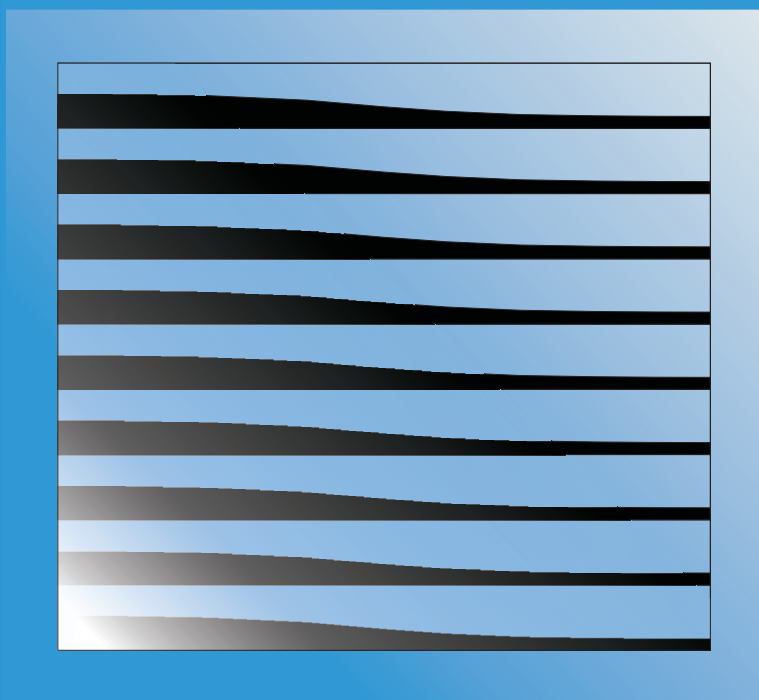


TERMOMECHANIKA CIAŁ Z PEWNĄ NIEJEDNORODNĄ MIKROSTRUKTURĄ TECHNIKA TOLERANCYJNEJ APROKSYMACJI

BOHDAN MICHALAK



MONOGRAFIE POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
ŁÓDŹ 2011

**TERMOMECHANIKA CIAŁ Z PEWNĄ
NIEJEDNORODNĄ MIKROSTRUKTURĄ
TECHNIKA TOLERANCYJNEJ APROKSYMACJI**

BOHDAN MICHALAK

MONOGRAFIE POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
ŁÓDŹ 2011

Recenzenci: **prof. dr hab. inż. Zbigniew Kołakowski**
dr hab. Ewaryst Wierzbicki, prof. SGGW

KOMITET REDAKCYJNY
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

Przewodniczący: **prof. dr hab. inż. Piotr Wodziński**
Redaktor Naukowy Wydziału: **dr hab. inż. Tadeusz Urban, prof. PŁ**
Redaktor Serii Monografie: **prof. dr hab. inż. Piotr Wodziński**

© Copyright by Politechnika Łódzka 2011

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223
tel/fax 42 684-07-93
e-mail: zamowienia@info.p.lodz.pl
www.wydawnictwa.p.lodz.pl

ISBN 978-83-7283-425-6

Nakład 100 egz. Ark druk. 8,0. Papier offset. 80 g 70 x 100
Druk ukończono we wrześniu 2011 r.
Wykonano w Drukarni Offsetowej „Quick-Druk” s.c. ul. Łąkowa 11, 90-562 Łódź
Nr 1980

Spis treści

1. Wstęp	5
1.1. Przedmiot analizy	5
1.2. Modelowanie materiałów z mikrostrukturą	7
1.3. Zakres opracowania	12
2. Podstawy modelowania techniką tolerancyjnej aproksymacji	15
2.1. Pojęcia podstawowe	15
2.2. Założenia tolerancyjnej aproksymacji	18
2.3. Uśrednianie równań różniczkowych	18
2.3.1. Model tolerancyjny	20
2.3.2. Model asymptotyczny	22
3. Przewodzenie ciepła w materiałach o podłużnej gradacji własności	25
3.1. Przedmiot analizy	25
3.2. Model tolerancyjny	28
3.3. Model asymptotyczny	31
3.4. Wybrane zagadnienia przewodzenia ciepła	33
3.4.1. Stacjonarne zagadnienia przewodzenia ciepła	33
3.4.1.1. Równania przewodzenia ciepła	33
3.4.1.2. Przykłady przewodzenia ciepła	36
3.4.2. Zagadnienia niestacjonarnego kontrolowanego przewodzenia ciepła	42
3.4.2.1. Kontrolowane chłodzenie w przewodniku prostokątnym	43
3.4.2.2. Kontrolowane chłodzenie w przewodniku cylindrycznym	45
3.4.3. Niestacjonarne przewodzenie ciepła	49
3.4.3.1. Równania modelu	49
3.4.3.2. Przykłady zastosowań	51
4. Dynamika cienkich płyt wykonanych z materiałów o podłużnej gradacji własności	56
4.1. Przedmiot analizy	56
4.2. Model tolerancyjny	59
4.3. Model asymptotyczny	60

4.4. Drgania własne płyt wykonanych z materiałów o podłużnej gradacji własności	63
4.4.1. Drgania własne pasma płytowego o podłużnej gradacji struktury	64
4.4.2. Drgania własne płyt pierścieniowych o podłużnej gradacji struktury	68
4.4.2.1. Równania modelu	68
4.4.2.2. Przykłady obliczeń	70
5. Drgania cienkich płyt pierścieniowych o podłużnej gradacji struktury na dwuparametrowym niejednorodnym podłożu sprężystym	76
5.1. Przedmiot analizy	76
5.2. Model tolerancyjny	78
5.3. Model asymptotyczny	80
5.4. Drgania własne płyt o podłużnej gradacji własności na niejednorodnym dwuparametrowym podłożu sprężystym	84
6. Stateczność cienkich płyt wykonanych z materiałów o podłużnej gradacji własności	90
6.1. Przedmiot analizy	90
6.2. Model tolerancyjny	91
6.3. Model asymptotyczny	93
6.4. Przykłady stateczności liniowej płyt wykonanych z materiałów o podłużnej gradacji własności	95
6.4.1. Stateczność pasma płytowego o podłużnej gradacji własności	96
6.4.2. Stateczność płyty pierścieniowej o podłużnej gradacji własności	98
7. Podsumowanie	103
Skorowidz	107
Literatura	109
Streszczenie	119
Summary	120

1. Wstęp

1.1. Przedmiot analizy

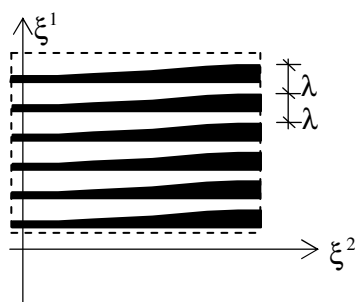
Wymagania stawiane nowoczesnym materiałom konstrukcyjnym często nie mogą być zaspokojone przez materiały tradycyjne. Stąd potrzeba stosowania materiałów o specyficznych właściwościach konstrukcyjnych. Materiały tego typu znane są pod ogólną nazwą materiałów kompozytowych. Prezentowane opracowanie dotyczy struktur zbudowanych z bardzo dużej liczby regularnie rozłożonych oddzielnych elementów (takich jak włókna, inkluzje lub żebra) idealnie połączonych z jednorodną matrycą. W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że zarówno matryca, jak i umieszczone w niej elementy są wykonane z materiału jednorodnego. W analizowanych ciałach będziemy mogli wyróżnić pewien powtarzalny element nazywany komórką. Przedrostek mikro wskazuje, że mamy do czynienia z ośrodkiem, w którym wymiar komórki jest dużo mniejszy od charakterystycznego wymiaru całego ciała. W przypadku, gdy mikrostruktura kompozytu ma budowę jednorodną makrowłaści takiego materiału są stałe w całym jego obszarze. Gdy kompozyt ma budowę mikroniejednorodną, jego makrowłaści są zmienne w obszarze materiału. W opracowaniu tym nasza uwaga będzie skupiona na materiałach mikroniejednorodnych z mikrostrukturą wolno zmienną w przestrzeni (rys. 1.1). Zgodnie z pracą Michalak, Cz. Woźniak, M. Woźniak (2007) wolna zmienność tych charakterystyk może być wywołana przez:

- krzywoliniowy kształt elementu,
- zmienny udział objętościowy poszczególnych materiałów w komórce,
- planowane rozmieszczenie zbrojenia w sąsiedztwie otworów.

Można zauważyć, że zmienność w przestrzeni właściwości makroskopowych jest realizowana na poziomie mikro przez wolną zmienność mikrostruktury w sąsiednich komórkach. Materiały tego typu o wolno zmiennej mikrostrukturze stanowią szczególny przypadek materiałów o funkcyjnej gradacji właściwości (ang. functionally graded materials, FGM), cf. Suresh and Mortensen (1998).

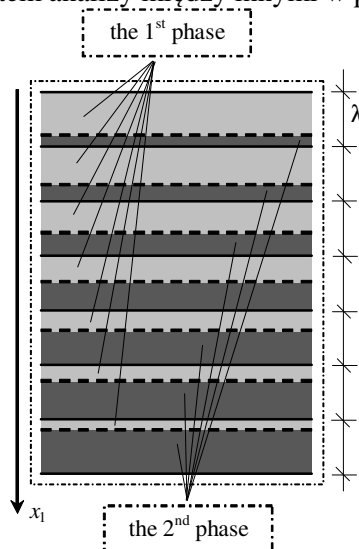
W prezentowanym opracowaniu będą analizowane dwuskładnikowe kompozyty o określonej mikrostrukturze. W skali makro będziemy mieli do czynienia z wolno zmiennym i gładkim przejściem od jednego do drugiego materiału. Tym

niemniej na poziomie mikro mamy do czynienia z przejściem od jednego do drugiego materiału o silnie zmiennych własnościach termomechanicznych.



Rys.1.1. Fragment przekroju poprzecznego materiału o podłużnej gradacji własności

Analizowane dwuskładnikowe kompozyty mogą przedstawiać dwa różnego rodzaju materiały FGM. Kompozyty o *poprzecznej gradacji własności*, gdzie efektywne własności są wolno zmienne w kierunku prostopadłym do warstw (rys. 1.2) były przedmiotem analizy między innymi w pracy Jędrysiaka (2010).



Rys.1.2. Fragment przekroju poprzecznego materiału o poprzecznej gradacji własności, Woźniak Cz., Michalak, Jędrysiak [red.] (2008)

Przedmiotem analizy prezentowanej pracy są dwuskładnikowe mikro-niejednorodne kompozyty z uśrednionymi własnościami łagodnie zmiennymi wzdłuż wybranego kierunku. Rozpatrywane kompozyty mają deterministyczną mikrostrukturę, która jest periodyczna wzdłuż pewnego kierunku i ma gładkie

i wolno zmienne efektywne własności w kierunku prostopadłym. Kompozyty tego rodzaju o efektywnych własnościach wolno zmiennych w kierunku uwarstwienia (rys.1.1) nazywać będziemy materiałami o *podłużnej gradacji własności*.

W przedstawionym opracowaniu zostaną zanalizowane zagadnienia termiczne ograniczone do przepływu ciepła w przewodniku wykonanym z materiału o podłużnej gradacji własności. Zostaną również poddane analizie dynamiczne zachowania cienkich płyt wykonanych z materiałów o podłużnej gradacji własności oraz zagadnienia liniowej stateczności takich płyt. Podstawą analizy rozpatrywanych w pracy ciał mikroniejednorodnych są:

- liniowa teoria przewodzenia ciepła Fouriera,
- teoria płyt cienkich Kirchhoffa.

Dla ciał jednorodnych teorie te są opisane dobrze znanymi równaniami różniczkowymi o stałych współczynnikach. W przypadku ciał mikroniejednorodnych, w których występuje duża liczba powierzchni styku pomiędzy poszczególnymi materiałami, w równaniach tych występują współczynniki opisane silnie oscylującymi i nieciągłymi funkcjami. Równania w takiej postaci są mało przydatne do zastosowań inżynierskich i obliczeń numerycznych, stąd potrzeba poszukiwania różnych modeli uśrednionych opisujących termomechaniczne zachowania ciał z mikrostrukturą. Otrzymane modele uśrednione powinny się charakteryzować dwiema cechami. Równania opisujące te modele powinny mieć w miarę gładkie, lub nawet stałe, współczynniki, tak aby do ich rozwiązania można było zastosować znane metody obliczeniowe. Po drugie, otrzymane z tych równań rozwiązania powinny w miarę możliwości opisywać zachowania rozpatrywanych ciał na poziomie mikro.

1.2. Modelowanie materiałów z mikrostrukturą

Materiały kompozytowe są stosowane w wielu dziedzinach inżynierskich, takich jak przemysł lotniczy, kosmiczny, samochodowy, budowa okrętów, medycyna czy sport. To szerokie zastosowanie materiałów kompozytowych wynika z możliwości doboru ich własności na poziomie makroskopowym do potrzeb użytkownika. Tym niemniej otrzymanie odpowiednich własności efektywnych na poziomie makroskopowym wymaga odpowiedniego ukształtowania kompozytu na poziomie mikroskopowym. Stąd w trakcie procesu modelowania

matematycznego jest ogólnie przyjętą praktyką rozpatrywanie kompozytu w dwóch skalach. Te dwie skale są najczęściej określane jako poziom mikro- i makroskopowy analizy. Poziom mikroskopowy służy do opisanie właściwości poszczególnych składników kompozytu, takich jak elementy wzmocnienia (włókna, inkluzje, żebra) oraz materiału matrycy, podczas gdy na poziomie makroskopowym mamy do czynienia z pewnymi uśrednionymi globalnymi właściwościami kompozytu jako całości. Odpowiednie sformułowanie właściwości efektywnych musi mieć odniesienie do modelu mikromechanicznego. Stąd model na poziomie mikro musi brać pod uwagę właściwości termomechaniczne poszczególnych składników, jak i ich rozkład w obszarze analizowanego ciała.

Materiały kompozytowe o jednorodnej mikrostrukturze na poziomie mikro mają budowę periodyczną. W skali makro kompozyty tego typu mogą być traktowane jako jednorodne, a ich właściwości efektywne są wielkościami stałymi. Stąd ich model makroskopowy jest opisywany cząstkowymi równaniami różniczkowymi o stałych współczynnikach. Poza kompozytami o budowie periodycznej mamy do czynienia z kompozytami o strukturze mikro-niejednorodnej. W efekcie materiały kompozytowe tego typu są opisane w skali makro równaniami różniczkowymi o funkcyjnych współczynnikach. W przypadku, gdy mikrostruktura jest wolno zmienną w obszarze materiału, właściwości makroskopowe takiego ciała są opisane funkcjami wolno zmiennymi. Ponieważ ich efektywne właściwości są wolno zmienne w przestrzeni, mamy tutaj do czynienia z pewnego rodzaju materiałem o funkcyjnej gradacji właściwości (cf. Suresh and Mortensen (1998)).

Do budowania uśrednionych modeli matematycznych ciał z mikrostrukturą wykorzystuje się liczne techniki. Jedne z nich mają charakter bardziej ogólny i mogą być stosowane do modelowania różnych struktur, tak periodycznych, jak i mikroniejednorodnych, inne służą tylko do modelowania ciał o wybranej budowie mikrostrukturalnej. Poniżej przedstawimy kilka z wybranych technik modelowania ciał z mikrostrukturą.

Modelowanie struktur kompozytowych wzmocnionych przez różnego rodzaju składniki, takie jak włókna, inkluzje, żebra, było obszarem zainteresowań bardzo wielu badaczy. Niektóre z najwcześniej opracowanych modeli można znaleźć w pracach: Hill (1963), Hashin i Rosen (1964), Budiansky (1965), Mori i Tanaka (1973).

Najbardziej znanymi wśród technik uśredniania są te, bazujące na homogenizacji asymptotycznej równań różniczkowych z silnie oscylującymi współczynnikami. Matematyczne podstawy homogenizacji asymptotycznej można znaleźć przykładowo w monografiach: Bensoussan et al. (1978), Sanchez-Palencia (1980), Jikov et al. (1994). Literatura dotycząca technik homogenizacji asymptotycznej jest bardzo obszerna. Spośród licznych prac wykorzystujących technikę homogenizacji asymptotycznej do zagadnień rozważanych w przedstawionym opracowaniu wymienimy tylko kilka; dla zagadnień przewodzenia ciepła: Francfort (1983), Furmański (1997), Lewiński i Kucharski (1992), Wojnar (1990), dla płyt periodycznych: Caillerie (1984), Ciarlet i Destuynder (1979), Kalamkarov (1987), Lewiński i Telega (2000), dla powłok: Lutoborski (1985), Challagulla i inni (2008), Georgides i inni (2010), Saha i inni (2007), dla struktur trójwymiarowych wzmacnianych rusztem z włókien Kalamkarov i inni (2009).

Jedną z metod homogenizacji jest technika oparta na parametrach mikrolokalnych zaproponowana przez Woźniaka: Woźniak (1987), (1989), Matysiak i Woźniak (1988). Z szeregu prac wykorzystujących tę technikę wymienimy poświęcone kompozytom warstwowym: Bielski i Matysiak (1992), Jakubowska i Matysiak (1987), Matysiak (1995), Matysiak i Nagórko (1989), Nagórko (1989); zagadnieniom termicznym i procesom dyfuzji w kompozytach: Kaczyński i Matysiak (1988), Kulchytsky i Matysiak (2005), Matysiak (1991), Matysiak i Mieszkowski (2001), Matysiak i Yevtushenko (2008), Wągrow ska (1998); zagadnieniom szczelin i pęknięcia w kompozytach warstwowym: Kaczyński i Matysiak (2003), (2005), Kulchytsky i Matysiak (2007), Matysiak i inni (2009), Matysiak i Perkowski (2008); rozchodzeniu się fal w kompozytach warstwowym: Matysiak i inni (2009); zagadnieniom kompozytów piezoelektrycznych: Yevtushenko i inni (1996).

W przedstawionym opracowaniu do zbudowania modelu matematycznego i otrzymania uśrednionych równań opisujących zachowania rozpatrywanych ciał o budowie mikrostrukturalnej zostanie wykorzystana *technika tolerancyjnej aproksymacji* (ang. tolerance averaging approach, TTA). Podstawy matematyczne tej techniki, zapoczątkowanej pracami Woźniaka (1983), (1993a), można znaleźć w książce Woźniaka i Wierzbickiego (2000) oraz w monografiach pod red. Woźniaka, Michalaka, Jędrysiaka „Termomechanics of Microheterogeneous Solids and Structures, Tolerance Averaging Approach”

(2008) i pod red. Woźniaka i innych “Mathematical Modelling and Analysis in Continuum Mechanics of Microstructured Media” (2010). Uśrednione równania opisujące termomechaniczne zachowania analizowanych struktur zawierają, poza uśrednionymi polami temperatury lub przemieszczeń, dodatkowe niewiadome makropola nazywane amplitudami fluktuacji. Te niewiadome umożliwiają uwzględnić w analizie efekt wymiaru mikrostruktury na zachowania rozpatrywanych ciał.

Technika tolerancyjnej aproksymacji była wykorzystana w analizie wielu zagadnień, zarówno dla ciał o budowie periodycznej, jak i dla ciał o funkcyjnej gradacji makrowłasności. Zastosowanie techniki tolerancyjnej aproksymacji do zagadnień przewodzenia ciepła w przewodnikach o mikrostrukturze periodycznej było analizowane w pracach: Łaciński i Woźniak Cz. (2006), Nagórko i Piwowarski (2006), Rychlewska i inni (2004a), Siedlecka i Wierzbicki (2004), Woźniak Cz. i inni (1996), (2001); zagadnienia termosprężystości można znaleźć w pracy Wierzbicki i inni (1997a). Większość prac, w których korzystano z TTA dotyczyła dynamicznych zachowań ciał periodycznych, wymienimy przykładowo: Baron (2003), Cielecka i Jędrysiak (2006), Dell’Isola i inni (1997), Jędrysiak (2003), Jędrysiak i Michalak (2005), Mazur-Śniady i Śniady (1999, 2000), Mazur-Śniady i inni (2009), Michalak (2000), (2001a, 2001c), Michalak, Woźniak Cz., Woźniak M. (1997), Mielczarek i Woźniak Cz. (1995), Nagórko (2010), Nagórko i Wągrowaska (2002), Rychlewska i inni (2004b), Tomczyk (2003), Wierzbicki (1993), Woźniak Cz. (1997), Woźniak M. (1995). TTA wykorzystywano również do budowy uśrednionych modeli opisujących stateczność struktur o budowie periodycznej: Jędrysiak (2007), Michalak (1998), (2001b), Tomczyk (2007), Wierzbicki i inni (1997b). W strukturach periodycznych analizowano również następujące wybrane zagadnienia: modelowanie ciał periodycznych z mikropęknięciami: Woźniak Cz. i Woźniak M. (1994), zagadnienia kontaktowe w ciałach z periodycznymi brzegowymi imperfekcjami: Pauk i Woźniak Cz. (1999), zagadnienia dyfuzji w ciałach warstwowych: Woźniak M. i inni (2002), modelowanie kompozytów wieloperiodycznych: Woźniak Cz. (2002). Wymieniono tu tylko kilka prac wykorzystujących tę technikę uśredniania. Obszerny przegląd prac poświęconych technice tolerancyjnej aproksymacji, jak i omówienie innych technik mających zastosowanie przy budowaniu uśrednionych modeli ciał

z mikrostrukturą można znaleźć w monografiach pod redakcją Woźniaka Cz., Michalaka i Jędrysiaka (2008) i pod redakcją Woźniaka Cz. i innych (2010).

Przedmiotem analizy przedstawionego opracowania są ciała o budowie mikroniejednorodnej, w szczególności ciała, których efektywne własności zmieniają się w sposób łagodny w kierunku uwarstwienia. Struktury te, określone jako ciała o podłużnej gradacji makrowłasności, są przypadkiem szczególnym ciała o funkcyjnej gradacji własności FGM, co jest skrótem angielskiego określenia *functionally graded materials*. Koncepcja materiału FGM została wywołana chęcią uniknięcia konfliktu na granicy dwóch materiałów o bardzo różnych własnościach. Konflikt ten wywołuje niepożądaną koncentrację naprężeń na styku tych dwóch różnych materiałów. Koncepcja materiałów FGM pojawiła się pod koniec XX wieku, a pierwszym opracowaniem monograficznym dotyczącym tych materiałów była książka Suresha i Mortensena z 1998 roku. Literatura naukowa dotycząca tego zagadnienia jest ogromna, tak że ograniczymy się do przedstawienia tylko wybranych prac dotyczących zagadnień analizowanych w poniższym opracowaniu.

Analizę zagadnień przewodzenia ciepła w wydrążonym cylindrze wykonanym z materiału o funkcyjnej gradacji własności można znaleźć w pracach: Hosseini i inni (2008), Ootao i Tanigawa (2006), Sladek i inni (2003), Wang i Mai (2005). W pracach tych uśrednione własności materiałów przewodnika są wyrażone jako funkcje eksponentialne lub potęgowe współrzędnej promieniowej cylindra. Wydrążony cylinder analizowany w pracy Hosseini i inni (2008) ma niejednorodną mikrostrukturę i w celu modelowania jest podzielony na wiele cienkich cylindrów (warstw) wzdłuż jego grubości. Zagadnienia dynamiczne cienkich płyt wykonanych z FGM są analizowane w pracach: Chen i inni (2006), Gupta i Kumar (2008), Batra i Jin (2005), Tylikowski (2005), Yang i Shen (2001), Orakdöğen i inni (2010). Lista prac związanych z badaniami dynamicznymi cienkich płyt kołowych lub pierścieniowych wykonanych z FGM jest ograniczona; możemy tu wymienić prace: Malekzadek i inni (2010), Prakash i Ganapathi (2007), You i inni (2009). W zdecydowanej większości dotychczasowych prac analizujących płyty mamy do czynienia z uśrednionymi własnościami materiałowymi, które zmieniają się łagodnie wzdłuż grubości płyty. Natomiast w przedstawionym opracowaniu

własności materiałowe płyty zmieniają się w sposób łagodny wzdłuż wybranej współrzędnej powierzchni środkowej płyty.

W większości przypadków w materiałach typu FGM mamy do czynienia z mikrostrukturą stochastycznie niejednorodną. Materiały FGM analizowane w przedstawionym opracowaniu mają mikrostrukturę o charakterze deterministycznym. Do ich modelowania i uzyskania uśrednionych równań opisujących zachowanie ciał wykonanych z takiego materiału wykorzystamy technikę tolerancyjnej aproksymacji. W ostatnich latach podjęto badania nad zastosowaniem techniki tolerancyjnej aproksymacji do modelowania ciał wykonanych z materiałów o funkcjonalnej gradacji makrowłasności. Wyniki badań dotyczące przewodzenia ciepła można znaleźć w pracach: Jędrysiak i Radzikowska (2007), Michalak i Woźniak M. (2006), Michalak, Woźniak Cz. i Woźniak M. (2007), Michalak i Ostrowski (2007), Ostrowski (2009, 2010), Ostrowski i Michalak (2011), Radzikowska (2010), Siedlecka, Wierzbicki i Woźniak Cz. (2010). Zagadnienia dynamiczne w ciałach o funkcjonalnej gradacji własności można znaleźć w następujących pracach: Jędrysiak, Wierzbicki i Woźniak Cz. (2006), Rychlewska i Woźniak Cz. (2006), Rychlewska, Woźniak Cz. i Woźniak M. (2006) Szymczyk i Woźniak Cz. (2006). Zastosowaniu techniki tolerancyjnej aproksymacji do analizy dynamiki i stateczności cienkich płyt mikronejednorodnych i wykonanych z materiałów o funkcjonalnej gradacji własności są poświęcone prace: Jędrysiak i Michalak (2010), Jędrysiak, Michalak, Rychlewska i Woźniak Cz. (2004), Michalak (2004, 2010a, 2010b), Wirowski (2008, 2010). Modelowanie płyt i powłok warstwowych o funkcjonalnej gradacji własności można znaleźć w pracach: Jędrysiak, Rychlewska i Woźniak Cz. (2005), Woźniak Cz., Rychlewska i Wierzbicki (2005). Powłokom małowyniosłym o funkcjonalnej gradacji własności są poświęcone prace: Jędrysiak i Woźniak Cz. (2009, 2010), natomiast małowyniosłym powłokom szkieletowym modelowanym jako dwuwymiarowa struktura o funkcjonalnej gradacji własności prace: Michalak i Woźniak Cz. (2009, 2010).

Omówienie wielu prac wykorzystujących technikę tolerancyjnej aproksymacji można znaleźć w monografiach pod redakcją Woźniaka Cz., Michalaka i Jędrysiaka (2008) i Woźniaka Cz. i innych (2010).

1.3. Zakres opracowania

Przedstawione opracowanie dotyczy modelowania matematycznego termomechanicznych zachowań struktur kompozytowych wykonanych z materiałów

o podłużnej gradacji własności. Modele matematyczne przedstawione w opracowaniu otrzymano, korzystając z techniki tolerancyjnej aproksymacji. Podstawowe definicje i twierdzenia tej techniki modelowania przypomniano w rozdziale 2 opracowania, który jest napisany na podstawie książki Woźniaka i Wierzbickiego (2000) oraz monografii: pod red. Woźniaka, Michalaka, Jędrysiaka „Termomechanics of Microheterogeneous Solids and Structures, Tolerance Averaging Approach” (2008) i pod red. Woźniaka i innych “Mathematical Modelling and Analysis in Continuum Mechanics of Microstructured Media” (2010). Opracowanie jest uogólnieniem i rozwinięciem wyników badań zawartych w opublikowanych pracach oraz zawiera zarówno nowe sposoby analizy znanych zagadnień, jak i nowe problemy, które nie były dotychczas publikowane. Wyniki dotychczasowych badań wykorzystanych w opracowaniu są zawarte w pracach: Jędrysiak i Michalak (2008, 2010), Michalak (2010a, 1010b), Michalak i Ostrowski (2007), Michalak i Wirowski (2011), Michalak i Woźniak M. (2006), Michalak, Woźniak Cz., Woźniak M. (2007), Ostrowski i Michalak (2011), Ostrowski (2010), Wirowski (2008).

W prezentowanym opracowaniu zostaną wyprowadzone uśrednione równania dla dwóch modeli matematycznych: modelu tolerancyjnego i modelu asymptotycznego. Podstawowym założeniem w obydwu modelach jest dekompozycja poszukiwanego pola (temperatury lub przemieszczeń) na część uśrednioną i sumę składników będących iloczynami znanych funkcji oscylacji szukanego pola w komórce i nieznanych funkcji amplitud tych oscylacji.

W rozdziale 3 opracowania przedstawimy uśrednione równania modelu tolerancyjnego i asymptotycznego dla zagadnień przewodzenia ciepła w przewodnikach wykonanych z materiałów o funkcyjnej gradacji własności. Zostaną zanalizowane wybrane zagadnienia stacjonarnego przewodzenia ciepła w przewodniku cylindrycznym oraz porównane otrzymane rozkłady temperatury z analogicznymi rozkładami otrzymanymi metodą elementów skończonych dla bezpośredniego opisu przewodnika mikroniejednorodnego w celu weryfikacji poprawności zbudowanych modeli matematycznych. Otrzymamy początkowe rozkłady temperatury dla zagadnienia kontrolowanego chłodzenia w przewodniku prostokątnym i wydrążonym cylindrze. W zagadnieniach niestacjonarnych zbadamy wpływ budowy mikrostruktury na przebiegi rozkładu temperatur w czasie.

Rozdział 4 opracowania będzie poświęcony otrzymaniu tolerancyjnego i asymptotycznego modeli matematycznych opisujących dynamikę cienkich płyt wykonanych z materiału o funkcyjnej gradacji własności. Korzystając z otrzymanych uśrednionych równań, zostanie zanalizowany problem drgań własnych pasma płytowego i płyty pierścieniowej. W celu weryfikacji poprawności otrzymanego modelu uśrednionego, zostaną porównane częstości drgań własnych otrzymanych z modelu uśrednionego z częstościami otrzymanymi metodą elementów skończonych dla bezpośredniego opisu płyty o budowie mikroniejednorodnej. Zostaną pokazane możliwości sterowania budową mikrostruktury w celu otrzymania pożądaných wartości częstości drgań własnych.

W rozdziale 5 rozszerzymy zagadnienie dynamiki płyt pierścieniowych wykonanych z materiału o funkcyjnej gradacji własności na płyty oparte na dwuparametrowym niejednorodnym podłożu sprężystym. Zbadamy drgania własne takich płyt i wpływ wzajemnych relacji modułów podłoża na wartości częstości drgań własnych.

Rozdział 6 będzie poświęcony modelowaniu matematycznemu liniowej stateczności płyt cienkich wykonanych z materiałów o podłużnej gradacji własności. Określimy krytyczne wartości sił ściskających w paśmie płytowym i płycie pierścieniowej. Ponieważ otrzymane uśrednione równania stateczności będą zawierać gładkie funkcyjne współczynniki, do określenia wartości krytycznej sił wykorzystamy metodę Galernika.

Na zakończenie zostanie podany indeks podstawowych pojęć użytych w opracowaniu, spis literatury i streszczenia.

Autor opracowania pragnie podziękować prof. zw. dr hab. inż. Czesławowi Woźniakowi za wieloletnią współpracę, która była inspiracją do podjęcia badań nad wieloma zagadnieniami przedstawionymi w tym opracowaniu. Autor przekazuje również podziękowania pracownikom Katedry Mechaniki Konstrukcji Politechniki Łódzkiej: prof. dr hab. inż. Jarosławowi Jędrysiakowi, dr Alinie Radzikowskiej, dr inż. Piotrowi Ostrowskiemu, dr inż. Arturowi Wirowskiemu, współpraca z którymi przyczyniła się do powstania tej książki.

2. Podstawy modelowania techniką tolerancyjnej aproksymacji

Technika tolerancyjnej aproksymacji (TTA) jest jedną z metod służących otrzymaniu równań uśrednionego modelu matematycznego ciał z mikrostrukturą. Cechą charakterystyczną tej metody jest to, że modele uśrednione dzięki niej otrzymane zawierają efekt wymiaru mikrostruktury. Celem przedstawionego opracowania nie jest tworzenie podstaw matematycznych techniki tolerancyjnej aproksymacji, lecz praktyczne jej zastosowanie do rozwiązywania różnych zagadnień inżynierskich. Stąd rozdział ten ma za zadanie przypomnieć czytelnikowi tylko niezbędne pojęcia podstawowe i założenia wykorzystywane w TTA. Czytelnika zainteresowanego podstawami matematycznymi tej techniki uśredniania odsyłamy do książki Woźniaka Cz. i Wierzbickiego (2000) „Averaging techniques in thermomechanics of composite solids. Tolerance averaging versus homogenization”, monografii pod redakcją Woźniaka Cz., Michalaka i Jędrysiaka (2008) „Thermomechanics of microheterogeneous solids and structures. Tolerance averaging approach” i monografii pod redakcją Woźniaka Cz. i innych (2010) „Mathematical modelling and analysis In continuum mechanics of microstructured media”. Przedstawione poniżej podstawowe założenia i definicje wykorzystywane w tej technice są oparte na wymienionych powyżej pracach.

2.1. Pojęcia podstawowe

Tolerancja. Przez tolerancję będziemy rozumieć binarną relację określoną w niepustym zbiorze X , która jest symetryczna, zwrotna i nieprzechodnia. Niech δ będzie dowolną dodatnią wielkością, a X unormowaną przestrzenią liniową. Relacja tolerancji $\approx$ dla pewnego δ jest zdefiniowana przez

$$(\forall (x_1, x_2) \in X^2) [x_1 \approx x_2 \Leftrightarrow \|x_1 - x_2\|_X \leq \delta], \quad (2.1)$$

gdzie δ będzie nazywane parametrem tolerancji.

Komórka. Niech Ω będzie ograniczonym obszarem w R^n . Jako komórkę podstawową będziemy określać $\Delta \equiv [-\lambda_1/2, \lambda_1/2] \times \dots \times [-\lambda_n/2, \lambda_n/2]$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, gdzie λ będzie średnicą komórki Δ . Jeżeli Ω będzie obszarem

w R^3 , wtedy $\Delta \equiv [-\lambda_1/2, \lambda_1/2] \times [-\lambda_2/2, \lambda_2/2] \times [-\lambda_3/2, \lambda_3/2]$. Natomiast, gdy Ω jest obszarem płaskim, wtedy $\Delta \equiv [-\lambda_1/2, \lambda_1/2] \times [-\lambda_2/2, \lambda_2/2]$. Przyjmiemy, że średnica komórki λ jest dużo mniejsza w porównaniu do charakterystycznego wymiaru obszaru Ω , $\lambda \ll L_\Omega$. Niech $\Delta(x) \equiv x + \Delta$ będzie komórką ze środkiem w $x \in R^n$. Para $(\Omega, \Delta) \equiv \{\Delta(x), x \in \overline{\Omega}\}$ będzie nazywana *jednorodnym rozkładem komórek* w obszarze Ω .

Przyjmijmy, że obszar Ω jest parametryzowany krzywoliniowym ortogonalnym układem współrzędnych $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \in \hat{\Omega}$, gdzie $\hat{\Omega}$ jest pewnym ograniczonym obszarem w R^n . Powoduje to, że jest znane gładkie odwracalne odwzorowanie obszaru Ω na obszar $\hat{\Omega}$. Dla każdego $\hat{x} \in \hat{\Omega}$ zdefiniujemy

$$\hat{\Delta}(\hat{x}) \equiv [\hat{x}_1 - \lambda_1/2, \hat{x}_1 + \lambda_1/2] \times \dots \times [\hat{x}_n - \lambda_n/2, \hat{x}_n + \lambda_n/2],$$

gdzie λ_i , $i=1, \dots, n$ są dodatnimi stałymi. Poza tym dla każdego $x \in \Omega$, $x = \Phi^{-1}(\hat{x})$, $\hat{x} \in \hat{\Omega}$ możemy zdefiniować komórkę $\Delta(x) \equiv \Phi^{-1}(\hat{\Delta}(\hat{x}))$, $\hat{x} \in \hat{\Omega}$. Definiując $\lambda \equiv \sup \text{diam} \Delta(x)$, $x \in \Omega$ przyjmijmy, że $\lambda \ll L_\Omega$. Mając na względzie powyższe warunki, rodzinę komórek $(\Omega, \Delta) \equiv \{\Delta(x), x \in \overline{\Omega}\}$ będziemy nazywać *niejednorodnym rozkładem komórek* odniesionym do obszaru Ω , a λ będzie parametrem wymiaru mikrostruktury.

Funkcja tolerancyjnie periodyczna. Rozważania nasze ograniczymy do przestrzeni Sobolewa $H^k(\Omega)$ dla $k=0, 1, \dots, \alpha$, gdzie α jest dodatnią liczbą przyjętą w każdym rozpatrywanym zagadnieniu. Przez $\partial^k f$ oznaczmy k -ty gradient funkcji $f = f(x)$, $x \in \Omega$, $k=1, 2, \dots, \alpha$ i $\partial^0 f \equiv f$.

Funkcja $f \in H^\alpha(\Omega)$ będzie nazywana funkcją tolerancyjnie Δ -periodyczną, $f \in TP_\delta^\alpha(\Omega, \Delta)$, w odniesieniu do komórki Δ i parametru tolerancji δ , jeżeli dla każdego $x \in \Omega$ i $k=1, 2, \dots, \alpha$ istnieje Δ -periodyczna funkcja $\tilde{f}^{(k)}(x, \cdot)$ i są spełnione następujące warunki

$$(\forall x \in \Omega) (\exists \tilde{f}^{(k)}(x, \cdot) \in H^0(\Delta)) \left[\left\| \partial^k f|_{\Omega_x}(\cdot) - \tilde{f}^{(k)}(x, \cdot) \right\|_{H^0(\Omega_x)} \leq \delta \right], \quad (2.2)$$

$$\int_{\Delta(\cdot)} \tilde{f}^{(k)}(\cdot, z) dz \in C^0(\overline{\Omega}).$$

Funkcja $\tilde{f}^{(k)}(x, \cdot)$ będzie nazwana Δ -periodyczną aproksymacją gradientu $\partial^k f$ w komórce $\Delta(x)$, $x \in \Omega$ i $k=1, 2, \dots, \alpha$.

Dla danej z góry komórki Δ każda stała funkcja może być traktowana jako element przestrzeni $H^0(\Delta)$.

Funkcje zdefiniowane wzorem (2.2)₂ są lokalnie periodyczne w znaczeniu danym w pracy Bensoussan i inni (1978).

Funkcja wolno zmienna. Funkcja $w \in H^\alpha(\Omega)$ będzie nazywana funkcją wolno zmienną, $w \in SV_\delta^\alpha(\Omega, \Delta)$, w odniesieniu do komórki Δ i parametru tolerancji δ , jeżeli będzie spełniać poniższe warunki

$$\begin{aligned} w &\in TP_\delta^\alpha(\Omega, \Delta), \\ (\forall x \in \Omega) \quad [\tilde{w}^{(k)}(x, \cdot)]_{\Delta(x)} &= \partial^k w(x), \quad k = 0, 1, \dots, \alpha. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Z warunków tych można wnioskować, że periodyczna aproksymacja $\tilde{w}^{(k)}$ gradientu $\partial^k w(\cdot)$, jest funkcją stałą w komórce $\Delta(x)$ dla każdego $x \in \Omega$.

Stąd możemy wnioskować, że dla $w \in SV_\delta^\alpha(\Omega, \Delta)$ mamy

$$(\forall x \in \Omega) \left[\left\| \partial^k w(\cdot) - \partial^k w(x) \right\|_{H^0(\Delta(x))} \leq \delta, \quad k = 0, 1, \dots, \alpha \right].$$

Funkcja silnie oscylująca. Funkcja $h \in H^\alpha(\Omega)$ będzie nazywana funkcją silnie oscylującą, $h \in HO_\delta^\alpha(\Omega, \Delta)$, w odniesieniu do komórki Δ i parametru tolerancji δ , jeżeli będzie spełniać warunki

$$\begin{aligned} h &\in TP_\delta^\alpha(\Omega, \Delta), \\ (\forall x \in \Omega) \quad [\tilde{h}^{(k)}(x, \cdot)]_{\Delta(x)} &= \partial^k \tilde{h}(x), \quad k = 0, 1, \dots, \alpha. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Stąd dla każdej funkcji wolno zmiennej $w \in SV_\delta^\alpha(\Omega, \Delta)$ i tolerancyjnie periodycznej funkcji $f = h w \in TP_\delta^\alpha(\Omega, \Delta)$ mamy spełnione warunki

$$[\tilde{f}^{(k)}(x, \cdot)]_{\Delta(x)} = w(x) \partial^k \tilde{h}(x), \quad k = 0, 1, \dots, \alpha.$$

Definicja uśrednienia. Niech dana funkcja f skalarna, wektorowa lub tensorowa, zdefiniowana prawie wszędzie w Ω , będzie całkowalna i ograniczona w każdej komórce $\Delta(x)$, $x \in \overline{\Omega}$. Wartość średnia funkcji f będzie zdefiniowana jako

$$\langle f \rangle(x) = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta(x)} f(x, z) dz,$$

gdzie $z \in \Delta(x)$ i $x \in \overline{\Omega}$.

2.2. Założenia tolerancyjnej aproksymacji

Oznaczmy przez $\Omega \times \Xi$ ograniczoną dziedzinę w R^n taką, że $\Omega \subset R^m$ i $\Xi \subset R^{n-m}$ przyjmując, że $n > m$. Punkty należące do Ω będziemy oznaczać przez $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ lub $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$, natomiast punkty należące do Ξ przez $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-m})$. Gradient gładkiej funkcji f zdefiniowanej w $\Omega \times \Xi$ oznaczmy przez $\nabla f \equiv \partial f + \bar{\nabla} f$, gdzie $\partial f \equiv \text{grad}_z f(z, \xi)$ i $\bar{\nabla} \equiv \text{grad}_\xi f(z, \xi)$ dla $n > m$. W rozważaniach naszych będziemy przyjmować, że dla tolerancyjnie periodycznej funkcji $f \in TP_\delta^\alpha(\Omega, \Delta)$, dla każdego $x \in \Omega$, istnieją periodyczne aproksymacje $\tilde{f}^{(k)}(x, z, \xi)$ gradientu $\nabla^k f(z, \xi)$ $z \in \Delta(x)$.

