

SKRYPTY DLA SZKÓŁ WYŻSZYCH

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

SYLWESTER KONIECZNY, BOHDAN MICHALAK

**ZBIÓR ZADAŃ
Z MECHANIKI BUDOWLI**

Część I

ŁÓDŹ 1986

NAKŁADEM POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

Skrypt jest przeznaczony dla studentów Wydziału Budownictwa Lądowego PŁ



1314/W/1

Recenzent

prof. dr inż. Jan Filipkowski

Redaktor

Małgorzata Matyjaszewska

Redaktor techniczny

Ewa Teresa Guzek

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

93-005 Łódź, ul. Wólczańska 219

Wyd. I. Nakład 300+59 egz. Ark. wyd. 11,6. Ark. druk. 13,0. Papier offset. kl. III 71 g, 61X86

Maszynopis wpłynął do Redakcji 83. 06. 30. Przekazano do składu 84. 04. 03.

Podpisano do druku 86. 08. 18. Druk ukończono w październiku 1986 r.

Zamówienie 75/84 B-3. Cena zł 140,-

Wykonano w Zakładzie Poligraficznym PŁ, 93-005 Łódź, ul. Wólczańska 223

91-801 27

SPIS TRESCI

PRZEDMOWA	5
1. Zagadnienia geometrycznej niezmienności układów płaskich . .	7
2. Zastosowanie zasady prac wirtualnych do wyznaczania reakcji i sił wewnętrznych	11
3. Linie wpływowe reakcji i sił wewnętrznych w układach staty- cznie wyznaczalnych	20
4. Wyznaczenie przemieszczeń w układach statycznie wyznaczalnych	36
5. Wyznaczanie przemieszczeń w dźwigarach zakrzywionych i zała- manyh w planie	63
6. Linie wpływowe przemieszczeń w układach statycznie wyzna- czalnych	70
7. Belki statycznie niewyznaczalne	79
8. Układy ramowe statycznie niewyznaczalne	93
9. Kratownice statycznie niewyznaczalne	119
10. Układy belkowo-kratowe	126
11. Wyznaczanie przemieszczeń w układach statycznie niewyznaczal- nych	133
12. Ruszty płaskie	139
13. Statycznie niewyznaczalne dźwigary załamane lub zakrzywione w planie	158
14. Odpowiedzi do zadań	173
LITERATURA	208

PRZEDMOWA

Skrypt zawiera skondensowany materiał teoretyczny oraz szereg zadań z mechaniki budowli. Zadania przedstawione w skrypcie dotyczą linii wpływowych w układach statycznych wyznaczalnych i niewyznaczalnych, wyznaczania przemieszczeń w układach statycznie wyznaczalnych oraz rozwiązania układów statycznie niewyznaczalnych metodą sił.

Każdy rozdział skryptu zawiera na początku niezbędne wzory, z których należy korzystać podczas rozwiązywania zadań. Tak przyjęty układ zezwala na rozwiązywanie zadań po wysłuchaniu wykładów, bez konieczności korzystania z podręczników. Dążeniem autorów przy opracowywaniu tego skryptu było, aby w niewielkiej ilości zadań ująć możliwie duży wachlarz przypadków szczególnych. Z tego powodu zadania charakteryzują się różnym stopniem trudności. W skrypcie zrezygnowano z przedstawienia typowych zadań, które są omawiane w ramach wykładów oraz prezentowane w większości podręczników. Poza przykładami rozwiązań umieszczono również zadania do samodzielnego rozwiązania oraz podano rozwiązania dla większości z nich.

W literaturze podanej na końcu skryptu autorzy umieścili te pozycje, z których korzystali przy opracowaniu tego skryptu oraz te, których lektura pozwoli pogłębić wiadomości z mechaniki budowli.

Ze względu na układ skryptu mogą z niego korzystać studenci studiów stacjonarnych, wieczorowych i zaocznych Wydziału Budownictwa Lądowego.

Autorzy skryptu zdają sobie sprawę z możliwości popełnienia błędów typu rachunkowego, dlatego będą wdzięczni za każde sprostowanie i krytyczne uwagi.

Autorzy pragną serdecznie podziękować dr inż. I. Cieleckiej za przejrzanie rękopisu, pomoc przy wykonaniu rysunków, za cenne uwagi i dyskusje oraz mgr inż. Z. Kubiakowi za rozwiązanie niektórych zadań.

1. ZAGADNIENIA GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI UKŁADÓW PŁASKICH

Spośród szeregu znanych metod rozwiązywania tego typu zagadnień, zajmijmy się wyznaczeniem geometrycznej niezmienności, wykorzystując plan biegunów.

Liczbę stopni swobody "t" tarcz wyznaczymy ze wzoru

$$\gamma = 3t - w - r,$$

gdzie: w - liczba prętów łączących poszczególne tarcze między sobą,
r - liczba prętów łączących tarcze z tarczą fundamentową.

Mogą zajść następujące przypadki:

- 1) $\gamma > 0$, wówczas układ jest geometrycznie zmienny, γ - krotnie kinematycznie niewyznaczalny;
- 2) $\gamma = 0$ jest warunkiem koniecznym geometrycznej niezmienności;
- 3) $\gamma < 0$ jest warunkiem dostatecznym geometrycznej niezmienności.

Aby przekonać się czy układ jest geometrycznie zmienny należy sprawdzić warunek konieczny (to jest czy $\gamma = 0$). Jeżeli ten warunek jest spełniony zakładamy a priori, że układ jest geometrycznie zmienny. Dla tak przyjętego układu sporządzamy plan biegunów głównych i względnych. W przypadku gdy plan biegunów nie wykazuje żadnej sprzeczności (są spełnione wszelkie twierdzenia o położeniu biegunów), to układ jest geometrycznie zmienny tak jak założyliśmy. Natomiast jeżeli plan biegunów wykazuje sprzeczność mamy do czynienia z układem geometrycznie niezmiennym.

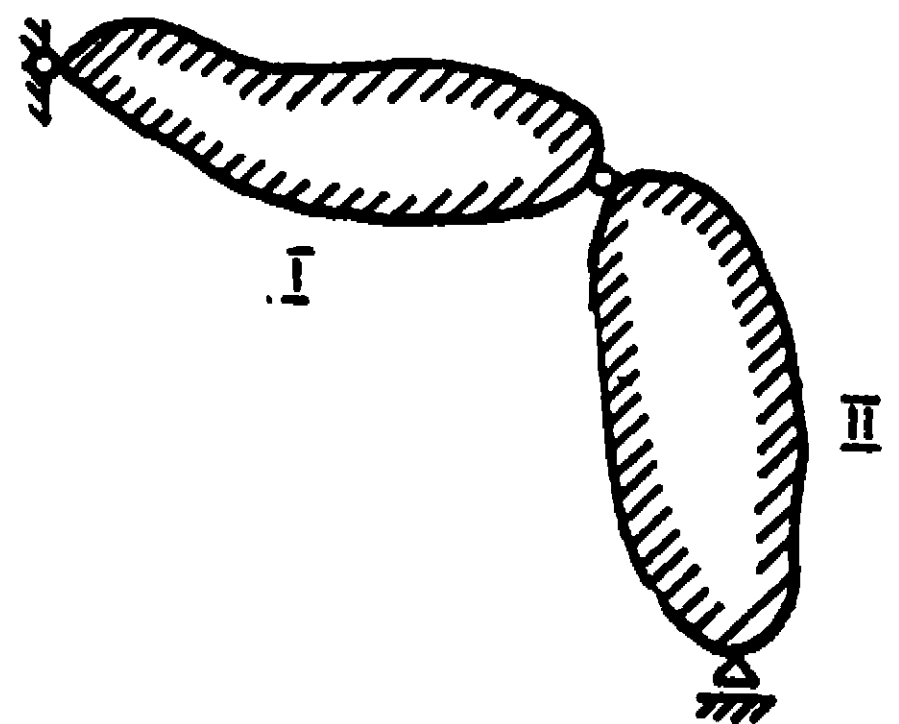
Zadanie 1.1

Dany jest płaski układ dwutarczowy, zbadać jego budowę (rys. 1.1).

Rozwiązanie

Sprawdzamy warunek konieczny geometrycznej niezmienności

$$\gamma = 3t - w - r.$$



Rys. 1.1

Dla podanego układu tarcz mamy

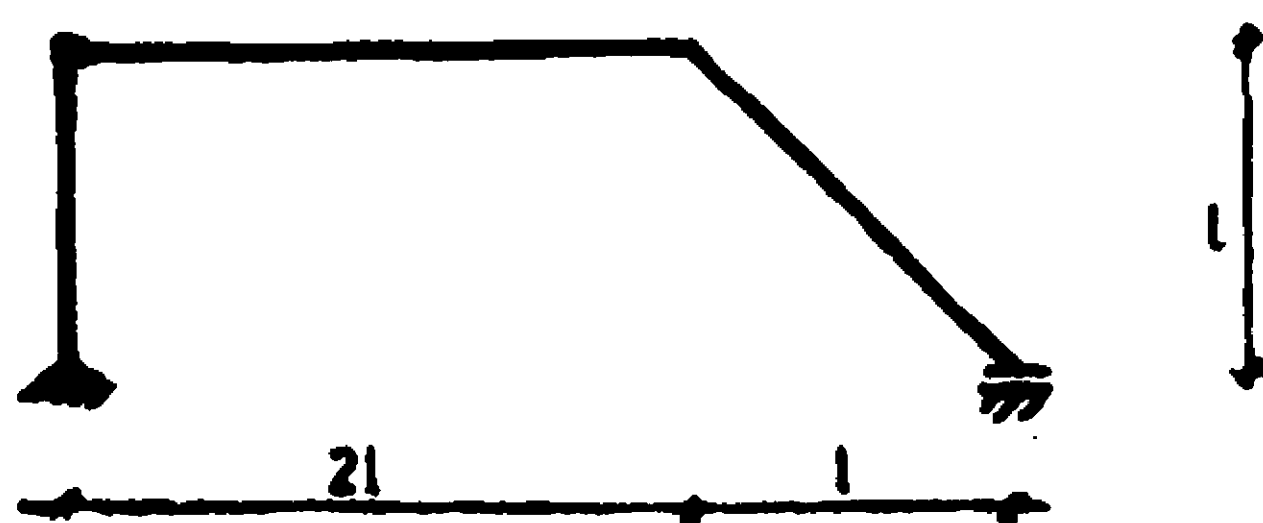
$$t = 2, \quad w = 2, \quad r = 3,$$

$$\text{stąd } \gamma = 3 \cdot 2 - 2 - 3 = +1,$$

a więc układ jest geometrycznie zmienny.

Zadanie 1.2

Dane jest płaski układ ramowy, zbadać jego budowę (rys. 1.2).



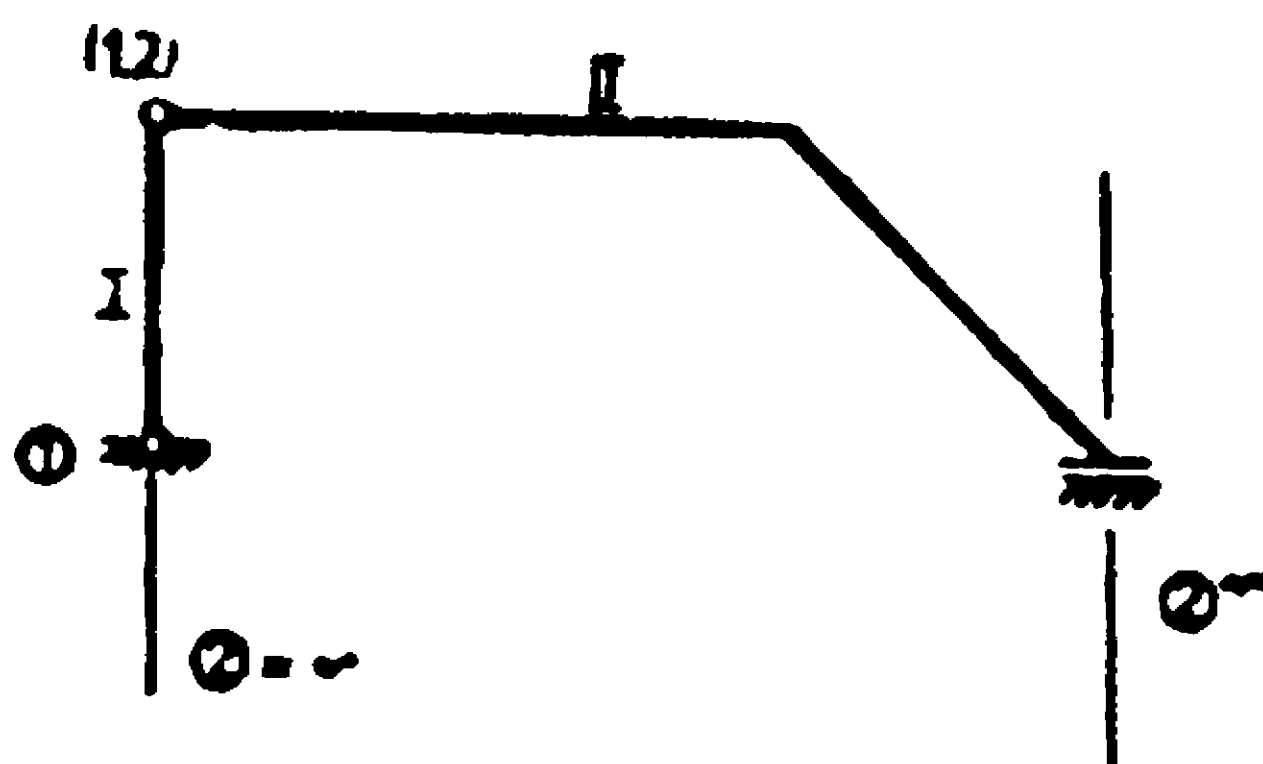
Rys. 1.2

Rozwiązanie

Sprawdzamy warunek konieczny geometrycznej niezmienności

$$\gamma = 3 \cdot 2 - 2 - 4 = 0.$$

Warunek konieczny jest spełniony. Musimy jednak dodatkowo sprawdzić czy układ ten nie jest chwilowo zmienny. W tym celu należy sporządzić dla tego układu tarcz plan biegunów względnych i bezwzględnych.



Rys. 1.3

Ponieważ biegun wzajemnego obrotu (1,2) leży na prostej łączącej bieguny główny tarcz I i II, przedstawiony układ jest chwilowo geometrycznie zmienny.

Zadanie 1.3

Dany jest układ trzech tarcz, zbadać jego budowę (rys. 1.4).

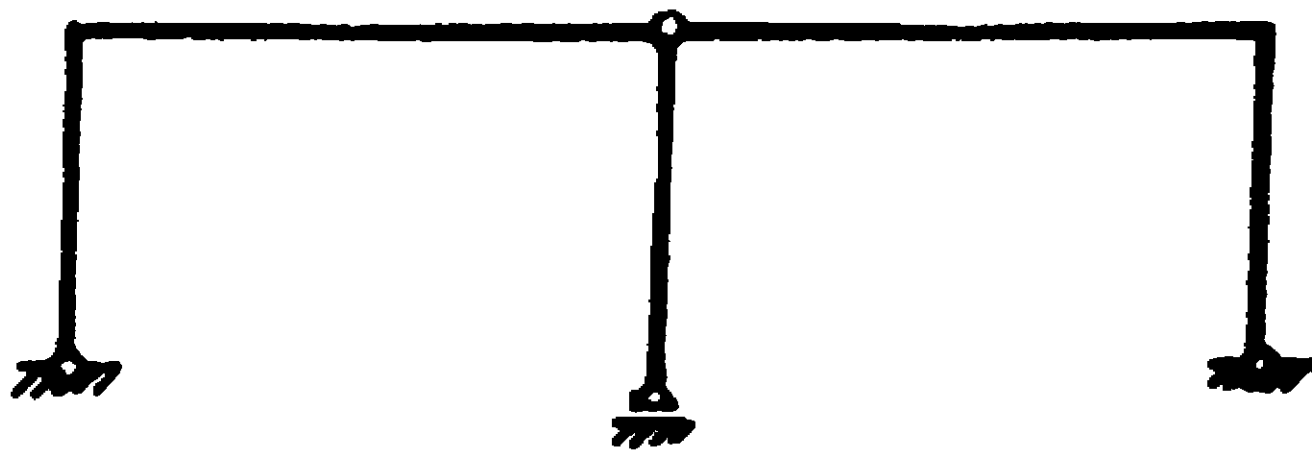
Rozwiązanie

Sprawdzamy warunek konieczny geometrycznej niezmienności:

liczba reakcji $r = 5$

liczba prętów łączących poszczególne tarcze $w = 4$

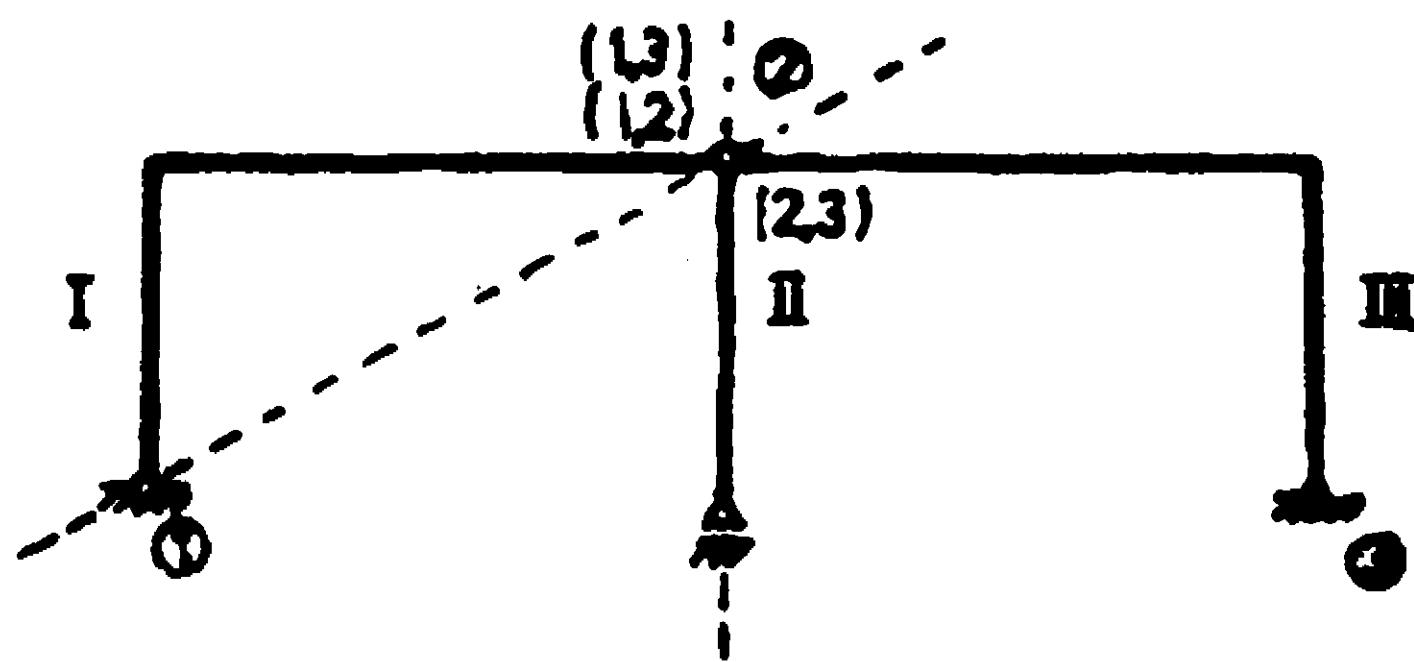
liczba tarcz $t = 3$



Rys. 1.4

$$\gamma = 3 \cdot 3 - 4 - 5 = 0.$$

Warunek konieczny jest spełniony. Sprawdzamy czy układ nie jest chwilowo zmienny geometrycznie. Rysujemy plan biegunów układu. Po określeniu położenia biegunów głównych (1) i (3) oraz biegunów wzajemnego obrotu (1,2) i (2,3), określamy położenie bieguna głównego tarczy II. Biegun tarczy II leży w punkcie przecięcia się prostych przechodzących przez punkty (1), (1,2) i (3), (2,3). Ponieważ mamy zgodność w planie biegunów, układ jest chwilowo geometrycznie zmienny.



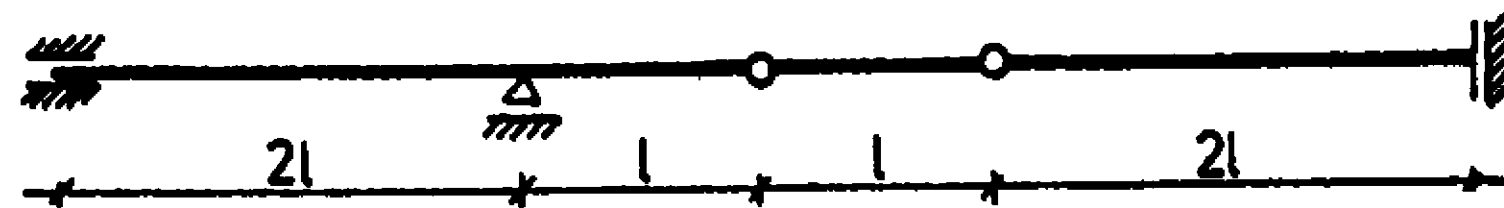
Rys. 1.5

Zadanie 1.4

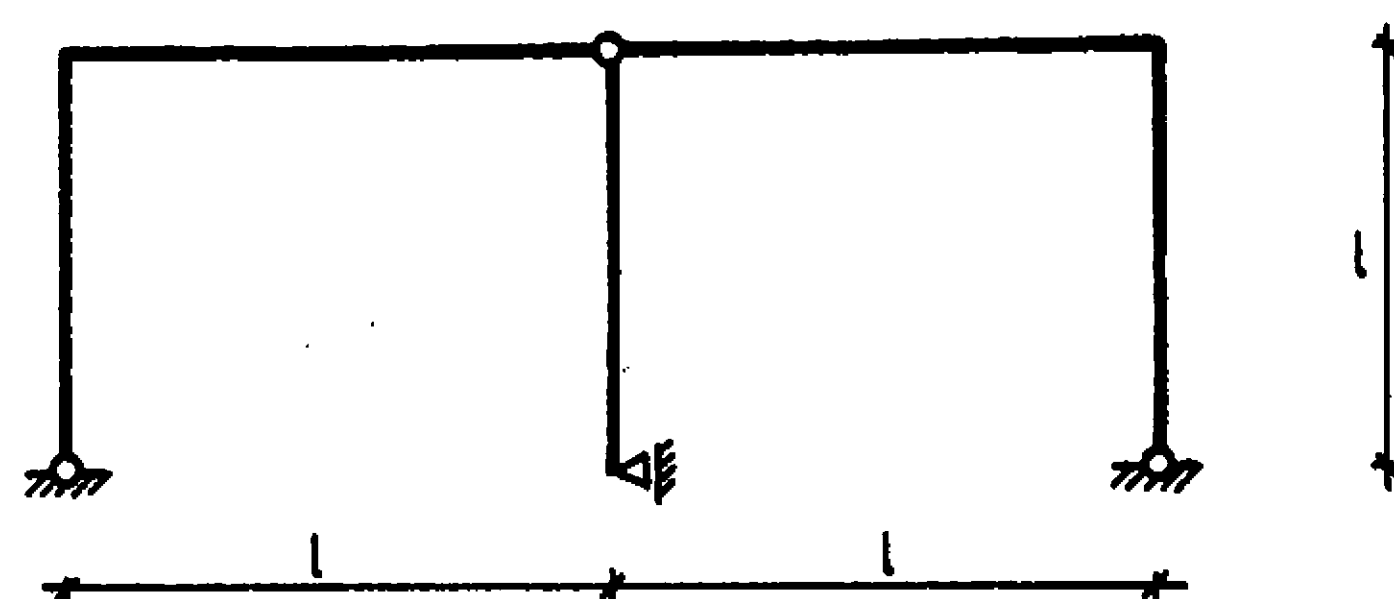
Sprawdzić geometryczną niezmiennłość układów prętowych przedstawionych na rysunkach 1,6a-c.

Rozwiązanie - samodzielne

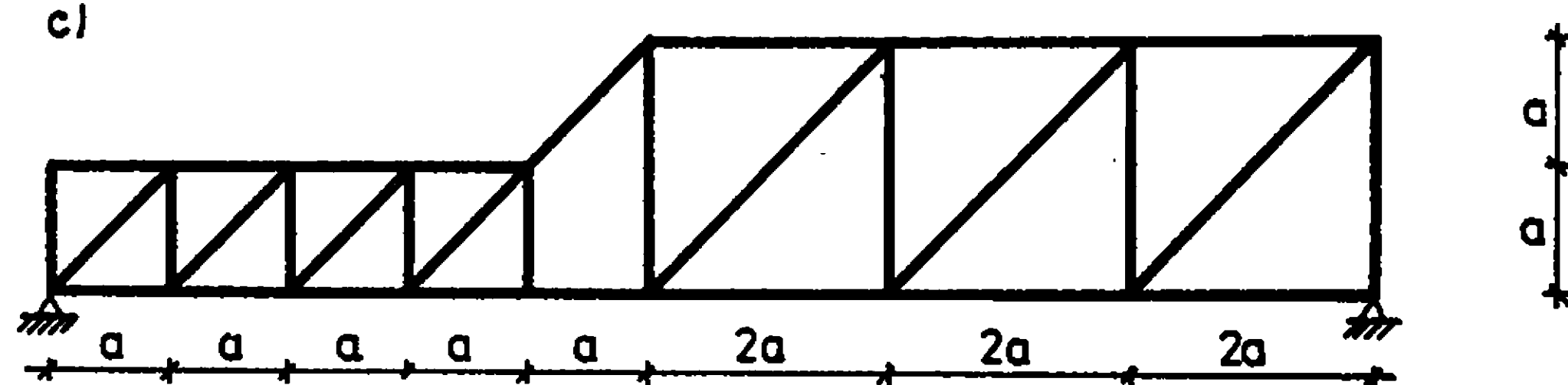
a)



b)



c)



Rys. 1.6a-c

2. ZASTOSOWANIE ZASADY PRAC WIRTUALNYCH DO WYZNACZANIA REAKCJI I SIŁ WEWNĘTRZNYCH

Zasada prac wirtualnych dla ciał sztywnych brzmi: suma prac wirtualnych sił zewnętrznych przy wirtualnym przemieszczeniu zgodnym z kinematycznymi właściwościami układu jest równa zeru w przypadku równowagi tych sił.

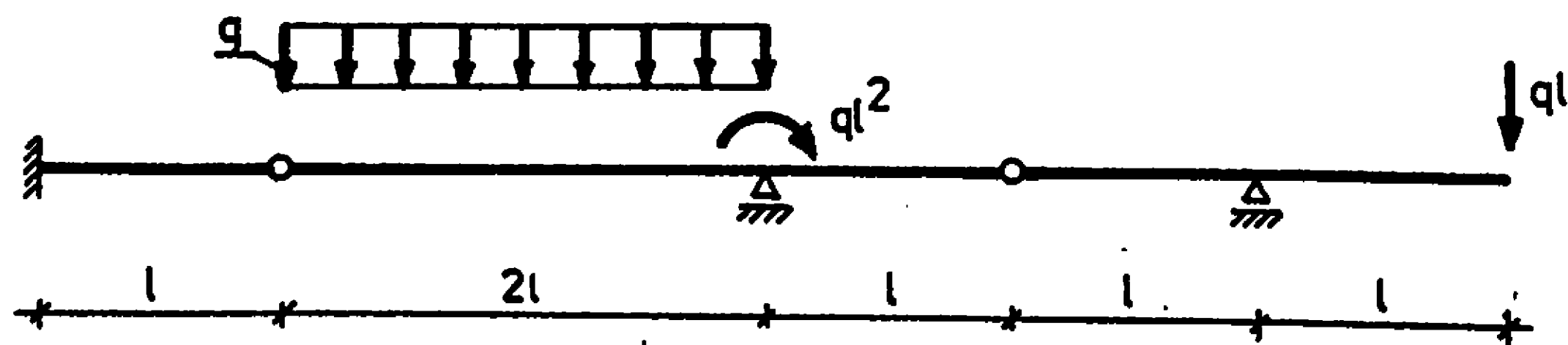
Poszukując wartości reakcji podporowych usuwamy odpowiednie więzy i nadajemy układowi geometrycznie zmiennemu przemieszczenia wirtualne właściwe poszczególnym reakcjom. Niewiadome reakcje wyznaczamy z równań prac wirtualnych dla ciał sztywnych.

W celu obliczenia wartości sił wewnętrznych, t.j. momentu zginającego, siły tnącej lub siły normalnej w dowolnym przekroju uzewnętrzniamy szukaną siłę wewnętrzną, zakładając przegub lub teleskop. Tak powstałemu układowi o jednym stopniu swobody nadajemy wirtualne przemieszczenie i z równania prac wirtualnych sił zewnętrznych na wirtualnych przemieszczeniach wyliczamy szukaną wartość siły wewnętrznej.

Opisany sposób postępowania przy obliczaniu wymienionych wielkości statycznych nosi nazwę metody kinematycznej.

Zadanie 2.1

Dla podanej belki znaleźć metodą kinematyczną następujące reakcje: M_A , R_A , R_B (rys. 2.1).



Rys. 2.1

Rozwiązanie

. Obliczenie momentu utwierdzenia M_A . Uzewnętrzniamy moment podporowy M_A i dla powstałego układu znajdujemy przemieszczenia wirtualne.

Zapisujemy równanie pracy sił zewnętrznych na wirtualnych przemieszczeniach

$$-M_A \cdot \bar{\omega} - 2ql \cdot \frac{1}{2} \bar{\omega} + ql^2 \cdot \frac{1}{2} \bar{\omega} - ql \cdot \frac{1}{2} \bar{\omega} = 0,$$

$$M_A = -ql^2.$$

Obliczenie reakcji R_A

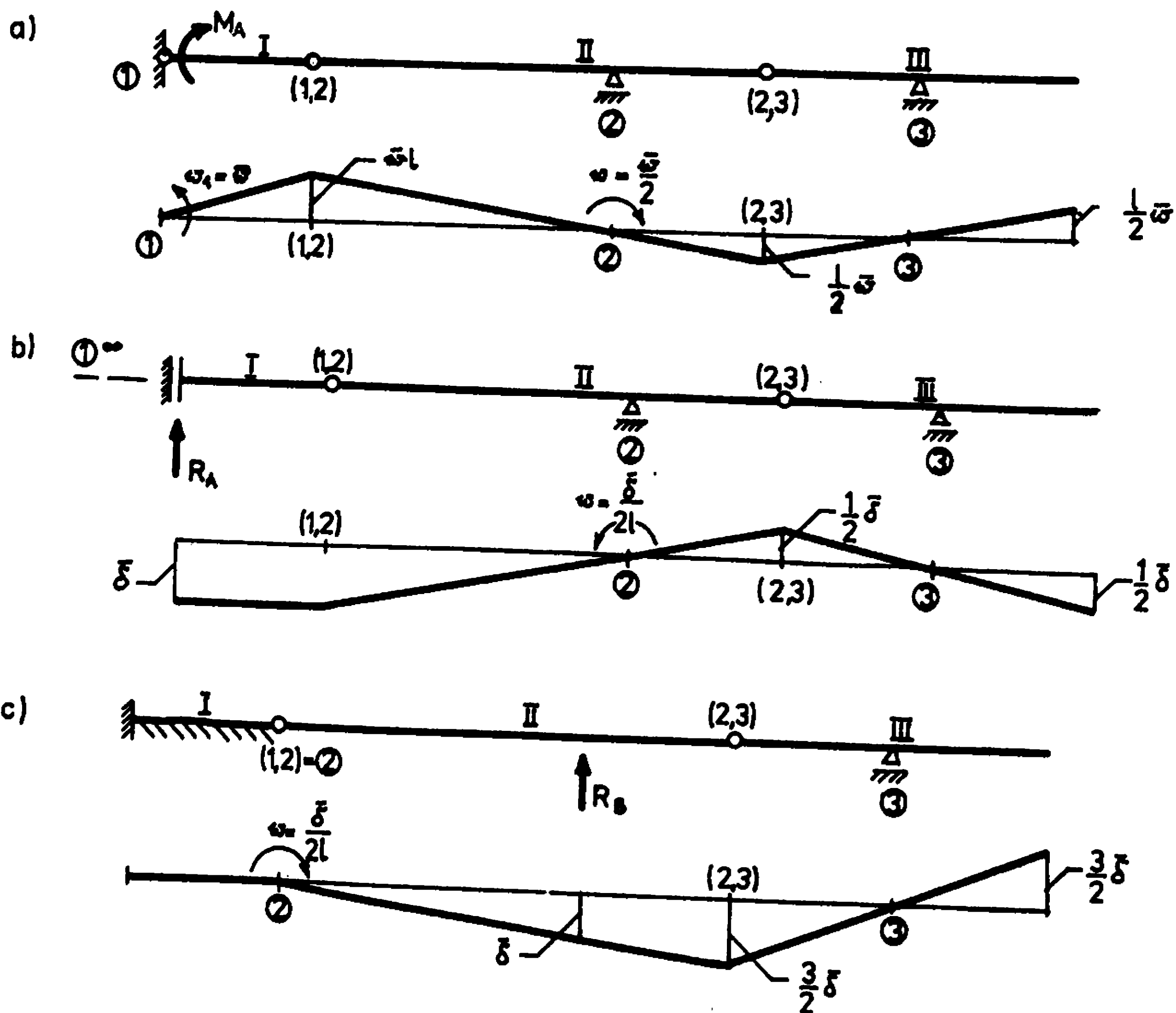
$$-R_A \cdot \bar{\delta} + 2ql \cdot \frac{\bar{\delta}}{2} - ql^2 \cdot \frac{\bar{\delta}}{2l} + ql \cdot \frac{\bar{\delta}}{2} = 0,$$

$$R_A = ql.$$

Obliczenie reakcji R_B

$$-R_B \cdot \bar{\delta} + 2ql \cdot \frac{\bar{\delta}}{2} + ql^2 \cdot \frac{\bar{\delta}}{2l} - ql \cdot \frac{3}{2} \bar{\delta} = 0,$$

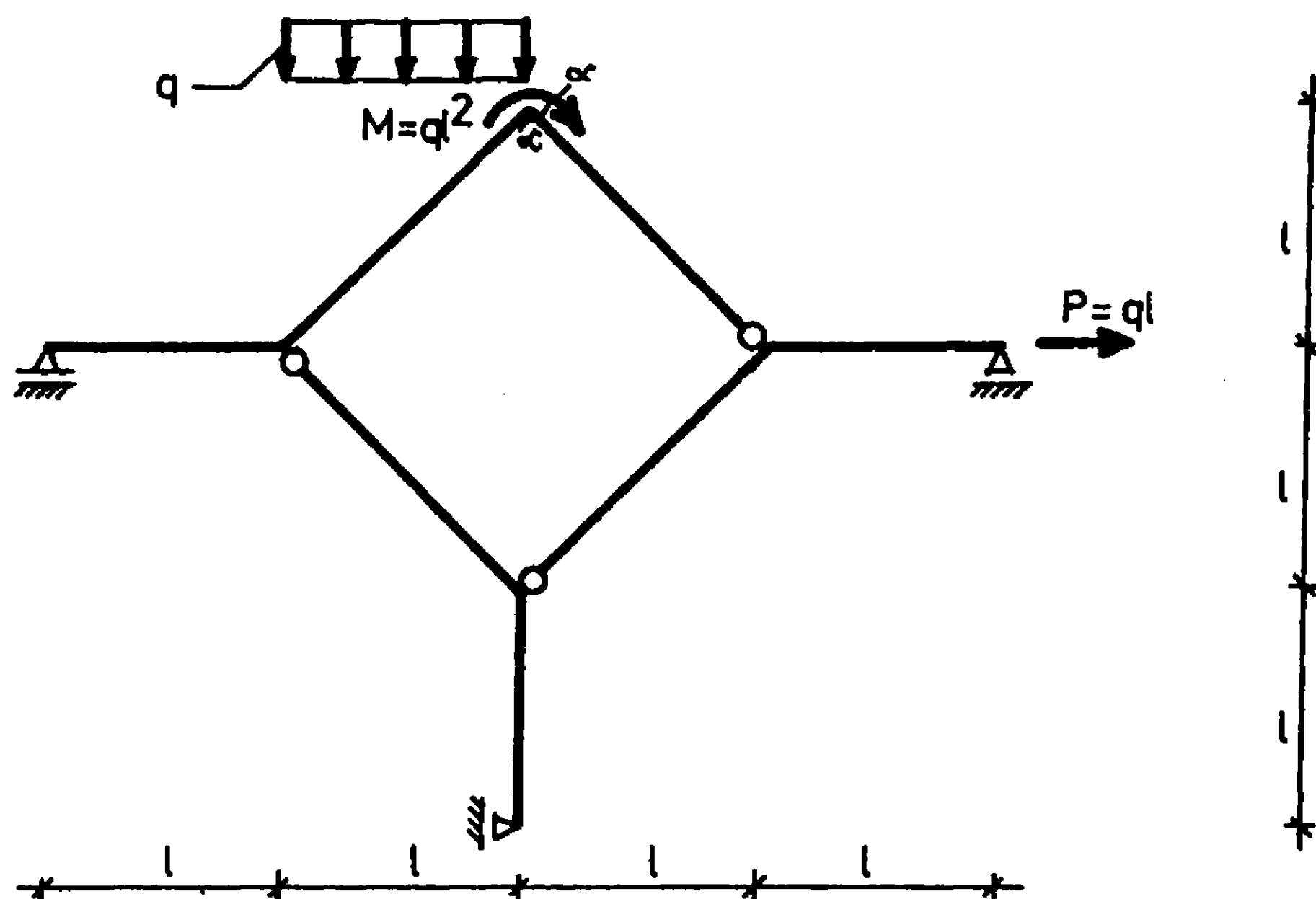
$$R_B = -\frac{ql}{2}.$$



Rys. 2.1a-c

Zadanie 2.2

Dla podanego schematu statycznego znaleźć moment zginający M_α metodą kinematyczną (rys. 2.2).



Rys. 2.2

Rozwiązanie

W celu znalezienia momentu zginającego M_α zakładamy w tym przekroju przegub i uzewnętrzniamy moment. Dla powstałego układu znajdujemy plan przemieszczeń wirtualnych.

Określenie planu przemieszczeń rozpoczynamy od znalezienia bieguna wzajemnego obrotu tarcz I i III. Otrzymamy go z przecięcia się prostych przechodzących przez punkty (1,2), (2,3) oraz (1,4), (3,4). Następnie korzystamy z planu przemieszczeń. Na osi składowych pionowych przemieszczeń oznaczamy położenie biegunów głównych tarcz I i III. Obracamy tarczę I o kąt ω_1 , a następnie znając położenie bieguna względnego (1,3) określamy składowe przemieszczenia tarczy III.

Ze składowych pionowych przemieszczeń mamy

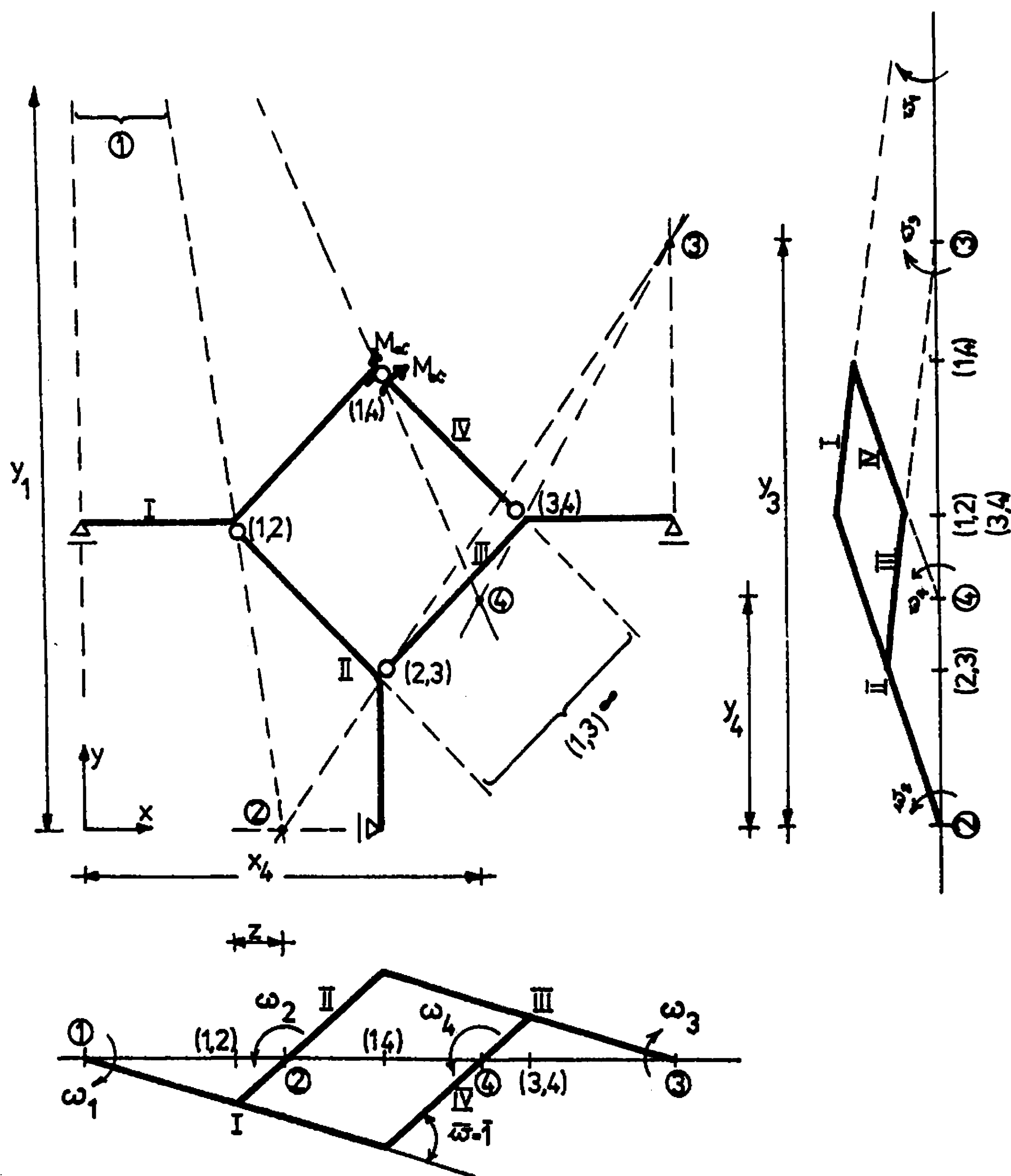
$$\omega_1 \cdot l = \omega_2 \cdot z,$$

$$\omega_2(1 - z) = \omega_3 \cdot 2l,$$

$$\omega_1 = \omega_3.$$

Z powyższych równości wynika, że $z = \frac{1}{3}$.

Odległość "z" określa położenie bieguna obrotu (2) tarczy II (patrz rys. 2.3).



