta + \\
 &\quad + \tilde{D}^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\alpha w_\beta \partial_\gamma w_\delta + 2\tilde{D}^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha w_\beta v_\gamma + \tilde{D}^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta + \tilde{D}^{\alpha\beta} \partial_2 v_\alpha \partial_2 v_\beta - \\
 &\quad - 2\hat{D}^{\alpha\beta} w_3 \partial_\alpha w_\beta - 2\hat{D}^\alpha w_3 v_\alpha + \hat{D} w_3 w_3) + \tilde{p} w_3 + \tilde{p}^\alpha w_\alpha,
 \end{aligned} \tag{7.15}$$

gdzie składniki podkreślone zależą od parametru mikrostruktury. Wykorzystując zasadę stacjonarności działania do uśrednionej funkcji Lagrange'a (7.15), otrzymujemy uśrednione równania Eulera-Lagrange'a:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial \dot{w}_3} + \partial_{\alpha\beta} \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial \partial_{\alpha\beta} w_3} - \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial w_3} &= 0, \\
 \partial_2 \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial \partial_2 \varphi_\alpha} - \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial \varphi_\alpha} &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial \dot{w}_\beta} + \partial_\alpha \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial \partial_\alpha w_\beta} - \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial w_\beta} &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial \dot{v}_\beta} + \partial_2 \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial \partial_2 v_\beta} - \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial v_\beta} &= 0,
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

które po przekształceniach można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}
& \partial_{\alpha\beta}(\tilde{B}^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_{\gamma\delta}w_3 - \tilde{B}^{\alpha\beta\gamma}\varphi_\gamma) - \hat{D}^{\alpha\beta}\partial_\alpha w_\beta - \hat{D}^\alpha v_\alpha + \hat{D}w_3 + \tilde{\mu}\dot{w}_3 = \tilde{p}, \\
& \tilde{B}^{\alpha\gamma\delta}\partial_{\gamma\delta}w_3 - \tilde{B}^{\alpha\gamma}\varphi_\gamma + \partial_2(\tilde{B}^{\alpha\gamma}\partial_2\varphi_\gamma) = 0, \\
& \partial_\alpha(\tilde{D}^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_{\gamma\delta}w_\beta + \tilde{D}^{\alpha\beta\gamma}v_\gamma - \hat{D}^{\alpha\beta}w_3) - \tilde{\mu}\dot{w}_\beta = -\tilde{p}^\beta, \\
& \tilde{D}^{\alpha\gamma\delta}\partial_{\gamma\delta}w_\gamma + \tilde{D}^{\alpha\beta}v_\beta - \partial_2(\tilde{D}^{\alpha\beta}\partial_2v_\beta) - \hat{D}^\alpha w_3 + \tilde{\mu}\dot{v}_\alpha = 0.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Powyższe równania, wraz z mikro-makro dekompozycją (7.10), są narzędziem do analizy zagadnień dynamicznych cienkich powłok tolerancyjnie-periodycznych w ramach *modelu tolerancyjnego*. Współczynniki równań (7.17) są gładkimi, wolnozmiennymi funkcjami argumentów x_1, x_2 , w przeciwieństwie do współczynników równań (7.9) – nieciągłych i silnie oscylujących względem x_1 . Równania (7.17) uwzględniają wpływ wielkości mikrostruktury powłoki w problemach dynamicznych poprzez zależne od parametru mikrostruktury składniki podkreślone.

Warunki początkowe muszą być określone dla podstawowych niewiadomych w_i, v_α (dwa warunki dla każdej). Warunki brzegowe na wszystkich brzegach, tj. $x_1=0, L_1; x_2=0, L_2$, należy sformułować dla makroprzemieszczeń w_3 (łącznie cztery warunki), makroprzemieszczeń w_α (po dwa warunki), amplitud fluktuacji φ_α (po dwa warunki), natomiast dla amplitud fluktuacji v_α tylko na brzegach $x_2=0, L_2$ (dwa warunki). Ponadto, rozwiązania $w_i, v_\alpha, \varphi_\alpha$ mają fizyczny sens tylko wtedy, gdy spełnione są warunki $w_3(\cdot, x_2, t) \in SV_\delta^2(\Omega, \square)$, $\varphi_\alpha(\cdot, x_2, t), w_\alpha(\cdot, x_2, t), v_\alpha(\cdot, x_2, t) \in SV_\delta^1(\Omega, \square)$, które można wykorzystać do weryfikacji poprawności fizycznej otrzymanych wyników.

7.2.2. Model asymptotyczny

Korzystamy tu z równań opisujących zagadnienia dynamiczne rozpatrywanych powłok (7.9), które można otrzymać z zasady stacjonarności działania zastosowanej do funkcjonałów $\mathcal{D}(\cdot)$, (7.3), $\mathcal{L}(\cdot)$, (7.8). Stanowi to punkt wyjścia procedury modelowania asymptotycznego.

W modelowaniu asymptotycznym wprowadzamy parametr $\varepsilon \in (0, 1]$, przedział $\square_\varepsilon \equiv [-\varepsilon\lambda/2, \varepsilon\lambda/2]$ oraz ε -komórkę $\square_\varepsilon(x_1) \equiv x_1 + \square_\varepsilon$ o środku w punkcie $x_1 \in \overline{\Omega}$.

Podstawowe założenie modelowania asymptotycznego, tj. asymptotyczna dekompozycja (2.18), przyjmuje dla przemieszczeń $u_i(x_1, x_2, z, t)$, $i=1, 2, 3$, postać:

$$\begin{aligned}
u_3^\varepsilon(x_1, y_1, x_2, z, t) &= w_3(y_1, x_2, t), \\
u_\alpha^\varepsilon(x_1, y_1, x_2, z, t) &= [-\partial_\alpha w_3(y_1, x_2, t) + \varepsilon \tilde{h}^\varepsilon(x_1, y_1) \varphi_\alpha(y_1, x_2, t)]z + \\
&\quad + w_\alpha(y_1, x_2, t) + \varepsilon \tilde{h}^\varepsilon(x_1, y_1) v_\alpha(y_1, x_2, t),
\end{aligned} \tag{7.18}$$

gdzie $y_1 \in \square_\varepsilon(x_1)$, $x_2 \in \Xi$, $t \in (t_0, t_1)$, oraz funkcje u_i , φ_α , w_i , v_α są ciągłe i ograniczone w $\overline{\Omega}$ łącznie ze swoimi pierwszymi pochodnymi. Korzystając z oznaczeń (2.19), pochodne (2.20) dla przemieszczeń można zapisać jako:

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha u_3^\varepsilon(x_1, y_1, x_2, z, t) &= \partial_\alpha w_3(y_1, x_2, t), \\
\partial_1 u_\alpha^\varepsilon(x_1, y_1, x_2, z, t) &= [-\partial_{1\alpha} w_3(y_1, x_2, t) + \hat{\partial} \tilde{h}^\varepsilon(x_1, y_1) \varphi_\alpha(y_1, x_2, t) + \\
&\quad + \varepsilon \tilde{h}^\varepsilon(x_1, y_1) \partial_1 \varphi_\alpha(y_1, x_2, t)]z + \\
&\quad + \partial_1 w_\alpha(y_1, x_2, t) + \hat{\partial} \tilde{h}^\varepsilon(x_1, y_1) v_\alpha(y_1, x_2, t) + \\
&\quad + \varepsilon \tilde{h}^\varepsilon(x_1, y_1) \partial_1 v_\alpha(y_1, x_2, t), \\
\partial_2 u_\alpha^\varepsilon(x_1, y_1, x_2, z, t) &= [-\partial_{2\alpha} w_3(y_1, x_2, t) + \varepsilon \tilde{h}^\varepsilon(x_1, y_1) \partial_2 \varphi_\alpha(y_1, x_2, t)]z + \\
&\quad + \partial_2 w_\alpha(y_1, x_2, t) + \varepsilon \tilde{h}^\varepsilon(x_1, y_1) \partial_2 v_\alpha(y_1, x_2, t).
\end{aligned} \tag{7.19}$$

Uwzględniając $\varepsilon \rightarrow 0$ i korzystając ze wzorów (2.21), zależności (7.18)-(7.19) przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
u_3^\varepsilon(x_1, y_1, x_2, z, t) &= w_3(x_1, x_2, t), \\
u_\alpha^\varepsilon(x_1, y_1, x_2, z, t) &= -\partial_\alpha w_3(x_1, x_2, t)z + w_\alpha(x_1, x_2, t) + O(\varepsilon), \\
\partial_\alpha u_3^\varepsilon(x_1, y_1, x_2, z, t) &= \partial_\alpha w_3(x_1, x_2, t), \\
\partial_1 u_\alpha^\varepsilon(x_1, y_1, x_2, z, t) &= [-\partial_{1\alpha} w_3(x_1, x_2, t) + \hat{\partial} \tilde{h}^\varepsilon(x_1, y_1) \varphi_\alpha(x_1, x_2, t)]z + \\
&\quad + \partial_1 w_\alpha(x_1, x_2, t) + \hat{\partial} \tilde{h}^\varepsilon(x_1, y_1) v_\alpha(x_1, x_2, t) + O(\varepsilon), \\
\partial_2 u_\alpha^\varepsilon(x_1, y_1, x_2, z, t) &= -\partial_{2\alpha} w_3(x_1, x_2, t)z + \partial_2 w_\alpha(x_1, x_2, t) + O(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Przechodząc z parametrem ε do zera, w powyższych formułach pomijamy składniki $O(\varepsilon)$.