W przypadku gdy $n = m$ argumenty $\xi \in \Xi$ znikają z rozważań.

Mikro-makro dekompozycja. Podstawowym założeniem techniki tolerancyjnej aproksymacji jest przyjęcie, że funkcje $w \in TP_\delta^\alpha(\Omega, \Delta)$ pola temperatury lub przemieszczeń mogą być przyjęte w postaci

$$w(x, \xi) = w_h(x, \xi) = u(x, \xi) + h^A(x) V_A(x, \xi), \quad A = 1, \dots, N, \quad x \in \Omega, \xi \in \Xi. \quad (2.5)$$

Nieznane funkcje wolno zmienne $u \in SV_\delta^\alpha(\Omega, \Delta)$, $V_A \in SV_\delta^\alpha(\Omega, \Delta)$ są nazywane odpowiednio uśrednioną (makroskopową) temperaturą lub przemieszczeniem i amplitudą fluktuacji. Funkcje $h^A \in HO_\delta^\alpha(\Omega, \Delta)$, $A = 1, 2, \dots, N$ są systemem znanych liniowo niezależnych funkcji, które są określane każdorazowo dla rozpatrywanego zagadnienia. Funkcje te będziemy nazywać *funkcjami kształtu fluktuacji*.

Przybliżenie periodyczne pochodnych funkcji $w = u + h^A V_A$ będzie przyjmowane w postaci

$$\tilde{w}^{(k)}(x, z, \xi) = \nabla^k u(x, \xi) + \partial^k \tilde{h}^A(x, z) V_A(x, \xi) + \tilde{h}^A(x, z) \bar{\nabla}^k V_A(x, \xi), \quad z \in \Delta(x) \quad (2.6)$$

dla każdego $x \in \Omega$, $\xi \in \Xi$, gdzie $\tilde{h}^A(x, z)$ jest periodycznym przybliżeniem funkcji $h^A(\cdot)$ w $\Delta(x)$.

2.3. Uśrednianie równań różniczkowych

Równania opisujące termomechanikę ciał z mikrostrukturą są cząstkowymi równaniami różniczkowymi z silnie oscylującymi i nieciągłymi współczynnikami. Naszym zadaniem będzie otrzymanie uśrednionych cząstkowych równań różniczkowych z gładkimi ciągłymi współczynnikami. Korzystając

z techniki tolerancyjnej aproksymacji, zbudujemy dwa modele matematyczne zawierające takie równania: model tolerancyjny i model asymptotyczny.

Rozważania w przedstawionym opracowaniu są ograniczone do zagadnień, które mogą być opisane cząstkowymi równaniami różniczkowymi zapisanymi w postaci

$$\sum_{p=0}^P \sum_{k=0}^{\alpha} (-1)^{k+1} \tau^{-p} \nabla^{(k)} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \nabla^{(k)} w^{(p)}} = 0, \quad (2.7)$$

gdzie $\tau > 0$ jest dowolnym dodatnim parametrem mającym wymiar czasu. Natomiast funkcja $\mathcal{L}_p \in HO_{\delta}^{\alpha}(\Omega, \Delta)$, $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(x, w^{(p)}, \nabla w^{(p)}, \dots, \nabla^{(\alpha)} w^{(p)})$ jest znaną całkowalną funkcją zdefiniowaną dla prawie każdego $x \in \Omega$.

Podstawowymi niewiadomymi są ciągłe skalarne lub wektorowe pola $w = x(x, t) \in TP_{\delta}^{\alpha}(\Omega, \Delta)$, $x \in \Omega$, $t \in (t_0, t_1)$.

W przypadku $P = 0$ funkcja $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_0$ staje się langragianem $\mathcal{L}$. Równania (2.7) przekształcają się w równania Eulera-Lagrange, które możemy otrzymać z zasady stacjonarności działania funkcjonału

$$\mathcal{A}(w(\cdot)) = \iint_{\Omega \times \Xi} \mathcal{L}(x, \nabla w(x, \xi), w(x, \xi)) d\xi dx. \quad (2.8)$$

Stąd otrzymujemy znane równania Eulera-Lagrange

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla w} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = 0. \quad (2.9)$$

Jeżeli $P > 0$, równanie (2.7) staje się równaniem nieparzystego rzędu ze względu na p w odniesieniu do argumentu czasu $t \in (t_0, t_1)$. Jeżeli nasze rozważania ograniczymy do liniowych cząstkowych równań różniczkowych, wówczas funkcję $\mathcal{L}$ będziemy mogli zastąpić wielomianem $\mathcal{P}$ przyjętym w postaci

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^P \sum_{k=0}^{\alpha} \tau^p K_{pk}(x) \cdot [(\nabla^{(k)} w^{(p)}) \otimes (\nabla^{(k)} w^{(p)})] + fw, \quad (2.10)$$

gdzie $K_{pk} \in HO_{\delta}^{\alpha}(\Omega, \Delta)$, $x \in \Omega$.

Równania opisujące zachowania analizowanej struktury będą miały wówczas postać

$$\sum_{p=0}^P \sum_{k=0}^{\alpha} (-1)^{k+1} \tau^{-p} \nabla^{(k)} \cdot \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \nabla^{(k)} w^{(p)}} = 0. \quad (2.11)$$

Powyższe równania możemy zapisać w postaci

$$Lw = f \quad (2.12)$$

gdzie

$$Lw = \sum_{p=0}^P \sum_{k=0}^{\alpha} (-1)^{k+1} \nabla^{(k)} \cdot [K_{pk}(x) \cdot \nabla^{(k)} w^{(p)}]. \quad (2.13)$$

Można zauważyć, że powyższe równania nie zależą od parametru τ .

Równania (2.9) i (2.11), będące podstawowymi równaniami opisującymi mikromechanikę rozpatrywanych ciał, posiadają silnie oscylujące i nieciągłe współczynniki. Stąd taki opis na poziomie mikro nie jest dobrym narzędziem do analizy początkowo-brzegowych zagadnień inżynierskich.

2.3.1. Model tolerancyjny

Dla uproszczenia nasze rozważania ograniczymy w poniższym podrozdziale do przypadku $\alpha = 1$. Przyjmijmy, że funkcje opisujące temperaturę lub przemieszczenia możemy przedstawić w postaci dekompozycji określonej wzorem (2.5). Niech $\tilde{h}^A(x, \cdot)$ i $\partial \tilde{h}^A(x, \cdot)$ będą odpowiednio periodycznymi przybliżeniami funkcji $h^A(\cdot)$, $\partial h^A(\cdot)$ w komórce $\Delta(x)$, $x \in \Omega$. Możemy stwierdzić, że periodyczne przybliżenia funkcji $w_h(\cdot, \xi)$ i $\nabla w_h(\cdot, \xi)$ w $\Delta(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, mają postać

$$\begin{aligned} \tilde{w}_h^{(0)}(x, z, \xi) &= u(x, \xi) + \tilde{h}^A(x, z) V_A(x, \xi), \\ \tilde{w}_h^{(1)}(x, z, \xi) &= \nabla u(x, \xi) + \partial \tilde{h}^A(x, z) V_A(x, \xi) + \tilde{h}^A(x, z) \bar{\nabla} V_A(x, \xi). \end{aligned} \quad (2.14)$$

dla prawie każdego $z \in \Delta(x)$ i każdego $\xi \in \Xi$.

Podstawiając $w = w_h$ do funkcji $\mathcal{L}$, zdefiniujemy $\mathcal{L}_h \equiv \mathcal{L}(z, \nabla w_h, w_h)$, $\mathcal{L}_h \in HO_\delta^0(\Omega, \Delta)$. Periodyczne przybliżenie funkcji $\mathcal{L}_h$ w każdej komórce $\Delta(x)$ zapiszemy jako $\tilde{\mathcal{L}}_h^{(0)}(x, z, \nabla w_h, w_h)$, $z \in \Delta(x)$. Biorąc pod uwagę wzory (2.14), periodyczne przybliżenie $\mathcal{L}_h$ zapiszemy w postaci

$$\tilde{\mathcal{L}}_h(x, z, \nabla u(x, \xi) + \partial \tilde{h}^A(x, z) V_A(x, \xi) + \tilde{h}^A(x, z) \bar{\nabla} V_A(x, \xi), u(x, \xi) + \tilde{h}^A(x, z) V_A(x, \xi)). \quad (2.15)$$

Tolerancyjne uśrednienie funkcji $\mathcal{L}_h$ będzie określone wzorem

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_h \rangle (x, \nabla u, u, \bar{\nabla} V_A, V_A) = \\ \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta(x)} \tilde{\mathcal{L}}_h(x, z, \nabla u(x, \xi) + \partial \tilde{h}^A(x, z) V_A(x, \xi) + \tilde{h}^A(x, z) \bar{\nabla} V_A(x, \xi), u(x, \xi) + \tilde{h}^A(x, z) V_A(x, \xi)) dz. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Funkcjonał

$$\mathcal{A}_h(u(\cdot), V_A(\cdot)) = \iint_{\Omega \Xi} \langle \mathcal{L}_h \rangle (x, \nabla u, \bar{\nabla} V_A, u, V_A) d\xi dx, \quad (2.17)$$

dla którego $\langle \mathcal{L}_h \rangle$ jest określone wzorem (2.15), będziemy nazywać tolerancyjnym uśrednieniem funkcyjonału $\mathcal{A}(w(\cdot))$ przy dekompozycji $w = w_h = u + h^A V_A$, gdzie $u(\cdot, \xi) \in SV_\delta^1(\Omega, \Delta)$, $V_A(\cdot, \xi) \in SV_\delta^1(\Omega, \Delta)$, $w_h(\cdot, \xi) \in TP_\delta^1(\Omega, \Delta)$, $\xi \in \Xi$.

W zagadnieniach opisanych równaniami Eulera-Lagrange równania uśrednione otrzymamy, stosując zasadę stacjonarności działania do uśrednionego funkcyjonału $\mathcal{A}_h$ określonego wzorem (2.17). Otrzymamy wówczas następujący układ równań

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial \nabla u} - \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial u} &= 0, \\ \bar{\nabla} \cdot \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial \bar{\nabla} V_A} - \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial V_A} &= 0, \quad A = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.18)$$

gdzie $u \in SV_\delta^1(\Omega, \Delta)$, $V_A \in SV_\delta^1(\Omega, \Delta)$ są podstawowymi niewiadomymi rozpatrywanego zagadnienia.

W zagadnieniach opisanych równaniami (2.11), w których występują składniki nieparzystego rzędu ze względu na p w odniesieniu do argumentu czasu $t \in (t_0, t_1)$, uśrednioną funkcję $\langle \mathcal{L}_h \rangle$ zastąpimy analogicznie uśrednionym wielomianem $\langle \mathcal{P}_h \rangle$. Uśrednione równania będą miały wówczas następującą postać

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{\partial \langle \mathcal{P}_h \rangle}{\partial \nabla u} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \langle \mathcal{P}_h \rangle}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial \langle \mathcal{P}_h \rangle}{\partial u} &= 0, \\ \bar{\nabla} \cdot \frac{\partial \langle \mathcal{P}_h \rangle}{\partial \bar{\nabla} V_A} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \langle \mathcal{P}_h \rangle}{\partial \dot{V}_A} - \frac{\partial \langle \mathcal{P}_h \rangle}{\partial V_A} &= 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

Równania (2.18) i (2.19) przedstawiają równania modelu tolerancyjnego przy dekompozycji (2.5). Należy zauważyć, że rozwiązania równań (2.18) lub (2.19) mają sens fizyczny, gdy parametr tolerancji δ występujący w definicjach funkcji wolno zmiennych jest dostatecznie mały. Weryfikacja tego warunku i ocena czy funkcje $u(\cdot, \xi) \in SV_\delta^1(\Omega, \Delta)$, $V_A(\cdot, \xi) \in SV_\delta^1(\Omega, \Delta)$ są wolno zmienne może nastąpić jedynie dopiero po rozwiązaniu problemu początkowo-brzegowego rozpatrywanego zagadnienia.

2.3.2. Model asymptotyczny

W celu zastosowania procedury asymptotycznej wprowadzimy parametr $\varepsilon = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$. Przypomnimy również, że jeżeli $f(\cdot) \in HO_\delta^\alpha(\Omega, \Delta)$, wtedy dla każdego $x \in \overline{\Omega}$ istnieje $\tilde{f}(x, z)$, $z \in \Delta(x)$, która będzie periodycznym przybliżeniem funkcji $f(\cdot)$ w $\Delta(x) \cap \overline{\Omega}$.

Niech $\Delta_\varepsilon \equiv \left(-\varepsilon \frac{\lambda_1}{2}, \varepsilon \frac{\lambda_1}{2}\right) \times \dots \times \left(-\varepsilon \frac{\lambda_m}{2}, \varepsilon \frac{\lambda_m}{2}\right)$ będzie ciągiem przewymiarowanych komórek, a $\Delta_\varepsilon(x) \equiv x + \Delta_\varepsilon$ ciągiem przewymiarowanych komórek o środku w $x \in \overline{\Omega}$.

Lagrangian $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\cdot, \nabla w, w) \in HO_\delta^0(\Omega, \Delta)$ występujący w procedurze modelowania jest funkcją silnie oscylującą w Ω . Przyjmujemy, że dla każdego $x \in \overline{\Omega}$ istnieje jego Δ -periodyczna aproksymacja $\tilde{\mathcal{L}}(x, z, \nabla w, w)$, $z \in \Delta_\varepsilon(x)$.

Podstawowym założeniem proponowanej procedury jest przyjęcie dekompozycji pola temperatury lub przemieszczeń w postaci rodziny funkcji

$$w_\varepsilon(x, z, \xi) = u(z, \xi) + \varepsilon \tilde{h}^A\left(x, \frac{z}{\varepsilon}\right) V_A(z, \xi), \quad z \in \Delta_\varepsilon(x), \quad \xi \in \Xi. \quad (2.20)$$

gdzie $\tilde{h}^A(x, \cdot)$ są periodycznymi aproksymacjami systemu liniowo niezależnych silnie oscylujących funkcji $h^A(\cdot) \in HO_\delta^1(\Omega, \Delta)$, $A = 1, 2, \dots, N$. Przypomnijmy, że funkcje te są znane w każdym rozpatrywanym zagadnieniu. Przyjmujemy również, że funkcje u , V^A są ciągłe, ograniczone wraz z ich pierwszymi pochodnymi w $\overline{\Omega}$. Formuła (2.20) będzie określana jako asymptotyczna dekompozycja pola $w(x, z, \xi)$, $z \in \Delta_\varepsilon(x)$, $\xi \in \Xi$. Z formuły (2.20) otrzymujemy

$$\nabla w_\varepsilon(x, z, \xi) = \nabla u(z, \xi) + \partial \tilde{h}^A\left(x, \frac{z}{\varepsilon}\right) v_A(z, \xi) + \varepsilon \tilde{h}^A\left(x, \frac{z}{\varepsilon}\right) \overline{\nabla} V_A(z, \xi), \quad z \in \Delta_\varepsilon(x) \quad (2.21)$$

dla dowolnego ale ustalonego $x \in \overline{\Omega}$.

Podstawową różnicą pomiędzy procedurą asymptotyczną przedstawioną w tym rozdziale a podejściem asymptotycznym użytym w teorii homogenizacji, Bensoussan i in. (1978), Jikov i in. (1994), jest założenie, że funkcje u , V^A , $A=1, \dots, N$ są niezależne od parametru ε . Pamiętając o własnościach wartości średniej, Jikov i in. (1994), funkcje $\tilde{h}^A\left(x, \frac{z}{\varepsilon}\right)$, $z \in \Delta_\varepsilon(x)$ mają słabą granicę przy przejściu $\varepsilon \rightarrow 0$. Przechodząc z $\varepsilon \rightarrow 0$ i pamiętając, że $z \in \Delta_\varepsilon(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} u(z, \xi) &= u(x, \xi) + O(\varepsilon), & \nabla u(z, \xi) &= \nabla u(x, \xi) + O(\varepsilon), \\ V_A(z, \xi) &= V_A(x, \xi) + O(\varepsilon), & \overline{\nabla} V_A(z, \xi) &= \overline{\nabla} V_A(x, \xi) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Uwzględniając (2.22), możemy przekształcić (2.20) i (2.21) do postaci

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(x, z, \xi) &= u(x, \xi) + O(\varepsilon), \\ \nabla w_\varepsilon(x, z, \xi) &= \nabla u(x, \xi) + \partial \tilde{h}^A\left(x, \frac{z}{\varepsilon}\right) v_A(x, \xi) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Przy przejściu z $\varepsilon \rightarrow 0$ składniki $O(\varepsilon)$ w wyrażeniach (2.22) i (2.23) będą pominięte.

Niech $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ będzie rodziną funkcji określoną przez

$$\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon = \tilde{\mathcal{L}}\left(x, \frac{z}{\varepsilon}, \nabla u(x, \xi), u(x, \xi), V_A(x, \xi)\right), \quad z \in \Delta_\varepsilon(x), \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (2.24)$$

Jeżeli $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ jest funkcją $\frac{z}{\varepsilon}$, $z \in \Delta_\varepsilon(x)$, pamiętając o własnościach wartości średniej, Jikov i in. (1994), przy przejściu z $\varepsilon \rightarrow 0$ funkcje $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ dążą słabo w $L_{loc}^\gamma(R^m)$, $\gamma \geq 1$ do

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(x, \nabla u(x, \xi), u(x, \xi), V_A(x, \xi)) &= \\ &= \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta(x)} \tilde{\mathcal{L}}\left(x, z, \nabla u(x, \xi) + \partial \tilde{h}^A(x, z) V_A(x, \xi), u(x, \xi)\right) dz, \quad x \in \overline{\Omega}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Formuła (2.25) będzie oznaczać wartość średnią lagrangianu dla uśredniania asymptotycznego.

W przypadku zagadnień, dla których można zastosować zasadę stacjonarności działania zdefiniujemy asymptotyczny funkcjonal działania jako

$$\mathcal{A}_h^0(u, V_A) = \iint_{\Omega \Xi} \mathcal{L}_0(x, \nabla u, u, V_A) d\xi dx. \quad (2.26)$$

gdzie $\mathcal{L}_0$ jest określone wyrażeniem (2.25). Zakładając, że $\partial \mathcal{L}_0 / \partial \nabla u$ jest ciągłą funkcją, otrzymujemy z zasady stacjonarności działania funkcjonału $\mathcal{A}_h^0(u, V_A)$ następujący układ równań

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \nabla u} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial V_A} &= 0, \quad A = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.27)$$

W zagadnieniach przewodzenia ciepła uśredniony lagrangian $\mathcal{L}_0$ zastąpimy analogicznie uśrednionym wielomianem $\mathcal{P}_0$, a uśrednione równania będą miały postać

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial \nabla u} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial V_A} &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Pamiętając, że funkcje $\tilde{h}^A(x, \cdot)$ w równaniach (2.20) są periodyczną aproksymacją przyjętych funkcji kształtu fluktuacji $h^A(\cdot)$, wnioskujemy, że funkcja $w(\cdot)$ przyjmuje postać

$$w(z, \xi) = u(z, \xi) + h^A(z) V_A(z, \xi). \quad (2.29)$$

Równania (2.27), (2.28) wraz z dekompozycją (2.29) przedstawiają system równań modelu asymptotycznego. Należy zauważyć, że w trakcie procedury uzyskiwania równań modelu asymptotycznego, w przeciwieństwie do modelu tolerancyjnego, nie przyjmowaliśmy założenia o wolnej zmienności funkcji $u(\cdot)$ i $V_A(\cdot)$. W przeciwieństwie do znanej homogenizacji asymptotycznej, Jikov i in. (1994), przedstawiona procedura nie wymaga rozwiązania zagadnienia na komórce. Rozwiązanie zagadnienia na komórce zastąpiono rozwiązaniem systemu liniowych równań algebraicznych dla wprowadzonych dodatkowych niewiadomych $V_A(\cdot)$, $A = 1, 2, \dots, N$. Rozwiązanie to można potraktować jako pewne przybliżenie rozwiązania zagadnienia na komórce.

3. Przewodzenie ciepła w materiałach o podłużnej gradacji makrowłasności

3.1. Przedmiot analizy

Materiały o funkcyjnej gradacji własności (FGM) są nową klasą kompozytów, w których odpowiedni układ składników wywołuje ciągłą i gładką zmianę makrowłasności kompozytu. Większość materiałów FGM ma stochastyczną mikrostrukturę, ale istnieją również sytuacje, jak w przypadku analizowanych przewodników, gdzie materiał FGM ma mikrostrukturę określoną w sposób deterministyczny. Rozważania poniższe są ograniczone do sztywnych przewodników wykonanych z dwuskładnikowego kompozytu mającego mikro-uwarstwienia. Przykłady tego rodzaju przewodników są pokazane na rys. 3.1. Cechą charakterystyczną rozpatrywanych przewodników jest to, że mają one mikroperiodyczną budowę wzdłuż wybranego kierunku i wolno zmienne uśrednione własności efektywne wzdłuż kierunku prostopadłego. Można zauważyć, że efektywne własności rozpatrywanego kompozytu są wolno zmienne wzdłuż jego uwarstwienia. Tego typu kompozyty nazywać będziemy materiałami o *podłużnej gradacji własności*. Funkcyjna zmienność efektywnych własności może być wywołana przez wolno zmienną grubość uwarstwienia (rys. 3.1a), jak również krzywoliniowym kształtem rozpatrywanej struktury (rys. 3.1b). Stąd szczegółowa analiza będzie dotyczyć oddzielnie obydwu wymienionych przypadków.

W przypadku przewodnika przedstawionego na rys. 3.1a w obszarze $\Omega = (-h_1, h_1) \times (0, h_2)$ zajmowanym przez przewodnik wprowadzimy ortogonalny układ współrzędnych Ox_1x_2 . Definiując komórkę $\Delta = [-\lambda/2, \lambda/2] \times \{0\}$, przyjmiemy, że $\lambda/h_1 \ll 1$ i $\lambda/h_2 \ll 1$. Operator uśredniania (2.5) przyjmie postać

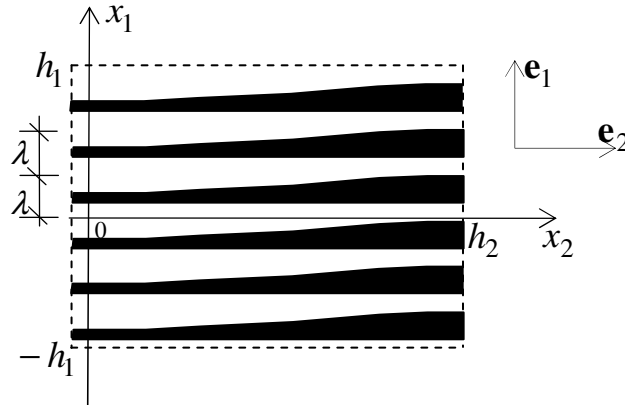
$$\langle f \rangle(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda} \int_{x_1 - \lambda/2}^{x_1 + \lambda/2} f(y, x_2) dy, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\Delta}. \quad (3.1)$$

gdzie $\Omega_{\Delta} = (-h_1 + \lambda/2, h_1 - \lambda/2) \times (0, h_2)$.

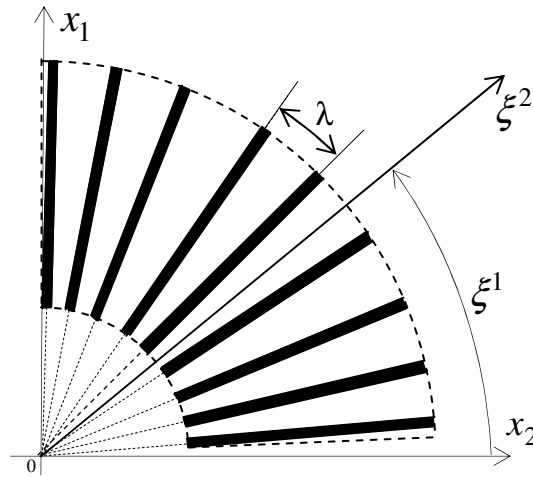
Grubość jednorodnych warstw oznaczmy przez $\lambda' = \lambda'(x_2)$, $\lambda'' = \lambda''(x_2)$, przy czym $c', \mathbf{K}'$ oznaczają odpowiednio ciepło właściwe i tensor przewodzenia

ciepła w warstwie λ' , zaś c'' , $\mathbf{K}''$ oznaczają odpowiednie własności w warstwie λ'' . Poza tym przyjmiemy, że udziały objętościowe poszczególnych składników $v'(x_2) = \lambda'(x_2)/\lambda$, $v''(x_2) = \lambda''(x_2)/\lambda$ spełniają warunki $\lambda \partial_2 \lambda'(x_2) \ll 1$, $\lambda \partial_2 \lambda''(x_2) \ll 1$. Bezwymiarowa funkcja $v = \sqrt{v'v''} \in [0, 0.5]$ będzie traktowana jako wskaźnik niejednorodności.

a)



b)



Rys. 3.1. Fragment przekroju poprzecznego przykładowych przewodników o podłużnej gradacji własności

W przypadku przewodnika cylindrycznego pokazanego na rys. 3.1b wprowadzimy biegunowy układ współrzędnych $(\xi^1, \xi^2) \in [0, \alpha] \times [R_0, R_k]$.

Dowolna komórka o środku w punkcie (ξ^1, ξ^2) będzie określana jako $\Delta(\xi^1, \xi^2) = (\xi^1 - \lambda/2, \xi^1 + \lambda/2) \times \{\xi^2\}$, gdzie λ , $0 < \lambda < \alpha$, jest znanym bezwymiarowym parametrem mikrostruktury. Grubości jednorodnych warstw są określone jako $\xi^2 \lambda'(\xi^2)$ i $\xi^2 \lambda''(\xi^2)$, gdzie $\lambda'(\xi^2) + \lambda''(\xi^2) = \lambda$. Udział objętościowy poszczególnych warstw wynosi $v'(\xi^2) = \lambda'(\xi^2)/\lambda$ i $v''(\xi^2) = \lambda''(\xi^2)/\lambda$, a $v = \sqrt{v'v''} \in [0, 0.5]$ jest parametrem rozkładu mikrostruktury. Operator uśredniania (2.5) dla przewodnika cylindrycznego przyjmie postać

$$\langle f \rangle(\xi^1, \xi^2) = \frac{1}{\lambda} \int_{\xi^1 - \lambda/2}^{\xi^1 + \lambda/2} f(\eta, \xi^2) d\eta, \quad (3.2)$$

gdzie $\xi^1 \in [\lambda/2, \xi_1^1 - \lambda/2]$, $\xi^2 \in [R_0, R_k]$.

Oznaczając $\partial_k = \partial / \partial \xi^k$, zdefiniujmy operatory różniczkowania dla kartezjańskiego układu współrzędnych $\nabla \equiv (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$, $\partial \equiv (\partial_1, 0, 0)$, $\bar{\nabla} \equiv (0, \partial_2, \partial_3)$. Dla walcowego układu współrzędnych gradient ∇ oznacza pochodną kowariantną względem współrzędnych ξ^k , $k=1,2,3$, a gradient $\bar{\nabla}$ pochodną kowariantną względem współrzędnych ξ^α , $\alpha=2,3$.

Zagadnienia przewodzenia ciepła rozpatrywane poniżej są opisane przez dobrze znane prawo Fouriera

$$\nabla \cdot (\mathbf{K} \cdot \nabla \theta) - c \dot{\theta} = f, \quad (3.3)$$

gdzie $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$, $t \in (t_0, t_1)$ jest polem temperatury, c – ciepłem właściwym, $\mathbf{K}$ – tensorem przewodzenia ciepła i f – znaną intensywnością źródeł ciepła. Równanie (3.3) obowiązuje w każdym punkcie należącym do $\Omega \setminus \Gamma$, gdzie Γ jest powierzchnią kontaktu pomiędzy składnikami kompozytu. Równocześnie obowiązuje warunek ciągłości strumienia ciepła w kierunku prostopadłym do powierzchni kontaktu Γ . Funkcje $c, \mathbf{K}$ są funkcjami λ -periodycznymi dla każdego $x_2 \in (0, h_2)$ i przyjmują stałe wartości $c', \mathbf{K}'$ w Ω' , oraz $c'', \mathbf{K}''$ w Ω'' .

Definiując analogicznie do (2.10) wielomian

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}(\tau c \dot{\theta} \dot{\theta} + \nabla \theta \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \theta) + f \theta, \quad (3.4)$$

równania przewodzenia ciepła (3.3) możemy przedstawić w postaci

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \nabla \theta} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} = 0. \quad (3.5)$$

Współczynniki w równaniach (3.3), (3.5) są wyrażone przez nieciągłe i silnie oscylujące funkcje. Stąd bezpośrednie zastosowanie tych równań do rozwiązywania zagadnień inżynierskich i obliczeń numerycznych jest zbyt skomplikowane.

3.2. Model tolerancyjny

W celu otrzymania uśrednionych równań opisujących przewodzenie ciepła w rozpatrywanych przewodnikach zastosujemy do równań (3.5) opisanych wielomianem $\mathcal{P}$ technikę tolerancyjnej aproksymacji. Technika ta może być użyta do uśredniania wielomianu (3.4) po zastosowaniu dekompozycji (2.5) dla pola temperatury $\theta(\mathbf{x}, t)$. Rozważania nasze będą ograniczone do pola temperatury określonej przez

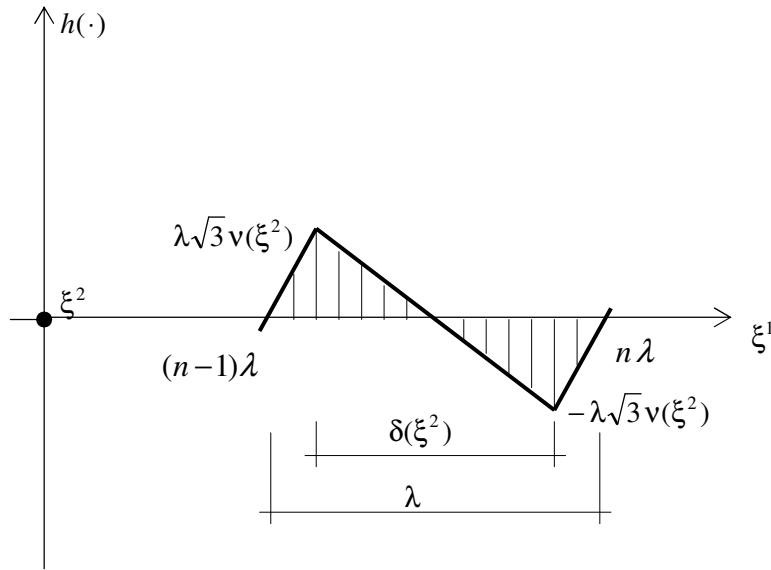
$$\theta(\mathbf{x}, t) = \vartheta(\mathbf{x}, t) + h(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}, t), \quad (3.6)$$

gdzie $\vartheta(\cdot, \xi^2, t) \in SV_\delta^1(\Omega, \Delta)$, $\psi(\cdot, \xi^2, t) \in SV_\delta^1(\Omega, \Delta)$, dla każdej chwili $t \in (t_0, t_1)$. Uśredniona temperatura $\vartheta(\cdot)$ i amplituda fluktuacji temperatury $\psi(\cdot)$ są podstawowymi niewiadomymi modelu tolerancyjnego. Znana funkcja kształtu fluktuacji temperatury $h(\mathbf{x})$ jest periodyczną funkcją (o okresie λ) współrzędnej ξ^1 , zależną od współrzędnej ξ^2 . Funkcja kształtu oscylacji temperatury, wywołanej nieciągłościami współczynników w równaniu (3.3), jest przyjeta w następującej postaci (rys. 3.2)

$$h(\cdot) = \begin{cases} \lambda \nu(\xi^2) \sqrt{3} \frac{\lambda + 2(y - \xi^1)}{\lambda - \delta(\xi^2)} & y \in \langle \xi^1 - \lambda/2; \xi^1 - \delta/2 \rangle, \\ -\lambda \nu(\xi^2) \sqrt{3} \frac{2(y - \xi^1)}{\delta(\xi^2)} & y \in \langle \xi^1 - \delta/2; \xi^1 + \delta/2 \rangle, \\ -\lambda \nu(\xi^2) \sqrt{3} \frac{\lambda - 2(y - \xi^1)}{\lambda - \delta(\xi^2)} & y \in \langle \xi^1 + \delta/2; \xi^1 + \lambda/2 \rangle. \end{cases} \quad (3.7)$$

Równania modelu tolerancyjnego zostaną uzyskane w wyniku uśrednienia wielomianu (3.4). Podstawiając dekompozycję pola temperatury (3.6) do wyrażenia (3.4) i korzystając z techniki tolerancyjnej aproksymacji, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{P} \rangle = & \frac{1}{2} (\nabla \vartheta \cdot \langle \mathbf{K} \rangle \cdot \nabla \vartheta + \psi \langle \partial h \cdot \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \psi + \bar{\nabla} \psi \cdot \langle \mathbf{K} h^2 \rangle \cdot \bar{\nabla} \psi + \\
& + 2 \nabla \vartheta \cdot \langle \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \psi + 2 \nabla \vartheta \cdot \langle h \cdot \mathbf{K} \rangle \cdot \bar{\nabla} \psi + 2 \psi \langle \partial h \cdot \mathbf{K} \cdot h \rangle \cdot \bar{\nabla} \psi + \\
& + \tau \langle c \rangle \dot{\vartheta} + \tau \langle c h^2 \rangle \dot{\psi} + 2 \langle c h \rangle \dot{\vartheta} \dot{\psi} + \langle f \rangle \vartheta + \langle f h \rangle \psi.
\end{aligned} \quad (3.8)$$



Rys. 3.2. Wykres periodycznej funkcji kształtu $h(\cdot, \xi^2)$ dla dowolnego $\xi^2 \in [R_0, R_k]$

Zapisując równania (2.11) dla rozpatrywanego przewodnika

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \frac{\partial \langle \mathcal{P} \rangle}{\partial \nabla \vartheta} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \langle \mathcal{P} \rangle}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial \langle \mathcal{P} \rangle}{\partial \vartheta} &= 0, \\
\bar{\nabla} \cdot \frac{\partial \langle \mathcal{P} \rangle}{\partial \bar{\nabla} \psi} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \langle \mathcal{P} \rangle}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial \langle \mathcal{P} \rangle}{\partial \psi} &= 0,
\end{aligned} \quad (3.9)$$

otrzymujemy z wyrażenia (3.8) następujące uśrednione równania dla $\vartheta(\cdot)$ i $\psi(\cdot)$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\langle \mathbf{K} \rangle \cdot \nabla \vartheta + \langle \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \cdot \psi + \langle \mathbf{K} \cdot h \rangle \cdot \bar{\nabla} \psi) - \langle c \rangle \dot{\vartheta} - \langle c h \rangle \dot{\psi} &= \langle f \rangle, \\
\bar{\nabla} \cdot (\langle \mathbf{K} \cdot h \rangle \cdot \nabla \vartheta + \langle \partial h \cdot \mathbf{K} \cdot h \rangle \cdot \psi + \langle h \cdot \mathbf{K} \cdot h \rangle \cdot \bar{\nabla} \psi) - \\
- \langle \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \cdot \nabla \vartheta - \langle \partial h \cdot \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \cdot \psi - \langle \partial h \cdot \mathbf{K} \cdot h \rangle \cdot \bar{\nabla} \psi - \langle c h \rangle \dot{\vartheta} - \langle c h^2 \rangle \dot{\psi} &= \langle f h \rangle
\end{aligned} \quad (3.10)$$

Powyższe równania dla funkcji kształtu określonej wzorem (3.7) (antysymetrycznej względem środka komórki) przyjmują postać

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\langle \mathbf{K} \rangle \cdot \nabla \vartheta + \langle \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \cdot \psi) - \langle c \rangle \dot{\vartheta} &= \langle f \rangle, \\ \bar{\nabla} \cdot (\langle h \cdot \mathbf{K} \cdot h \rangle \cdot \bar{\nabla} \psi) - \langle \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \cdot \nabla \vartheta - \langle \partial h \cdot \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \cdot \psi - \langle ch^2 \rangle \dot{\psi} &= \langle fh \rangle.\end{aligned}\quad (3.11)$$

W przypadku diagonalnej postaci tensora przewodzenia ciepła w obydwu składnikach kompozytu

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

i wprowadzając oznaczenia

$$\begin{aligned}\langle c \rangle(\xi^2) &= v'(\xi^2)c' + v''(\xi^2)c'', & \langle \mathbf{K} \rangle(\xi^2) &= v'(\xi^2)\mathbf{K}' + v''(\xi^2)\mathbf{K}'', \\ [\mathbf{k}] &= 2\sqrt{3}v(\xi^2)(\mathbf{K}' - \mathbf{K}'') \cdot \mathbf{e}_1, & \{k\} &= 12\mathbf{e}_1(v''(\xi^2)\mathbf{K}' - v'(\xi^2)\mathbf{K}'') \cdot \mathbf{e}_1.\end{aligned}\quad (3.13)$$

otrzymamy, przy braku źródeł ciepła, następującą postać równań przewodzenia ciepła dla przewodnika z materiału o podłużnej gradacji własności

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\langle \mathbf{K} \rangle \cdot \nabla \vartheta + [\mathbf{k}]\psi) - \langle c \rangle \dot{\vartheta} &= 0, \\ (\lambda v)^2 (\bar{\nabla} \cdot (\langle \mathbf{K} \rangle \cdot \bar{\nabla} \psi) - \langle c \rangle \dot{\psi}) - \{k\}\psi - v^2[\mathbf{k}]\partial \vartheta &= 0.\end{aligned}\quad (3.14)$$

Współczynniki w powyższych równaniach są opisane gładkimi, ciągłymi funkcjami w przeciwieństwie do równań (3.3) o silnie oscylujących i nieciągłych współczynnikach. Ponieważ równania proponowanego modelu mają funkcyjne współczynniki, stąd rozwiązania dla większości zagadnień początkowo-brzegowych muszą być otrzymane z użyciem metod numerycznych.

Równania (3.10), (3.11) lub (3.14) wraz z dekompozycją pola temperatury (3.6) tworzą tolerancyjny model przewodzenia ciepła w przewodnikach z materiału o podłużnej gradacji własności, w którym zmiana efektywnych własności następuje w wybranym kierunku osi – ξ^2 .

Podstawowe wielkości opisujące pola temperatury muszą być funkcjami wolno zmiennymi $\vartheta(\cdot, \xi^2, t) \in SV_\delta^1(\Omega, \Delta)$, $\psi(\cdot, \xi^2, t) \in SV_\delta^1(\Omega, \Delta)$ i warunek ten może być zweryfikowany a posteriori.

3.3. Model asymptotyczny

Model asymptotyczny, podobnie jak model tolerancyjny, zbudujemy dla zagadnień przewodzenia ciepła opisanych równaniem Fouriera (3.3). Uśrednione równania przewodzenia ciepła otrzymamy, uśredniając wielomian $\mathcal{P}$ – wzór (3.4).

Wielomian $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\cdot, \theta, \dot{\theta}, \nabla \theta) \in HO_\delta^0(\Omega, \Delta)$ występujący w procedurze modelowania jest funkcją silnie oscylującą w Ω .

Niech $\Delta_\varepsilon = (-\varepsilon\lambda/2, \varepsilon\lambda/2)$ będzie ciągiem komórek bazowych, a $\Delta_\varepsilon(\xi^i) = \xi^i + \Delta_\varepsilon$ ciągiem komórek o środku w $\xi^i \in \Omega$. Przyjmijmy, że dla każdego $\xi^i \in \Omega$ istnieje Δ – periodyczna aproksymacja $\tilde{\mathcal{P}}(y, \xi^\alpha, \theta, \dot{\theta}, \nabla \theta)$, $y \in \Delta_\varepsilon(\xi^i)$ wielomianu $\mathcal{P}$.