Rys. 2.3

Biegun obrotu tarczy III otrzymamy z przecięcia się prostej przechodzącej przez punkty (2), (2,3) z prostą prostopadłą do kierunku przesuwu podpory.

Rzędną bieguna obrotu (3) wyliczamy z proporcji

$$\frac{1}{\frac{2}{3} \cdot 1} = \frac{y_3 - 1}{21},$$

stąd mamy $y_3 = 41$.

Biegun bezwzględny tarczy I leży na prostej przechodzącej przez punkty (2), (1,2) oraz na prostej prostopadłej do kierunku przesuwu podpory.

Z proporcji

$$\frac{y_1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{21}{\frac{1}{3}},$$

obliczymy rzędną bieguna (1), która wynosi $y_1 = 81$.

Biegun obrotu tarczy IV leży na prostych przechodzących przez punkty (3), (3,4) i (1), (1,4). Równania tych prostych są następujące: $y = 2x - 41$, $y = \frac{5}{2}x + 81$. Po rozwiązaniu otrzymujemy $x_4 = \frac{8}{3}l$, $y_4 = \frac{4}{3}l$.

Kąty obrotów poszczególnych tarcz wynoszą:

$$\omega_1 + \omega_4 = \bar{\omega},$$

$$\omega_1 \cdot 21 = \omega_4 \cdot \frac{2}{3}l,$$

stąd

$$\omega_1 = \frac{1}{4}\bar{\omega}, \quad \omega_4 = \frac{3}{4}\bar{\omega},$$

$$\omega_3 = \omega_1 = \frac{1}{4}\bar{\omega},$$

$$\omega_1 l = \omega_2 \cdot \frac{1}{3}, \quad \omega_2 = 3 \cdot \omega_1 = \frac{3}{4}\bar{\omega}.$$

Praca sił zewnętrznych na wirtualnych przemieszczeniach dla układu tarcz sztywnych ma postać

$$-M_\alpha \bar{\omega} + q l^2 \omega_1 - q l \omega_2 \cdot 21 + q l \cdot \omega_1 \cdot \frac{3}{2}l = 0,$$

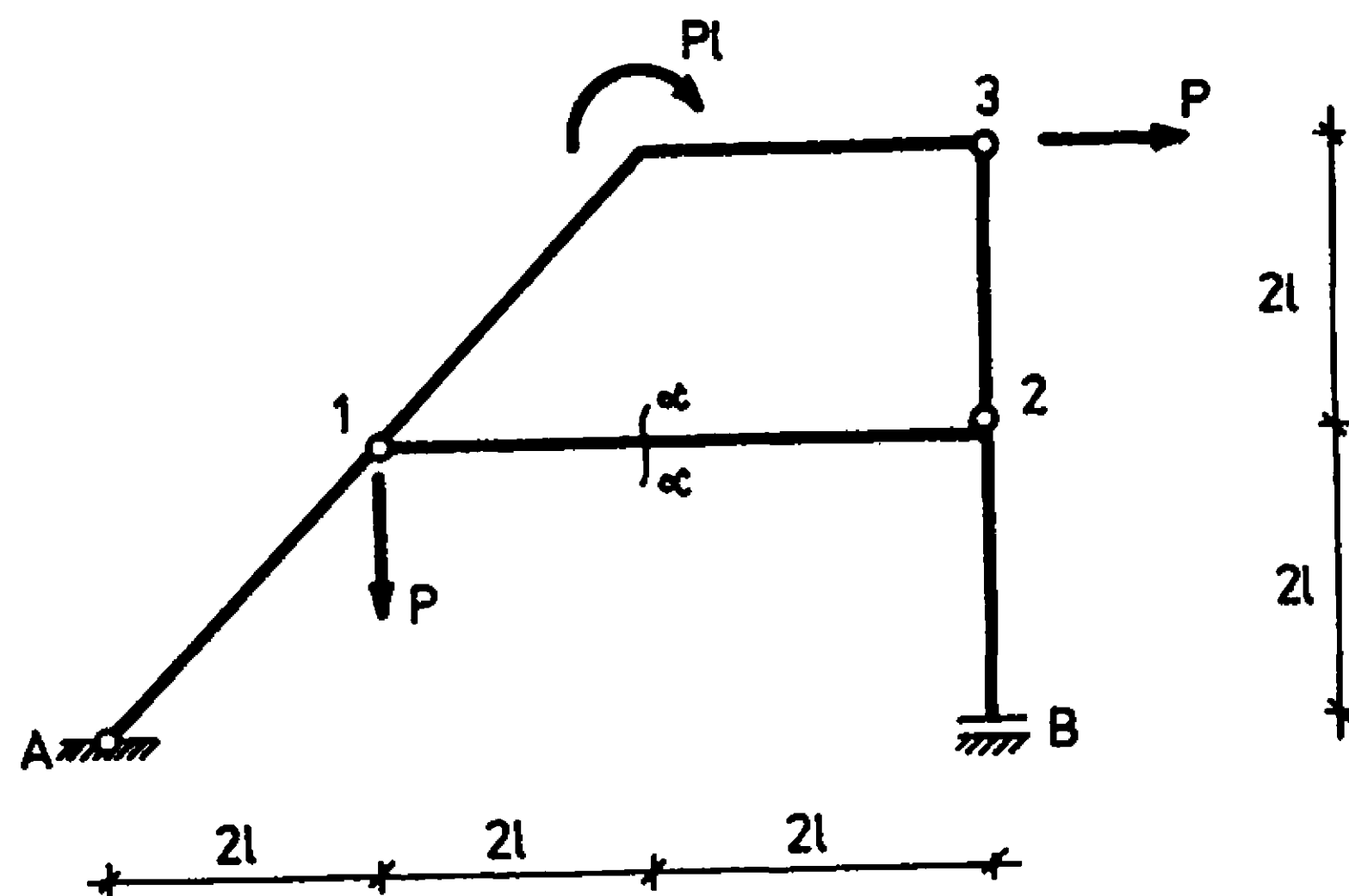
$$M_\alpha = q l^2 \frac{1}{4} - q l \frac{1}{4} \cdot 21 + q l \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2}l,$$

stąd otrzymujemy

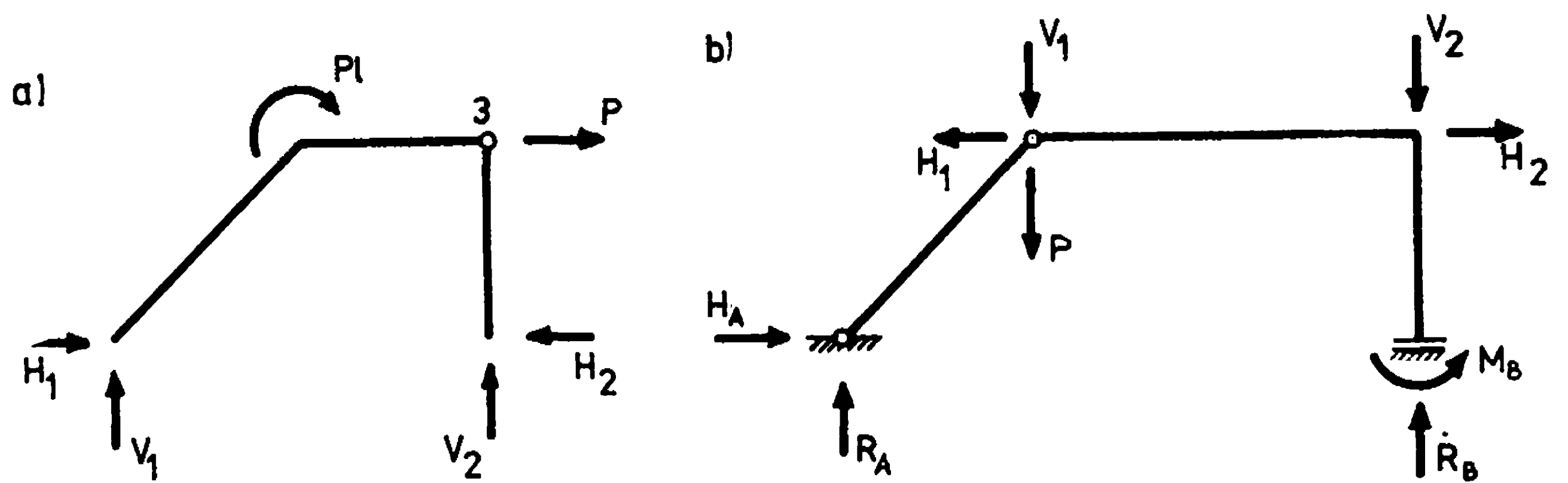
$$M = \frac{q l^2}{8}.$$

Zadanie 2.3

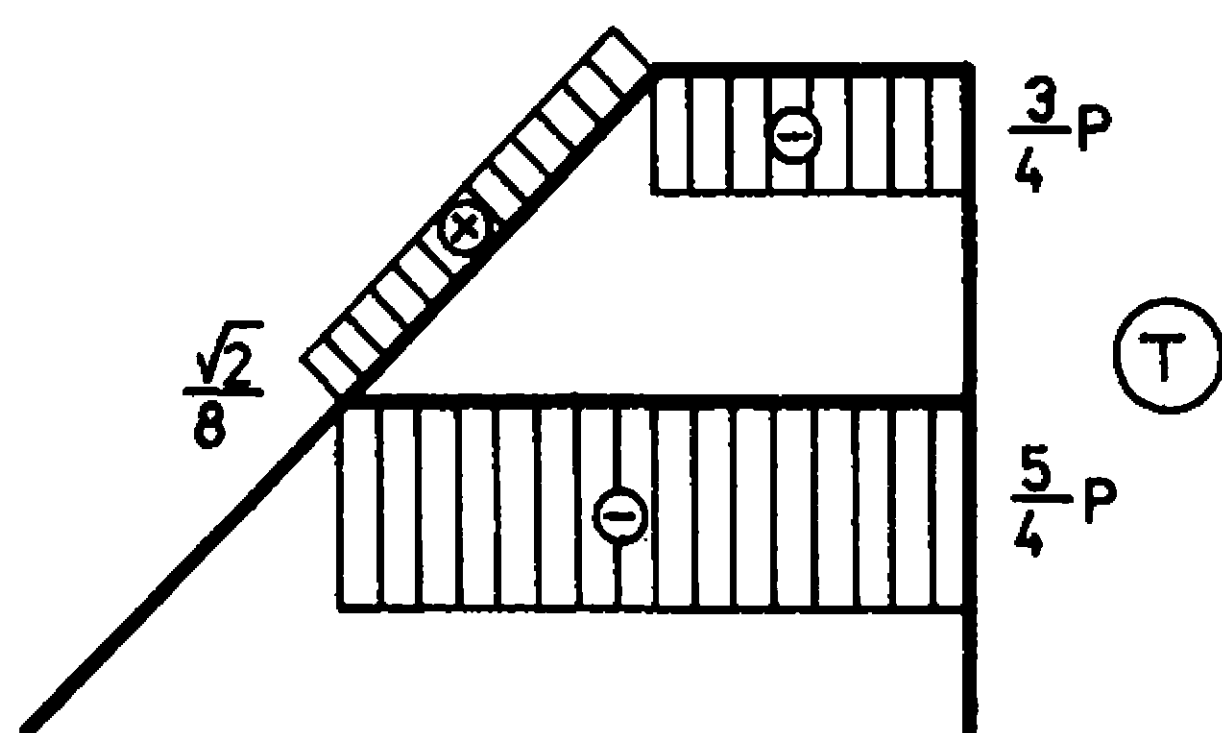
Dla podanego schematu wykonać wykres sił tnących $\textcircled{T}$ i sprawdzić metodą kinematyczną wartość siły tnącej w przekroju $\alpha - \alpha$ (rys. 2.4).



Rys. 2.4



Rys. 2.4a-b



Rys. 2.5

Rozwiązanie

Schemat obliczeniowy

Reakcje podporowe

$$\sum M_3^P = 0, \quad H_2 = 0, \quad \sum M_1 = 0, \quad V_2 = \frac{3}{4}P,$$

$$\sum X = 0, \quad H_1 = -P, \quad \sum M_2 = 0, \quad V_1 = -\frac{3}{4}P,$$

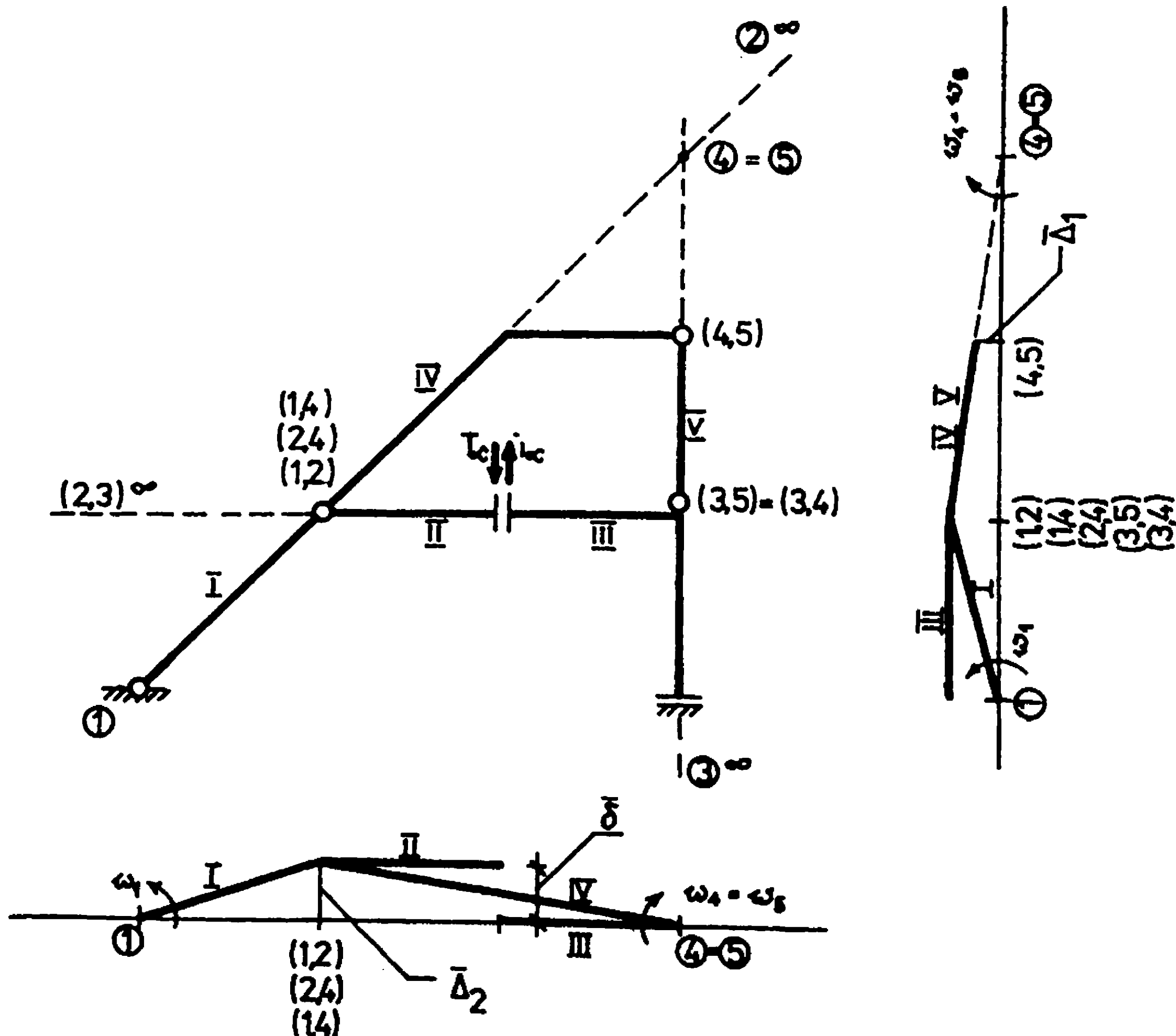
$$\sum X = 0, \quad H_A = -P, \quad \sum M_1^1 = 0, \quad R_A = -P,$$

$$\sum Y = 0, \quad R_B = 2P, \quad \sum M_B = 0, \quad M_B = -5Pl.$$

Wykres siły tnącej przedstawiono na rysunku 2.5.

W celu wyznaczenia siły tnącej w przekroju $\alpha-\alpha$, metodą kinematyczną zakładamy w tym przekroju teleskop i uzewnętrzniamy siłę T_α . Dla tak powstałego układu wyznaczamy przemieszczenia wirtualne.

Zaczynamy od wyznaczenia biegunów obrotów poszczególnych tarcz. Bieguny obrotów (1) i (3) są wprost dane z warunków brzegowych. Biegun obrotu tarczy II leży w punkcie przecięcia się prostych przechodzących przez punkty (1), (1,2) i (3), (2,3). W celu znalezienia bieguna obrotu tarczy IV należy najpierw znaleźć biegun wzajemnego obrotu (3,4) tarcz III i IV. Leży on na prostych przechodzących przez punkty (2,3), (2,4) i (3,5), (4,5). Biegun bezwzględny tarczy IV otrzymamy z przecięcia się prostych przechodzących przez punkty (3,4), (3) i (1), (1,4). Natomiast biegun tarczy V otrzymamy z przecięcia się prostych (4), (4,5) i (1), (1,5).



Rys. 2.6

Znając położenie biegunów obrotu znajdziemy składowe pionowe i poziome przemieszczeń, przyjmując, że powstała w przekroju różnica przemieszczeń wynosi $\bar{\delta}$.

Wartości kątów obrotów poszczególnych tarcz wynoszą:

$$\omega_1 = \frac{\bar{\delta}}{2l}, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0,$$

$$\omega_1 \cdot 2l = \omega_4 \cdot 4l, \quad \omega_4 = \omega_5 = \frac{1}{2} \omega_1 = \frac{\bar{\delta}}{4l}.$$

Przemieszczenia $\bar{\Delta}$ mają wartość:

$$\bar{\Delta}_1 = \omega_5 \cdot 2l = \frac{\bar{\delta}}{2},$$

$$\bar{\Delta}_2 = \omega_1 \cdot 1l = \bar{\delta}.$$

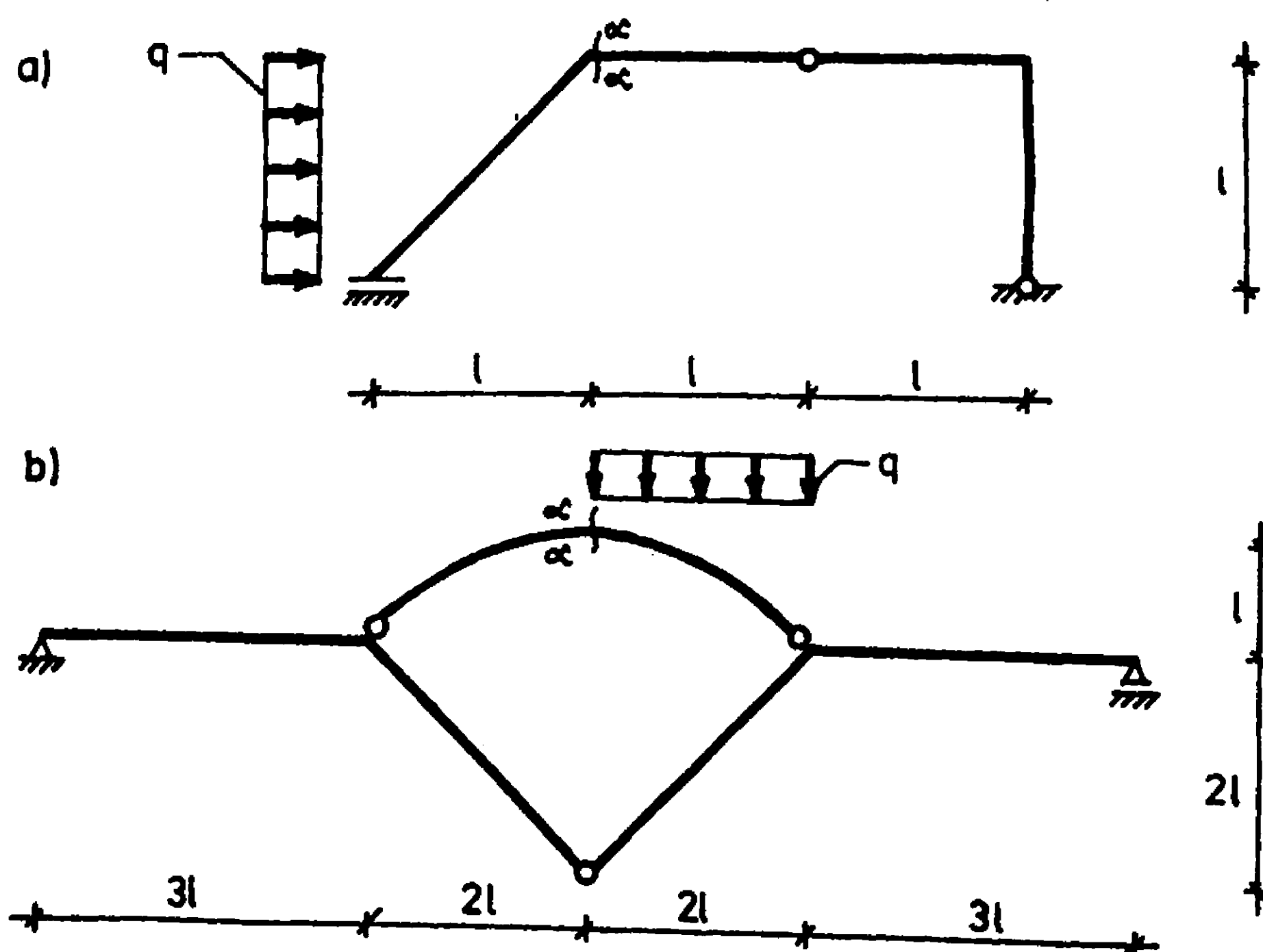
Korzystając z zasady prac wirtualnych dla ciał sztywnych otrzymamy:

$$-T_\alpha \cdot \bar{\delta} - P \cdot \bar{\Delta}_1 - P \cdot \bar{\Delta}_2 + Pl \cdot \omega_4 = 0,$$

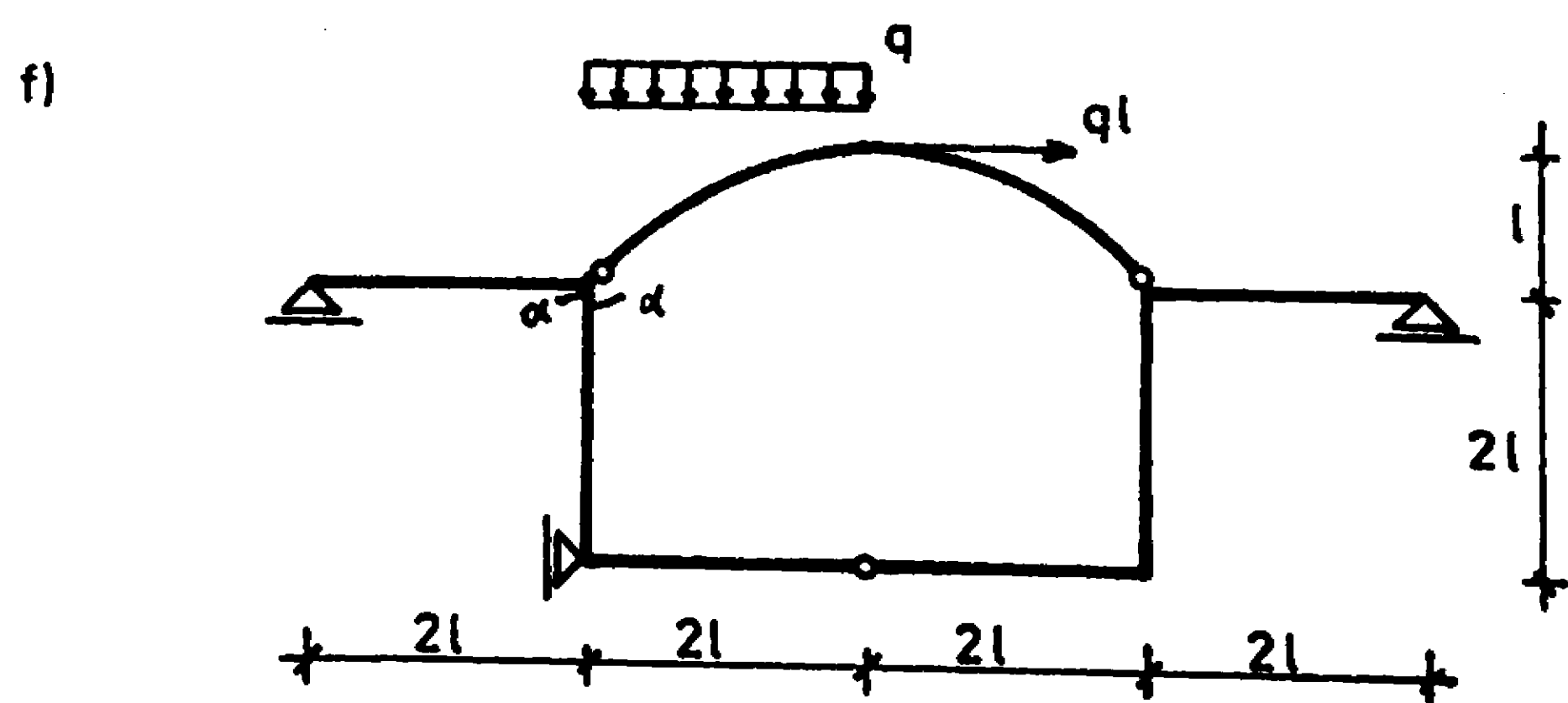
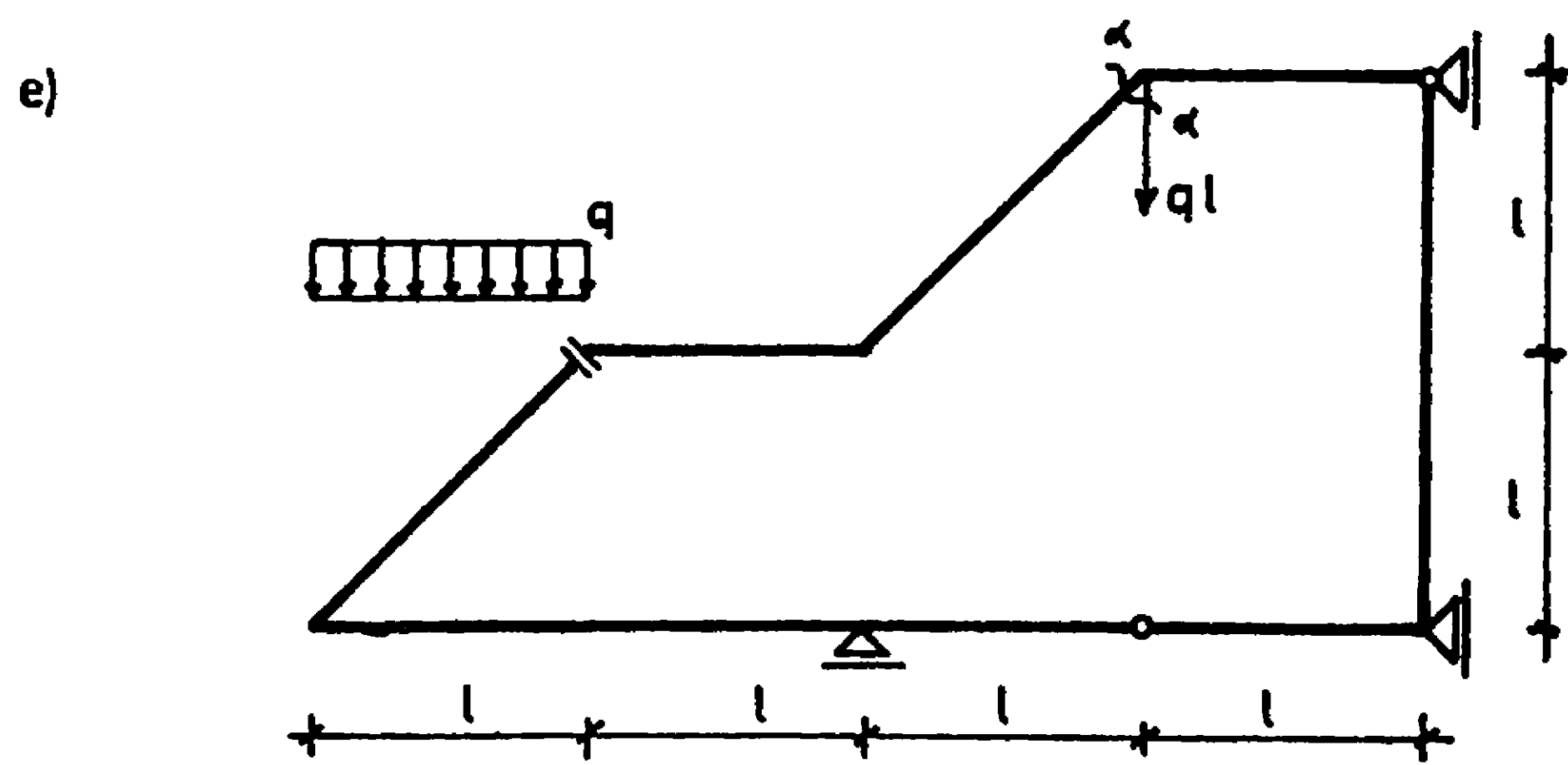
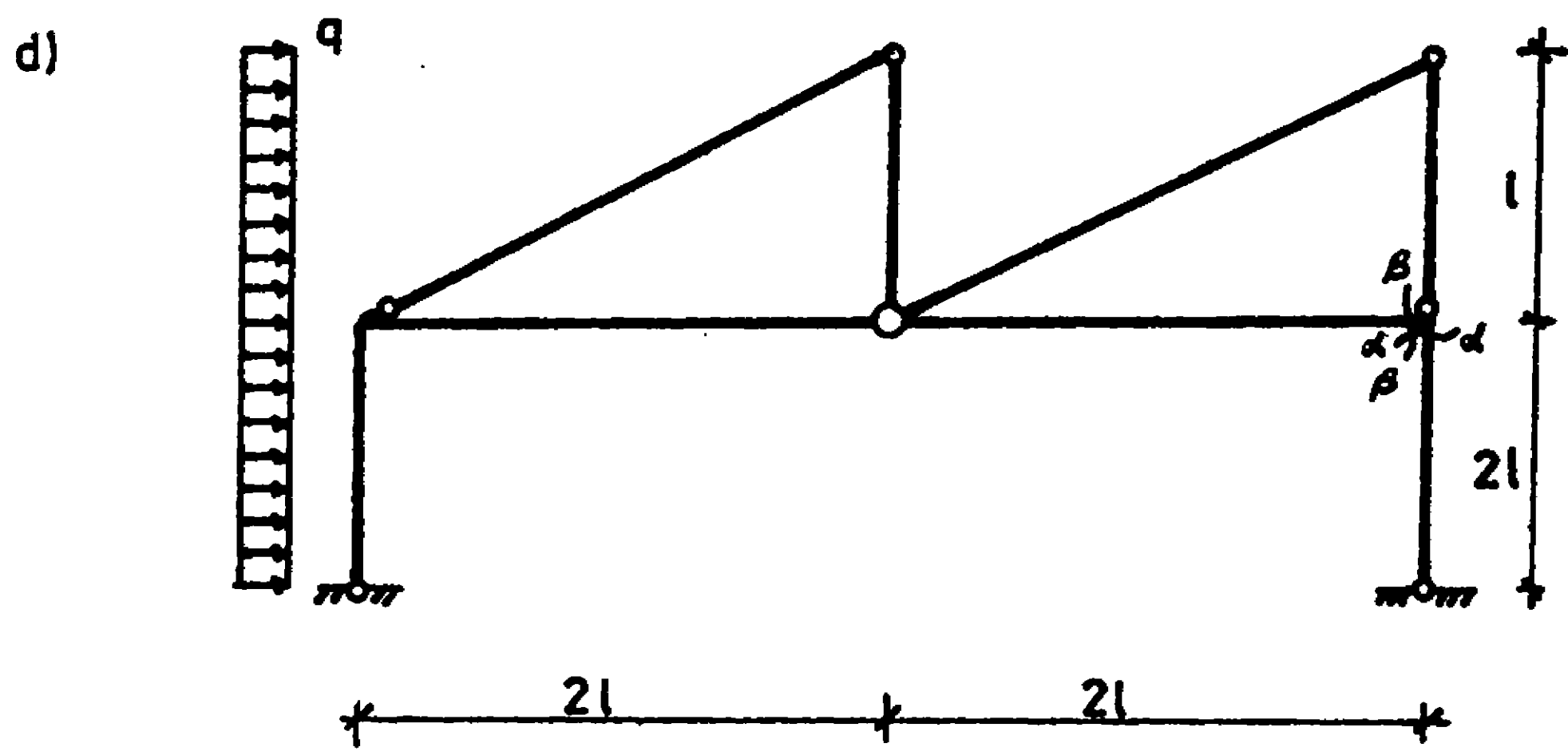
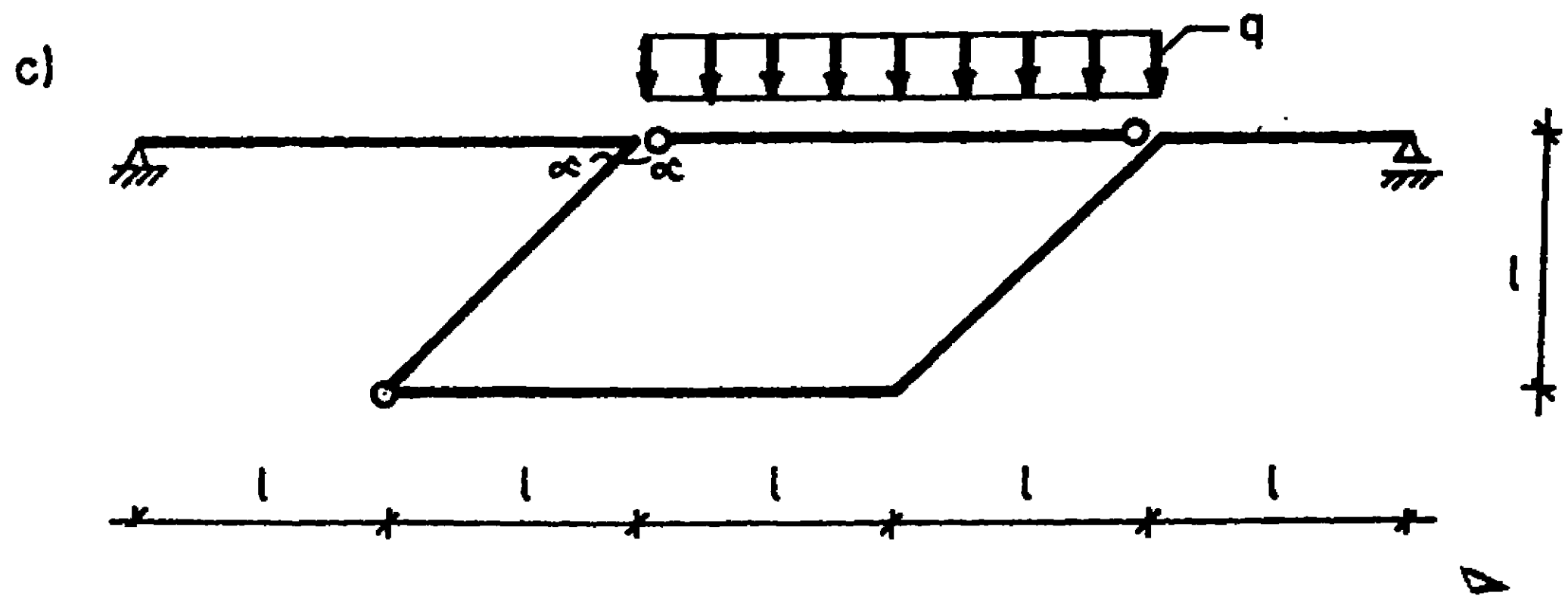
$$T_\alpha = -P \cdot \frac{1}{2} - P \cdot 1 + Pl \cdot \frac{1}{4l} = -\frac{5}{4}P.$$

Zadanie 2.4

Dla podanych układów sporządzić wykresy sił wewnętrznych i sprawdzić metodą kinematyczną wartości sił wewnętrznych w zaznaczonych przekrojach (rys. 2.7a-f).



Rys. 2.7a, b



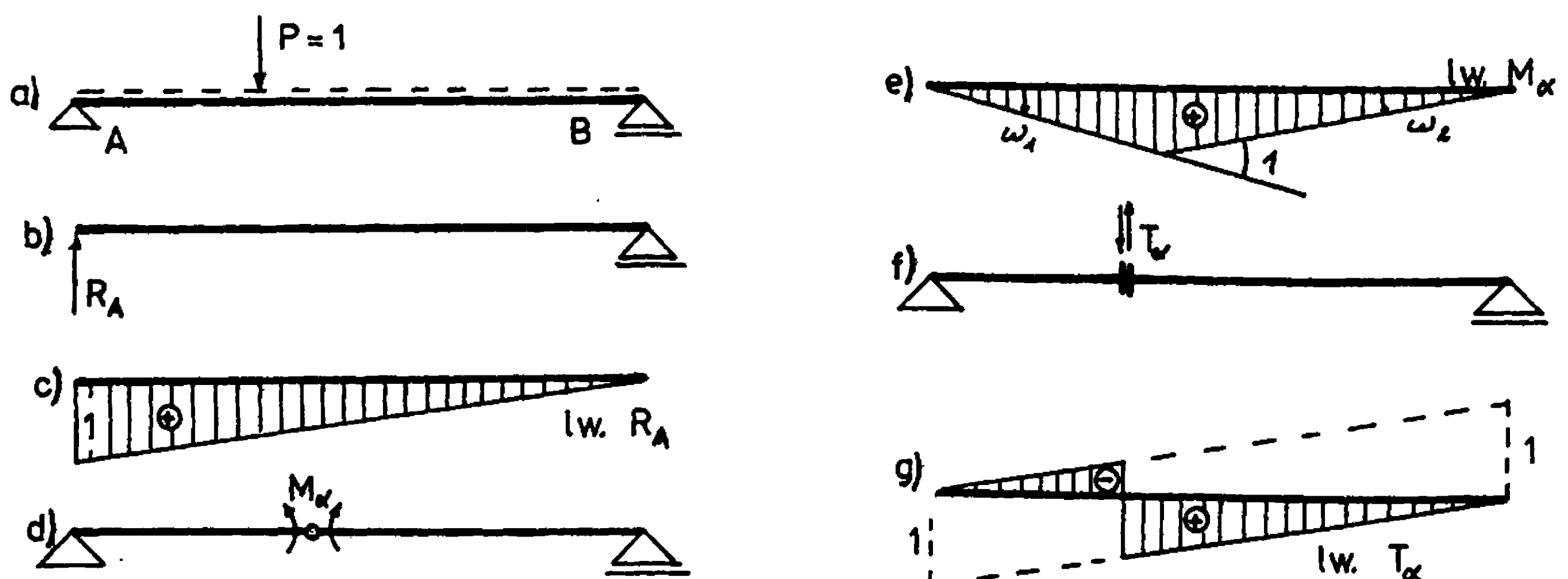
Rys. 2.7c-f

3. LINIE WPŁYWOWE REAKCJI I SIŁ WEWNĘTRZNYCH W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH

Linie wpływowe reakcji podporowych i sił wewnętrznych możemy znajdować metodą analityczną (statyczną) lub metodą kinematyczną. Poszukując linii wpływowych wielkości statycznych metodą analityczną korzystamy z równań statyki, wyznaczając z nich reakcje podporowe lub też siły wewnętrzne w funkcji współrzędnej określającej położenie siły jednostkowej. Natomiast poszukiwanie linii wpływowych wielkości statycznych metodą kinematyczną opiera się na zasadzie prac wirtualnych dla tarcz sztywnych.

Linie wpływową przedstawiają przemieszczenia tych prętów po których porusza się siła dla układu, który w określony sposób uzyskał jeden stopień swobody.

Linie wpływową reakcji podporowej szukamy w ten sposób, że usuwamy odpowiednie więzy w miejscu występowania reakcji i przemieszczamy o jednostkę wzdłuż jej linii działania. Rzuty odpowiednich przemieszczeń prętów po których porusza się jednostkowa siła przedstawiają linię wpływową (rys. 3.1b,c).



Rys. 3.1a-g

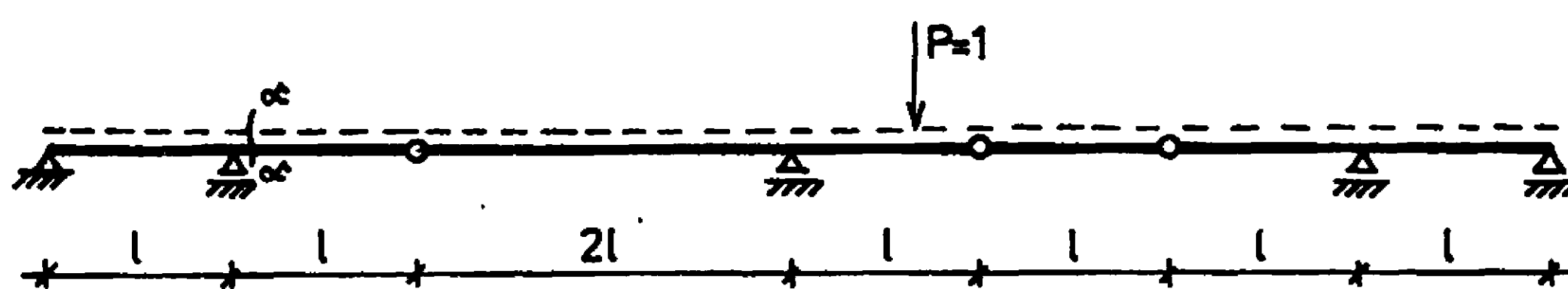
Linie wpływową momentu zginającego M_α znajdujemy w następujący sposób. Zakładamy w przekroju $\alpha - \alpha$ przegub i powstały łańcuch kinematyczny równoważymy siłą wewnętrzną M_α . Łańcuchowi temu nadajemy

wirtualne przemieszczenie, zgodne z ograniczającymi go więzami tak, aby wzajemny obrót przekrojów w miejscu $\alpha-\alpha$ był równy jednostce. Plan odpowiednich przemieszczeń tego łańcucha kinematycznego jest identyczny z poszukiwaną linią wpływową M_α (rys. 3.1d-e).

Aby wyznaczyć linię wpływową siły tnącej T_α zakładamy w przekroju $\alpha-\alpha$ teleskop i powstały łańcuch kinematyczny równoważymy siłą wewnętrzną T_α . Nadane temu łańcuchowi wirtualne przemieszczenie jest tak dobrane, aby wzajemne oddalenie punktów w przekroju $\alpha-\alpha$ równe było jednostce. Rzuty odpowiednich przemieszczeń prętów przedstawiają linię wpływową T_α (rys. 3.1f,g). W metodzie kinematycznej znaki linii wpływowej ustalamy po zapisaniu równania prac wirtualnych dla tarcz sztywnych.