W następnym etapie modelowania wprowadzamy rodzinę $\tilde{\mathcal{L}}^\varepsilon$ funkcji

$$\tilde{\mathcal{L}}^\varepsilon = \tilde{\mathcal{L}}(x_1, y_1 / \varepsilon, \partial_\alpha w_i(x_1, x_2, t), \dot{w}_i(x_1, x_2, t), w_i(x_1, x_2, t), \varphi_\alpha(x_1, x_2, t), v_\alpha(x_1, x_2, t)), \\
y_1 \in \square_\varepsilon(x_1), x_1 \in \overline{\Omega}, t \in (t_0, t_1),$$

które są funkcjami Lagrange'a w funkcjonalach działania

$$\mathcal{D}_h^\varepsilon(w_i, \varphi_\alpha, v_\alpha) = \int \int \int_{\Omega \Xi} \tilde{\mathcal{L}}^\varepsilon(x_1, y_1 / \varepsilon, \partial_\alpha w_i, \dot{w}_i, w_i, \varphi_\alpha, v_\alpha) dt dx_2 dx_1.$$

Wykorzystując procedurę modelowania asymptotycznego, w której dla $\varepsilon \rightarrow 0$ funkcje $\tilde{\mathcal{L}}^\varepsilon$ zmiennej y_1 / ε , $y_1 \in \square_\varepsilon(x_1)$, dążą do uśrednionej funkcji Lagrange'a $\mathcal{L}_0$, (2.23), przyjmującej postać

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(x_1, \partial_\alpha w_i(x_1, x_2, t), \dot{w}_i(x_1, x_2, t), w_i(x_1, x_2, t), \varphi_\alpha(x_1, x_2, t), v_\alpha(x_1, x_2, t)) = \\ = \frac{1}{|\square|} \int_{\square(x_1)} \tilde{\mathcal{L}}(x_1, y_1, \partial_\alpha w_i, \dot{w}_i, w_i, \varphi_\alpha, v_\alpha) dy_1, \quad x_1 \in \overline{\Omega}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

asymptotyczny funkcjonal działania można zapisać jako

$$\mathcal{D}_h^0(w_i, \varphi_\alpha, v_\alpha) = \iint_{\Omega \times t_0}^t \mathcal{L}_0(x_1, \partial_\alpha w_i, \dot{w}_i, w_i, \varphi_\alpha, v_\alpha) dt dx_2 dx_1.$$

Uśredniając asymptotycznie i korzystając z dekompozycji (7.18) oraz wyrażen (7.20), dostajemy funkcję Lagrange'a $\mathcal{L}_0$, (7.21):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \tilde{\mu}(\dot{w}_3 \dot{w}_3 + \dot{w}_\alpha \dot{w}_\beta \delta^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} (\tilde{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\alpha\beta} w_3 \partial_{\gamma\delta} w_3 - 2 \tilde{B}^{\alpha\beta\gamma} \partial_{\alpha\beta} w_3 \varphi_\gamma + \\ + \tilde{B}^{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta + \tilde{D}^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\alpha w_\beta \partial_\gamma w_\delta + 2 \tilde{D}^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha w_\beta v_\gamma + \tilde{D}^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta - \\ - 2 \hat{D}^{\alpha\beta} w_3 \partial_\alpha w_\beta - 2 \hat{D}^\alpha w_3 v_\alpha + \hat{D} w_3 w_3) + \tilde{p} w_3 + \tilde{p}^\alpha w_\alpha. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Stosując zasadę stacjonarności działania do uśrednionej funkcji Lagrange'a (7.22), otrzymujemy równania Eulera-Lagrange'a:

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha\beta} (\tilde{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta} w_3 - \tilde{B}^{\alpha\beta\gamma} \varphi_\gamma) - \hat{D}^{\alpha\beta} \partial_\alpha w_\beta - \hat{D}^\alpha v_\alpha + \hat{D} w_3 + \tilde{\mu} \dot{w}_3 &= \tilde{p}, \\ \tilde{B}^{\alpha\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta} w_3 - \tilde{B}^{\alpha\gamma} \varphi_\gamma &= 0, \\ \partial_\alpha (\tilde{D}^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\gamma w_\delta + \tilde{D}^{\alpha\beta\gamma} v_\gamma - \hat{D}^{\alpha\beta} w_3) - \tilde{\mu} \dot{w}_\beta &= -\tilde{p}^\beta, \\ \tilde{D}^{\alpha\gamma\delta} \partial_\delta w_\gamma + \tilde{D}^{\alpha\beta} v_\beta - \hat{D}^\alpha w_3 &= 0. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Równania te wraz z asymptotyczną dekompozycją (7.18) reprezentują *model asymptotyczny*, który opisuje zagadnienia dynamiczne powłok tolerancyjnie-periodycznych (o poprzecznej gradacji własności). Równania (7.23) to równania o gładkich, wolnozmiennych współczynnikach, w przeciwieństwie do równań (7.9) o współczynnikach nieciągłych i silnie oscylujących. Równania te nie uwzględniają wpływu wielkości mikrostruktury powłoki, opisując jedynie zachowanie powłoki w skali makro.

Równania (7.23) można łatwo otrzymać z równań (7.17) modelu tolerancyjnego, pomijając w nich składniki podkreślone, zależne od parametru mikrostruktury.

W modelu asymptotycznym należy sformułować warunki początkowe i warunki brzegowe dla makroprzemieszczeń w_i , $i=1,2,3$. Funkcje w_i , v_α , φ_α muszą spełniać warunki $\varphi_\alpha(\cdot, x_2, t)$, $w_\alpha(\cdot, x_2, t)$, $v_\alpha(\cdot, x_2, t) \in SV_\delta^1(\Omega, \square)$, $w_3(\cdot, x_2, t) \in SV_\delta^2(\Omega, \square)$.

Podsumowanie

Przedmiotem niniejszego opracowania były liniowo-sprężyste laminaty, płyty i powłoki o tzw. poprzecznej gradacji własności, które w mikroskali charakteryzują się mikroniejednorodną budową. Zagadnienia termomechaniki dotyczące tego rodzaju struktur są opisane równaniami różniczkowymi cząstkowymi o zmiennych, silnie oscylujących, tolerancyjnie-periodycznych, na ogół nieciągłych współczynnikach. W związku z tym, bezpośrednie zastosowanie tych równań do rozwiązywania zagadnień szczególnych nie jest zwykle możliwe.

W termomechanice laminatów, płyt i powłok mikroniejednorodnych są wykorzystywane różne podejścia prowadzące do modeli opisanych równaniami o stałych współczynnikach (dla ciał periodycznych) lub współczynnikach wolnozmiennych (dla ciał z mikrostrukturą, o funkcyjnej gradacji makrowłasności). Często są stosowane metody modelowania, w których wykorzystuje się teorię homogenizacji asymptotycznej równań różniczkowych o silnie oscylujących, periodycznych współczynnikach. Niestety, wadą tych metod jest zwykle pomijanie w równaniach modelowych wpływu wielkości mikrostruktury rozpatrywanego ciała. Równania takie nie pozwalają opisać interesujących zjawisk ważnych w zagadnieniach dynamicznych, np. zjawiska dyspersji.

W niniejszym opracowaniu w celu uniknięcia tej niedogodności wykorzystano technikę tolerancyjnego uśredniania, zwaną także tolerancyjnym modelowaniem, w zagadnieniach termomechanicznych laminatów, płyt i powłok mikroniejednorodnych o poprzecznej gradacji własności. Podejście to pozwala dokonać przejścia od równań różniczkowych o silnie oscylujących, tolerancyjnie-periodycznych, nieciągłych współczynnikach do uśrednionych równań różniczkowych o współczynnikach wolnozmiennych, uwzględniających wpływ wielkości mikrostruktury w rozpatrywanych problemach.

W książce dokonano ujednolicenia, podsumowania i pewnych uogólnień wyników otrzymanych w pracach Jędrysiaka (2010), Jędrysiaka i Michalaka (2010), Jędrysiaka i Radzikowskiej (2007, 2008, 2010a, 2010b), Jędrysiaka, Rychlewskiej i Cz. Woźniaka (2005), Jędrysiaka, Wierzbickiego i Cz. Woźniaka

(2006), Jędrysiaka i Cz. Woźniaka (2009, 2010), Radzikowskiej (2009/2010), Radzikowskiej i Jędrysiaka (2007, 2009) oraz przedstawiono wyniki niepublikowane. Najważniejsze oryginalne elementy tego opracowania są następujące:

1. Sformułowanie i wyprowadzenie uśrednionych równań różniczkowych modeli tolerancyjnych:

- a) przewodnictwa ciepła w laminatach o poprzecznej gradacji własności,
- b) elastodynamiki laminatów o poprzecznej gradacji własności,
- c) termosprężystości laminatów o poprzecznej gradacji własności,
- d) dynamiki cienkich płyt o poprzecznej gradacji własności (z tolerancyjnie-periodyczną mikrostrukturą),
- e) dynamiki cienkich powłok o poprzecznej gradacji własności (z tolerancyjnie-periodyczną mikrostrukturą).

2. Sformułowanie i wyprowadzenie uśrednionych równań różniczkowych modeli asymptotycznych dla wyżej wymienionych zagadnień.

3. Zastosowanie zaproponowanych modeli oraz pokazanie wpływu mikrostruktury w pewnych zagadnieniach szczególnych:

- a) rozkład temperatury w laminacie w przypadku stacjonarnego i kontrolowanego przewodnictwa ciepła w kierunku prostopadłym do warstw,
- b) rozkład temperatury w laminacie w przypadku dwukierunkowego stacjonarnego przewodnictwa ciepła,
- c) wpływ mikrooscytacji brzegowych pola temperatury w przypadku kontrolowanego przewodnictwa ciepła w kierunku równoległym do warstw,
- d) analiza makro- i mikrodrgań laminowanej warstwy o poprzecznej gradacji własności,
- e) analiza niższych częstotliwości drgań swobodnych pasma płytowego o poprzecznej gradacji własności, a także wyższych częstotliwości drgań pasma, które związane są z jego mikroniejednorodnością.

Z przedstawionych w książce rozważań wynika, że zastosowanie *tolerancyjnego modelowania* w zagadnieniach przewodnictwa ciepła, elastodynamiki i termosprężystości laminatów oraz dynamiki cienkich płyt i powłok o poprzecznej gradacji własności otwiera dalsze szerokie perspektywy badawcze. Istnieje wiele otwartych problemów związanych z zastosowaniem tej techniki. Niektóre z przedstawionych zagadnień, jak na przykład termosprężystość laminatów czy dynamika powłok, wymagają pokazania możliwości zaproponowanych modeli tolerancyjnych w zastosowaniu do przypadków szczególnych.