Wyjściowym założeniem modelowania asymptotycznego jest dekompozycja pola temperatury

$$\theta_\varepsilon(y, \xi^\alpha, t) = \vartheta(y, \xi^\alpha, t) + \varepsilon \tilde{h}\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^\alpha\right) \psi(y, \xi^\alpha, t), \quad y \in \Delta_\varepsilon(\xi^i), \quad t \in (t_0, t_1), \quad (3.15)$$

gdzie $\tilde{h}(\cdot, \xi^\alpha)$ jest periodyczną aproksymacją silnie oscylującej funkcji $h(\cdot) \in HO_\delta^1(\Omega, \Delta)$. Z formuły (3.15) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \nabla \theta_\varepsilon(y, \xi^\alpha, t) &= \nabla \vartheta(y, \xi^\alpha, t) + \partial \tilde{h}\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^\alpha\right) \psi(y, \xi^\alpha, t) + \varepsilon \tilde{h}\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^\alpha\right) \bar{\nabla} \psi(y, \xi^\alpha, t), \\ \dot{\theta}_\varepsilon(y, \xi^\alpha, t) &= \dot{\vartheta}(y, \xi^\alpha, t) + \varepsilon \tilde{h}\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^\alpha\right) \dot{\psi}(y, \xi^\alpha, t), \quad y \in \Delta_\varepsilon(\xi^i), \end{aligned} \quad (3.16)$$

Przechodząc z $\varepsilon \rightarrow 0$ i pamiętając, że $y \in \Delta_\varepsilon(\xi^i)$, $\xi^i \in \bar{\Omega}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \vartheta(y, \xi^\alpha, t) &= \vartheta(\xi^i, t) + O(\varepsilon), & \nabla \vartheta(y, \xi^\alpha, t) &= \nabla \vartheta(\xi^i, t) + O(\varepsilon), \\ \psi(y, \xi^\alpha, t) &= \psi(\xi^i, t) + O(\varepsilon), & \bar{\nabla} \psi(y, \xi^\alpha, t) &= \bar{\nabla} \psi(\xi^i, t) + O(\varepsilon), \\ \dot{\vartheta}(y, \xi^\alpha, t) &= \dot{\vartheta}(\xi^i, t) + O(\varepsilon), & \dot{\psi}(y, \xi^\alpha, t) &= \dot{\psi}(\xi^i, t) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Niech $\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon$ będzie rodziną wielomianów określonych przez

$$\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^\alpha, \theta, \dot{\theta}, \nabla \theta\right), \quad (3.18)$$

Biorąc pod uwagę (3.17) i podstawiając prawe strony wyrażeń (3.16) do (3.18), otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^\alpha, \vartheta\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^\alpha, t\right) + O(\varepsilon), \dot{\vartheta}\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^\alpha, t\right) + O(\varepsilon), \nabla \vartheta\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^\alpha, t\right) + \partial \tilde{h}\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^\alpha\right) \psi\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^\alpha, t\right) \right. \\ & \left. + O(\varepsilon)\right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

Przy przejściu z $\varepsilon \rightarrow 0$ składniki $O(\varepsilon)$ w wyrażeniach (3.16), (3.17) mogą być pominięte. Pamiętając o własnościach wartości średniej, Jikov i in. (1994), przy przejściu z $\varepsilon \rightarrow 0$ funkcje $\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon$ dążą słabo w $L^{\gamma}_{loc}(R^m)$, $\gamma \geq 1$ do

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_0(\xi^i, \vartheta(\xi^i, t), \dot{\vartheta}(\xi^i, t), \nabla \vartheta(\xi^i, t), \psi(\xi^i, t)) = \\ & = \frac{1}{|\Delta|_{\Delta(x)}} \int \tilde{\mathcal{P}}(y, \xi^\alpha, \vartheta(\xi^i, t), \dot{\vartheta}(\xi^i, t), \nabla \vartheta(\xi^i, t) + \partial \tilde{h}(y, \xi^\alpha) \psi(\xi^i, t)) dy, \quad \xi^\alpha \in \overline{\Omega}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Po zastosowaniu formuły (3.20) do wielomianu (3.4) otrzymujemy $\mathcal{P}_0$ w następującej jawnej postaci

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_0(\xi^i, \vartheta(\xi^i, t), \dot{\vartheta}(\xi^i, t), \nabla \vartheta(\xi^i, t), \psi(\xi^i, t)) = \\ & \quad \frac{1}{2}(\nabla \vartheta \cdot \langle \mathbf{K} \rangle \cdot \nabla \vartheta + \psi \langle \partial h \cdot \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \psi + 2 \nabla \vartheta \cdot \langle \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \psi + \\ & \quad + \tau \langle c \rangle \dot{\vartheta} \dot{\vartheta}) + \langle f \rangle \vartheta. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Zapisując równania (2.28) dla rozpatrywanego przewodnika

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial \nabla \vartheta} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial \psi} = 0, \\ & \frac{\partial \mathcal{P}_0}{\partial \psi} = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

otrzymujemy z wyrażenia (3.21) następujące uśrednione równania dla modelu asymptotycznego

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (\langle \mathbf{K} \rangle \cdot \nabla \vartheta + \langle \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \cdot \psi) - \langle c \rangle \dot{\vartheta} = \langle f \rangle, \\ & \langle \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \cdot \nabla \vartheta + \langle \partial h \cdot \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle \cdot \psi = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Wyznaczając z równania (3.23)₂

$$\psi = - \frac{\langle \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle}{\langle \partial h \cdot \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle} \nabla \vartheta, \quad (3.24)$$

otrzymujemy równanie dla uśrednionej temperatury $\vartheta(\xi^i, t)$

$$\nabla((\langle \mathbf{K} \rangle - \frac{(\langle \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle)^2}{\langle \partial h \cdot \mathbf{K} \cdot \partial h \rangle}) \nabla \vartheta) - \langle c \rangle \dot{\vartheta} = \langle f \rangle. \quad (3.25)$$

W przypadku diagonalnej postaci tensora przewodzenia ciepła (wyrażenie (3.12)), wprowadzając oznaczenie

$$k^h \equiv \frac{k'_{11} k''_{11}}{v' k''_{11} + v'' k'_{11}}, \quad (3.26)$$

otrzymujemy po przekształceniach następujące równanie dla uśrednionej temperatury

$$\bar{\nabla} \cdot (\langle \mathbf{K} \rangle \cdot \bar{\nabla} \vartheta) + \partial \cdot (k^h \partial \vartheta) - \langle c \rangle \dot{\vartheta} = 0. \quad (3.27)$$

Pole temperatury określone równaniem (3.6) dla modelu asymptotycznego przyjmuje postać

$$\theta(\xi^i, t) = \vartheta(\xi^i, t) - \frac{\sqrt{3}(k'_1 - k''_1)v}{6(v'k''_1 + v''k'_1)} h(\xi^i) \partial \vartheta(\xi^i, t). \quad (3.28)$$

Równania (3.27) wraz z wyrażeniem (3.28) przedstawiają asymptotyczny model przewodzenia ciepła w rozpatrywanych przewodnikach wykonanych z materiału o podłużnej gradacji makrowłasności.

3.4. Wybrane zagadnienia przewodzenia ciepła

3.4.1. Stacjonarne zagadnienia przewodzenia ciepła

3.4.1.1. Równania przewodzenia ciepła

Analiza stacjonarnego zagadnienia przewodzenia ciepła zostanie przeprowadzona dla mikroniejednorodnego wydrążonego przewodnika cylindrycznego. Rozpatrywany przewodnik jest wykonany z dwóch jednorodnych składników. Przekrój poprzeczny rozpatrywanego przewodnika jest pokazany na rys. 3.3. W celu ułatwienia naszych rozważań analizę ograniczymy do płaskiego zagadnienia przewodzenia ciepła. Wprowadźmy walcowy układ współrzędnych $O\xi^1\xi^2\xi^3$, gdzie oznaczmy $\xi^1 = \varphi$, $\xi^2 = \rho$ i $\xi^3 = z$. Pionowa kreska przed wskaźnikami będzie oznaczać pochodną kowariantną, indeksy $i, j = 1, 2, 3$ oraz $\alpha, \beta = 2, 3$.

Model tolerancyjny

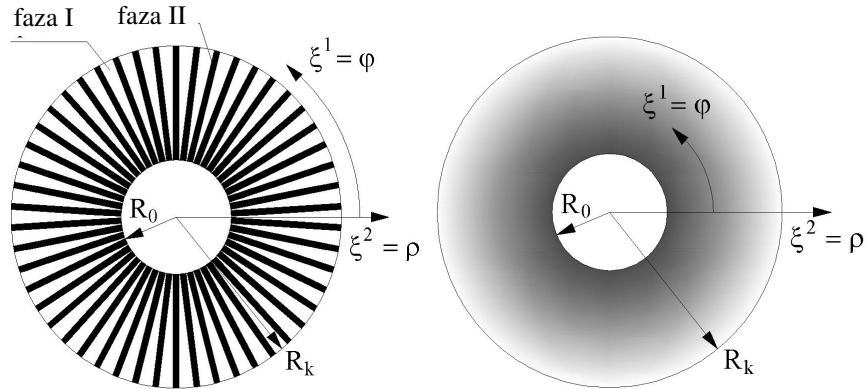
Równania przewodzenia ciepła (3.11), przy przyjęciu funkcji kształtu określonej wzorem (3.7), będą miały dla przewodnika cylindrycznego postać

$$\begin{aligned} \langle k^{ij} \rangle \cdot \vartheta_{|j} + \langle k^{i1} \cdot \partial h \rangle \cdot \psi_{|i} &= 0, \\ \langle k^{\alpha\beta} h h \rangle \cdot \psi_{|\beta} \Big|_{\alpha} - \langle k^{1j} \cdot \partial h \rangle \cdot \vartheta_{|j} - \langle \partial h \cdot k^{11} \cdot \partial h \rangle \psi &= 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \langle k^{ij} \rangle(\xi^2) &= (k^{ij})' \cdot \mathbf{v}'(\xi^2) + (k^{ij})'' \cdot \mathbf{v}''(\xi^2), \\ \langle k^{i1} \partial h \rangle(\xi^2) &= 2\sqrt{3} \mathbf{v}(\xi^2) [(k^{i1})' - (k^{i1})''], \\ \langle \partial h k^{11} \partial h \rangle(\xi^2) &= 12 \left((k^{11})'' \cdot \mathbf{v}'(\xi^2) + (k^{11})' \cdot \mathbf{v}''(\xi^2) \right) / \mathbf{v}^2, \\ \langle k^{ij} h h \rangle(\xi^2) &= (\lambda)^2 \langle k^{ij} \rangle. \end{aligned} \quad (3.30)$$

W powyższych wyrażeniach określających uśrednione moduły: $(k^{ij})'$ oznaczają własności dla matrycy i $(k^{ij})''$ własności dla żebra.



Rys. 3.3. Przekrój poprzeczny przewodnika cylindrycznego z materiału o podłużnej gradacji własności; w skali mikro (z lewej), w skali makro (z prawej), Ostrowski, Michałak (2011)

Ograniczmy nasze rozważania do płaskiego zagadnienia przewodzenia ciepła. Korzystając z definicji pochodnej kowariantnej w układzie walcowym i oznaczając składowe fizyczne tensora przewodzenia ciepła $k_1 = k^{<11>} = \rho^2 k^{11}$,

$k_{12} = k^{<12>} = \rho k^{12}$, $k_2 = k^{<22>} = k^{22}$, otrzymamy następujący układ uśrednionych równań przewodzenia ciepła

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi \left[\langle k_1 \rangle \cdot \partial_\varphi \vartheta + \langle k_1 \partial_\varphi h \rangle \cdot \Psi + \rho \cdot \langle k_{12} \rangle \cdot \partial_\rho \vartheta \right] + \\ & + \frac{1}{\rho} \cdot \partial_\rho \left[\langle k_{12} \rangle \cdot \partial_\varphi \vartheta + \langle k_{12} \partial_\varphi h \rangle \cdot \Psi + \rho \cdot \langle k_2 \rangle \cdot \partial_\rho \vartheta \right] = 0, \\ & \partial_\rho \left(\langle k_2 h h \rangle \cdot \partial_\rho \Psi \right) - \frac{1}{\rho^2} \left[\langle k_1 \partial_\varphi h \rangle \cdot \partial_\varphi \vartheta + \langle k_1 \partial_\varphi h \partial_\varphi h \rangle \cdot \Psi + \rho \cdot \langle k_{12} \partial_\varphi h \rangle \cdot \partial_\rho \vartheta \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Równania (3.31) opisują płaskie zagadnienia przewodzenia ciepła dla modelu tolerancyjnego.

Model asymptotyczny

Równania modelu asymptotycznego otrzymamy z równań (3.25), analogicznie jak równania modelu tolerancyjnego

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi \left[\langle k_1 \rangle \cdot \partial_\varphi \vartheta + \langle k_1 \partial_\varphi h \rangle \cdot \Psi + \rho \cdot \langle k_{12} \rangle \cdot \partial_\rho \vartheta \right] + \\ & + \frac{1}{\rho} \cdot \partial_\rho \left[\langle k_{12} \rangle \cdot \partial_\varphi \vartheta + \langle k_{12} \partial_\varphi h \rangle \cdot \Psi + \rho \cdot \langle k_2 \rangle \cdot \partial_\rho \vartheta \right] = 0, \\ & \frac{1}{\rho^2} \left[\langle k_1 \partial_\varphi h \rangle \cdot \partial_\varphi \vartheta + \langle k_1 \partial_\varphi h \partial_\varphi h \rangle \cdot \Psi + \rho \cdot \langle k_{12} \partial_\varphi h \rangle \cdot \partial_\rho \vartheta \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Wyznaczając z równań (3.32) funkcję amplitudy fluktuacji temperatury

$$\Psi = - \frac{\langle k_1 \partial_\varphi h \rangle}{\langle k_1 \partial_\varphi h \partial_\varphi h \rangle} \partial_\varphi \vartheta - \frac{\rho \cdot \langle k_{12} \partial_\varphi h \rangle}{\langle k_1 \partial_\varphi h \partial_\varphi h \rangle} \partial_\rho \vartheta, \quad (3.33)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi \left[\left(\langle k_1 \rangle - \frac{\langle k_1 \partial_\varphi h \rangle^2}{\langle k_1 \partial_\varphi h \partial_\varphi h \rangle} \right) \cdot \partial_\varphi \vartheta + \rho \cdot \left(\langle k_{12} \rangle - \frac{\langle k_1 \partial_\varphi h \rangle \langle k_{12} \partial_\varphi h \rangle}{\langle k_1 \partial_\varphi h \partial_\varphi h \rangle} \right) \cdot \partial_\rho \vartheta \right] + \\ & \frac{1}{\rho} \partial_\rho \left[\left(\langle k_{12} \rangle - \frac{\langle k_1 \partial_\varphi h \rangle \langle k_{12} \partial_\varphi h \rangle}{\langle k_1 \partial_\varphi h \partial_\varphi h \rangle} \right) \cdot \partial_\varphi \vartheta + \rho \cdot \left(\langle k_2 \rangle - \frac{\langle k_{12} \partial_\varphi h \rangle^2}{\langle k_1 \partial_\varphi h \partial_\varphi h \rangle} \right) \cdot \partial_\rho \vartheta \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Pole całkowitej temperatury jest określone wzorem

$$\theta(\xi^i, t) = \vartheta(\xi^i, t) - h(\xi^i) \left(\frac{\langle k_1 \partial_\varphi h \rangle}{\langle k_1 \partial_\varphi h \partial_\varphi h \rangle} \partial_\varphi \vartheta + \frac{\rho \cdot \langle k_{12} \partial_\varphi h \rangle}{\langle k_1 \partial_\varphi h \partial_\varphi h \rangle} \partial_\rho \vartheta \right). \quad (3.35)$$

Równanie (3.34) wraz z wyrażeniem (3.35) opisują model asymptotyczny płaskiego zagadnienia przewodzenia ciepła w rozpatrywanym przewodniku cylindrycznym o funkcyjnej gradacji własności.

3.4.1.2. Przykłady przewodzenia ciepła

Równania proponowanych modeli przewodzenia ciepła w rozpatrywanym przewodniku mikroniejednorodnym mają ciągłe, gładkie współczynniki funkcyjne, stąd w większości przypadków do rozwiązania zagadnień brzegowo-początkowych muszą być użyte metody numeryczne. W przedstawionych poniżej przykładach do rozwiązania równań wykorzystano metodę różnic skończonych. Wyniki przedstawionych przykładów zaczerpnięto z pracy Ostrowskiego (2010).

Przykład 1

W celu oceny poprawności przyjętego modelu matematycznego przewodzenia ciepła w przewodnikach wykonanych z materiału FGM oraz poprawności sposobu rozwiązania z wykorzystaniem metody różnic skończonych porównano dla prostego przypadku jednokierunkowego przepływu ciepła trzy rozwiązania: a) rozwiązanie analityczne modelu tolerancyjnego (AS), b) rozwiązanie równań modelu tolerancyjnego metodą różnic skończonych (FDM), c) rozwiązanie dla rzeczywistego przewodnika o budowie mikroniejednorodnej metodą elementów skończonych (FEM).

Rozpatrzmy dwuskładnikowy przewodnik (rys. 3.3), którego każdy ze składników jest izotropowy ($k^{11} = k^{22} = k$, $k^{12} = 0$). Wartości współczynnika przewodzenia ciepła będą wynosić dla matrycy $k' = 58 \text{ W/mK}$, dla żeber $k'' = 0.045 \text{ W/mK}$. Stała szerokość żeber wynosi $\delta = 0.05 \text{ m}$. Obszar przewodnika podzielono na 60 komórek ($\lambda = 0.105 \text{ rd}$).

Równania (3.31) modelu tolerancyjnego dla zagadnienia jednokierunkowego mają postać

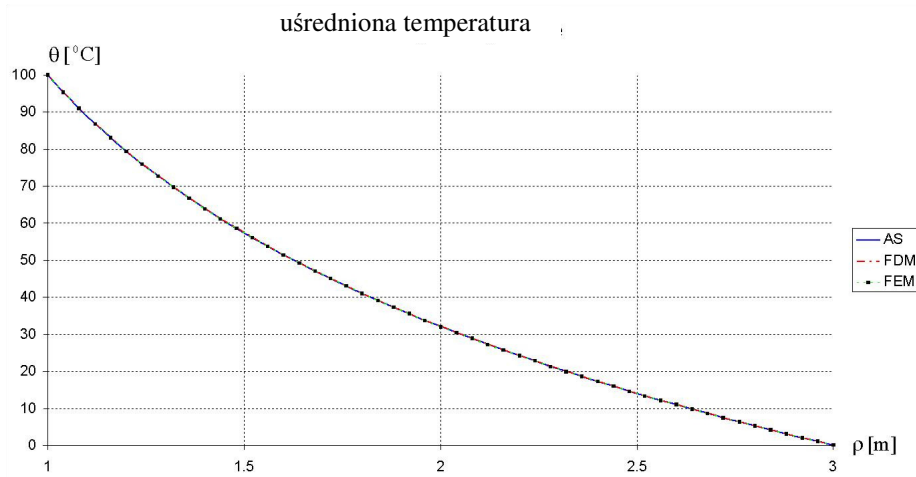
$$\begin{aligned} \partial_\rho [\rho \cdot \langle k \rangle \cdot \partial_\rho \vartheta] &= 0, \\ \partial_\rho (\langle k_2 h h \rangle \cdot \partial_\rho \psi) - \frac{1}{\rho^2} [\langle k_1 \partial_\varphi h \partial_\varphi h \rangle \cdot \psi] &= 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

W rozpatrywanych zagadnieniach będziemy przyjmować warunki brzegowe I rodzaju (Taler i Duda (2003)) w postaci zadanego rozkładu temperatury na brzegach przewodnika. Dla następujących warunków brzegowych

$$\begin{aligned} \vartheta(\rho = R_0) &= 100^\circ\text{C}, & \vartheta(\rho = R_k) &= 0, \\ \psi(\rho = R_0) &= 0, & \psi(\rho = R_k) &= 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

otrzymujemy rozwiązanie postaci

$$\begin{aligned} \vartheta(\rho) &= \vartheta_0 + (\vartheta_k - \vartheta_0) \cdot \frac{\ln(\rho \cdot \langle k \rangle(\rho)) - \ln(R_0 \cdot \langle k \rangle(R_0))}{\ln(R_k \cdot \langle k \rangle(R_k)) - \ln(R_0 \cdot \langle k \rangle(R_0))}, \\ \psi(\rho) &= 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$



Rys. 3.4. Wykres temperatury wzdłuż promienia przewodnika dla: rozwiązania analitycznego(AS), metody różnic skończonych (FDM) i metody elementów skończonych (FEM), Ostrowski (2010)

Rys. 3.4 przedstawia przebiegi temperatury w przewodniku uzyskane z trzech rozwiązań: a) rozwiązania analitycznego modelu tolerancyjnego (AS), b) rozwiązania równań modelu tolerancyjnego metodą różnic skończonych (FDM), c) rozwiązania dla rzeczywistego przewodnika o budowie mikroniejednorodnej metodą elementów skończonych (FEM). Można zauważyć bardzo dobrą zgodność dla wszystkich trzech rozwiązań.

Przykład 2

W poniższym przykładzie zbadamy wpływ wymiaru komórki na funkcje temperatury. Zanalizujemy jednokierunkowe zagadnienie przewodzenia ciepła w przewodniku cylindrycznym o wymiarach $R_0 = 1.0\text{ m}$ i $R_k = 3.0\text{ m}$. Przyjmiemy

anizotropowe własności termiczne poszczególnych składników przewodnika, K' [W/mK] dla matrycy i K'' [W/mK] dla żebra

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} 58 & 14.5 \\ 14.5 & 58 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}'' = \begin{bmatrix} 0.045 & 0.01125 \\ 0.01125 & 0.045 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Aby uśrednione własności makroskopowe przewodnika były niezależne od ilości komórek N , przyjmujemy zmienną szerokość żeber dla każdej liczby komórek N . W obliczeniach uśrednionych modułów przyjęto szerokość żeber $\delta = 0.5\lambda R_0$, gdzie $\lambda = 2\pi/N$.

Równania przewodzenia ciepła w modelu tolerancyjnym będą miały w tym przypadku postać

$$\begin{aligned} \partial_\rho \left[\langle k_{12} \partial_\phi h \rangle \cdot \psi + \rho \cdot \langle k_2 \rangle \cdot \partial_\rho \vartheta \right] &= 0, \\ \partial_\rho \left(\langle k_2 h h \rangle \cdot \partial_\rho \psi \right) - \frac{1}{\rho^2} \left[\langle k_1 \partial_\phi h \partial_\phi h \rangle \cdot \psi + \rho \cdot \langle k_{12} \partial_\phi h \rangle \cdot \partial_\rho \vartheta \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Równania te dla modelu asymptotycznego otrzymamy w postaci

$$\partial_\rho \left[\rho \cdot \left(\langle k_2 \rangle - \frac{\langle k_{12} \partial_\phi h \rangle^2}{\langle k_1 \partial_\phi h \partial_\phi h \rangle} \right) \cdot \partial_\rho \vartheta \right] = 0, \quad (3.41)$$

oraz wyrażenie na amplitudę fluktuacji temperatury

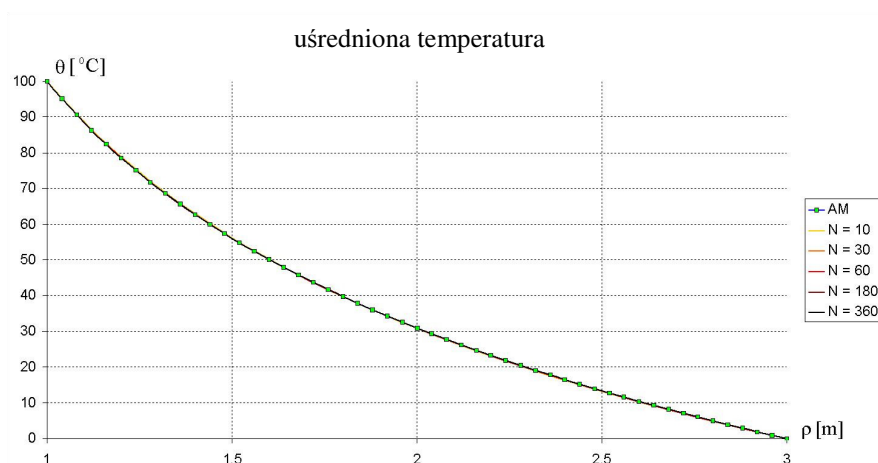
$$\psi = - \frac{\rho \cdot \langle k_{12} \partial_\phi h \rangle}{\langle k_1 \partial_\phi h \partial_\phi h \rangle} \partial_\rho \vartheta. \quad (3.42)$$

Niech warunki brzegowe niezależne od ξ^1 przyporządkowane rów. (3.40) mają postać

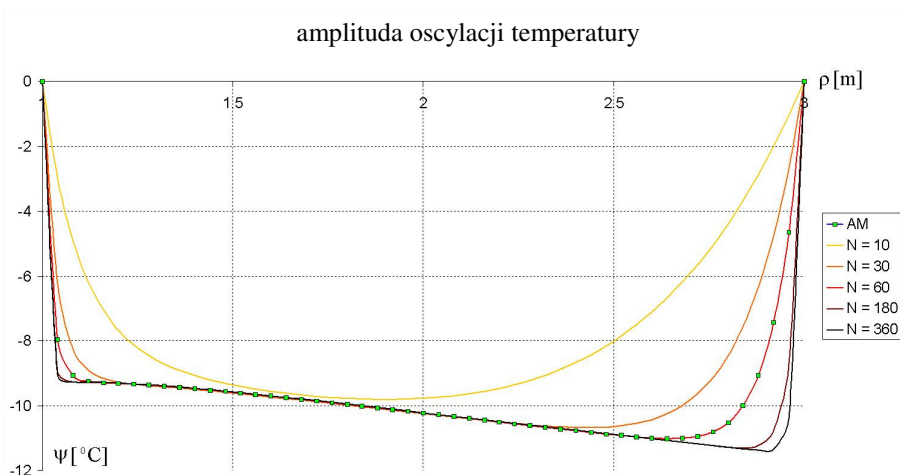
$$\begin{aligned} \vartheta(\rho = R_0) &= 100^\circ \text{C}, & \vartheta(\rho = R_k) &= 0, \\ \psi(\rho = R_0) &= 0, & \psi(\rho = R_k) &= 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Rysunki 3.5 i 3.6 przedstawiają odpowiednio wykresy uśrednionej temperatury ϑ i amplitudy fluktuacji temperatury ψ w zależności od promienia ρ , jako parametr przyjęto w tych wykresach liczbę komórek N . Analizując rys. 3.5, możemy stwierdzić pomijalnie mały wpływ wymiaru mikrostruktury na wartość temperatury średniej. Zgodnie z tym również rozwiązanie dla temperatury średniej z modelu asymptotycznego pokrywa się z rozwiązaniem dla modelu

tolerancyjnego. Natomiast z rys. 3.6 stwierdzamy wpływ wymiaru mikrostruktury λ na amplitudę fluktuacji temperatury. Wpływ ten jest szczególnie widoczny przy brzegach przewodnika.



Rys. 3.5. Wpływ wielkości wymiaru komórki na uśrednioną temperaturę, Ostrowski (2010)



Rys. 3.6. Wpływ wielkości wymiaru komórki na amplitudę oscylacji temperatury, Ostrowski (2010)

Przykład 3. Dwukierunkowy przepływ ciepła.

W przykładzie tym zostanie przedstawiony rozkład średniej temperatury i amplitudy fluktuacji temperatury dla płaskiego dwukierunkowego przepływu ciepła. Rozkłady temperatur określono dla przewodnika o szerokości żeber

$\delta = 0.5\lambda R_0$ i wymiaru komórki $\lambda = 2\pi/60$. Wymiary geometryczne przewodnika: $R_0 = 1.0\text{m}$ i $R_k = 3.0\text{m}$. Przyjęto izotropowe własności termiczne każdej z dwóch warstw przewodnika: matrycy $k' = 58\text{W/mK}$ i żeber $k'' = 0.045\text{W/mK}$.

Dwukierunkowe przewodzenie ciepła w rozpatrywanym przewodniku jest opisane dla modelu tolerancyjnego równaniami (3.32).

Brzegi przewodnika podzielimy na dwa obszary o zróżnicowanych warunkach brzegowych. Obszar I dla $\varphi \in (0, \varphi_0)$ i obszar II dla $\varphi \in (\varphi_0, 2\pi)$. Warunki brzegowe w poszczególnych obszarach przyjęto w następującej postaci:

obszar I $\varphi \in (0, \varphi_0)$

$$\begin{aligned}\vartheta(\rho = R_0) &= \vartheta_0^I \cdot \sin^2\left(\pi \frac{\varphi}{\varphi_0}\right) + \vartheta_0^{II} \cdot \cos^2\left(\pi \frac{\varphi}{\varphi_0}\right), \\ \vartheta(\rho = R_k) &= 0, \\ \psi(\rho = R_0) &= \psi_0^I \cdot \sin^2\left(\pi \frac{\varphi}{\varphi_0}\right) + \psi_0^{II} \cdot \cos^2\left(\pi \frac{\varphi}{\varphi_0}\right), \\ \psi(\rho = R_k) &= 0.\end{aligned}\tag{3.44}$$

obszar II $\varphi \in (\varphi_0, 2\pi)$

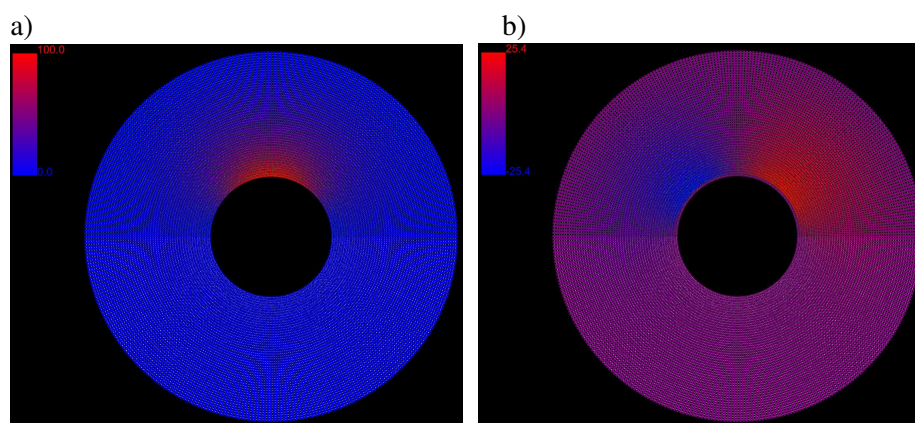
$$\begin{aligned}\vartheta(\rho = R_0) &= \vartheta_0^{II}, & \vartheta(\rho = R_k) &= 0, \\ \psi(\rho = R_0) &= \psi_0^{II}, & \psi(\rho = R_k) &= 0,\end{aligned}\tag{3.45}$$

gdzie w rozpatrywanym przykładzie przyjęto

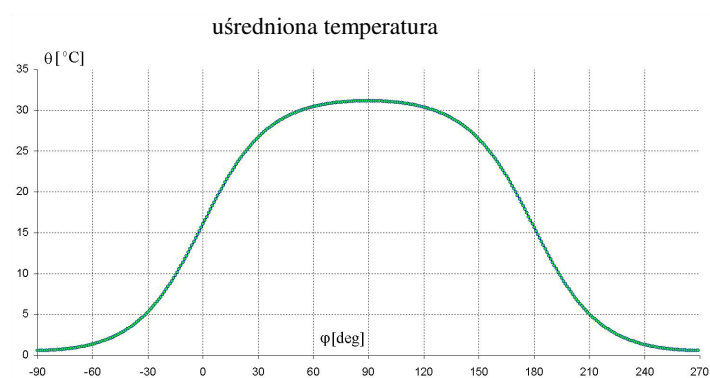
$$\begin{aligned}\vartheta_0^I &= 100 [^\circ\text{C}], & \psi_0^I &= 0 [^\circ\text{C}], & \varphi_0 &= \pi, \\ \vartheta_0^{II} &= 0 [^\circ\text{C}], & \psi_0^{II} &= 0 [^\circ\text{C}]\end{aligned}\tag{3.46}$$

Warunki brzegowe określone wzorami (3.44)-(3.46) są symetryczne względem promienia dla $\phi = \pi/2$.

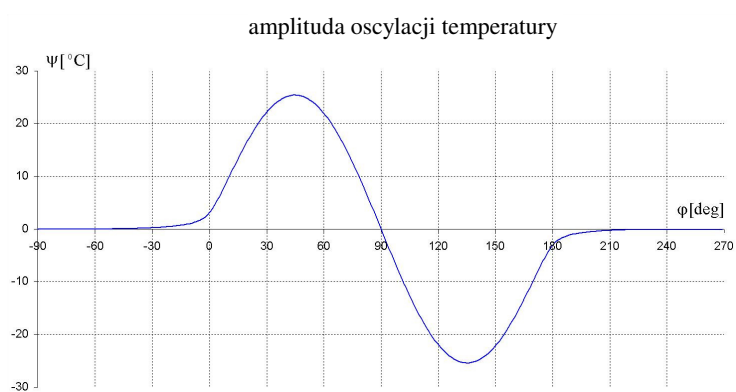
Równania (3.32) zawierają funkcyjne współczynniki i stąd do ich rozwiązania zastosowano metodę różnic skończonych. Mapy rozkładu temperatury średniej i amplitudy fluktuacji temperatury przedstawiono na rys. 3.7. Na rys. 3.8 i rys. 3.10 mamy wykresy wzdłuż obwodu przewodnika; odpowiednio temperatury średniej w środku przewodnika dla promienia $\rho = 2.0\text{m}$ i amplitudy fluktuacji temperatury dla promienia $\rho = 1.08\text{m}$.



Rys. 3.7. Rozkład temperatury w przekroju przewodnika: a) temperatura średnia, b) amplituda fluktuacji temperatury, Ostrowski (2010)

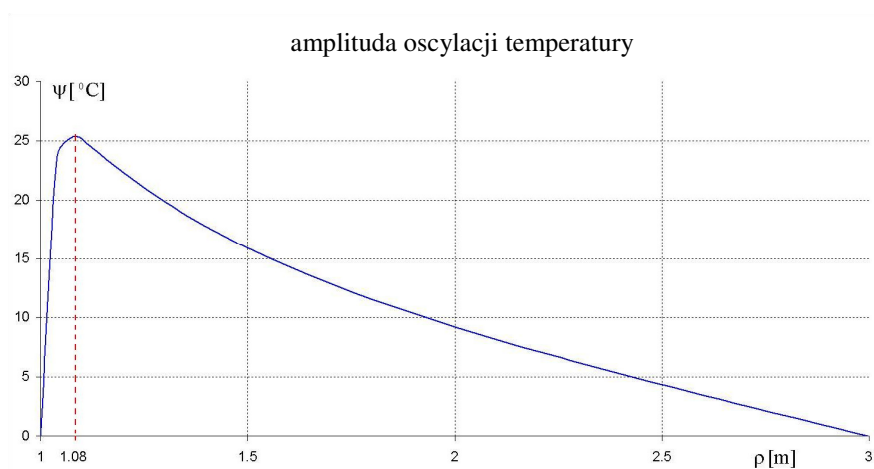


Rys. 3.8. Wykres temperatury średniej dla $\rho = 2.0$ m, Ostrowski (2010)



Rys. 3.9. Wykres funkcji amplitudy oscylacji temperatury dla $\rho = 1.08$ m, Ostrowski (2010)

Łatwo stwierdzić, że rozkład temperatury średniej jest symetryczny analogicznie do całkowitej temperatury na brzegu przewodnika, natomiast rozkład amplitudy fluktuacji temperatury ma charakter antysymetryczny. Antysymetryczny rozkład amplitudy fluktuacji temperatury jest związany z kierunkiem przepływu ciepła, gdyż maksymalna wartość temperatury na brzegu występuje w osi symetrii. Maksymalna wartość amplitudy fluktuacji temperatury występuje w przekrojach dla kątów $\phi = \pi/4$ i $\phi = 3\pi/4$, rys. 3.10.



Rys. 3.10. Wykres funkcji amplitudy oscylacji temperatury dla $\phi = \pi/4$, Ostrowski (2010)

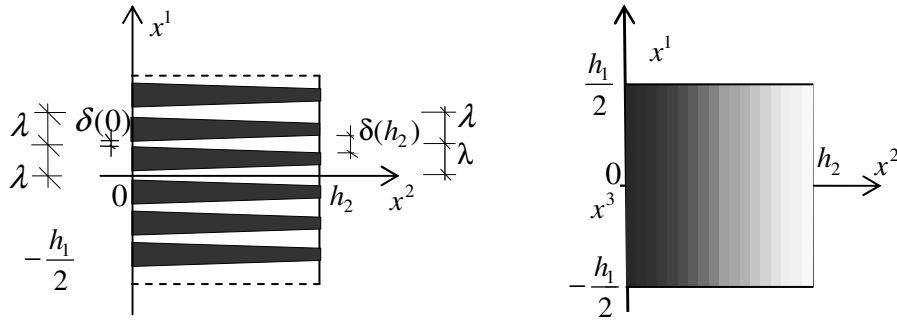
Z rys. 3.10 można zauważyć, że maksymalna wartość amplitudy fluktuacji temperatury występuje dla promienia $\rho = 1.08\text{ m}$ w pobliżu brzegu przewodnika, na którym zadano wyższą temperaturę.

3.4.2. Zagadnienia niestacjonarnego kontrolowanego przewodzenia ciepła

W rozdziale tym rozpatrzymy obserwowalny problem znalezienia początkowego rozkładu temperatury, który wywołuje jednorodne zanikanie w czasie rozkładu temperatury w rozpatrywanym przewodniku kompozytowym.

3.4.2.1. Kontrolowane chłodzenie w przewodniku prostokątnym

Przedmiotem analizy będzie przewodnik wykonany z materiału o podłużnej gradacji własności, którego fragment przekroju poprzecznego dla $x^3 = \text{const}$ pokazany jest na rys. 3.11.



Rys. 3.11. Przekrój poprzeczny przewodnika z FGM

Przyjmujemy płaskie zagadnienie przewodzenia ciepła niezależne od x^3 . Przyjmując $h_1 \rightarrow \infty$, będziemy mieli do czynienia z problemem przewodzenia ciepła w warstwie z materiału o podłużnej gradacji własności. To oznacza, że dla zanikającego w czasie pola temperatury przyjmujemy

$$\begin{aligned}\vartheta(x^1, x^2, x^3, t) &= \Theta(x^1, x^2) \exp(-\eta, t), \\ \Psi(x^1, x^2, x^3, t) &= \Psi(x^1, x^2) \exp(-\eta, t).\end{aligned}\quad (3.47)$$

gdzie $\eta > 0$ jest współczynnikiem zanikania temperatury w czasie, $x^1 \in \mathbb{R}$, $x^2 \in [0, h_2]$, $t \geq 0$. Funkcje $\Theta(\cdot)$, $\Psi(\cdot)$ przedstawiające początkowy rozkład temperatury są podstawowymi niewiadomymi w modelu tolerancyjnym.

Dla diagonalnej postaci tensora przewodzenia ciepła i pomijając pochodne uśrednionych modułów $\langle \mathbf{K} \rangle(x^2)$, które są wolno zmienne w asymptotycznym sensie (tj. wartości ich pochodnych mogą być pominięte jako pomijalnie małe w porównaniu do ich wartości), otrzymujemy z równania (3.14) następujące uśrednione równania modelu tolerancyjnego

$$\begin{aligned}\langle K_{\alpha\beta} \rangle \partial_\alpha \partial_\beta \Theta + \eta \langle c \rangle \Theta &= -2\sqrt{3} (K'_{1\alpha} - K''_{1\alpha}) \partial_\alpha \Psi, \\ v^2 \lambda^2 (\langle K_{22} \rangle \partial_2 \partial_2 \Psi + \eta \langle c \rangle \Psi) - \{k\} \Psi &= v^2 2\sqrt{3} (K'_{1\alpha} - K''_{1\alpha}) \partial_\alpha \Theta.\end{aligned}\quad (3.48)$$

Przyjmujemy dla uproszczenia izotropowe własności poszczególnych składników przewodnika podstawiając $K_{\alpha\beta} = k \delta_{\alpha\beta}$.

Niech warunki początkowo-brzegowe przyporządkowane równaniu (3.48) są niezależne od x^1 i mają postać

$$\begin{aligned}\Theta(x^1, 0) &= \Theta_0, & \Theta(x^1, h_2) &= 0, \\ \Psi(x^1, 0) &= \Psi_0, & \Psi(x^1, h_2) &= 0,\end{aligned}\quad (3.49)$$

dla każdego $x^1 \in R$. W tym przypadku $\Theta(\cdot)$, $\Psi(\cdot)$ są zależne tylko od x^2 . Postulując dodatkowo warunek proporcjonalności przewodzenia ciepła do ciepła właściwego $\mu^2 \langle c \rangle = \langle k \rangle$ (gdzie μ jest dodatnią stałą), otrzymujemy z równania (3.48) następujące równania dla początkowego rozkładu temperatury uśrednionej $\Theta(\cdot)$ i amplitudy fluktuacji temperatury $\Psi(\cdot)$

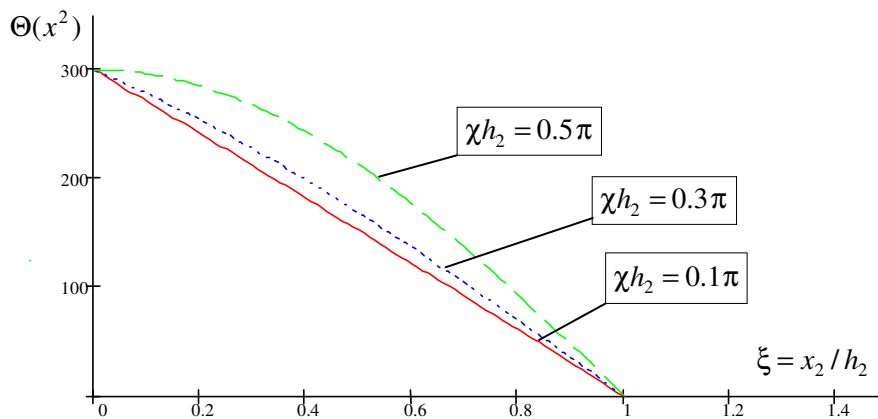
$$\begin{aligned}\partial_2 \partial_2 \Theta + \chi^2 \Theta &= 0, \\ \partial_2 \partial_2 \Psi + \left(\chi^2 - \frac{\{k\}}{v^2 \chi^2 \langle k \rangle} \right) \Psi &= 0,\end{aligned}\quad (3.50)$$

gdzie $\chi^2 = \frac{\eta \langle c \rangle}{\langle k \rangle} = \frac{\eta}{\mu^2}$.

Z pierwszego z równań (3.50) otrzymujemy funkcję początkowego rozkładu temperatury uśrednionej

$$\Theta(x^2) = \Theta_0 \frac{\sin \chi(h_2 - x^2)}{\sin \chi h_2}, \quad x^2 \in [0, h_2] \quad (3.51)$$

pod warunkiem, że $\chi h_2 \neq \pm n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$



Rys. 3.12. Wykres rozkładu temperatury średniej

Przyjmijmy następnie, że parametr

$$\frac{\mu^2 \{k\}}{\lambda^2 < k > \min v^2(x_2)} \quad (3.52)$$

jest pomijalnie mały w porównaniu do współczynnika η . Oznacza to, że nasze rozważania ograniczamy do problemów, w których mamy bardzo silne zanikanie rozkładu temperatury w czasie. W tym przypadku rozwiązanie drugiego z równań (3.50) może być przyjęte analogicznie do wyrażenia (3.51)

$$\Psi(x^2) = \Psi_0 \frac{\sin \chi(h_2 - x^2)}{\sin \chi h_2}, \quad x^2 \in [0, h_2]. \quad (3.53)$$

Na rys. 3.11 są przedstawione wykresy temperatury średniej dla rozpatrywanego dwuskładnikowego przewodnika, gdzie jako parametr przyjęto χh_2 (Michalak i Woźniak M. (2006)). Przypomnijmy, że $\chi^2 = \eta/\mu^2$ zależy od współczynnika zanikania początkowego rozkładu temperatury w czasie. Podobne wykresy otrzymamy z wyrażenia (3.53) dla amplitudy fluktuacji temperatury. Z wykresów tych można zauważyć, że zmniejszanie współczynnika zanikania temperatury powoduje zbliżanie się rozkładu temperatury początkowej do przebiegu liniowego (jak w zagadnieniach stacjonarnych). Dla wzrastającej wartości współczynnika zanikania temperatury η wykres początkowego rozkładu temperatury ma charakter wypukły (przebieg funkcji sinus).