Zadanie 3.1

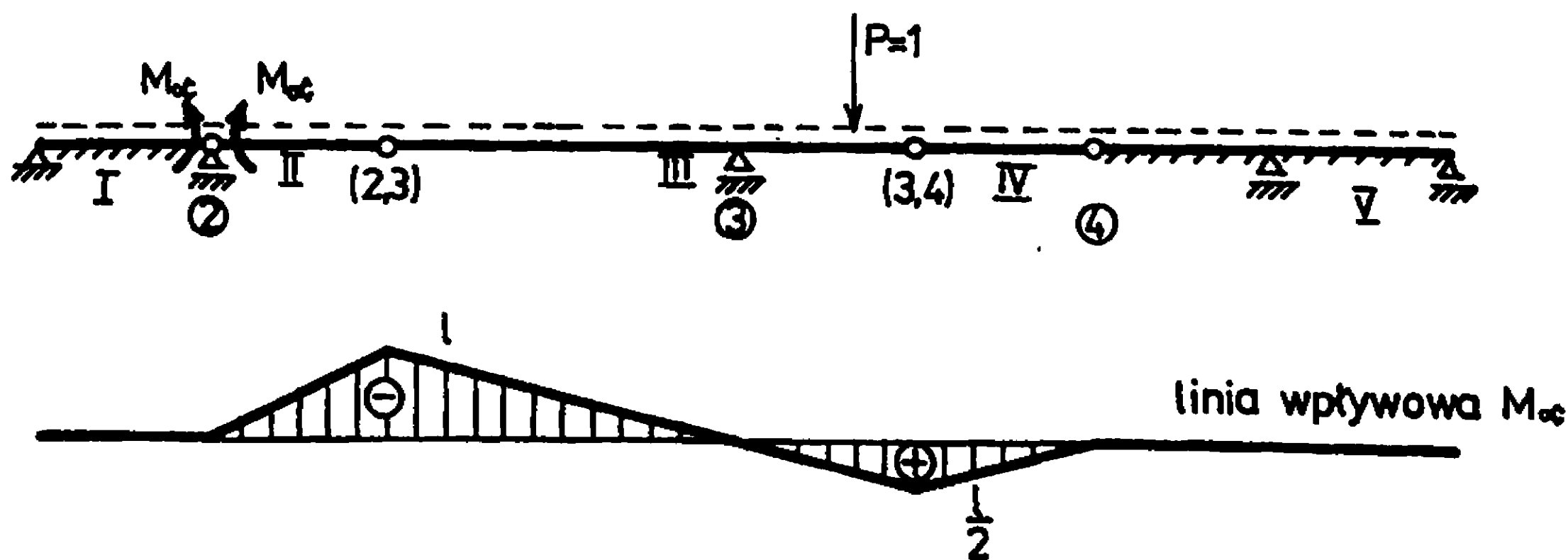
Dla podanej belki znaleźć linię wpływową momentu zginającego i siły znącej w przekroju $\alpha-\alpha$ (rys. 3.2).



Rys. 3.2

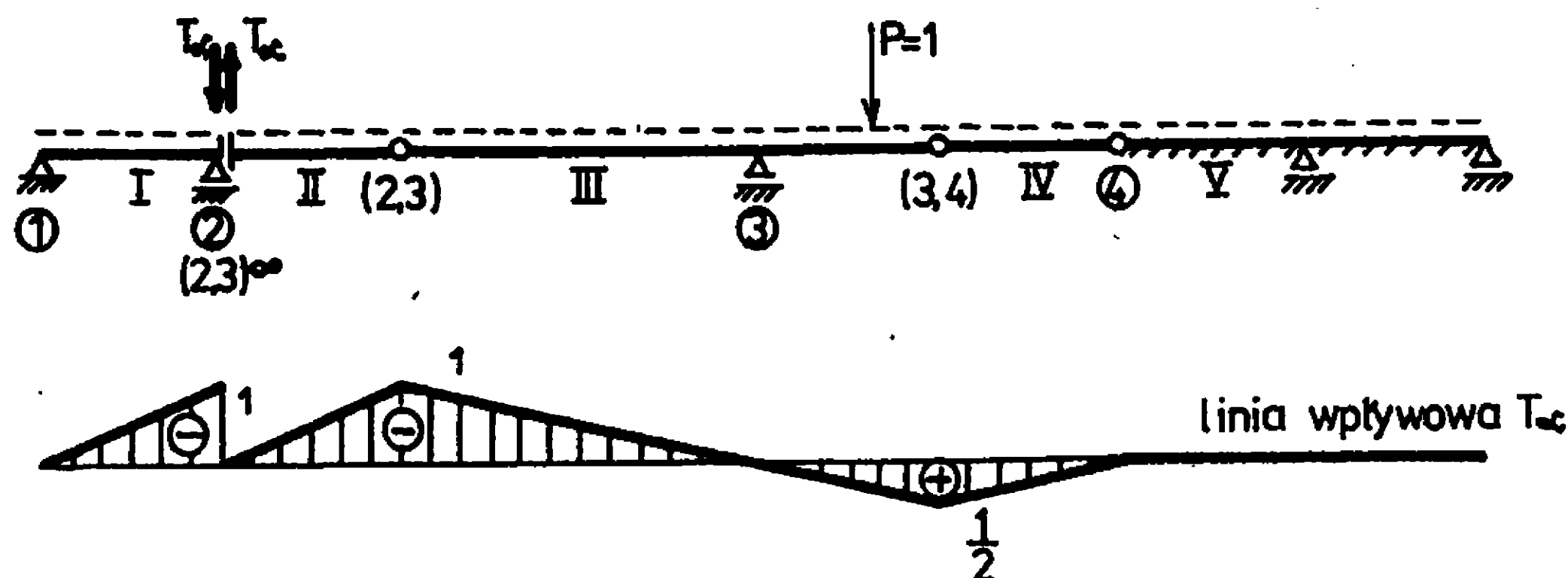
Rozwiązanie

Aby znaleźć linię wpływową momentu zginającego w przekroju $\alpha-\alpha$ zakładamy przegub, a następnie dokonujemy wzajemnego obrotu przekrojów o kąt $\varphi = 1$. Plan pionowych przemieszczeń jest poszukiwaną linią wpływową (rys. 3.3).



Rys. 3.3

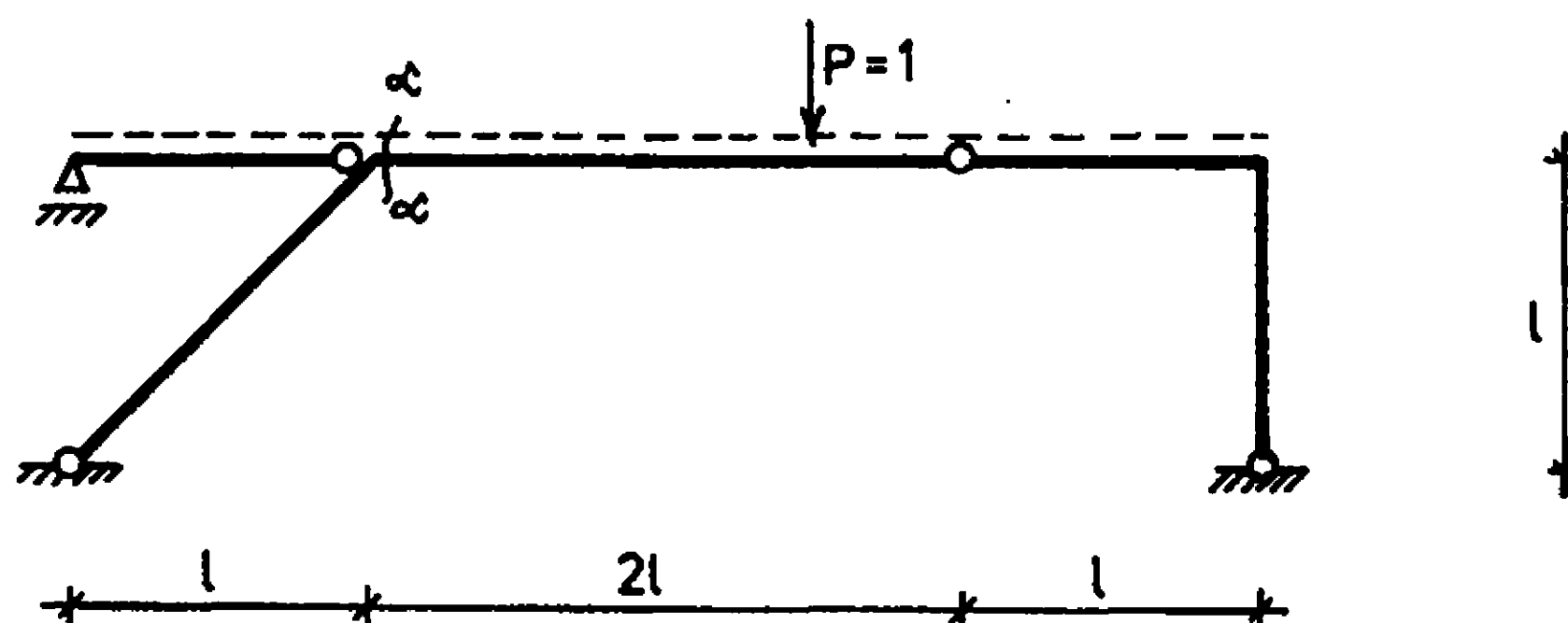
Linie wpływową siły tnącej T_α znajdujemy zakładając teleskop w przekroju $\alpha - \alpha$ i dokonując rozsunienia tarcz teleskopu o jednostkę (rys. 3.4).



Rys. 3.4

Zadanie 3.2

Dla podanej ramy znaleźć metodą kinematyczną linie wpływową siły tnącej w przekroju $\alpha - \alpha$ (rys. 3.5).



Rys. 3.5

Rozwiązanie

W przekroju $\alpha - \alpha$ zakładamy teleskop. Dla otrzymanego łańcucha kinematycznego budujemy plan biegunów bezwzględnych i względnych. Rzuty przemieszczeń tarcz na kierunku pionowy pokazano na rysunku 3.6.

Z planu biegunów odczytujemy, że

$$\begin{cases} \omega_1 \cdot 1 + \omega_3 \cdot 3l = 1, \\ \omega_1 = \omega_3, \end{cases}$$

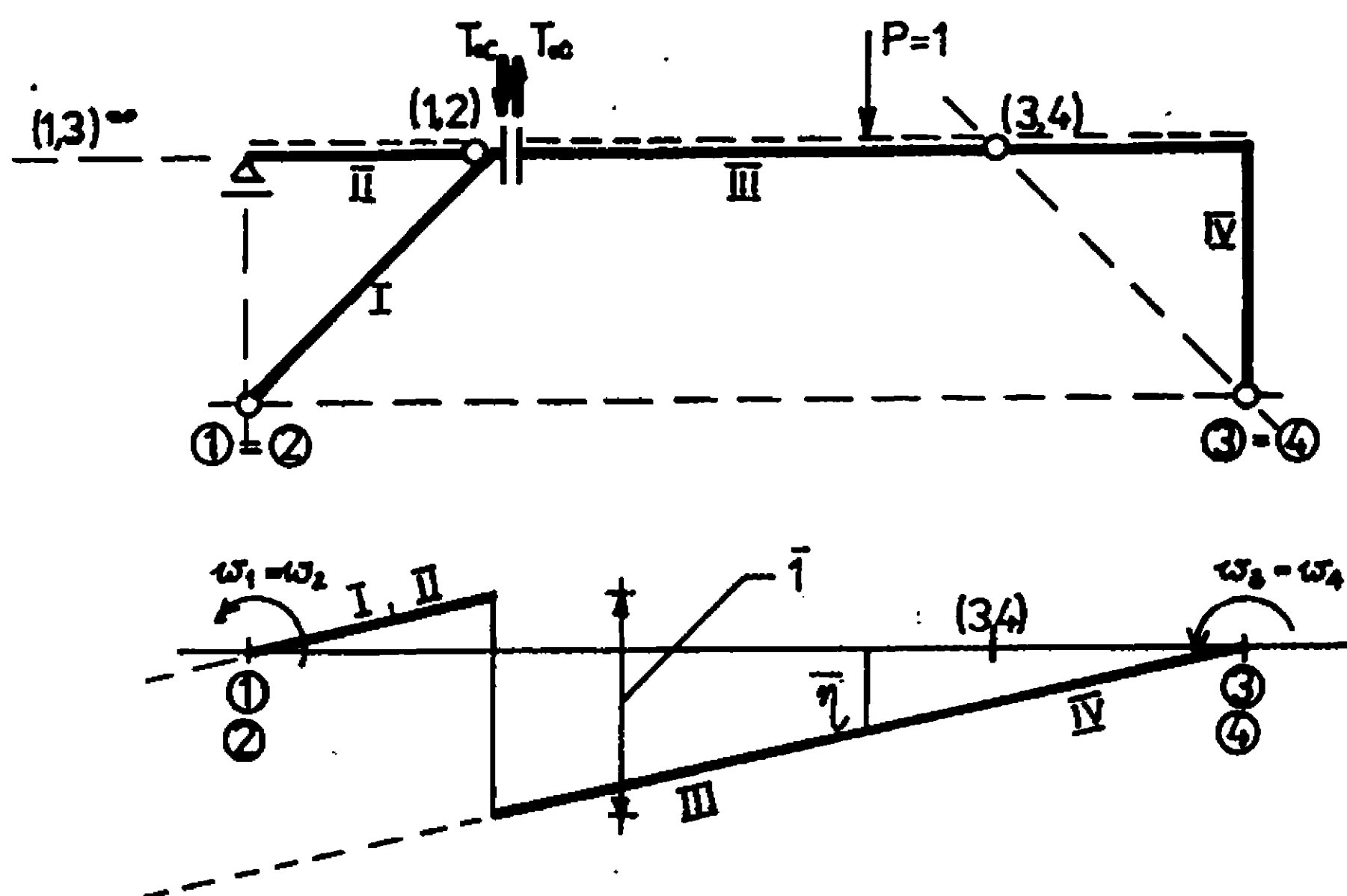
$$\omega_1 = \omega_3 = \frac{1}{4l}, \quad \omega_2 = \omega_1 = \frac{1}{4l}, \quad \omega_4 = \frac{1}{4l}.$$

Z równania pracy sił zewnętrznych na wirtualnych przemieszczeniach mamy

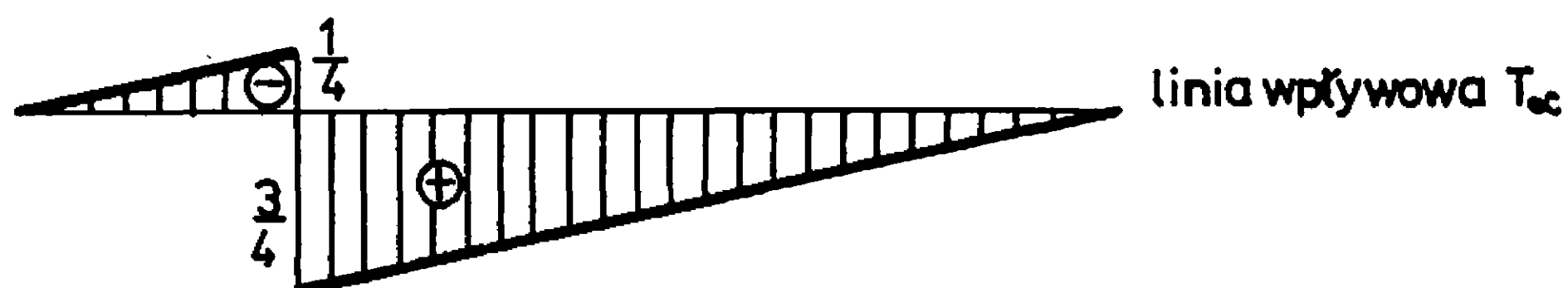
$$-\bar{1} T_{\alpha} + \bar{\eta} \cdot 1 = 0,$$

stąd $T = \bar{\eta}$.

Widzimy, że rzędne $\bar{\eta}$ są jednocześnie rzędnymi linii wpływowej T_{α} (rys. 3.7).



Rys. 3.6



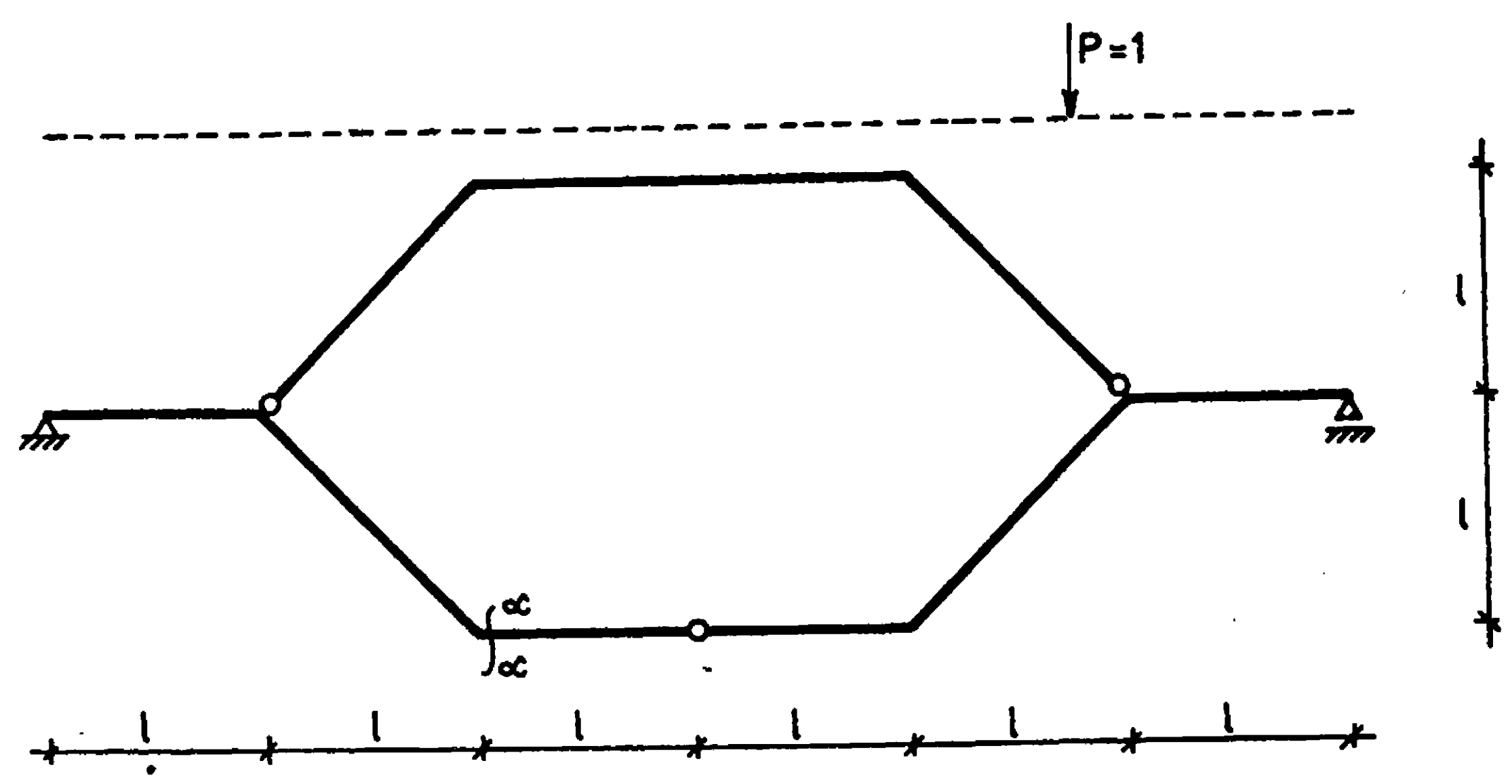
Rys. 3.7

Zadanie 3.3

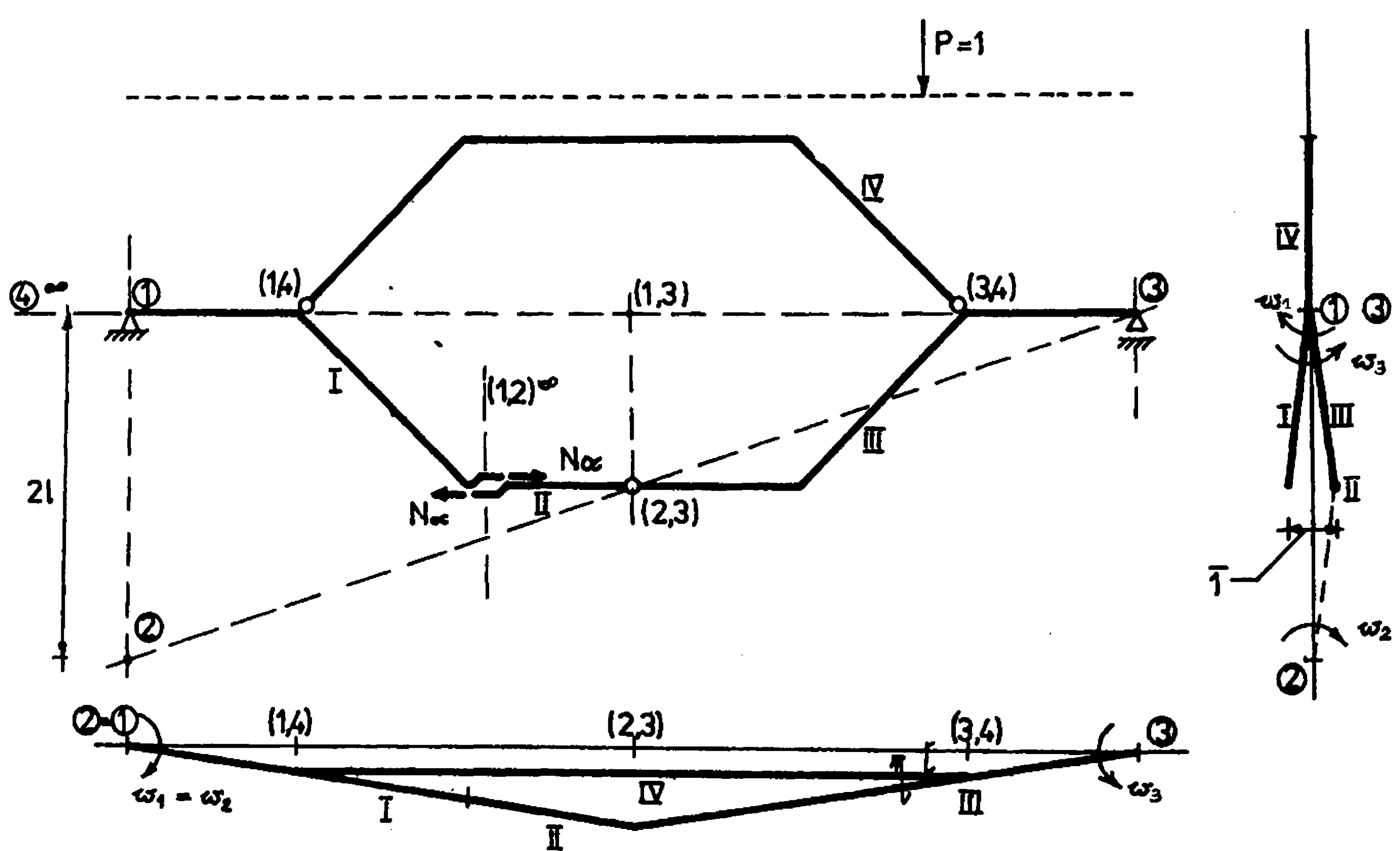
Znaleźć wykres linii wpływowej siły normalnej w przekroju $\alpha - \alpha$ (rys. 3.8).

Rozwiązanie

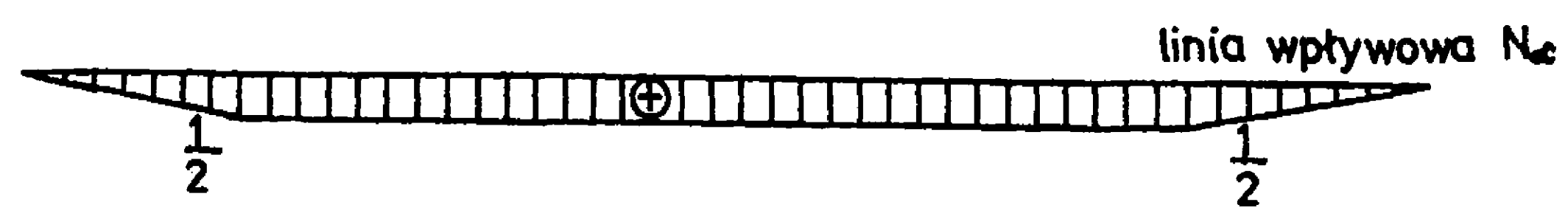
W celu znalezienia linii wpływowej N_{α} metodą kinematyczną w przekroju $\alpha - \alpha$ zakładamy teleskop. Dla otrzymanego układu znajdujemy plan biegunów względnych i głównych. Biegun względny tarcz I i III leży na prostych przechodzących przez punkty (1,4), (3,4) i (2,3), (1,2).



Rys. 3.8



Rys. 3.9



Rys. 3.10

Biegun główny tarczy III leży na prostej przechodzącej przez punkt (1), (1,3) i na prostej prostopadłej do kierunku przesuwu podpory, a biegun tarczy II otrzymamy w wyniku przecięcia się prostych przechodzących przez punkty (1), (1,2) i (3), (2,3).

Po znalezieniu biegunów głównych i względnych określamy składowe pionowe i poziome przemieszczeń wirtualnych

$$\omega_1 = \omega_2,$$

$$\omega_2 \cdot 3l = \omega_3 \cdot 3l,$$

$$\omega_1 \cdot l + \omega_2 \cdot l = \bar{1},$$

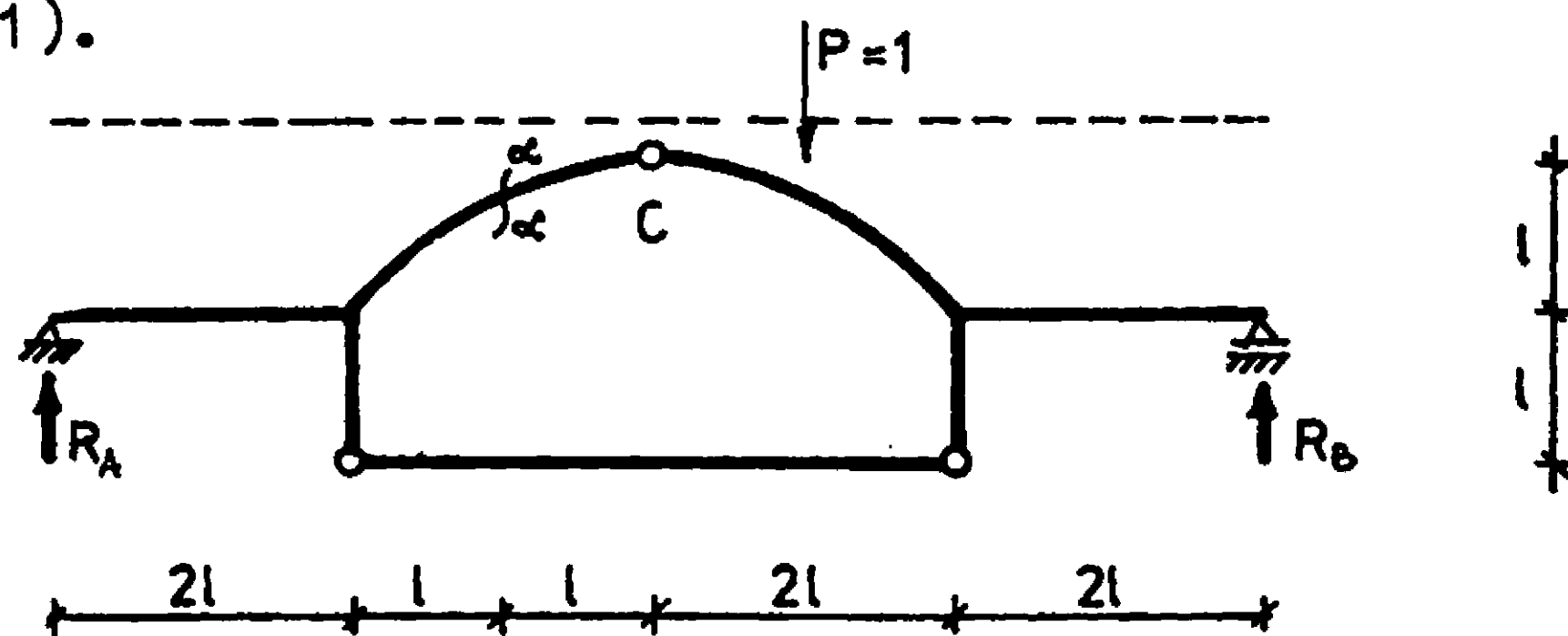
stąd

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{2l}.$$

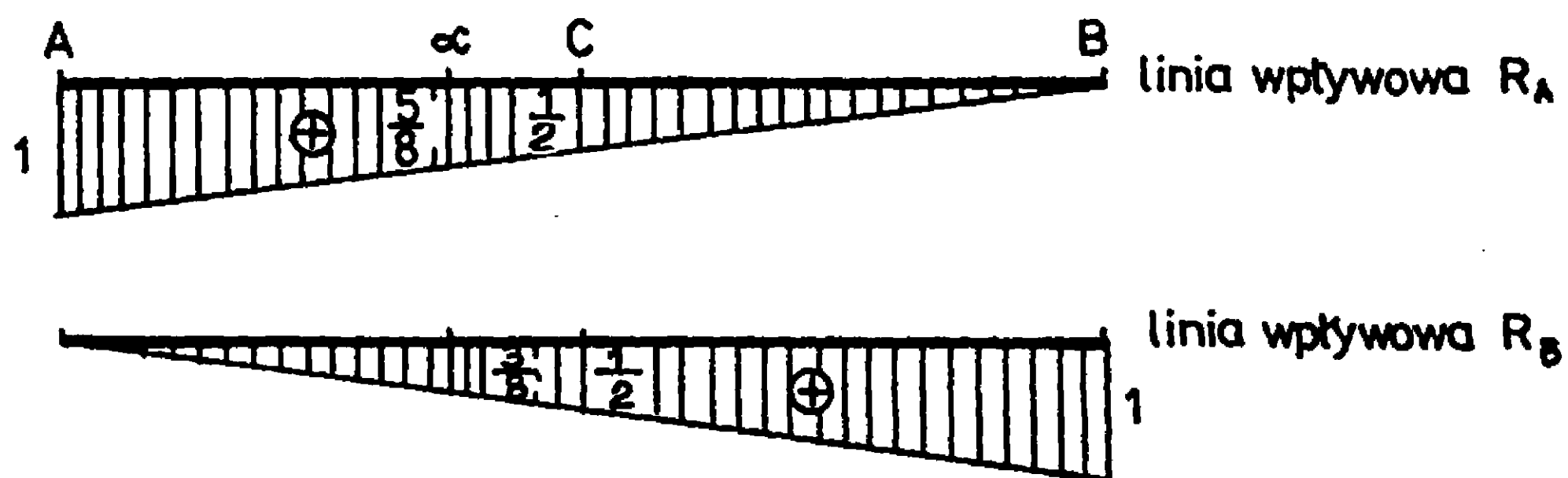
Z równania pracy sił rzeczywistych na wirtualnych przemieszczeniach otrzymujemy $-\bar{1} N_\alpha + \bar{7} \cdot 1 = 0$. Tak więc linię siły normalnej N przedstawiają rzuty pionowych przemieszczeń części tarczy I od punktu (1) do punktu (1,4), tarczy IV i części tarczy III między punktami (3,4) i (3).

Zadanie 3.4

Znaleźć wykresy linii wpływowych sił wewnętrznych w przekroju $\alpha-\alpha$ (rys. 3.11).



Rys. 3.11



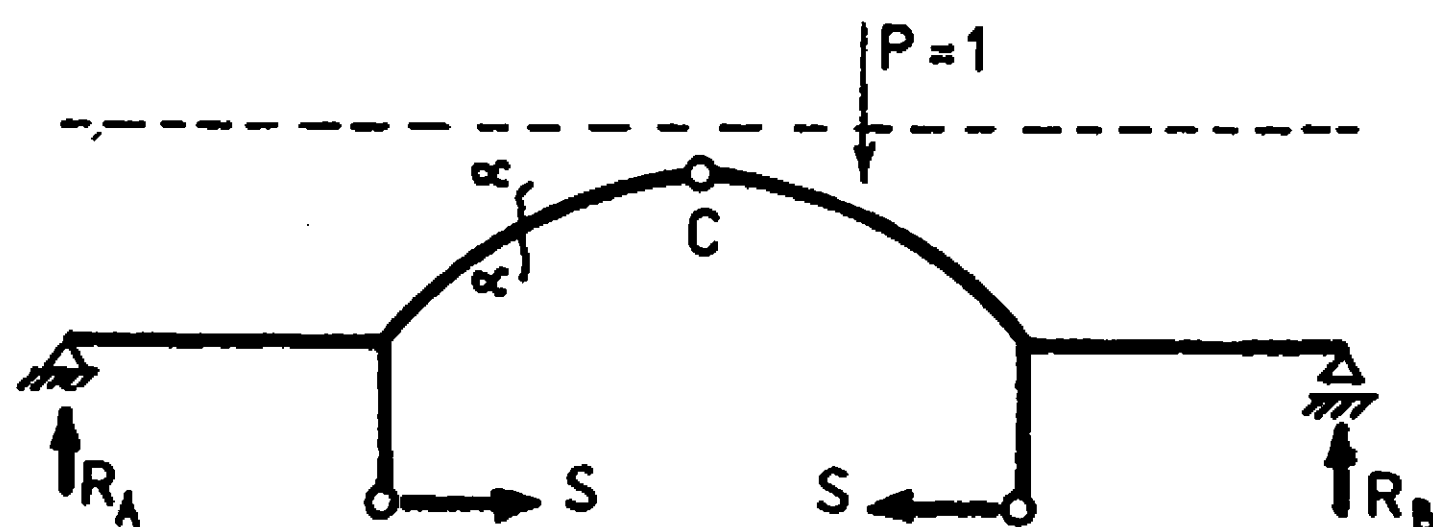
Rys. 3.12

Rozwiązanie

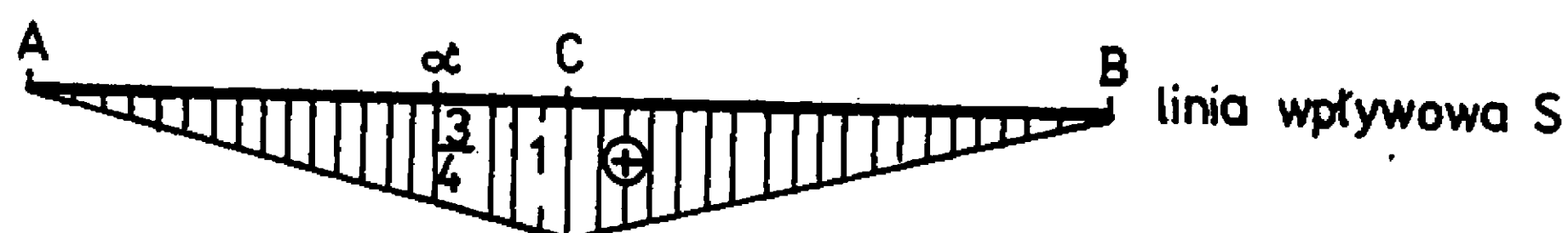
Zadanie to rozwiążemy metodą mieszaną, tj. analityczno-kinematyczną. Metodą kinematyczną znajdujemy najpierw wykresy linii wpływowych reakcji R_A i R_B . Odpowiedzi stanowią rysunki 3.12. Linie wpływowe siły "S" w ściągu określimy metodą analityczną z równań równowagi przy dowolnym ustawieniu siły w przedziale A-C względnie C-B.

Przedział A-C

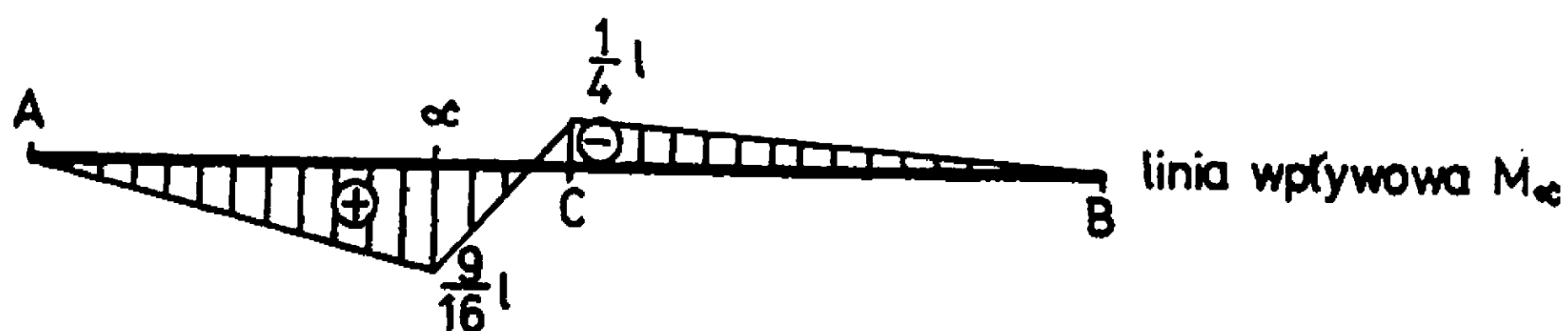
$$\sum M_C^P = R_B \cdot 41 - S \cdot 21 = 0 \longrightarrow S = 2R_B$$



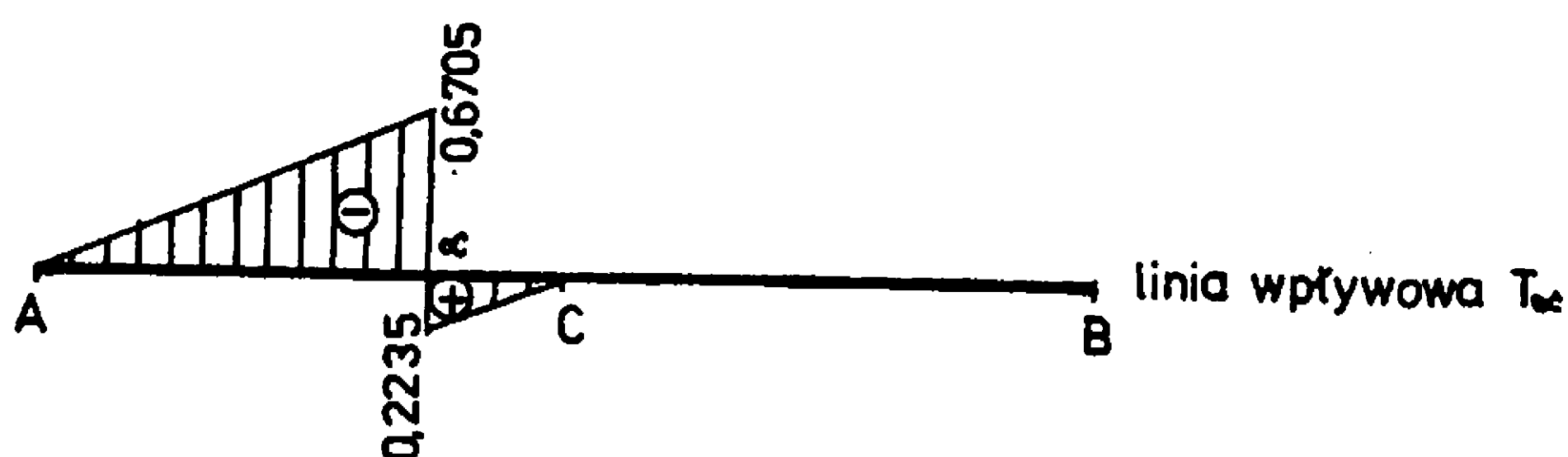
Rys. 3.13



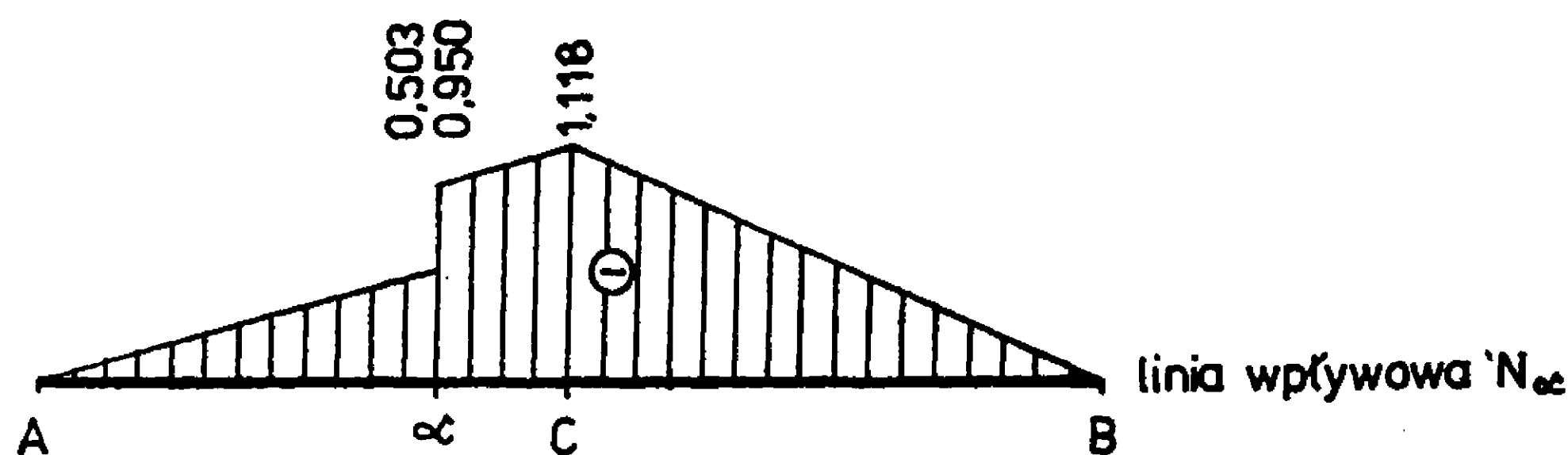
Rys. 3.14



Rys. 3.15



Rys. 3.16



Rys. 3.17

Przedział C-B

$$\sum M_C^I = R_A \cdot 41 - S \cdot 21 = 0 \longrightarrow S = 2R_A$$

Znając wykresy linii wpływowych reakcji R_A i R_B łatwo sporządzimy wykres linii wpływowych siły S (rys. 3.14). Mając linie wpływowe reakcji podporowych i siły w ściągu wyznaczmy linie wpływowe sił wewnętrznych w dowolnym przekroju.

Linia wpływowa momentu zginającego w przekroju $\alpha - \alpha$:

Przedział (A- α)

$$\sum M_\alpha^P = 0$$

$$M_\alpha = R_B \cdot 51 - S \cdot \frac{7}{4} \text{ l},$$

Przedział (α -B)

$$\sum M_\alpha^I = 0$$

$$M_\alpha = R_A \cdot 31 - S \cdot \frac{7}{4} \text{ l}.$$

Wykres linii wpływowej momentu zginającego w przekroju $\alpha - \alpha$ przedstawiono na rysunku 3.15.