Indeks

- amplituda fluktuacji – Roz. 2, str. 29
- elastodynamika laminatów – Roz. 4, str. 80, 81
 - amplitudy fluktuacji przemieszczeń – Roz. 4, str. 82
 - fluktuacyjna funkcja kształtu – Roz. 4, str. 82, 87
 - makrodrżenia – Roz. 4, str. 88
 - makroprzemieszczenia – Roz. 4, str. 82
 - mikrodrżenia – Roz. 4, str. 88
 - równania modelu asymptotycznego – Roz. 4, str. 84
 - równania modelu tolerancyjnego – Roz. 4, str. 82/83
- ε -komórka – Roz. 2, str. 33
- fluktuacyjna funkcja kształtu – Roz. 2, str. 29
- funkcja silnie oscylująca – Roz. 2, str. 25
- funkcja tolerancyjnie-periodyczna – Roz. 2, str. 24
- funkcja wolnozmienna – Roz. 2, str. 25
- jednorodne rozłożenie komórek – Roz. 2, str. 23
- komórka podstawowa – Roz. 2, str. 23
- laminat o poprzecznej gradacji własności – Roz. 3, str. 38; Roz. 4, str. 80;
Roz. 5, str. 94
 - funkcja grubości warstw – Roz. 3, str. 38
 - funkcja nasycenia – Roz. 3, str. 39
 - funkcja niejednorodności – Roz. 3, str. 39
- makrozmienna – Roz. 2, str. 29
- mikro-makro dekompozycja – Roz. 2, str. 29
- modelowanie asymptotyczne – Roz. 2, str. 33
- modelowanie tolerancyjne – Roz. 2, str. 26
- niejednorodne rozłożenie komórek – Roz. 2, str. 23
- parametr mikrostruktury – Roz. 2, str. 23
- parametr tolerancji – Roz. 2, str. 22
- plyty cienkie – Roz. 6, str. 101
 - amplituda fluktuacji ugięcia – Roz. 6, str. 104
 - funkcja rozkładu własności materiałowych – Roz. 6, str. 110

- makrougięcie – Roz. 6, str. 104
- metoda Ritza – Roz. 6, str. 110, 111
- niższa częstość drgań swobodnych – Roz. 6, str. 112
- płyty o poprzecznej gradacji własności – Roz. 6, str. 101
- płyty tolerancyjnie-periodyczne – Roz. 6, str. 101
- równania modelu asymptotycznego – Roz. 6, str. 107
- równania modelu tolerancyjnego – Roz. 6, str. 105
- wyższa częstość drgań swobodnych – Roz. 6, str. 112
- powłoki cienkie – Roz. 7, str. 125
 - amplitudy fluktuacji przemieszczeń – Roz. 7, str. 132
 - fluktuacyjna funkcja kształtu – Roz. 7, str. 129
 - makroprzemieszczenia – Roz. 7, str. 132
 - powłoki o funkcyjnej gradacji własności – Roz. 7, str. 125
 - powłoki tolerancyjnie-periodyczne – Roz. 7, str. 125
 - równania modelu asymptotycznego – Roz. 7, str. 136
 - równania modelu tolerancyjnego – Roz. 7, str. 134
- przewodnictwo ciepła w laminacie – Roz. 3, str. 40
 - amplituda fluktuacji temperatury – Roz. 3, str. 41
 - fluktuacyjna funkcja kształtu – Roz. 3, str. 39
 - makrotemperatura – Roz. 3, str. 41
 - równania modelu asymptotycznego – Roz. 3, str. 44
 - równania modelu tolerancyjnego – Roz. 3, str. 42
 - teoria wyższego rzędu – Roz. 3, str. 45, 54
- równania modelu asymptotycznego – Roz. 2, str. 35
- równania modelu tolerancyjnego – Roz. 2, str. 32
- równanie konstytutywne – Roz. 2, str. 30
- termosprężystość laminatów – Roz. 5, str. 94
 - amplituda fluktuacji temperatury – Roz. 5, str. 96
 - amplitudy fluktuacji przemieszczeń – Roz. 5, str. 96
 - makroprzemieszczenia – Roz. 5, str. 96
 - makrotemperatura – Roz. 5, str. 96
 - równania modelu asymptotycznego – Roz. 5, str. 100
 - równania modelu tolerancyjnego – Roz. 5, str. 97
- tolerancja – Roz. 2, str. 22
- uśrednianie tolerancyjne – Roz. 2, str. 27
- zasada stacjonarności działania – Roz. 2, str. 30
 - rozszerzona – Roz. 2, str. 30

Literatura

- 1) ABD EL-SAYED F.K., JONES R., BURGESS I.W., 1979, *A theoretical approach to the deformation of honeycomb based composite materials*, *Composites*, 10, 209-214.
- 2) ABOUDI J., PINDERA M.-J., ARNOLD S.M., 1994, *Elastic response of metal matrix composites with tailored microstructures to thermal gradients*, *Int. J. Solids. Struct.*, 31, 10, 1393–1428.
- 3) ABOUDI J., PINDERA M.-J., ARNOLD S.M., 1996, *Thermoelastic theory for the response of materials functionally graded in two directions*, *Int. J. Solids. Struct.*, 33, 7, 931–966.
- 4) ABOUDI J., PINDERA M.-J., ARNOLD S.M., 1999, *Higher-order theory for functionally graded materials*, *Composites. Part B*, 30, 777–832.
- 5) ACHENBACH J.D., SUN C.-T., HERRMANN G., 1968, *Continuum theory for a laminated medium*, *J. Appl. Mech.*, 35, 467-475.
- 6) ACHENBACH J.D., SUN C.-T., 1972, *The directionally reinforced composite as a homogeneous continuum with microstructure*, w: *Dynamics of Composite Materials* ASME, red. E.H. Lee, New York.
- 7) AGANOVIC I., MARUSIC-PALOKA E., TUTEK Z., 1996, *Slightly wrinkled plate*, *Asymptotic Analysis*, 13, 1-29.
- 8) AGANOVIC I., JURAK M., MARUSIC-PALOKA E., TUTEK Z., 1998, *Moderately wrinkled plate*, *Asymptotic Analysis*, 16, 273-297.
- 9) ARTOLA M., DUVAUT G., 1977, *Homogénéisation d'une plaque renforcée*, *C.R.A.S., Paris*, 284, Sér. A, 707-710.
- 10) BACZYŃSKI Z., 2003, *Dynamic thermoelastic processes in microperiodic composites*, *J. Therm. Stresses*, 26, 55–66.
- 11) BACZYŃSKI Z., WOŹNIAK CZ., 1966, *Statics of lattice-tower shells*, *Proc. of IASS Symposium, Bratislava*, Report 17.
- 12) BAKHVALOV N.C., PANASENKO G.P., 1984, *Averaging processes in periodic media*, Nauka, Moscow, (w jęz. rosyjskim).
- 13) BANSAL Y., PINDERA M.-J., 2003, *Efficients reformulation of the thermoelastic higher-order theory for functionally graded materials*, *J. Therm. Stresses*, 26, 1055–1092.
- 14) BARAŃSKI W., WOŹNIAK CZ., 1966, *The fibrous media as simply connected models of multi-hole*, *Arch. Mech.*, 3, 18, 273-283.

- 15) BARON E., 1999, *The dynamics of plates with uniaxial periodical structure*, Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech.-Math., 55, 80-85.
- 16) BARON E., 2002, *On modelling of medium thickness plates with a uniperiodic structure*, J. Theor. Appl. Mech., 40, 1, 7-22.
- 17) BARON E., 2003a, *On dynamic stability of an uniperiodic medium thickness plate band*, J. Theor. Appl. Mech., 41, 2, 305-321.
- 18) BARON E., 2003b, *On dynamic behaviour of medium thickness plates with uniperiodic structure*, Arch. Appl. Mech., 73, 505-516.
- 19) BARON E., 2005a, *On a certain model of prestressed medium thickness uniperiodic plate*, J. Theor. Appl. Mech., 43, 1, 93-110.
- 20) BARON E. 2005b, *On the modelling of prestressed medium thickness uniperiodic plates*, PAMM, 5, 1, 225-226.
- 21) BARON E., 2005c, *On the dynamic behaviour of uniperiodic plates made of orthotropic elements*, Electronic J. Polish Agric. Univ., Civil Engineering, 8, 4, www.ejpau.media.pl.
- 22) BARON E., 2006a, *On modelling of periodic plates having the inhomogeneity period of an order of the plate thickness*, J. Theor. Appl. Mech., 44, 1, 3-18.
- 23) BARON E., 2006b, *Mechanika periodycznych płyt średniej grubości*, Zesz. Nauk. PŚI., nr 1734, Gliwice.
- 24) BARON E., JĘDRYŚIAK J., 1998, *On vibrations of plates under periodically distributed inertial loadings*, J. Theor. Appl. Mech., 36, 1001-1020.
- 25) BARON E., WOŹNIAK CZ., 1995, *On microdynamics of composite plates*, Arch. Appl. Mech., 66, 126-133.
- 26) BEDFORD A., SUTHERLAND H.J., LINGLE R., 1972, *On theoretical and experimental wave propagation in a fiber-reinforced elastic material*, J. Appl. Mech., 39, 597-598.
- 27) BENSOUSSAN A., LIONS J.L., PAPANICOLAOU G., 1978, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland, Amsterdam.
- 28) BENVENISTE Y., DVORAK G.J., CHEN T., 1991, *On diagonal and elastic symmetry of the approximate effective stiffness tensor of heterogeneous media*, J. Mech. Phys. Solids, 39, 927-946.
- 29) BIELSKI W., MATYSIAK S.J., 1992, *Surface waves in a periodic two-layered elastic half-space*, Acta Mech., 91, 45-54.
- 30) CAILLERIE D., 1984, *Thin elastic and periodic plates*, Math. Methods Appl. Sci., 6, 159-191.
- 31) CHRISTENSEN R.M., 1979, *Wave propagation in layered elastic media*, J. Appl. Mech., 42, 153-344.
- 32) CIARLET P.G., DESTUYNDER P., 1979, *A justification of two-dimensional linear plate theory*, Journal de Mécanique, 18, 315-344.
- 33) CIELECKA I., 1995, *On continuum modelling the dynamic behaviour of certain composite lattice-type structures*, J. Theor. Appl. Mech., 33, 351-359.