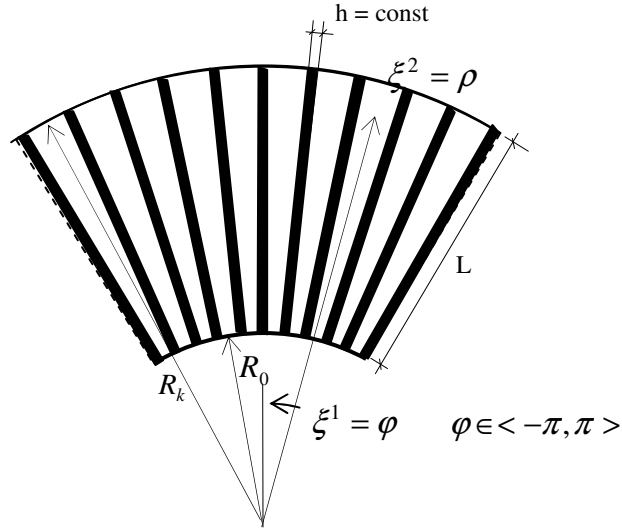
3.4.2.2. Kontrolowane chłodzenie w przewodniku cylindrycznym

Przedmiotem poniższych rozważań będzie wydrążony przewód cylindryczny wykonany z materiału o podłużnej gradacji własności, którego fragment przekroju poprzecznego pokazano na rys. 3.13. Przyjmiemy, że poszczególne warstwy kompozytu mają izotropowe własności, a średnie wartości tensora przewodzenia ciepła $<k>(\rho)$ i ciepła właściwego $<c>(\rho)$ są gładkimi funkcjami $\rho \in (R_0, R_k)$.

Rozważania nasze ograniczymy do płaskiego osiowo-symetrycznego zagadnienia przewodzenia ciepła. Celem rozważań będzie analiza obserwowalnego problemu zanikania początkowego rozkładu temperatury w czasie. Rozwiązaniem będzie znalezienie początkowego rozkładu temperatury odpowiadającego przyjętemu zanikaniu w czasie. Zanikanie temperatury w czasie, dla dekompozycji $\theta(\cdot, t) = \vartheta(\cdot, t) + h(\cdot) \psi(\cdot, t)$, będzie przyjęte w postaci

$$\begin{aligned}\vartheta(\varphi, \rho, x, t) &= \Theta(\rho) \exp(-\eta, t), \\ \psi(\varphi, \rho, x, t) &= \Psi(\rho) \exp(-\eta, t), \quad \rho \in [R_0, R_k], \quad t \geq 0,\end{aligned}\quad (3.54)$$

gdzie $\eta > 0$ jest współczynnikiem zanikania.



Rys. 3.13. Fragment przekroju poprzecznego przewodnika cylindrycznego

Niech warunki brzegowe dla Θ i Ψ będą przyjęte w postaci

$$\begin{aligned}\Theta(\varphi, \rho = R_0) &= \Theta_0, & \Theta(\varphi, \rho = R_k) &= 0, \\ \Psi(\varphi, \rho = R_0) &= \Psi_0, & \Psi(\varphi, \rho = R_k) &= 0.\end{aligned}\quad (3.55)$$

Model tolerancyjny

Biorąc pod uwagę równania (3.14) i pomijając pochodne uśrednionych modułów $\langle k \rangle(\rho)$, które są wolno zmienne w asymptotycznym sensie (tj. wartości ich pochodnych mogą być pominięte jako pomijalnie małe w porównaniu do ich wartości), otrzymujemy następujące równania przewodzenia ciepła

$$\begin{aligned}\langle k \rangle \frac{d^2 \Theta}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \langle k \rangle \frac{d\Theta}{d\rho} + \eta \langle c \rangle \Theta &= 0, \\ v^2 \lambda^2 (\langle k \rangle \frac{d^2 \Psi}{d\rho^2} + \eta \langle c \rangle \Psi) - \{k\} \Psi &= 0.\end{aligned}\quad (3.56)$$

Z powyższych równań wynika, że analizowane zagadnienie przewodzenia ciepła jest opisane dwoma niezależnymi równaniami dla średniej temperatury Θ i amplitudy fluktuacji temperatury Ψ .

Przyjmijmy dla uproszczenia, że stosunek $\langle k \rangle / \langle c \rangle = \mu^2$ jest wielkością stałą, tzn. że $\mu^2 = k' / c' = k'' / c''$. Po przyjęciu tego założenia równania (3.56) będą miały postać

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Theta}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\Theta}{d\rho} + \beta^2 \Theta &= 0, \\ \frac{d^2 \Psi}{d\rho^2} + \gamma^2 \Psi &= 0, \end{aligned} \quad (3.57)$$

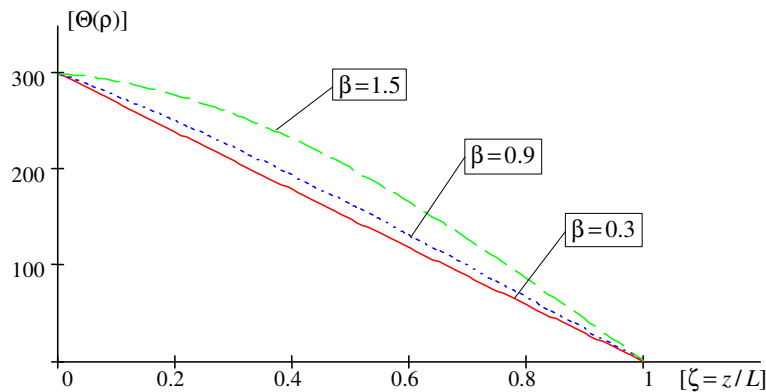
gdzie

$$\beta^2 = \frac{\eta \langle c \rangle}{\langle k \rangle} = \frac{\eta}{\mu^2}, \quad \gamma^2 = \beta^2 - \frac{\{k\}}{\nu^2 (\alpha \rho)^2 \langle k \rangle}.$$

Przyjmijmy także również, że $k' \gg k''$. Po przyjęciu dodatkowego założenia $1 + k'' / k' \cong 1$ współczynnik γ^2 będzie wynosił $\gamma^2 = \eta / \mu^2 - 12 / h^2$. Z pierwszego z równań (3.57) otrzymamy wówczas rozwiązanie dla uśrednionej temperatury

$$\Theta(\rho) = \Theta_0 \frac{Y_0(\beta R_k) J_0(\beta \rho) - J_0(\beta R_k) Y_0(\beta \rho)}{J_0(\beta R_0) Y_0(\beta R_k) - J_0(\beta R_k) Y_0(\beta R_0)}, \quad (3.58)$$

gdzie $J_0(\beta \rho)$ i $Y_0(\beta \rho)$ są odpowiednio funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju.



Rys. 3.14. Wykres średniej temperatury Θ ; β jest parametrem, $z = \rho - R_k$, $L = R_k - R_0$

Wykresy temperatury średniej w zależności od promienia ρ , gdzie β jest przyjęte jako parametr, są przedstawione na rys. 3.14 (Michalak i inni (2007)).

Postać rozwiązania drugiego z równań (3.57) zależy od γ^2 .

1. Jeżeli $\gamma^2 > 0$, wówczas współczynnik zanikania temperatury spełnia warunek $\eta > \mu^2/h^2$ i odpowiadające rozwiązanie przyjmuje postać

$$\Psi(\rho) = \Psi_0 \frac{\sin(\gamma R_k) \cos(\gamma \rho) - \cos(\gamma R_k) \sin(\gamma \rho)}{\cos(\gamma R_0) \sin(\gamma R_k) - \sin(\gamma R_0) \cos(\gamma R_k)}. \quad (3.59)$$

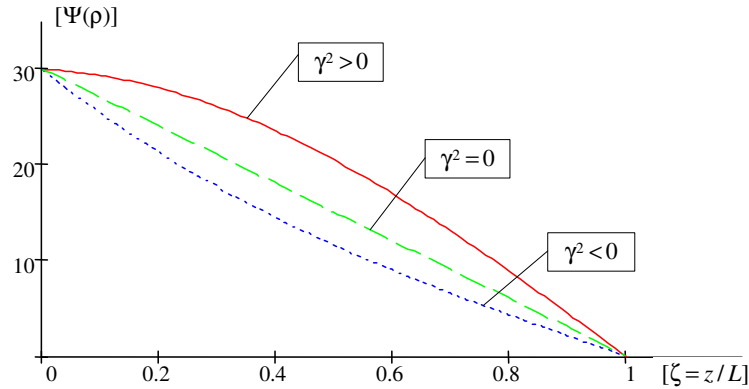
2. Jeżeli $\gamma^2 = 0$, wówczas $\eta = \mu^2/h^2$ i odpowiadające rozwiązanie jest postaci

$$\Psi(\rho) = \Psi_0 \left(1 - \frac{\rho - R_0}{R_k - R_0} \right). \quad (3.60)$$

3. Jeżeli $\gamma^2 < 0$, wówczas współczynnik zanikania spełnia warunek $\eta < \mu^2/h^2$ i odpowiadające rozwiązanie mamy w postaci

$$\Psi(\rho) = \Psi_0 \frac{\exp(\gamma(R_0 + 2R_k - \rho)) - \exp(\gamma(R_0 + \rho))}{\exp(2\gamma R_k) - \exp(2\gamma R_0)}. \quad (3.61)$$

Wykres amplitudy fluktuacji temperatury jest przedstawiony na rys. 3.15.



Rys. 3.15. Wykres amplitudy fluktuacji temperatury Ψ ; γ^2 jest parametrem i $z = \rho - R_k$

Wykres liniowy amplitudy fluktuacji temperatury występuje dla $\gamma^2 = 0$, co odpowiada współczynnikowi zanikania temperatury $\eta = 0.001 \text{ 1/s}$, oraz przykładowo szerokości żeber $h = 0.01 \text{ m}$ i proporcji tensora przenikania ciepła do ciepła właściwego μ jak dla betonu. Z rys. 3.15 można zauważyć, że

w zależności od wartości parametru γ^2 wykresy mają charakter wypukły lub wklęsły.

Model asymptotyczny

Otrzymane powyżej wyniki dla modelu tolerancyjnego porównamy z wynikami dla modelu asymptotycznego.

Równania przewodzenia ciepła modelu asymptotycznego (3.27) dla przewodnika cylindrycznego o izotropowych własnościach poszczególnych warstw mają postać

$$\langle k \rangle \frac{d^2 \Theta}{d\rho^2} + \rho^{-1} \langle k \rangle \frac{d\Theta}{d\rho} + \eta \langle c \rangle \Theta = 0. \quad (3.62)$$

Warunki brzegowe są zapisane tylko dla wartości średniej temperatury Θ

$$\Theta(\varphi, \rho = R_0) = \Theta_0, \quad \Theta(\varphi, \rho = R_k) = 0. \quad (3.63)$$

Z równania (3.62) dla powyższych warunków brzegowych otrzymujemy rozwiązanie

$$\Theta(\rho) = \Theta_0 \frac{Y_o(\beta R_k) J_o(\beta \rho) - J_o(\beta R_k) Y_o(\beta \rho)}{J_o(\beta R_0) Y_o(\beta R_k) - J_o(\beta R_k) Y_o(\beta R_0)}. \quad (3.64)$$

W rozpatrywanym przypadku amplituda fluktuacji temperatury Ψ jest dana funkcją

$$\psi = -\frac{\langle k_1 \partial_\varphi h \rangle}{\langle k_1 \partial_\varphi h \partial_\varphi h \rangle} \partial_\varphi \vartheta - \frac{\rho \cdot \langle k_{12} \partial_\varphi h \rangle}{\langle k_1 \partial_\varphi h \partial_\varphi h \rangle} \partial_\rho \vartheta = 0. \quad (3.65)$$

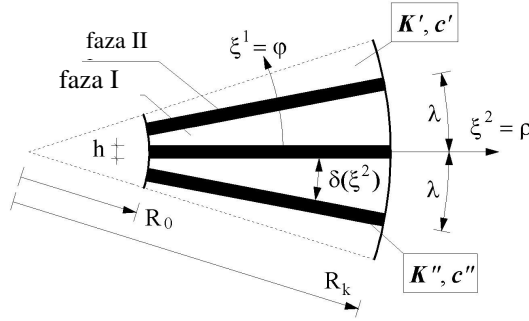
Można zauważyć, że rozwiązanie dla temperatury średniej jest analogiczne jak dla modelu tolerancyjnego.

3.4.3. Zagadnienia niestacjonarnego przewodzenia ciepła

3.4.3.1. Równania modelu

Podrozdział ten będzie dotyczył analizy płaskiego zagadnienia przewodzenia ciepła w dwuskładnikowym uwarstwionym przewodniku cylindrycznym (rys. 3.3). Wprowadźmy w analizowanym przewodniku walcowy układ współrzędnych $O\xi^1\xi^2\xi^3$, gdzie oznaczmy $\xi^1 = \varphi$, $\xi^2 = \rho$ i $\xi^3 = z$. Pionowa

kreska przed wskaźnikami będzie oznaczać pochodną kowariantną, indeksy $i, j = 1, 2, 3$ oraz $\alpha, \beta = 2, 3$. Fragment przekroju poprzecznego rozpatrywanego przewodnika jest pokazany na rys. 3.16.



Rys. 3.16. Fragment przekroju poprzecznego przewodnika cylindrycznego, Ostrowski, Michalak (2011)

Model tolerancyjny

Ograniczając rozważania do zagadnień jednokierunkowego przewodzenia ciepła, otrzymujemy z równania (3.11), przy przyjęciu anizotropowych własności poszczególnych warstw, następujące równania niestacjonarnego przewodzenia ciepła w przewodniku cylindrycznym

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \cdot \partial_{\rho} \left[\langle k_{12} \partial_{\varphi} h \rangle \cdot \psi + \rho \cdot \langle k_2 \rangle \cdot \partial_{\rho} \vartheta \right] - \langle c \rangle \dot{\vartheta} &= 0, \\ \partial_{\rho} \left(\langle k_2 h h \rangle \cdot \partial_{\rho} \psi \right) - \frac{1}{\rho^2} \left[\langle k_1 \partial_{\varphi} h \partial_{\varphi} h \rangle \cdot \psi + \rho \cdot \langle k_{12} \partial_{\varphi} h \rangle \cdot \partial_{\rho} \vartheta \right] - \langle c h h \rangle \dot{\psi} &= 0, \end{aligned} \quad (3.66)$$

gdzie wartości uśrednionych modułów są określone wzorami (3.30), a składowe fizyczne tensora przewodzenia ciepła $k_1 = k^{<11>} = \rho^2 k^{11}$, $k_{12} = k^{<12>} = \rho k^{12}$, $k_2 = k^{<22>} = k^{22}$.

Model asymptotyczny

Równania modelu asymptotycznego (3.23)-(3.25) dla jednokierunkowego przewodzenia ciepła w przewodniku cylindrycznym mają następującą postać

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \cdot \partial_{\rho} \left[\langle k_{12} \partial_{\varphi} h \rangle \cdot \psi + \rho \cdot \langle k_2 \rangle \cdot \partial_{\rho} \vartheta \right] - \langle c \rangle \dot{\vartheta} &= 0, \\ \frac{1}{\rho^2} \left[\langle k_1 \partial_{\varphi} h \partial_{\varphi} h \rangle \cdot \psi + \rho \cdot \langle k_{12} \partial_{\varphi} h \rangle \cdot \partial_{\rho} \vartheta \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Wyznaczając z równań (3.67) funkcję amplitudy fluktuacji temperatury

$$\Psi = -\frac{\rho \cdot \langle k_{12} \partial_{\varphi} h \rangle}{\langle k_1 \partial_{\varphi} h \partial_{\varphi} h \rangle} \partial_{\rho} \vartheta \quad (3.68)$$

i oznaczając

$$k_2^{eff} = \langle k_2 \rangle - \frac{\langle k_{12} \partial_{\varphi} h \rangle^2}{\langle k_1 \partial_{\varphi} h \partial_{\varphi} h \rangle}, \quad (3.69)$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{\rho} \partial_{\rho} [\rho \cdot k_2^{eff} \cdot \partial_{\rho} \vartheta] - \langle c \rangle \dot{\vartheta} = 0. \quad (3.70)$$

Otrzymane uśrednione równania różniczkowe (3.66), (3.70) mają gładkie funkcyjne współczynniki. Stąd w ogólnym przypadku do ich rozwiązania zostanie użyta metoda różnic skończonych (dla całkowania po czasie metoda Crancka-Nicholsona).

3.4.3.2. Przykłady zastosowań

Podstawowym celem tego rozdziału będzie określenie wpływu własności termicznych składników i budowy geometrycznej kompozytu przewodnika na pole temperatury i szybkość osiągania stanu stacjonarnego. W analizowanych przykładach nasze rozważania ograniczymy do jednokierunkowego przewodzenia ciepła w dwuskładnikowym przewodniku o własnościach anizotropowych każdego ze składników

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad (3.71)$$

gdzie $a \in (0,1]$, $b \in (0, \sqrt{a}]$. Przyjmujemy następujące własności termiczne poszczególnych składników: matryca $k' = 58 \text{ W/mK}$, $c' = 3432000 \text{ J/m}^3 \text{K}$, zebra $k'' = 0.045 \text{ W/mK}$, $c'' = 14600 \text{ J/m}^3 \text{K}$, co odpowiada własnościom termicznym stali i styropianu.

Zdefiniujemy następujące warunki początkowe i brzegowe dla ϑ i Ψ na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni wydrążonego cylindra:

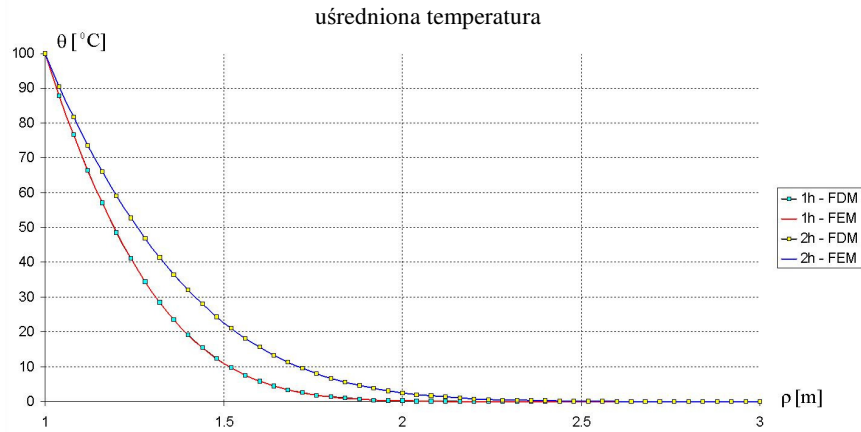
- warunki początkowe

$$\vartheta(\phi, \rho, 0) = \psi(\phi, \rho, 0) = 0^\circ\text{C}, \quad (3.72)$$

• warunki brzegowe

$$\begin{aligned} \vartheta(\phi, \rho = R_0, t) &= 100^\circ\text{C}, & \vartheta(\phi, \rho = R_k, t) &= 0, \\ \psi(\phi, \rho = R_0, t) &= 0, & \psi(\phi, \rho = R_k, t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Przykład 1. Przykład ten ma służyć ocenie poprawności otrzymanego modelu tolerancyjnego, jak i jego rozwiązania metodą różnic skończonych. W celu weryfikacji otrzymanych wyników porównamy rozwiązania z modelu tolerancyjnego z rozwiązaniami metodą elementów skończonych dla przewodnika o budowie mikronejednorodnej, (Ostrowski (2010)). na rys. 3.17 przedstawiono wykresy temperatury średniej uzyskane z obu metod dla czasów $t = 1\text{h}$ i $t = 2\text{h}$.



Rys. 3.17. Wykresy temperatury średniej; (FDM) rozwiązanie metodą różnic skończonych, (FEM) rozwiązanie metodą elementów skończonych, Ostrowski (2010)

Porównując wykresy przedstawione na rys. 3.17 można stwierdzić bardzo dobrą zgodność w wykresach uzyskanych z uśrednionego modelu tolerancyjnego i metody elementów skończonych zastosowanej do modelu dyskretnego.

Przykład 2. Wpływ wymiaru mikrostruktury na przebieg temperatury.

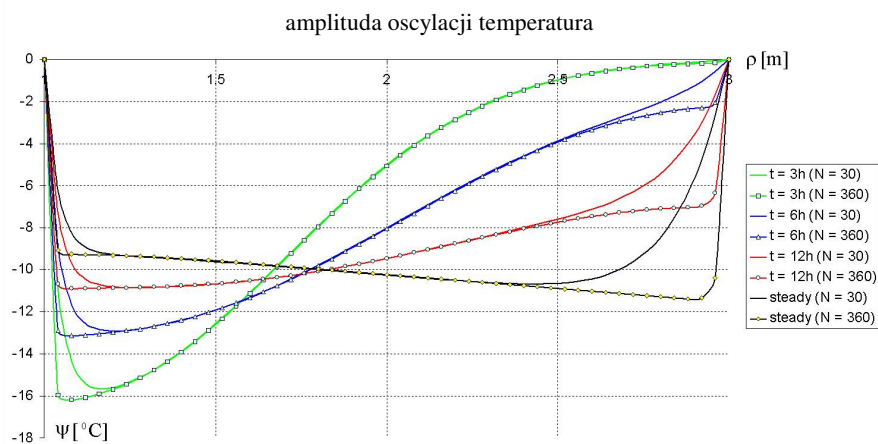
Zanalizujemy dwuskładnikowy kompozyt o własnościach anizotropowych matrycy i żeber

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} 58 & 14.5 \\ 14.5 & 58 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}'' = \begin{bmatrix} 0.045 & 0.01125 \\ 0.01125 & 0.045 \end{bmatrix}, \quad (3.74)$$

$$c' = 3432000 \text{ J/m}^3 \text{ K}, \quad c'' = 14600 \text{ J/m}^3 \text{ K}.$$

Promień wewnętrzny przewodnika $R_o = 1.0 \text{ m}$, promień zewnętrzny $R_k = 3.0 \text{ m}$. Warunki początkowo-brzegowe są określone wyrażeniami (3.72), (3.73).

Ocenimy wpływ wymiaru mikrostruktury na amplitudę fluktuacji temperatury, przyjmując różną ilość komórek $N = 30$ lub $N = 360$. Szerokość żeber $h = 0.5\lambda R_o$, gdzie $\lambda = 2\pi/N$. Na rys. 3.18 przedstawiono szybkość zmiany amplitudy fluktuacji temperatury w czasie dla ilości komórek $N = 30$ – linie ciągłe i $N = 360$ – linie z wyróżnikami (wykres zaczerpnięto z pracy Ostrowskiego (2010)).



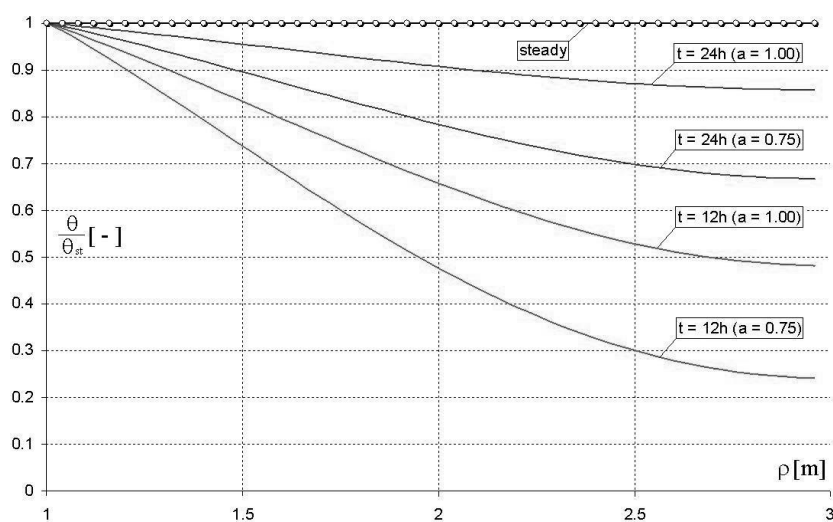
Rys. 3.18. Zmiany w czasie amplitudy fluktuacji temperatury w zależności od ilości komórek, Ostrowski (2010)

Z rys. 3.18 można zauważyć, że wymiar mikrostruktury wpływa na amplitudę fluktuacji temperatury w obszarach przewodnika znajdujących się przy brzegach. W części środkowej przewodnika wpływ ten jest niezauważalny. Dla brzegu o wyższej temperaturze, amplitudy fluktuacji temperatury są większe na początku i maleją z upływem czasu, natomiast na brzegu o niższej temperaturze mamy do czynienia z sytuacją odwrotną. Potwierdza to istotne znaczenie wymiaru mikrostruktury na zagadnienia początkowo-brzegowe w przewodnikach kompozytowych.

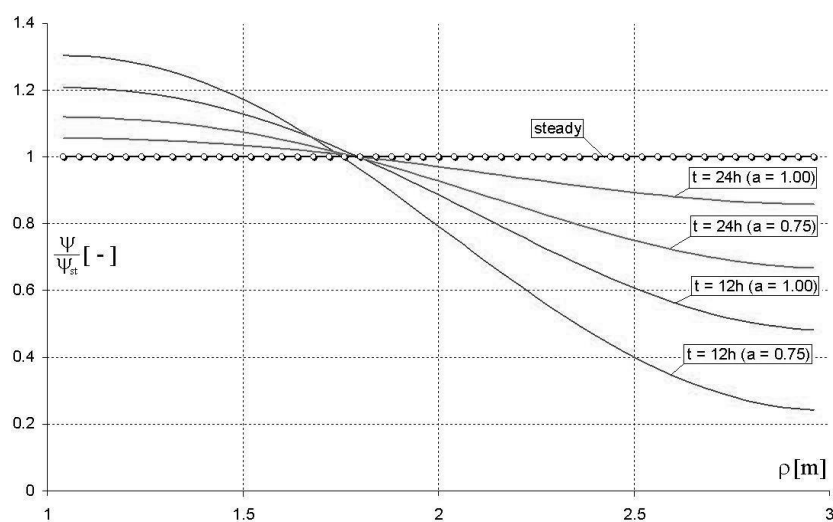
Przykład 3. Wpływ anizotropii składników kompozytu na szybkość osiągnięcia stanu stacjonarnego.

Do rozważań przyjmiemy przewodnik o $R_o = 1.0 \text{ m}$ i $R_k = 3.0 \text{ m}$ oraz ilości komórek $N = 60$. Zmiany własności anizotropowych poszczególnych

składników będziemy dokonywać przez zmianę wartości parametru a w wyrażeniu (3.71). Obliczeń dokonano dla dwóch wartości $a=1.0$ i $a=0.75$ oraz dla stałej wartości $b=0.5$. Rys. 3.19 przedstawia zmiany przebiegu temperatury średniej w stosunku do stanu stacjonarnego w zależności od wartości parametru a . Rys. 3.20 (Ostrowski, Michalak (2011)) przedstawia analogiczne wykresy proporcji amplitudy fluktuacji temperatury dla czasu t w stosunku do stanu stacjonarnego.



Rys. 3.19. Wykresy zmiany w czasie temperatury średniej; jako parametr przyjęto współczynnik anizotropii a



Rys. 3.20. Wykresy zmiany w czasie amplitudy fluktuacji temperatury; jako parametr przyjęto współczynnik anizotropii a

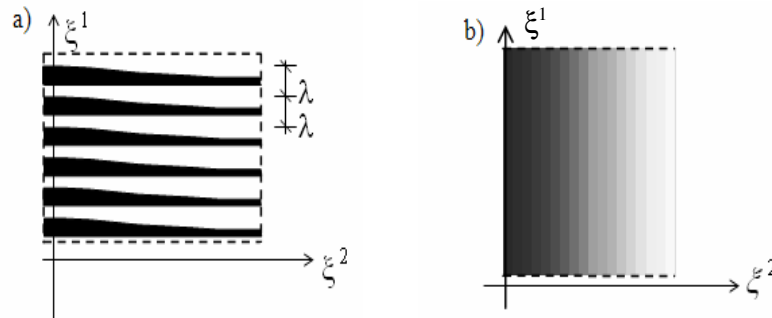
Z rysunków 3.19 i 3.20 możemy stwierdzić, że zarówno temperatura średnia, jak i amplituda fluktuacji temperatury wolniej osiągają stan stacjonarny w przypadku materiałów kompozytowych o większych własnościach anizotropowych.

4. Dynamika cienkich płyt wykonanych z materiałów o podłużnej gradacji własności

4.1. Przedmiot analizy

Przedmiotem analizy będą cienkie płyty kompozytowe, których uśrednione własności są łagodnie zmienne wzdłuż wybranego kierunku na powierzchni środkowej płyty. Rozważania, podobnie jak w rozdziale 3, ograniczymy do dwuskładnikowego kompozytu o podłużnej gradacji własności, tzn. kompozytu, w którym efektywne własności zmieniają się łagodnie wzdłuż uwarstwienia (rys. 4.1, 4.2).

Celem rozważań będzie otrzymanie i zastosowanie modelu makroskopowego opisującego dynamiczne zachowania rozpatrywanych płyt wykonanych z kompozytu, który ma λ -periodyczną mikrostrukturę wzdłuż współrzędnych ξ^1 i łagodnie zmienne uśrednione własności wzdłuż prostopadłego kierunku współrzędnej ξ^2 .



Rys. 4.1. Fragment powierzchni środkowej płyty prostokątnej o podłużnej gradacji własności: a) w skali mikro, b) w skali makro

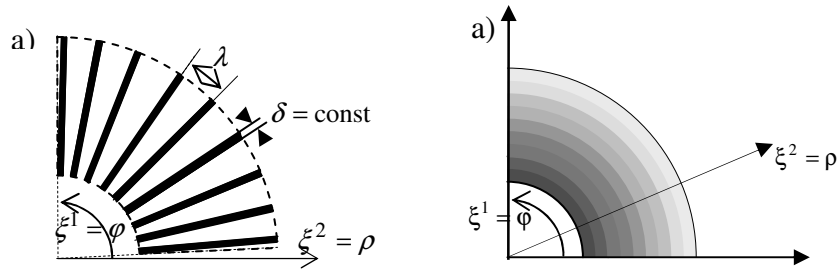
Wprowadźmy prostokątny krzywoliniowy system współrzędnych $O\xi^1\xi^2\xi^3$ w przestrzeni fizycznej zajmowanej przez rozpatrywane płyty. Ustalając $\mathbf{x} \equiv (\xi^1, \xi^2)$ i $z = \xi^3$ przyjmujemy, że niezdeformowana płyta zajmuje obszar $\Omega \equiv \{(\mathbf{x}, z) : -h/2 \leq z \leq h/2, \mathbf{x} \in \Pi\}$, gdzie Π jest powierzchnią środkową płyty, a h jej grubością.

Rozważania nasze będą dotyczyły zarówno płyt prostokątnych, jak i płyt pierścieniowych o podłużnej gradacji własności. W przypadku płyty prostokątnej (rys. 4.1) w obszarze $\Pi = (-L_1/2, L_1/2) \times (0, L_2)$ zajmowanym

przez powierzchnię środkową wprowadzimy kartezjański układ współrzędnych Ox_1x_2 . Definiując komórkę $\Delta = [-\lambda/2, \lambda/2] \times \{0\}$, przyjmujemy, że $\lambda \ll L_{\min}$. Operator uśredniania (2.5) przyjmie postać

$$\langle f \rangle(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda} \int_{x_1 - \lambda/2}^{x_1 + \lambda/2} f(y, x_2) dy, \quad \mathbf{x} \in \Pi_{\Delta}, \quad (4.1)$$

gdzie $\Pi_{\Delta} = (-L_1/2 + \lambda/2, L_1/2 - \lambda/2) \times (0, L_2)$.



Rys. 4.2. Fragment powierzchni środkowej płyty pierścieniowej o podłużnej gradacji własności: a) w skali mikro, b) w skali makro

W przypadku płyty pierścieniowej pokazanej na rys. 4.2 wprowadzimy biegunowy układ współrzędnych $(\xi^1, \xi^2) \in [0, \varphi_k] \times [R_0, R_k]$, $0 < \varphi_k < 2\pi$, $0 < R_0 < R_k$. Dowolna komórka o środku w punkcie (ξ^1, ξ^2) będzie określana jako $\Delta(\xi^1, \xi^2) = (\xi^1 - \lambda/2, \xi^1 + \lambda/2) \times \{\xi^2\}$, gdzie λ , $0 < \lambda \ll \varphi_k$ jest znanym bezwymiarowym parametrem mikrostruktury. Grubości jednorodnych warstw są określone jako $\xi^2 \lambda'(\xi^2)$ i $\xi^2 \lambda''(\xi^2) = \delta = \text{const}$, gdzie $\lambda'(\xi^2) + \lambda''(\xi^2) = \lambda$. Operator uśredniania (2.5) dla płyty kołowej przyjmie postać

$$\langle f \rangle(\xi^1, \xi^2) = \frac{1}{\lambda} \int_{\xi^1 - \lambda/2}^{\xi^1 + \lambda/2} f(\eta, \xi^2) d\eta, \quad (4.2)$$

gdzie $\xi^1 \in [\lambda/2, \varphi_k - \lambda/2]$, $\xi^2 \in [R_0, R_k]$.

Indeksy i, k, l będą przebiegały ciąg 1, 2, 3, a α, β, δ ciąg 1, 2. Zmienną czasową oznaczmy przez t . Tensor metryczny dla układu $O\xi^1\xi^2$ oznaczmy przez $g_{\alpha\beta}$, przez $\epsilon_{\alpha\beta}$ tensor Ricciego, pochodną przez $\partial_\alpha = \partial/\partial\xi^\alpha$, a kreska pionowa przed dolnymi wskaźnikami będzie oznaczać pochodną kowariantną w bazie $g_{\alpha\beta}$.

Równania modelu uśrednionego dla dynamicznych zachowań rozpatrywanych płyt będą otrzymane w ramach przybliżonej teorii cienkich płyt sprężystych. Oznaczając odpowiednio przez $w(\xi^\alpha, t)$, $p(\xi^\alpha, t)$, μ – przemieszczenie powierzchni środkowej, obciążenie i gęstość masy odniesioną do powierzchni środkowej płyty, gdzie $\xi^\alpha \in \Pi$, $t \in (t_0, t_1)$, otrzymujemy:

– relację odkształcenia przemieszczenia

$$\kappa_{\alpha\beta}(\xi^\gamma) = -w(\xi^\gamma)_{|\alpha\beta}, \quad (4.3)$$

– energię odkształcenia uśrednioną po grubości płyty

$$E(\xi^\lambda) = \frac{1}{2} B^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\gamma\delta}, \quad (4.4)$$

gdzie:

$$B^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0.5B(g^{\alpha\mu}g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma}g^{\beta\mu} + \nu(\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon^{\beta\mu} + \epsilon^{\alpha\mu}\epsilon^{\beta\gamma})), \quad B = Eh^3/12(1-\nu^2),$$

– energię kinetyczną zdefiniowaną przez

$$K(\xi^\alpha) = \frac{1}{2} \mu \dot{w} \cdot \dot{w}. \quad (4.5)$$

W celu uzyskania równań ruchu zdefiniujemy funkcję Lagrange’a

$$\mathcal{L}(\cdot, w_{|\alpha\beta}, \dot{w}) = K(\cdot, \dot{w}) - E(\cdot, w_{|\alpha\beta}). \quad (4.6)$$

Definiując funkcjonal działania (2.8) w postaci

$$\mathcal{A}(w(\cdot), p(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Pi} (\mathcal{L}(\cdot, w_{|\alpha\beta}, \dot{w}) + p(\cdot) w(\cdot)) d\xi^\alpha dt, \quad (4.7)$$

możemy zapisać równania ruchu w postaci równań Eulera-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{w}} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{|\alpha\beta}} \right)_{|\alpha\beta} = p. \quad (4.8)$$

Ten bezpośredni opis prowadzi do równań ruchu z nieciągłymi i silnie oscylującymi współczynnikami. Stąd jest on zbyt skomplikowany do zastosowań inżynierskich i obliczeń numerycznych.

4.2. Model tolerancyjny

Uśrednione równania ruchu modelu tolerancyjnego otrzymamy, korzystając z techniki tolerancyjnej aproksymacji do uśredniania lagrangianu (4.6). W tym celu dokonamy dekompozycji (2.5) pola przemieszczeń $w(\xi^\alpha, t)$

$$w(\xi^1, \xi^2, t) = w^0(\xi^1, \xi^2, t) + h^A(\xi^\alpha) V_A(\xi^1, \xi^2, t), \quad A = 1, \dots, N, \quad (4.9)$$

gdzie wolno zmienne funkcje, uśrednione przemieszczenie $w^0(\cdot, \xi^2, t) \in SV_\delta^2(\Pi, \Delta)$ i amplituda fluktuacji przemieszczeń $V_A(\cdot, \xi^2, t) \in SV_\delta^2(\Pi, \Delta)$ są podstawowymi niewiadomymi modelu. Znane funkcje kształtu fluktuacji przemieszczeń $h^A(\cdot)$ są λ -periodycznymi funkcjami współrzędnej ξ^1 , zależnymi od ξ^2 .

Podstawiając prawą stronę równania (4.9) do funkcjonału (4.6) i korzystając z zasad tolerancyjnej aproksymacji, otrzymujemy funkcjonał działania (2.17) w postaci

$$\mathcal{A}_h(w^0, V_A) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Pi} (<\mathcal{L}_h> + <p(\cdot)> w^0(\cdot) + <p(\cdot) h^A(\cdot)> V_A(\cdot)) d\xi^\alpha dt, \quad (4.10)$$

gdzie uśredniony lagrangian (4.6) jest określony wyrażeniem

$$\begin{aligned} <\mathcal{L}_h>(\xi^\alpha, w^0|_{\alpha\beta}, V_{A|22}, V_{A|2}, V_A, \dot{w}^0, \dot{V}_A) = \\ &= \frac{1}{2} <B^{\alpha\beta\gamma\mu}> w^0|_{\alpha\beta} w^0|_{\gamma\mu} + <B^{11\gamma\mu} h^A|_{11}> V_A w^0|_{\gamma\mu} + 2 <B^{12\gamma\mu} h^A|_1> V_{A|2} w^0|_{\gamma\mu} + \\ &<B^{22\gamma\mu} h^A> V_{A|22} w^0|_{\gamma\mu} + \frac{1}{2} <B^{1111} h^A|_{11} h^B|_{11}> V_A V_B + <B^{1122} h^A|_{11} h^B> V_A V_{B|22} + \\ &2 <B^{1212} h^A|_1 h^B|_1> V_{A|2} V_{B|2} + \frac{1}{2} <B^{2222} h^A h^B> V_{A|22} V_{B|22} + \frac{1}{2} <\mu> \dot{w}^0 \dot{w}^0 + \\ &+ <\mu h^A> \dot{w}^0 \dot{V}_A + \frac{1}{2} <\mu h^A h^B> \dot{V}_B \dot{V}_A. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Stosując zasadę stacjonarności działania do lagrangianu (4.11), otrzymujemy następujący system uśrednionych równań ruchu dla modelu tolerancyjnego.

$$\begin{aligned} (<B^{\alpha\beta\gamma\mu}> w^0|_{\gamma\mu})|_{\alpha\beta} + (<B^{11\alpha\beta} h^A|_{11}> V_A)|_{\alpha\beta} + 2(<B^{12\alpha\beta} h^A|_1> V_{A|2})|_{\alpha\beta} + \\ (<B^{22\alpha\beta} h^A> V_{A|22})|_{\alpha\beta} + <\mu> \ddot{w}^0 = <p>, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
& (\langle B^{22\alpha\beta} h^A \rangle w^0_{|\alpha\beta}|)_{|22} + (\langle B^{1122} h^B_{|11} h^A \rangle V_B)_{|22} + (\langle B^{2222} h^A h^B \rangle V_{B|22})_{|22} + \\
& - 4(\langle B^{1212} h^A_{|1} h^B_{|1} \rangle V_{B|2})_{|2} - 2(\langle B^{12\alpha\beta} h^A_{|1} \rangle w^0_{|\alpha\beta}|)_{|2} + \\
& \langle B^{11\alpha\beta} h^A_{|11} \rangle w^0_{|\alpha\beta}| + \langle B^{1111} h^A_{|11} h^B_{|11} \rangle V_B + \langle B^{1122} h^A_{|11} g^B \rangle V_{B|22} + \\
& + \langle \mu h^A h^B \rangle \ddot{V}_B = \langle p h^A \rangle.
\end{aligned}$$

Podkreślone składniki powyższego układu równań ruchu zależą od parametru wymiaru mikrostruktury. Równania (4.12) wraz z dekompozycją pola przemieszczeń (4.9) tworzą tolerancyjny model dynamiki cienkich płyt wykonanych z materiału o podłużnej gradacji własności, w którym efektywne własności są stałe w kierunku osi ξ^1 i zmienne w kierunku osi ξ^2 .

4.3. Model asymptotyczny

Model asymptotyczny zbudujemy, podobnie jak model tolerancyjny, poprzez uśrednienie funkcjonału działania oraz korzystając z równań Eulera-Lagrange.

Niech $\Delta_\varepsilon = (-\varepsilon\lambda/2, \varepsilon\lambda/2)$ będzie ciągiem komórek bazowych, a $\Delta_\varepsilon(\xi^\alpha) = \xi^\alpha + \Delta_\varepsilon$ ciągiem komórek o środku w $\xi^\alpha \in \Pi$. Przyjmijmy, że dla każdego $\xi^\alpha \in \Pi$ istnieje Δ -periodyczna aproksymacja $\tilde{\mathcal{L}}(y, \xi^2, w^0_{|\alpha\beta}, \dot{w})$, $y \in \Delta_\varepsilon(\xi^i)$ lagrangianu $\mathcal{L}$.