Linie wpływowe siły tnącej T_α i siły normalnej N_α otrzymamy z następujących zależności:

$$T_\alpha = T_\alpha^0 \cos \varphi_\alpha + N_\alpha^0 \sin \varphi_\alpha,$$

$$N_\alpha = -T_\alpha^0 \sin \varphi_\alpha + N_\alpha^0 \cos \varphi_\alpha$$

Dla przekroju $\alpha - \alpha$ mamy $\cos \varphi_\alpha = 0,894$, $\sin \varphi_\alpha = 0,447$

$$T_\alpha = 0,894 T_\alpha^0 + 0,447 N_\alpha^0,$$

$$N_\alpha = -0,447 T_\alpha^0 + 0,894 N_\alpha^0.$$

Przedział (A- α)

$$T_{\alpha}^0 = -R_B, \quad N_{\alpha}^0 = -S,$$

$$T_{\alpha} = -0,894 R_B - 0,447 S,$$

$$N_{\alpha} = 0,447 R_B - 0,894 S.$$

Przedział (α -B)

$$T_{\alpha}^0 = R_A, \quad N_{\alpha}^0 = -S,$$

$$T_{\alpha} = 0,894 R_A - 0,447 S,$$

$$N_{\alpha} = -0,447 R_A - 0,894 S.$$

Odpowiedź na pytanie - jak zmienia się siła tnąca i normalna w przekroju $\alpha-\alpha$ w zależności od położenia jednostkowej siły - stanowią rysunki 3.15 i 3.16.

Zadanie 3.5

Dana jest kratownica obciążona poruszająca się góra siłą jednostkową. Wyznaczyć linie wpływowe sił w prętach S, S₁, S₂.

Rozwiązanie

Linia wpływowa siły S

Przedział (1-5) $0 \leq \xi \leq \frac{4}{9}$

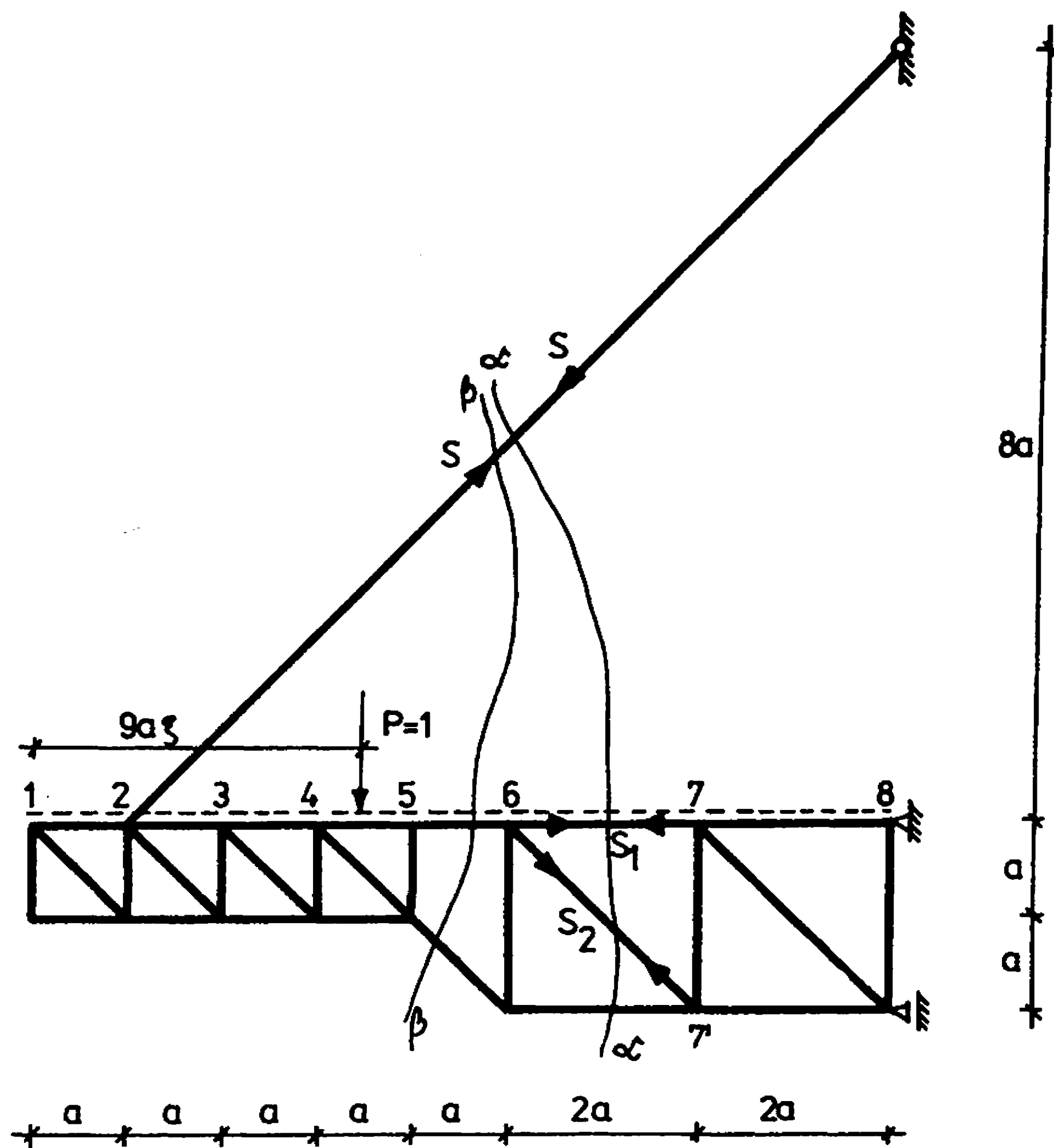
$$\sum M_4^1 = S \frac{\sqrt{2}}{2} 2a - 1(3a - 9a \xi) = 0,$$

$$S = \frac{3 - 9\xi}{\sqrt{2}}.$$

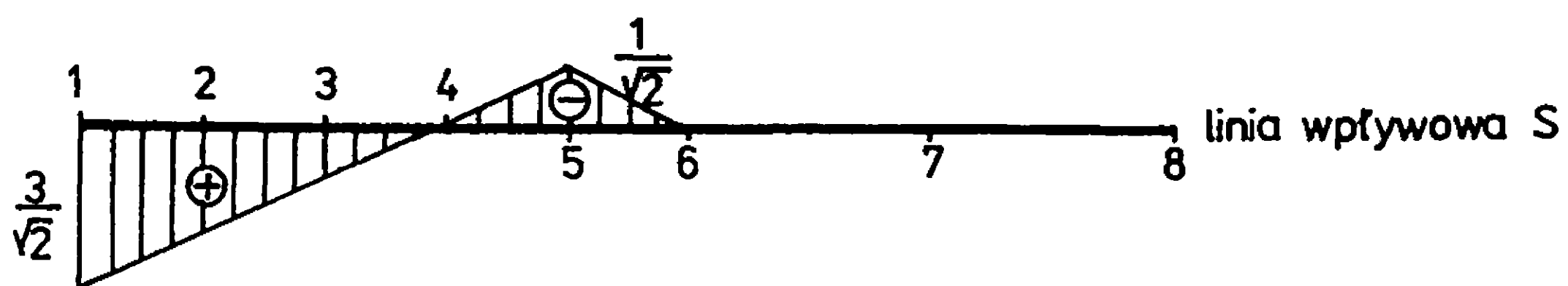
Przedział (6-8) $\frac{5}{9} \leq \xi \leq 1$

$$\sum M_4^1 = 0 \longrightarrow S = 0.$$

Wykres linii wpływowej siły S pokazano na rysunku 3.19.



Rys. 3.18



Rys. 3.19

W celu znalezienia linii wpływowej siły S_1 przecinamy kratownicę przekrojem $\alpha - \alpha$ (rys. 3.18)

Przedział (1-6) $0 \leq \xi \leq \frac{5}{9}$

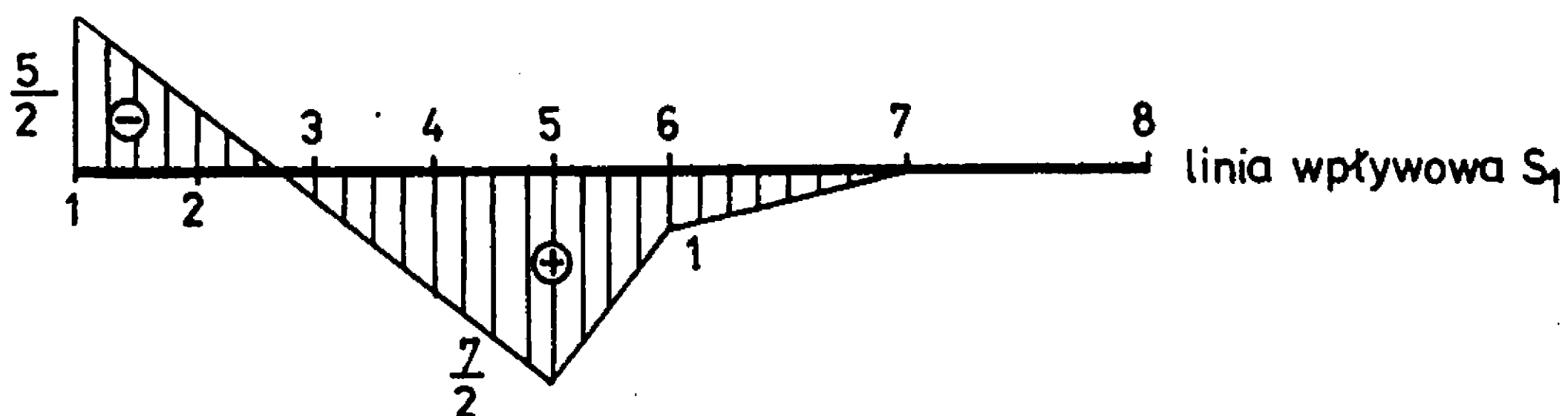
$$\sum M_{7'}^1 = S_1 \cdot 2a + S \frac{\sqrt{2}}{2} 6a + S \frac{\sqrt{2}}{2} 2a - 1 (7a - 9a \xi) = 0,$$

$$S_1 = \frac{7 - 9\xi}{2} - 2\sqrt{2} S.$$

Przedział (7-8) $\frac{7}{9} \leq \xi \leq 1$

$$\sum M_7^1 = S_1 \cdot 2a + S \frac{\sqrt{2}}{2} 6a + S \frac{\sqrt{2}}{2} 2a = 0,$$

$$S_1 = -2 \sqrt{2} S.$$



Rys. 3.20

Linie wpływową S_2 znajdziemy z równania rzutowania sił dla części kratownicy

Przedział (1-6) $0 \leq \xi \leq \frac{5}{9}$

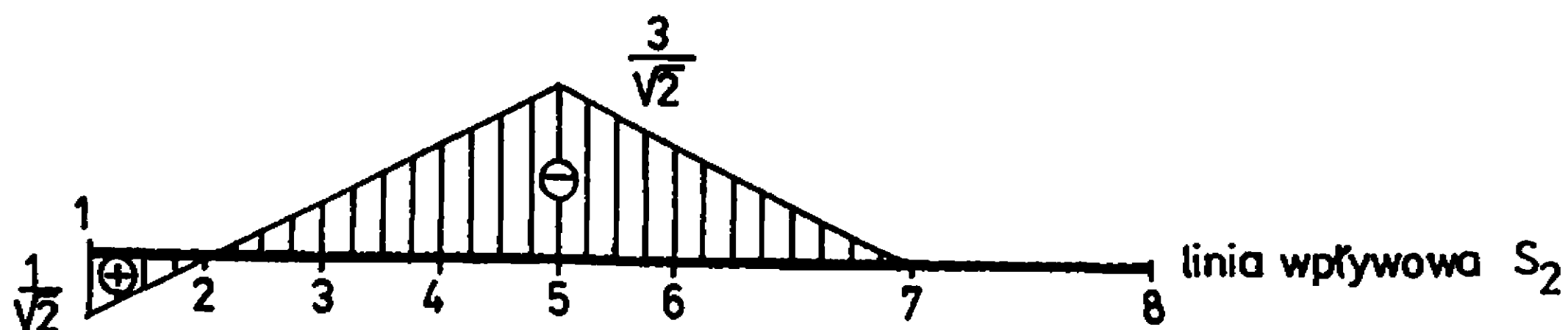
$$\sum P_y^1 = S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - S \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$S_2 = S - 2.$$

Przedział (7-8) $\frac{7}{9} \leq \xi \leq 1$

$$\sum P_y^1 = S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - S \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

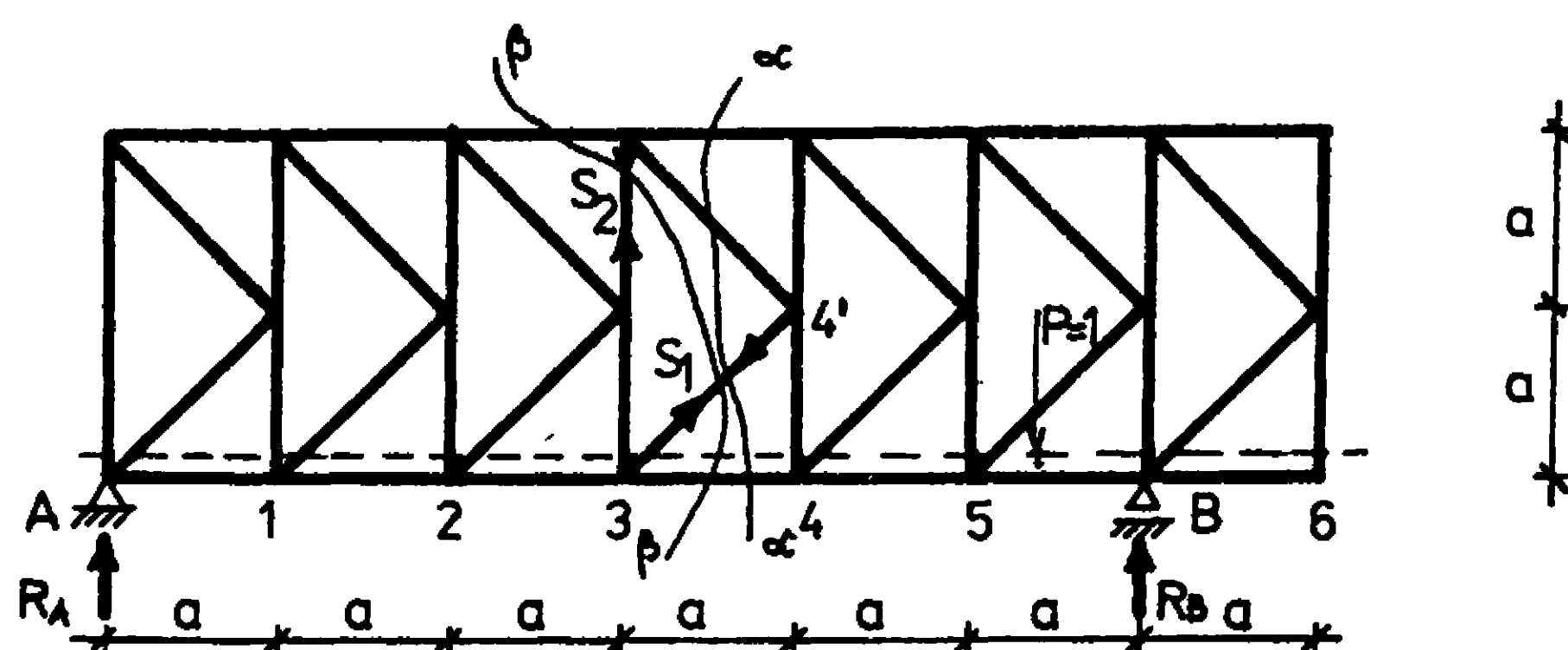
$$S_2 = S.$$



Rys. 3.21

Zadanie 3.6

Dla podanego poniżej schematu kratownicy znaleźć linie wpływowe sił w prętach S_1 i S_2 (rys. 3.22):

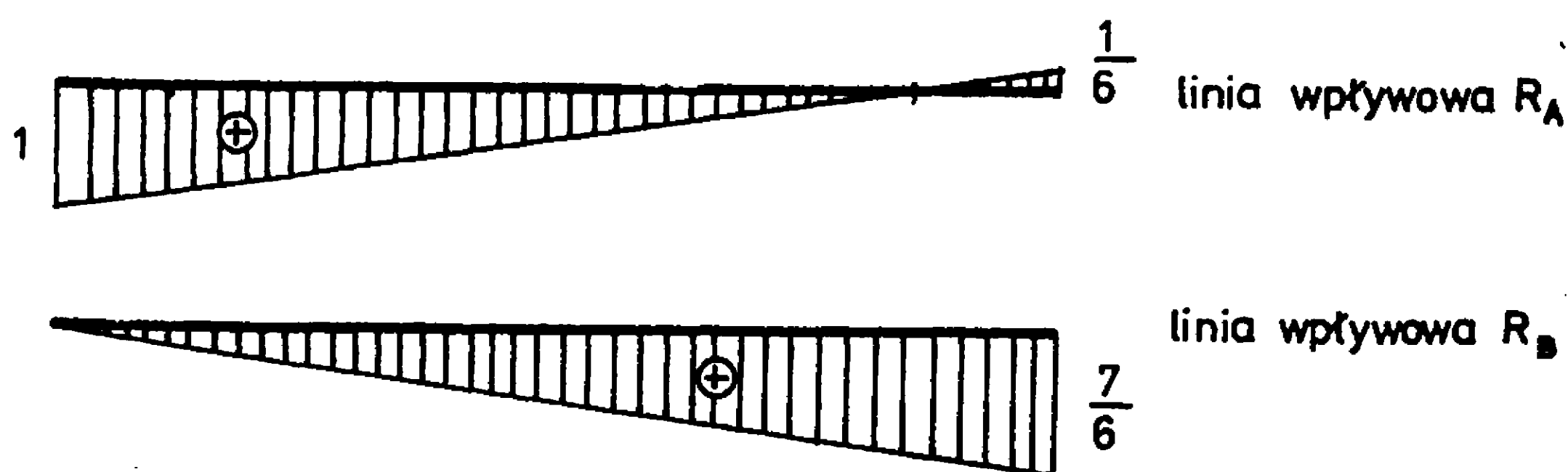


Rys. 3.22

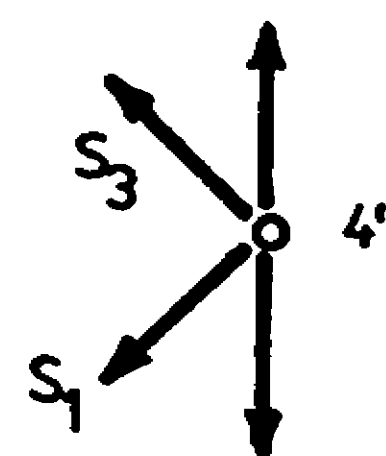
Rozwiązanie

Metodą kinematyczną znajdujemy linie wpływowe reakcji R_A i R_B . Wykresy tych linii wpływowych przedstawiają rysunek 3.23.

W celu znalezienia linii wpływowej siły S_1 rozpatrzmy najpierw równowagę sił w węźle $4'$. Z $\sum P_x = 0$ otrzymujemy $S_1 = -S_3$.



Rys. 3.23



Rys. 3.24

Linie wpływową siły S_1 znajdujemy po dokonaniu przekroju $\alpha-\alpha$ Przedział (A-3)

$$\sum P_y^p = S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + R_B = 0 \longrightarrow S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} R_B.$$

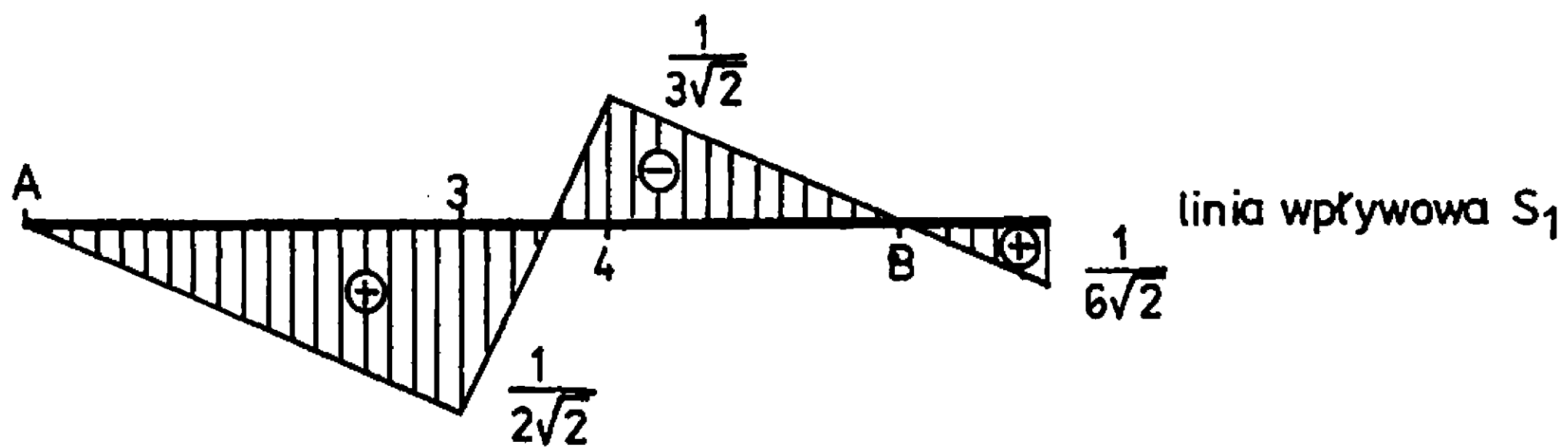
Przedział (4-6)

$$\sum P_y^1 = S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - S_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + R_A = 0 \longrightarrow S_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} R_A.$$

W celu znalezienia 1 wpływowej siły S_2 dokonujemy przekroju $\beta - \beta$
Przedział (A-3)

$$\sum P_y^p = S_2 + S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - R_B = 0,$$

$$S_2 = R_B - S_1 \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

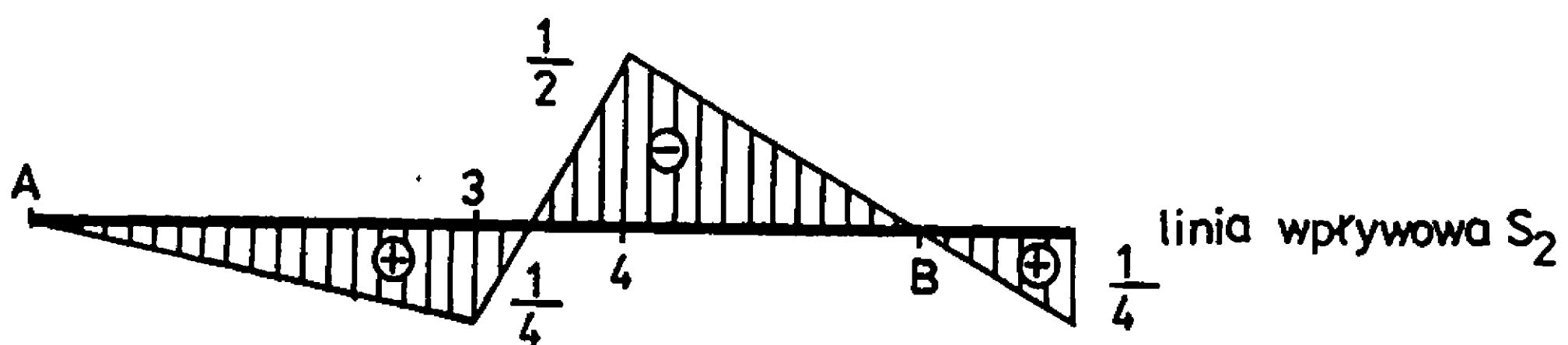


Rys. 3.25

Przedział (4-6)

$$\sum P_y^1 = S_2 + S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + R_A = 0,$$

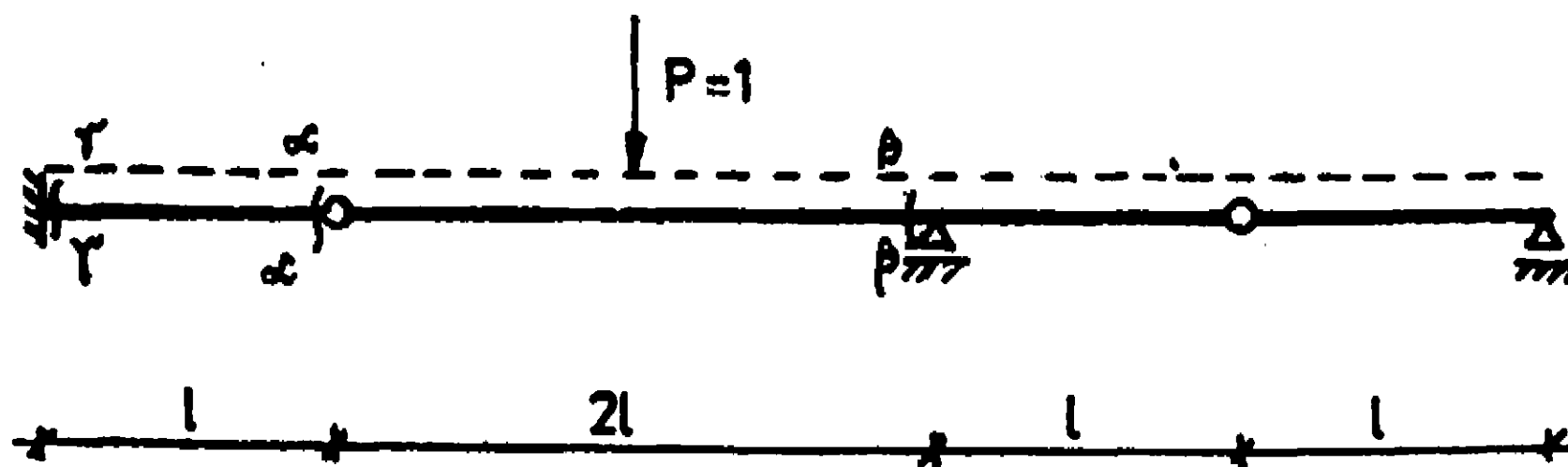
$$S_2 = -R_A - S_1 \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



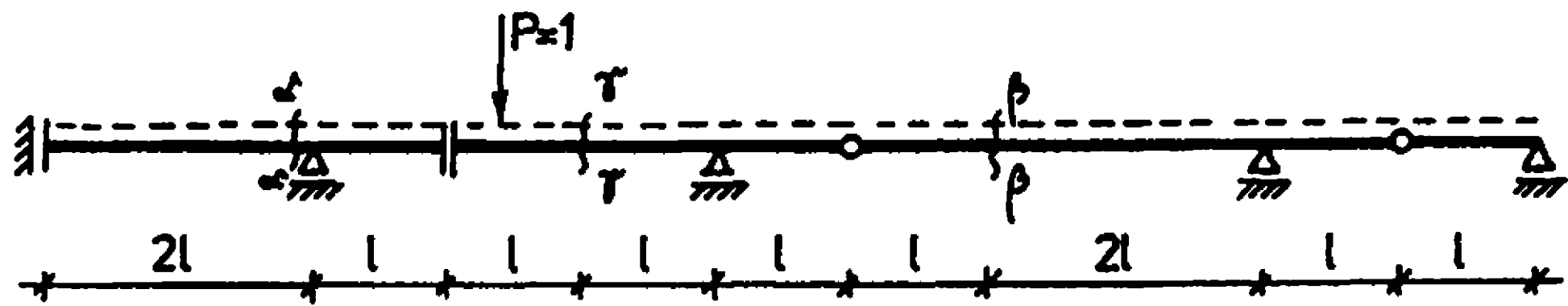
Rys. 3.26

Zadanie 3.7

Dla podanych belek wyznaczyć linie wpływowe T_α , M_β , T_γ , M_γ
(3.27a-b).



Rys. 3.27a

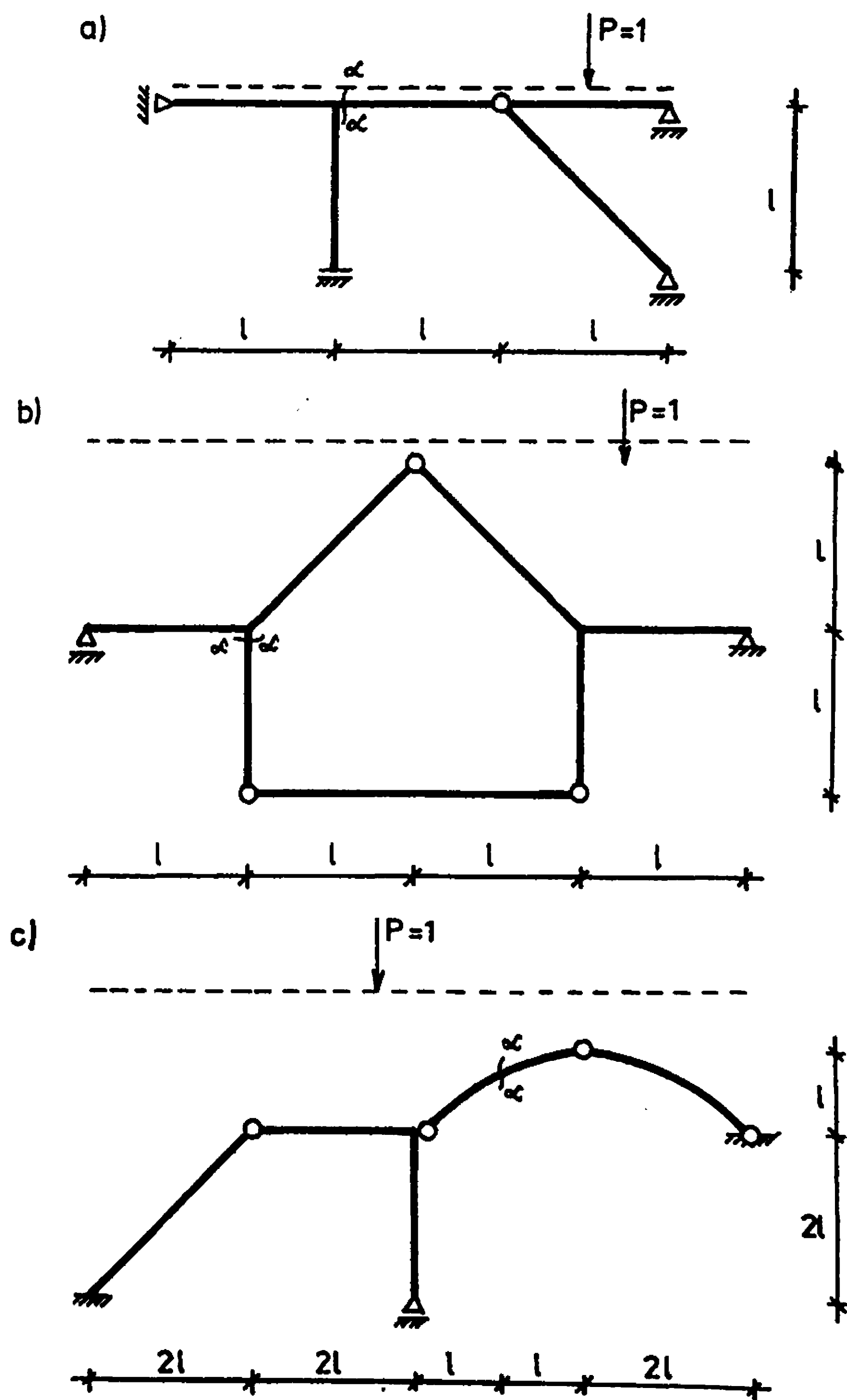


Rys. 3.27b

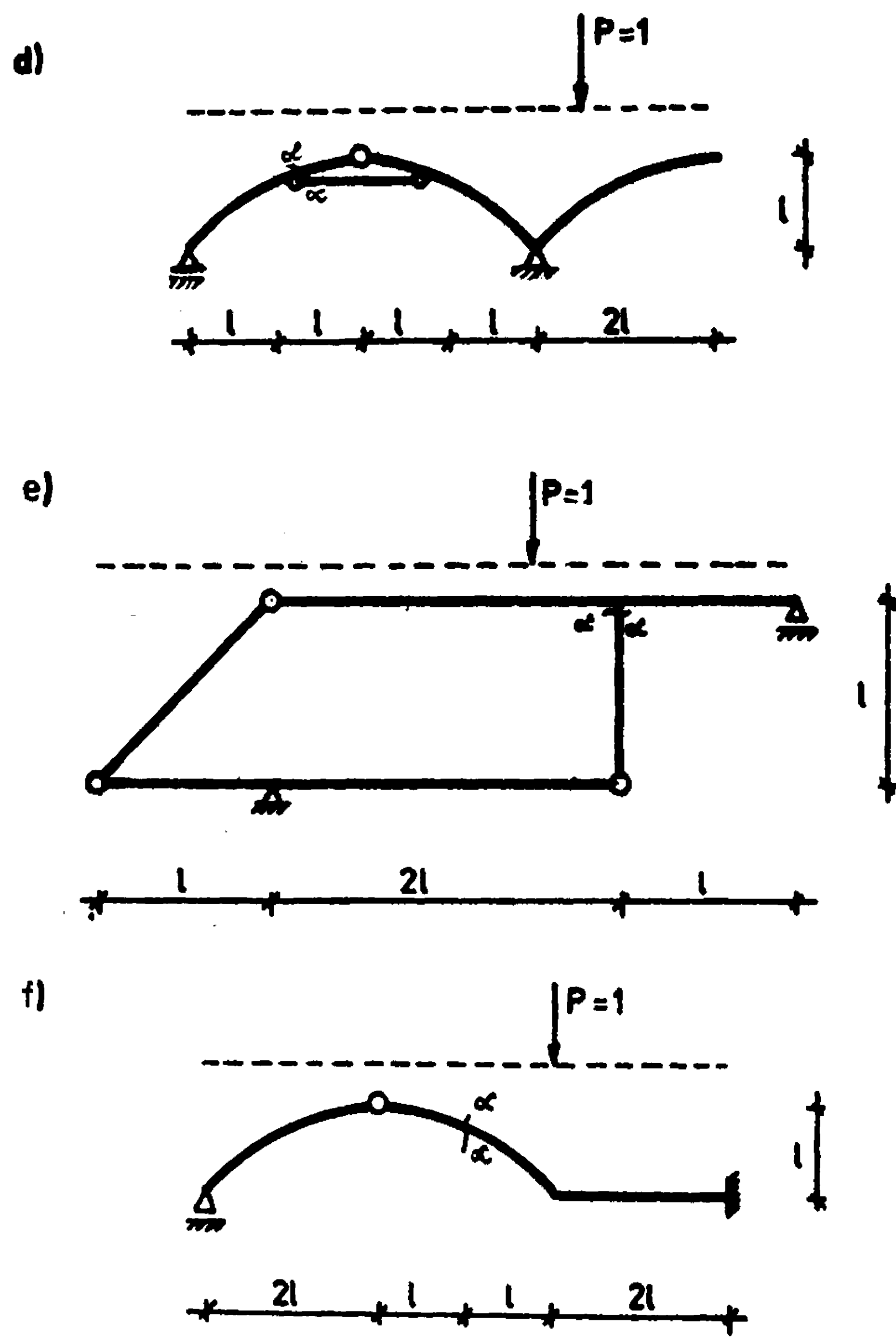
Rozwiązanie - samodzielne

Zadanie 3.8

Dla podanych układów wyznaczyć linie wpływowe sił wewnętrznych w przekroju $\alpha - \alpha$ (3.28a-f).



Rys. 3.28a-c



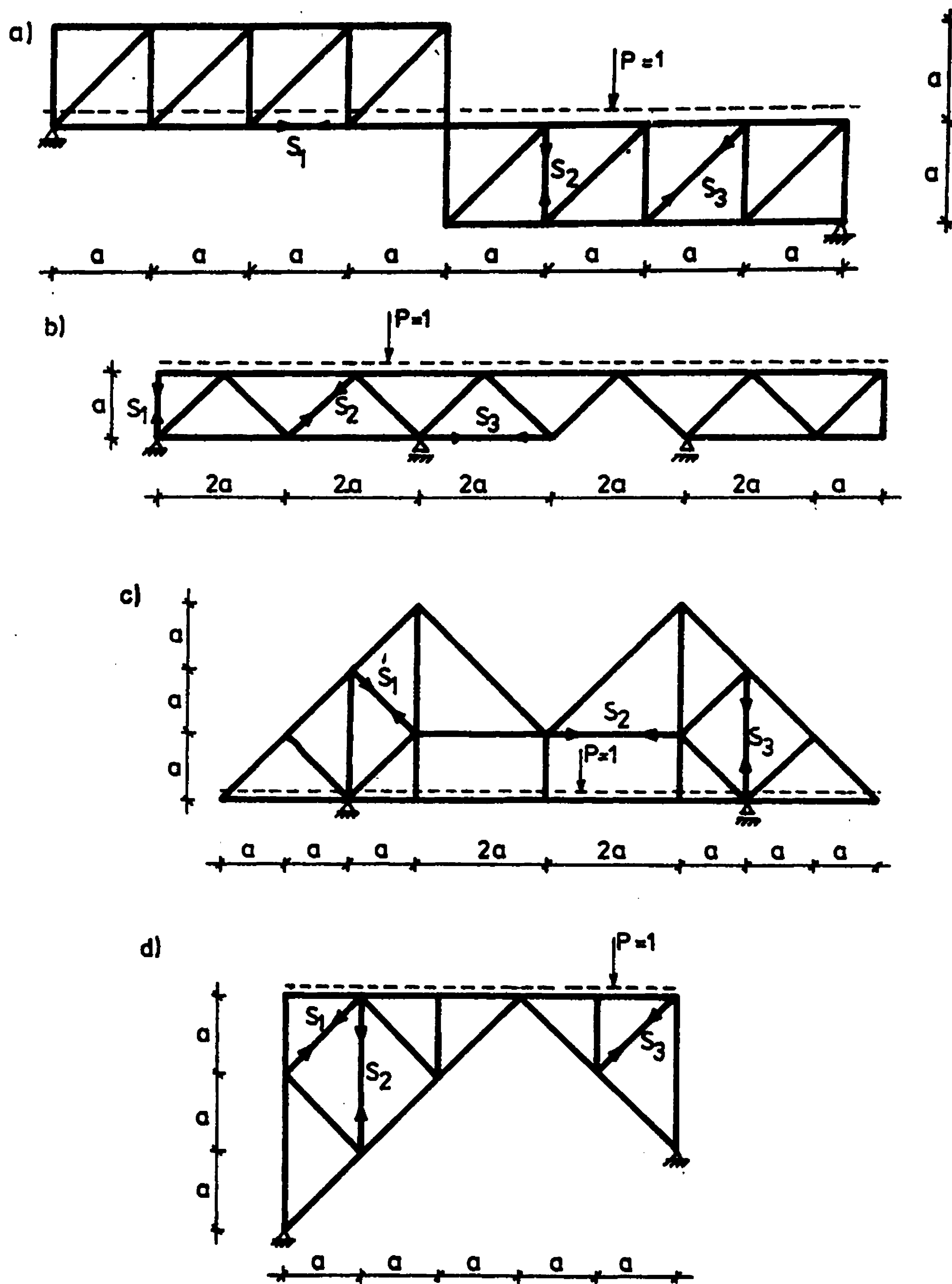
Rys. 3.28d-f

Rozwiązanie - samodzielne

Zadanie 3.9

Dla podanych kratownic znaleźć linie wpływowe sił S_1 , S_2 , S_3 (3.29a-d).

Rozwiązanie - samodzielne



Rys. 3.29a-d

4. WYZNACZENIE PRZEMIESZCZEŃ W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH

Przemieszczenia będziemy wyznaczać wykorzystując równanie prac wirtualnych dla rzeczywistego stanu przemieszczeń i wirtualnego stanu obciążeń. Równanie prac wirtualnych dla układów prętowych w przypadku działania obciążeń zewnętrznych, termicznych i osiadania podpór jest następujące:

$$\sum_{i=1}^n \delta_i \bar{P}_i + \sum_{i=1}^n \Delta_i \bar{D}_i = \int_s \left[\bar{M} \left(\frac{M}{EJ} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \right) + \bar{N} \left(\frac{N}{EA} + \alpha_t \cdot t \right) + \kappa \frac{T\bar{T}}{GA} \right] ds,$$

gdzie: M, N, T - siły wewnętrzne wywołane obciążeniem zewnętrznym,

$\bar{M}, \bar{N}, \bar{T}$ - siły wewnętrzne wywołane obciążeniem wirtualnym,

Δ_i - osiadanie i -tej podpory,

$\bar{D}_i$ - reakcja na i -tej podporze od obciążenia wirtualnego działające na kierunku przemieszczenia Δ_i ,

δ_i - poszukiwane przemieszczenie w punkcie " i " wywołane obciążeniem zewnętrznym,

α_t - współczynnik rozszerzalności liniowej,

h - wysokość przekroju pręta,

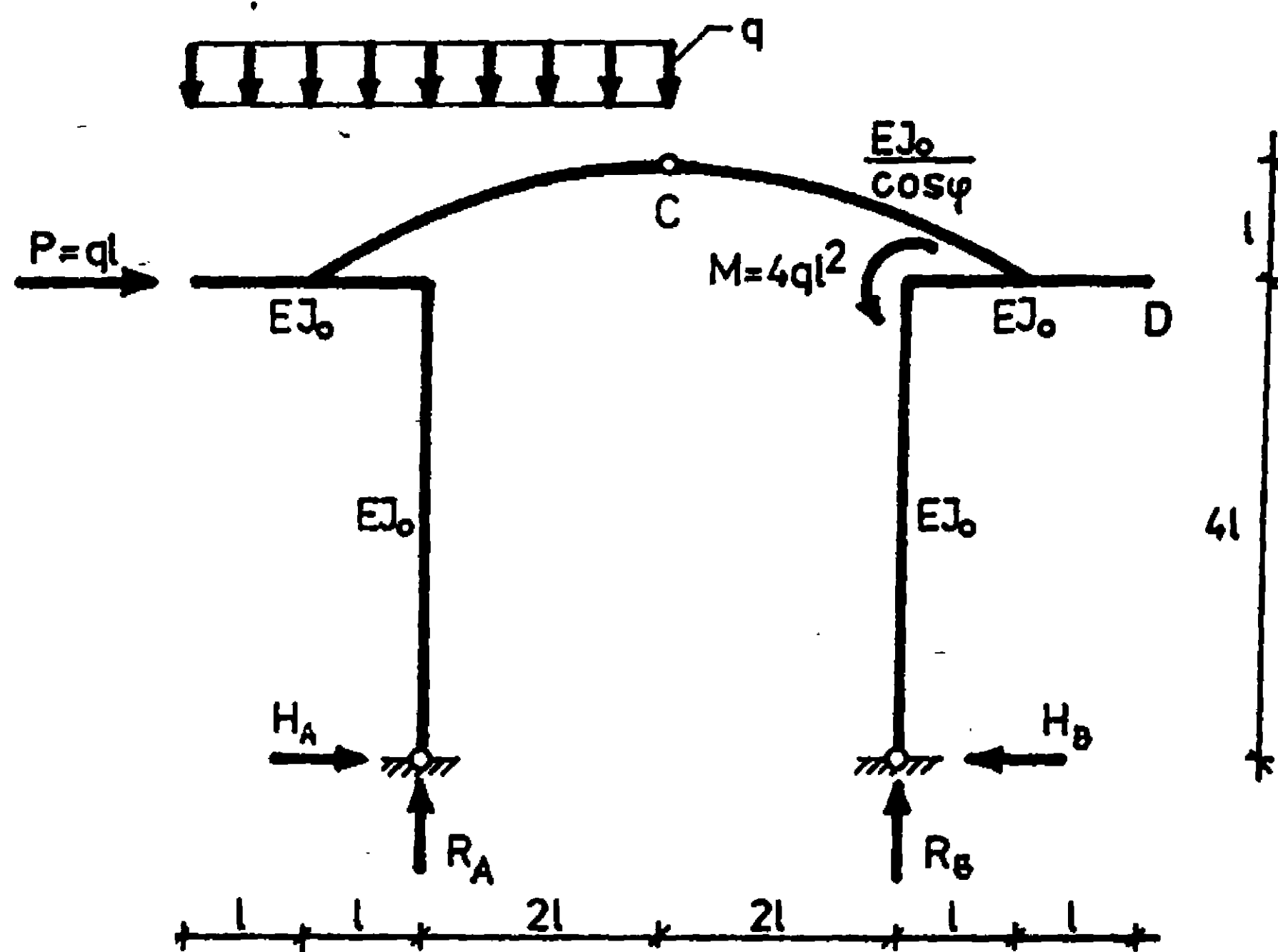
Δt - różnice temperatury pomiędzy dolnym i górnym włóknem,

t - przyrost temperatury w środku ciężkości przekroju pręta.