- 34) CIELECKA I., 1999, *Continuum modelling of the dynamic problems for lattice-type plates*, Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech.-Math., 55, 55-63.
- 35) CIELECKA I., JĘDRYSIAK J., 2002, *On continuum modelling of the dynamic behaviour of periodic lattice-type plates with a complex structure*, J. Theor. Appl. Mech., 40, 23-46.
- 36) CIELECKA I., JĘDRYSIAK J., 2003, *Length-scale effect in dynamics of hexagonal lattice-type plates*, PAMM, 3, 1, 98-99.
- 37) CIELECKA I., JĘDRYSIAK J., 2006, *A non-asymptotic model of dynamics of honeycomb lattice-type plates*, J. Sound and Vibration, 296, 130-149.
- 38) CIELECKA I., JĘDRYSIAK J., 2007, *Vibrations of periodic cellular structures*, w: Mechanics of Solids and Structures, red. V. Pauk, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 57-68.
- 39) CIELECKA I., WOŹNIAK CZ., WOŹNIAK M., 1998, *Internal variables in macrodynamics of two-dimensional periodic cellular media*, Arch. Mech., 50, 3-19.
- 40) CIELECKA I., WOŹNIAK M., WOŹNIAK CZ., 2000, *Elastodynamic behaviour of honeycomb cellular media*, J. Elasticity, 60, 1-17.
- 41) CIORANESCU D., SAINT PAULIN J., 1979, *Homogenization in open sets with holes*, J. Math. Anal. Appl., 71, 590-607.
- 42) CIORANESCU D., SAINT PAULIN J., 1999, *Homogenization of reticulated structures*, Springer, New York.
- 43) DELL'ISOLA F., ROSA L., WOŹNIAK CZ., 1997, *Dynamics of solids with micro-periodic non connected fluid inclusions*, Arch. Appl. Mech., 67, 215-228.
- 44) DELL'ISOLA F., WOŹNIAK CZ., 1997a, *On phase transition layers in certain micro-damaged two-phase solids*, Int. J. Frac., 83, 175-189.
- 45) DELL'ISOLA F., WOŹNIAK CZ., 1997b, *On continuum modelling the interphase layers in certain two-phase elastic solids*, ZAMM, 77, 519-526.
- 46) DELL'ISOLA F., ROSA L., WOŹNIAK CZ., 1998, *A micro-structural continuum modelling compacting fluid-saturated grounds*, Acta Mech., 127, 165-182.
- 47) DUVAUT G., METELLUS A.M., 1976, *Homogénéisation d'une plaque mince en flexion de structure périodique et symétrique*, C.R.A.S., Paris, Ser. A., 283, 947-950.
- 48) FERREIRA A.J.M., BATRA R.C., ROQUE C.M.C., QIAN L.F., JORGE R.M.N., 2006, *Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method*, Comp. Struct., 75, 593-600.
- 49) FICHERA G., 1992, *Is the Fourier theory of heat propagation paradoxical?*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.
- 50) FISH J., WEN CHEN, 2001, *Higher-order homogenization of initial/boundary-value problems*, J. Engng. Mech., 1223-1230.

- 51) FUKUI Y., TAKASHIMA K., PONTON C.B., 1994, *Measurement of Young's modulus and internal friction of an in situ Al-Al₃Ni functionally gradient material*, J. Mater. Sci., 29, 2281-2288.
- 52) FURMAŃSKI P., 1997, *Heat conduction in composites: homogenization and macroscopic behavior*, Appl. Mech. Rev., 50, 327-356.
- 53) GAŁKA A., TELEGA J.J., WOJNAR R., 1994, *Thermodiffusion in heterogeneous elastic solids and homogenisation*, Arch. Mech., 46, 267-314.
- 54) GIBSON L.J., ASHBY M.F., SCHAJER G.S., ROBERTSON C.I., 1982, *The mechanics of two-dimensional cellular materials*, Proc. Roy. Soc., Ser. A, 382, 25-42.
- 55) GOLDBERG R.K., HOPKINS D.A., 1995, *Thermal analysis of a functionally graded material subject to a thermal gradient using the boundary element method*, Comp. Engng., 5, 793-806.
- 56) HERRMANN G., ACHENBACH J.D., *On dynamic theories of fiber-reinforced composites*, AIAA/ASME Eight Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Palm Springs, CA, 112-118, March 29-31, 1967; also: Northwestern University Structural Mechanics Laboratory Technical Report No. 67-2, Jan. 1967.
- 57) HERRMANN G., KAUL R.K., DELPH T.J., 1976, *On continuum modelling of the dynamic behavior of layered composites*, Arch. Mech., 28, 405-421.
- 58) HIRANO T., TERAOKI J., YAMADA T., 1990, *On the design of functionally gradient materials*, w: Proc. 1st Int. Symp. on Functionally Gradient Materials, red. M. Yamanouchi, M. Koizumi, T. Hirai, I. Shiota, 5-10.
- 59) HORNING D., 1997, *Homogenization and porous media*, Interdisciplinary Appl. Math., vol. 6, Springer Verlag.
- 60) HORVAY G., 1952, *The plane-stress problem of perforated plates*, J. Appl. Mech., 19, 355-360.
- 61) IGNACZAK J., 1998, *Saint-Venant type decay estimates for transient heat conduction in a composite rigid semispace*, J. Therm. Stresses, 21, 185-204.
- 62) IGNACZAK J., BACZYŃSKI Z.F., 1997, *On a refined heat-conduction theory of micro-periodic layered solids*, J. Thermal Stresses, 20, 749-771.
- 63) ITOH Y., TAKAHASHI M., TAKANO H., 1996, *Design of tungsten/copper graded composite for high heat flux components*, Fusion Engng. Design, 31, 4, 279-289.
- 64) JĘDRYSIAK J., 1996, *Zagadnienie efektu skali w dynamice płyt Kirchhoffa o strukturze periodycznej*, praca doktorska, Wyd. BAIŚ PŁ.
- 65) JĘDRYSIAK J., 1998a, *On dynamics of thin plates with a periodic structure*, Engng. Trans., 46, 73-87.
- 66) JĘDRYSIAK J., 1998b, *Free vibrations of thin periodic plates*, Engng. Trans., 46, 89-114.
- 67) JĘDRYSIAK J., 1999a, *Dynamics of thin periodic plates resting on a periodically inhomogeneous Winkler foundation*, Arch. Appl. Mech., 69, 345-356.
- 68) JĘDRYSIAK J., 1999b, *On mesoscale functions in structural dynamics of thin periodic plates*, Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech.-Math., 55, 71-79.

- 69) JĘDRYSIAK J., 2000a, *On stability of thin periodic plates*, Eur. J. Mech. A/Solids, 19, 487-502.
- 70) JĘDRYSIAK J., 2000b, *On vibrations of thin plates with one-dimensional periodic structure*, Int. J. Engng. Sci., 38, 2023-2043.
- 71) JĘDRYSIAK J., 2001a, *A contribution to the modelling of dynamic problems for periodic plates*, Engng. Trans., 49, 65-87.
- 72) JĘDRYSIAK J., 2001b, *Modele dyspersyjne cienkich płyt periodycznych. Teoria i zastosowania*, Zesz. Nauk. PŁ, nr 872, seria: Roz. Nauk., 289, Łódź.
- 73) JĘDRYSIAK J., 2003a, *The length-scale effect in the buckling of thin periodic plates resting on a periodic Winkler foundation*, Meccanica, 38, 435-451.
- 74) JĘDRYSIAK J., 2003b, *Free vibrations of thin periodic plates interacting with an elastic periodic foundation*, Int. J. Mech. Sci., 45, 1411-1428.
- 75) JĘDRYSIAK J., 2004, *Application of the tolerance averaging method to analysis of dynamical stability of thin periodic plates*, J. Theor. Appl. Mech., 42, 357-379.
- 76) JĘDRYSIAK J., 2006, *Vibrations of thin periodic plates under moving loads*, w: Selected Topics in the Mechanics of Inhomogeneous Media, red. Cz. Woźniak, R. Świtka, M. Kuczma, Zielona Góra, 113-131.
- 77) JĘDRYSIAK J., 2007, *The tolerance averaging model of dynamic stability of thin plates with one-directional periodic structure*, Thin Walled Struct., 45, 855-860.
- 78) JĘDRYSIAK J., 2009, *Higher order vibrations of thin periodic plates*, Thin-Walled Structures, 47, 8-9, 890-901.
- 79) JĘDRYSIAK J., 2010, *On the modelling of dynamics and stability problems for thin functionally graded plates*, w: Advances in the mechanics of inhomogeneous media, red. Cz. Woźniak, M. Kuczma, R. Świtka, K. Wilmański, University of Zielona Góra Press, Zielona Góra, 271-277.
- 80) JĘDRYSIAK J., JUSZCZAK S., 2004, *Non-asymptotic model of periodically stratified subsoil*, w: Theoretical Foundations of Civil Engineering XII, red. W. Szcześniak, OW PW, Warszawa, 175-182.
- 81) JĘDRYSIAK J., MICHALAK B., 2005, *Some remarks on dynamic results for averaged and exact models of thin periodic plates*, J. Theor. Appl. Mech., 43, 405-425.
- 82) JĘDRYSIAK J., MICHALAK B., 2010, *On the modelling of stability problems for thin plates with functionally graded structure*, Thin-Walled Structures, (przyjęte do publikacji).
- 83) JĘDRYSIAK J., PAŚ A., 2005, *On the modelling of medium thickness plates interacting with a periodic Winkler's subsoil*, Electronic J. Polish Agric. Univ., Civil Engineering, 8, www.ejpau.media.pl.
- 84) JĘDRYSIAK J., PAŚ A., 2006, *Vibrations of medium thickness homogeneous plates resting on a periodic Winkler subsoil*, w: Selected Topics in the Mechanics of Inhomogeneous Media, red. Cz. Woźniak, R. Świtka, M. Kuczma, Zielona Góra, 133-146.

- 85) JĘDRYSIAK J., RADZIKOWSKA A., 2007, *On the modelling of heat conduction in a non-periodically laminated layer*, J. Theor. Appl. Mech., 45, 239-257.
- 86) JĘDRYSIAK J., RADZIKOWSKA A., 2008, *Stationary heat conduction in a laminate with functionally graded macrostructure (FGM)*, Build. Phys. Theory Pract., 3, 23-26.
- 87) JĘDRYSIAK J., RADZIKOWSKA A., 2010a, *Some problems on the modelling of heat conduction for transversally graded laminates (TGL)*, w: Advances in the mechanics of inhomogeneous media, red. Cz. Woźniak, M. Kuczma, R. Świtka, K. Wilmański, University of Zielona Góra Press, Zielona Góra, 67-77.
- 88) JĘDRYSIAK J., RADZIKOWSKA A., 2010b, *Some problems of heat conduction for transversally graded laminates with non-uniform distribution of laminas*, Arch. Civ. Mech. Engng., (przyjęte do publikacji).
- 89) JĘDRYSIAK J., RYCHLEWSKA J., WOŹNIAK CZ., 2005, *Microstructural 2D-models of functionally graded laminated plates*, w: Shell Structures: Theory and Applications, red. W. Pietraszkiewicz, Cz. Szymczak, Taylor & Francis, London-Leiden, 119-123.
- 90) JĘDRYSIAK J., WIERZBICKI E., WOŹNIAK CZ., 2006, *The elastic response for microlayered functionally graded media*, PAMM, 6, 1, 385-386.
- 91) JĘDRYSIAK J., WOŹNIAK CZ., 1995, *On the elastodynamics of thin microperiodic plates*, J. Theor. Appl. Mech., 33, 337-349.
- 92) JĘDRYSIAK J., WOŹNIAK CZ., 2006, *On the propagation of elastic waves in a multiperiodically reinforced medium*, Meccanica, 41, 555-571.
- 93) JĘDRYSIAK J., WOŹNIAK CZ., 2009, *Elastic shallow shells with functionally graded structure*, PAMM, 9, 357-358.
- 94) JĘDRYSIAK J., WOŹNIAK CZ., 2010, *Modelling of thin functionally graded shells*, w: Shell Structures: Theory and Applications, vol. 2, red. W. Pietraszkiewicz, I. Kreja, Taylor & Francis, London-Leiden, 67-70.
- 95) JIKOV V.V., KOZLOV C.M., OLEINIK O.A., 1994, *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg.
- 96) KACZYŃSKI A., MATYSIAK S.J., 1988, *On the complex potentials of the linear thermoelasticity with microlocal parameters*, Acta Mech., 72, 245-259.
- 97) KACZYŃSKI A., MATYSIAK S.J., 1989, *A system of interface cracks in a periodically layered elastic composites*, Engng. Fracture Mech., 32, 745-756.
- 98) KACZYŃSKI A., MATYSIAK S.J., 2001, *On 3D punch problems for a periodic two-layered elastic half-space*, J. Theor. Appl. Mech., 3, 523-538.
- 99) KACZYŃSKI A., MATYSIAK S.J., 2002, *Thermodiffusion in periodically layered elastic composites*, J. Theor. Appl. Mech., 40, 1, 85-100.
- 100) KACZYŃSKI A., MATYSIAK S.J., 2004, *The 3D thermoelastic problem of uniform heat flow disturbed by an interface crack in a periodic two-layer composite*, J. Theor. Appl. Mech., 42, 1, 59-68.