Wyjściowym założeniem modelowania asymptotycznego jest dekompozycja pola przemieszczeń

$$w_\varepsilon(y, \xi^2, t) = w^0(y, \xi^2, t) + \varepsilon^2 \tilde{h}^A\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2\right) V_A(y, \xi^2, t), \quad y \in \Delta_\varepsilon(\xi^i), \quad t \in (t_0, t_1) \quad (4.13)$$

gdzie funkcje $\tilde{h}^A(\cdot, \xi^2)$ są periodyczną aproksymacją silnie oscylującej funkcji $h^A(\cdot)$ w $\Delta(\xi^\alpha)$. Z formuły (4.13) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha w_\varepsilon(y, \xi^2, t) &= \partial_\alpha w^0(y, \xi^2, t) + \varepsilon \partial_1 \tilde{h}^A\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2\right) V_A(y, \xi^2, t) + \\
&+ \varepsilon^2 \tilde{h}^A\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2\right) \partial_2 V_A(y, \xi^2, t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha\beta} w_\varepsilon(y, \xi^2, t) &= \partial_{\alpha\beta} w^0(y, \xi^2, t) + \partial_{11} \tilde{h}^A\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2\right) V_A(y, \xi^2, t) + \\
&+ 2\varepsilon \partial_1 \tilde{h}^A\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2\right) \partial_2 V_A(y, \xi^2, t) + \varepsilon^2 \tilde{h}^A\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2\right) \partial_{22} V_A(y, \xi^2, t), \\
\dot{w}_\varepsilon(y, \xi^2, t) &= \dot{w}^0(y, \xi^2, t) + \varepsilon^2 \tilde{h}^A\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2\right) \dot{V}_A(y, \xi^2, t) \\
&y \in \Delta_\varepsilon(\xi^\alpha). \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Przechodząc z $\varepsilon \rightarrow 0$ i pamiętając, że $y \in \Delta_\varepsilon(\xi^\alpha)$, $\xi^\alpha \in \overline{\Pi}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
w^0(y, \xi^2, t) &= w^0(\xi^\alpha, t) + O(\varepsilon), \quad \partial_\alpha w^0(y, \xi^2, t) = \partial_\alpha w^0(\xi^\alpha, t) + O(\varepsilon), \\
\partial_{\alpha\beta} w^0(y, \xi^2, t) &= \partial_{\alpha\beta} w^0(\xi^\alpha, t) + O(\varepsilon), \\
V_A(y, \xi^2, t) &= V_A(\xi^\alpha, t) + O(\varepsilon), \quad \partial_2 V_A(y, \xi^2, t) = \partial_2 V_A(\xi^\alpha, t) + O(\varepsilon), \\
\partial_{22} V_A(y, \xi^2, t) &= \partial_{22} V_A(\xi^\alpha, t) + O(\varepsilon), \\
\dot{w}^0(y, \xi^2, t) &= \dot{w}^0(\xi^\alpha, t) + O(\varepsilon), \quad \dot{V}_A(y, \xi^2, t) = \dot{V}_A(\xi^\alpha, t) + O(\varepsilon). \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Niech $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ będzie rodziną wielomianów określonych przez

$$\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2, \dot{w}, w|_{\alpha\beta}\right). \quad (4.16)$$

Biorąc pod uwagę (4.15) i podstawiając prawe strony wyrażeń (4.14) do (4.16), otrzymujemy

$$\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2, \dot{w}^0\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2, t\right) + O(\varepsilon), w|_{\alpha\beta}^0\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2, t\right) + \partial_{11} \tilde{h}^A\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2\right) V_A\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2, t\right) + O(\varepsilon)\right). \quad (4.17)$$

Przy przejściu z $\varepsilon \rightarrow 0$ składniki $O(\varepsilon)$ w wyrażeniach (4.14), (4.15) mogą być pominięte. Pamiętając o własnościach wartości średniej, Jikov i in. (1994), przy przejściu z $\varepsilon \rightarrow 0$ funkcje $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ dążą słabo w $L_{loc}^\gamma(R^m)$, $\gamma \geq 1$ do

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_0\left(\xi^\alpha, \dot{w}^0(\xi^\alpha, t), w|_{\alpha\beta}^0(\xi^\alpha, t), V_A(\xi^\alpha, t)\right) = \\
&= \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta(x)} \tilde{\mathcal{L}}\left(y, \xi^\alpha, \dot{w}^0(\xi^\alpha, t), w|_{\alpha\beta}^0(\xi^\alpha, t) + \partial_{11} \tilde{h}^A(y, \xi^2) V_A(\xi^\alpha, t)\right) dy, \quad \xi^\alpha \in \overline{\Pi}. \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Po zastosowaniu formuły (4.18) do wielomianu (4.6) otrzymujemy $\mathcal{L}_0$ w następującej jawnej postaci

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(\xi^\alpha, w^0_{|\alpha\beta}, V_A, \dot{w}^0) = & \frac{1}{2} \langle B^{\alpha\beta\gamma\mu} \rangle w^0_{|\alpha\beta} w^0_{|\gamma\mu} + \langle B^{11\gamma\mu} h^A_{|11} \rangle V_A w^0_{|\gamma\mu} + \\ & + \frac{1}{2} \langle B^{1111} h^A_{|11} h^B_{|11} \rangle V_A V_B + \frac{1}{2} \langle \mu \rangle \dot{w}^0 \dot{w}^0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Asymptotyczny funkcjonal działania będzie zdefiniowany przez

$$\mathcal{A}_h^0(w^0, V_A) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Pi} (\mathcal{L}_0(\xi^\alpha, w^0_{|\alpha\beta}(\cdot), V_A(\cdot), \dot{w}^0(\cdot)) + \langle p(\cdot) \rangle w^0(\cdot)) d\xi^\alpha dt, \quad (4.20)$$

gdzie $\mathcal{L}_0$ jest określone wyrażeniem (4.19).

Z zasady stacjonarności działania otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{w}^0} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial w^0_{|\alpha\beta}} \right)_{|\alpha\beta} &= p, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial V_A} &= 0, \quad A=1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Po zastosowaniu wyrażenia (4.19) dla lagrangianu $\mathcal{L}_0$ otrzymujemy z równań (4.21) następujące równania ruchu modelu asymptotycznego

$$\begin{aligned} (\langle B^{\alpha\beta\gamma\mu} \rangle w^0_{|\gamma\mu})_{|\alpha\beta} + (\langle B^{11\alpha\beta} h^A_{|11} \rangle V_A)_{|\alpha\beta} + \langle \mu \rangle \ddot{w}^0 &= \langle p \rangle, \\ \langle B^{11\alpha\beta} h^A_{|11} \rangle w^0_{|\alpha\beta} + \langle B^{1111} h^A_{|11} h^B_{|11} \rangle V_B &= 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Można zauważyć, że możemy z równań (4.22) wyeliminować funkcję amplitudy fluktuacji przemieszczeń V_A

$$V_A = - \frac{\langle B^{11\gamma\mu} h^B_{|11} \rangle}{\langle B^{1111} h^A_{|11} h^B_{|11} \rangle} w^0_{|\gamma\mu}. \quad (4.23)$$

Definiując moduł efektywny

$$B_{eff}^{\alpha\beta\gamma\mu} = \langle B^{\alpha\beta\gamma\mu} \rangle - \frac{\langle B^{11\gamma\mu} h^B_{|11} \rangle}{\langle B^{1111} h^A_{|11} h^B_{|11} \rangle} \langle B^{11\alpha\beta} h^A_{|11} \rangle, \quad (4.24)$$

otrzymujemy z (4.22) następujące równanie ruchu

$$(\langle B_{eff}^{\alpha\beta\gamma\mu} \rangle w^0_{|\gamma\mu})_{|\alpha\beta} + \langle \mu \rangle \ddot{w}^0 = \langle p \rangle. \quad (4.25)$$

Całkowite przemieszczenie dowolnego punktu powierzchni środkowej rozpatrywanej płyty jest określone wyrażeniem

$$w(\xi^\alpha, t) = w^0 - h^A \frac{\langle B^{11\gamma A} h^B_{|11} \rangle}{\langle B^{1111} h^A_{|11} h^B_{|11} \rangle} w^0_{|\gamma A}, \quad A = 1, \dots, N. \quad (4.26)$$

Równanie (4.25) wraz z wyrażeniem (4.26) tworzą model asymptotyczny rozpatrywanych płyt.

4.4. Drgania własne płyt o podłużnej gradacji własności

Zagadnienie drgań własnych zostanie przedstawione dla dwóch rodzajów płyt o podłużnej gradacji własności: płyt prostokątnych i płyt pierścieniowych. Przyjmujemy, że rozpatrywane płyty są wykonane z dwóch jednorodnych materiałów izotropowych. Ważnym punktem w metodzie tolerancyjnej aproksymacji jest określenie funkcji kształtu fluktuacji przemieszczeń. W zagadnieniach dynamicznych system funkcji kształtu fluktuacji $h^A(\cdot)$, $A = 1, \dots, N$, może być przyjęty jako reprezentacja postaci drgań własnych komórki $\Delta(\xi^\alpha)$, $\xi^\alpha \in \Pi$. Funkcje te w zagadnieniach dynamicznych powinny spełniać warunek $\langle \mu h \rangle = 0$. Nasze rozważania ograniczymy do najprostszego przypadku $N = 1$, w którym bierzemy pod uwagę tylko postać drgań komórki o najniższej częstości. Określenie dokładnej postaci funkcji kształtu fluktuacji przemieszczeń, dla rozpatrywanych płyt, jest bardzo trudne, stąd w naszych rozważaniach zastosujemy przybliżoną postać tej funkcji. Dla rozpatrywanej tutaj komórki jednowymiarowej jako funkcję kształtu fluktuacji przemieszczeń przyjmujemy

$$h = \lambda^2 (\cos(2\pi\xi^1/\lambda) + C), \quad (4.27)$$

gdzie λ jest wymiarem komórki. Funkcja $C(\xi^2)$ określona z warunku $\langle \mu h \rangle = 0$ ma postać

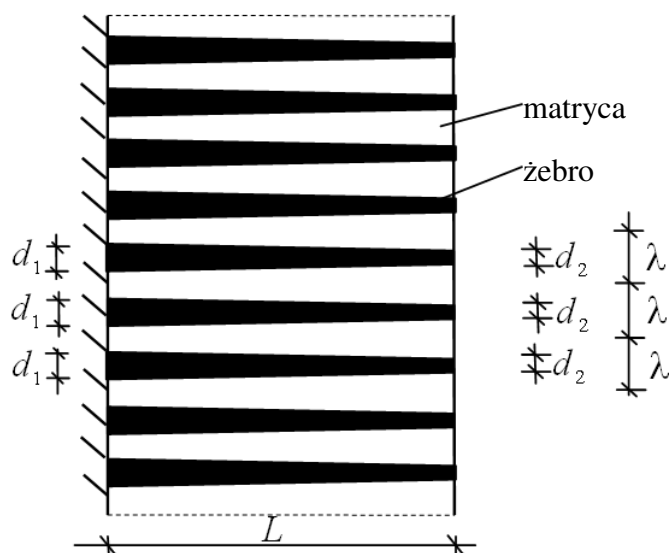
$$C = \frac{\lambda(\mu_1 - \mu_2)\xi^2 \sin(\pi\delta/\xi^2\lambda)}{\pi(\mu_1\delta + \mu_2(\xi^2\lambda - \delta))}. \quad (4.28)$$

Ponieważ proponowane równania modelu tolerancyjnego (4.12) i modelu asymptotycznego (4.25) mają gładkie funkcyjne współczynniki, stąd

w większości przypadków rozwiązania dla płyt o funkcyjnej gradacji własności muszą być określone z wykorzystaniem znanych metod przybliżonych lub numerycznych.

4.4.1. Drgania własne pasma płytowego o podłużnej gradacji własności

Rozważania będą dotyczyły drgań własnych wspornikowego pasma płytowego o mikrostrukturze przedstawionej na rys. 4.3.



Rys. 4.3. Fragment powierzchni środkowej wspornikowego pasma płytowego

Model tolerancyjny

Przyjmując jedną funkcję kształtu fluktuacji przemieszczeń $N = 1$, $h^A(\cdot) = h(\cdot)$, $V_A(\cdot, t) = V(\cdot, t)$, po prostych przekształceniach otrzymamy z równań (4.12) następujący system dwu cząstkowych równań różniczkowych opisujących drgania własne pasma płytowego

$$\partial_{22}(< B^{2222} > \partial_{22} w^0 + < B^{2211} \partial_{11} h > V + < B^{2222} h > \partial_{22} V) + < \mu > \ddot{w}^0 = 0,$$

$$\begin{aligned} & \partial_{22}(< B^{2222} h > \partial_{22} w^0 + < B^{1122} h \partial_{11} h > V + < B^{2222} h h > \partial_{22} V) + \\ & - 4 \partial_2(< B^{1212} \partial_1 h \partial_1 h > \partial_2 V) + < B^{1122} \partial_{11} h > \partial_{22} w^0 + < B^{1122} \partial_{11} h h > \partial_{22} V + \\ & + < B^{1111} \partial_{11} h \partial_{11} h > V + < \mu h h > \ddot{V} = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Będziemy poszukiwać częstości kołowych ω , przy których pasmo płytowe będzie wykonywać poprzeczne drgania harmoniczne.

Przyjmując następującą postać nieznaną funkcji $w^0(\cdot, t)$ i $V(\cdot, t)$

$$w^0(x_2, t) = \tilde{w}^0(x_2) e^{i\omega t} \quad V(x_2, t) = \tilde{V}(x_2) e^{i\omega t}, \quad (4.30)$$

po podstawieniu wyrażeń (4.30) do równań (4.29), otrzymujemy następujący układ równań dla $\tilde{w}^0(x_2)$ i $\tilde{V}(x_2)$

$$\partial_{22}(< B^{2222} > \partial_{22} \tilde{w}^0 + < B^{2211} \partial_{11} h > \tilde{V} + < B^{2222} h > \partial_{22} \tilde{V}) - < \mu > \omega^2 \tilde{w}^0 = 0,$$

$$\begin{aligned} & \partial_{22}(< B^{2222} h > \partial_{22} \tilde{w}^0 + < B^{1122} h \partial_{11} h > \tilde{V} + < B^{2222} h h > \partial_{22} \tilde{V}) + \\ & - 4 \partial_2(< B^{1212} \partial_1 h \partial_1 h > \partial_2 \tilde{V}) + < B^{1122} \partial_{11} h > \partial_{22} \tilde{w}^0 + < B^{1122} \partial_{11} h h > \partial_{22} \tilde{V} + \\ & + < B^{1111} \partial_{11} h \partial_{11} h > \tilde{V} - < \mu h h > \omega^2 \tilde{V} = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Podkreślone składniki w równaniach (4.31) zależą od parametru wymiaru mikrostruktury λ . Stąd równania te opisują efekt skali mikrostruktury na wartości częstości drgań własnych rozpatrywanej płyty.

Model asymptotyczny

Równania modelu asymptotycznego dla pasma płytowego, otrzymane z równań (4.25), mają następującą postać

$$\partial_{22}(< B_{eff}^{2222} > \partial_{22} w^0) + < \mu > \ddot{w}^0 = 0. \quad (4.32)$$

Jedyną niewiadomą w tym równaniu jest średnia wartość przemieszczenia $w^0(x_2, t)$. Podobnie jak w modelu tolerancyjnym, rozwiązania równania (4.32) będziemy poszukiwać w postaci funkcji o rozdzielonych zmiennych

$$w^0(x_2, t) = \tilde{w}^0(x_2) e^{i\omega t}. \quad (4.33)$$

Podstawiając wyrażenie (4.33) do równania (4.32), otrzymujemy równanie dla $\tilde{w}^0(x_2)$

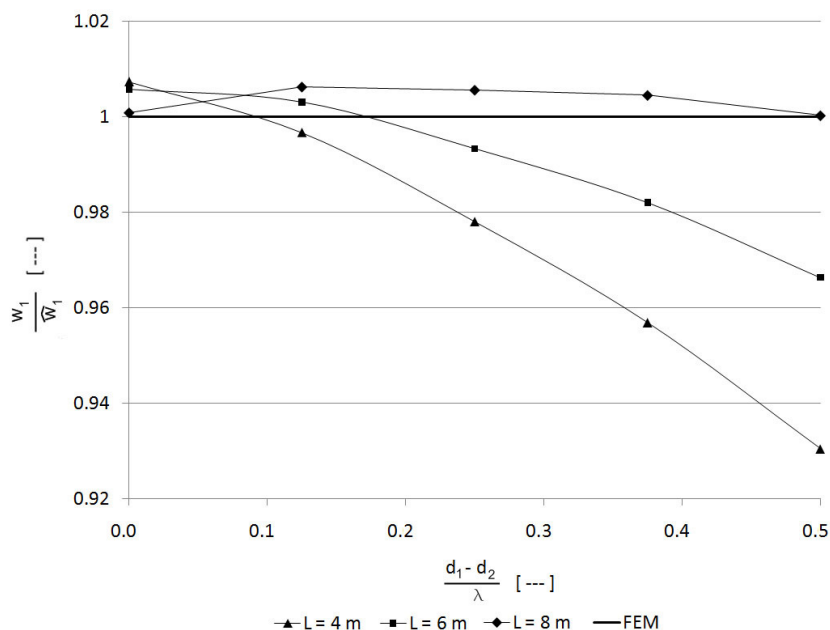
$$\partial_{22}(\langle B_{eff}^{2222} \rangle \partial_{22} w^0) - \langle \mu \rangle \omega^2 \tilde{w}^0 = 0. \quad (4.34)$$

Powyższe równanie pozwoli wyznaczyć częstość ω drgań harmonicznym pasma płytowego.

Równania (4.31) i (4.34) posiadają gładkie funkcyjne współczynniki i stąd do wyznaczenia częstości drgań własnych została wykorzystana metoda różnic skończonych.

Wyniki obliczeń numerycznych

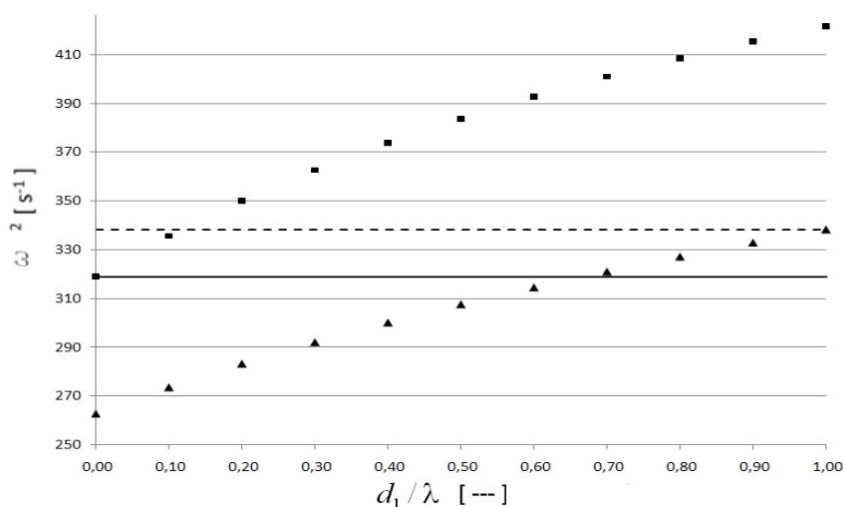
W celu weryfikacji otrzymanego uśrednionego modelu matematycznego płyt wykonanych z materiału o podłużnej gradacji własności porównano wartości pierwszej częstości drgań własnych otrzymane z obliczeń modelu tolerancyjnego z wartościami obliczonymi metodą elementów skończonych płyty o budowie mikrostrukturalnej. Proporcje pierwszej częstości drgań otrzymanej z modelu tolerancyjnego ω_1 do częstości otrzymanej z metody elementów skończonych $\hat{\omega}_1$ przedstawiono na rys. 4.4 (Michalak i Wirowski (2011)).



Rys. 4.4. Wykres stosunku wartości pierwszej częstości drgań własnych z modelu tolerancyjnego ω_1 do częstości drgań z MES $\hat{\omega}_1$

Rozpiętość pasma płytowego L jest przyjęta jako parametr. Wraz ze wzrostem rozpiętości L zmiana efektywnych własności płyty staje się łagodniejsza i stosunek częstości $\omega_1/\hat{\omega}_1$ zbliża się do 1.0. Z rys. 4.4 możemy stwierdzić, że różnice pomiędzy wartościami pierwszej częstości drgań otrzymanymi z modelu tolerancyjnego i metody elementów skończonych są mniejsze niż 7%.

Celem obliczeń numerycznych jest określenie częstości drgań własnych wspornikowego pasma płytowego w zależności od udziału objętościowego składników rozpatrywanej płyty kompozytowej. Warstwy matrycy płyty (rys. 4.4) są wykonane z aluminium; $E = 69 \text{ GPa}$, $\rho = 2720 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.3$, natomiast warstwy żeber ze stali: $E = 210 \text{ GPa}$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.3$. Na rys. 4.5 (Michalak i Wirowski (2011)) przedstawiono wartości pierwszej częstości drgań własnych wspornikowego płytowego pasma kompozytowego stalowo-aluminiowego w zależności od proporcji szerokości żeber d_1 na końcu zamocowanym do wymiaru komórki λ . Linia przerywaną oznaczono wartości częstości dla jednorodnej płyty stalowej, a linią ciągłą dla jednorodnej płyty aluminiowej.



Rys. 4.5. Wykres pierwszej częstości drgań własnych w zależności od parametru d_1/λ :
 $\blacktriangle$ - $d_2/\lambda = 1$, $\blacksquare$ - $d_2/\lambda = 0$, ---- płyta stalowa, — płyta aluminiowa

Wykresy na rys. 4.5 pokazują, że dla rozpatrywanej płyty o podłużnej gradacji własności można uzyskać, w zależności od budowy mikrostruktury, częstości drgań własnych większe lub mniejsze niż dla identycznej jednorodnej płyty stalowej lub aluminiowej. Dla wspornikowego pasma płytowego o rozpiętości

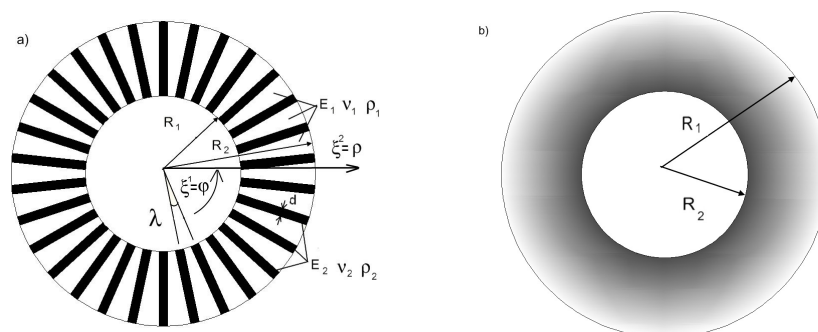
$L=3$ m i proporcji $d_2/\lambda=1.0$, $d_1/\lambda=0.0$ (więcej aluminium przy brzegu zamocowanym) pierwsza częstość drgań własnych jest odpowiednio 20% i 18% mniejsza niż wartość dla jednorodnego pasma stalowego i aluminium. Dla pasma płytowego o proporcjach $d_2/\lambda=0.0$, $d_1/\lambda=1.0$ (więcej stali przy brzegu zamocowanym) pierwsza częstość drgań własnych jest odpowiednio 25% i 32% wyższa niż wartość częstości dla jednorodnego pasma stalowego i aluminium.

Analizując rys. 4.5 możemy stwierdzić, że dla rozpatrywanego pasma płytowego otrzymujemy najwyższe pierwsze częstości drgań własnych w przypadku występowania przy brzegu zamocowanym tylko frakcji stalowej, a przy brzegu swobodnym tylko frakcji aluminium. Podobne wyniki uzyskali Qian i Batra (2005) dla wspornikowego pasma wykonanego ze stalowo-aluminiowego kompozytu FGM, w którym udział objętościowy aluminium był wyrażony jako funkcja potęgowa współrzędnej x_2 i własności efektywne kompozytu zostały określone przy pomocy metody Mori-Tanaki.

4.4.2. Drgania własne płyt pierścieniowych o podłużnej gradacji własności

4.4.2.1. Równania modelu

Drgania swobodne płyt pierścieniowych wykonanych z materiału o podłużnej gradacji własności będą przedmiotem badań tego rozdziału. Analizę naszą ograniczymy do prostego zagadnienia drgań biegunowo symetrycznych. Przekrój płyty w skali mikro i w skali makro pokazano na rys.4.6.



Rys. 4.6. Płyta pierścieniowa o podłużnej gradacji własności: a) w skali mikro, b) w skali makro

Model tolerancyjny

W poszukiwaniu pierwszej częstości naturalnych drgań postaci biegunowo-symetrycznej przyjmujemy jedną funkcję kształtu fluktuacji przemieszczeń $h^A(\cdot) = h(\cdot)$ i stąd jedną funkcję amplitudy fluktuacji przemieszczeń $V_A(\cdot, t) = V(\cdot, t)$. Podstawiając $w^0 = w^0(\rho, t)$, $V = V(\rho, t)$ do równań (4.12) i korzystając z definicji pochodnej kowariantnej w układzie biegunowym ($\xi^1 = \varphi$, $\xi^2 = \rho$), otrzymujemy po dość długich przekształceniach następujący układ równań ruchu

$$\begin{aligned} & \partial_{22}(<\tilde{B}^{2222}>\partial_{22}w^0) + \frac{1}{\rho}\partial_{22}(<\tilde{B}^{2211}>\partial_2w^0) + \frac{2}{\rho}\partial_2(<\tilde{B}^{2222}>\partial_{22}w^0) + \\ & + \frac{1}{\rho^3}<\tilde{B}^{1111}>\partial_2w^0 - \frac{1}{\rho^2}\partial_2(<\tilde{B}^{1111}>\partial_2w^0) - \frac{1}{\rho}\partial_2(<\tilde{B}^{2211}>\partial_{22}w^0) + \\ & + \frac{2}{\rho^4}<\tilde{B}^{2211}h_{|11}>V - \frac{2}{\rho^3}\partial_2(<\tilde{B}^{2211}h_{|11}>V) + \frac{1}{\rho^2}\partial_{22}(<\tilde{B}^{2211}h_{|11}>V) + \\ & + \frac{2}{\rho^4}<\tilde{B}^{1111}h_{|11}>V - \frac{1}{\rho^3}\partial_2(<\tilde{B}^{1111}h_{|11}>V) + \partial_{22}(<\tilde{B}^{2222}h>\partial_{22}V) + \\ & + \frac{2}{\rho}\partial_2(<\tilde{B}^{2222}h>\partial_{22}V) - \frac{1}{\rho}\partial_2(<\tilde{B}\tilde{H}^{1122}h>\partial_{22}V) + <\mu>\ddot{w}^0 = 0, \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^3}<\tilde{B}^{1111}h_{|11}>\partial_2w^0 + \frac{1}{\rho^2}<\tilde{B}^{1122}h_{|11}>\partial_{22}w^0 + \frac{1}{\rho^4}<\tilde{B}^{1111}h_{|11}h_{|11}>V + \\ & + \frac{1}{\rho^2}<\tilde{B}^{1111}h_{|11}h>\partial_{22}V + \partial_{22}(\frac{1}{\rho}<\tilde{B}^{2211}h>\partial_2w^0) + \\ & + \partial_{22}(<\tilde{B}^{2222}h>\partial_{22}w^0) + \partial_{22}(\frac{1}{\rho^2}<\tilde{B}^{2211}h_{|11}h>V) + \\ & + \partial_{22}(<\tilde{B}^{2222}hh>\partial_{22}V) - 4\partial_2(\frac{1}{\rho^2}<\tilde{B}^{1212}h_{|1}h_{|1}>\partial_2V) + <h\mu h>\ddot{V} = 0, \end{aligned}$$

gdzie przez $\tilde{B}^{2222} = B^{2222}$, $\tilde{B}^{1122} = \rho^2 B^{1122}$, $\tilde{B}^{1111} = \rho^4 B^{1111}$ oznaczono składowe fizyczne uśrednionych modułów.

W celu określenia częstości kołowych ω drgań harmonicznym płyty przyjmujemy następującą postać nieznanych funkcji $w^0(\cdot, t)$ i $V(\cdot, t)$

$$w^0(x_2, t) = \tilde{w}^0(x_2)e^{i\omega t}, \quad V(x_2, t) = \tilde{V}(x_2)e^{i\omega t}. \quad (4.36)$$

Po podstawieniu wyrażeń (4.36) do równań (4.35) otrzymujemy następujący układ równań dla $\tilde{w}^0(x_2)$ i $\tilde{V}(x_2)$

$$\begin{aligned}
& \partial_{22}(\langle \tilde{B}^{2222} \rangle \partial_{22} \tilde{w}^0) + \frac{1}{\rho} \partial_{22}(\langle \tilde{B}^{2211} \rangle \partial_2 \tilde{w}^0) + \frac{2}{\rho} \partial_2(\langle \tilde{B}^{2222} \rangle \partial_{22} \tilde{w}^0) + \\
& + \frac{1}{\rho^3} \langle \tilde{B}^{1111} \rangle \partial_2 \tilde{w}^0 - \frac{1}{\rho^2} \partial_2(\langle \tilde{B}^{1111} \rangle \partial_2 \tilde{w}^0) - \frac{1}{\rho} \partial_2(\langle \tilde{B}^{2211} \rangle \partial_{22} \tilde{w}^0) + \\
& + \frac{2}{\rho^4} \langle \tilde{B}^{2211} h_{|11} \rangle \tilde{V} - \frac{2}{\rho^3} \partial_2(\langle \tilde{B}^{2211} h_{|11} \rangle \tilde{V}) + \frac{1}{\rho^2} \partial_{22}(\langle \tilde{B}^{2211} h_{|11} \rangle \tilde{V}) + \\
& + \frac{2}{\rho^3} \langle \tilde{B}^{1111} h_{|11} \rangle \tilde{V} - \frac{1}{\rho^3} \partial_2(\langle \tilde{B}^{1111} h_{|11} \rangle \tilde{V}) + \partial_{22}(\langle \tilde{B}^{2222} h \rangle \partial_{22} \tilde{V}) + \\
& \frac{2}{\rho} \partial_2(\langle \tilde{B}^{2222} h \rangle \partial_{22} \tilde{V}) - \frac{1}{\rho} \partial_2(\langle B \tilde{H}^{1122} h \rangle \partial_{22} \tilde{V}) - \langle \mu \rangle \omega^2 \tilde{w}^0 = 0,
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\rho^3} \langle \tilde{B}^{1111} h_{|11} \rangle \partial_2 \tilde{w}^0 + \frac{1}{\rho^2} \langle \tilde{B}^{1122} h_{|11} \rangle \partial_{22} \tilde{w}^0 + \frac{1}{\rho^4} \langle \tilde{B}^{1111} h_{|11} h_{|11} \rangle \tilde{V} + \\
& + \frac{1}{\rho^2} \langle \tilde{B}^{1111} h_{|11} h \rangle \partial_{22} \tilde{V} + \partial_{22}(\frac{1}{\rho} \langle \tilde{B}^{2211} h \rangle \partial_2 \tilde{w}^0) + \\
& + \partial_{22}(\langle \tilde{B}^{2222} h \rangle \partial_{22} \tilde{w}^0) + \partial_{22}(\frac{1}{\rho^2} \langle \tilde{B}^{2211} h_{|11} h \rangle \tilde{V}) + \\
& + \partial_{22}(\langle \tilde{B}^{2222} h h \rangle \partial_{22} \tilde{V}) - 4 \partial_2(\frac{1}{\rho^2} \langle \tilde{B}^{1212} h_{|1} h_{|1} \rangle \partial_2 \tilde{V}) - \langle h \mu h \rangle \omega^2 \tilde{V} = 0.
\end{aligned}$$

Zapisując odpowiednie warunki brzegowe dla nieznanych funkcji $\tilde{w}^0(x_2)$ i $\tilde{V}(x_2)$ wyznaczamy z powyższych równań częstości drgań własnych dla modelu tolerancyjnego.

Model asymptotyczny

Oznaczając $D_r(\rho) = B_{eff}^{2222}$, $D_\varphi(\rho) = \rho^4 B_{eff}^{1111}$, $D_{r\varphi}(\rho) = \rho^2 B_{eff}^{1122}$ i ograniczając analizę do drgań o postaci biegunowo symetrycznej, otrzymujemy z równania (4.25) równania ruchu rozpatrywanej płyty pierścieniowej dla modelu asymptotycznego.

$$\begin{aligned}
& \partial_{22}(D_r \partial_{22} w^0) + \frac{2}{\rho} \partial_2((D_r - \frac{1}{2} D_{r\varphi}) \partial_{22} w^0) + \frac{1}{\rho} \partial_{22}(D_{r\varphi} \partial_2 w^0) + \\
& - \frac{1}{\rho^2} \partial_2(D_\varphi \partial_2 w^0) + \frac{1}{\rho^3} D_\varphi \partial_2 w^0 + \langle \mu \rangle \ddot{w}^0 = 0.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Powyższe równanie reprezentuje jedno cząstkowe równanie różniczkowe dla średniej wartości przemieszczenia $w^0(.,t)$ i ma postać podobną do równania ruchu płyty kołowej z cylindryczną ortotropią (Borsuk (1960)).

4.4.2.2. Przykłady obliczeń

Częstości drgań własnych określimy dla dwóch przypadków płyt pierścieniowych: płyty zamocowanej i swobodnie podpartej na brzegach. Obliczenia wykonamy dla płyty zamocowanej metodą Galernika, a dla płyty swobodnie podpartej metodą różnic skończonych.

Płyta pierścieniowa zamocowana na brzegach

Częstości drgań własnych rozpatrywanej płyty określimy dla modelu asymptotycznego opisanego równaniem (4.38). Równania ruchu (4.38) posiadają łagodnie zmienne funkcyjne współczynniki. Przyjmując, że współczynniki te są opisane funkcjami wolno zmiennymi w sensie asymptotycznym (tzn. wartości ich pochodnych mogą być pominięte jako pomijalnie małe w porównaniu z wartościami funkcji), możemy pominąć pochodne współczynników $D_r(\rho)$, $D_\varphi(\rho)$, $D_{r\varphi}(\rho)$ w równaniu (4.38). Otrzymamy wówczas następującą przybliżoną postać równań ruchu

$$\begin{aligned} D_r \partial_{2222} w^0 + \frac{2}{\rho} (D_r - \frac{1}{2} D_{r\varphi}) \partial_{222} w^0 + \frac{1}{\rho} D_{r\varphi} \partial_{222} w^0 + \\ - \frac{1}{\rho^2} D_\varphi \partial_{22} w^0 + \frac{1}{\rho^3} D_\varphi \partial_2 w^0 + \langle \mu \rangle \ddot{w}^0 = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Celem naszych obliczeń będzie porównanie wartości pierwszej częstości drgań własnych otrzymanych z równania (4.38) i przybliżonego równania (4.39).

Rozwiązania równań (4.38) i (4.39) będziemy poszukiwać w postaci funkcji o rozdzielonych zmiennych

$$w^0(\rho, t) = \tilde{w}^0(\rho) e^{i\omega t}. \quad (4.40)$$

Podstawiając wyrażenie (4.40) do równania (4.39), otrzymujemy równanie dla nieznanej funkcji $\tilde{w}^0(\rho)$

$$L(\tilde{w}^0(\rho)) = 0, \quad (4.41)$$

gdzie operator różniczkowy dany jest funkcją

$$\begin{aligned} L(\tilde{w}^0, \rho) = \partial_{22} (D_r \partial_{22} \tilde{w}^0) + \frac{2}{\rho} \partial_2 ((D_r - \frac{1}{2} D_{r\varphi}) \partial_{22} \tilde{w}^0) + \\ + \frac{1}{\rho} \partial_{22} (D_{r\varphi} \partial_2 \tilde{w}^0) - \frac{1}{\rho^2} \partial_2 (D_\varphi \partial_2 \tilde{w}^0) + \frac{1}{\rho^3} D_\varphi \partial_2 \tilde{w}^0 - \langle \mu \rangle \omega^2 \tilde{w}^0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Podstawiając wyrażenie (4.40) do przybliżonego równania ruchu (4.39), otrzymujemy następującą przybliżoną postać operatora różniczkowego

$$\begin{aligned} L(\tilde{w}^0, \rho) = D_r \partial_{2222} \tilde{w}^0 + \frac{2}{\rho} (D_r - \frac{1}{2} D_{r\varphi}) \partial_{222} \tilde{w}^0 + \\ + \frac{1}{\rho} D_{r\varphi} \partial_{222} \tilde{w}^0 - \frac{1}{\rho^2} D_\varphi \partial_{22} \tilde{w}^0 + \frac{1}{\rho^3} D_\varphi \partial_2 \tilde{w}^0 - \langle \mu \rangle \omega^2 \tilde{w}^0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

W przypadku płyty zamocowanej na obu brzegach funkcja $\tilde{w}^0(\rho)$ musi spełniać następujące warunki brzegowe

$$\begin{aligned} \tilde{w}^0(\rho)_{|\rho=R_1} &= 0, & \partial_\rho \tilde{w}^0(\rho)_{|\rho=R_1} &= 0, \\ \tilde{w}^0(\rho)_{|\rho=R_2} &= 0, & \partial_\rho \tilde{w}^0(\rho)_{|\rho=R_2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

W celu otrzymania rozwiązania równania (4.41) zastosujemy metodę Galerkina. Częstości drgań własnych płyty pierścieniowej o podłużnej gradacji własności otrzymamy z równania

$$\int_{R_1}^{R_2} L(f(\rho)) f(\rho) d\rho = 0. \quad (4.45)$$

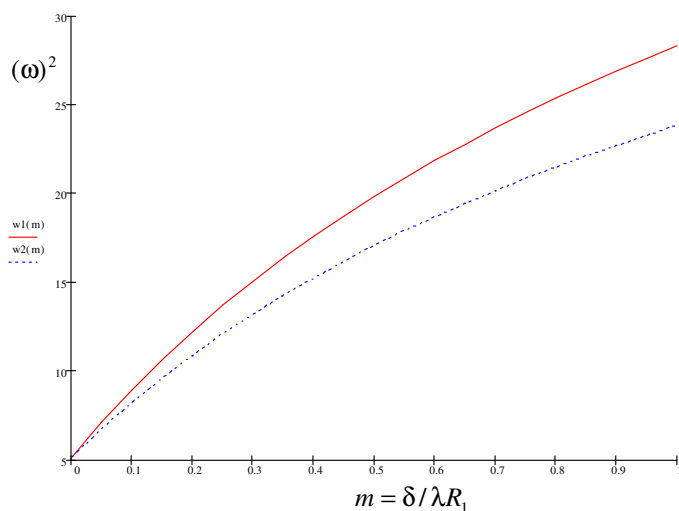
Jako funkcję $f(\rho)$ przyjmiemy funkcję opisującą pierwszą postać drgań pierścieniowej płyty zamocowanej wykonanej z materiału izotropowego

$$\begin{aligned} f(\rho) = A[I_0(\lambda_w \frac{\rho}{R_0}) + 4246.1688 K_0(\lambda_w \frac{\rho}{R_0}) - 615.2712 J_0(\lambda_w \frac{\rho}{R_0}) + \\ - 586.0203 Y_0(\lambda_w \frac{\rho}{R_0})], \end{aligned} \quad (4.46)$$

gdzie $\lambda_w = 2.3579$ jest pierwszą częstością drgań własnych izotropowej płyty pierścieniowej o promieniach: wewnętrznym $R_1 = 1.0$ m i zewnętrznym $R_2 = 3.0$ m.

Celem obliczeń numerycznych jest porównanie wartości pierwszej częstości drgań własnych otrzymanych z równania (4.38) z wartościami otrzymanymi z przybliżonego równania (4.39).

Na rys. 4.7 przedstawiono wykresy obu częstości drgań w zależności od bezwymiarowego parametru $m = \delta/\lambda R_1$ określającego stosunek szerokości żeber do wymiaru komórki na wewnętrznym brzegu. Czerwona linia ciągła przedstawia wykres częstości drgań uzyskanych z dokładnej postaci równania ruchu (4.38), a niebieska linia przerywana określa tę częstość otrzymaną z przybliżonej postaci równania ruchu (4.39). Obliczenia powyższe zostały wykonane dla stosunku modułów żeber i matrycy $E_{beams}/E_{matrix} = 15$ i stosunku gęstości masy $\mu_{beams}/\mu_{matrix} = 2.5$ ($v_{beams} = v_{matrix}$). Przyjęto parametr wielkości mikrostruktury $\lambda = \pi/40$.



Rys. 4.7. Wykres pierwszych częstości drgań własnych $(\omega)^2$:
w zależności od parametru $m = \delta/\lambda R_1$

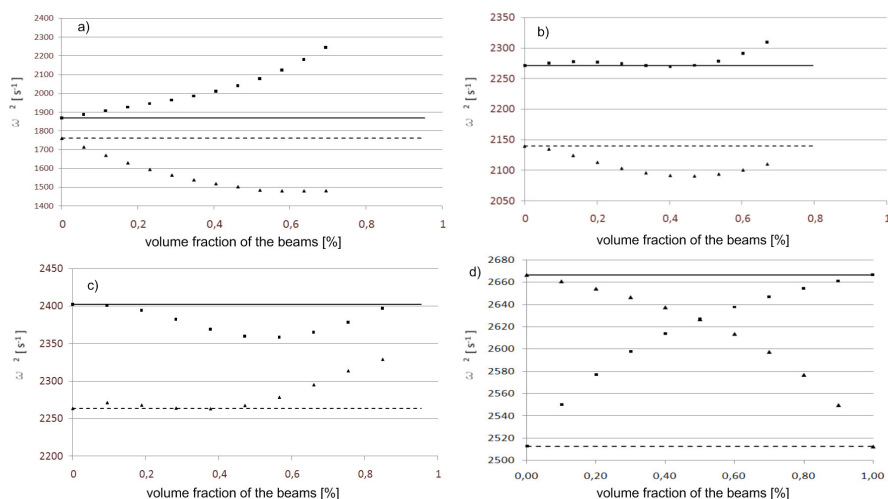
Z analizy wykresów na rys. 4.7 można stwierdzić, że różnice pomiędzy wartościami pierwszych częstości drgań otrzymanymi z dokładnego równania (4.38) i jego przybliżonej postaci (4.39) nie są pomijalnie małe. Stąd wniosek, że wyniki uzyskane z równań różniczkowych, w których pominięto pochodne uśrednionych modułów są obarczone błędem.

Płyta pierścieniowa swobodnie podparta na brzegach

Częstości drgań własnych określimy w tym przypadku korzystając z metody różnic skończonych. Celem tych obliczeń numerycznych będzie określenie wpływu udziałów objętościowych poszczególnych warstw na wartości pierwszej częstości drgań własnych i pokazanie, że dobierając odpowiednio ten udział objętościowy można uzyskać częstości drgań wyższe lub niższe od częstości dla identycznej płyty jednorodnej wykonanej z jednego lub drugiego materiału.