Ponieważ wpływ sił poprzecznych i ewentualnie normalnych na odkształcenia jest mały w stosunku do wpływu momentów, dlatego też będzie pomijany.

Zadanie 4.1

Dla danego układu, przy danym obciążeniu wyznaczyć przemieszczenie pionowe punktu D (rys. 4.1).



Rys. 4.1

Rozwiązanie

Obliczenie reakcji

$$\sum M_B = 0$$

$$R_A \cdot 4l + ql \cdot 4l - 4ql^2 - q4l \cdot 4l = 0,$$

$$R_A = 4ql,$$

$$\sum P_y = 0$$

$$R_A + R_B - 4ql = 0,$$

$$R_B = 0;$$

$$\sum M_C^P = 0$$

$$R_B \cdot 2l + 4ql^2 - H_B \cdot 5l = 0,$$

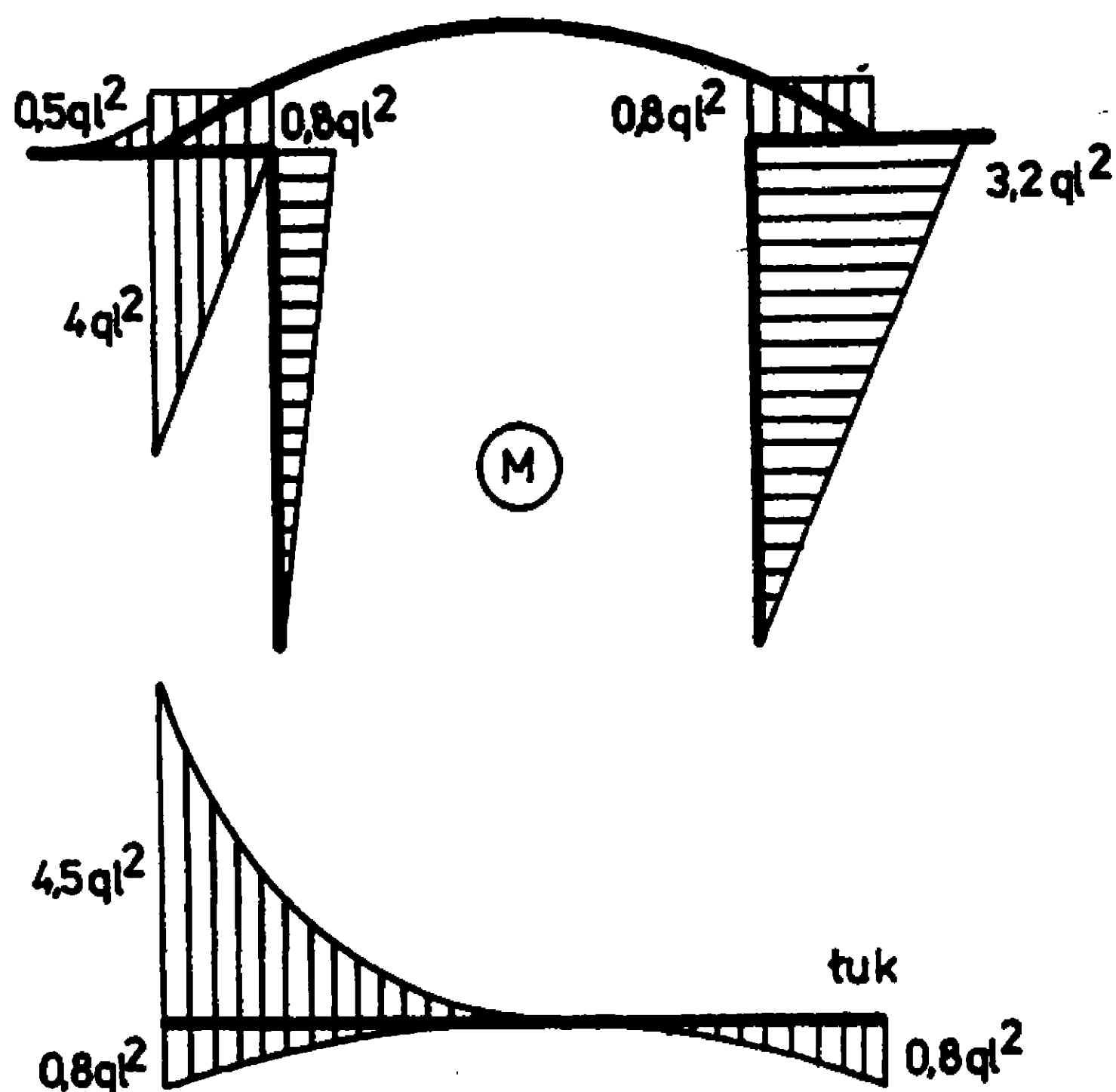
$$H_B = 0,8ql;$$

$$\sum P_x = 0$$

$$H_B - H_A - ql = 0,$$

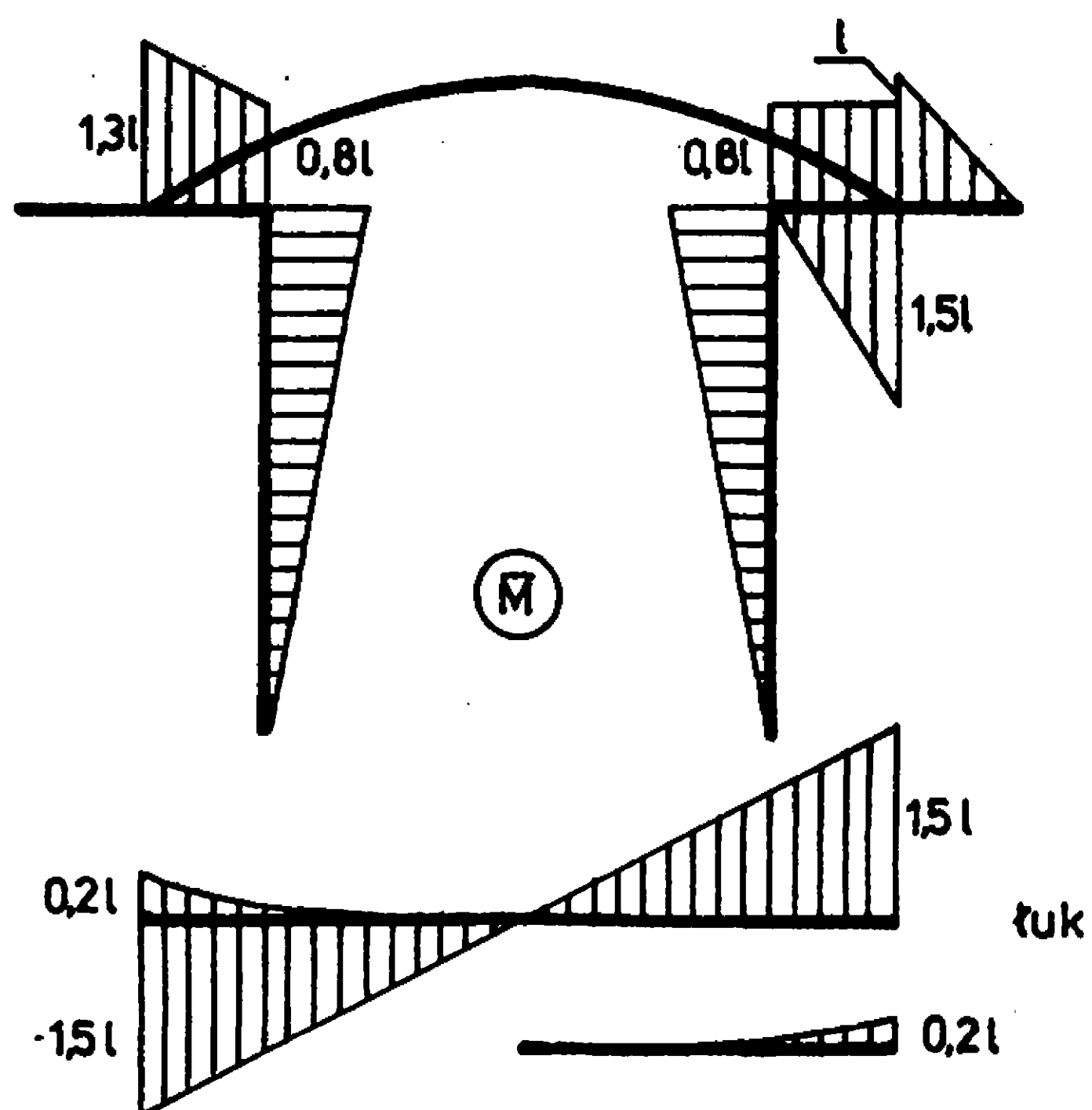
$$H_A = -0,2ql;$$

Wykres momentów zginających M od obciążenia zewnętrznego przedstawiono na rysunku 4.2.

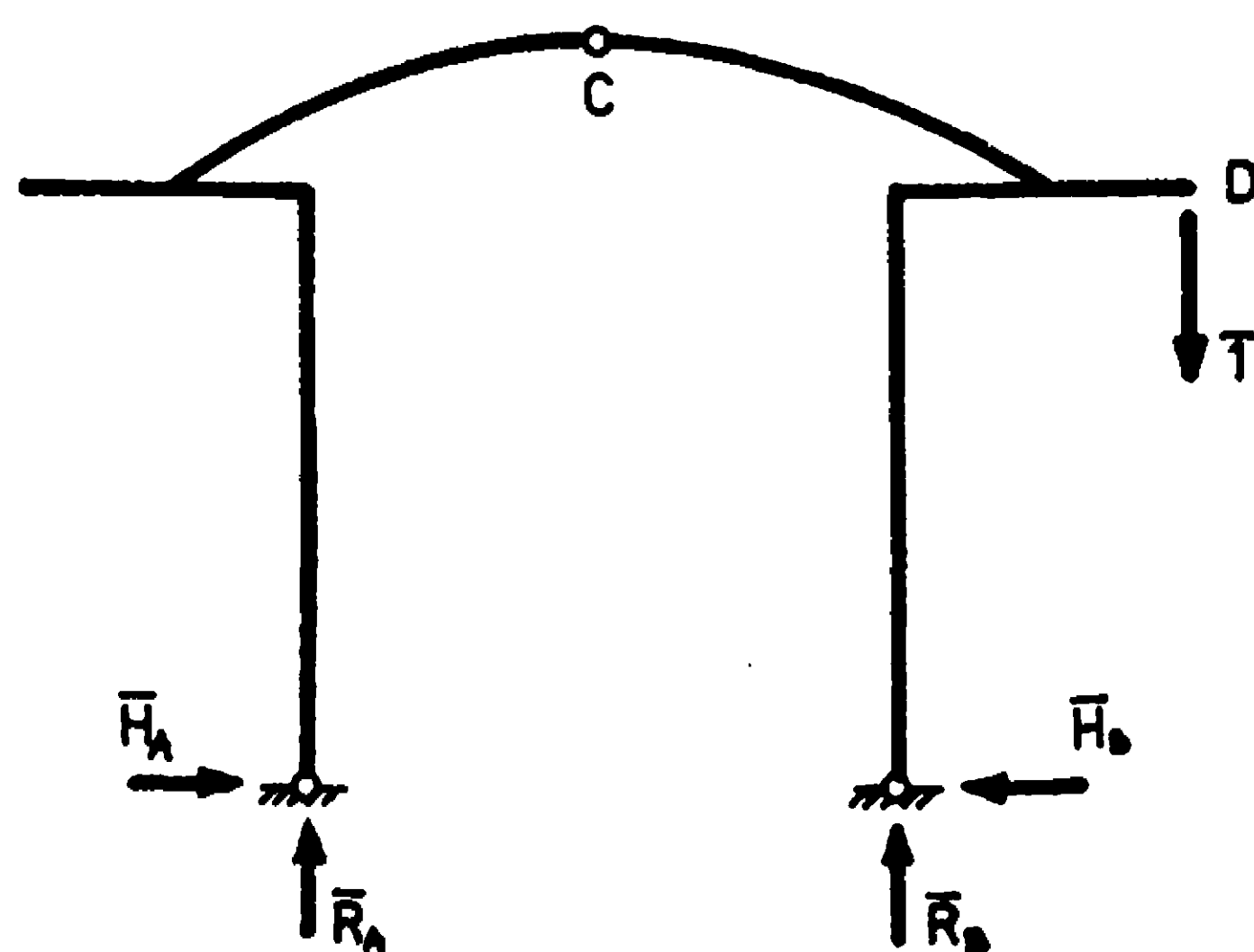


Rys. 4.2

Aby wyznaczyć wielkość przemieszczenia pionowego δ_D punktu D zakładamy jednostkową siłę wirtualną zaczepioną w punkcie D. Od tego obciążenia wyznaczamy wykresy wirtualnych momentów zginających.



Rys. 4.3



Rys. 4.4

Obliczenia reakcji w stanie wirtualnym

$$\Sigma M_B = 0$$

$$\bar{R}_A \cdot 41 + 1 \cdot 21 = 0,$$

$$\bar{R}_A = -0,5;$$

$$\Sigma P_y = 0$$

$$\bar{R}_A + \bar{R}_B - 1 = 0,$$

$$\bar{R}_B = 1,5;$$

$$\Sigma M_C^1 = 0$$

$$\bar{R}_A \cdot 21 - \bar{H}_A \cdot 51 = 0,$$

$$\bar{H}_A = -0,2;$$

$$\Sigma P_x = 0$$

$$\bar{H}_A - \bar{H}_B = 0,$$

$$\bar{H}_B = -0,2.$$

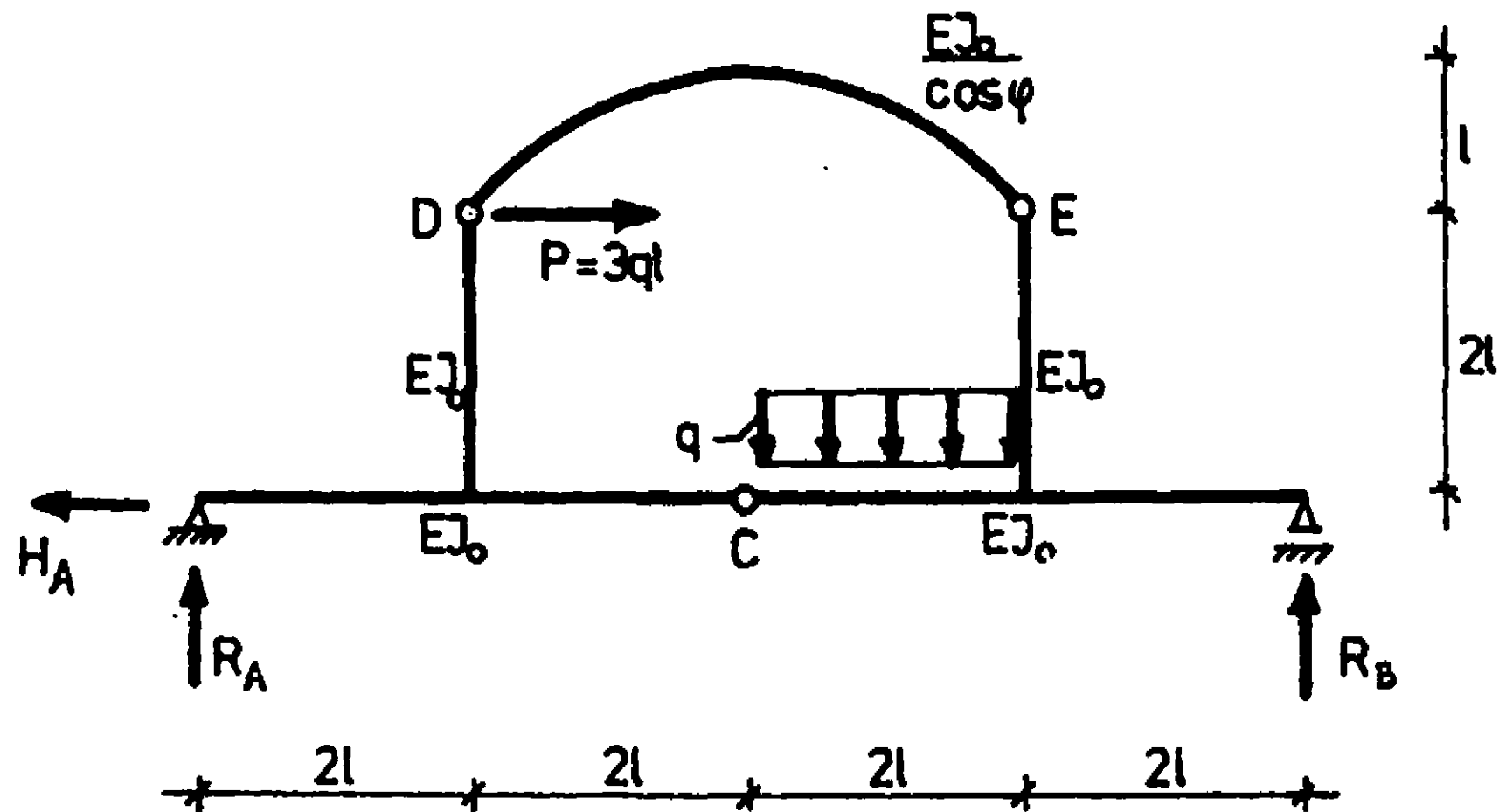
Wartość pionowego przemieszczenia punktu D otrzymamy w wyniku całkowania wykresów momentów zginających od obciążenia zewnętrznego z wykresem momentów zginających od jednostkowego obciążenia wirtualnego

$$\begin{aligned} \delta_D = \int \frac{M\bar{M}}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} & \left[\frac{1}{3} \cdot 41 \cdot 0,81 \cdot ql^2 - \frac{1}{3} \cdot 41 \cdot 3,2ql^2 \cdot 0,81 + \right. \\ & + 0,8ql^2 \cdot 1 \cdot 0,81 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1,51 \cdot 0,8ql^2 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 4ql^2 \cdot 1,31 - \\ & + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 4ql^2 \cdot 0,81 + (0,81 + 1,31) \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot 0,8ql^2 - \\ & + \frac{1}{5} \cdot 31 \cdot 0,8ql^2 \cdot 0,21 \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 31 \cdot 4,5ql^2 \cdot 0,21 - \\ & \left. + \frac{1}{4} \cdot 31 \cdot 4,5ql^2 \cdot 1,51 \right] = -8,661 \frac{ql^4}{EJ}. \end{aligned}$$

Uwaga. Znak (-) wskazuje na to, że przemieszczenie δ_D wywołane obciążeniem zewnętrznym następuje w kierunku przeciwnym niż założone przez nas obciążenie wirtualne (punkt D przemieszcza się w górę).

Zadanie 4.2

Dla danego układu, przy danym obciążeniu wyznaczyć zmianę odległości między dwoma danymi punktami układu D i E (rys. 4.5).



Rys. 4.5

Rozwiązanie

Obliczenie reakcji

$$\sum M_A = 0$$

$$R_B \cdot 8l - q \cdot 2l \cdot 5l - 3ql \cdot 2l = 0,$$

$$R_B = 2ql;$$

$$\sum P_y = 0$$

$$R_A + R_B - q2l = 0,$$

$$R_A = 0;$$

$$\sum P_x = 0$$

$$H_A - 3ql = 0,$$

$$H_A = 3ql.$$

Wykres momentów zginających od obciążeń rzeczywistych przedstawiono na rysunku 4.6.

W celu znalezienia zmiany odległości między punktami D i E zakładamy wzdłuż kierunku prostej łączącej punkty D i E przeciwnie skierowane dwie wirtualne siły jednostkowe (rys. 4.7).

Obliczenie reakcji

$$\sum M_A = 0$$

$$\bar{R}_B \cdot 8l = 0,$$

$$\bar{R}_B = 0;$$

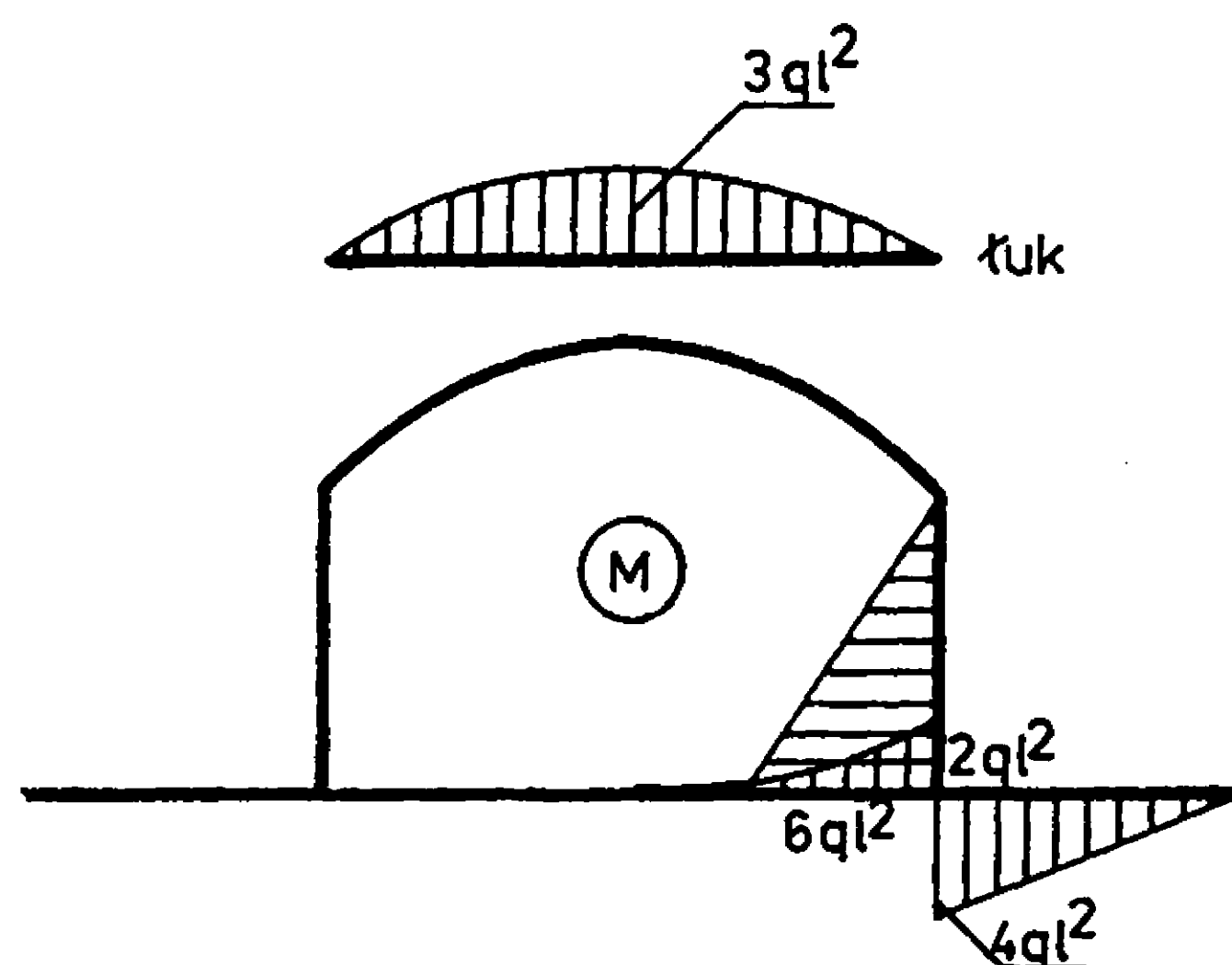
$$\sum P_y = 0$$

$$\bar{R}_A + \bar{R}_B = 0;$$

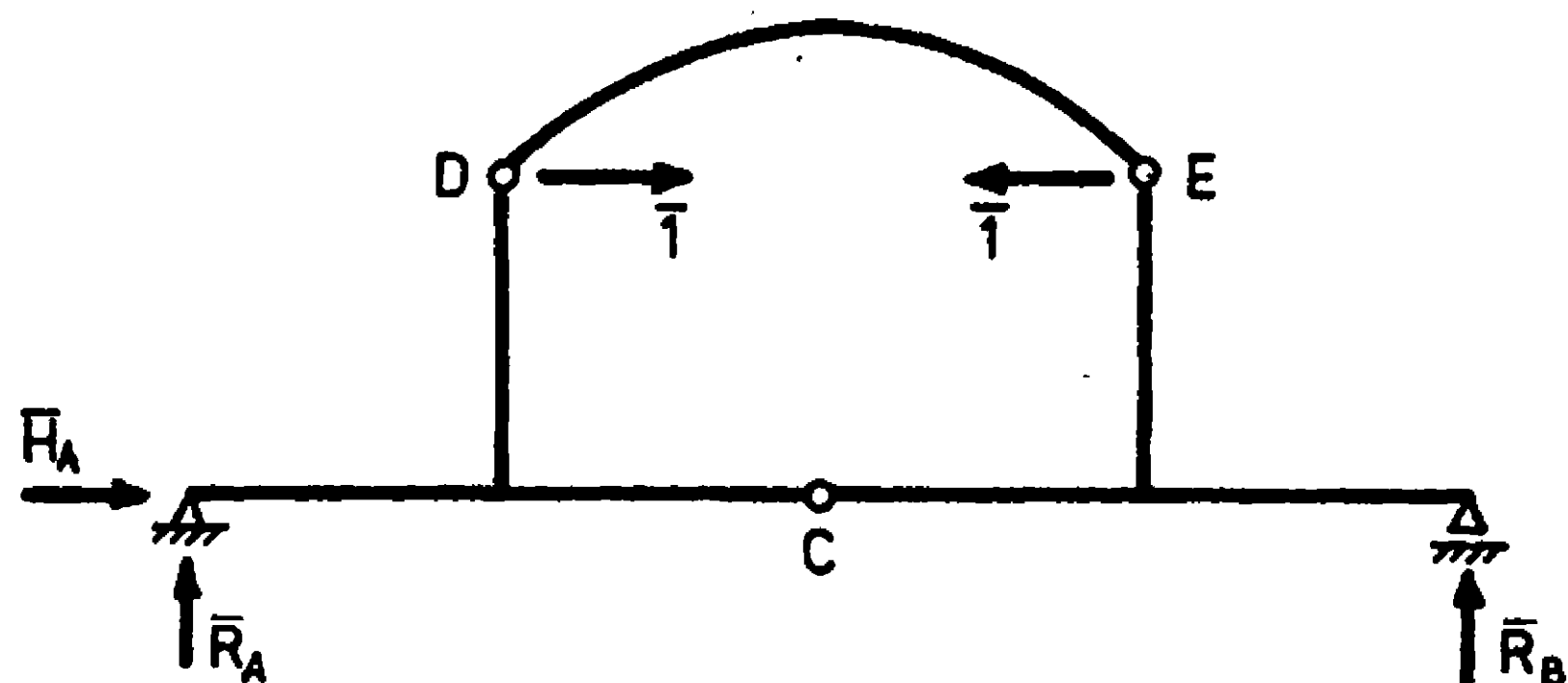
$$\bar{R}_A = 0;$$

$$\sum P_x = 0$$

$$\bar{H}_A = 0.$$



Rys. 4.6

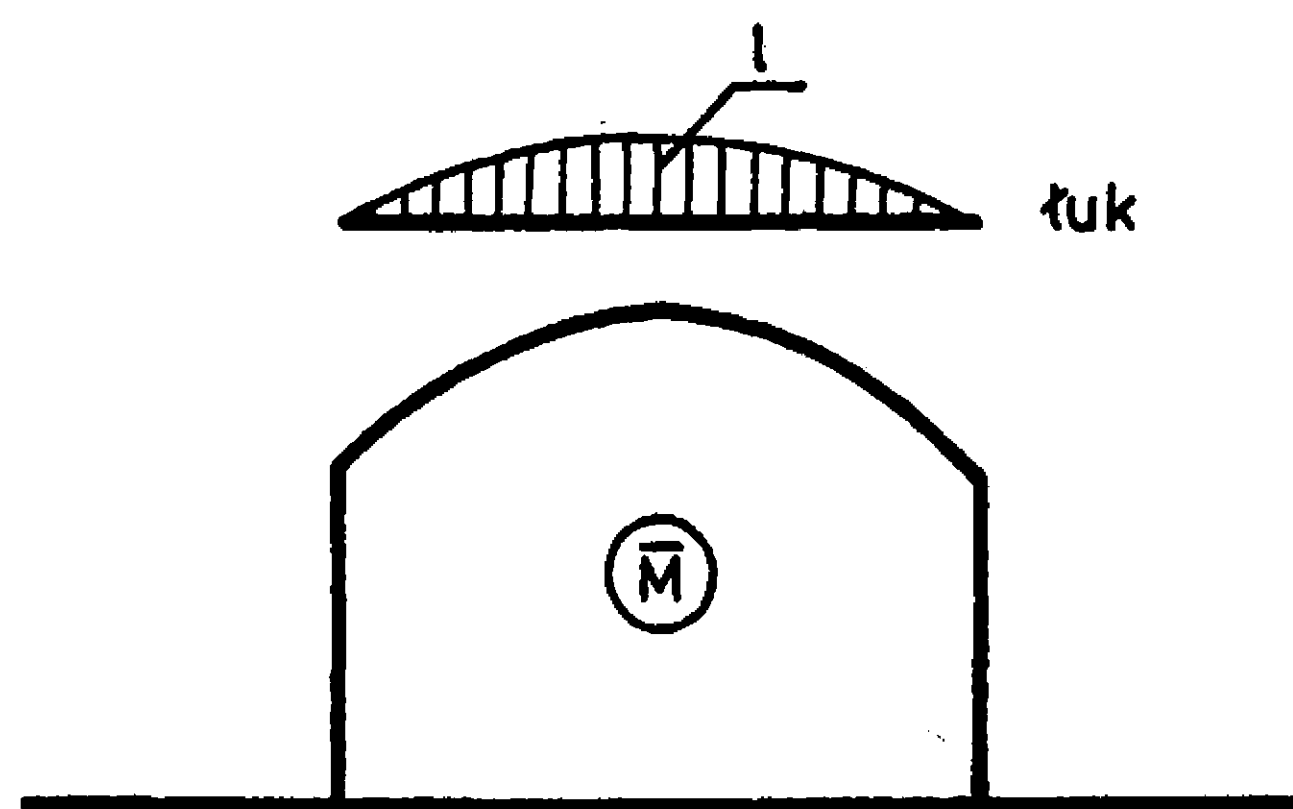


Rys. 4.7

Wykres wirtualnych momentów zginających przedstawiono na rysunku 4.8.

Całkując wykresy momentów zginających M i $\bar{M}$ otrzymamy

$$\delta_{DE} = \int \frac{M\bar{M}}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \frac{8}{15} \cdot 4l \cdot 3ql^2 \cdot 1 = 6,4 \frac{ql^4}{EJ}.$$



Rys. 4.8

Zadanie 4.3

Dla danego układu przy danym obciążeniu wyznaczyć zmianę kąta γ w punkcie C (rys. 4.9).

Rozwiązanie

Obliczenie reakcji

$$\sum M_A = 0$$

$$R_B \cdot 6l - ql \cdot 7l + 3ql^2 - q \cdot 4l \cdot 2l = 0,$$

$$R_B = 2ql;$$

$$\sum P_y = 0$$

$$R_A + R_B - ql = 0,$$

$$R_A = -ql;$$

$$\sum P_x = 0$$

$$H_A - q \cdot 4l = 0,$$

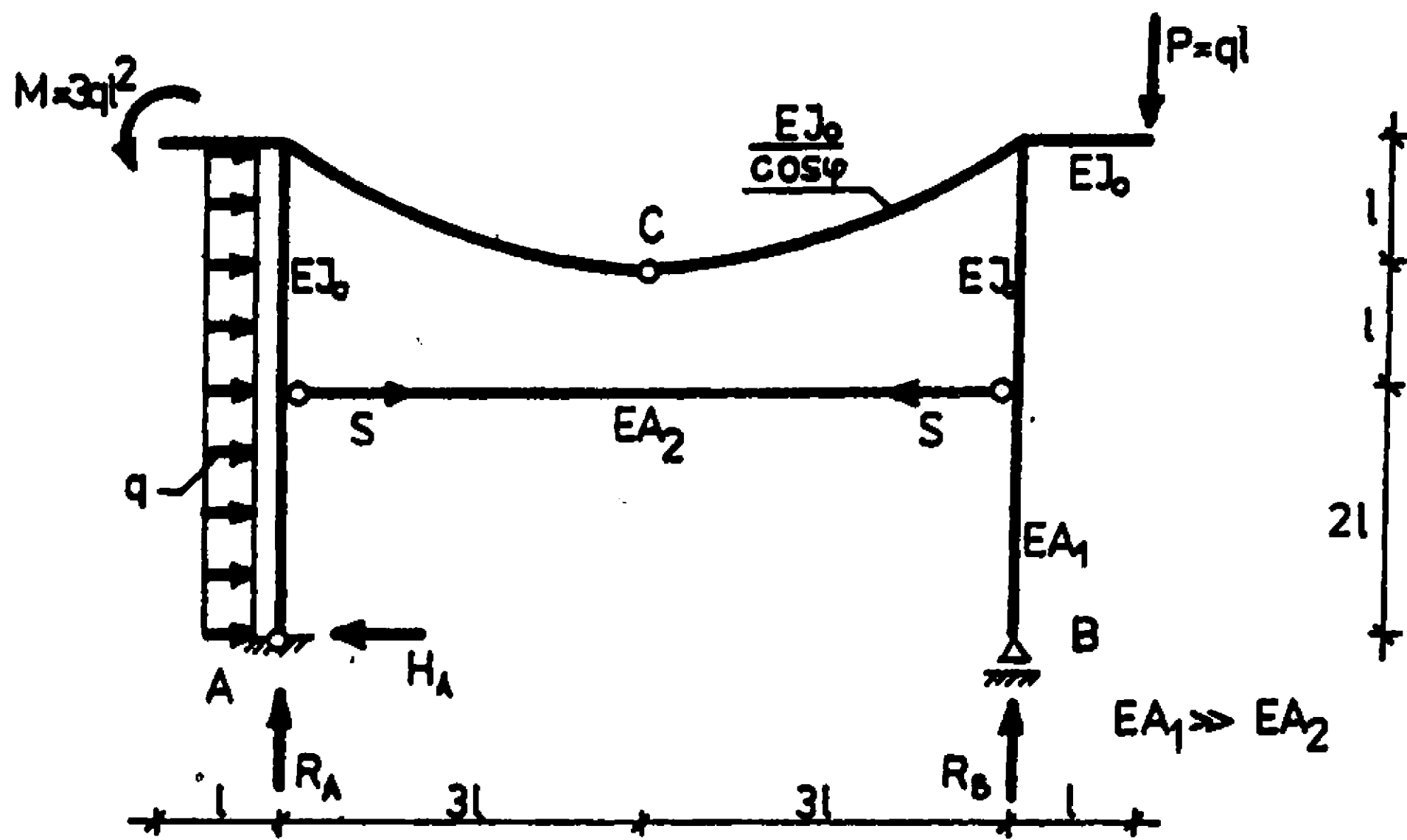
$$H_A = 4ql;$$

$$\sum M_E^p = 0$$

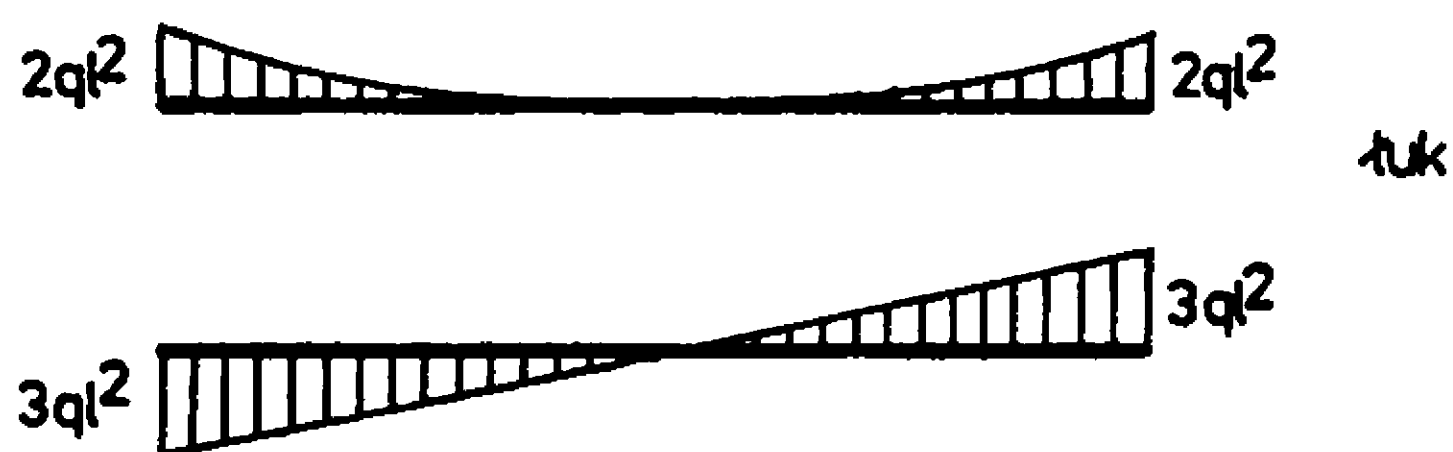
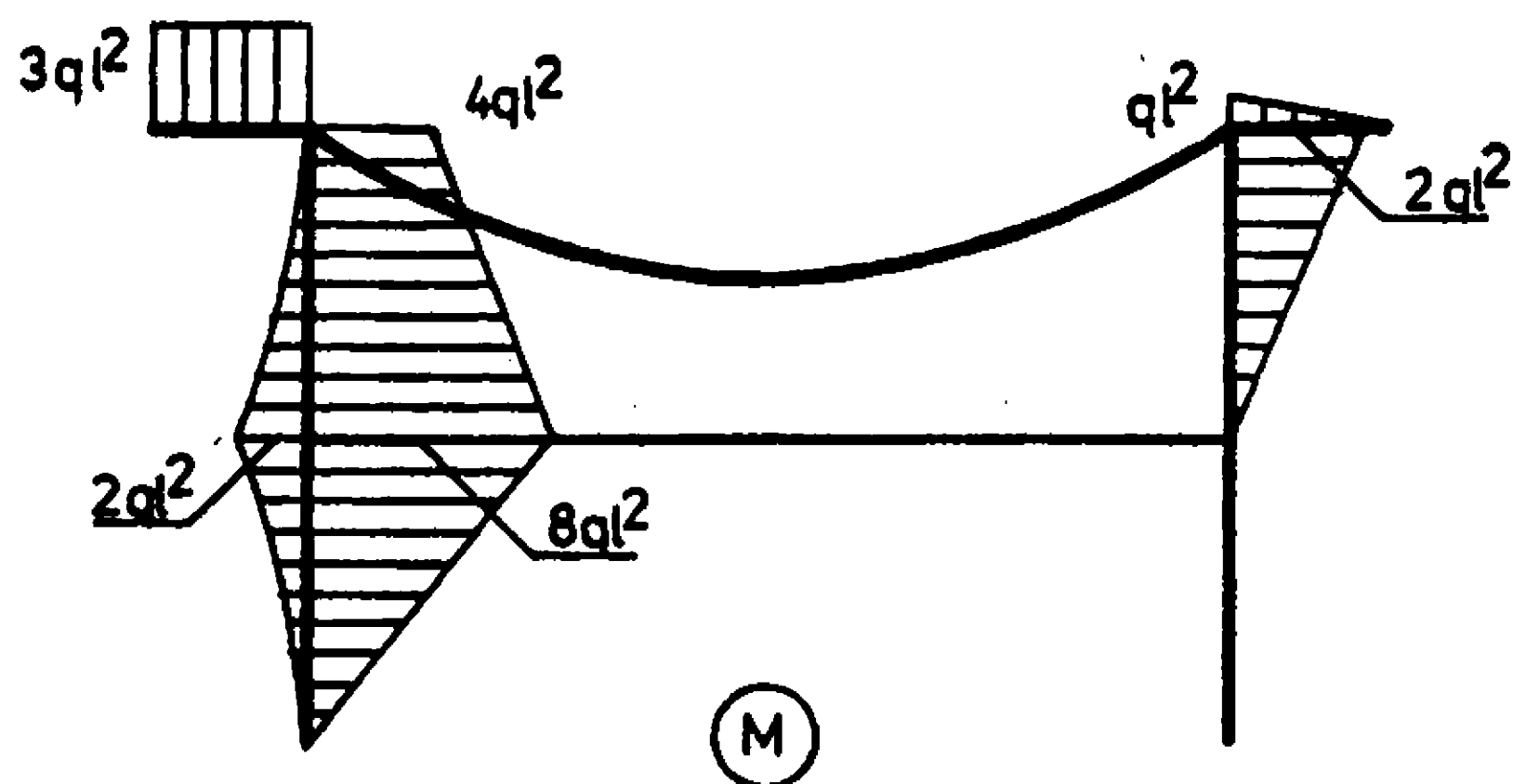
$$R_B \cdot 3l - S \cdot l - ql \cdot 4l = 0,$$

$$S = 2ql.$$

Wykres momentów zginających M od obciążenia zewnętrznego przedstawiono na rysunku 4.10.



Rys. 4.9



Rys. 4.10

W celu znalezienia zmiany kąta φ należy założyć w punkcie "E" parę przeciwnie skierowanych jednostkowych momentów skupionych (rys. 4.11).