- 101) KACZYŃSKI A., MATYSIAK S.J., 2005, *A Griffith interface crack in a micro-periodic reinforced elastic composite*, Eur. J. Mech., A/Solids, 24, 59-67.
- 102) KACZYŃSKI A., MATYSIAK S.J., 2007, *Green's functions for the periodic four phase elastic space with an interface crack or a linear rigid inclusion*, Materials Science, 43, 163-173.
- 103) KALAMKAROV A.L., 1987, *On determination of effective characteristics of lattice shells and plates with periodic structure*, Mekh. Tv. Tela, 2, 181-185, (w jęz. rosyjskim).
- 104) KALAMKAROV A.L., KUDRYAVTSEV B.A., PARTON V.Z., 1987, *A problem of a curved composite layer with faces of wavyperiodic form*, Prikl. Mat. Mekh., 51, 68-75, (w jęz. rosyjskim).
- 105) KANTOR B.Y., SMETANKINA N.V., SHUPIKOV A.N., 2001, *Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates*, Int. J. Solids Struct., 38, 8673-8684.
- 106) KIM K.-S., NODA N., 2001, *Green's function approach to three-dimensional heat conduction equation of functionally graded materials*, J. Therm. Stresses, 24, 457-477.
- 107) KIM K.-S., NODA N., 2002, *A Green's function approach to the deflection of a FGM plate under transient thermal loading*, Arch. Appl. Mech., 72, 127-137.
- 108) KLEMM P., WOŹNIAK CZ., 1967, *Perforated circular plates under large deflections*, Arch. Mech., 19, 45-56.
- 109) KOHN W., KRUMHANS L. J.A., LEE E.H., 1972, *Variational methods for dispersion relation and elastic properties of composite materials*, J. Appl. Mech., 39, 327-336.
- 110) KOHN R.V., VOGELIUS M., 1984, *A new model of thin plates with rapidly varying thickness*, Int. J. Solids Struct., 20, 333-350.
- 111) KONIECZNY S., WOŹNIAK CZ., 1967, *Obliczanie płyt siatkowych w oparciu o teorie efektu brzegowego*, Rozpr. Inż., 3, 15, 535-551.
- 112) KULCHYTSKY-ZHYHAILO R., MATYSIAK S.J., 2005, *On heat conduction problem in a semi-infinite periodically laminated layer*, Int. Comm. Heat Mass Transfer, 32, 123-132.
- 113) KULCHYTSKY-ZHYHAILO R., MATYSIAK S.J., 2007, *Stress singularities in a periodically layered composite near interface crack tips*, Int. J. Fracture, 143, 277-286.
- 114) LANGLEY R.S., BARDELL N.S., RUIVO H.M., 1997, *The response of two-dimensional periodic structures to harmonic point loading: a theoretical and experimental study of a beam grillage*, J. Sound and Vibration, 207, 521-535.
- 115) LEE E.H., 1972, *A survey of variational methods for elastic wave propagation analysis in composites with periodic structures*, w: Dynamics of Composite Materials ASME, red. E.H. Lee, New York.
- 116) LEE Y.-D., ERDOGAN F., 1994/1995, *Residual/thermal stresses in FGM and laminated thermal barrier coatings*, Int. J. Fract., 69, 145-165.

- 117) LEWIŃSKI T., 1984, *Two versions of Woźniak's continuum model of hexagonal type grid plates*, J. Theor. Appl. Mech., 22, 389-405.
- 118) LEWIŃSKI T., 1991, *Effective models of composite periodic plates: I. Asymptotic solutions, II. Simplifications due to symmetries, III. Two dimensional approaches*, Int. J. Solids Struct., 27, 1155-1172, 1173-1184, 1185-1203.
- 119) LEWIŃSKI T., 1992, *Homogenizing stiffness of plates with periodic structure*, Int. J. Solids Struct., 21, 309-326.
- 120) LEWIŃSKI T., TELEGA J.J., 1988, *Asymptotic method of homogenization of fissured elastic plates*, J. Elasticity, 19, 37-62.
- 121) LEWIŃSKI T., TELEGA J.J., 1998, *Asymptotic method of homogenization of two models of elastic shells*, Arch. Mech., 40, 705-723.
- 122) LEWIŃSKI T., TELEGA J.J., 2000, *Plates, laminates and shells*, World Scientific Publishing Company, Singapore.
- 123) LORD A.E., HAY D.R., 1972, *Ultrasonic wave propagation in metal matrix composites*, J. Comp. Mater., 6, 278-285.
- 124) LUTOBORSKI A., 1985, *Homogenization of linear elastic shells*, J. Elasticity, 15, 69-87.
- 125) ŁACIŃSKI Ł., 2005, *Numerical verification of two mathematical models for the heat transfer in a laminated rigid conductor*, J. Theor. Appl. Mech., 43, 2, 367-384.
- 126) ŁACIŃSKI Ł., WOŹNIAK CZ., 2006a, *Boundary-layer phenomena in the laminated rigid heat conduction*, J. Thermal Stresses, 29, 665-682.
- 127) ŁACIŃSKI Ł., WOŹNIAK CZ., 2006b, *A simplified model for the analysis of the heat conduction in a laminated medium*, Electronic J. Polish Agric. Univ., Civil Engineering, 9, 2, www.ejpau.media.pl.
- 128) MACHYSHYN I., NAGÓRKO W., 2003, *Interaction between a stratified elastic half-space and an irregular base allowing for the intercontact gas*, J. Theor. Appl. Mech., 41, 271-288.
- 129) MARKWORTH A.J., SAUNDERS J.H., 1995, *A model of structure optimization for a functionally graded material*, Mater. Lett., 22, 103-107.
- 130) MATYSIAK S.J., 1989, *Thermal stresses in a periodic two-layered composite weakened by an interface crack*, Acta Mech., 78, 95-108.
- 131) MATYSIAK S.J., 1991, *On certain problems of heat conduction in periodic composites*, ZAMM, 71, 524-528.
- 132) MATYSIAK S.J., 1995, *On the microlocal parameter method in modelling of periodically layered thermoelastic composites*, J. Theor. Appl. Mech., 33, 481-487.
- 133) MATYSIAK S.J., MIESZKOWSKI R., 2001, *On modelling of diffusion processes in periodically stratified elastic solids*, Int. J. Engng. Sci., 39, 5, 491-501.
- 134) MATYSIAK S.J., NAGÓRKO W., 1989, *Microlocal parameters in a modelling of microperiodic multilayered elastic plates*, Ingenieur Archiv, 59, 434-444.
- 135) MATYSIAK S.J., NAGÓRKO W., 1995, *On the wave propagation in periodically laminated composites*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sci. Techn., 43, 1-12.

- 136) MATYSIAK S.J., PAUK V.J., 1995, *Plane contact problem for periodic laminated composite involving frictional heating*, Arch. Appl. Mech., 66, 82-89.
- 137) MATYSIAK S.J., PAUK V.J., YEVTUSHENKO A.A., 1998, *On applications of the microlocal parameter method in modelling of temperature distributions in composite cylinders*, Arch. Appl. Mech., 68, 297-307.
- 138) MATYSIAK S.J., UKHANSKA O.M., 1997, *On heat conduction problem in periodic composites*, Int. Comm. Heat Mass Transfer, 24, 827-834.
- 139) MATYSIAK S.J., YEVTUSHENKO A.A., IVANYK E.G., 1998b, *Temperature field in a microperiodic two-layered composite caused by a circular laser heat source*, Heat Mass Transfer, 34, 127-133.
- 140) MATYSIAK S.J., WOŹNIAK CZ., 1987, *Micromorphic effects in a modelling of periodic multilayered elastic composites*, Int. J. Eng. Sci., 25, 5, 549-559.
- 141) MATYSIAK S.J., WOŹNIAK CZ., 1988, *On the microlocal modelling of thermoelastic periodic composites*, J. Tech. Physics, 29, 65-97.
- 142) MAZUR-ŚNIADY K., 1993, *Macro-dynamic of micro-periodic elastic beams*, J. Theor. Appl. Mech., 4, 31, 781-793.
- 143) MAZUR-ŚNIADY K., 2001, *A kinematic internal variable approach to dynamics of beams with a periodic-like structure*, J. Theor. Appl. Mech., 1, 39, 175-194.
- 144) MAZUR-ŚNIADY K., RYSTWEJ A., ŚNIADY P., 2005, *Vibration of a beam on random and microperiodic subsoil caused by moving load*, PAMM, 5, 727-728.
- 145) MAZUR-ŚNIADY K., ŚNIADY P., 1997, *Stochastic vibrations of micro-periodic elastic beam*, ZAMM, 77, S 2, S 619-S 620.
- 146) MAZUR-ŚNIADY K., ŚNIADY P., 1999, *Stochastic vibrations of a beam on microperiodic subsoil caused by moving load*, ZAMM, 79, S 3, S 827-S 828.
- 147) MAZUR-ŚNIADY K., ŚNIADY P., 2000, *Design sensitivity of the beam with periodically variable geometry under harmonic excitation*, ZAMM, 80, S. 2, S 395-S 396.
- 148) MAZUR-ŚNIADY K., ŚNIADY P., 2001a, *Dynamic response of a micro-periodic beam under moving load – deterministic and stochastic approach*, J. Theor. Appl. Mech., 2, 39, 323-338.
- 149) MAZUR-ŚNIADY K., ŚNIADY P., 2001b, *Reliability of the beam with variable cross-section under stochastic excitation*, ZAMM, 81, S.3, S 639-S 640.
- 150) MAZUR-ŚNIADY K., ŚNIADY P., 2002, *Vibrations of the beam with variable cross-section caused by moving stochastic load*, PAMM, 1, 452-453.
- 151) MAZUR-ŚNIADY K., ŚNIADY P., 2004, *Random vibration of the uncertain parametric micro-periodic beam – general solution*, PAMM, 4, 600-601.
- 152) MAZUR-ŚNIADY K., ŚNIADY P., ZIELICHOWSKI-HABER W., 2009, *Dynamic response of micro-periodic composite rods with uncertain parameters under moving load*, J. Sound and Vibration, 320, 273-288.
- 153) MICHALAK B., 1998, *Stability of elastic slightly wrinkled plates*, Acta Mech., 130, 111-119.