Rysunki 4.8a-d przedstawiają wykresy pierwszej częstości drgań dla płyt pierścieniowych o różnym promieniu wewnętrznym i stałej rozpiętości $L = R_2 - R_1 = 3$ m. Płyta jest wykonana z kompozytu stalowo-aluminiowego o następujących własnościach materiałowych poszczególnych składników; aluminium $E = 69$ GPa, $\rho = 2720$ kg/m³, $\nu = 0.3$, stal $E = 210$ GPa, $\rho = 7800$ kg/m³, $\nu = 0.3$. Linia ■ przedstawia wykresy częstości w przypadku,

gdy warstwy żeber są wykonane z aluminium, warstwy matrycy ze stali, natomiast linia $\blacktriangle$ przedstawia wykresy częstości, gdy warstwy żeber są wykonane ze stali, a warstwy matrycy z aluminium. Wykresy są wykonane w zależności od udziału objętościowego żeber w komórce. Wykresy na kolejnych rysunkach (4.8) przedstawiają wykresy pierwszej częstości drgań własnych płyty dla rosnącej wartości promienia wewnętrznego R_1 rys. 4.8a dla $R_1 = 4$ m, rys. 4.8b dla $R_1 = 8$ m, rys. 4.8c dla $R_1 = 12$ m i rys. 4.8d dla $R_1 = \infty$, czyli dla pasma płytowego o rozpiętości $L = R_2 - R_1 = 3$ m.



Rys. 4.8. Pierwsza częstość drgań własnych płyty pierścieniowej:

a) dla $R_1 = 4$ m, b) dla $R_1 = 8$ m, c) dla $R_1 = 12$ m, d) dla $R_1 = \infty$,

Linia---- częstość dla jednorodnej płyty aluminiowej, linia — dla jednorodnej płyty stalowej

Z rys. 4.8 możemy wywnioskować, że im mniejszy wewnętrzny promień płyty pierścieniowej, tym większa różnica w częstościach drgań dla płyty wykonanej z materiału o podłużnej gradacji własności i analogicznej płyty jednorodnej wykonanej ze stali lub aluminium. W przypadku płyty o promieniu wewnętrznym $R_1 = 4$ m (rys. 4.8a) dla udziału żebra w szerokości komórki wynoszącym 70% możemy uzyskać częstość drgań 16% mniejszą niż częstość dla jednorodnej płyty aluminiowej i 20% wyższą niż częstość dla jednorodnej płyty stalowej. W przypadku, gdy promień wewnętrzny rośnie, ta właściwość dla płyt pierścieniowych o podłużnej gradacji własności swobodnie podpartych na brzegach zanika. Dla płyty o $R_1 = \infty$ (pasma płytowego) mamy do czynienia

z kompozytem o stałym udziale objętościowym żeber w komórce. Płyta przestaje być płytą wykonaną z materiału o podłużnej gradacji własności, równania ruchu mają wówczas stałe współczynniki i wartości pierwszej częstości drgań własnych znajdują się pomiędzy wartościami dla jednorodnej płyty stalowej lub aluminiowej.

5. Drgania cienkich płyt pierścieniowych o podłużnej gradacji własności na dwuparametrowym niejednorodnym podłożu sprężystym

5.1. Przedmiot analizy

Rozdział ten jest poświęcony otrzymaniu i zbadaniu uśrednionego modelu matematycznego płyty o podłużnej gradacji własności spoczywającej na dwuparametrowym mikroniejednorodnym podłożu sprężystym. Rozpatrywana cienka płyta o funkcyjnej gradacji własności ma taką samą budowę jak płyta analizowana w rozdziale 4 (rys. 4.2). Płyta ta oddziałuje z podłożem sprężystym, którego własności są różne dla obszarów kontaktu z żebrami i warstwami matrycy.

Przyjęty model podłoża jest uogólnieniem podłoża typu Winklera. Wprowadzony dodatkowy moduł odpowiadający poziomej (równoległej do powierzchni środkowej płyty) deformacji podłoża umożliwia bardziej dokładne opisanie wzajemnego oddziaływania płyty i podłoża. Przykładowo można dzięki temu opisać płyty spoczywające na gęstej sieci pali posiadających sztywność na zginanie. Podłoże jest opisane przez dwa parametry: pionowy moduł podłoża k'_z dla obszaru pod warstwami żeber i k''_z dla obszaru pod warstwami matrycy oraz poziomy moduł podłoża k'_t dla obszaru pod warstwami żeber i k''_t dla obszaru pod warstwami matrycy. Reakcje podłoża dla płyty pierścieniowej mają trzy składowe proporcjonalne do przemieszczeń dolnej powierzchni płyty, na którą działają. Podobnie jak w pracy Gomulińskiego (1967) przyjmujemy, że siły reakcji podłoża odpowiednio w kierunku osi z, ρ, φ są określone wyrażeniami

$$R_z = k_z w, \quad R_\rho = k_t \frac{h}{2} \partial_\rho w, \quad R_\varphi = k_t \frac{h}{2} \frac{1}{\rho} \partial_\varphi w, \quad (5.1)$$

gdzie $w(\rho, \varphi)$ jest przemieszczeniem pionowym dowolnego punktu (ρ, φ) powierzchni środkowej.

Przyjmujemy, że, analogicznie jak płyta, podłoże posiada λ -periodyczną mikrostrukturę wzdłuż współrzędnej ξ^1 i łagodnie zmienne uśrednione własności wzdłuż prostopadłego kierunku współrzędnej ξ^2 .

Wprowadźmy w przestrzeni fizycznej zajmowanej przez płytę biegunowy układ współrzędnych $O\xi^1\xi^2\xi^3$. Ustalając $\mathbf{x} \equiv (\xi^1, \xi^2)$ i $z = \xi^3$ przyjmujemy, że niezdeformowana płyta zajmuje obszar $\Omega \equiv \{(\mathbf{x}, z) : -h/2 \leq z \leq h/2, \mathbf{x} \in \Pi\}$, gdzie Π jest powierzchnią środkową płyty, a h jej grubością, $(\xi^1, \xi^2) \in [0, \varphi_k] \times [R_0, R_k]$, $0 < \varphi_k < 2\pi$, $0 < R_0 < R_k$. Dowolna komórka o środku w punkcie (ξ^1, ξ^2) będzie określana jako $\Delta(\xi^1, \xi^2) = (\xi^1 - \lambda/2, \xi^1 + \lambda/2) \times \{\xi^2\}$, gdzie λ , $0 < \lambda < \alpha$ jest znanym bezwymiarowym parametrem rozmiaru mikrostruktury. Grubości jednorodnych warstw są określone jako $\xi^2 \lambda'(\xi^2)$ i $\xi^2 \lambda''(\xi^2) = \delta$, $\delta = \text{const}$, gdzie $\lambda'(\xi^2) + \lambda''(\xi^2) = \lambda$. Operator uśredniania (2.5) dla płyty kołowej przyjmie postać

$$\langle f \rangle(\xi^1, \xi^2) = \frac{1}{\lambda} \int_{\xi^1 - \lambda/2}^{\xi^1 + \lambda/2} f(\eta, \xi^2) d\eta, \quad (5.2)$$

gdzie $\xi^1 \in [\lambda/2, \varphi_k - \lambda/2]$, $\xi^2 \in [R_0, R_k]$.

Indeksy i, k, l będą przebiegały ciąg 1, 2, 3, a α, β, δ ciąg 1, 2. Zmienną czasową oznaczmy przez t . Tensor metryczny dla układu $O\xi^1\xi^2$ oznaczmy przez $g_{\alpha\beta}$, przez $\epsilon_{\alpha\beta}$ tensor Ricciego, przez $\partial_\alpha = \partial/\partial\xi^\alpha$ pochodną, a kreska pionowa przed dolnymi wskaźnikami będzie oznaczać pochodną kowariantną w bazie $g_{\alpha\beta}$.

Równania modeli uśrednionych otrzymamy w ramach teorii cienkich płyt na podłożu sprężystym. Oznaczając odpowiednio przez $w(\xi^\alpha, t)$, $p(\xi^\alpha, t)$, μ , k_z , k_t , przemieszczenie powierzchni środkowej, obciążenie, gęstość masy odniesioną do powierzchni środkowej płyty i moduły podłoża sprężystego, otrzymujemy:

– relację odkształcenia przemieszczenia

$$\kappa_{\alpha\beta}(\xi^\gamma) = -w(\xi^\gamma)_{|\alpha\beta}, \quad (5.3)$$

– energię odkształcenia

$$E(\xi^\lambda) = \frac{1}{2} B^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} k_z (w)^2 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{4} k_t \delta^{\alpha\beta} \partial_\alpha w \partial_\beta w, \quad (5.4)$$

gdzie: $\delta^{\alpha\beta}$ ma charakter wielkości tensorowej i

$$B^{\alpha\beta\gamma\mu} = 0.5B(g^{\alpha\mu} g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\mu} + v(\epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon^{\beta\mu} + \epsilon^{\alpha\mu} \epsilon^{\beta\gamma})), \quad B = Eh^3/12(1 - \nu^2),$$

– energię kinetyczną zdefiniowaną przez

$$K(\xi^\alpha) = \frac{1}{2} \mu \dot{w} \cdot \dot{w}. \quad (5.5)$$

W celu uzyskania równań ruchu zdefiniujemy lagrangian

$$\mathcal{L}(\cdot, w|_{\alpha\beta}, \dot{w}, w|_\alpha, w) = K(\cdot, \dot{w}) - E(\cdot, w_{\alpha\beta}, w|_\alpha, w). \quad (5.6)$$

Definiując funkcjonal działania (2.8) w postaci

$$\mathcal{A}(w(\cdot), p(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Pi} (\mathcal{L}(\cdot, w|_{\alpha\beta}, \dot{w}, w|_\alpha, w) + p(\cdot) w(\cdot)) d\xi^\alpha dt, \quad (5.7)$$

możemy zapisać równania ruchu w postaci równań Eulera-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{w}} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w|_{\alpha\beta}} \right)_{|\alpha\beta} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w|_\alpha} \right)_{|\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = p. \quad (5.8)$$

Ten bezpośredni opis prowadzi do równań ruchu z nieciągłymi i silnie oscylującymi współczynnikami. Stąd jest on zbyt skomplikowany do zastosowań inżynierskich i obliczeń numerycznych.

5.2. Model tolerancyjny

Uśrednione równania ruchu modelu tolerancyjnego otrzymamy korzystając z techniki tolerancyjnej aproksymacji w zastosowaniu do uśredniania lagrangianu (5.6). W tym celu dokonamy dekompozycji (2.5) pola przemieszczeń $w(\xi^\alpha, t)$

$$w(\xi^1, \xi^2, t) = w^0(\xi^1, \xi^2, t) + h^A(\xi^\alpha) V_A(\xi^1, \xi^2, t), \quad A = 1, \dots, N, \quad (5.9)$$

gdzie wolno zmienne funkcje $w^0(\cdot, \xi^2, t) \in SV_\delta^2(\Pi, \Delta)$, $V_A(\cdot, \xi^2, t) \in SV_\delta^2(\Pi, \Delta)$ są podstawowymi niewiadomymi modelu. Znane funkcje kształtu fluktuacji przemieszczeń $h^A(\cdot, \xi^2)$ są λ -periodycznymi funkcjami współrzędnej ξ^1 , zależnymi od ξ^2 .

Podstawiając prawa stronę równania (5.9) do funkcjonału (5.6) i korzystając z zasad tolerancyjnej aproksymacji, otrzymujemy funkcjonal działania (2.17) w postaci

$$\mathcal{A}_h(w^0, V_A) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Pi} (\langle \mathcal{L}_h \rangle + \langle p(\cdot) \rangle w^0(\cdot) + \langle p(\cdot) h^A(\cdot) \rangle V_A(\cdot)) d\xi^\alpha dt, \quad (5.10)$$

gdzie uśredniony lagrangian (5.6) jest określony wyrażeniem

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_h \rangle &= \langle \xi^\alpha, w^0, \partial_\alpha w^0, w^0|_{\alpha\beta}, V_{A|22}, V_{A|2}, V_A, \dot{w}^0, \dot{V}_A \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle B^{\alpha\beta\gamma\mu} \rangle w^0|_{\alpha\beta} w^0|_{\gamma\mu} + \langle B^{11\gamma\mu} h^A|_{11} \rangle V_A w^0|_{\gamma\mu} + 2 \langle B^{12\gamma\mu} h^A|_1 \rangle V_{A|2} w^0|_{\gamma\mu} + \\ &+ \langle B^{22\gamma\mu} h^A \rangle V_{A|22} w^0|_{\gamma\mu} + \frac{1}{2} \langle B^{1111} h^A|_{11} h^B|_{11} \rangle V_A V_B + \langle B^{1122} h^A|_{11} h^B \rangle V_A V_{B|22} + \\ &+ 2 \langle B^{1212} h^A|_1 h^B|_1 \rangle V_{A|2} V_{B|2} + \frac{1}{2} \langle B^{2222} h^A h^B \rangle V_{A|22} V_{B|22} + \\ &+ \frac{1}{2} \langle k_z \rangle w^0 w^0 + \langle k_z h^A \rangle w^0 V_A + \frac{1}{2} \langle k_z h^A h^B \rangle V_A V_B + \frac{h^2}{8} \langle k_t \rangle \delta^{\alpha\beta} \partial_\alpha w^0 \partial_\beta w^0 + \\ &+ \frac{h^2}{4} \langle k_t h^A|_1 \rangle \delta^{1\beta} \partial_\beta w^0 V_A + \frac{h^2}{4} \langle k_t h^A \rangle \delta^{2\beta} \partial_\beta w^0 \partial_2 V_A + \frac{h^2}{8} \langle k_t h^A|_1 h^B|_1 \rangle \delta^{11} V_A V_B + \\ &+ \frac{h^2}{8} \langle k_t h^A h^B \rangle \delta^{22} \partial_2 V_A \partial_2 V_B + \frac{1}{2} \langle \mu \rangle \dot{w}^0 \dot{w}^0 + \langle \mu h^A \rangle \dot{w}^0 \dot{V}_A + \frac{1}{2} \langle \mu h^A h^B \rangle \dot{V}_B \dot{V}_A. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Stosując zasadę stacjonarności działania

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial \dot{w}^0} - \left(\frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial w^0|_{\alpha\beta}} \right)_{|\alpha\beta} + \left(\frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial w^0|_\alpha} \right)_{|\alpha} - \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial w^0} &= p, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial \dot{V}_A} - \left(\frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial V_{A|22}} \right)_{|22} + \left(\frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial V_{A|2}} \right)_{|2} - \frac{\partial \langle \mathcal{L}_h \rangle}{\partial V_A} &= \langle p h^A \rangle, \quad A=1, \dots, N, \end{aligned} \quad (5.12)$$

otrzymujemy z lagrangianu (5.11) następujący system uśrednionych równań ruchu dla modelu tolerancyjnego płyty o podłużnej gradacji własności spoczywającej na dwuparametrowym mikronejednorodnym podłożu sprężystym.

$$\begin{aligned} &(\langle B^{\alpha\beta\gamma\mu} \rangle w^0|_{\gamma\mu})_{|\alpha\beta} + (\langle B^{11\alpha\beta} h^A|_{11} \rangle V_A)_{|\alpha\beta} + 2(\langle B^{12\alpha\beta} h^A|_1 \rangle V_{A|2})_{|\alpha\beta} + \\ &+ (\langle B^{22\alpha\beta} h^A \rangle V_{A|22})_{|\alpha\beta} + \langle k_z \rangle w^0 + \langle k_z h^A \rangle V_A - \frac{h^2}{4} \partial_\alpha (\langle k_t \rangle \delta^{\alpha\beta} \partial_\beta w^0) + \\ &- \frac{h^2}{4} \partial_\alpha (\langle k_t h^A|_1 \rangle \delta^{1\alpha} V_A) - \frac{h^2}{4} \partial_\alpha (\langle k_t h^A \rangle \delta^{2\alpha} \partial_2 V_A) + \langle \mu \rangle \dot{w}^0 = \langle p \rangle, \end{aligned}$$

(5.13)

$$\begin{aligned}
 & (\langle B^{22\alpha\beta} h^A \rangle w^0_{|\alpha\beta})_{|22} + (\langle B^{1122} h^B_{|11} h^A \rangle V_B)_{|22} + (\langle B^{2222} h^A h^B \rangle V_{B|22})_{|22} + \\
 & - 4(\langle B^{1212} h^A_{|1} h^B_{|1} \rangle V_{B|2})_{|2} - 2(\langle B^{12\alpha\beta} h^A_{|1} \rangle w^0_{|\alpha\beta})_{|2} + \\
 & \langle B^{11\alpha\beta} h^A_{|11} \rangle w^0_{|\alpha\beta} + \langle B^{1111} h^A_{|11} h^B_{|11} \rangle V_B + \langle B^{1122} h^A_{|11} h^B \rangle V_{B|22} + \\
 & + \langle k_z h^A \rangle w^0 + \langle k_z h^A h^B \rangle V_B - \frac{h^2}{4} \partial_2 (\langle k_t h^A \rangle \delta^{2\beta} \partial_\beta w^0) + \\
 & + \frac{h^2}{4} \langle k_t h^A_{|1} \rangle \delta^{1\beta} \partial_\beta w^0 - \frac{h^2}{4} \partial_2 (\langle k_t h^A h^B \rangle \delta^{22} \partial_2 V_B) + \\
 & + \frac{h^2}{4} \langle k_t h^A_{|1} h^B_{|1} \rangle \delta^{11} V_B + \langle \mu h^A h^B \rangle \ddot{V}_B = \langle p h^A \rangle.
 \end{aligned}$$

Podkreślone składniki powyższego układu równań ruchu zależą od parametru wymiaru mikrostruktury. Równania (5.13) wraz z dekompozycją pola przemieszczeń (5.9) tworzą tolerancyjny model dynamiki cienkich płyt wykonanych z materiału podłużnej gradacji własności, w którym efektywne własności są stałe w kierunku osi ξ^1 i zmienne w kierunku osi ξ^2 , spoczywających na mikroniejednorodnym podłożu sprężystym.

5.3. Model asymptotyczny

Model asymptotyczny zbudujemy podobnie jak model tolerancyjny, poprzez uśrednienie funkcjonału działania oraz korzystając z równań Eulera-Lagrange.

Niech $\Delta_\varepsilon = (-\varepsilon\lambda/2, \varepsilon\lambda/2)$ będzie ciągiem komórek bazowych,

a $\Delta_\varepsilon(\xi^\alpha) = \xi^\alpha + \Delta_\varepsilon$ ciągiem komórek o środku w $\xi^\alpha \in \Pi$.

Przyjmijmy, że dla każdego $\xi^\alpha \in \Pi$ istnieje Δ -periodyczna aproksymacja $\tilde{\mathcal{L}}(y, \xi^2, w^0_{|\alpha\beta}, w^0_{|\alpha}, V_{A|22}, \partial_2 V_A, w^0, V_A, \dot{w}^0, \dot{V}_A)$, $y \in \Delta_\varepsilon(\xi^\alpha)$ lagrangianu $\mathcal{L}$.

Wyjściowym założeniem modelowania asymptotycznego jest dekompozycja pola przemieszczeń

$$w_\varepsilon(y, \xi^2, t) = w^0(y, \xi^2, t) + \varepsilon^2 \tilde{h}^A(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2) V_A(y, \xi^2, t), \quad y \in \Delta_\varepsilon(\xi^\alpha), \quad t \in (t_0, t_1), \quad (5.14)$$

gdzie funkcje $\tilde{h}^A(y, \xi^2)$ są periodyczną aproksymacją silnie oscylującej funkcji $h^A(\cdot)$ w $\Delta(\xi^\alpha)$. Z formuły (5.14) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha w_\varepsilon(y, \xi^2, t) &= \partial_\alpha w^0(y, \xi^2, t) + \varepsilon \partial_1 \tilde{h}^A\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2\right) V_A(y, \xi^2, t) + \\
&\quad + \varepsilon^2 \tilde{h}^A\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2\right) \partial_2 V_A(y, \xi^2, t), \\
\partial_{\alpha\beta} w_\varepsilon(y, \xi^2, t) &= \partial_{\alpha\beta} w^0(y, \xi^2, t) + \partial_{11} \tilde{h}^A\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2\right) V_A(y, \xi^2, t) + \\
&\quad + 2\varepsilon \partial_1 \tilde{h}^A\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2\right) \partial_2 V_A(y, \xi^2, t) + \varepsilon^2 \tilde{h}^A\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2\right) \partial_{22} V_A(y, \xi^2, t), \\
\dot{w}_\varepsilon(y, \xi^2, t) &= \dot{w}^0(y, \xi^2, t) + \varepsilon^2 \tilde{h}^A\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2\right) \dot{V}_A(y, \xi^2, t) \\
&\quad y \in \Delta_\varepsilon(\xi^\alpha). \tag{5.15}
\end{aligned}$$

Przechodząc z $\varepsilon \rightarrow 0$ i pamiętając, że $y \in \Delta_\varepsilon(\xi^\alpha)$, $\xi^\alpha \in \overline{\Pi}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
w^0(y, \xi^2, t) &= w^0(\xi^\alpha, t) + O(\varepsilon), \quad \partial_\alpha w^0(y, \xi^2, t) = \partial_\alpha w^0(\xi^\alpha, t) + O(\varepsilon), \\
\partial_{\alpha\beta} w^0(y, \xi^2, t) &= \partial_{\alpha\beta} w^0(\xi^\alpha, t) + O(\varepsilon), \\
V_A(y, \xi^2, t) &= V_A(\xi^\alpha, t) + O(\varepsilon), \quad \partial_2 V_A(y, \xi^2, t) = \partial_2 V_A(\xi^\alpha, t) + O(\varepsilon), \\
\partial_{22} V_A(y, \xi^2, t) &= \partial_{22} V_A(\xi^\alpha, t) + O(\varepsilon), \\
\dot{w}^0(y, \xi^2, t) &= \dot{w}^0(\xi^\alpha, t) + O(\varepsilon), \quad \dot{V}_A(y, \xi^2, t) = \dot{V}_A(\xi^\alpha, t) + O(\varepsilon). \tag{5.16}
\end{aligned}$$

Niech $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ będzie rodziną wielomianów określonych przez

$$\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2, w, \partial_\alpha w, \dot{w}, w|_{\alpha\beta}\right), \tag{5.17}$$

Biorąc pod uwagę (5.16) i podstawiając prawe strony wyrażeń (5.15) do (5.17), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2, w^0\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2, t\right) + O(\varepsilon), w|_{\alpha}^0\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2, t\right) + O(\varepsilon), \dot{w}^0\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2, t\right) + O(\varepsilon), \right. \\
\left. w|_{\alpha\beta}^0\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2, t\right) + \partial_{11} \tilde{h}^A\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2\right) V_A\left(\frac{y}{\varepsilon}, \xi^2, t\right) + O(\varepsilon)\right). \tag{5.18}
\end{aligned}$$

Przy przejściu z $\varepsilon \rightarrow 0$ składniki $O(\varepsilon)$ w wyrażeniach (5.15), (5.16) mogą być pominięte. Pamiętając o własnościach wartości średniej, Jikov i in. (1994), przy przejściu z $\varepsilon \rightarrow 0$ funkcje $\tilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ dążą słabo w $L_{loc}^\gamma(R^m)$, $\gamma \geq 1$ do

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_0(\xi^\alpha, w^0(\xi^\alpha, t), w_{|\alpha}^0(\xi^\alpha, t), \dot{w}^0(\xi^\alpha, t), w_{|\alpha\beta}^0(\xi^\alpha, t), V_A(\xi^\alpha, t)) = \\
 & = \frac{1}{|\Delta|_{\Delta(x)}} \int \tilde{\mathcal{L}}(y, \xi^\alpha, w^0(\xi^\alpha, t), w_{|\alpha}^0(\xi^\alpha, t), \dot{w}^0(\xi^\alpha, t), w_{|\alpha\beta}^0(\xi^\alpha, t) + \partial_{11} \tilde{h}^A(y, \xi^2) V_A(\xi^\alpha, t)) dy, \\
 & \xi^\alpha \in \overline{\Pi}.
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Po zastosowaniu powyższej formuły (5.19) do lagrangianu (5.6) otrzymujemy $\mathcal{L}_0$ w następującej jawnej postaci

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_0(\xi^\alpha, w^0, \partial_\alpha w^0, w_{|\alpha\beta}^0, V_{A|22}, V_{A|2}, V_A, \dot{w}^0) = \\
 & = \frac{1}{2} \langle B^{\alpha\beta\gamma\mu} \rangle w_{|\alpha\beta}^0 w_{|\gamma\mu}^0 + \langle B^{11\gamma\mu} \rangle h^A_{|11} > V_A w_{|\gamma\mu}^0 + \frac{1}{2} \langle B^{1111} \rangle h^A_{|11} h^B_{|11} > V_A V_B + \\
 & + \frac{1}{2} \langle k_z \rangle w^0 w^0 + \frac{h^2}{8} \langle k_t \rangle \delta^{\alpha\beta} \partial_\alpha w^0 \partial_\beta w^0 + \frac{1}{2} \langle \mu \rangle \dot{w}^0 \dot{w}^0.
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Asymptotyczny funkcjonal działania będzie zdefiniowany przez

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{A}_h^0(w^0, V_A) = \\
 & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Pi} (\mathcal{L}_0(\xi^\alpha, w^0(\cdot), w_{|\alpha}^0(\cdot), w_{|\alpha\beta}^0(\cdot), V_A(\cdot), \dot{w}^0(\cdot)) + \langle p(\cdot) \rangle w^0(\cdot)) d\xi^\alpha dt,
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

gdzie $\mathcal{L}_0$ jest określone wyrażeniem (5.20).

Z zasady stacjonarności działania otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{w}^0} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial w_{|\alpha\beta}^0} \right)_{|\alpha\beta} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial w_{|\alpha}^0} \right)_{|\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial w^0} = p, \\
 & \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial V_A} = 0, \quad A = 1, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Po podstawieniu wyrażenia (5.20) dla lagrangianu $\mathcal{L}_0$ otrzymujemy z rów. (5.22) następujące równania ruchu modelu asymptotycznego

$$\begin{aligned}
& (< B^{\alpha\beta\gamma\mu} > w^0_{|\gamma\mu})_{|\alpha\beta} + (< B^{11\alpha\beta} h^A_{|11} > V_A)_{|\alpha\beta} + < k_z > w^0 - \frac{h^2}{4} \partial_\alpha (< k_t > \delta^{\alpha\beta} \partial_\beta w^0) + \\
& + < \mu > \ddot{w}^0 = < p >, \\
& < B^{11\alpha\beta} h^A_{|11} > w^0_{|\alpha\beta} + < B^{1111} h^A_{|11} h^B_{|11} > V_B = 0.
\end{aligned}
\tag{5.23}$$

Można zauważyć, że z równań (5.23) możemy wyeliminować funkcję amplitudy fluktuacji przemieszczeń V_A

$$V_A = - \frac{< B^{11\gamma\mu} h^B_{|11} >}{< B^{1111} h^A_{|11} h^B_{|11} >} w^0_{|\gamma\mu}. \tag{5.24}$$

Definiując moduł efektywny

$$B_{eff}^{\alpha\beta\gamma\mu} = < B^{\alpha\beta\gamma\mu} > - \frac{< B^{11\gamma\mu} h^B_{|11} >}{< B^{1111} h^A_{|11} h^B_{|11} >} < B^{11\alpha\beta} h^A_{|11} >, \tag{5.25}$$

otrzymujemy z (5.23) następujące równanie ruchu

$$\begin{aligned}
& (< B_{eff}^{\alpha\beta\gamma\mu} > w^0_{|\gamma\mu})_{|\alpha\beta} + < k_z > w^0 - \frac{h^2}{4} \partial_\alpha (< k_t > \delta^{\alpha\beta} \partial_\beta w^0) + < \mu > \ddot{w}^0 = < p >.
\end{aligned}
\tag{5.26}$$

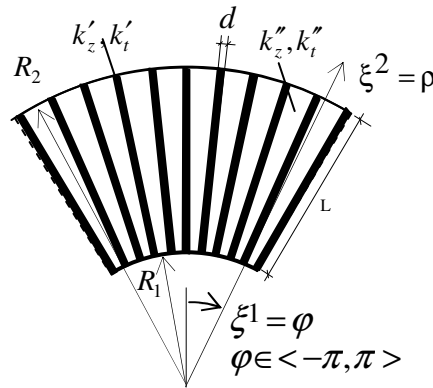
Całkowite przemieszczenie dowolnego punktu powierzchni środkowej rozpatrywanej płyty jest określone wyrażeniem

$$w(\xi^\alpha, t) = w^0 - h^A \frac{< B^{11\gamma\mu} h^B_{|11} >}{< B^{1111} h^A_{|11} h^B_{|11} >} w^0_{|\gamma\mu} \quad A=1, \dots, N. \tag{5.27}$$

Równanie (5.26) wraz z wyrażeniem (5.27) tworzą model asymptotyczny rozpatrywanych płyt. Równania te, podobnie jak równania (5.13) modelu tolerancyjnego, są równaniami różniczkowymi o gładkich funkcyjnych współczynnikach w przeciwieństwie do wyjściowych równań (5.8), które posiadały nieciągłe i silnie oscylujące współczynniki.

5.4. Drgania własne płyt o podłużnej gradacji własności na mikroniejednorodnym dwuparametrowym podłożu sprężystym

Zastosowanie otrzymanych uśrednionych równań zilustrujemy prostym przykładem dotyczącym znalezienia częstości drgań własnych płyty pierścieniowej spoczywającej na dwuparametrowym podłożu sprężystym. Analizę naszą ograniczymy do znalezienia częstości drgań o postaci biegunowo symetrycznej. Zbadamy wpływ wzajemnych relacji pomiędzy wartościami modułów podłoża na wartości częstości drgań. Wartości modułów podłoża pod żebrami oznaczmy przez k'_z – moduł pionowy i k'_t – moduł poziomy podłoża, oraz w obszarach pod matrycą przez k''_z – moduł pionowy i k''_t – moduł poziomy (rys. 5.1). Oznaczenia dla składników płyty są analogiczne jak na rys. 4.6.



Rys. 5.1. Fragment powierzchni środkowej płyty z FGM
na dwuparametrowym podłożu sprężystym

W dalszych rozważaniach przyjmiemy, analogicznie jak w rozdziale 4, tylko jedną funkcję kształtu fluktuacji przemieszczeń $h(\cdot)$

$$h = \lambda^2 (\cos(2\pi\xi^1/\lambda) + C), \quad (5.28)$$

gdzie λ jest wymiarem komórki. Funkcja $C(\xi^2)$ określona z warunku $\langle \mu h \rangle = 0$ ma postać

$$C = \frac{\lambda(\mu_1 - \mu_2)\xi^2 \sin(\pi\delta/\xi^2\lambda)}{\pi(\mu_1\delta + \mu_2(\xi^2\lambda - \delta))}. \quad (5.29)$$

Stąd również tylko jedna funkcja amplitudy fluktuacji przemieszczeń $V(\xi^\alpha, t)$ w równaniach ruchu.

Model tolerancyjny

Definiując odpowiednio składowe fizyczne modułów sztywności płyty $\tilde{B}^{2222} = B^{2222}$, $\tilde{B}^{1122} = \rho^2 B^{1122}$, $\tilde{B}^{1111} = \rho^4 B^{1111}$ oraz modułów podłoża $k\delta^{11} = k/\rho^2$, $k\delta^{22} = k$ i korzystając z definicji pochodnej kowariantnej, otrzymujemy z równań (5.13) następujące równania ruchu dla drgań o postaci biegunowo symetrycznej

$$\begin{aligned} & \partial_{22}(<\tilde{B}^{2222} > \partial_{22} w^0) + \frac{1}{\rho} \partial_{22}(<\tilde{B}^{2211} > \partial_2 w^0) + \frac{2}{\rho} \partial_2(<\tilde{B}^{2222} > \partial_{22} w^0) + \\ & + \frac{1}{\rho^3} <\tilde{B}^{1111} > \partial_2 w^0 - \frac{1}{\rho^2} \partial_2(<\tilde{B}^{1111} > \partial_2 w^0) - \frac{1}{\rho} \partial_2(<\tilde{B}^{2211} > \partial_{22} w^0) + \\ & + \frac{2}{\rho^4} <\tilde{B}^{2211} h_{|11} > V - \frac{2}{\rho^3} \partial_2(<\tilde{B}^{2211} h_{|11} > V) + \frac{1}{\rho^2} \partial_{22}(<\tilde{B}^{2211} h_{|11} > V) + \\ & + \frac{2}{\rho^4} <\tilde{B}^{1111} h_{|11} > V - \frac{1}{\rho^3} \partial_2(<\tilde{B}^{1111} h_{|11} > V) + \partial_{22}(<\tilde{B}^{2222} h > \partial_{22} V) + \\ & + \frac{2}{\rho} \partial_2(<\tilde{B}^{2222} h > \partial_{22} V) - \frac{1}{\rho} \partial_2(<B\tilde{H}^{1122} h > \partial_{22} V) \\ & + <k_z > w^0 + <k_z h > V - \frac{h^2}{4\rho} <k_t > \partial_2 w^0 - \frac{h^2}{4} \partial_2(<k_t > \partial_2 w^0) - \\ & - \frac{h^2}{4} \partial_2(<k_t h > \partial_2 V) + <\mu > \ddot{w}^0 = 0, \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^3} <\tilde{B}^{1111} h_{|11} > \partial_2 w^0 + \frac{1}{\rho^2} <\tilde{B}^{1122} h_{|11} > \partial_{22} w^0 + \frac{1}{\rho^4} <\tilde{B}^{1111} h_{|11} h_{|11} > V + \\ & + \frac{1}{\rho^2} <\tilde{B}^{1111} h_{|11} h > \partial_{22} V + \partial_{22}(\frac{1}{\rho} <\tilde{B}^{2211} h > \partial_2 w^0) + \\ & + \partial_{22}(<\tilde{B}^{2222} h > \partial_{22} w^0) + \partial_{22}(\frac{1}{\rho^2} <\tilde{B}^{2211} h_{|11} h > V) + \\ & + \partial_{22}(<\tilde{B}^{2222} h h > \partial_{22} V) - 4\partial_2(\frac{1}{\rho^2} <\tilde{B}^{1212} h_{|1} h_{|1} > \partial_2 V) + \\ & - \frac{h^2}{4} \partial_2(<k_t h > \partial_2 w^0) + <k_z h h > V - \frac{h^2}{4} \partial_2(<k_t h h > \partial_2 V) + \\ & + \frac{h^2}{4} <k_t h_{|1} h_{|1} > \frac{1}{\rho^2} V + <h \mu h > \ddot{V} = 0. \end{aligned}$$

Powyższe równania posiadają gładkie funkcyjne współczynniki i stąd w ogólnym przypadku do rozwiązania określonego problemu początkowo-brzegowego należy użyć znanych metod numerycznych.

Model asymptotyczny

Równanie modelu asymptotycznego dla drgań w postaci biegunowo symetrycznej, otrzymane z równania (5.26), ma postać

$$\begin{aligned} & \partial_{22}(D_r \partial_{22} w^0) + \frac{2}{\rho} \partial_2 ((D_r - \frac{1}{2} D_{r\varphi}) \partial_{22} w^0) + \frac{1}{\rho} \partial_{22}(D_{r\varphi} \partial_2 w^0) + \\ & - \frac{1}{\rho^2} \partial_2 (D_\varphi \partial_2 w^0) + \frac{1}{\rho^3} D_\varphi \partial_2 w^0 + \langle k_z \rangle w^0 - \frac{h^2}{4} \langle k_t \rangle \frac{1}{\rho} \partial_2 w^0 + \\ & - \frac{h^2}{4} \partial_2 (\langle k_t \rangle \partial_2 w^0) + \langle \mu \rangle \ddot{w}^0 = 0, \end{aligned} \quad (5.31)$$

gdzie $D_r(\rho) = B_{eff}^{2222}$, $D_\varphi(\rho) = \rho^4 B_{eff}^{1111}$, $D_{r\varphi}(\rho) = \rho^2 B_{eff}^{1122}$. Powyższe równanie reprezentuje jedno cząstkowe równanie różniczkowe dla średniej wartości przemieszczenia $w^0(.,t)$.

Poszukując częstości kołowych ω drgań harmonicznym płyty, przyjmujemy następującą postać nieznanej funkcji $w^0(.,t)$

$$w^0(x_2, t) = \tilde{w}^0(x_2) e^{i\omega t} \quad (5.32)$$

Po podstawieniu wyrażenia (5.32) do równania (5.31) otrzymujemy następujące równanie dla $\tilde{w}^0(x_2)$

$$L(\tilde{w}^0(\rho)) = 0, \quad (5.33)$$

gdzie operator różniczkowy dany jest funkcją

$$\begin{aligned} L(\tilde{w}^0, \rho) = & \partial_{22}(D_r \partial_{22} \tilde{w}^0) + \frac{2}{\rho} \partial_2 ((D_r - \frac{1}{2} D_{r\varphi}) \partial_{22} \tilde{w}^0) + \frac{1}{\rho} \partial_{22}(D_{r\varphi} \partial_2 \tilde{w}^0) + \\ & - \frac{1}{\rho^2} \partial_2 (D_\varphi \partial_2 \tilde{w}^0) + \frac{1}{\rho^3} D_\varphi \partial_2 \tilde{w}^0 + \langle k_z \rangle \tilde{w}^0 - \frac{h^2}{4} \langle k_t \rangle \frac{1}{\rho} \partial_2 \tilde{w}^0 + \\ & - \frac{h^2}{4} \partial_2 (\langle k_t \rangle \partial_2 \tilde{w}^0) - \langle \mu \rangle \omega^2 \tilde{w}^0. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Warunki brzegowe dla płyty pierścieniowej zamocowanej na obu brzegach mają następującą postać

$$\begin{aligned} \tilde{w}^0(\rho)|_{\rho=R_1} &= 0, & \partial_\rho \tilde{w}^0(\rho)|_{\rho=R_1} &= 0, \\ \tilde{w}^0(\rho)|_{\rho=R_2} &= 0, & \partial_\rho \tilde{w}^0(\rho)|_{\rho=R_2} &= 0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Częstości drgań własnych rozpatrywanej płyty, poszukiwane metodą Galernika, otrzymamy z równania

$$\int_{R_1}^{R_2} L(f(\rho)) f(\rho) d\rho = 0. \quad (5.36)$$

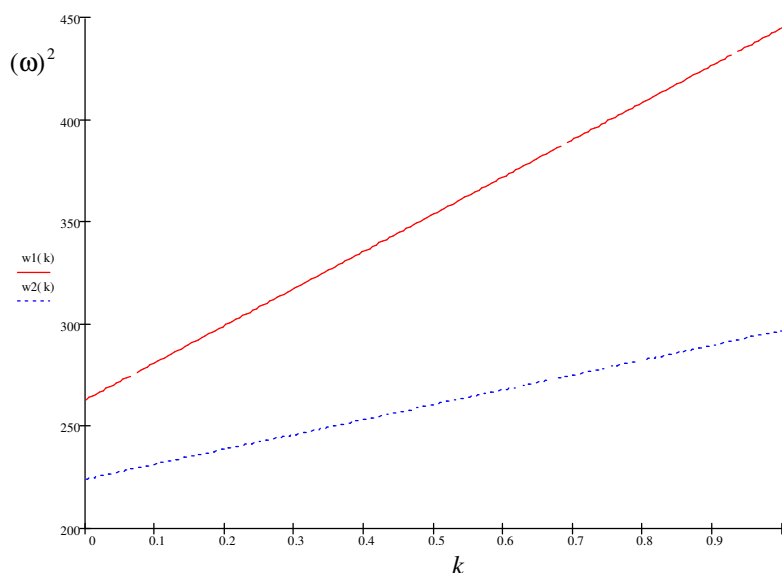
Jako funkcję $f(\rho)$ przyjmiemy funkcję opisującą pierwszą postać drgań pierścieniowej płyty zamocowanej wykonanej z materiału izotropowego

$$f(\rho) = A \left[I_0 \left(\lambda_w \frac{\rho}{R_0} \right) + 4246.1688 K_0 \left(\lambda_w \frac{\rho}{R_0} \right) - 615.2712 J_0 \left(\lambda_w \frac{\rho}{R_0} \right) + \right. \\ \left. - 586.0203 Y_0 \left(\lambda_w \frac{\rho}{R_0} \right) \right], \quad (5.37)$$

gdzie $\lambda_w = 2.3579$ jest pierwszą częstością drgań własnych izotropowej płyty pierścieniowej o promieniach: wewnętrznym $R_1 = 1.0$ m i zewnętrznym $R_2 = 3.0$ m.

Obliczenia numeryczne

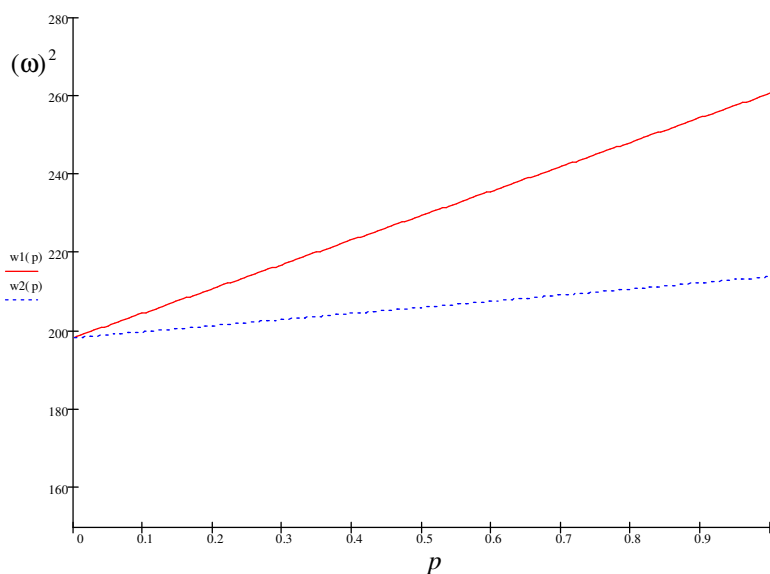
Obliczenia numeryczne zostały wykonane dla płyty pierścieniowej o promieniu wewnętrznym $R_1 = 1.0$ m i promieniu zewnętrznym $R_2 = 3.0$ m. Warstwy matrycy płyty (rys. 5.1) są wykonane z aluminium: $E = 69$ GPa, $\rho = 2720 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.3$, natomiast warstwy żeber o szerokości $d = 0.5\lambda R_1$ ($\lambda = 2\pi/60$) ze stali: $E = 210$ GPa, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.3$.