Obliczenie reakcji dla stanu wirtualnego

$$\sum M_A = 0$$

$$\bar{R}_B \cdot 6l = 0.$$

$$\bar{R}_B = 0,$$

$$\sum P_y = 0$$

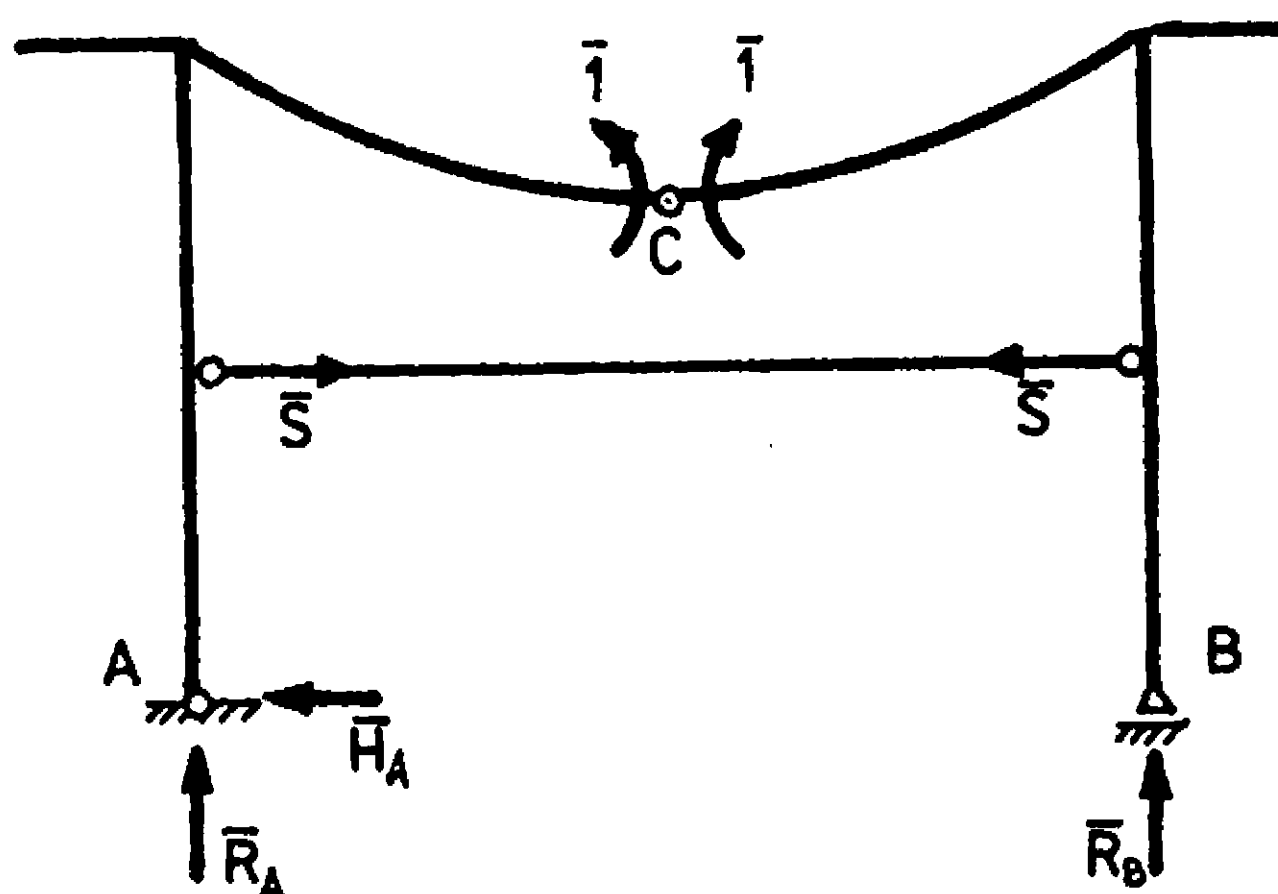
$$\bar{R}_A = 0,$$

$$\sum P_x = 0$$

$$\bar{H}_A = 0,$$

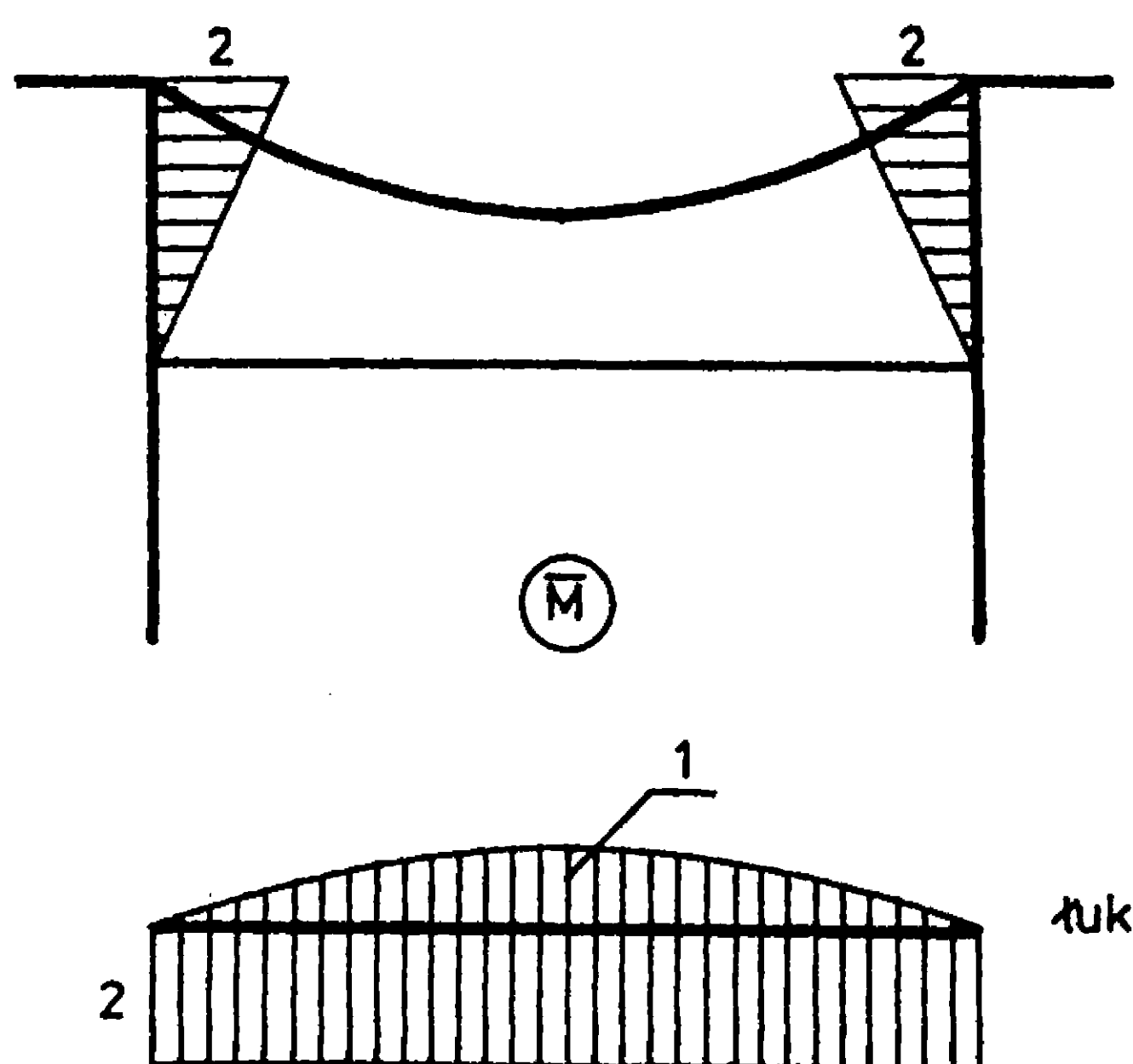
$$\sum M_A^P = 0$$

$$\bar{S} \cdot 1 + 1 = 0, \quad \bar{S} = -\frac{1}{2}.$$



Rys. 4.11

Wykres wirtualnych momentów zginających pokazano na rysunku 4.12.



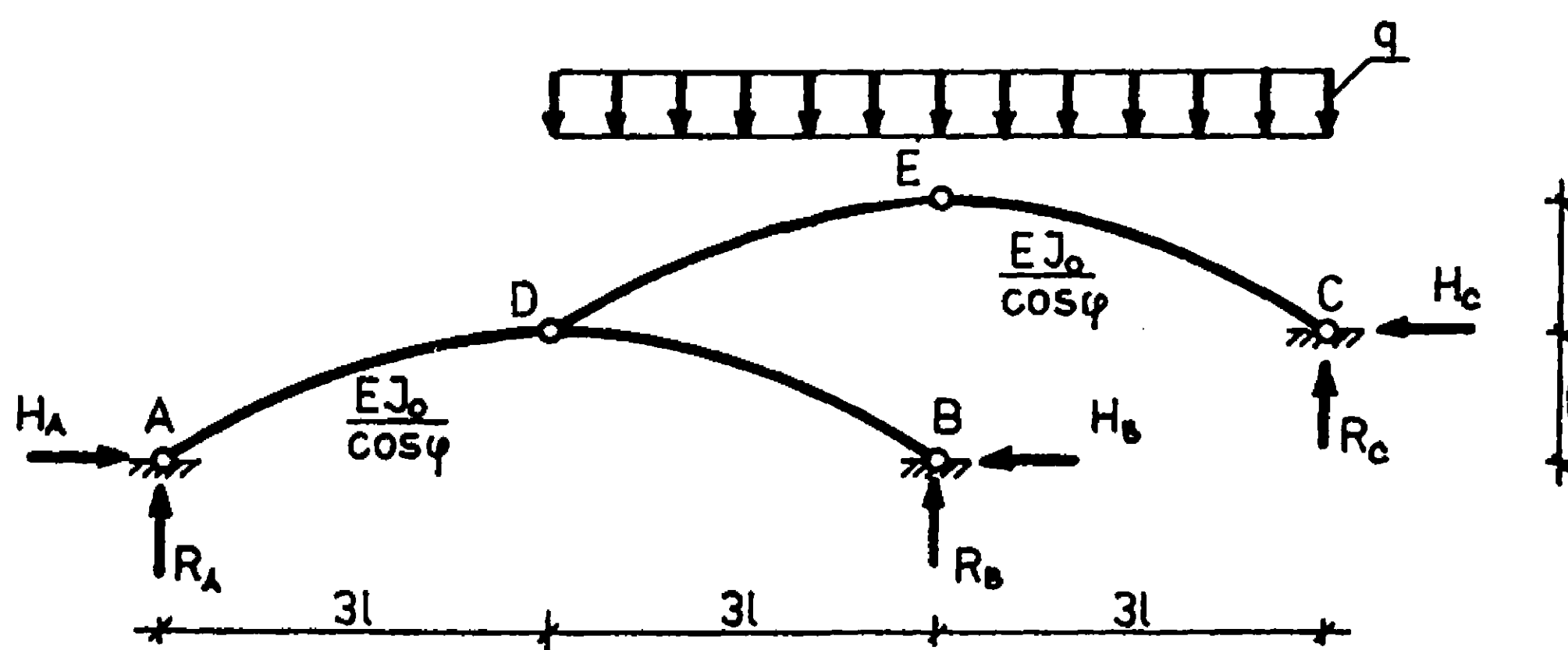
Rys. 4.12

Całkując wykresy momentów zginających M , $\bar{M}$ oraz uwzględniając siłę normalną w ściągach, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \Delta \varphi_E &= \int \frac{M\bar{M}}{EJ} dS + \int \frac{S\bar{S}}{EA} ds = \frac{1}{EJ_0} \left(\frac{2}{15} \cdot 3l \cdot 2ql^2 \cdot 1 \cdot 2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{3} \cdot 3l \cdot 2ql^2 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2l \cdot 4ql^2 \cdot 2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{12} \cdot 2l \cdot 2ql^2 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2l \cdot 4ql^2 \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 2l \cdot 8ql^2 \cdot 2 \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{EA} 2ql \cdot \frac{1}{l} \cdot 6l = - 1,733 \frac{ql^3}{EJ} - 12 \frac{ql}{EA} [m].
 \end{aligned}$$

Zadanie 4.4

Dla danego układu, przy danym obciążeniu, wyznaczyć zmianę kąta φ w przegubie A (rys. 4.13).



Rys. 4.13

Rozwiązanie

Obliczenie reakcji

$$\sum M_D^P = 0$$

$$R_C \cdot 6l - q \cdot 6l \cdot 3l = 0,$$

$$R_C = 3ql;$$

$$\sum M_E^P = 0$$

$$R_C \cdot 3l - H_C \cdot l - q \cdot 3l \cdot 1,5l = 0,$$

$$H_C = 4,5ql,$$

$$\sum M_A = 0$$

$$R_B \cdot 6l + R_C \cdot 9l + H_C \cdot l - q \cdot 6l \cdot 6l = 0,$$

$$R_B = 0,75ql;$$

$$\sum P_y = 0$$

$$R_A + R_B + R_C - 6ql = 0,$$

$$R_A = 2,25ql;$$

$$\sum M_D^p = 0$$

$$R_B \cdot 3l - H_B \cdot l = 0,$$

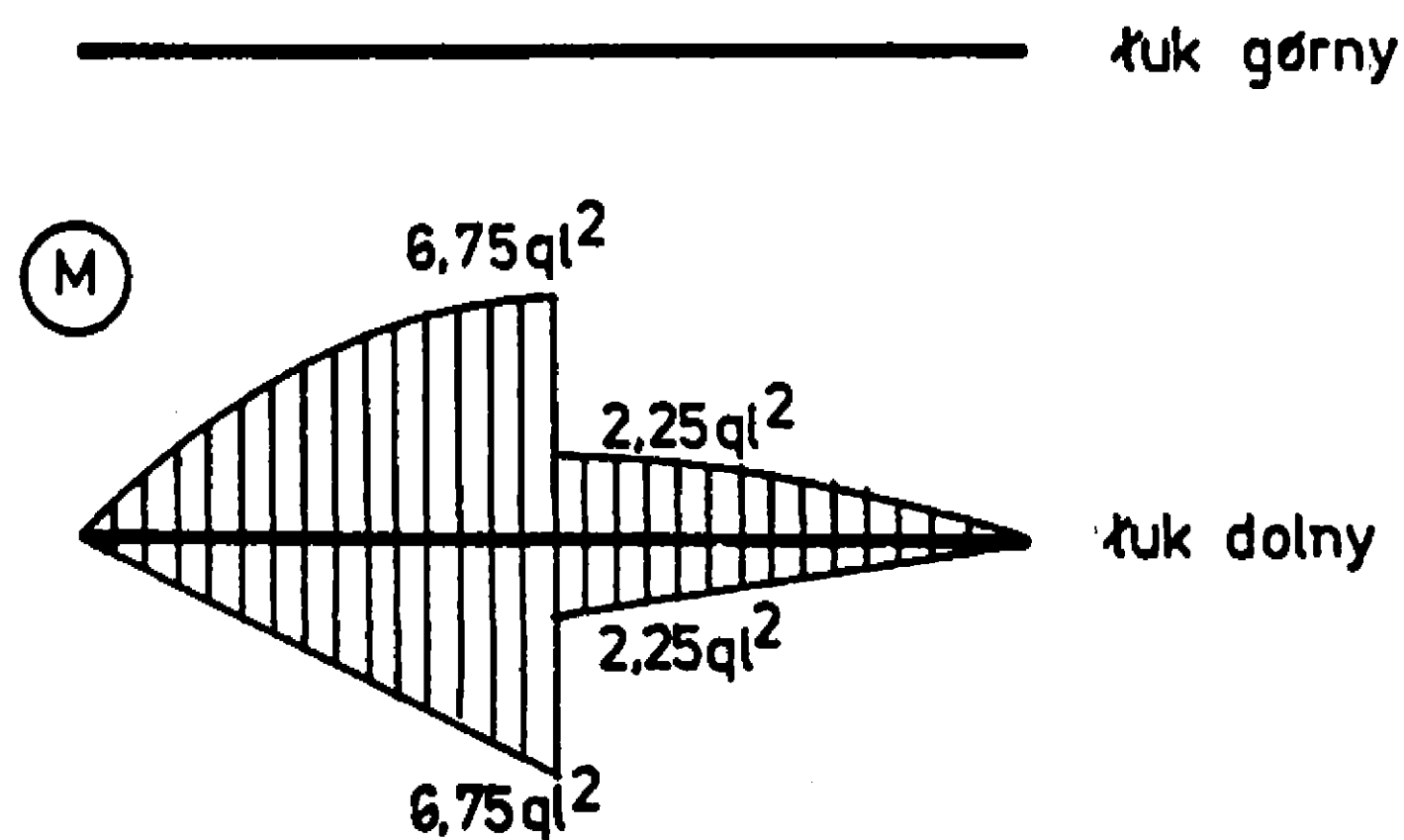
$$H_B = 2,25ql;$$

$$\sum M_D^1 = 0$$

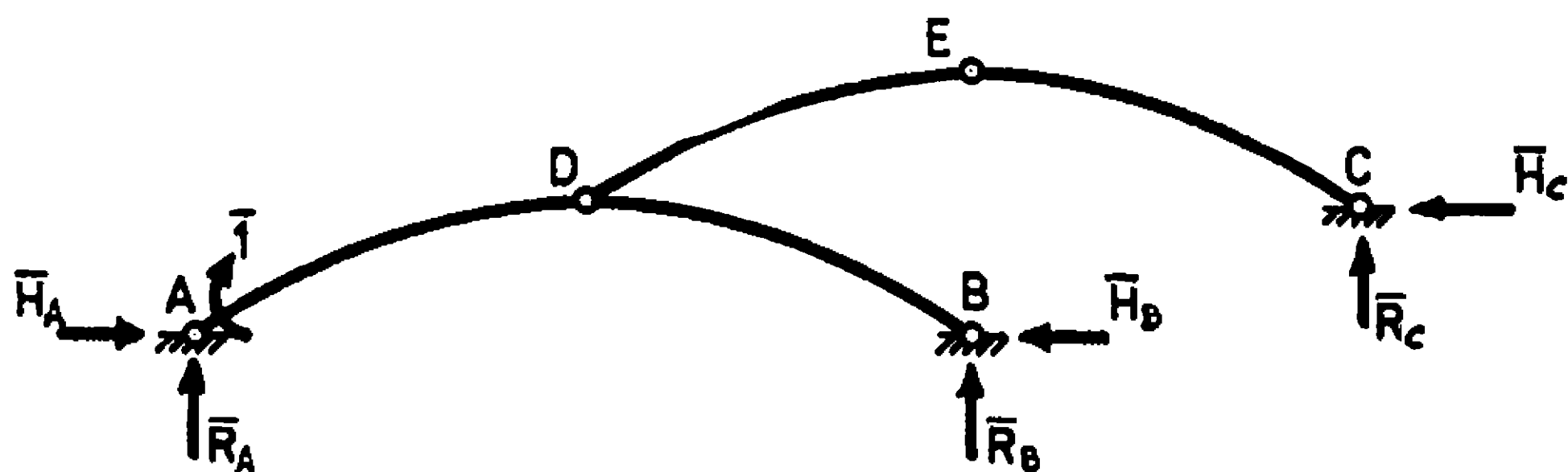
$$R_A \cdot 3l - H_A \cdot l = 0,$$

$$H_A = 6,75ql.$$

Wykresy momentów zginających M od obciążenia zewnętrznego przedstawiono na rysunku 4.14.



Rys. 4.14



Rys. 4.15

Zmianę kąta γ znajdziemy zakładając w punkcie A jednostkowy wirtualny moment skupiony (rys. 4.15).

Obliczenie reakcji w stanie wirtualnym

$$\sum M_B^p = 0$$

$$\bar{R}_C = 0,$$

$$\sum M_E^P = 0$$

$$\bar{H}_C = 0,$$

$$\sum M_A = 0$$

$$\bar{R}_B \cdot 6l + \bar{R}_C \cdot 9l + \bar{H}_C \cdot 1 - 1 = 0,$$

$$\bar{R}_B = \frac{1}{6l};$$

$$\sum P_y = 0$$

$$\bar{R}_A + \bar{R}_B + \bar{R}_C = 0,$$

$$\bar{R}_A = -\frac{1}{6l};$$

$$\sum M_D^P = 0$$

$$\bar{R}_B \cdot 3l - \bar{H}_B \cdot 1 = 0,$$

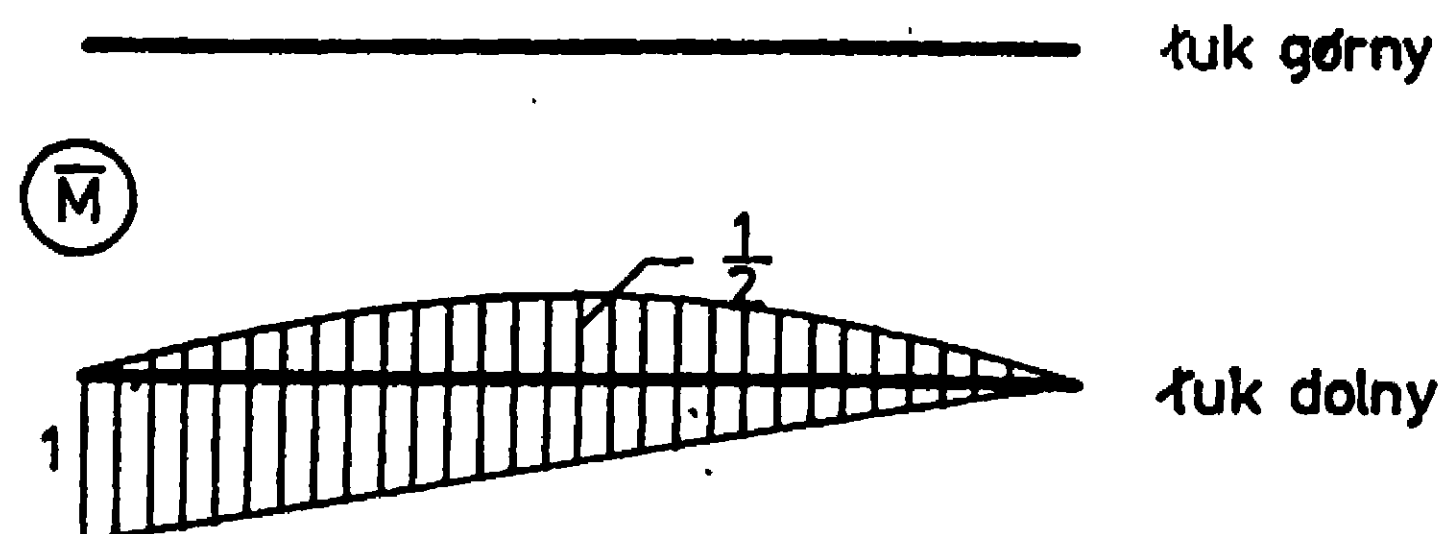
$$\bar{H}_B = \frac{1}{2l};$$

$$\sum P_x = 0$$

$$\bar{H}_A - \bar{H}_B - \bar{H}_C = 0;$$

$$\bar{H}_A = \frac{1}{2l}.$$

Wykres momentów wirtualnych $\bar{M}$ podano na rysunku 4.16.



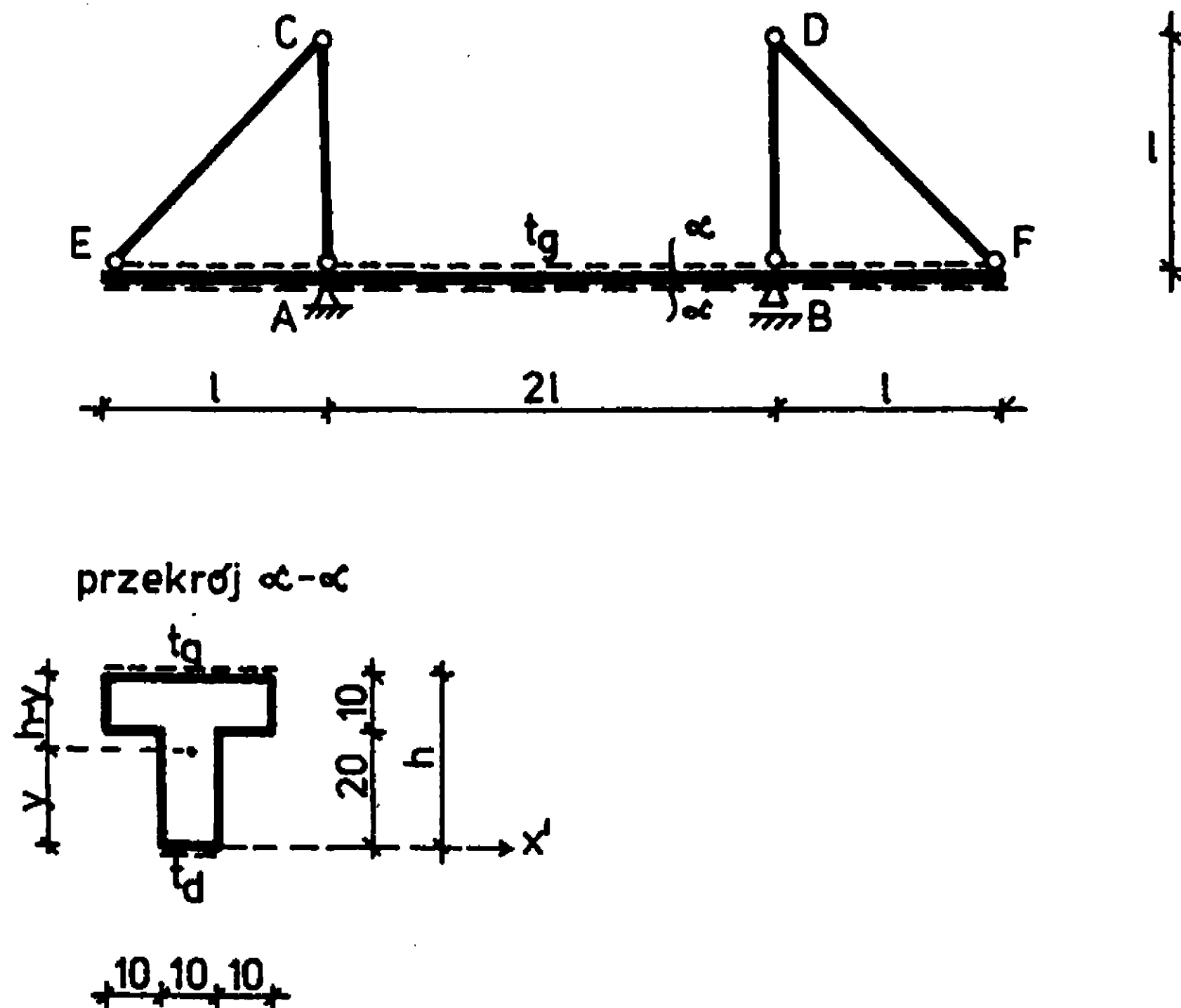
Rys. 4.16

Kąt obrotu φ_A wynosi

$$\begin{aligned} \varphi_A = \int \frac{M\bar{M}}{EJ} dx = \frac{1}{EJ_0} & \left(\frac{8}{15} 3l \cdot 2,25ql^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{12} 3l \cdot 2,25ql^2 \cdot \frac{1}{2} - \right. \\ & - \frac{5}{12} 3l \cdot 2,25ql^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} 3l \cdot 2,25ql^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{8}{15} 3l \cdot 6,75ql^2 \cdot \frac{1}{2} - \\ & + \frac{5}{12} 3l \cdot 6,75ql^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} 3l \cdot 6,75ql^2 \cdot 1 - \frac{5}{12} 3l \cdot 6,75ql^2 \cdot \frac{1}{2} + \\ & \left. + \frac{1}{3} 3l \cdot 6,75ql^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} 3l \cdot 6,75ql^2 \cdot 1 \right) = -4,05 \frac{ql^3}{EJ}. \end{aligned}$$

Zadanie 4.5

Dla danego układu belkowo-kratowego, przy danym oddziaływaniu temperatury, wyznaczyć zmianę odległości między dwoma punktami C i D (rys. 4.17). Dane: $l = 100 \text{ cm}$, $t_d = 50^\circ\text{C}$, $t_g = 20^\circ\text{C}$, $t_m = 0^\circ\text{C}$, $\alpha_t = 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$.



Rys. 4.17

Rozwiązanie

Wyznamy środek ciężkości przekroju $\alpha-\alpha$.

$$A = 10 \cdot 20 + 30 \cdot 10 = 500 \text{ cm}^2,$$

$$S_{x'} = 10 \cdot 20 \cdot 10 + 30 \cdot 10 \cdot 25 = 9500 \text{ cm}^3,$$

$$y = \frac{S_{x'}}{A} = \frac{9500}{500} = 19 \text{ cm}.$$

Przyrost temperatury $\Delta t = t_d - t_g = 50^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = 30^\circ\text{C}$.

Z liniowego rozkładu temperatury na wysokości przekroju belki wynika, że

$$t = \left[t_g + \frac{(h-y)\Delta t}{h} \right] - t_m = \left[20^\circ\text{C} + \frac{30-19}{30} \cdot 30^\circ\text{C} \right] - 0^\circ\text{C} = 31^\circ\text{C}.$$

W celu wyznaczenia zmiany odległości między punktami C i D zakładamy wzdłuż prostej łączącej punkty C i D przeciwnie skierowane dwie wirtualne siły jednostkowe (rys. 4.18)

$$\sum P_x = 0$$

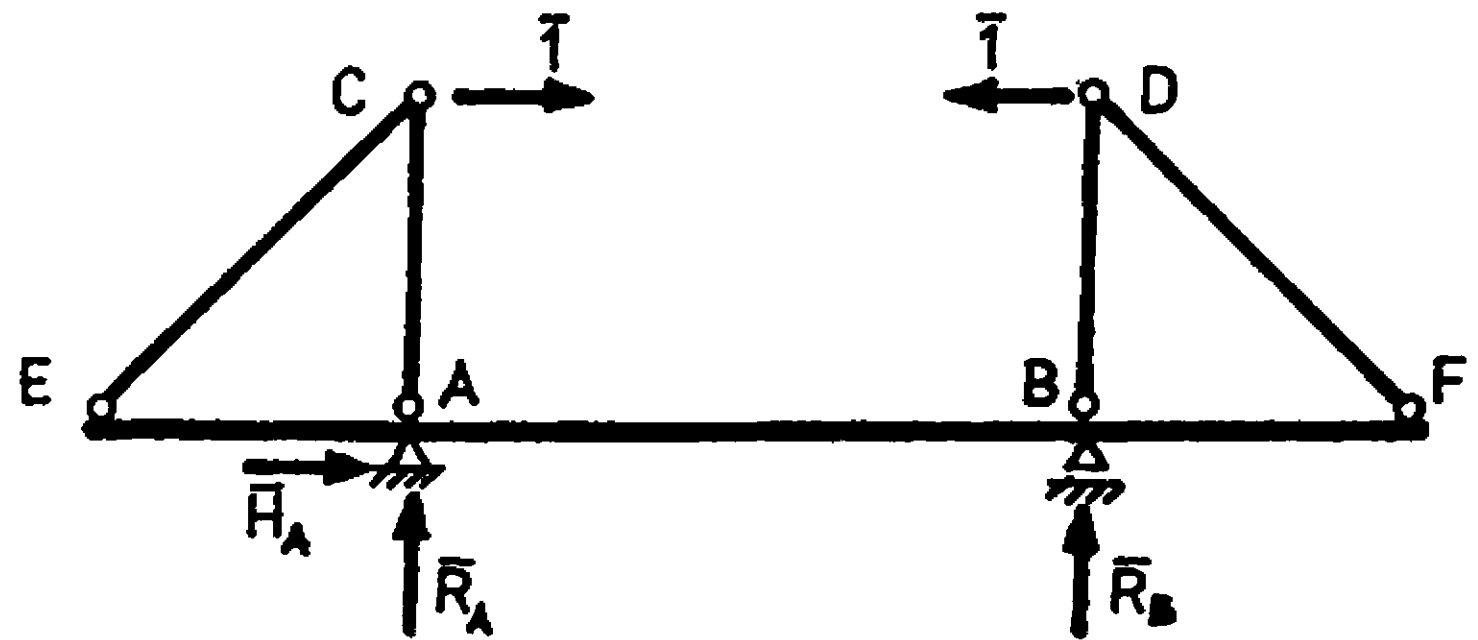
$$\bar{H}_A = 0,$$

$$\sum M_A = 0$$

$$\bar{R}_B = 0,$$

$$\sum P_y = 0$$

$$\bar{R}_A = 0.$$



Rys. 4.18

$$\sum P_x = 0$$

$$S_{CE} \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = 0 \longrightarrow S_{CE} = \sqrt{2},$$

$$\sum P_y = 0$$

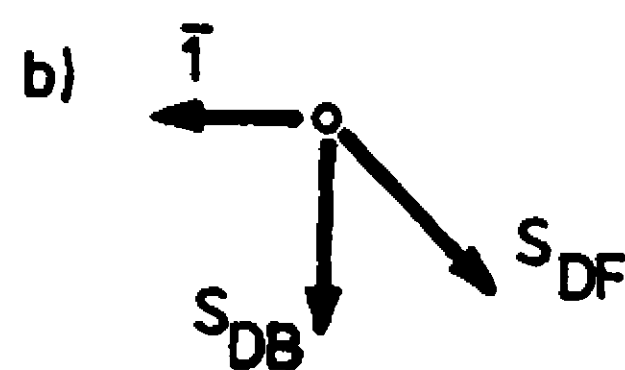
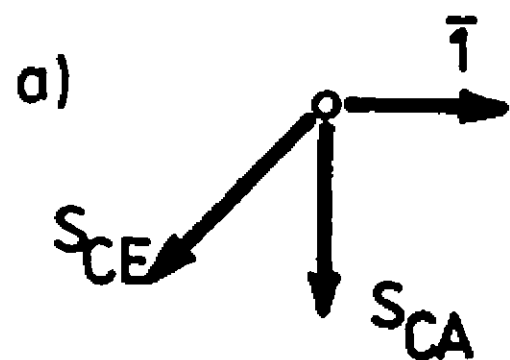
$$S_{CE} \frac{1}{\sqrt{2}} + S_{CA} = 0 \longrightarrow S_{CA} = -1,$$

$$\sum P_x = 0$$

$$S_{DF} \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = 0 \longrightarrow S_{DF} = \sqrt{2},$$

$$\sum P_y = 0$$

$$S_{DF} \frac{1}{\sqrt{2}} + S_{DB} = 0 \longrightarrow S_{DB} = -1.$$

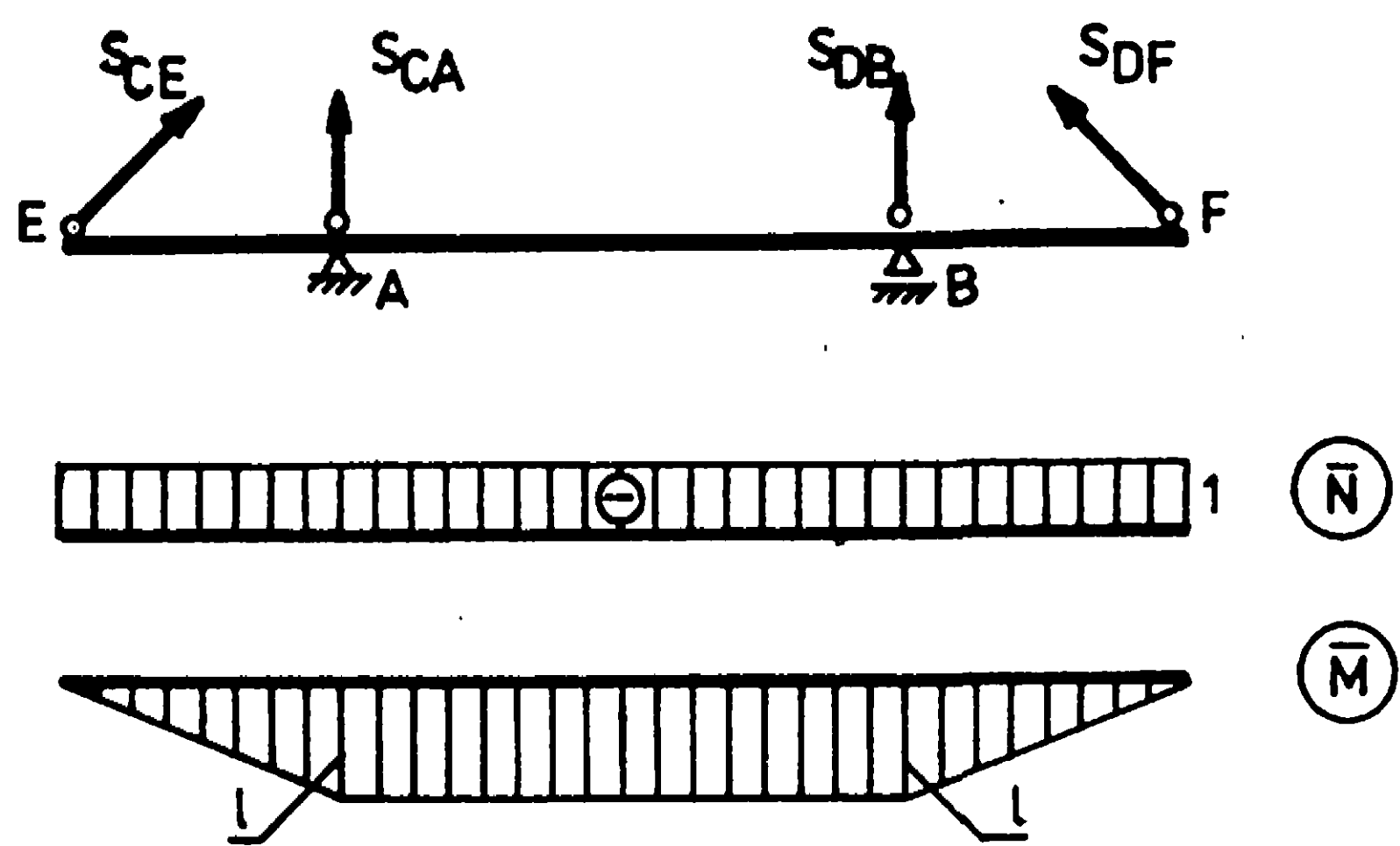


Rys. 4.19a-b

Siły w prętach kratowych oraz wykresy wirtualnych sił normalnych $\bar{N}$ i wirtualnych momentów zginających $\bar{M}$ przedstawiono na rysunku 4.20. Poszukiwane przemieszczenie wyliczymy następująco:

$$\Delta_{CD} = \int_s \bar{M} \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} ds + \int_s \bar{N} \cdot \alpha_t \cdot t_0 ds,$$

$$\Delta_{CD} = \left(\frac{1}{2} 1 \cdot 1 \cdot 2 + 21 \cdot 1 \right) \frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h} + 1 \cdot 41 \cdot \alpha_t \cdot t.$$



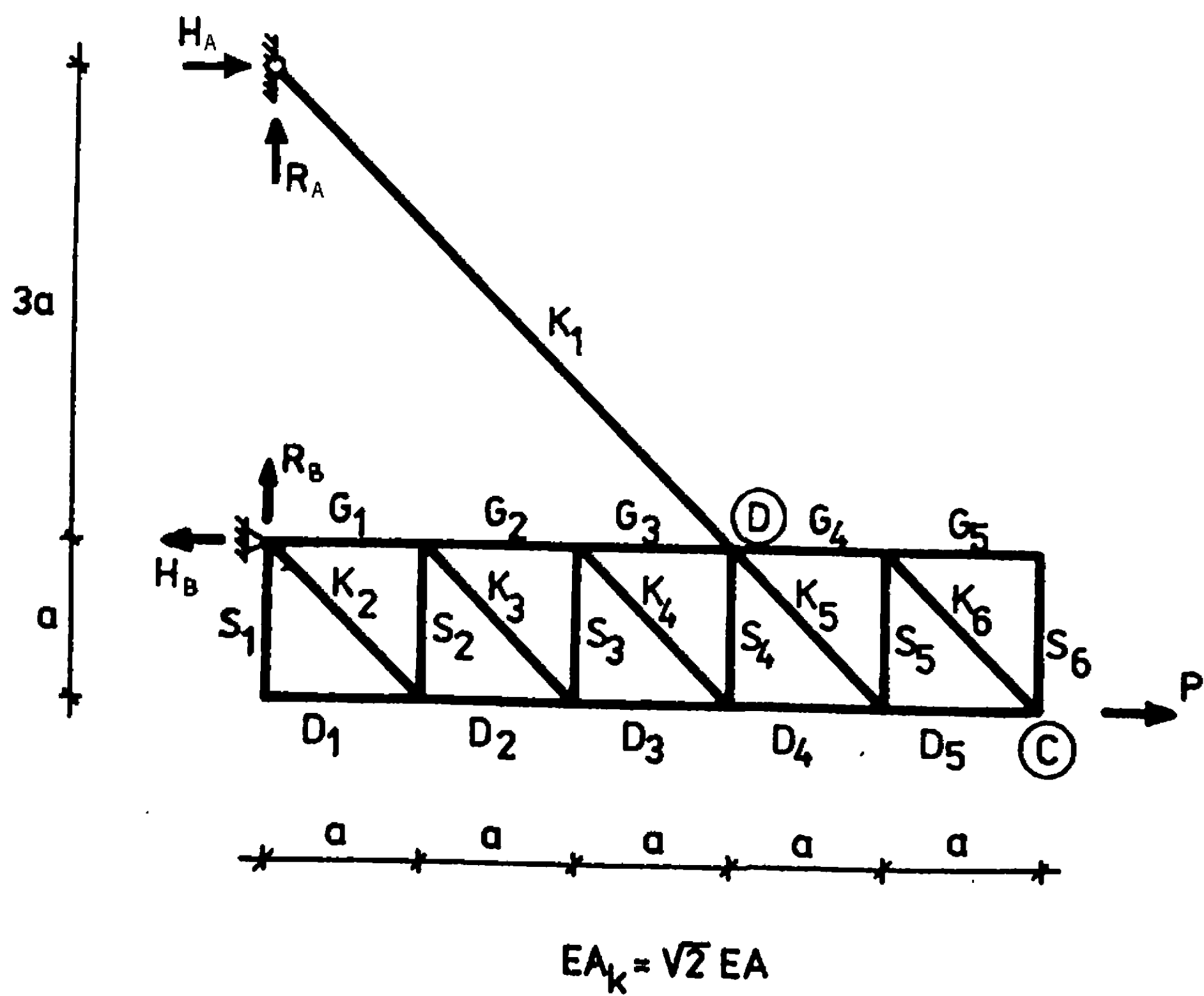
Rys. 4.20

Podstawiając dane otrzymamy

$$\Delta_{CD} = \left(\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 100 \cdot 2 + 2 \cdot 100 \cdot 100 \right) \frac{10^{-5} \cdot 30}{30} + 4 \cdot 100 \cdot 10^{-5} \cdot 31 =$$
$$= 0,3 + 0,124 = 0,424 \text{ cm} = 4.24 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Zadanie 4.6

Dla danej kratownicy przy danym obciążeniu wyznaczyć pionowe przemieszczenie punktu C (rys. 4.21).