- 154) MICHALAK B., 1999a, *Stability of slightly wrinkled plates interacting with an elastic subsoil*, Engng. Trans., 47, 269-283.
- 155) MICHALAK B., 1999b, *On a choice of micro-shape functions for a dynamic behaviour of wavy plates*, Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech.-Math., 55, 86-91.
- 156) MICHALAK B., 2000, *Vibrations of plates with initial geometrical periodical imperfections interacting with a periodic elastic foundation*, Arch. Appl. Mech., 70, 508-518.
- 157) MICHALAK B., 2001a, *Analysis of dynamic behaviour of wavy-plates with a mezzo-periodic structure*, J. Theor. Appl. Mech., 39, 947-958.
- 158) MICHALAK B., 2001b, *Dynamika i stateczność płyt pofalowanych*, Zesz. Nauk. PŁ, nr 881, seria: Roz. Nauk., 295, Łódź.
- 159) MICHALAK B., 2001c, *The meso-shape functions for the meso-structural models of wavy-plates*, ZAMM, 81, 639-641.
- 160) MICHALAK B., 2002, *On the dynamic behaviour of a uniperiodic folded plates*, J. Theor. Appl. Mech., 40, 113-128.
- 161) MICHALAK B., 2004, *Stability of composite plates with non-uniform distribution of constituents*, J. Theor. Appl. Mech., 42, 281-297.
- 162) MICHALAK B., 2010, *On the modelling of stability of composite thin plates with certain longitudinally graded materials*, w: Advances in the mechanics of inhomogeneous media, red. Cz. Woźniak, M. Kuczma, R. Świtka, K. Wilmański, University of Zielona Góra Press, Zielona Góra, 99-107.
- 163) MICHALAK B., OSTROWSKI P., 2007, *Modelling and analysis of the heat conduction in a certain functionally graded material*, w: Mechanics of Solids and Structures, red. V. Pauk, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 23-35.
- 164) MICHALAK B., WOŹNIAK CZ., 2009, *2D-modelling of thin skeletal elastic shallow shell*, PAMM, 9, 359-360.
- 165) MICHALAK B., WOŹNIAK CZ., 2010, *The dynamic modelling of thin skeletal shallow shells*, w: Shell Structures: Theory and Applications, vol. 2, red. W. Pietraszkiewicz, I. Kreja, Taylor & Francis, London-Leiden, 83-87.
- 166) MICHALAK B., WOŹNIAK CZ., WOŹNIAK M., 1996, *The dynamic modelling of elastic wavy plates*, Arch. Appl. Mech., 66, 177-186.
- 167) MICHALAK B., WOŹNIAK CZ., WOŹNIAK M., 2007, *Modelling and analysis of certain functionally graded heat conductor*, Arch. Appl. Mech., 77, 823-834.
- 168) MICHALAK B., WOŹNIAK M., 2006, *On the heat conduction in certain functionally graded composites*, w: Selected Topics in the Mechanics of Inhomogeneous Media, red. Cz. Woźniak, R. Świtka, M. Kuczma, Zielona Góra, 229-238.
- 169) MIELCZAREK G., WOŹNIAK CZ., 1995a, *On the dynamic modelling of fibrous composites*, J. Tech. Phys., 36, 103-111.
- 170) MIELCZAREK G., WOŹNIAK CZ., 1995b, *On the micro-dynamics of composite materials*, J. Theor. Appl. Mech., 33, 731-747.

- 171) MILLER D.P., LANUTTI J.J., 1993, *Fabrication and properties of functionally graded NiAl/Al₂O₃ composites*, J. Mater. Res., 8, 2004-2013.
- 172) MORI T., TANAKA K., 1973, *Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions*, Acta Metall., 21, 571-574.
- 173) NAGÓRKO W., 2010, *Vibrations and waves in a periodically ribbed elastic plate*, w: Advances in the mechanics of inhomogeneous media, red. Cz. Woźniak, M. Kuczma, R. Świtka, K. Wilmański, University of Zielona Góra Press, Zielona Góra, 279-283.
- 174) NAGÓRKO W., PIWOWARSKI M., 2006, *On the heat conduction in periodically nonhomogeneous solids*, w: Selected Topics in the Mechanics of Inhomogeneous Media, red. Cz. Woźniak, R. Świtka, M. Kuczma, Zielona Góra, 241-254.
- 175) NAGÓRKO W., WĄGROWSKA M., 2002, *A contribution to modelling of composite solids*, J. Theor. Appl. Mech., 40, 149-158.
- 176) NAGÓRKO W., WOŹNIAK CZ., 2002, *Nonasymptotic modelling of thin plates reinforced by a system of stiffeners*, Electronic J. Polish Agric. Univ., Civil Engineering, 5, 2, www.ejpau.media.pl.
- 177) NAGÓRKO W., WOŹNIAK CZ., 2003, *A nonasymptotic model of stiffened plates*, Прикладні Проблеми Механіки і Математики, 1, 128-136.
- 178) NAGÓRKO W., ZIELIŃSKI J., 1999, *On heat conduction modelling in plates formed by periodically nonhomogeneous layers*, Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech.-Math., 55, 100-105.
- 179) NOOR A.K., NEMETH M.P., 1980, *Micropolar beam models for lattice grids with rigid joints*, Comp. Math. App. Mech. Engng., 21, 249-263.
- 180) OOTAO Y., TANIGAWA Y., 2004, *Transient thermoelastic problem of functionally graded thick strip due to nonuniform heat supply*, Comp. Struct., 63, 139-146.
- 181) OOTAO Y., TANIGAWA Y., 2006, *Transient thermoelastic analysis for a functionally graded hollow cylinder*, J. Therm. Stresses, 29, 1031-1046.
- 182) OSTROWSKI P., 2009a, *On the heat transfer in a two-phase hollow cylinder with piecewise continuous boundary conditions*, PAMM, 9, 259-260.
- 183) OSTROWSKI P., 2009b, *Zagadnienie przewodnictwa ciepła w laminatach z funkcijną gradacją własności*, praca doktorska, Wyd. BAIŚ PŁ.
- 184) PAŚ A., 2006, *Wpływ periodycznego podłoża sprężystego na drgania płyty średniej grubości*, praca doktorska, Wyd. BAIŚ PŁ.
- 185) PAUK V.J., 1997, *Zagadnienia mechaniki ciała stałego z uwzględnieniem mikrostruktury brzegu*, Zesz. Nauk. PŁ, nr 790, seria: Roz. Nauk., 245, Łódź.
- 186) PAUK V.J., WOŹNIAK CZ., 1999, *Plane contact problem for a half-space with boundary imperfections*, Int. J. Solids and Structures, 36, 3569-3579.
- 187) PEŁA R., WOŹNIAK CZ., 1966, *Wstęp do teorii i obliczeń kratownic powierzchniowych*, Arch. Inż. Łąd., 12, 475-490.

- 188) PERKOWSKI D.M., MATYSIAK S.J., KULCHYTSKY-ZHYHAILO R., 2007, *On contact problem of an elastic laminated half-plane with a boundary normal to layering*, Compos. Sci. Techn., 67, 2683-2690.
- 189) PINDER M.-J., ABOUDI J., ARNOLD S.M., 1995, *Limitations of the uncoupled, RVE-based micromechanical approach in the analysis of functionally graded composites*, Mechanics of Materials, 20, 1, 77-94.
- 190) PUSTELNIK K., WOŹNIAK CZ., 1968, *Obliczanie tarcz siatkowych przy wykorzystaniu przybliżonej teorii efektu brzegowego*, Mech. Teor. i Stos., 1, 6, 33-42.
- 191) RADZIKOWSKA A., 2009/2010, *Zagadnienie przewodnictwa ciepła w laminatach z funkcyjną gradacją własności*, praca doktorska, Wyd. BAIiŚ PŁ.
- 192) RADZIKOWSKA A., JĘDRYSIAK J., 2007, *Przewodnictwo ciepła w kompozycie z gradacją własności*, Building Physics in Theory and Practice (Fiz. Bud. w Teorii i Praktyce), 2, DBP CE PAS, 239-242.
- 193) RADZIKOWSKA A., JĘDRYSIAK J., 2009, *Some problems of heat conduction in transversally graded composites*, PAMM, 9, 361-362.
- 194) REITER T., DVORAK G.J., TVERGAARD V., 1997, *Micromechanical models for graded composite materials*, J. Mech. Phys. Solids, 45, 1281-1302.
- 195) ROBINSON C.W., LEPPELMEIER G.W., 1974, *Experimental verification of dispersion relations for layered composites*, J. Appl. Mech., 41, 89-91.
- 196) ROQUE C.M.C., FERREIRA A.J.M., JORGE R.M.N., 2007, *A radial basis function approach for the free vibration analysis of functionally graded plates using a refined theory*, J. Sound Vib., 300, 1048-1070.
- 197) RUZZENE M., SCARPA F., SORANNA F., 2003, *Wave beaming effects in two-dimensional cellular structures*, Smart Mater. and Struct., 12, 363-372.
- 198) RYCHLEWSKA J., 2006a, *On the modelling and optimization of functionally graded laminates*, J. Theor. Appl. Mech., 44, 4, 783-795.
- 199) RYCHLEWSKA J., 2006b, *Discrete and continuum modelling in elastodynamics of functionally graded laminates*, w: Selected Topics in the Mechanics of Inhomogeneous Media, red. Cz. Woźniak, R. Świtka, M. Kuczma, Zielona Góra, 27-37.
- 200) RYCHLEWSKA J., SZYMCHYK J., WOŹNIAK CZ., 1999, *A contribution to dynamics of polyatomic lattices*, J. Theor. Appl. Mech., 37, 799-807.
- 201) RYCHLEWSKA J., SZYMCHYK J., WOŹNIAK CZ., 2000, *A simplicial model for dynamic problems in periodic media*, J. Theor. Appl. Mech., 38, 3-13.
- 202) RYCHLEWSKA J., SZYMCHYK J., WOŹNIAK CZ., 2004a, *On the modelling of dynamic behavior of periodic lattice structures*, Acta Mech., 170, 57-67.
- 203) RYCHLEWSKA J., SZYMCHYK J., WOŹNIAK CZ., 2004b, *On the modeling of the hyperbolic heat transfer problems in periodic lattice-type conductors*, J. Thermal Stresses, 27, 825-841.