Rys. 5.2. Wykres kwadratów pierwszych częstości drgań własnych $(\omega)^2$:
w zależności od parametru $k = k_z'' / k_z'$

Celem obliczeń numerycznych jest ocena wpływu poszczególnych parametrów podłoża sprężystego na wartości pierwszej częstości drgań własnych.

Na rys. 5.2 przedstawiono wykresy kwadratów wartości pierwszej częstości drgań $(\omega)^2$ w zależności od parametru $k = k_z''/k_z'$, stosunku wartości pionowego modułu sprężystości podłoża pod warstwami matrycy do wartości pionowego modułu sprężystości podłoża pod warstwami żeber. Wykres częstości $\omega_1(k)$ (czerwona linia ciągła) został wykonany dla wartości pionowego modułu podłoża pod żebrami $k_z' = 50.0 \text{ MN/m}^3$ i wartości poziomego modułu podłoża $k_t' = 25.0 \text{ MN/m}^3$. Wykres częstości $\omega_2(k)$ (niebieska linia przerywana) został wykonany dla wartości pionowego modułu podłoża pod żebrami $k_z' = 20.0 \text{ MN/m}^3$ i wartości poziomego modułu podłoża $k_t' = 10.0 \text{ MN/m}^3$. Analizując rys. 5.2, można stwierdzić liniową zależność wartości pierwszej częstości drgań własnych od stosunku wartości pionowego modułu sprężystości podłoża pod żebrami do wartości modułu pod matrycą.



Rys. 5.3. Wykres kwadratów pierwszych częstości drgań własnych $(\omega)^2$:
w zależności od parametru $p = k_z / k_t$

Na rys. 5.3 przedstawiono wykresy kwadratów wartości pierwszej częstości drgań $(\omega)^2$ w zależności od parametru $p = k_z / k_t$, stosunku wartości pionowych modułów do wartości poziomych modułów sprężystości podłoża. Przyjęto takie same proporcje wartości modułów pod żebrami do wartości modułów

pod matrycą zarówno dla modułów pionowych, jak i poziomych $k'_z/k''_z = k'_t/k''_t = 0.4$. Wykres częstości $\omega_1(k)$ (czerwona linia ciągła) został wykonany dla wartości poziomego modułu podłoża pod matrycą $k''_t = 20.0 \text{ MN/m}^3$. Wykres częstości $\omega_2(k)$ (niebieska linia przerywana) został wykonany dla wartości poziomego modułu podłoża pod matrycą $k''_t = 5.0 \text{ MN/m}^3$. Analizując rys. 5.3, można stwierdzić znaczny wpływ poziomego modułu sprężystości podłoża na pierwszą częstość drgań własnych płyty. Częstość ta zależy w sposób liniowy od stosunku wartości pionowego modułu sprężystości podłoża do wartości modułu poziomego.

6. Stateczność cienkich płyt wykonanych z materiału o podłużnej gradacji własności

6.1. Przedmiot analizy

Przedmiotem analizy będą zagadnienia liniowej stateczności cienkich płyt sprężystych wykonanych z materiału o podłużnej gradacji makrowłasności. Budowa analizowanych płyt jest identyczna jak tych rozpatrywanych w rozdziale 4 (rys. 4.1 i rys. 4.2). Płyty mają λ -periodyczną mikrostrukturę wzdłuż współrzędnej ξ^1 i łagodnie zmienne uśrednione własności wzdłuż prostopadłego kierunku ξ^2 . Efektywne własności płyty są stałe wzdłuż współrzędnej ξ^1 i wolno zmienne wzdłuż współrzędnej ξ^2 .

W celu opisu płyty wprowadzimy prostokątny krzywoliniowy układ współrzędnych $O\xi^1\xi^2\xi^3$ w przestrzeni fizycznej zajmowanej przez płytę. Definiując $\mathbf{x} \equiv (\xi^1, \xi^2)$ i $z = \xi^3$ przyjmujemy, że niezdeformowana płyta zajmuje obszar $\Omega \equiv \{(\mathbf{x}, z) : -h/2 \leq z \leq h/2, \mathbf{x} \in \Pi\}$, gdzie Π jest powierzchnią środkową płyty, a h grubością płyty. Dla przyjętego na powierzchni środkowej krzywoliniowego układu współrzędnych $O\xi^1\xi^2$ użyjemy znanych oznaczeń: $g_{\alpha\beta}$ dla tensora metrycznego powierzchni, $\epsilon_{\alpha\beta}$ dla tensora Ricciego, natomiast pionowa kreska przed wskaźnikami będzie oznaczać pochodną kowariantną w bazie $\mathbf{g}_\alpha$. Definicje komórki bazowej i operatora uśredniania są analogiczne jak w rozdziale 4 (wzory (4.1) i (4.2)).

Rozważania nasze ograniczymy do technicznie nieliniowej teorii cienkich płyt (Woźniak [red.] (2001)). Oznaczając przemieszczenie powierzchni środkowej przez $w(\xi^\alpha, t)$ i obciążenie przez $p(\xi^\alpha)$, otrzymujemy:

- (i) relację odkształcenia – przemieszczenia oraz związki konstytutywne

$$\kappa_{\alpha\beta} = -w|_{\alpha\beta}, \quad m^{\alpha\beta} = -B^{\alpha\beta\gamma\mu} \kappa_{\gamma\mu}, \quad (6.1)$$

gdzie $B^{\alpha\beta\gamma\mu} = 0.5B(g^{\alpha\mu}g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma}g^{\beta\mu} + \nu(\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon^{\beta\mu} + \epsilon^{\alpha\mu}\epsilon^{\beta\gamma}))$, $B = Eh^3/12(1-\nu^2)$,

- (ii) równania równowagi

$$m^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} + (n^{\alpha\beta}|_\beta)|_\alpha + p = 0, \quad (6.2)$$

gdzie $n^{\alpha\beta}$ są siłami normalnymi działającymi w płaszczyźnie płyty.

Wprowadzając funkcjonał działania

$$\mathcal{A}(w(\cdot), p(\cdot)) = \int_{\Pi} (\mathcal{L}(\cdot, w_{|\alpha\beta}, w_{|\alpha}) + p(\cdot) w(\cdot)) d\xi^\alpha, \quad (6.3)$$

z lagrangianem określonym wyrażeniem

$$\mathcal{L}(\cdot, w_{|\alpha\beta}, w_{|\alpha}) = \frac{1}{2} B^{\alpha\beta\gamma\mu} w_{|\alpha\beta} w_{|\gamma\mu} + \frac{1}{2} n^{\alpha\beta} w_{|\alpha} w_{|\beta}, \quad (6.4)$$

otrzymujemy z zasady stacjonarności działania równania Eulera-Lagrange

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{|\alpha}}\right)_{|\alpha} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{|\alpha\beta}}\right)_{|\alpha\beta} = p. \quad (6.5)$$

Podstawiając wyrażenie (6.4) do równań (6.5), otrzymujemy równania równowagi (6.2). Równania te, jak zawsze w przypadku ciał z mikrostrukturą, posiadają nieciągłe i silnie oscylujące współczynniki.

6.2. Model tolerancyjny

Podobnie jak w przypadku opisu zagadnień dynamicznych dla płyt o funkcyjnej gradacji struktury, nasze rozważania rozpoczniemy od podstawowego założenia o dekompozycji pola przemieszczeń

$$w(\xi^1, \xi^2, t) = w^0(\xi^1, \xi^2, t) + h^A(\xi^\alpha) V_A(\xi^1, \xi^2, t) \quad A = 1, \dots, N, \quad (6.6)$$

gdzie wolno zmienne funkcje $w^0(\cdot, \xi^2, t) \in SV_\delta^2(\Pi, \Delta)$, $V_A(\cdot, \xi^2, t) \in SV_\delta^2(\Pi, \Delta)$ są podstawowymi niewiadomymi modelu. Znane funkcje kształtu fluktuacji przemieszczeń $h^A(\cdot)$ są λ -periodycznymi funkcjami współrzędnej ξ^1 , zależnymi od ξ^2 .

Uśredniony funkcjonał działania $\mathcal{A}_h$ otrzymamy podstawiając prawą stronę równania (6.6) do wyrażenia (6.4). Korzystając z zasad tolerancyjnej aproksymacji, otrzymujemy uśredniony funkcjonał działania w postaci

$$\mathcal{A}_h(w^0, V_A) = \int_{\Pi} (<\mathcal{L}_h> + <p(\cdot)> w^0(\cdot) + <p(\cdot) h^A(\cdot)> V_A(\cdot)) d\xi^\alpha, \quad (6.7)$$

gdzie uśredniony lagrangian jest określony wyrażeniem

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_h \rangle = & \frac{1}{2} \langle B^{\alpha\beta\gamma\mu} \rangle w^0_{|\alpha\beta} w^0_{|\gamma\mu} + \langle B^{11\gamma\mu} h^A_{|11} \rangle w^0_{|\gamma\mu} V_A + \langle B^{22\gamma\mu} h^A \rangle V_{A|22} w^0_{|\gamma\mu} + \\
& + 2 \langle B^{12\gamma\mu} h^A_{|1} \rangle w^0_{|\gamma\mu} V_{A|2} + \langle B^{1122} h^A_{|11} h^B \rangle V_A V_{B|22} + \frac{1}{2} \langle B^{1111} h^A_{|11} h^B_{|11} \rangle V_A V_B + \\
& + 2 \langle B^{1212} h^A_{|1} h^B_{|1} \rangle V_{A|2} V_{B|2} + \frac{1}{2} \langle B^{2222} h^A h^B \rangle V_{A|22} V_{B|22} + \\
& \frac{1}{2} \langle n^{\alpha\beta} \rangle w^0_{|\alpha} w^0_{|\beta} + \langle n^{1\beta} h^A_{|1} \rangle w^0_{|\beta} V_A + \langle n^{2\beta} h^A \rangle V_{A|2} w^0_{|\beta} + \\
& + \frac{1}{2} \langle n^{11} h^A_{|1} h^B_{|1} \rangle V_A V_B + \langle n^{12} h^A_{|1} h^B \rangle V_A V_{B|2} + \frac{1}{2} \langle n^{22} h^A h^B \rangle V_{A|2} V_{B|2}.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Stosując zasadę stacjonarności działania do funkcjonału (6.7), otrzymujemy następujące równania modelu tolerancyjnego opisujące stateczność płyty wykonanej z materiału o podłużnej gradacji własności

$$\begin{aligned}
& (\langle B^{\alpha\beta\gamma\mu} \rangle w^0_{|\gamma\mu})_{|\alpha\beta} + (\langle B^{\alpha\beta 11} h^A_{|11} \rangle V_A)_{|\alpha\beta} + (\langle B^{\alpha\beta 22} h^A \rangle V_{A|22})_{|\alpha\beta} + \\
& - (N^{\alpha\beta} w^0_{|\beta})_{|\alpha} = 0,
\end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}
& \langle B^{11\gamma\mu} h^A_{|11} \rangle w^0_{|\gamma\mu} + \langle B^{1122} h^A_{|11} h^B \rangle V_{B|22} + \langle B^{1111} h^A_{|11} h^B_{|11} \rangle V_B + \\
& + (\langle B^{22\gamma\mu} h^A \rangle w^0_{|\gamma\mu})_{|22} + (\langle B^{1122} h^A h^B_{|11} \rangle V_B)_{|22} + (\langle B^{2222} h^A h^B \rangle V_{B|22})_{|22} + \\
& - 2(\langle B^{12\gamma\mu} h^A_{|1} \rangle w^0_{|\gamma\mu})_{|2} - 4(\langle B^{1212} h^A_{|1} h^B_{|1} \rangle V_{B|2})_{|2} + \\
& - (N^{22} \langle h^A h^B \rangle V_{B|2})_{|2} + N^{11} \langle h^A_{|1} h^B_{|1} \rangle V_B = 0.
\end{aligned}$$

Otrzymując powyższe równania przyjęliśmy, że siły $n^{\alpha\beta}$ możemy przedstawić w postaci dekompozycji

$$n^{\alpha\beta}(\xi^\gamma) = N^{\alpha\beta}(\xi^\gamma) + \tilde{n}^{\alpha\beta}(\xi^\gamma), \tag{6.10}$$

gdzie $N^{\alpha\beta} = \langle n^{\alpha\beta} \rangle$ są funkcjami wolno zmiennymi i $\tilde{n}^{\alpha\beta}$ jest oscylującą częścią sił $n^{\alpha\beta}(\cdot)$, taką że $\langle \tilde{n}^{\alpha\beta} \rangle = 0$. Przekształcając równania (6.9) przyjęto, że oscylacyjna część $\tilde{n}^{\alpha\beta}(\cdot)$ sił $n^{\alpha\beta}(\cdot)$ jest bardzo mała w porównaniu do jej uśrednionej części $N^{\alpha\beta}(\cdot)$ i stąd $\langle n^{22} h^A h^B \rangle \cong N^{22} \langle h^A h^B \rangle$.

Równania (6.9) powinny być rozpatrywane łącznie z warunkami brzegowymi dla uśrednionych przemieszczeń $w^0_\alpha(\cdot)$ i amplitudy oscylacji przemieszczeń $V_A(\cdot)$. Otrzymane rozwiązania mają fizyczny sens tylko, jeżeli $w^0_\alpha(\cdot)$ i $V_A(\cdot)$ są funkcjami wolno zmiennymi względem współrzędnej ξ^1 . Warunek ten określa obszar poprawności zastosowań proponowanego modelu tolerancyjnego. Podkreślone składniki w równaniach (6.9) zależą od parametru

wymiaru mikrostruktury, stąd proponowane równania modelu tolerancyjnego uwzględniają wpływ wymiaru mikrostruktury na otrzymane rozwiązania.

6.3. Model asymptotyczny

Równania modelu asymptotycznego otrzymamy, podobnie jak równania modelu tolerancyjnego, w wyniku uśrednienia funkcjonału działania (6.3). Utwórzmy, podobnie jak w rozdziale 4, ciąg komórek bazowych $\Delta_\epsilon = (-\epsilon\lambda/2, \epsilon\lambda/2)$, a niech $\Delta_\epsilon(\xi^\alpha) = \xi^\alpha + \Delta_\epsilon$ będzie ciągiem komórek o środku w $\xi^\alpha \in \Pi$. Przyjmijmy, że dla każdego $\xi^\alpha \in \Pi$ istnieje Δ -periodyczna aproksymacja $\tilde{\mathcal{L}}(y, \xi^2, w_{|\alpha\beta}, w_{|\alpha})$, $y \in \Delta_\epsilon(\xi^\alpha)$ lagrangianu $\mathcal{L}$.

Wyjściowym założeniem, analogicznie jak w modelu tolerancyjnym, jest dekompozycja pola przemieszczeń

$$w_\epsilon(y, \xi^2) = w^0(y, \xi^2) + \epsilon^2 \tilde{h}^A\left(\frac{y}{\epsilon}, \xi^2\right) V_A(y, \xi^2), \quad y \in \Delta_\epsilon(\xi^\alpha), \quad (6.11)$$

gdzie funkcje $\tilde{h}^A(y, \xi^2)$ są periodyczną aproksymacją silnie oscylującej funkcji $h^A(\cdot)$ w $\Delta(\xi^\alpha)$. Dla modelu asymptotycznego nie musimy czynić założenia o wolnej zmienności podstawowych niewiadomych $w^0(y, \xi^2)$ i $V_A(y, \xi^2)$. Z dekompozycji (6.11) otrzymujemy analogiczne wyrażenia do podanych wzorami (4.14) i (4.15).

Jeżeli $\tilde{\mathcal{L}}_\epsilon$ będzie rodziną wielomianów dla $\tilde{\mathcal{L}}$ określoną przez

$$\tilde{\mathcal{L}}_\epsilon\left(\frac{y}{\epsilon}, \xi^2, w_{|\alpha}, w_{|\alpha\beta}\right), \quad (6.12)$$

to biorąc pod uwagę wzory (4.15) i podstawiając prawe strony wyrażeń (4.14) do (6.11), otrzymujemy

$$\tilde{\mathcal{L}}_\epsilon\left(\frac{y}{\epsilon}, \xi^2, w_{|\alpha}^0\left(\frac{y}{\epsilon}, \xi^2\right) + O(\epsilon), w_{|\alpha\beta}^0\left(\frac{y}{\epsilon}, \xi^2\right) + \partial_{11} \tilde{h}^A\left(\frac{y}{\epsilon}, \xi^2\right) V_A\left(\frac{y}{\epsilon}, \xi^2\right) + O(\epsilon)\right). \quad (6.13)$$

Przy przejściu z $\epsilon \rightarrow 0$ składniki $O(\epsilon)$ w wyrażeniu (6.13) mogą być pominięte. Pamiętając o własnościach wartości średniej, Jikov i in. (1994), przy przejściu z $\epsilon \rightarrow 0$ funkcje $\tilde{\mathcal{L}}_\epsilon$ dążą słabo w $L_{loc}^\gamma(R^m)$, $\gamma \geq 1$ do

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(\xi^\alpha, w_{|\alpha}^0(\xi^\alpha), w_{|\alpha\beta}^0(\xi^\alpha), V_A(\xi^\alpha)) = \\ = \frac{1}{|\Delta|_{\Delta(x)}} \int \tilde{\mathcal{L}}(y, \xi^\alpha, w_{|\alpha}^0(\xi^\alpha), w_{|\alpha\beta}^0(\xi^\alpha) + \partial_{11} \tilde{h}^A(y, \xi^2) V_A(\xi^\alpha)) dy, \quad \xi^\alpha \in \bar{\Pi}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Po zastosowaniu formuły (6.14) do zapisanych powyżej lagrangianów otrzymujemy $\mathcal{L}_0$ w następującej jawnej postaci

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(\xi^\alpha, w_{|\alpha}^0, w_{|\alpha\beta}^0, V_A) = \\ = \frac{1}{2} \langle B^{\alpha\beta\gamma\mu} \rangle w_{|\alpha\beta}^0 w_{|\gamma\mu}^0 + \langle B^{11\gamma\mu} h^A_{|11} \rangle w_{|\gamma\mu}^0 V_A + \frac{1}{2} \langle B^{1111} h^A_{|11} h^B_{|11} \rangle V_A V_B + \\ + \frac{1}{2} \langle n^{\alpha\beta} \rangle w_{|\alpha}^0 w_{|\beta}^0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Asymptotyczny funkcjonal działania będzie zdefiniowany przez

$$\mathcal{A}_h^0(w^0, V_A) = \int_{\Pi} (\mathcal{L}_0(\xi^\alpha, w_{|\alpha}^0(\cdot), w_{|\alpha\beta}^0(\cdot), V_A(\cdot)) + \langle p(\cdot) \rangle w^0(\cdot)) d\xi^\alpha, \quad (6.16)$$

gdzie $\mathcal{L}_0$ jest określone wyrażeniem (6.15).

Z zasady stacjonarności działania otrzymujemy

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial w_{|\alpha\beta}^0} \right)_{|\alpha\beta} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial w_{|\alpha}^0} \right)_{|\alpha} = p, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial V_A} = 0, \quad A = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Korzystając z wyrażenia (6.15) dla lagrangianu $\mathcal{L}_0$, otrzymujemy z równań (6.17) następujące równania opisujące stateczność płyty o podłużnej gradacji własności w modelu asymptotycznym

$$\begin{aligned} (\langle B^{\alpha\beta\gamma\mu} \rangle w_{|\gamma\mu}^0)_{|\alpha\beta} + (\langle B^{11\alpha\beta} h^A_{|11} \rangle V_A)_{|\alpha\beta} - (N^{\alpha\beta} w_{|\beta}^0)_{|\alpha} = \langle p \rangle, \\ \langle B^{11\alpha\beta} h^A_{|11} \rangle w_{|\alpha\beta}^0 + \langle B^{1111} h^A_{|11} h^B_{|11} \rangle V_B = 0. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Można zauważyć, że z równania (6.18)₂ możemy wyeliminować funkcję amplitudy oscylacji przemieszczeń V_A

$$V_A = - \frac{\langle B^{11\gamma\mu} h^B_{|11} \rangle}{\langle B^{1111} h^A_{|11} h^B_{|11} \rangle} w_{|\gamma\mu}^0. \quad (6.19)$$

Oznaczając przez $B_{eff}^{\alpha\beta\gamma\mu}$ moduł efektywny

$$B_{eff}^{\alpha\beta\gamma\mu} = \langle B^{\alpha\beta\gamma\mu} \rangle - \frac{\langle B^{11\gamma\mu} h^B_{|11} \rangle}{\langle B^{1111} h^A_{|11} h^B_{|11} \rangle} \langle B^{11\alpha\beta} h^A_{|11} \rangle, \quad (6.20)$$

otrzymujemy z równania (6.18) następujące równanie dla zagadnienia stateczności w modelu asymptotycznym

$$(\langle B_{eff}^{\alpha\beta\gamma\mu} \rangle w^0_{|\gamma\mu})_{|\alpha\beta} - (N^{\alpha\beta} w^0_{|\beta})_{|\alpha} = \langle p \rangle, \quad (6.21)$$

gdzie występuje tylko jedna niewiadoma funkcja uśrednionego przemieszczenia $w^0(\xi^\alpha)$. Całkowite przemieszczenie dowolnego punktu powierzchni środkowej $w(\xi^\alpha)$ jest określone wyrażeniem

$$w(\xi^\alpha) = w^0 - h^A \frac{\langle B^{11\gamma\mu} h^B_{|11} \rangle}{\langle B^{1111} h^A_{|11} h^B_{|11} \rangle} w^0_{|\gamma\mu} \quad A=1, \dots, N. \quad (6.22)$$

Równanie (6.21) wraz z wyrażeniem (6.22) tworzą system równań modelu asymptotycznego rozpatrywanych płyt.

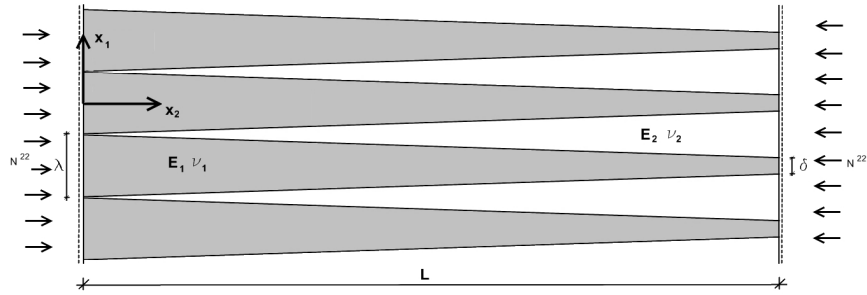
6.4. Przykłady stateczności liniowej płyt o podłużnej gradacji własności

Zbadamy liniową stateczność dwóch rodzajów płyt wykonanych z materiału o podłużnej gradacji własności. Rozważania ograniczymy do przypadku, gdy występuje tylko jedna funkcja kształtu fluktuacji przemieszczeń, stąd mamy $A = B = 1$, $h^A(\cdot) = h(\cdot)$ i $V_A(\xi^\alpha) = V(\xi^\alpha)$. Określenie dokładnej postaci funkcji kształtu fluktuacji przemieszczeń dla rozpatrywanej płyty jest bardzo trudne, stąd przyjmujemy jej przybliżoną postać. Zgodnie z warunkami podanymi w pracy (Woźniak, Michalak, Jędrysiak, [ed.] (2008)) funkcja kształtu powinna zależeć od λ^2 jako parametru i spełniać dla zagadnień statycznych warunek $\langle h \rangle = 0$. Dla rozpatrywanej komórki jednowymiarowej jako fluktuacyjną funkcję kształtu przyjmujemy

$$h = \lambda^2 \cos(2\pi\xi^1/\lambda), \quad (6.23)$$

6.4.1. Stateczność pasma płytowego o podłużnej gradacji własności

Przedmiotem rozważań będzie stateczność bifurkacyjna pasma płytowego swobodnie podpartego na brzegach. Budowa i fragment powierzchni środkowej rozpatrywanej płyty są przedstawione na rys. 6.1.



Rys. 6.1. Fragment powierzchni środkowej pasma płytowego o budowie mikronejednorodnej, Michalak, Wirowski (2009)

Model tolerancyjny

Przekształcając odpowiednio równania (6.9), otrzymujemy następujący system dwóch równań opisujących stateczność analizowanego pasma płytowego

$$L_1(w^0, V, N^{22}) = 0, \quad L_2(w^0, V, N^{22}) = 0, \quad (6.24)$$

gdzie użyte operatory różniczkowe mają postać

$$L_1(\cdot) = \partial_{22}(\langle B^{2222} \rangle \partial_{22} w^0 + \langle B^{2211} h_{11} \rangle V + \langle B^{2222} h \rangle \partial_{22} V) - N^{22} \partial_{22} w^0, \quad (6.25)$$

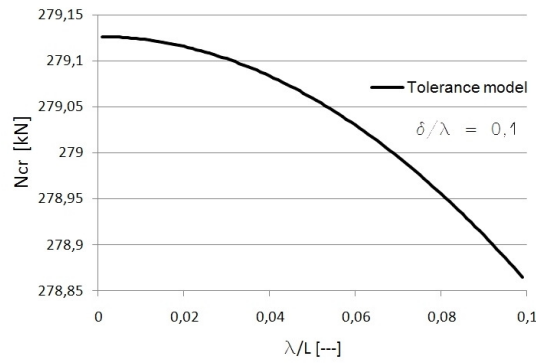
$$L_2(\cdot) = \partial_{22}(\langle B^{2222} h \rangle \partial_{22} w^0 + \langle B^{1122} h \partial_{11} h \rangle V + \langle B^{2222} h h \rangle \partial_{22} V) + \\ - 4 \partial_2(\langle B^{1212} \partial_1 h \partial_1 h \rangle \partial_2 V) + \langle B^{1122} \partial_{11} h \rangle \partial_{22} w + \langle B^{1122} \partial_{11} h h \rangle \partial_{22} V + \\ + \langle B^{1111} \partial_{11} h \partial_{11} h \rangle V - N^{22} \langle h h \rangle \partial_{22} V.$$

Otrzymane równania mają ciągłe, gładkie funkcyjne współczynniki i do ich rozwiązania użyjemy przybliżonej metody Galernika

$$\int_0^L L_1(f_w(x_2)) f_w(x_2) dx_2 = 0, \quad \int_0^L L_2(f_v(x_2)) f_v(x_2) dx_2 = 0, \quad (6.26)$$

gdzie jako funkcje $f_w(x_2)$ i $f_v(x_2)$ przyjęto funkcje spełniające przyjęte warunki brzegowe dla pasma płytowego $f_w(x_2) = w_1 \sin(\pi x_2 / L)$, $f_v(x_2) = V_1 \sin(\pi x_2 / L)$.

Korzystając z równań (6.26), możemy określić krytyczną wartość sił ściskających N^{22} . Na rys. 6.2 przedstawiono wykres wartości krytycznej siły N^{22} w zależności od proporcji wymiaru mikrostruktury λ do rozpiętości pasma L (Michalak, Wirowski (2009)). Wykres uzyskano dla płyty grubości $h = 0.03$ m, rozpiętości $L = 3$ m i proporcji materiałowych żeber do matrycy $E_1 / E_2 = 10$, $\nu_1 / \nu_2 = 2$.



Rys. 6.2. Wykres najmniejszej wartości siły krytycznej N^{22} w zależności od parametru λ / L

Model asymptotyczny

Przekształcając odpowiednio równanie (6.21), otrzymujemy równanie opisujące stateczność rozpatrywanego pasma płytowego dla modelu asymptotycznego

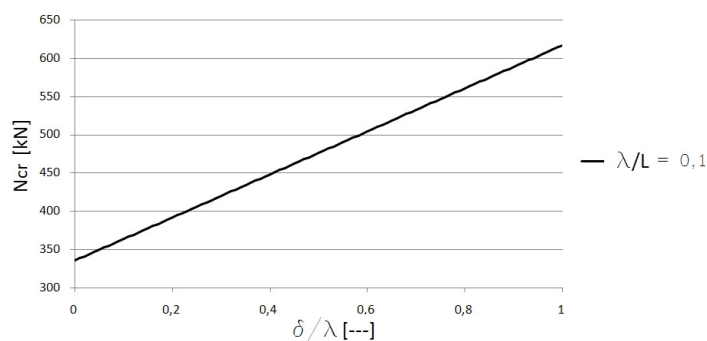
$$L(w^0, N^{22}) = \partial_{22}(< B_{eff}^{2222} > \partial_{22} w^0) - N^{22} \partial_{22} w^0 = 0. \quad (6.27)$$

Podobnie jak w modelu tolerancyjnym, rozwiązania równania (6.27) będziemy poszukiwać przybliżoną metodą Galerkina

$$\int_0^L L(f_w(x_2)) f_w(x_2) dx_2 = 0, \quad (6.28)$$

gdzie $f_w(x_2) = w_1 \sin(\pi x_2 / L)$.

Wykres najmniejszej wartości siły krytycznej w zależności od proporcji δ / λ (stosunku szerokości żeber na obu brzegach pasma) jest pokazany na rys. 6.3.

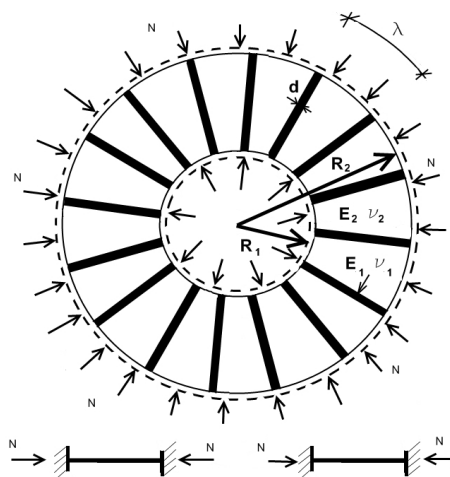


Rys. 6.3. Wykres najmniejszej wartości siły krytycznej $N^{22} = N_{cr}$ w zależności od parametru δ/λ

Powyższy wykres został wykonany dla analogicznych parametrów geometrycznych i materiałowych pasma płytowego, jak w modelu tolerancyjnym.

6.4.2. Stateczność płyty pierścieniowej o podłużnej gradacji własności

Stateczność płyty pierścieniowej wykonanej z materiału o podłużnej gradacji własności zilustrujemy w tym rozdziale prostym przypadkiem liniowej utraty stateczności o postaci biegunowo symetrycznej dla płyty pierścieniowej zamocowanej na obu brzegach (rys. 6.4).



Rys. 6.4. Płyta pierścieniowa o podłużnej gradacji własności

Model tolerancyjny

Definiując odpowiednio składowe fizyczne modułów sztywności płyty $\tilde{B}^{2222} = B^{2222}$, $\tilde{B}^{1122} = \rho^2 B^{1122}$, $\tilde{B}^{1111} = \rho^4 B^{1111}$ i składowe fizyczne sił normalnych $\tilde{N}^{11} = \rho^2 N^{11}$, $\tilde{N}^{22} = N^{22}$ oraz korzystając z definicji pochodnej kowariantnej dla układu biegunowego na powierzchni środkowej płyty, otrzymujemy z równań (6.9) następujące równania utraty stateczności o postaci biegunowo symetrycznej

$$\begin{aligned} & \partial_{22}(\langle \tilde{B}^{2222} \rangle \partial_{22} w^0) + \frac{1}{\rho} \partial_{22}(\langle \tilde{B}^{2211} \rangle \partial_2 w^0) + \frac{2}{\rho} \partial_2(\langle \tilde{B}^{2222} \rangle \partial_{22} w^0) + \\ & + \frac{1}{\rho^3} \langle \tilde{B}^{1111} \rangle \partial_2 w^0 - \frac{1}{\rho^2} \partial_2(\langle \tilde{B}^{1111} \rangle \partial_2 w^0) - \frac{1}{\rho} \partial_2(\langle \tilde{B}^{2211} \rangle \partial_{22} w^0) + \\ & + \frac{2}{\rho^3} \langle \tilde{B}^{2211} h_{|11} \rangle V - \frac{2}{\rho^3} \partial_2(\langle \tilde{B}^{2211} h_{|11} \rangle V) + \frac{1}{\rho^2} \partial_{22}(\langle \tilde{B}^{2211} h_{|11} \rangle V) + \\ & + \frac{2}{\rho^3} \langle \tilde{B}^{1111} h_{|11} \rangle V - \frac{1}{\rho^3} \partial_2(\langle \tilde{B}^{1111} h_{|11} \rangle V) + \partial_{22}(\langle \tilde{B}^{2222} h \rangle \partial_{22} V) + \\ & \frac{2}{\rho} \partial_2(\langle \tilde{B}^{2222} h \rangle \partial_{22} V) - \frac{1}{\rho} \partial_2(\langle \tilde{B}^{1122} h \rangle \partial_{22} V) - \tilde{N}^{11} \frac{1}{\rho} \partial_2 w^0 - \tilde{N}^{22} \partial_{22} w^0 = 0, \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^3} \langle \tilde{B}^{1111} h_{|11} \rangle \partial_2 w^0 + \frac{1}{\rho^2} \langle \tilde{B}^{1122} h_{|11} \rangle \partial_{22} w^0 + \frac{1}{\rho^4} \langle \tilde{B}^{1111} h_{|11} h_{|11} \rangle V + \\ & + \frac{1}{\rho^2} \langle \tilde{B}^{1111} h_{|11} h \rangle \partial_{22} V + \partial_{22}(\frac{1}{\rho} \langle \tilde{B}^{2211} h \rangle \partial_2 w^0) + \\ & + \partial_{22}(\langle \tilde{B}^{2222} h \rangle \partial_{22} w^0) + \partial_{22}(\frac{1}{\rho^2} \langle \tilde{B}^{2211} h_{|11} h \rangle V) + \\ & + \partial_{22}(\langle \tilde{B}^{2222} h h \rangle \partial_{22} V) - 4 \partial_2(\frac{1}{\rho^2} \langle \tilde{B}^{1212} h_{|1} h_{|1} \rangle \partial_2 V) + \\ & - \tilde{N}^{22} \langle h h \rangle \partial_{22} V + \tilde{N}^{11} \langle h_{|1} h_{|1} \rangle \frac{1}{\rho^2} V + \langle h \mu h \rangle \ddot{V} = 0. \end{aligned}$$

Równania (6.29) reprezentują system dwóch cząstkowych równań różniczkowych dla uśrednionego przemieszczenia $w(\cdot)$ i amplitudy oscylacji przemieszczeń $V(\cdot)$. Warunki brzegowe odpowiadające tym równaniom dla płyty zamocowanej na obu brzegach są dane przez

$$w^0(\rho = R_1) = w^0(\rho = R_2) = 0, \quad \partial_2 w^0(\rho = R_1) = \partial_2 w^0(\rho = R_2) = 0,$$

$$V(\rho = R_1) = V(\rho = R_2) = 0, \quad \partial_2 V(\rho = R_1) = \partial_2 V(\rho = R_2) = 0. \quad (6.30)$$

Powyższe równania opisują zagadnienie zginania płyty o podłużnej gradacji własności poddanej działaniu sił ściskających w płaszczyźnie środkowej płyty, dla modelu tolerancyjnego.

Model asymptotyczny

Równanie modelu asymptotycznego dla płyty pierścieniowej, otrzymane z równania (6.21), ma następującą postać

$$\partial_{22}(D_r \partial_{22} w^0) + \frac{2}{\rho} \partial_2 \left((D_r - \frac{1}{2} D_{r\varphi}) \partial_{22} w^0 \right) + \frac{1}{\rho} \partial_{22}(D_{r\varphi} \partial_2 w^0) - \frac{1}{\rho^2} \partial_2 (D_\varphi \partial_2 w^0) + \frac{1}{\rho^3} D_\varphi \partial_2 w^0 - N_r \partial_{22} w^0 - N_\varphi \frac{1}{\rho} \partial_2 w^0 = 0. \quad (6.31)$$

gdzie oznaczyliśmy $D_r = B_{eff}^{2222}$, $D_\varphi = \rho^4 B_{eff}^{1111}$, $D_{r\varphi} = \rho^2 B_{eff}^{2211}$, $N_\varphi = \rho^2 N^{11}$, $N_r = N^{22}$. Powyższe równanie reprezentuje jedno cząstkowe równanie różniczkowe dla uśrednionego przemieszczenia $w^0(\rho)$ i warunki brzegowe dla płyty zamocowanej na obu brzegach mają postać

$$w^0(\rho = R_1) = w^0(\rho = R_2) = 0, \quad \partial_2 w^0(\rho = R_1) = \partial_2 w^0(\rho = R_2) = 0. \quad (6.32)$$

Równanie (6.31) modelu asymptotycznego przedstawia pojedyncze równanie różniczkowe dla uśrednionego przemieszczenia $w^0(\rho)$ i ma postać podobną do równania opisującego stateczność płyty pierścieniowej o cylindrycznej ortotropii (Mossakowski (1960)). Równanie to zawiera gładkie funkcyjne współczynniki i w ogólnym przypadku do jego rozwiązania należy użyć znanych metod numerycznych.

Przykłady obliczeń

W celu otrzymania wartości krytycznej sił ściskających płytę użyjemy równań modelu asymptotycznego rozpatrywanej płyty pierścieniowej. Poszukując rozwiązania równania (6.31), musimy określić zależność pomiędzy brzegowymi siłami ściskającymi a siłami normalnymi w płycie N_r i N_φ . Związki pomiędzy tymi siłami przedstawimy podobnie jak w przypadku płyt pierścieniowych o cylindrycznej ortotropii (Mossakowski (1960))

$$N_r = -N \left(\frac{\rho}{R_2} \right)^{k-1} \quad N_\varphi = -N k \left(\frac{\rho}{R_2} \right)^{k-1}, \quad k = \sqrt{D_\varphi / D_r}. \quad (6.33)$$

Podstawiając związki (6.33) do równania (6.31), otrzymujemy równanie

$$L(\rho, w^0) = 0 \quad (6.34)$$

z operatorem

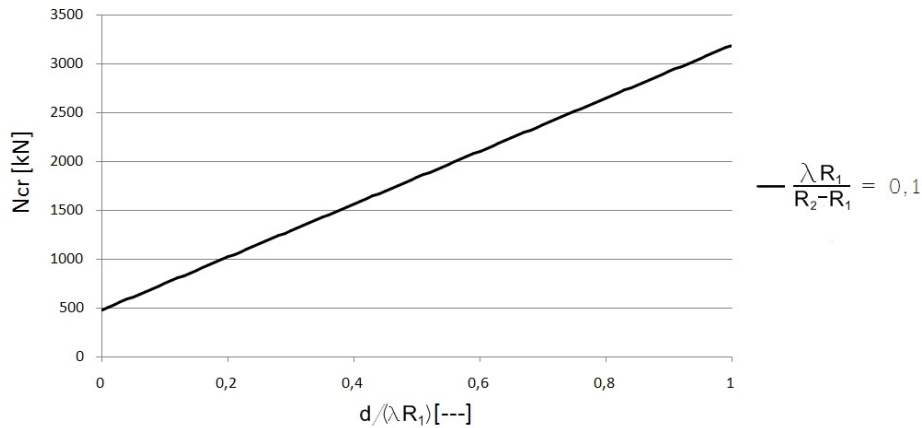
$$\begin{aligned}
L(\rho, w^0) = & \partial_{22}(D_r \partial_{22} w^0) + \frac{2}{\rho} \partial_2 ((D_r - \frac{1}{2} D_{r\varphi}) \partial_{22} w^0) + \frac{1}{\rho} \partial_{22}(D_{r\varphi} \partial_2 w^0) + \\
& - \frac{1}{\rho^2} \partial_2 (D_\varphi \partial_2 w^0) + \frac{1}{\rho^3} D_\varphi \partial_2 w^0 + N(\frac{\rho}{R_2})^{k-1} \partial_{22} w^0 - Nk(\frac{\rho}{R_2})^{k-1} \frac{1}{\rho} \partial_2 w^0.
\end{aligned}
\tag{6.35}$$

Operator różniczkowy (6.35) posiada gładkie funkcyjne współczynniki zależne od współrzędnej radialnej. Stąd do rozwiązania równ. (6.34) użyjemy metody przybliżonej. W celu uzyskania przybliżonego rozwiązania zagadnienia stateczności bifurkacyjnej rozpatrywanej płyty użyjemy metody Galernika. Najmniejszą wartość sił krytycznych otrzymamy z następującego równania

$$\int_{R_1}^{R_2} L(f(\rho)) f(\rho) d\rho = 0. \tag{6.36}$$

Jako funkcję $f(\rho)$ przyjmiemy pierwszą postać utraty stateczności dla izotropowej płyty pierścieniowej zamocowanej na brzegach o wymiarach geometrycznych $R_1 = 1.0$ m i $R_2 = 3.0$ m.

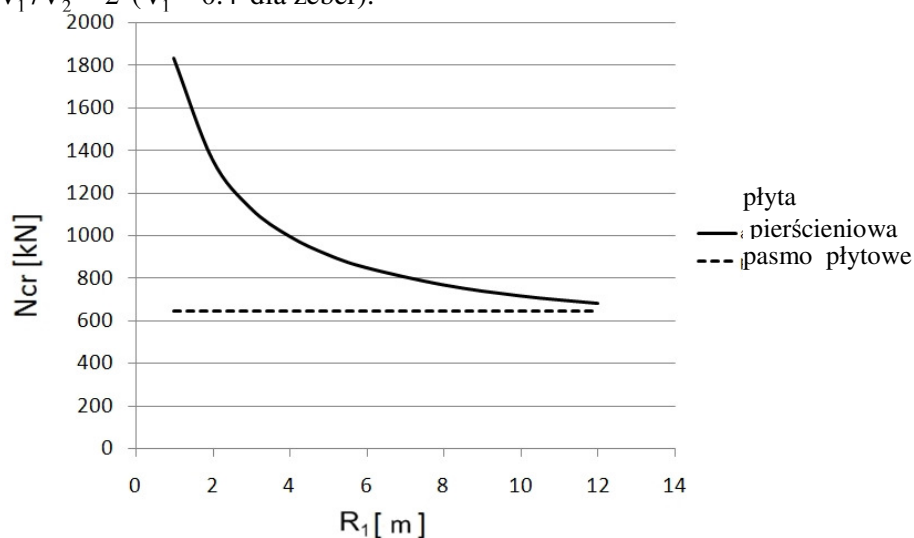
$$f(\rho) = w_1 (1.0 - 0.366 \ln \frac{\rho}{R_1} + 1.604 J_0(3.154 \frac{\rho}{R_1}) - 1.562 Y_0(3.154 \frac{\rho}{R_1})). \tag{6.37}$$



Rys. 6.5. Wykres najmniejszej wartości siły krytycznej w zależności od proporcji $d/\lambda R_1$

Na rys. 6.5 przedstawiono wykres najmniejszej wartości siły krytycznej w zależności od parametru $d/\lambda R_1$ (gdzie d jest stałą szerokością żeber) opisującego udział objętościowy żeber w płycie. Dla wartości $d/\lambda R_1 = 0$ (płyta wykonana tylko z matrycy) otrzymujemy wartość siły krytycznej zgodną

z wartością takiej siły dla izotropowej płyty pierścieniowej. Wykres ten jest otrzymany dla płyty pierścieniowej o wymiarach geometrycznych $h = 0.03 \text{ m}$, $R_1 = 1 \text{ m}$, $R_2 = 3 \text{ m}$ i proporcjach własności materiałowych żeber oraz matrycy; modułu sprężystości $E_1/E_2 = 10$ ($E_1 = 210 \text{ GPa}$ dla żeber), liczby Poissona $\nu_1/\nu_2 = 2$ ($\nu_1 = 0.4$ dla żeber).