Rys. 4.21

Rozwiązanie

Przemieszczania w układach kratowych obliczać będziemy korzystając z równania pracy wirtualnej dla rzeczywistego stanu przemieszczeń i wirtualnego stanu obciążeń podanego na stronie 36. Dla kratownic równanie to jest znacznie prostsze. Odpadają mianowicie momenty i siły poprzeczne, ponieważ w kratownicy mamy do czynienia z samymi tylko siłami normalnymi, a tym samym odpada całkowanie, ponieważ siły normalne nie zmieniają się w sposób ciągły, lecz są stałe w każdym pręcie.

Równanie pracy wirtualnej dla rzeczywistego stanu przemieszczeń i wirtualnego stanu obciążeń dla układów kratowych przybiera zatem postać

$$\sum_{i=1}^n \bar{P}_i \delta_i + \sum_{i=1}^n \bar{D}_i \Delta_i = \sum_{k=1}^n \bar{N}_k \left(\frac{N_{ko}}{E_k} \frac{l_k}{A_k} + \alpha_k t_k l_k \right),$$

gdzie: δ_i - przemieszczenie w punkcie "i" wywołane obciążeniem zewnętrznym,

N_{ko} - siła w pręcie "k" wywołana obciążeniem zewnętrznym,

$\bar{N}_k$ - siła w pręcie "k" wywołana obciążeniem wirtualnym,

l_k - długość k-tego pręta,

t_k - zmiana temperatury w k-tym pręcie,

α_k - współczynnik rozszerzalności liniowej materiału k-tego pręta,

Δ_i - osiadanie i-tej podpory,

$\bar{D}_i$ - reakcja na i-tej podporze od obciążenia wirtualnego.

Obliczenie prawej strony powyższej równości będziemy przeprowadzać w tabeli.

Obliczenie reakcji

$$\sum M_B = 0$$

$$H_A \cdot 3a + 2Pa - 4P \cdot 2a = 0,$$

$$H_A = 2P;$$

$$\sum P_x = 0$$

$$H_A + H_B - 2P = 0,$$

$$H_B = 0,$$

$$\sum M_D^p = 0$$

$$R_A \cdot 3a - H_A \cdot 3a = 0,$$

$$R_A = 2P;$$

$$\Sigma P_y = 0$$

$$R_A + R_B - 4P = 0,$$

$$R_B = 2P.$$

Siły w prętach $S_1 - K_{22}$ od obciążenia zewnętrznego obliczono metodą równoważenia węzłów.

Jako obciążenie wirtualne przyjmujemy jednostkową siłę zaczepioną w punkcie C.

Obliczenie reakcji od obciążenia wirtualnego.

$$\Sigma M_B = 0$$

$$1 \cdot 5a - \bar{H}_A \cdot 3a = 0,$$

$$\bar{H}_A = \frac{5}{3};$$

$$\Sigma P_x = 0$$

$$\bar{H}_A + \bar{H}_B = 0,$$

$$\bar{H}_B = -\frac{5}{3};$$

$$\Sigma M_D^P = 0$$

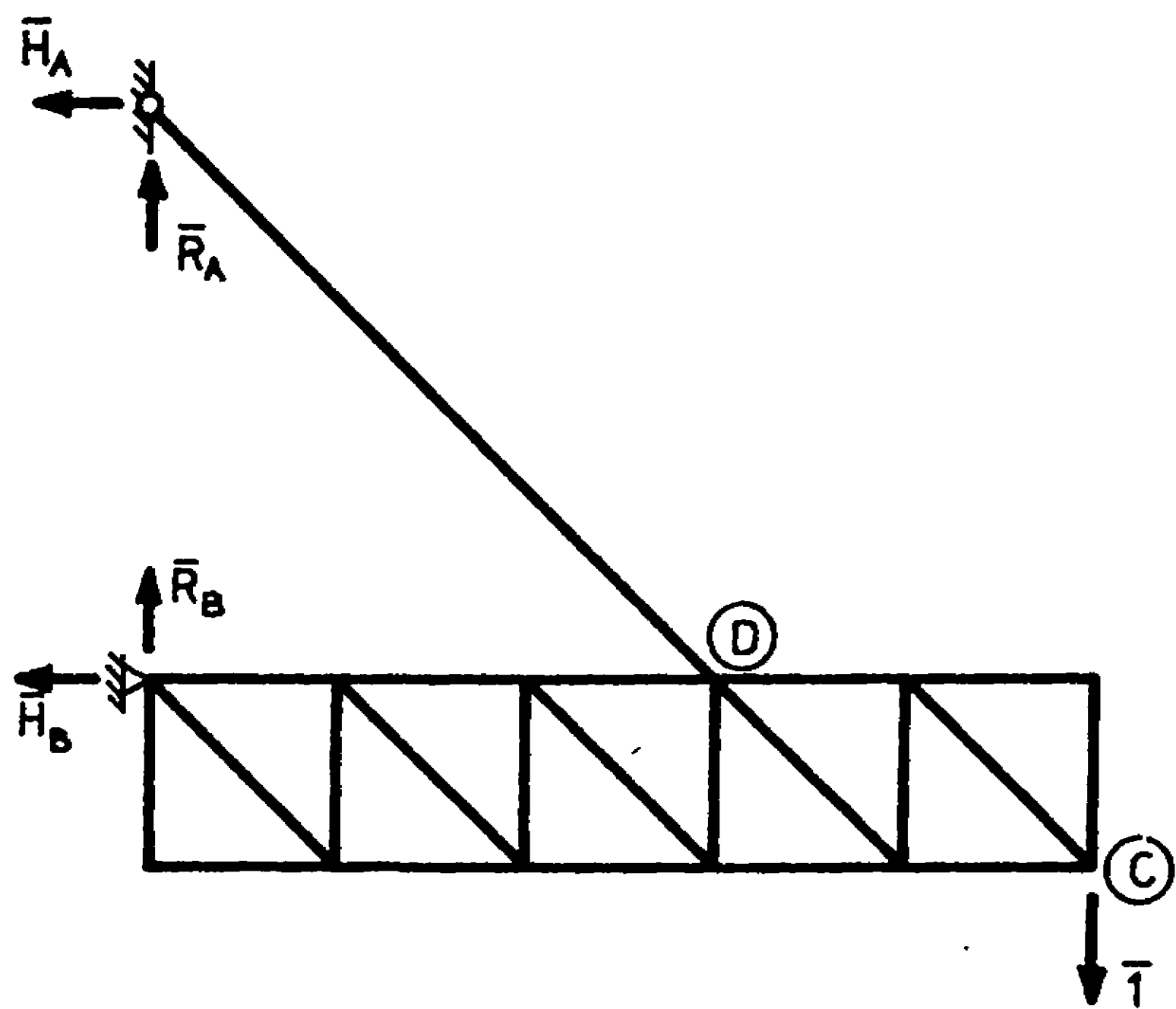
$$\bar{R}_A \cdot 3a - \bar{H}_A \cdot 3a = 0,$$

$$\bar{R}_A = \frac{5}{3};$$

$$\Sigma P_y = 0$$

$$\bar{R}_A + \bar{R}_B - 1 = 0,$$

$$R_B = -\frac{2}{3}.$$



Rys. 4.22

Siły w prętach wywołane obciążeniem wirtualnym również obliczono metodą równoważenia węzłów.

Obliczenie pionowego przemieszczenia węzła C zostało przeprowadzone w tabeli 4.1.

T a b e l a 4.1

Pręt	l_k [m]	A_k [m ²]	N_{ko} [kN]	$\bar{N}_k$ [1]	$\frac{\bar{N}_k N_{ko}}{E A_k} l_k$
G ₁	a	A	-2P	-1	2 Pa/EA
G ₂	a	A	-4P	-1/3	4 Pa/3 EA
G ₃	a	A	-2P	1/3	-2 Pa/3 EA
G ₄	a	A	0	1	0
G ₅	a	A	0	0	0
D ₁	a	A	0	0	0
D ₂	a	A	2P	-2/3	-4 Pa/3 EA
D ₃	a	A	4P	-4/3	-16 Pa/3 EA
D ₄	a	A	2P	-2	-4 Pa/EA
D ₅	a	A	2P	-1	-2 Pa/EA

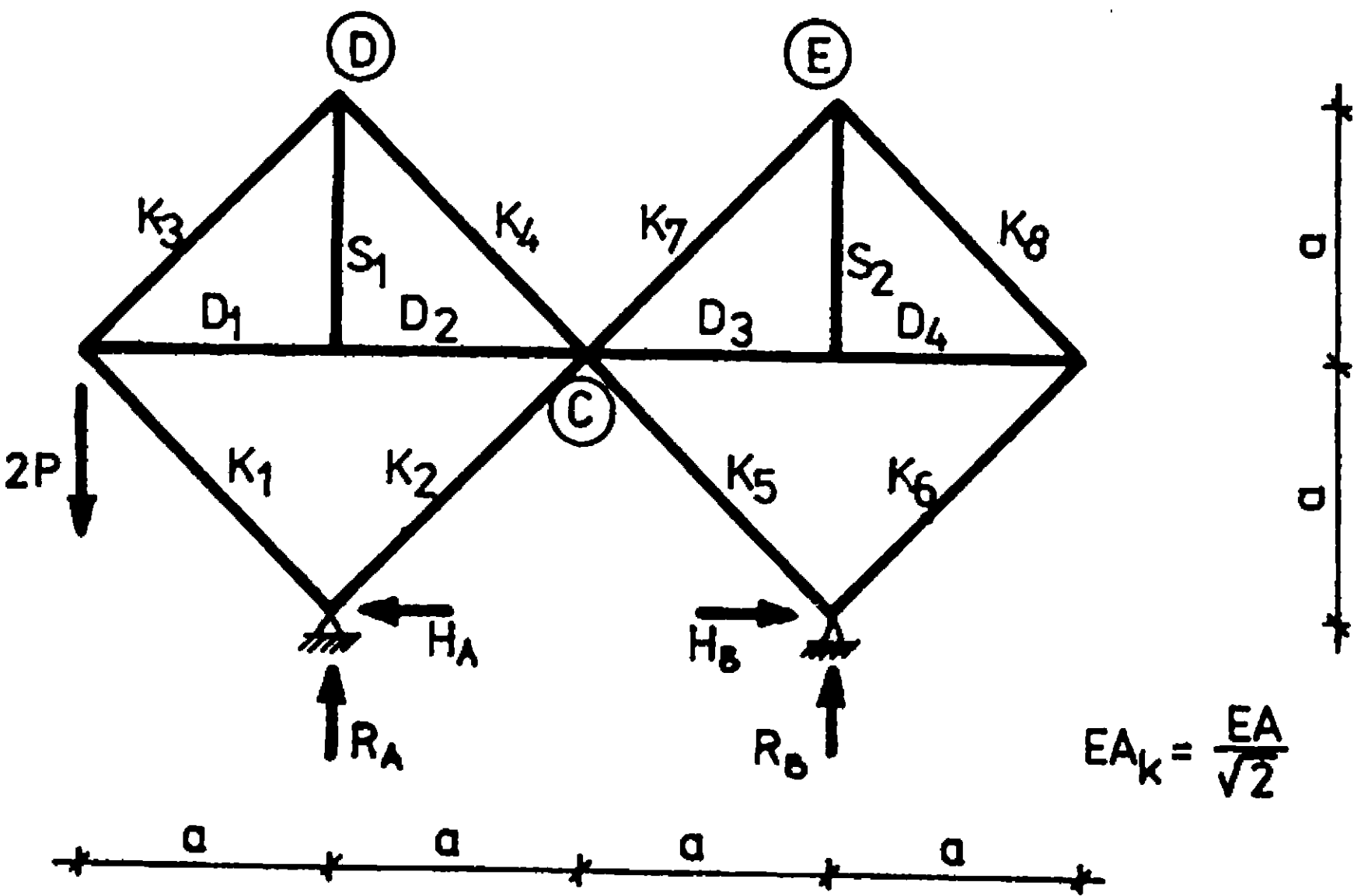
T a b e l a 4.1 (cd.)

Pręt	l_k [m]	A_k [m ²]	N_{ko} [kN]	$\bar{N}_k$ [1]	$\frac{\bar{N}_k N_{kz}}{E A_k} l_k$
S ₁	a	A	0	0	0
S ₂	a	A	-2P	2/3	-4Pa/3EA
S ₃	a	A	2P	2/3	4Pa/3EA
S ₄	a	A	2P	2/3	4Pa/3EA
S ₅	a	A	0	1	0
S ₆	a	A	0	0	0
K ₁	3a√2	A√2	2P√2	5√2/3	20Pa/EA
K ₂	a√2	A√2	2P√2	-2√2/3	-8Pa/3EA
K ₃	a√2	A√2	2P√2	-2√2/3	-8Pa/3EA
K ₄	a√2	A√2	-2P√2	-2√2/3	8Pa/3EA
K ₅	a√2	A√2	0	√2	0
K ₆	a√2	A√2	0	√2	0
					$\sum = 8,667 \frac{Pa}{EA}$

$\delta_c = 8,667 \frac{Pa}{EA} \text{ m}$

Zadanie 4.7

Dla danej kratownicy przy danym obciążeniu wyznaczyć zmianę odległości między węzłami D i E (rys. 4.23).



Rys. 4.23

Rozwiązanie

Obliczenie reakcji

$$\sum M_A = 0$$

$$2Pa + R_B \cdot 2a = 0,$$

$$R_B = -P;$$

$$\sum P_y = 0$$

$$R_A + R_B - 2P = 0,$$

$$R_A = 3P;$$

$$\sum M_C^p = 0$$

$$R_B a + H_B a = 0,$$

$$H_B = P;$$

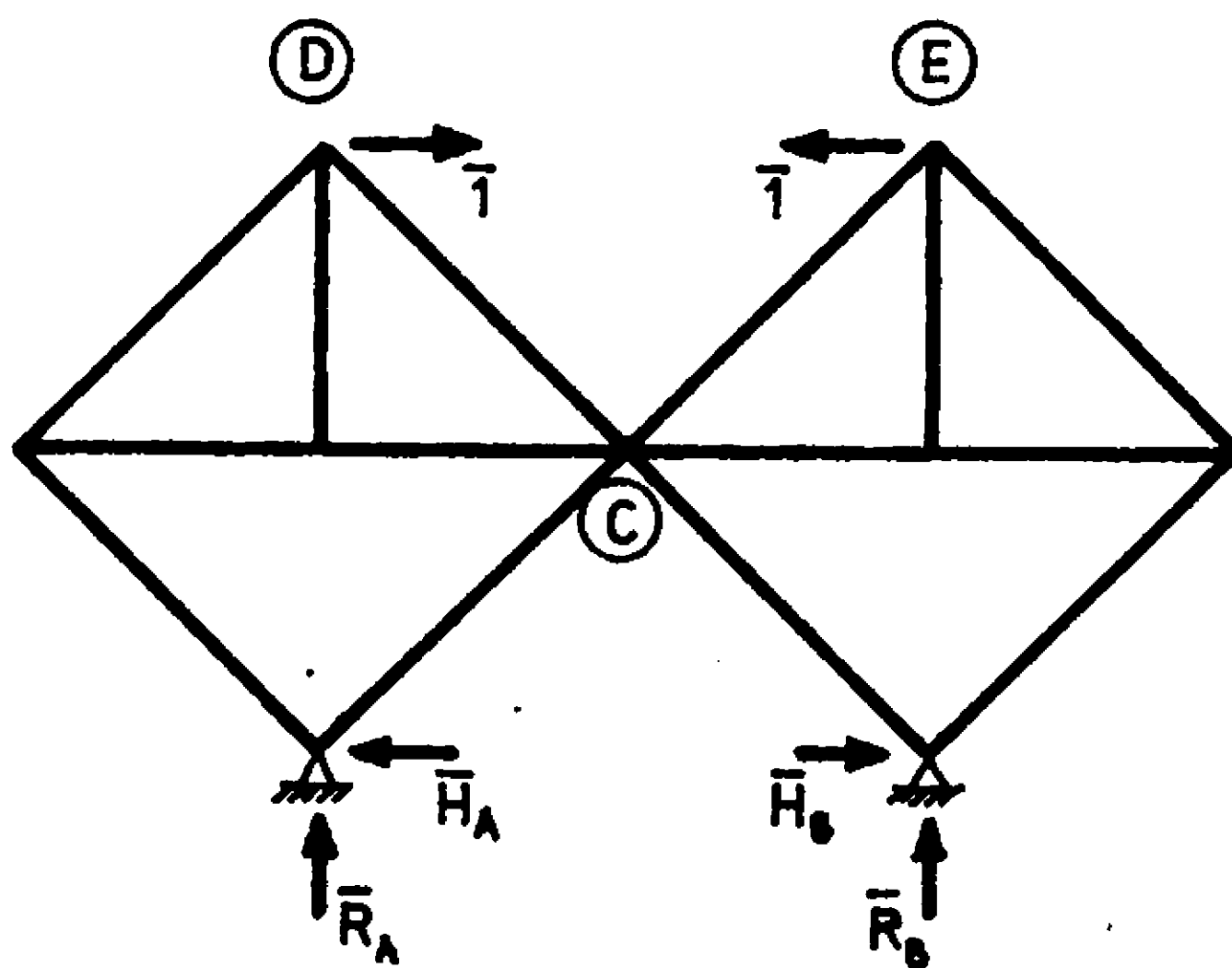
$$\sum P_x = 0$$

$$H_A - H_B = 0,$$

$$H_A = P.$$

Siły w poszczególnych prętach kratownicy od obciążenia zewnętrznego obliczono metodą równoważenia węzłów.

Jako obciążenie wirtualne zakładamy w punktach C i D jednostkowe siły działające na kierunku C-D o dowolnych lecz przeciwnych zwrotach.



Rys. 4.24

Obliczenie reakcji w stanie wirtualnym

$$\sum M_A = 0$$

$$\bar{R}_B \cdot 2a + 1 \cdot 2a - 1 \cdot 2a = 0,$$

$$\bar{R}_B = 0;$$

$\Sigma P_y = 0$

$\bar{R}_A + \bar{R}_B = 0,$

$\bar{R}_A = 0;$

$\Sigma M_C^P = 0$

$1a + \bar{H}_B \cdot a = 0,$

$\bar{H}_B = -1;$

$\Sigma P_x = 0$

$-\bar{H}_A + \bar{H}_B + 1 - 1 = 0,$

$\bar{H}_A = -1.$

Siły wirtualne w poszczególnych prętach obliczono metodą równoważenia węzłów. Samo obliczenie przemieszczenia jest przeprowadzone w tabeli 4.2.

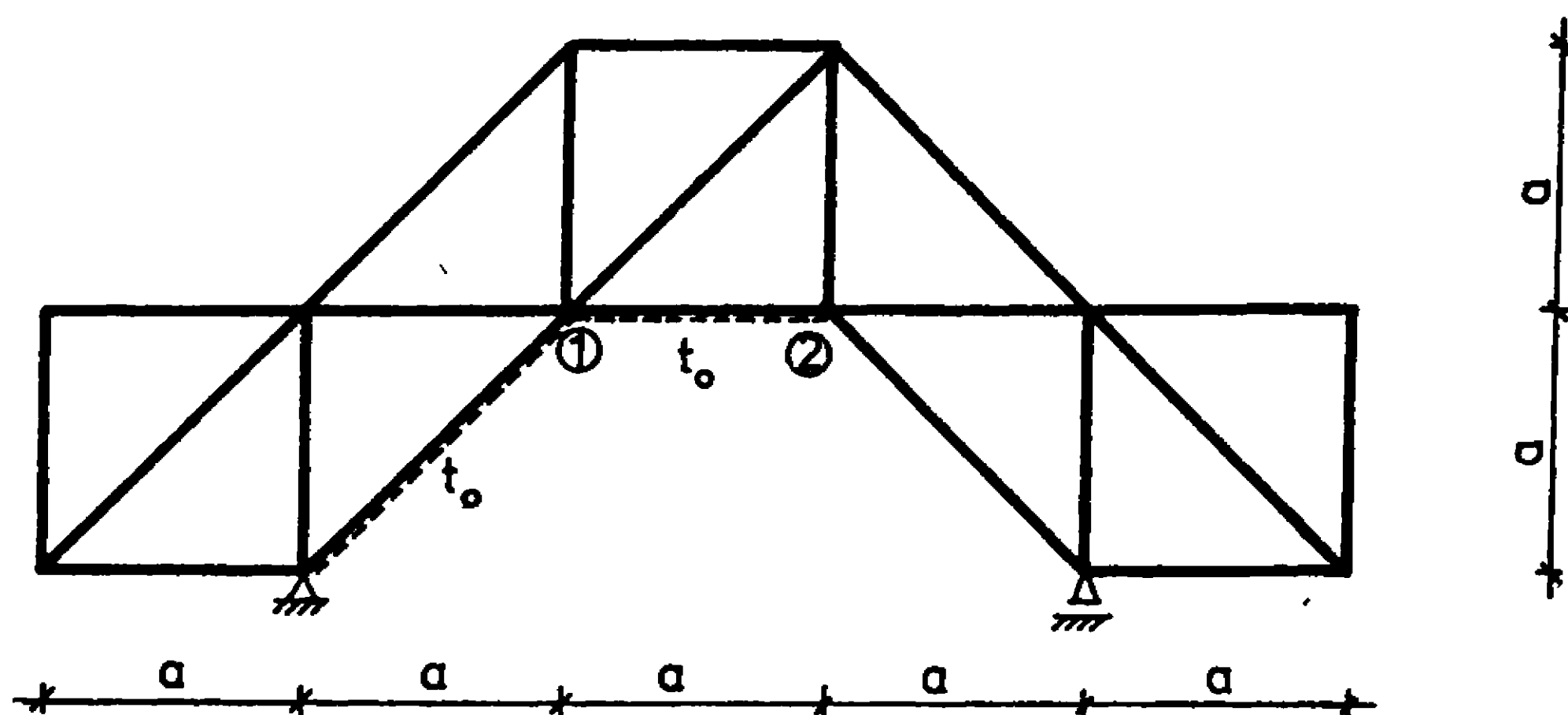
T a b e l a 4.2

Pręt	l_k [m]	A_k [m ²]	N_{ko} [kN]	$\bar{N}_k$ [1]	$\frac{\bar{N}_k N_{ko}}{E A_k} l_k$
D ₁	a	A	2P	-1	-2Pa/EA
D ₂	a	A	2P	-1	-2Pa/EA
D ₃	a	A	0	-1	0
D ₄	a	A	0	-1	0
S ₁	a	A	0	0	0
S ₂	a	A	0	0	0
K ₁	$a\sqrt{2}$	$A \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-2P \sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	-4Pa/EA
K ₂	$a\sqrt{2}$	$A \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-2P/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	2Pa/EA
K ₃	$a\sqrt{2}$	$A \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	0
K ₄	$a\sqrt{2}$	$A \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-1/\sqrt{2}$	0
K ₅	$a\sqrt{2}$	$A \frac{\sqrt{2}}{2}$	$2P/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	-2Pa/EA
K ₆	$a\sqrt{2}$	$A \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	0
K ₇	$a\sqrt{2}$	$A \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-1/\sqrt{2}$	0
K ₈	$a\sqrt{2}$	$A \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	0
					$\Sigma = -8 \frac{Pa}{EA}$

$\Delta_{C-D} = -8 \frac{Pa}{EA}$

Zadanie 4.8

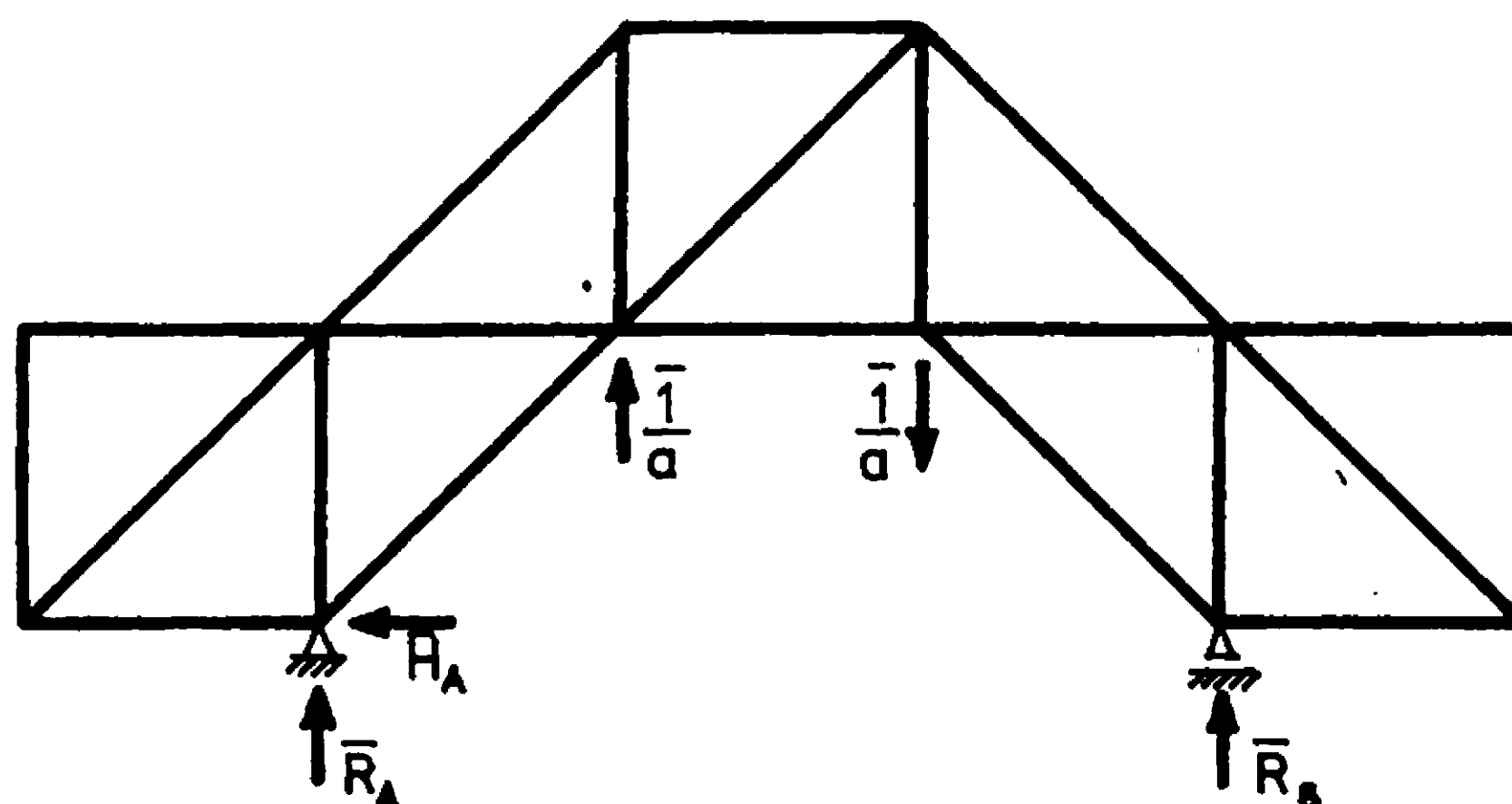
Dla danej kratownicy obciążonej zmianą temperatury t_0 znaleźć kąt obrotu pręta 1-2 (rys. 4.25).



Rys. 4.25

Rozwiązanie

W stanie rzeczywistym siły wewnętrzne dla tego przypadku obciążenia są równe zeru. Jako obciążenie wirtualne przyjmujemy parę sił zaczepionych w węzłach 1 i 2, dających jednostkowy moment.



Rys. 4.26

Obliczenie reakcji w stanie wirtualnym

$$\sum M_A = 0$$

$$\bar{R}_B \cdot 3a - \frac{1}{a} \cdot 2a + \frac{1}{a} \cdot a = 0,$$

$$\bar{R}_B = \frac{1}{3a};$$

$$\sum P_y = 0$$

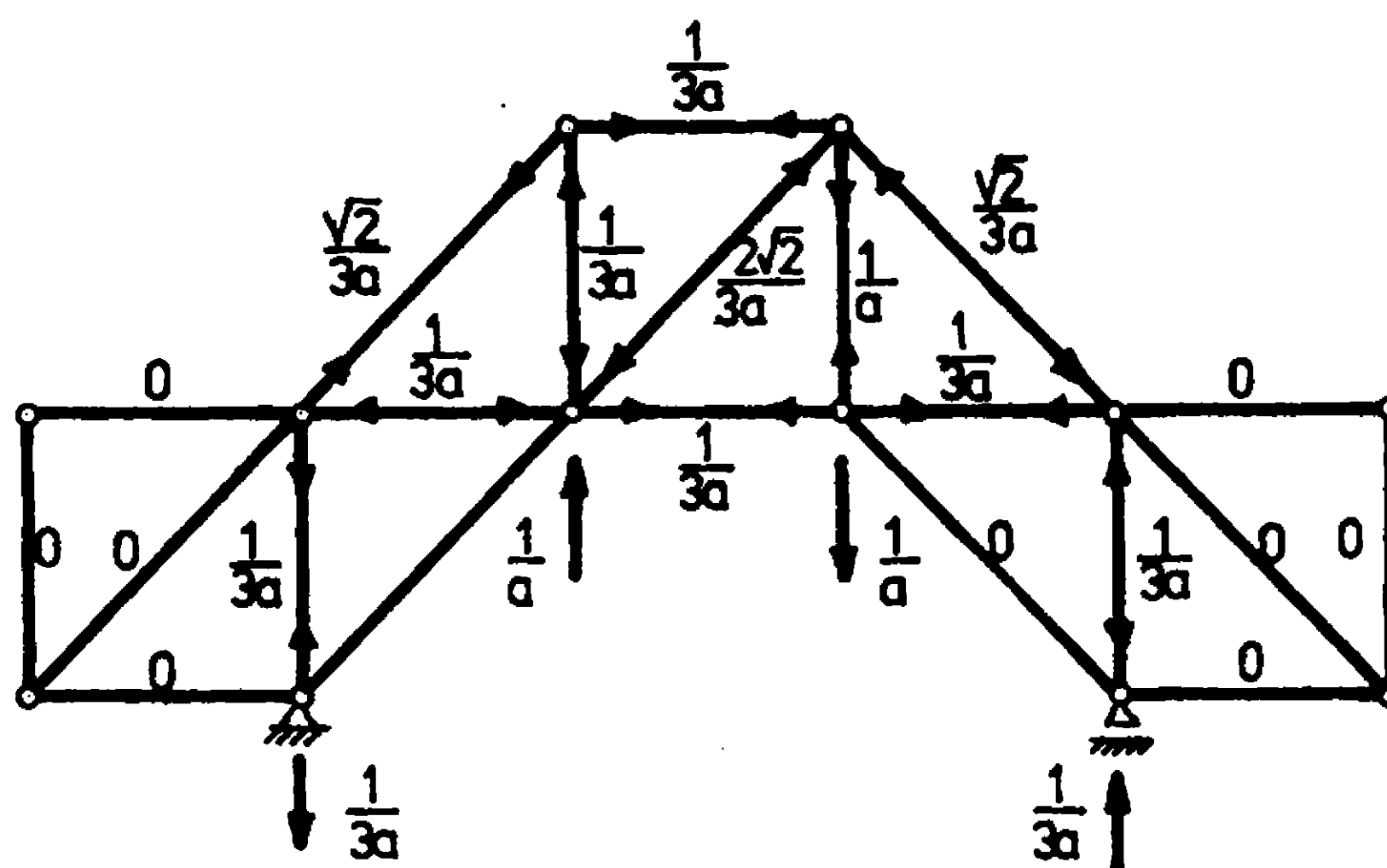
$$\bar{R}_A + \bar{R}_B + \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0,$$

$$\bar{R}_A = -\frac{1}{3a};$$

$$\sum P_x = 0$$

$$\bar{H}_A = 0.$$

Siły w prętach wywołane obciążeniem wirtualnym obliczono metodą równoważenia węzłów.



Rys. 4.27

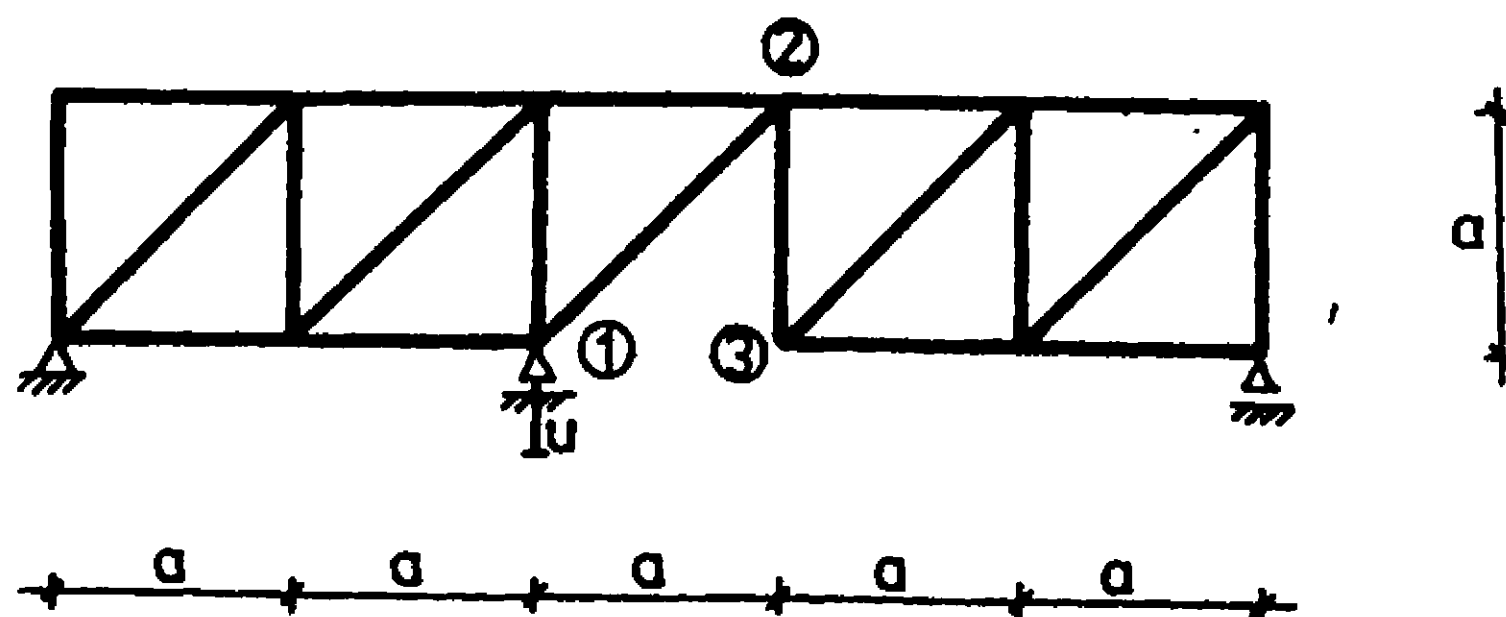
Poszukiwany kąt obrotu jest równy

$$\bar{\varphi}_{1-2} = \sum_{k=1}^n \bar{N}_k (\alpha_{tk} \cdot t_k \cdot l_k) = \frac{1}{3a} \cdot \alpha_t \cdot t_0 \cdot a +$$

$$+ 0 \cdot \alpha_t \cdot t_0 \cdot a \sqrt{2} = \frac{\alpha_t \cdot t_0}{3} [\text{rd}],$$

Zadanie 4.9

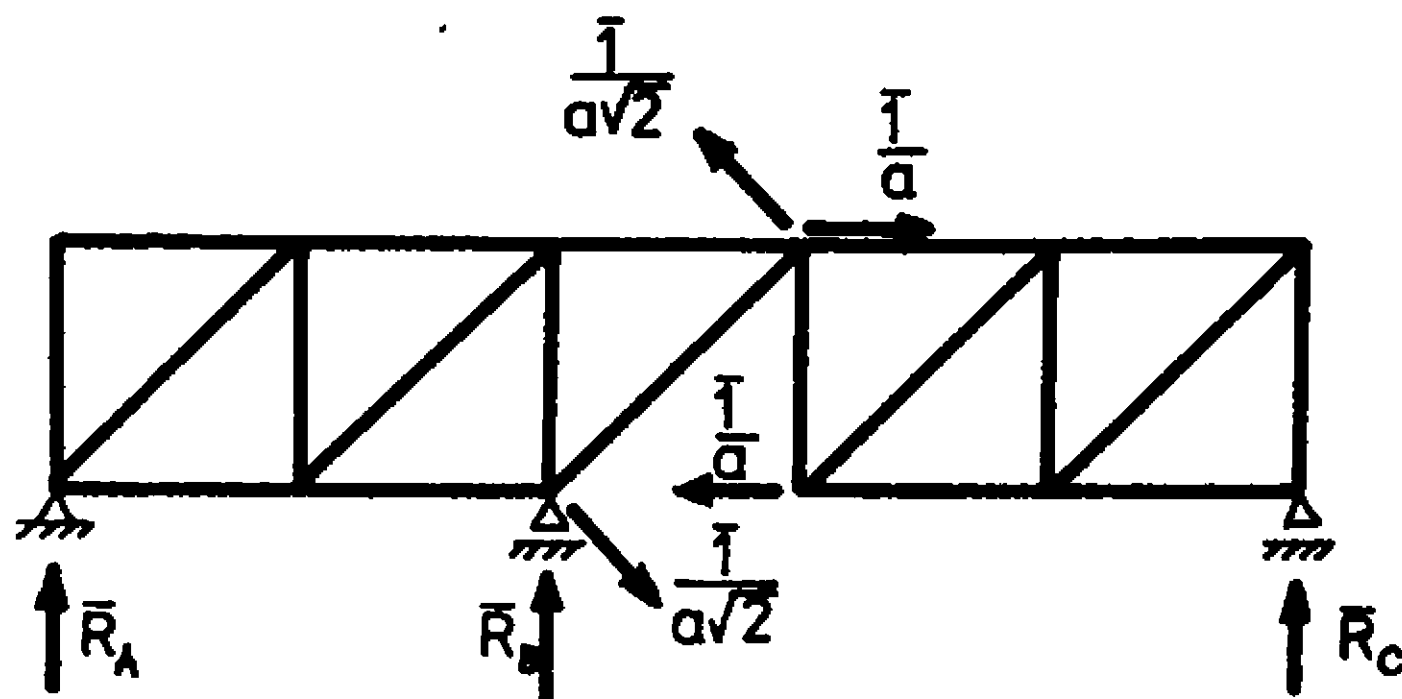
Dla danej kratownicy obciążonej kinematycznie znaleźć zmianę kąta między prętami 1-2 i 2-3 (rys. 4.28).



Rys. 4.28

Rozwiązanie

W stanie rzeczywistym siły wewnętrzne w prętach kratownicy, przy obciążeniu kinematycznym, są równe zero. Jako obciążenie wirtualne przyjmujemy dwie pary sił zaczepionych w punktach 1, 2, 3, dających parę jednostkowych momentów (rys. 4.29).



Rys. 4.29

Obliczenie reakcji w stanie wirtualnym

$$\sum M_2^D = 0$$

$$\bar{R}_C \cdot 2a - \frac{1}{a} a = 0,$$

$$\bar{R}_C = \frac{1}{2a};$$

$$\sum M_A = 0$$

$$\bar{R}_B \cdot 2a + \bar{R}_C \cdot 5a + 1 - 1 = 0,$$

$$\bar{R}_B = -\frac{5}{4a};$$

$$\sum P_y = 0$$

$$\bar{R}_A + \bar{R}_B + \bar{R}_C = 0,$$

$$\bar{R}_A = \frac{1}{4a}.$$

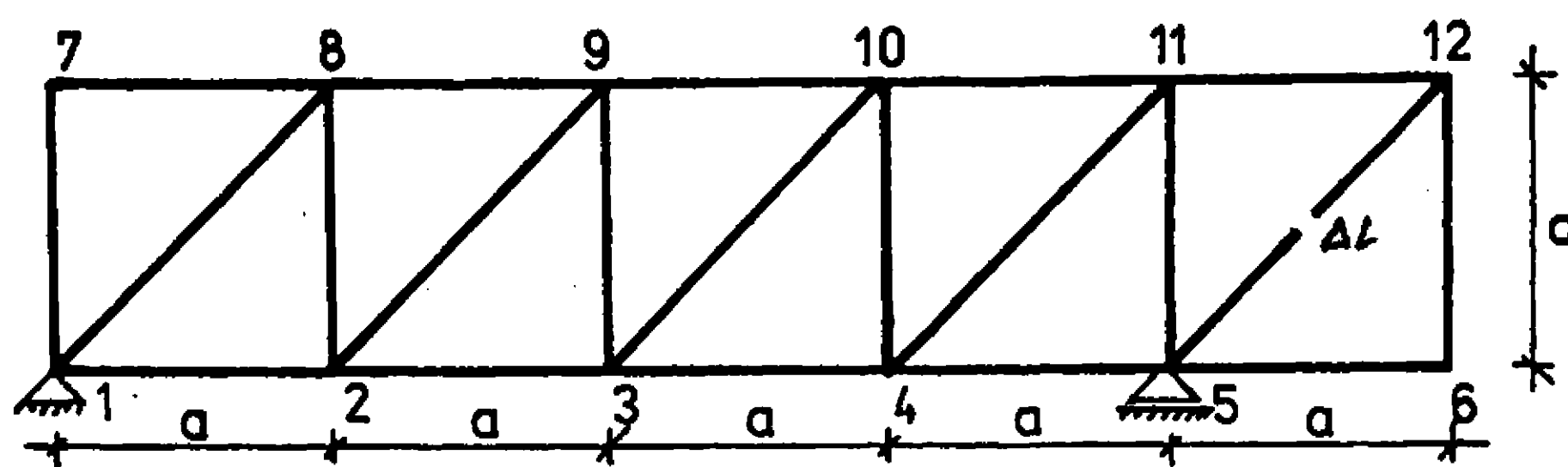
Poszukiwana zmiana kąta jest równa

$$\bar{1} \cdot \Delta \varphi_{1-2,2-3} + \sum \bar{D}_i U_i = 0,$$

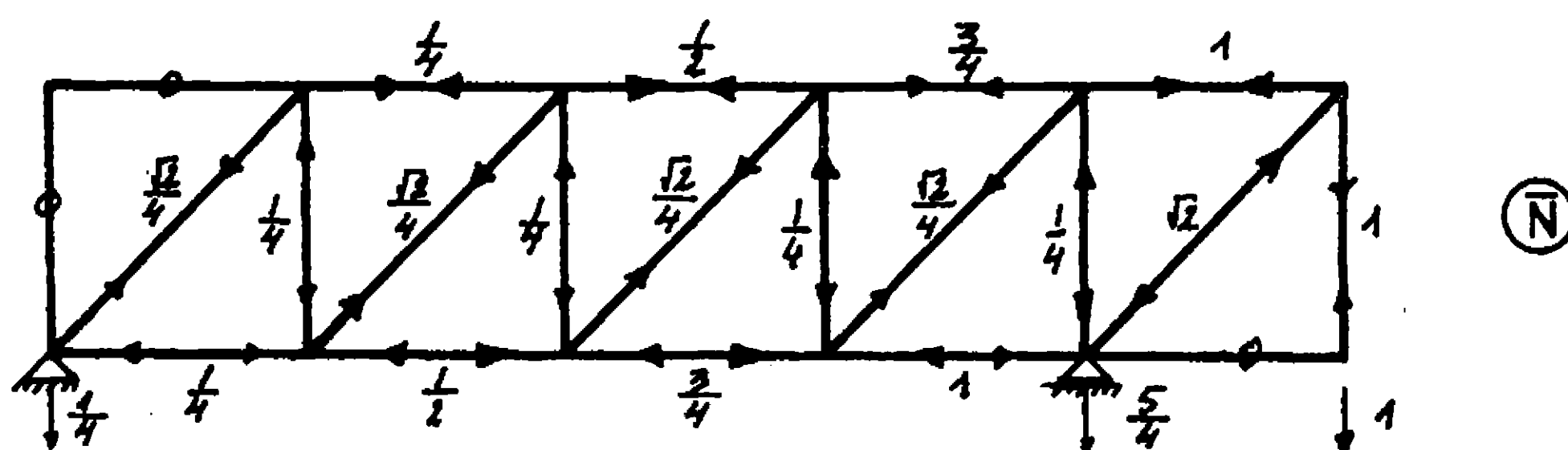
$$\Delta \varphi_{1-2,2-3} = - \left(-\frac{5}{4a} \right) u = \frac{5u}{4a}.$$

Zadanie 4.10

Dla kratownicy podanej na (rys. 4.31) znaleźć przemieszczenie pionowe punktu 6. Kratownica jest obciążona błędem montażowym, pręt 5-12 jest o Δl za krótki.