- 204) RYCHLEWSKA J., SZYMCHYK J., WOŹNIAK CZ., 2004c, *Simplified models for the vibration analysis of micro-periodic elastic media*, J. Tech. Phys., 45, 2, 91-104.
- 205) RYCHLEWSKA J., WOŹNIAK CZ., 2003, *On continuum modeling of dynamic problems in composite solids with periodic microstructure*, J. Theor. Appl. Mech., 41, 735-753.
- 206) RYCHLEWSKA J., WOŹNIAK CZ., 2006a, *Boundary layer phenomena in elastodynamics of functionally graded laminates*, Arch. Mech., 58, 4-5, 1-14.
- 207) RYCHLEWSKA J., WOŹNIAK CZ., 2006b, *Elastodynamics of functionally graded laminates with interlaminar microdefects*, Fizyko-Khimichna Mekhanika Materialiv (in English: Materials Science), 6.
- 208) RYCHLEWSKA J., WOŹNIAK CZ., 2010, *On the tolerance modeling of PDEs with non-uniformly oscillating coefficients*, w: Advances in the mechanics of inhomogeneous media, red. Cz. Woźniak, M. Kuczma, R. Świtka, K. Wilmański, University of Zielona Góra Press, Zielona Góra, 13-26.
- 209) RYCHLEWSKA J., WOŹNIAK CZ., WOŹNIAK M., 2006, *Modelling of functionally graded laminates revisited*, Electronic J. Polish Agric. Univ., Civil Engineering, 9, 2, www.ejpau.media.pl.
- 210) SADOWSKI T., ATAYA S., NAKONIECZNY K., 2009, *Thermal analysis of layered FGM cylindrical plates subjected to sudden cooling process at one side. Comparison of two applied methods for problem solution*, Comput. Mater. Sci., 45, 624-632.
- 211) SANCHEZ-PALENCIA E., 1980, *Non-homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Physics, 127, Springer-Verlag, Berlin.
- 212) SANTOS H., MOTA SOARES C.M., MOTA SOARES C.A., REDDY J.N., 2008, *A semi-analytical finite element model for the analysis of cylindrical shells made of functionally graded materials under thermal shock*, Comp. Struct., 86, 10-21.
- 213) SCHMAUDER S., WEBER U., 2001, *Modelling of functionally graded materials by numerical homogenization*, Arch. Appl. Mech., 71, 182-192.
- 214) SIEDLECKA U., WIERZBICKI E., 2004, *Isotropic models for a heat transfer in periodic composites*, PAMM, 4, 1, 502-503.
- 215) SIEDLECKA U., WIERZBICKI E., WOŹNIAK CZ., 2010, *Tolerance modeling of quasi-linear heat conduction in functionally graded laminates*, w: Advances in the mechanics of inhomogeneous media, red. Cz. Woźniak, M. Kuczma, R. Świtka, K. Wilmański, University of Zielona Góra Press, Zielona Góra, 37-47.
- 216) SLADEK J., SLADEK V., ZHANG CH., 2003, *Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method*, Comput. Mater. Sci., 28, 494-504.
- 217) STOKER J.J., 1950, *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems*, Interscience Publ. Inc.
- 218) SUN C.T., ACHENBACH J.D., HERRMANN G., 1968a, *The harmonic waves in a stratified medium propagating in direction of layering*, J. Appl. Mech., 35, 408-411.

- 219) SUN C.T., ACHENBACH J.D., HERRMANN G., 1968b, *Continuum theory for a laminated medium*, J. Appl. Mech., 35, 467-475.
- 220) SURESH S., MORTENSEN A., 1998, *Fundamentals of functionally graded materials*, Cambridge, The University Press.
- 221) SZYMCHYK J., 2006, *On the modelling of elastic laminates with a weak transversal inhomogeneity*, w: Selected Topics in the Mechanics of Inhomogeneous Media, red. Cz. Woźniak, R. Świtka, M. Kuczma, Zielona Góra, 41-51.
- 222) SZYMCHYK J., WOŹNIAK CZ., 2006a, *A contribution to the modeling of periodically laminated elastic solids*, Electronic J. Polish Agric. Univ., Civil Engineering, 9, 1, www.ejpau.media.pl.
- 223) SZYMCHYK J., WOŹNIAK CZ., 2006b, *Continuum modelling of laminates with a slowly graded microstructure*, Arch. Mech., 58, 4-5, 445-458.
- 224) TAUCHERT T.R., GUZELSU A.N., 1972, *An experimental study of dispersion of stress waves in a fiber-reinforced composite*, J. Appl. Mech., 39, 98-102.
- 225) TIMOSHENKO S., WOINOWKY-KRIEGER S., 1959, *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill, New York.
- 226) TOLF G., 1983, *On dynamical description of fibre reinforced composites*, w: New Problems in Mechanics of Continua, red. Brulin and Hsieh, Waterloo Press, Study No. 17, 145-159.
- 227) TOMCZYK B., 1999, *Length-scale versus asymptotic model in dynamics of thin substructured cylindrical shells*, Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech.-Math., 55, 40-50.
- 228) TOMCZYK B., 2003a, *On the modelling of thin uniperiodic cylindrical shells*, J. Theor. Appl. Mech., 41, 755-774.
- 229) TOMCZYK B., 2003b, *Length-scale versus homogenized model in stability of uniperiodic cylindrical shells*, Appl. Problems Mech. Math., 1, 150-155.
- 230) TOMCZYK B., 2005a, *On stability of thin periodically densely stiffened cylindrical shells*, J. Theor. Appl. Mech., 43, 427-455.
- 231) TOMCZYK B., 2005b, *Length-scale effect in stability of thin periodically stiffened cylindrical shells*, w: Shell Structures: Theory and Applications, red. W. Pietraszkiewicz, Cz. Szymczak, Taylor & Francis, London-Leiden, 273-277.
- 232) TOMCZYK B., 2006a, *On dynamics and stability of thin periodic cylindrical shells*, Diff. Eqs. Nonlin. Mech., ID 79853, 1-23.
- 233) TOMCZYK B., 2006b, *On the effect of period lengths on dynamic stability of thin biperiodic cylindrical shells*, Electronic J. Polish Agric. Univ., Civil Engineering, 9, www.ejpau.media.pl.
- 234) TOMCZYK B., 2007a, *A non-asymptotic model for the stability analysis of thin biperiodic cylindrical shells*, Thin-Walled Structures, 45, 941-944.
- 235) TOMCZYK B., 2007b, *Length-scale effect in dynamic stability problems for ribbed shell*, w: Mechanics of Solids and Structures, red. V. Pauk, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 91-109.

- 236) TOMCZYK B., 2008, *Vibrations of thin cylindrical shells with a periodic structure*, PAMM, 8, 349-350.
- 237) TOMCZYK B., 2009, *Micro-vibrations of thin cylindrical shells with uniperiodic structure*, PAMM, 9, 267-268.
- 238) TOMCZYK B., 2010, *Combined modeling of periodically stiffened cylindrical shells*, w: *Advances in the mechanics of inhomogeneous media*, red. Cz. Woźniak, M. Kuczma, R. Świtka, K. Wilmański, University of Zielona Góra Press, Zielona Góra, 79-97.
- 239) WĄGROWSKA M., 1998, *On the homogenization of elastic-plastic composites by the microlocal parameter approach*, Acta Mechanica, 73, 45-65.
- 240) WĄGROWSKA M., WOŹNIAK CZ., 1992, *On the formulation of limit analysis problems for microperiodic composite materials*, ZAMM, 72, 221-223.
- 241) WĄGROWSKA M., WOŹNIAK CZ., 1996, *On the modelling of dynamic problems for visco-elastic composites*, Int. J. Engng Sci., 35, 923-932.
- 242) WIERZBICKI E., 1993, *On the wave propagation in micro-periodic elastic media*, Bull. Ac. Pol. Sci., Sci. Techn., 41, 323-227.
- 243) WIERZBICKI E., 1995, *Nonlinear macro-micro dynamics of laminated structures*, J. Theor. Appl. Mech., 33, 1-17.
- 244) WIERZBICKI E., WOŹNIAK CZ., 2000a, *On the dynamic behaviour of honeycomb based composite solids*, Acta Mechanica, 141, 161-172.
- 245) WIERZBICKI E., WOŹNIAK CZ., 2000b, *On the dynamics of combined plane periodic structures*, Arch. Appl. Mech., 70, 387-398.
- 246) WIERZBICKI E., WOŹNIAK CZ., ŁACIŃSKA L., 2005, *Boundary and initial fluctuation effect on dynamic behaviour of a laminated solid*, Arch. App.Mech., 74, 618-628.
- 247) WIERZBICKI E., WOŹNIAK CZ., WOŹNIAK M., 1995, *Finite rotations in the refined macro-dynamics of elastic composites*, J. Theor. Appl. Mech., 33, 15-25.
- 248) WIERZBICKI E., WOŹNIAK CZ., WOŹNIAK M., 1997a, *Thermal stresses in elastodynamics of composite materials*, Int. J. Engng. Sci., 35, 187-196.
- 249) WIERZBICKI E., WOŹNIAK CZ., WOŹNIAK M., 1997b, *Stability of micro-periodic materials under finite deformations*, Arch. Mech., 49, 143-158.
- 250) WIERZBICKI E., WOŹNIAK CZ., WOŹNIAK M., 2001, *On the modelling of transient micromotions and near-boundary phenomena in a stratified elastic layers*, Int. J. Engng. Sci., 39, 1429-1441.
- 251) WILMAŃSKI K., 1966, *O pewnym włóknistym modelu gęstego rusztu*, Rozpr. Inż., 3, 44, 499-512.
- 252) WIROWSKI A., 2007, *Drgania własne pasma płytowego z materiału o funkcjonalnie zmiennych własnościach*, Zeszyty Nauk. PŚl., seria: Bud., 112, Gliwice, 455-462.
- 253) WIROWSKI A., 2008, *Zagadnienie przewodnictwa ciepła w laminatach z funkcijną gradacją własności*, praca doktorska, Wyd. BAIŚ PŁ.