Rys. 6.6. Wykres najmniejszej wartości siły krytycznej w zależności od promienia wewnętrznego R_1

Na rys. 6.6 przedstawiono wykres najmniejszej wartości siły krytycznej w zależności od promienia wewnętrznego płyty pierścieniowej R_1 . Dla rosnącej wartości promienia wewnętrznego wartość siły krytycznej maleje do wartości otrzymanej dla pasma płytowego o tej samej rozpiętości. Wykres ten jest otrzymany dla płyty pierścieniowej o wymiarach geometrycznych: $h = 0.03 \text{ m}$, $L = R_2 - R_1 = 2 \text{ m}$, $d/\lambda R_1 = 0.5$ i proporcjach własności materiałowych żeber oraz matrycy: modułu sprężystości $E_1/E_2 = 10$ ($E_1 = 210 \text{ GPa}$ dla żeber), liczby Poissona $\nu_1/\nu_2 = 2$ ($\nu_1 = 0.4$ dla żeber).

7. Podsumowanie

Przedstawione opracowanie dotyczy analizy zagadnień termicznych i mechanicznych ciał kompozytowych z pewnego rodzaju budową mikroniejednorodną. Rozpatrywane ciała charakteryzują się tym, że mają mikroperiodyczną budowę wzdłuż wybranego kierunku, a ich własności efektywne wzdłuż kierunku prostopadłego są opisane gładkimi łagodnie zmiennymi funkcjami. Ciała tego rodzaju stanowią szczególny przypadek ciał wykonanych z materiału o funkcyjnej gradacji własności (functionally graded materials FGM) i zostały nazwane ciałami o podłużnej gradacji własności. Ciała tego rodzaju charakteryzują się tym, że ich efektywne własności zmieniają się łagodnie wzdłuż uwarstwienia.

Cechą charakterystyczną ciał o budowie mikrostrukturalnej jest to, że wymiar komórki podstawowej jest dużo mniejszy od wymiaru charakterystycznego rozpatrywanej struktury. W wyniku tego równania opisujące bezpośrednio rozpatrywane w opracowaniu zagadnienia zawierają nieciągłe i silnie oscylujące współczynniki. Stąd wynika ich nieprzydatność do zastosowań inżynierskich i obliczeń numerycznych oraz potrzeba tworzenia różnych modeli uśrednionych. W opracowaniu do uzyskania uśrednionych modeli matematycznych rozpatrywanych zagadnień wykorzystano technikę tolerancyjnej aproksymacji. Technika ta jest rozwijana od lat 90. XX wieku, początkowo dla modelowania struktur o budowie periodycznej, a obecnie również do modelowania zachowań termomechanicznych ciał wykonanych z materiałów o funkcyjnej gradacji własności. W wyniku procedury uśredniania przechodzimy od równań o nieciągłych i silnie oscylujących współczynnikach do równań, w których występują gładkie i łagodnie zmienne współczynniki. Współczynniki te w równaniach modeli tolerancyjnych zawierają parametr określający wymiar mikrostruktury. Stąd modele otrzymane techniką tolerancyjnej aproksymacji uwzględniają wpływ wymiaru mikrostruktury na zachowanie badanych ciał.

Opracowanie jest pewnym podsumowaniem i rozwinięciem badań zawartych w pracach: Borowska-Szymczyk, Michalak i Rychlewska (2008), Jędrusiak i Michalak (2008),(2010), Michalak (2010a),(2010b), Michalak i Ostrowski (2007), Michalak i Wirowski (2009), Michalak i M. Woźniak (2006), Michalak, Cz. Woźniak i M. Woźniak (2007), Ostrowski i Michalak (2011), Ostrowski (2010), Wirowski (2008). W pracy przedstawiono również wyniki badań dotychczas niepublikowanych.

W przedstawionym opracowaniu otrzymano uśrednione równania dla dwóch modeli: modelu tolerancyjnego i modelu asymptotycznego. Równania modelu tolerancyjnego zawierają składniki zależne od parametru wymiaru mikrostruktury i stąd pozwalają one badać wpływ tego parametru na termiczne i mechaniczne zachowania kompozytu. Okupione jest to większą ilością równań i występowaniem w tych równaniach, poza niewiadomą funkcją uśrednionych pól (temperatury lub przemieszczeń), dodatkowych niewiadomych funkcji amplitudy oscylacji tych pól. Funkcje uśrednionych pól i amplitud oscylacji muszą spełniać warunek wolnej zmienności, który można sprawdzić po rozwiązaniu badanego zagadnienia. W równaniach modelu asymptotycznego jako niewiadome występują tylko funkcje uśrednionych pól (temperatury lub przemieszczeń). Funkcje te nie muszą być funkcjami wolno zmiennymi w obrębie komórki. Ponieważ równania te nie zawierają składników zależnych od parametru wymiaru mikrostruktury, stąd nie pozwalają one na badanie wpływu tego parametru na zachowania analizowanych ciał.

W przedstawionym opracowaniu otrzymano uśrednione równania zarówno dla modeli tolerancyjnych, jak i asymptotycznych w następujących zagadnieniach:

1. Przewodzenia ciepła w ciałach wykonanych z materiałów o podłużnej gradacji własności.
2. Dynamiki cienkich płyt sprężystych wykonanych z materiałów o podłużnej gradacji własności.
3. Dynamiki cienkich płyt o podłużnej gradacji własności na mikroniejednorodnym dwuparametrowym podłożu sprężystym.
4. Stateczności liniowej cienkich płyt wykonanych z materiałów o podłużnej gradacji własności.

Zanalizowano następujące wybrane problemy opisane otrzymanymi modelami matematycznymi ciał o podłużnej gradacji własności:

1. Rozkład temperatury dla jednokierunkowego stacjonarnego przewodzenia ciepła w przewodniku cylindrycznym i ocenę poprawności otrzymanego modelu przez porównanie otrzymanych wyników z wynikami uzyskanymi metodą elementów skończonych dla bezpośredniego opisu ciała mikroniejednorodnego.
2. Wpływ wymiaru komórki na funkcje temperatury uśrednionej i amplitudy oscylacji temperatury.

3. Rozkład temperatury w dwukierunkowym stacjonarnym przepływie ciepła w przewodniku cylindrycznym.
4. Rozkład temperatury w przewodniku prostokątnym dla zagadnienia kontrolowanego chłodzenia.
5. Rozkład temperatury w przewodniku cylindrycznym dla zagadnienia kontrolowanego chłodzenia.
6. Rozkład temperatury w jednokierunkowym niestacjonarnym przewodzeniu ciepła i porównanie otrzymanych wyników z wynikami w metodzie elementów skończonych dla bezpośredniego opisu ciała mikroniejednorodnego.
7. Wpływ wymiaru mikrostruktury na niestacjonarny przepływ ciepła.
8. Wpływ anizotropii składników kompozytu na szybkość osiągania stanu stacjonarnego w niestacjonarnym przewodzeniu ciepła.
9. Drgania własne pasma płytowego i ocenę poprawności otrzymanego modelu przez porównanie otrzymanych częstości drgań z częstościami uzyskanymi metodą elementów skończonych dla bezpośredniego opisu pasma o budowie mikroniejednorodnej.
10. Drgania własne płyty pierścieniowej.
11. Sterowanie geometrią mikrostruktury w celu uzyskania pożądanych częstości drgań własnych pasma płytowego i płyty pierścieniowej.
12. Drgania własne płyty pierścieniowej na dwuparametrowym mikroniejednorodnym podłożu sprężystym i wpływ zależności pomiędzy parametrami podłoża na częstości drgań własnych.
13. Siły krytyczne dla pasma płytowego.
14. Siły krytyczne dla płyty pierścieniowej.

Przedstawiony szeroki zakres zagadnień analizowanych w opracowaniu pokazuje, że technika tolerancyjnej aproksymacji może być z powodzeniem stosowana do uzyskiwania uśrednionych modeli matematycznych ciał o budowie mikroniejednorodnej. Uzyskane tą techniką uśrednione równania dla zagadnień termicznych, dynamicznych lub stateczności o gładkich funkcyjnych współczynnikach mogą być rozwiązywane znanymi metodami numerycznymi. Pozwala to badać szeroki zakres zagadnień i tak sterować budową mikrostruktury, aby uzyskać pożądane makroskopowe cechy rozpatrywanych struktur.

Skorowidz

- amplituda fluktuacji przemieszczeń – rozdz. 4, s. 59
- amplituda fluktuacji temperatury – rozdz. 3, s. 28
- dekompozycja pola przemieszczeń – rozdz. 4, s. 59
- dekompozycja pola temperatury – rozdz. 3, s. 28
- dynamika płyt cienkich – rozdz. 4, s. 56
 - równania modelu asymptotycznego – rozdz. 4, s. 62
 - równania modelu tolerancyjnego – rozdz. 4, s. 59
 - równania dla płyty pierścieniowej – rozdz. 4, s. 69
 - równania dla płyty prostokątnej – rozdz. 4, s. 64
 - uśredniony lagrangian modelu asymptotycznego – rozdz. 4, s. 62
 - uśredniony lagrangian modelu tolerancyjnego – rozdz. 4, s. 59
- dynamika płyt cienkich na dwuparametrowym podłożu sprężystym – rozdz. 5, s. 76
 - równania modelu asymptotycznego – rozdz. 5, s. 83
 - równania modelu tolerancyjnego – rozdz. 5, s. 79
 - uśredniony lagrangian modelu asymptotycznego – rozdz. 5, s. 81
 - uśredniony lagrangian modelu tolerancyjnego – rozdz. 5, s. 79
- funkcja kształtu fluktuacji temperatury – rozdz. 3, s. 28
- funkcja kształtu fluktuacji przemieszczeń – rozdz. 4, s. 63
- funkcja wolno zmienna – rozdz. 2, s. 17
- funkcjonał działania – rozdz. 2, s. 19
- funkcjonał działania dla modelu asymptotycznego – rozdz. 2, s. 24
- funkcjonał działania dla modelu tolerancyjnego – rozdz. 2, s. 21
- definicja komórki – rozdz. 2, s. 16
- mikro-makro dekompozycja w modelu asymptotycznym – rozdz. 2, s. 22
- mikro-makro dekompozycja w modelu tolerancyjnym – rozdz. 2, s. 20
- modelowanie asymptotyczne – rozdz. 2, s. 22
- modelowanie tolerancyjne – rozdz. 2, s. 20
- operator uśredniania – rozdz. 2, s. 17
- parametr tolerancji – rozdz. 2, s. 15
- parametr wymiaru mikrostruktury – rozdz. 2, s. 16
- przemieszczenie uśrednione – rozdz. 4, s. 59
- przewodzenie ciepła – rozdz. 3, s. 25
 - równania modelu asymptotycznego – rozdz. 3, s. 32

- równania modelu tolerancyjnego – rozdz. 3, s. 29
- równania dla przewodnika cylindrycznego – rozdz. 3, s. 34
- równania dla przewodnika prostokątnego – rozdz. 3, s. 43
- uśredniony wielomian modelu asymptotycznego – rozdz. 3, s. 32
- uśredniony wielomian modelu tolerancyjnego – rozdz. 3, s. 29

równania Eulera-Lagrange – rozdz. 2, s. 19

równania Eulera-Lagrange dla modeli uśrednionych

- model asymptotyczny – rozdz. 2, s. 24
- model tolerancyjny – rozdz. 2, s. 21

równanie przewodzenia ciepła Fouriera – rozdz. 3, s. 27

stateczność liniowa płyt cienkich – rozdz. 6, s. 90

- równania modelu asymptotycznego – rozdz. 6, s. 94
- równania modelu tolerancyjnego – rozdz. 6, s. 92
- równania dla płyty cylindrycznej – rozdz. 6, s. 99
- równania dla płyty prostokątnej – rozdz. 6, s. 96
- uśredniony lagrangian modelu asymptotycznego – rozdz. 6, s. 94
- uśredniony lagrangian modelu tolerancyjnego – rozdz. 6, s. 92

temperatura uśredniona – rozdz. 3, s. 28

Literatura

- [1] Baron E., 2003, *On dynamic behaviour of medium thickness plates with uniperiodic structure*, Arch. Appl. Mech., 73, 505-516.
- [2] Batra R.C., Jin J., 2005, *Natural frequencies of a functionally graded rectangular plate*, J. Sound and Vibration, 282, 509-516.
- [3] Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolau G., 1978, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland, Amsterdam.
- [4] Bielski W., Matysiak S.J., 1992, *Surface waves in a periodic two-layered elastic half-space*, Acta Mech., 91, 45-54.
- [5] Borowska-Szymczyk J., Michalak B., Rychlewska J., 2008, *Longitudinally graded stratified solids*, w Thermomechanics of microheterogeneous solids and structures, Tolerance averaging approach, ed. Woźniak Cz., Michalak B., Jędrysiak J., Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej.
- [6] Borsuk K., 1960, *Free vibration of rotations of a cylindrically orthotropic circular plate*, Arch. Mech. Stos., 5/5, 649-665.
- [7] Budiansky B., 1965, *On the elastic moduli of some heterogeneous materials*. J. Mech. Phys. Solids 13: 223-227.
- [8] Caillerie D., 1984, *Thin elastic and periodic plates*, Math. Methods Appl. Sci., 6, 159-191.
- [9] Challagulla K., Georgiades A.V., Saha G.C. Kalamkarov A.L., 2008, *Micromechanical analysis of grid-reinforced yhin composite generally orthotropic shells*, Compos. Part B 39: 627-644.
- [10] Chen C.S., Chen T.J., Chien R.D., 2006, *Nonlinear vibration of initially stressed functionally graded plates*, Thin-Walled Struct., 44, 844-851.
- [11] Ciarlet P.G., Destuynder P., 1979, *A justification of two-dimensional linear plate theory*, Journal de Mécanique, 18, 315-344.
- [12] Cielecka I., Jędrysiak J., 2006, *A non-asymptotic model of dynamics of honeycomb lattice-type plates*, J. Sound and Vibration, 296, 130-149.
- [13] Dell'Isola F., Rosa L., Woźniak Cz., 1997, *Dynamics of solids with micro-periodic non connected fluid inclusions*, Arch. Appl. Mech., 67, 215-228.
- [14] Francfort G.A., 1983, *Homogenization and linear thermoelasticity*, SIAM, J. Math. Anal., 14, 696-708.
- [15] Furmański P., 1997, *Heat conduction in composites: homogenization and macroscopic behavior*, Appl. Mech. Rev., 50, 327-356.
- [16] Georgiades A.V., Challagulla K., Kalamkarov A.L., 2010, *Asymptotic homogenization modelling of smart composite generally orthotropic grid-reinforced shells: Part II-Applications*. Eur. J. Mech. A/Solids, 29: 541-556.

-
- [17] Gupta A.K., Kumar L., 2008, *Thermal effect on vibration of non-homogeneous visco-elastic rectangular plate of linearly varying thickness*, *Meccanica*, 43, 47-54.
- [18] Jakubowska M.E., Matysiak S.J., 1987, *Propagation of plane harmonic waves in periodic multilayered elastic composites*, *Studia Geotechnica et Mechanica*, 9, 17-25.
- [19] Jędrysiak J., 2003, *Free vibrations of thin periodic plates interacting with an elastic periodic foundation*, *Int. J. Mech. Sci.*, 45, 1411-1428.
- [20] Jędrysiak J., 2007, *The tolerance averaging model of dynamic stability of thin plates with one-directional periodic structure*, *Thin Walled Struct.*, 45, 855-860.
- [21] Jędrysiak J., 2010, *Termomechanika laminatów, płyt i powłok o funkcyjnej gradacji własności*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź.
- [22] Jędrysiak J., Michalak B., 2005, *Some remarks on dynamic results for averaged and exact models of thin periodic plates*, *J. Theor. Appl. Mech.*, 43, 405-425.
- [23] Jędrysiak J., Michalak B., 2008, *Heat conduction in functionally graded solids*, w: *Thermomechanics of microheterogeneous solids and structures, Tolerance averaging approach*, ed. Woźniak Cz., Michalak B., Jędrysiak J., Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, 242-257.
- [24] Jędrysiak J., Michalak B., 2010, *On the modeling of stability problems for thin plates with functionally graded structure*, *Thin-Walled Structures*, 49, 627-635.
- [25] Jędrysiak J., Michalak B., Rychlewska J., Woźniak Cz., 2004, *Functionally graded materials in the modelling of lightweight plates*, w: *LIGHTWEIGHT STRUCTURES IN CIVIL ENGINEERING X*, ed. by J.B. Obrębski, Micro-Publisher Wyd. Nauk., Warsaw, 86-89.
- [26] Jędrysiak J., Radzikowska A., 2007, *On the modelling of heat conduction in a non-periodically laminated layer*, *J. Theor. Appl. Mech.*, 45, 239-257.
- [27] Jędrysiak J., Rychlewska J., Woźniak Cz., 2005, *Microstructural 2D-models of functionally graded laminated plates*, w: *Shell Structures: Theory and Applications*, ed. by W. Pietraszkiewicz, Cz. Szymczak, Taylor & Francis, London-Leiden, 119-123.
- [28] Jędrysiak J., Wierzbicki E., Woźniak Cz., 2006, *The elastic response for microlayered functionally graded media*, *PAMM*, 6, 1, 385-386.
- [29] Jędrysiak J., Woźniak Cz., 2009, *Elastic shallow shells with functionally graded structure*, *PAMM*, 9, 357-358.
- [30] Jędrysiak J., Woźniak Cz., 2010, *Modelling of thin functionally graded shells*, w: *Shell Structures: Theory and Applications*, ed. by W. Pietraszkiewicz, I. Kreja, Taylor & Francis, London-Leiden, 67-71.

- [31] Jikov V.V., Kozlov C.M., Oleinik O.A., 1994, *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg.
- [32] Gomuliński A., 1967, *Determination of eigenvalues for circular plater resting on elastic foundation with two moduli*, Arch. Inż. Łądowej (13), 183-203.
- [33] Hashin Z, Rosen BW., 1964, *The elastic moduli of fiber-reinforced materials*, J. Appl. Mech. 31: 223-232.
- [34] Hill R., 1963, *Elastic properties of reinforced solids*. J. Mech. Phys. Solids 11: 357-372.
- [35] Hosseini S.M., Akhlaghi M., Shakeri M., 2008, *Heat conduction and heat wave propagation in functionally graded thick hollow cylinder base on coupled thermoelasticity without energy dissipation*, Heat Mass Transfer, 44, 1477-1484.
- [36] Kaczyński A., Matysiak S.J., 1988, *On the complex potentials of the linear thermoelasticity with microlocal parameters*, Acta Mech., 72, 245-259.
- [37] Kaczyński A., Matysiak S.J., 2003, *On the three dimensional problem of an interface crack under uniform heat flow in a bimaterial periodically layered space*, Int. J. Fracture, 123, 127-138.
- [38] Kaczyński A., Matysiak S.J., 2005, *A Griffith interface crack in a micro-periodic reinforced elastic composite*, Eur. J. Mech., A/Solids, 24, 59-67.
- [39] Kalamkarov A. L., 1987, *On determination of effective characteristics of lattice shells and plates with periodic structure*, Mekh. Tv. Tela, 2, 181-185, (rosyjski).
- [40] Kalamkarov A.L., Hassan E.M., Georgiades A.V., Savi M.A., 2009, *Asymptotic homogenization model for 3D grid-reinforced composite structures with generally orthotropic reinforcements*, Composite Structures 89: 186-196.
- [41] Kulchytsky-Zhyhailo R., Matysiak S.J., 2005, *On heat conduction problem in a semi-infinite periodically laminated layer*, Int. Comm. heat Mass Transfer, 32, 123-132.
- [42] Kulchytsky-Zhyhailo R., Matysiak S.J., 2007, *Stress singularities in a periodically layered composite near interface crack tips*, Int. J. Fracture, 143, 277-286.
- [43] Lewiński T., Kucharski S., 1992, *A model with length scales for composites with periodic structure. Steady state heat conduction problem*, Comp. Mech., 9, 249-265.
- [44] Lewiński T., Telega J.J., 2000, *Plates laminated and shells*, World Scientific Publishing Company, Singapore.

- [45] Lutoborski A., 1985, *Homogenization of linear elastic shells*, J. Elasticity, 15, 69-87.
- [46] Łaciński Ł., Woźniak Cz., 2006, *Boundary-layer phenomena in the laminated rigid heat conduction*, J. Thermal Stresses, 29, 665-682.
- [47] Malezadeh P., Golbahar Haghighi M.R., Atashi M.M., 2010, *Free vibration analysis of elastically supported functionally graded annular plates subjected to thermal environment*, Meccanica, DOI 10.1007/s11012-010-9345-5.
- [48] Matysiak S.J., 1995, *On the microlocal parameter method in modelling of periodically layered thermoelastic composites*, J. Theor. Appl. Mech., 33, 481-487.
- [49] Matysiak S. J., 1991, *On certain problems of heat conduction in periodic composites*, ZAMM, 71, 524-528.
- [50] Matysiak S. J., Mieszkowski R., 2001, *On modelling of diffusion processes in periodically stratified elastic solids*, Int. J. Engng. Sci., 39, 5, 491-501.
- [51] Matysiak S. J., Nagórko W., 1989, *Microlocal parameters in a modelling of microperiodic multilayered elastic plates*, Ingenieur Archiv, 59, 434-444.
- [52] Matysiak S.J., Mieszkowski R., Perkowski D.M., 2009, *Surface waves In a periodic two-layered elastic half-space with the boundary normal to the layering*, Acta Mechanica, 207, 235-243.
- [53] Matysiak S.J., Perkowski D.M., 2008, *Crack normal to layered elastic periodically stratified space*, Theor. and Appl. Fracture Mechanics, 50, 220-225.
- [54] Matysiak S.J., Savruk M.P., Yevtushenko A.A., 2009, *Antiplane deformation of a cracked composite strip*, Materials Science, 45, 18-27.
- [55] Matysiak S. J., Woźniak Cz., 1988, *On the microlocal modelling of thermoelastic periodic composites*, J. Tech. Physics, 29, 65-97.
- [56] Matysiak S.J., Yevtushenko A.A., 2008, *Influence of microstructures on temperature distributions for some mixed problem of composite half-space*, Inter. Communications in Heat and Mass Transfer, 35, 704-709.
- [57] Mazur-Śniady K., Śniady P., 1999, *Stochastic vibrations of a beam on microperiodic subsoil caused by moving load*, ZAMM, 79, S 3, S 827-S 828.
- [58] Mazur-Śniady K., Śniady P., 2000, *Design sensitivity of the beam with periodically variable geometry under harmonic excitation*, ZAMM, 80, S395-S396.

-
- [59] Mazur-Śniady K., Śniady P., Zelichowski-Haber W., 2009, *Dynamic response of micro-periodic composite rods with uncertain parameters under moving random load*, J. Sound and Vibration, 320, 273-288.
- [60] Michalak B., 1998, *Stability of elastic slightly wrinkled plates*, Acta Mech., 130, 111-119.
- [61] Michalak B., 2000, *Vibrations of plates with initial geometrical periodical imperfections interacting with a periodic elastic foundation*, Arch. Appl. Mech., 70, 508-518.
- [62] Michalak B., 2001a, *Analysis of dynamic behaviour of wavy-plates with a mezzo-periodic structure*, J. Theor. Appl. Mech., 39, 947-958.
- [63] Michalak B., 2001b, *Dynamika i stateczność płyt pofałdowanych*, Sci. Bul. Łódź Tech. Univ., No 881, series: Sci. Trans. 295, Łódź.
- [64] Michalak B., 2001c, *The meso-shape functions for the meso-structural models of wavy-plates*, ZAMM, 81, 639-641.
- [65] Michalak B., 2004, *Stability of composite plates with non-uniform distribution of constituents*, J. Theor. Appl. Mech, 42, 381-397.
- [66] Michalak B., 2010a, *On the modelling of stability of composite thin plates with certain longitudinally graded materials*, w: Selected Topics in the Mechanics of Inhomogeneous Media, ed.: Cz. Woźniak, M. Kuczma, R. Świtka, K. Wilmański, Zielona Góra, 99-107.
- [67] Michalak B., 2010b, *Dynamic behaviour of a certain longitudinally graded plate*, w Mathematical modelling and analysis in continuum mechanics of microstructured media, ed. Woźniak Cz. i inni, Gliwice, Silesian Technical University Press, 107-116.
- [68] Michalak B., Ostrowski P.; 2007, *Modelling and analysis of the heat conduction in a certain functionally graded material*, Part I. Composites, w: Mechanics of Solids and Structures, ed. V. Pauk, Kielce, 25-35.
- [69] Michalak B., Wirowski A., 2009, *Stability of thin plates with longitudinally graded materials*, in: Stability of Structures XII Symposium, Zakopane, ed. K. Kowal-Michalska, R. Mania, 209-306.
- [70] Michalak B., Woźniak M., 2006, *On the heat conduction in certain functionally graded composites*, Chapter 4.1 w: *Selected Topics in the Mechanics of Inhomogeneous Media*, ed. Cz. Woźniak, R. Świtka, M. Kuczma, Zielona Góra, 229-238.
- [71] Michalak B., Woźniak Cz., 2009, *2D modeling of thin skeletal elastic shallow shells*, PAMM, 359-360.
- [72] Michalak B., Woźniak Cz., 2010, *The dynamic modelling of thin skeletal shallow shells*, w Shell Structures: Theory and Applications, ed. by W. Pietraszkiewicz, I. Kreja, Taylor & Francis, London-Leiden, 83-87.

-
- [73] Michalak B., Woźniak Cz., Woźniak M., 1996, *The dynamic modelling of elastic wavy plates*, Arch. Appl. Mech., 66, 177-186.
- [74] Michalak B., Woźniak Cz., Woźniak M., 2007, *Modelling and analysis of certain functionally graded heat conductor*, Arch. Appl. Mech., 77, 823-834.
- [75] Michalak B., Wirowski A., 2011, *Dynamic modelling of thin plate with longitudinally graded materials*, (w trakcie publikacji).
- [76] Mielczarek G., Woźniak Cz., 1995, *On the dynamic modelling of fibrous composites*, J. Tech. Phys., 36, 103-111.
- [77] Mori T., Tanaka K., 1973, *Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions*, Acta Metall., 21, 571-574.
- [78] Mossakowski J., 1960, *Buckling of circular plates with cylindrical orthotropy*, Arch. Mech. Stos., 12, 583-595.
- [79] Nagórko W., 1989, *On modelling of thin microperiodic plates*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 27, 269-278.
- [80] Nagórko W., 2010a, *Vibrations and waves in a periodically ribbed elastic plates*, w: Selected Topics in the Mechanics of Inhomogeneous Media, ed.: Cz. Woźniak, M. Kuczma, R. Świtka, K. Wilmański, Zielona Góra, 279-284.
- [81] Nagórko W., 2010b, *Asymptotic modeling in elastodynamics of FGM*, w Mathematical modelling and analysis in continuum mechanics of microstructured media, ed. Woźniak Cz. i inni, Gliwice, Silesian Technical University Press, 137-146.
- [82] Nagórko W., Piwowarski M., 2006, *On the heat conduction in periodically nonhomogeneous solids*, w: Selected Topics in the Mechanics of Inhomogeneous Media, ed. by Cz. Woźniak, R. Świtka, M. Kuczma, Zielona Góra, 241-254.
- [83] Nagórko W., Wągrowaska M., 2002, *A contribution to modelling of composite solids*, J. Theor. Appl. Mech., 40, 149-158.
- [84] Ootao Y., Tanigawa Y., 2006, *Transient thermoelastic Analysis for a Functionally Graded Hollow Cylinder*, J. Therm. Stresses, 29, 1031-1046.
- [85] Oradöğen E., Küçükarslan S., Sofiyev A., Omurtag M.H., 2010, *Finite element analysis of functionally graded plates for coupling effect of extension and bending*, Meccanica, 45, 63-72.
- [86] Ostrowski P., 2009, *On the heat transfer in two-phase hollow cylinder with piecewise continuous boundary conditions*, PAMM, 9, 259-260.
- [87] Ostrowski P., 2010, *Przewodnictwo ciepła w przewodniku cylindrycznym wykonanym z materiału o funkcyjnej gradacji własności*, rozprawa doktorska, Wyd. BAIŚ PŁ.

- [88] Ostrowski P., Michalak B., 2011, *Non-stationary heat transfer in a hollow cylinder with functionally graded material properties*, J. Theor. Appl. Mech., 49, 2, 385-399.
- [89] Pauk V. J., Woźniak Cz., 1999, *Plane contact problem for a half-space with boundary imperfections*, Int. J. Solids and Structures, 36, 3569-3579.
- [90] Prakash T., Ganapathi M., 2007, *Asymmetric flexural vibration and thermoelastic stability of FGM circular plates using finite element method*, Advances in Vibration Engineering, 6, 257-266.
- [91] Qian L.F., Batra R.C., 2005, *Design of Bidirectional Functionally Graded Plate for Optimal Natural Frequencies*, Journal of Sound and Vibration, 280, 415-424.
- [92] Radzikowska A., 2010, *Zagadnienie przewodzenia ciepła w laminatach z funkcyjną gradacją własności*, rozprawa doktorska, Wyd. BAIŚ PŁ.
- [93] Rychlewska J., Szymczyk J., Woźniak Cz., 2004a, *On the modeling of the hyperbolic heat transfer problems in periodic lattice-type conductors*, J. Thermal Stresses, 27, 825-841.
- [94] Rychlewska J., Szymczyk J., Woźniak Cz., 2004b, *Simplified models for the vibration analysis of micro-periodic elastic media*, J. Tech. Phys., 45, 2, 91-104.
- [95] Rychlewska J., Woźniak Cz., 2006, *Boundary layer phenomena in elastodynamics of functionally graded laminates*, Arch. Mech., 58, 4-5, 1-14.
- [96] Rychlewska J., Woźniak Cz., Woźniak M., 2006, *Modelling of functionally graded laminates revisited*, Electronic J. Polish Agric. Univ., Civil Engineering, 9, 2, www.ejpau.media.pl.
- [97] Saha G.C., Kalamakarov A.L., Georgiades A.V., 2007, *Effective elastic characteristics of honeycomb sandwich composite shells made of generally orthotropic materials*, Compos. Part A 38: 1533-1546.
- [98] Sanchez-Palencia E., 1980, *Non-homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Physics, 127, Springer-Verlag, Berlin.
- [99] Siedlecka U., Wierzbicki E., 2004, *Isotropic models for a heat transfer in periodic composites*, PAMM, 4, 1, 502-503.
- [100] Siedlecka U., Wierzbicki E., Woźniak Cz., 2010, *Tolerance modeling of quasi-linear heat conduction in functionally graded laminates*, w: Selected Topics in the Mechanics of Inhomogeneous Media, ed. Cz. Woźniak, M. Kuczma, R.Świtka, K. Wilmański, Zielona Góra, 37-47.
- [101] Sladek J., Sladek V., Zhang Ch., 2003, *Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method*, Computational Materials Science, 28, 494-504.

-
- [102] Suresh S., Mortensen A., 1998, *Fundamentals of functionally graded materials*, Cambridge, The University Press.
- [103] Szymczyk J., Woźniak Cz., 2006, *A contribution to the modeling of periodically laminated elastic solids*, Electronic J. Polish Agric. Univ., Civil Engineering, 9, 1, www.ejpau.media.pl.
- [104] Taler J., Duda P., 2003, *Rozwiązywanie prostych i odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- [105] Tomczyk B., 2003, *On the modelling of thin uniperiodic cylindrical shells*, J. Theor. Appl. Mech., 41, 755-774.
- [106] Tomczyk B., 2007, *A non-asymptotic model for the stability analysis of thin bi-periodic cylindrical shells*, Thin-Walled Structures, 45, 941-944.
- [107] Tylikowski A., 2005, *Dynamic stability of functionally graded plate under in-plane compression*, Mathematical Problems in Engineering, 4, 411-424.
- [108] Wang B.-L., Mai Y.-W., 2005, *Transient one-dimensional heat conduction problems solved by finite element*, International Journal of Mechanical Sciences, 47, 303-317.
- [109] Wągrow ska M., 1998, *On the homogenization of elastic-plastic composites by the microlocal parameter approach*, Acta Mechanica, 73, 45-65.
- [110] Wierzbicki E., 1993, *On the wave propagation in micro-periodic elastic media*, Bull. Ac. Pol. Sci., Sci. Techn., 41, 323-227.
- [111] Wierzbicki E., Woźniak Cz., Woźniak M., 1997a, *Thermal stresses in elastodynamics of composite materials*, Int. J. Engng. Sci., 35, 187-196.
- [112] Wierzbicki E., Woźniak Cz., Woźniak M., 1997b, *Stability of micro-periodic materials under finite deformations*, Arch. Mech., 49, 143-158.
- [113] Wirowski A., 2008, *Analiza dynamiczna płyt pierścieniowych wykonanych z materiałów o funkcyjnej gradacji własności*, rozprawa doktorska, Wyd. BAIŚ PŁ.
- [114] Wirowski A., 2010, *Dynamic behaviour of thin annular plates made from functionally graded material*, w *Shell Structures: Theory and Applications*, ed. by W. Pietraszkiewicz, I. Kreja, Taylor & Francis, London-Leiden, 207-210.
- [115] Wojnar R., 1990, *Thermoelasticity and homogenisation*, J. Theor. Appl. Mech., 33, 322-335.
- [116] Woźniak Cz., 1983, *Tolerance and fuzziness in problems of mechanics*, Arch. Mech., 35, 567-578.
- [117] Woźniak Cz., 1987, *A nonstandard method of modelling of thermoelastic periodic composites*, Int. J. Engng Sci., 25, 489-498.

- [118] Woźniak Cz., 1989, *On the modelling of thermo-unelastic periodic composites: microlocal parameter theory*, Acta Mech., 80, 81-94.
- [119] Woźniak Cz., 1993a, *Refined macrodynamics of periodic structures*, Arch. Mech., 45, 295-304.
- [120] Woźniak Cz., 1997, *Internal variables in dynamics of composites solids with periodic microstructure*, Arch. Mech., 49, 421-441.
- [121] Woźniak Cz., [red.], 2001, *Mechanika sprężystych płyt i powłok*, Warszawa, PWN.
- [122] Woźniak Cz., 2002, *Macroscopic modelling of multiperiodic composites*, C. R. Mecanique, 330, 267-272.
- [123] Woźniak Cz., [red.], 2010, *Mathematical Modelling and Analysis in Continuum Mechanics of Microstructured Media*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.
- [124] Woźniak Cz., Baczyński Z. F., Woźniak M., 1996, *Modelling of nonstationary heat conduction problems in micro-periodic composites*, ZAMM, 76, 223-229.
- [125] Woźniak Cz., Michalak B., Jędrusiak J. [ed.], 2008, *Thermomechanics of microheterogeneous solids and structures*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2008.
- [126] Woźniak Cz., Rychlewska J., Wierzbicki E., 2005, *Modelling and analysis of functionally graded laminated shells*, w: *Shell Structures: Theory and Applications*, ed. by W. Pietraszkiewicz, Cz. Szymczak, Taylor & Francis, London-Leiden, 187-191.
- [127] Woźniak Cz., Wierzbicki E., 2000, *Averaging techniques in thermomechanics of composite solids. Tolerance averaging versus homogenization*, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa.
- [128] Woźniak Cz., Wierzbicki E., Woźniak M., 2001, *Tolerance averaging and boundary-layer equations for the heat transfer problems in microperiodic solids*, J. Theor. Appl. Mech., 39, 423-442.
- [129] Woźniak Cz., Woźniak M., 1994, *On the effect of interface micro-cracks on interactions in stratified media*, Int. J. Fract., 66, 165-173.
- [130] Woźniak M., 1995, *On the dynamic behaviour of micro-damaged stratified media*, Int. J. Fract., 73, 223-232.
- [131] Woźniak M., Wierzbicki E., Woźniak Cz., 2002, *A macroscopic model of the diffusion and heat transfer processes in a periodically micro-stratified solid layer*, Acta Mechanica, 157, 175-185.

- [132] Yang J., Shen H.-S., 2001, *Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates*, Composite Structures, 54, 497-508.
- [133] Yevtushenko A. A., Matysiak S. J., Pauk V. J., 1996, *On the homogenized model of periodically layered piezoelectric composites*, Physico-Chem. J. Materials, 32, 105-112.
- [134] You L.H., Wang J.X., Tang B.P., 2009, *Deformations and stresses in annular disks made of functionally graded materials subjected to internal and/or external pressure*, Meccanica, 44, 283-292.

Streszczenie

Przedmiotem opracowania są kompozyty o niejednorodnej mikrostrukturze, która jest periodyczna wzdłuż pewnego kierunku i ma łagodnie zmienne uśrednione własności wzdłuż kierunku prostopadłego. Ogólnie mówiąc, mamy do czynienia z kompozytem mającym budowę, którą można nazwać zmienną w przestrzeni mikrostrukturą. Ponieważ wolna zmienność własności kompozytu w określonym kierunku może być rozumiana jako łagodne przejście od jednego składnika kompozytu do drugiego, stąd możemy powiedzieć, że mamy do czynienia ze specjalnym rodzajem materiałów o funkcyjnej gradacji własności (ang. functionally graded material, FGM).

Nasze rozważania są ograniczone do dwuskładnikowego kompozytu FGM o deterministycznej mikrostrukturze. Rozpatrywane ciała kompozytowe są wykonane z dwóch różnych jednorodnych materiałów. Charakterystyczną cechą tych ciał jest to, że ich efektywne własności są wolno zmienne wzdłuż uwarstwienia. Tego rodzaju materiały FGM nazywać będziemy materiałami o *podłużnej gradacji własności*.

Celem rozważań jest uzyskanie i zastosowanie makroskopowych modeli matematycznych opisujących termomechaniczne zachowania przedstawionych powyżej ciał kompozytowych. Sformułowanie matematycznych modeli takich struktur kompozytowych będzie bazować na *technice tolerancyjnej aproksymacji*. Charakterystyczną cechą tej techniki modelowania jest uwzględnianie wymiaru mikrostruktury na zachowania termomechaniczne rozpatrywanych struktur kompozytowych.

W przedstawionym opracowaniu otrzymano uśrednione równania dla zagadnienia przewodzenia ciepła w przewodnikach o podłużnej gradacji własności, jak również uśrednione równania opisujące dynamikę i stateczność cienkich płyt wykonanych z materiałów o podłużnej gradacji własności. W przeciwieństwie do opisu bezpośredniego, w którym równania zawierają nieciągłe i silnie oscylujące współczynniki, uśrednione równania proponowanych modeli mają gładkie i wolno zmienne współczynniki. Stąd rozwiązanie wybranych zagadnień początkowo brzegowych dla rozważanych ciał o podłużnej gradacji własności może być otrzymane przy użyciu znanych metod numerycznych.

W opracowaniu przedstawiono zastosowania otrzymanych równań modelu do rozwiązania wybranych zagadnień stacjonarnego i niestacjonarnego przewodzenia ciepła w wydrążonym cylindrze i paśmie o podłużnych gradacjach własności. Zbadano również problem drgań swobodnych cienkiej płyty pierścieniowej o podłużnej gradacji własności i podobnej płyty spoczywającej na dwuparametrowym niejednorodnym podłożu sprężystym. Ogólne równania stateczności cienkich płyt wykonanych z materiałów o podłużnej gradacji własności zastosowano do określenia sił krytycznych w paśmie płytowym i płycie pierścieniowej.

Thermomechanics of solids with certain heterogeneous microstructures Tolerance averaging approach

Summary

The object of this contribution are composites with an inhomogeneous microstructure which is periodic along a certain direction and have smoothly varying apparent properties in the perpendicular direction. Generally speaking, we deal with composites having what can be called space-varying microstructure. Since slowly varying apparent properties in the preferred direction can characterize a smooth passage from one component material to the other, than we deal with special class of the functionally graded materials (FGM).

Considerations are restricted to the two-phased of the functionally graded-type composites with a deterministic microstructure. These composites are made of two different homogeneous materials. The characteristic feature of these solids is that their effective properties are slowly-varying along the layering. In this case we say that the aforementioned functionally graded materials are *longitudinally graded*.

The aim of the contribution is to formulate and apply a macroscopic mathematical models describing the thermomechanical behaviour of these solids. The formulation of two mathematical models of these structures is based on the *tolerance averaging approach*. The characteristic feature of this technique is that this take into account the effect of the microstructure size on the overall behaviour of the composite solids.

In this contribution averaged governing equations for heat conduction in certain longitudinally graded heat conductors, dynamics and stability of thin plates with longitudinally graded structure are derived. In contrary to direct equations with non-continuous, highly oscillating coefficients, the proposed model equations have smooth and slowly varying functional coefficients. Hence, the solutions to specific problems for longitudinally graded structures under considerations can to be obtained using well-known numerical method.

Applications of derived model equations to special problems of stationary and non-stationary heat transfer in hollow cylinder with longitudinally graded structure and in functionally graded layer are shown. The investigations of the free vibrations of thin annular plates with longitudinally graded structure and these plate resting on heterogeneous elastic foundation with two moduli are also shown. The general model equations of stability for thin plates with longitudinally graded structure were applied to analyse a buckling of plate band and annular plates.

ISBN 978-83-7283-425-6