- 254) WIROWSKI A., 2009, *Dynamic behaviour of thin annular plates made from functionally graded material*, PAMM, 9, 261-262.
- 255) WIROWSKI A., 2010a, *Dynamic behaviour of thin annular plates made from functionally graded material*, w: *Shell Structures: Theory and Applications*, vol. 2, red. W. Pietraszkiewicz, I. Kreja, Taylor & Francis, London–Leiden, 207-210.
- 256) WIROWSKI A., 2010b, *The tolerance modelling of dynamic behaviour of longitudinal graded annular plates*, w: *Advances in the mechanics of inhomogeneous media*, red. Cz. Woźniak, M. Kuczma, R. Świtka, K. Wilmański, University of Zielona Góra Press, Zielona Góra, 109-119.
- 257) WIROWSKI A., 2010c, *KMK Ciepło 2D v. 1.3.8 – Dokumentacja programu*, materiały Katedry Mechaniki Konstrukcji PŁ.
- 258) WOJNAR R., 1990, *Thermoelasticity and homogenisation*, J. Theor. Appl. Mech., 33, 322-335.
- 259) WOŹNIAK CZ., 1965, *Modele ciągłe gęstych siatek prętowych*, Arch. Inż. Łąd., 2, 11, 175-185.
- 260) WOŹNIAK CZ., 1970, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa.
- 261) WOŹNIAK CZ., 1986, *Nonstandard analysis in mechanics*, Adv. Mech., 1, 3-35.
- 262) WOŹNIAK CZ., 1987, *Homogenized thermoelasticity with microlocal parameters*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sci. Techn., 35, 133-141.
- 263) WOŹNIAK CZ., 1989, *On the modelling of thermo-unelastic periodic composites: microlocal parameter theory*, Acta Mech., 80, 81-94.
- 264) WOŹNIAK CZ., 1993a, *Refined macrodynamics of periodic structures*, Arch. Mech., 45, 295-304.
- 265) WOŹNIAK CZ., 1993b, *Macro-dynamics of elastic and viscoelastic micro-periodic composites*, J. Theor. Appl. Mech., 4, 31, 763-770.
- 266) WOŹNIAK CZ., 1993c, *Nonlinear macro-elastodynamics of micro-periodic composites*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sci. Techn., 4, 41, 315-320.
- 267) WOŹNIAK CZ., 1995, *Microdynamics: continuum modelling the simple composite materials*, J. Theor. Appl. Mech., 33, 267-289.
- 268) WOŹNIAK CZ., 1997, *Internal variables in dynamics of composites solids with periodic microstructure*, Arch. Mech., 49, 421-441.
- 269) WOŹNIAK CZ., 1999, *On dynamics of substructured shells*, J. Theor. Appl. Mech., 37, 255-265.
- 270) WOŹNIAK CZ., 2000, *Computational models of periodic composites*, J. Theor. Appl. Mech., 38, 447-459.
- 271) WOŹNIAK CZ. [red.], 2001, *Mechanika sprężystych płyt i powłok*, seria: Mechanika Techniczna, t. VIII, PWN, Warszawa.
- 272) WOŹNIAK CZ., 2002, *Macroscopic modelling of multiperiodic composites*, C. R. Mecanique, 330, 267-272.

- 273) WOŹNIAK CZ. [red.], 2010, *Mathematical Modelling and Analysis in Continuum Mechanics of Microstructured Media*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.
- 274) WOŹNIAK CZ., BACZYŃSKI Z.F., WOŹNIAK M., 1996, *Modelling of nonstationary heat conduction problems in micro-periodic composites*, ZAMM, 76, 223-229.
- 275) WOŹNIAK CZ., MICHALAK B., JĘDRYSIAK J. [red.], 2008, *Thermomechanics of Heterogeneous Solids and Structures. Tolerance Averaging Approach*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź.
- 276) WOŹNIAK CZ., RYCHLEWSKA J., WIERZBICKI E., 2005, *Modelling and analysis of functionally graded laminated shells*, w: *Shell Structures: Theory and Applications*, red. W. Pietraszkiewicz, Cz. Szymczak, Taylor&Francis, London-Leiden, 187-191.
- 277) WOŹNIAK CZ., WIERZBICKI E., 2000, *Averaging techniques in thermomechanics of composite solids. Tolerance averaging versus homogenization*, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa.
- 278) WOŹNIAK CZ., WIERZBICKI E., WOŹNIAK M., 1996, *Modelling of nonstationary heat conduction problems in micro-periodic composites*, ZAMM, 76, 223-229.
- 279) WOŹNIAK CZ., WIERZBICKI E., WOŹNIAK M., 2001, *Tolerance averaging and boundary-layer equations for the heat transfer problems in microperiodic solids*, J. Theor. Appl. Mech., 39, 423-442.
- 280) WOŹNIAK CZ., WOŹNIAK M., 1994, *On the effect of interface micro-cracks on interactions in stratified media*, Int. J. Fract., 66, 165-173.
- 281) WOŹNIAK CZ., WOŹNIAK M., 1995a, *On the micro-modelling of dynamic response for thermoelastic periodic composites*, w: *Proc. IUTAM Symp. on Microstructure Property Interactions in Composite Materials*, red. R. Pyrz, Kluwer, Aalborg, 24-25 August 1994, 387-395.
- 282) WOŹNIAK CZ., WOŹNIAK M., 1995b, *Modelowanie w dynamice kompozytów. Teoria i zastosowania*, Prace IPPT, Warszawa.
- 283) WOŹNIAK CZ., WOŹNIAK M., 1997a, *A generalization of the internal variable model for dynamics of solids with periodic microstructure*, J. Theor. Appl. Mech., 35, 109-122.
- 284) WOŹNIAK CZ., WOŹNIAK M., 1997b, *On the description of dynamic behavior for microperiodic solids*, Fizyko-Khimichna Mekhanika Materialiv (w jęz. angielskim: Materials Science), 33, 141-153.
- 285) WOŹNIAK CZ., ZIELIŃSKI S., 1966, *Some problems of plane fibrous media*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sci. Techn., 14, 355-361.
- 286) WOŹNIAK CZ., ŻUKOWSKI M., 1967, *Siatki prętowe na podłożu sprężystym*, Arch. Hydr., 11, 4, 135-139.
- 287) WOŹNIAK M., 1995, *On the dynamic behaviour of micro-damaged stratified media*, Int. J. Fract., 73, 223-232.
- 288) WOŹNIAK M., 1996, *2D-dynamics of a stratified elastic subsoil layer*, Arch. Appl. Mech., 66, 284-290.

-
- 289) WOŹNIAK M., WIERZBICKI E., WOŹNIAK CZ., 2001, *A macroscopic model of the diffusion and heat transfer processes in a periodically micro-stratified solid layer*, Acta Mechanica, 157, 175-185.
- 290) YEVTUSHENKO A.A., MATYSIAK S.J., IVANYK E.G., 1997, *Influence of periodically layered material structure on the frictional temperature during breaking*, Int. J. Heat Mass Transfer, 40, 2115-2122.
- 291) YEVTUSHENKO A.A., MATYSIAK S.J., PAUK V.J., 1996, *On a homogenized model of periodically layered piezoelectric composites*, Fizyko-Khimichna Mekhanika Materialiv (w jęz. angielskim: Materials Science), 32, 359-367.
- 292) ZEEMAN E.C., 1965, *The topology of the brain*, w: Biology and Medicine, Medical Research Council, 227-292.

Streszczenie

Termomechanika laminatów, płyt i powłok o funkcyjnej gradacji własności

Publikacja stanowi podsumowanie wyników uzyskanych jako rezultat modelowania matematycznego różnych zagadnień termomechanicznych dla wybranych kompozytów i struktur o funkcyjnej gradacji własności. Część wyników otrzymano w ramach prac związanych z projektem badawczym finansowanym przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego w latach 2008-2010.

Rozpatrywane obiekty to laminaty, płyty i powłoki o niejednorodnej budowie, zarówno na poziomie mikro, jak i makro. W skali mikro mają one tzw. tolerancyjnie-periodyczną budowę, natomiast w skali makro charakteryzują się tzw. funkcyjną poprzeczną gradacją własności.

W niniejszym opracowaniu przedstawiono matematyczne modele takich kompozytów i struktur, otrzymane przy wykorzystaniu *techniki tolerancyjnego uśredniania*, rozwijanej w ostatnim dwudziestoleciu. Technika ta pozwala zastąpić równania różniczkowe, opisujące zagadnienia termomechaniczne tych obiektów, o silnie oscylujących, tolerancyjnie-periodycznych, nieciągłych współczynnikach uśrednionymi równaniami różniczkowymi o współczynnikach ciągłych, wolnozmiennych. Cechą charakterystyczną wyprowadzonych równań jest uwzględnienie w nich wpływu wielkości mikrostruktury ciała na jego zachowanie. Pozwala to opisać dodatkowe efekty, takie jak na przykład zjawisko dyspersji, mające bardzo istotny wpływ na dynamikę rozważanych obiektów.

W książce sformułowano i wyprowadzono uśrednione równania różniczkowe modeli tolerancyjnych: dla laminatów o poprzecznej gradacji własności – przewodnictwa ciepła, elastodynamiki, termosprężystości; dla cienkich płyt a także dla powłok o poprzecznej gradacji własności – dynamiki. Rozważania teoretyczne zostały zilustrowane przykładami zastosowań z zakresu: stacjonarnego i niestacjonarnego przewodnictwa ciepła w laminatach, drgań laminatów, drgań cienkich płyt.

Summary

Thermomechanics of laminates, plates and shells with functionally graded properties

This book is a summary of results obtained as results of the mathematical modeling of various thermomechanical problems for certain composites and structures with functionally graded properties. Some results were calculated during the research project supported by Ministry of Science and Higher Education of Poland in years 2008-2009.

Objects under consideration are laminates, plates and shells with heterogeneous structure on both the levels – micro and macro. These objects have so called tolerance-periodic structure on the microlevel, but in the macroscale they have so called transversally functionally graded properties.

In this book there are presented mathematical models of these composites and structures, obtained in the framework of *the tolerance averaging technique*, which has been developed during the last twenty years. This technique makes it possible to replace differential equations, describing thermomechanical problems of these objects, and having highly oscillating, tolerance-periodic, non-continuous coefficients, by averaged differential equations with continuous and slowly-varying coefficients. The characteristic feature of these equations is that they take into account the effect of the microstructure size on the overall behaviour of the solid. It makes it possible to describe certain additional effects, for instance – a dispersion phenomenon, which plays a crucial role in dynamics for composites and structures under consideration.

ISBN 978-83-7283-373-0