Rys. 4.30



Rys. 4.31

Rozwiązanie

Obciążenie wirtualne zakładamy w postaci siły jednostkowej przyłożonej w punkcie 6 w kierunku poszukiwanego przemieszczenia (rys. 4.31). Siły normalne w prętach kratownicy wywołane obciążeniem wirtualnym są podane na rysunku 4.31.

Ponieważ obciążenie kinematyczne nie wywołuje sił wewnętrznych w układzie statycznie wyznaczalnym, równanie pracy sił wirtualnych ma postać

$$\bar{1} \cdot \delta_{6v} = \sum_{i=1}^n (\bar{N} \cdot \Delta l)_i,$$

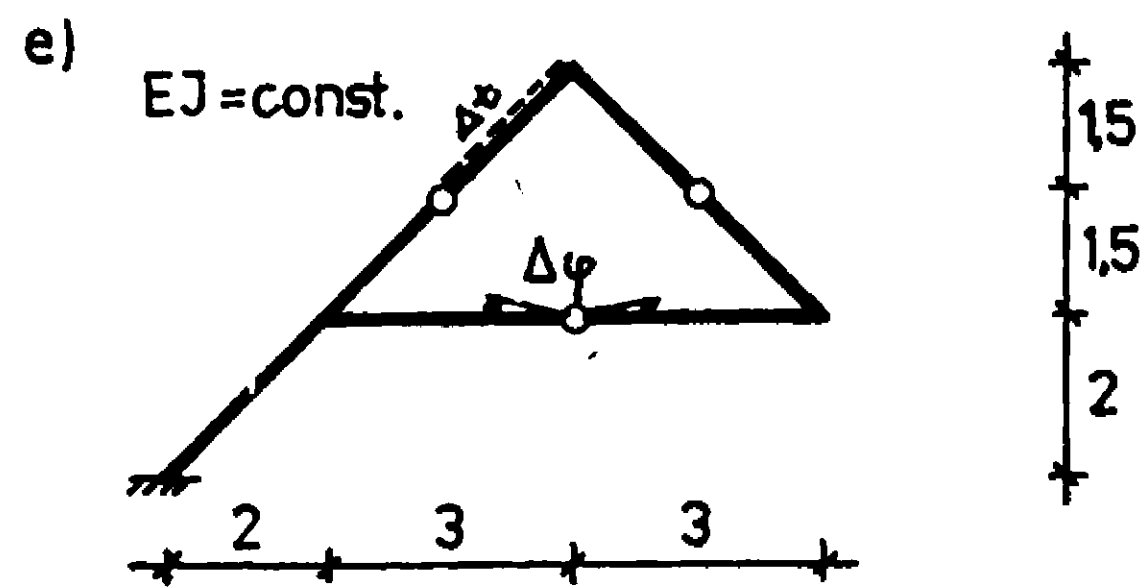
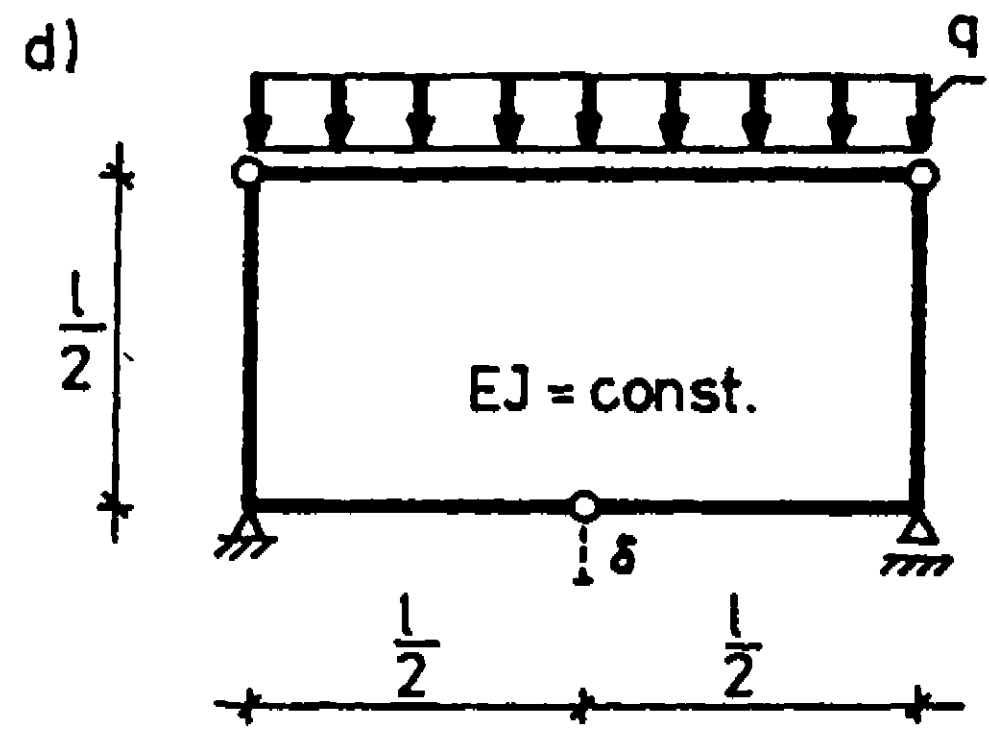
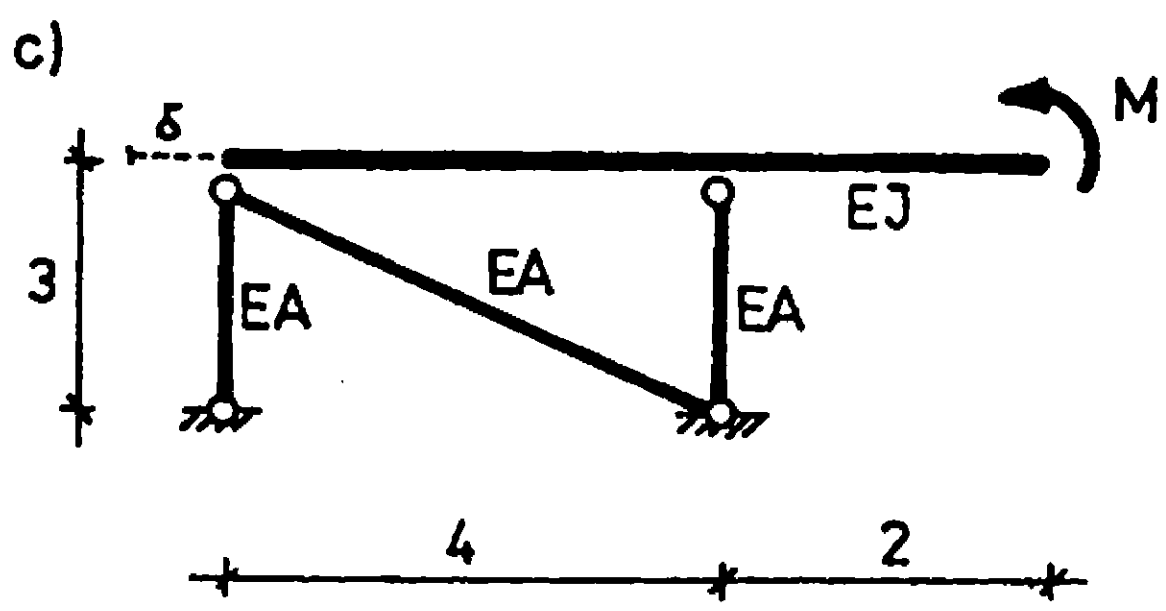
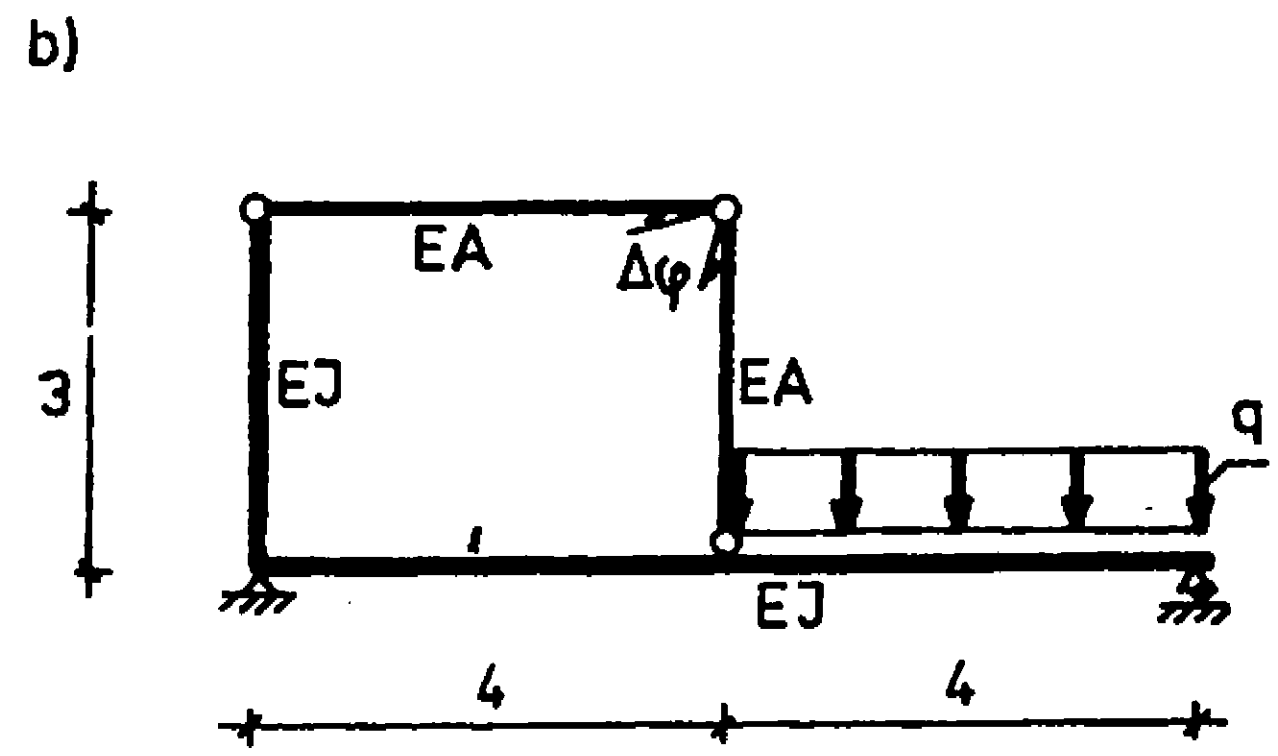
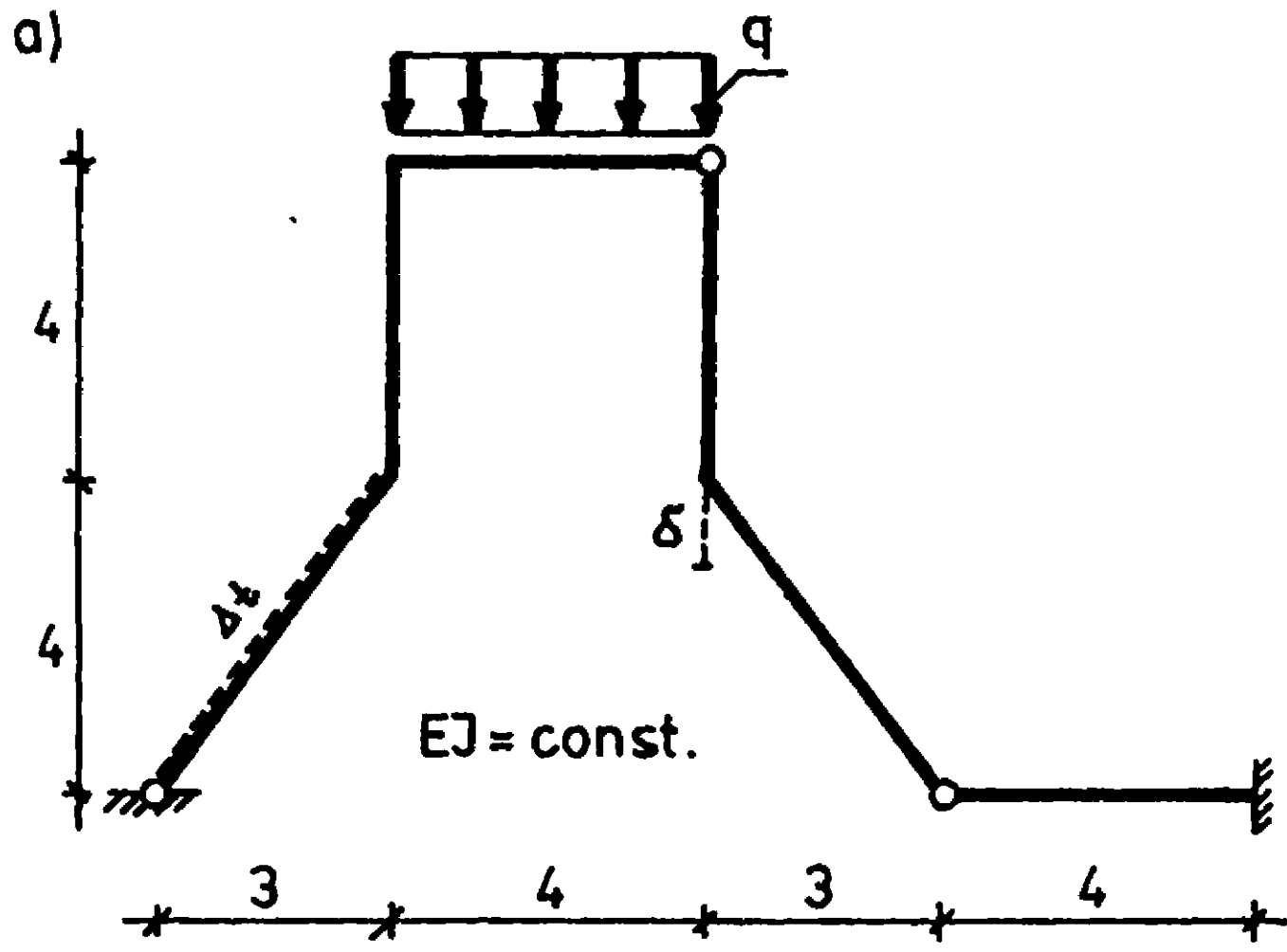
stąd poszukiwane przemieszczenie

$$\bar{1} \cdot \delta_{6v} = -\sqrt{2} \cdot (-\Delta l) = \sqrt{2} \cdot \Delta l.$$

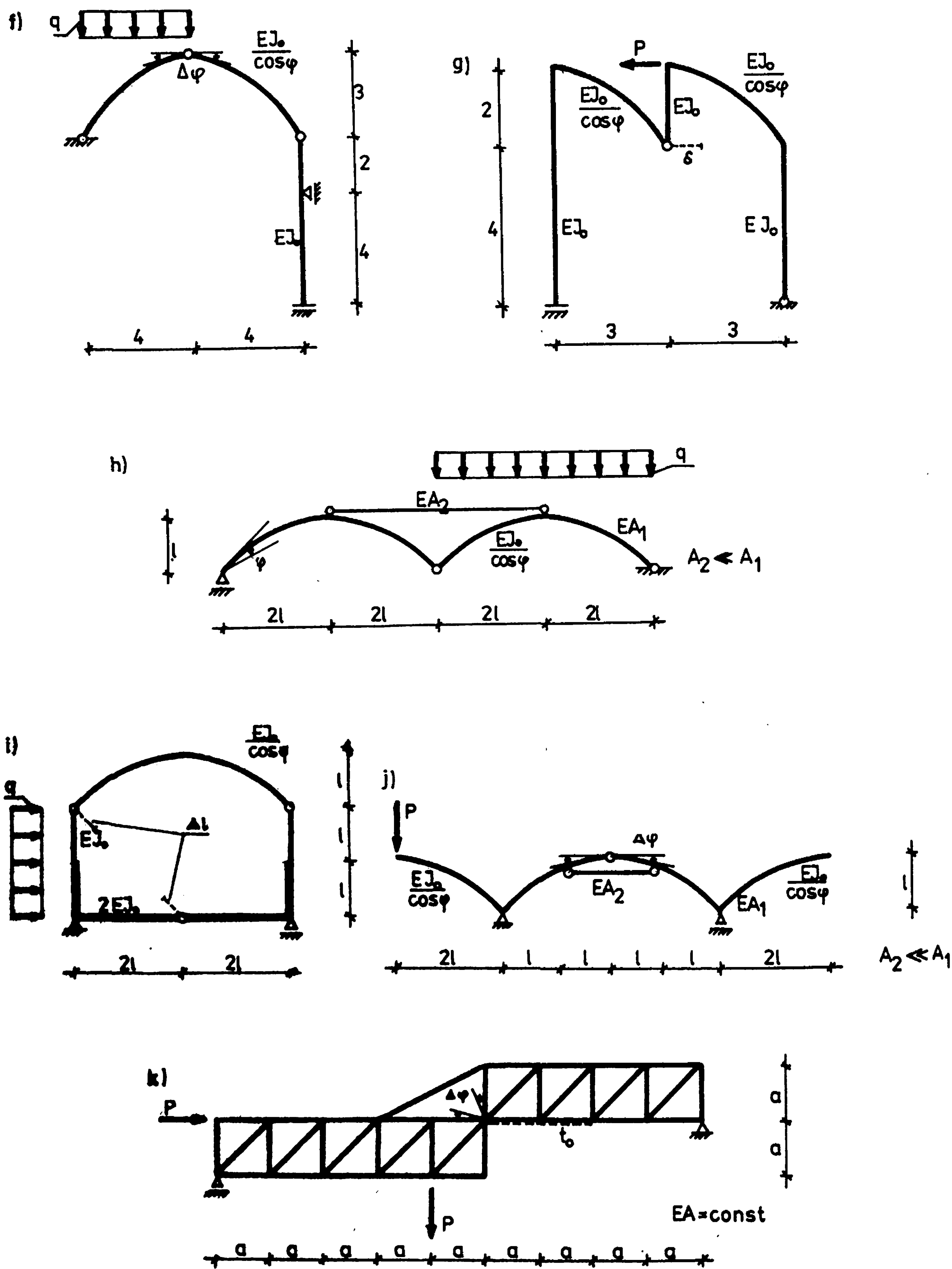
Zadanie 4.11

Dla podanych układów prętowych przy danym obciążeniu obliczyć zaznaczone przemieszczenia (rys. 4.32a-k).

Rozwiązanie - samodzielne



Rys. 4.32a-e



Rys. 4.32 f-k

5. WYZNACZANIE PRZEMIESZCZEŃ W DŹWIGARACH ZAKRZYWIONYCH I ZAŁAMANYCH W PLANIE

Przy wyznaczaniu przemieszczeń korzystać będziemy z równania prac wirtualnych dla rzeczywistego stanu przemieszczeń i wirtualnego stanu obciążeń. Równanie to ma następującą postać

$$\begin{aligned} \Sigma \bar{P} \delta + \Sigma \bar{M}_s \varphi + \Sigma \bar{D} \Delta = \\ = \int_s \left[\bar{M} \left(\frac{M}{EJ} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \right) + \frac{\bar{M}_s M_s}{GC} + \kappa \frac{\bar{T} T}{GA} \right] dS. \end{aligned}$$

W równaniu tym oprócz dotychczas poznanych sił wewnętrznych występuje jeszcze jedna siła - moment skręcający M_s .

Wartość C dla przekroju prostokątnego o wysokości h i szerokości b oraz dla $n = \frac{h}{b} > 1$ wyznaczmy ze wzoru C. Webera

$$C = \frac{b^4}{3} \left(n - 0,63 + \frac{0,052}{n^4} \right).$$

Dla przekroju kołowego C jest identyczne z biegunowym momentem bezwładności

$$C = J_o = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Przy wyprowadzeniu związków między obciążeniami a siłami wewnętrznymi przyjęto dodatnie zwroty działających sił jak na rysunku 5.1. Rzutując wektory momentów na kierunki osi s i y oraz rzutując siły na kierunek osi z , otrzymamy równania równowagi elementu o długości dS zakrzywionego w planie i obciążonego prostopadle do jego płaszczyzny (rys. 5.1). Równania te są następujące:

$$\frac{dM}{dS} - \frac{M_s}{\rho} - T = 0,$$

$$\frac{dM_s}{dS} + \frac{M}{\rho} = 0,$$

$$\frac{dT}{dS} + q = 0.$$

Trzy powyższe równania pozwolą nam rozwiązać szereg zadań z belek zakrzywionych w płanie. W skrypcie tym, zadania będą dotyczyły tylko belek kołowych.

Przyjmując $q = \text{const}$, $\varrho = r$, rozwiązaniem powyższego układu równań będzie

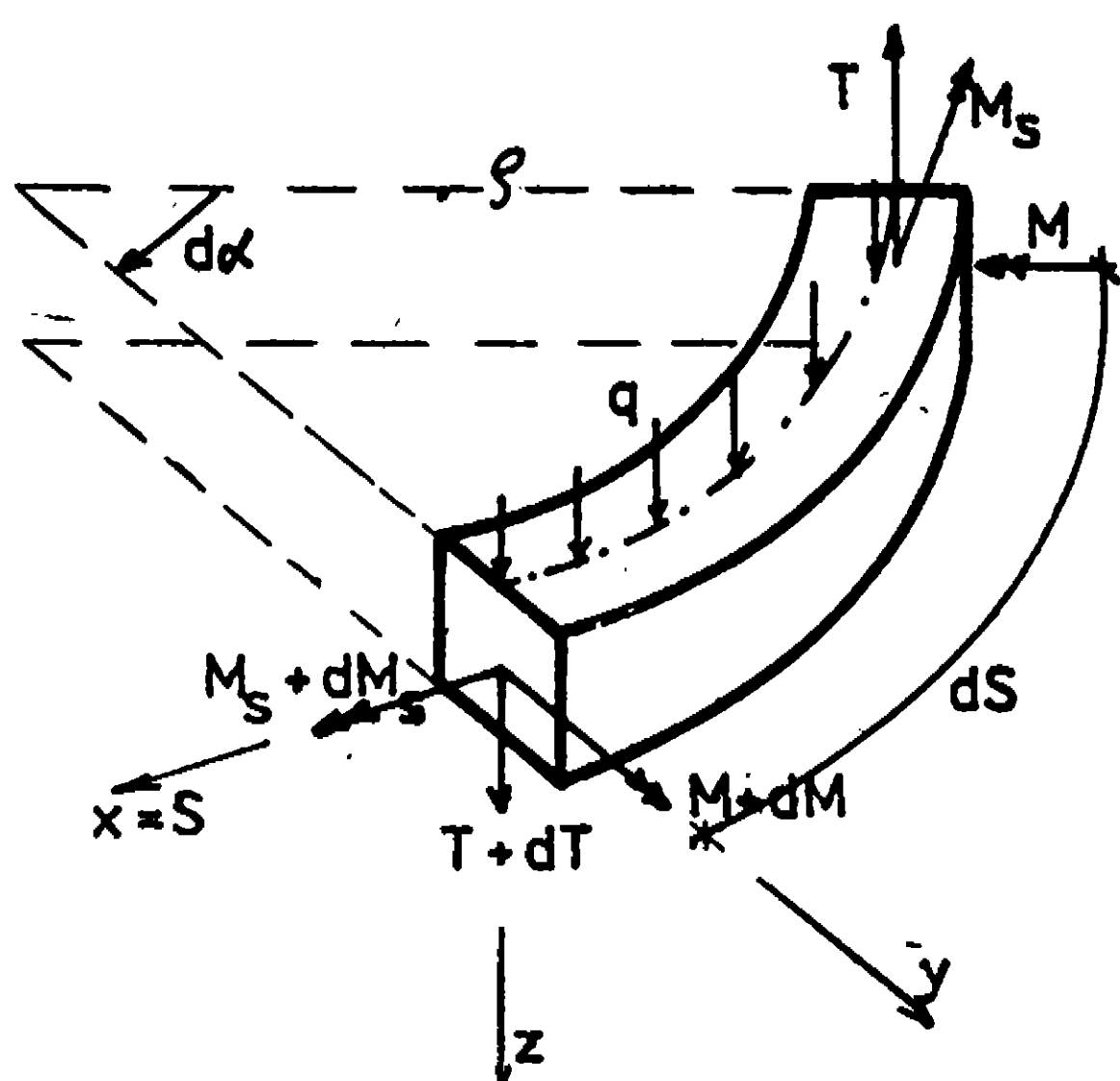
$$M = A \sin \alpha + B \cos \alpha - qr^2,$$

$$M_s = A \cos \alpha - B \sin \alpha + qr^2 \alpha + C,$$

$$T = -qr\alpha - \frac{C}{r}.$$

Stałe całkowania A, B, C wyznaczymy z warunków brzegowych.

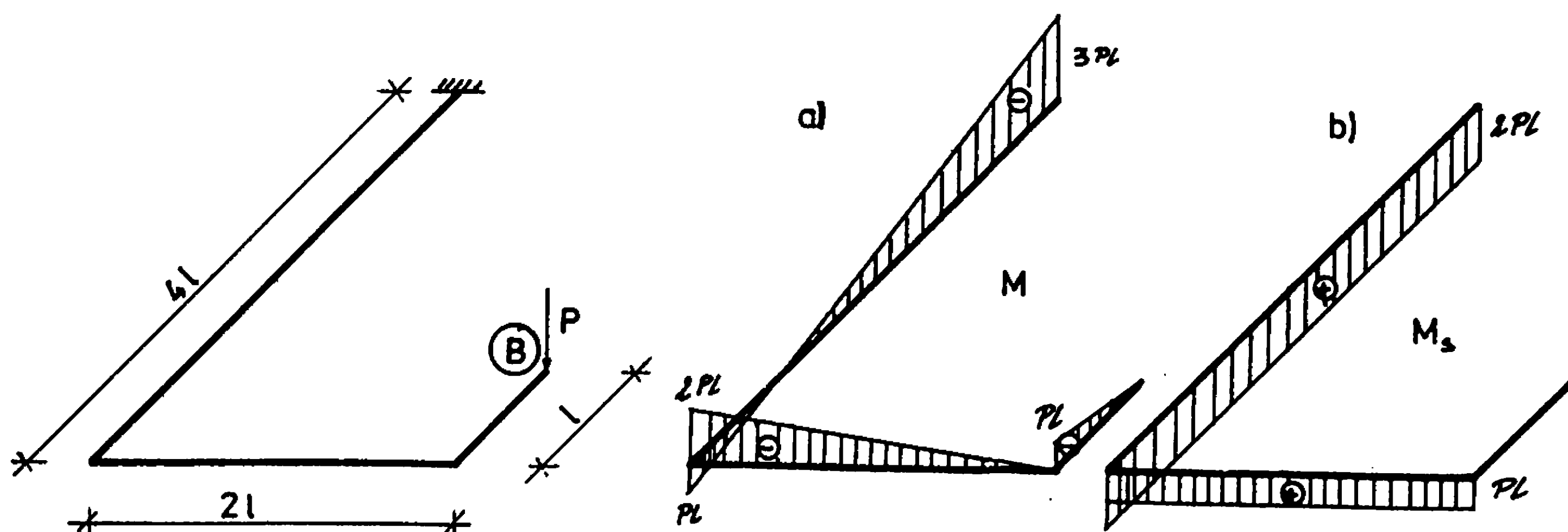
Wpływ sił poprzecznych na wielkości przemieszczeń jest niewielki, zatem zostanie pominięty.



Rys. 5.1

Zadanie 5.1

Dla danego dźwigara załamanego w płanie wyznaczyć: a) przemieszczenie pionowe punktu B, b) kąt skręcenia przekroju w punkcie B. Wykresy momentów zginających i skręcających od obciążenia zewnętrznego przedstawiono na rysunku 5.2.



Rys. 5.2

Rozwiązanie

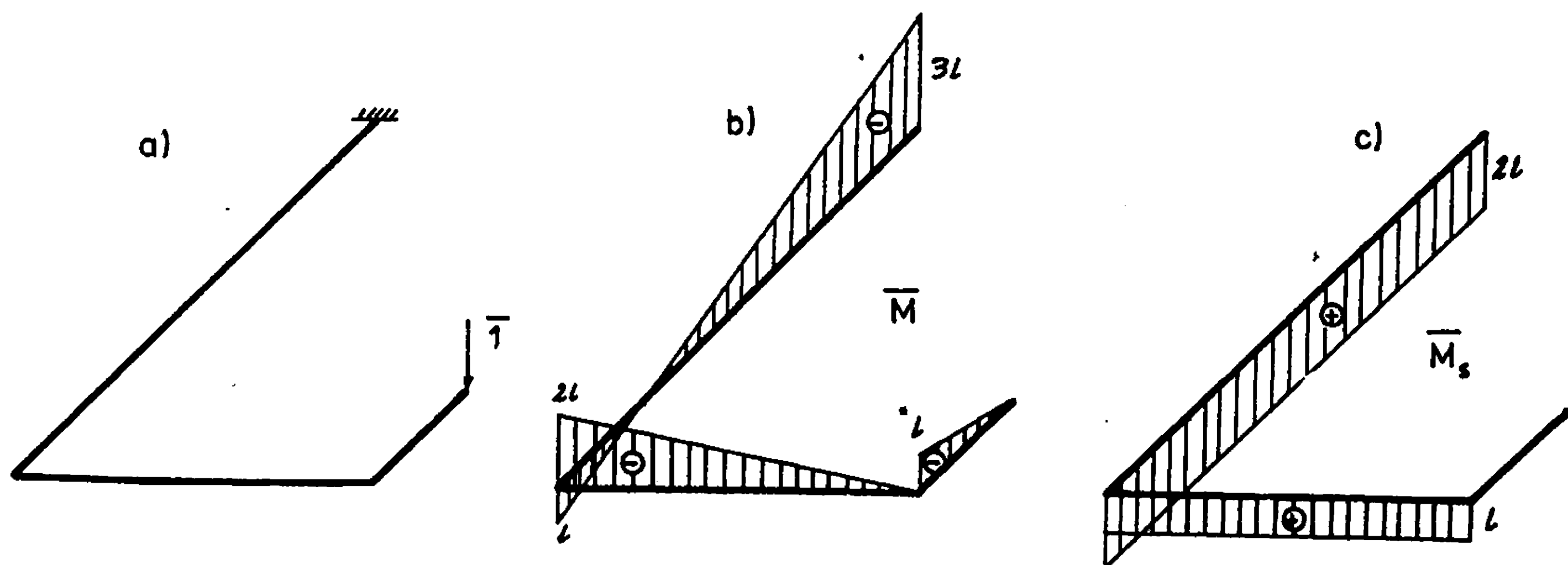
W celu znalezienia przemieszczenia pionowego punktu B zakładamy w tym punkcie jednostkową siłę wirtualną o kierunku pionowym. Wykresy

wirtualnych momentów zginających i skręcających pokazano na rysunku 5.3b,c. Całkując wykresy momentów zginających i skręcających od obciążenia zewnętrznego (rys. 5.2) z wirtualnymi momentami zginającymi i skręcającymi (rys. 5.3) otrzymamy

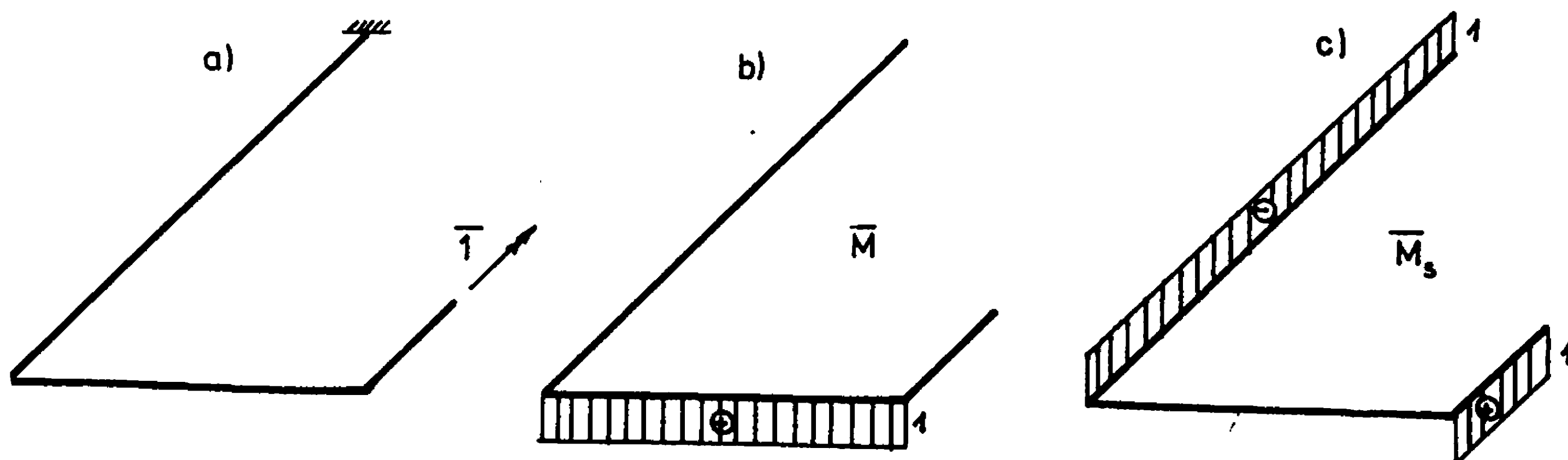
$$\begin{aligned} \delta_B &= \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{3} P l l l + \frac{1}{3} 2 \cdot P l \cdot 2 l \cdot 2l + \frac{1}{3} P l l l + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{3} 3Pl \cdot 3l \cdot 3l \right) + \frac{1}{GC} (Pl \cdot 2l \cdot 1 + 2Pl \cdot 4l \cdot 2l) = \frac{37}{3} \frac{Pl^3}{EJ} + \\ &+ \frac{18}{GC} Pl^3 = \frac{Pl^3}{EJ} \left(\frac{37}{3} + \frac{EJ}{GC} 18 \right) = \frac{Pl^3}{EJ} \left(\frac{37}{3} + 18\varphi \right) [m], \end{aligned}$$

gdzie $\varphi = \frac{EJ}{GC}$.

Aby znaleźć kąt skręcenia przekroju w punkcie B jako obciążenie wirtualne przyjmujemy jednostkowy moment skręcający (rys. 5.4a).



Rys. 5.3



Rys. 5.4

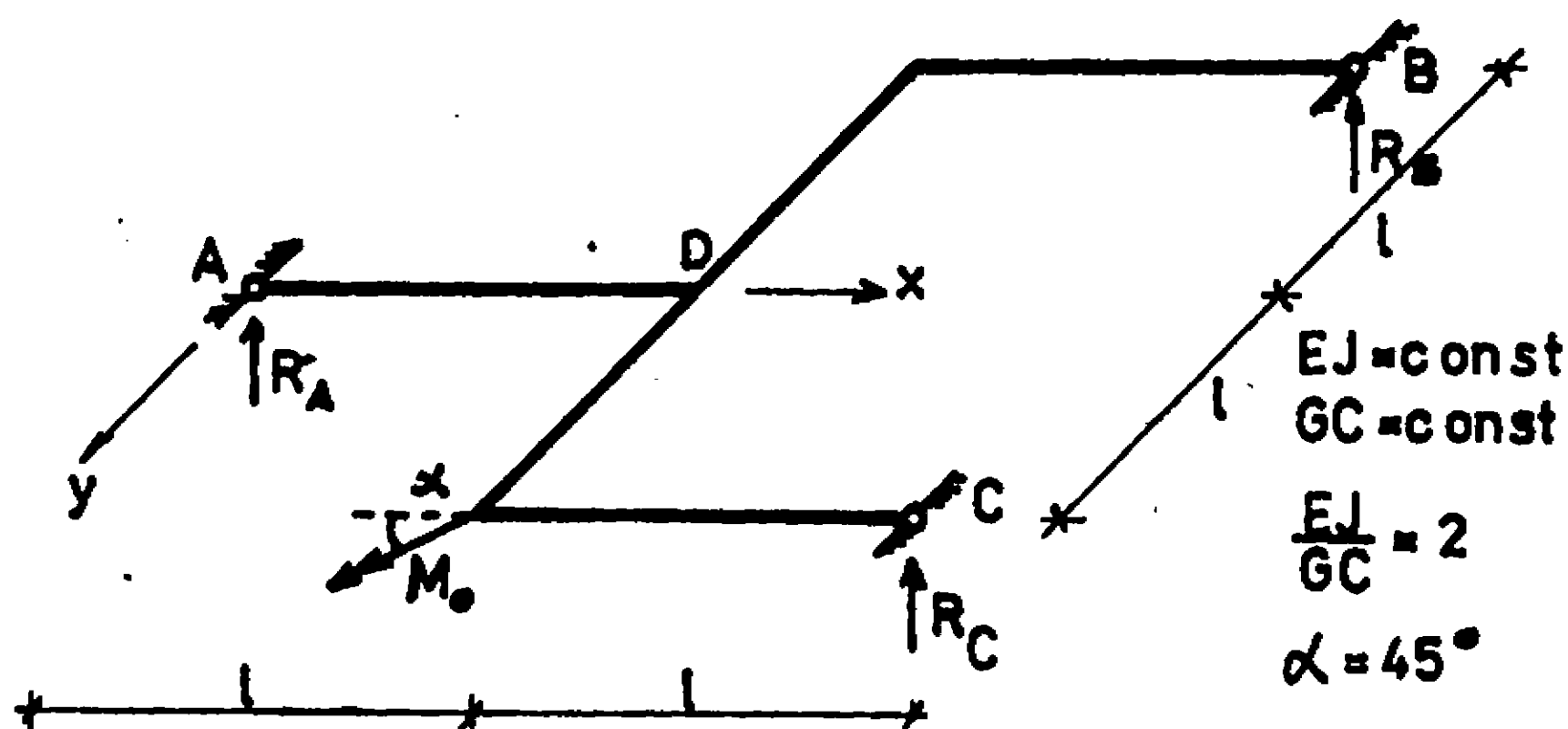
Natomiast na rysunku 5.4b,c pokazano wykresy wirtualnych momentów zginających i skręcających.

Całkując powyższe wykresy z wykresami momentów zginających i skręcających od obciążenia zewnętrznego (rys. 5.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\psi_B &= -\frac{1}{EJ} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2Pl \cdot l^2 \cdot 1 - \frac{1}{GC} 2Pl \cdot 4l \cdot 1 = \\ &= -\frac{2Pl^2}{EJ} \left(1 + \frac{4EJ}{GC}\right) = -\frac{2Pl^2}{EJ} (1 + 4\varphi) [\text{rad}].\end{aligned}$$

Zadanie 5.2

Dla danego dźwigara załamane w planie, przy danym obciążeniu, wyznaczyć przemieszczenie pionowe w punkcie D (rys. 5.5).



Rys. 5.5

Rozwiązanie

Obliczenie reakcji podporowych

$$\sum Z = 0$$

$$R_C + R_B - R_A = 0,$$

$$\sum M_x = 0$$

$$R_C l - R_B l - M_0 \cos \alpha = 0,$$

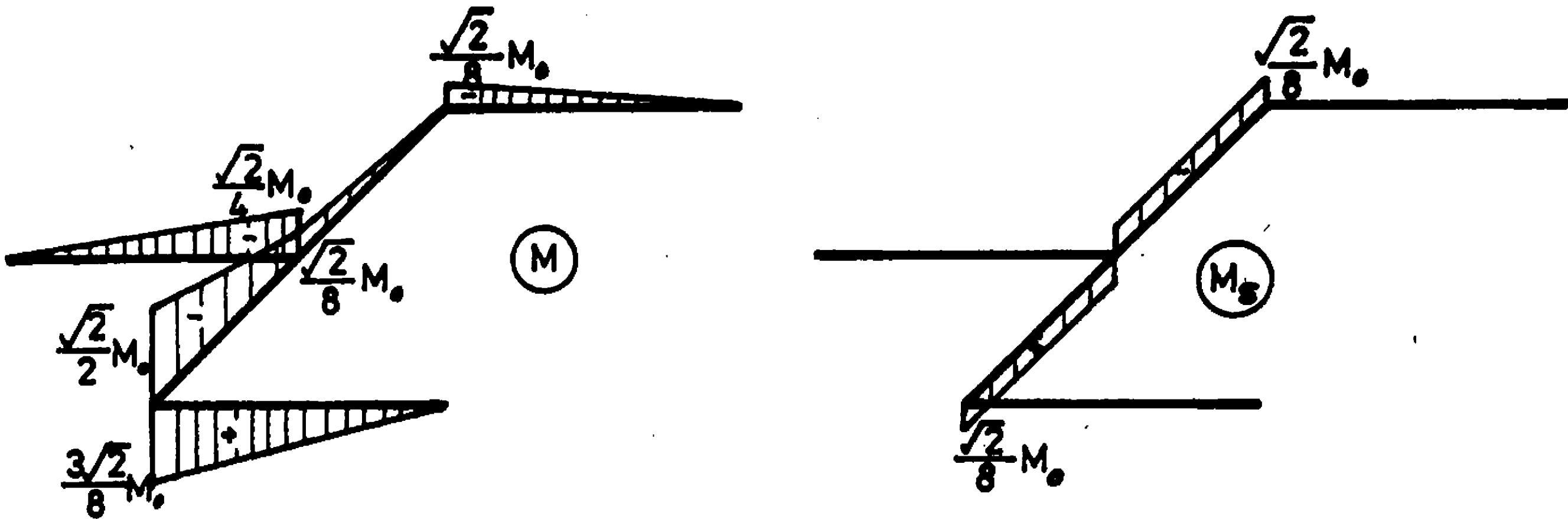
$$\sum M_y = 0$$

$$-R_C 2l - R_B 2l + M_0 \sin \alpha = 0.$$

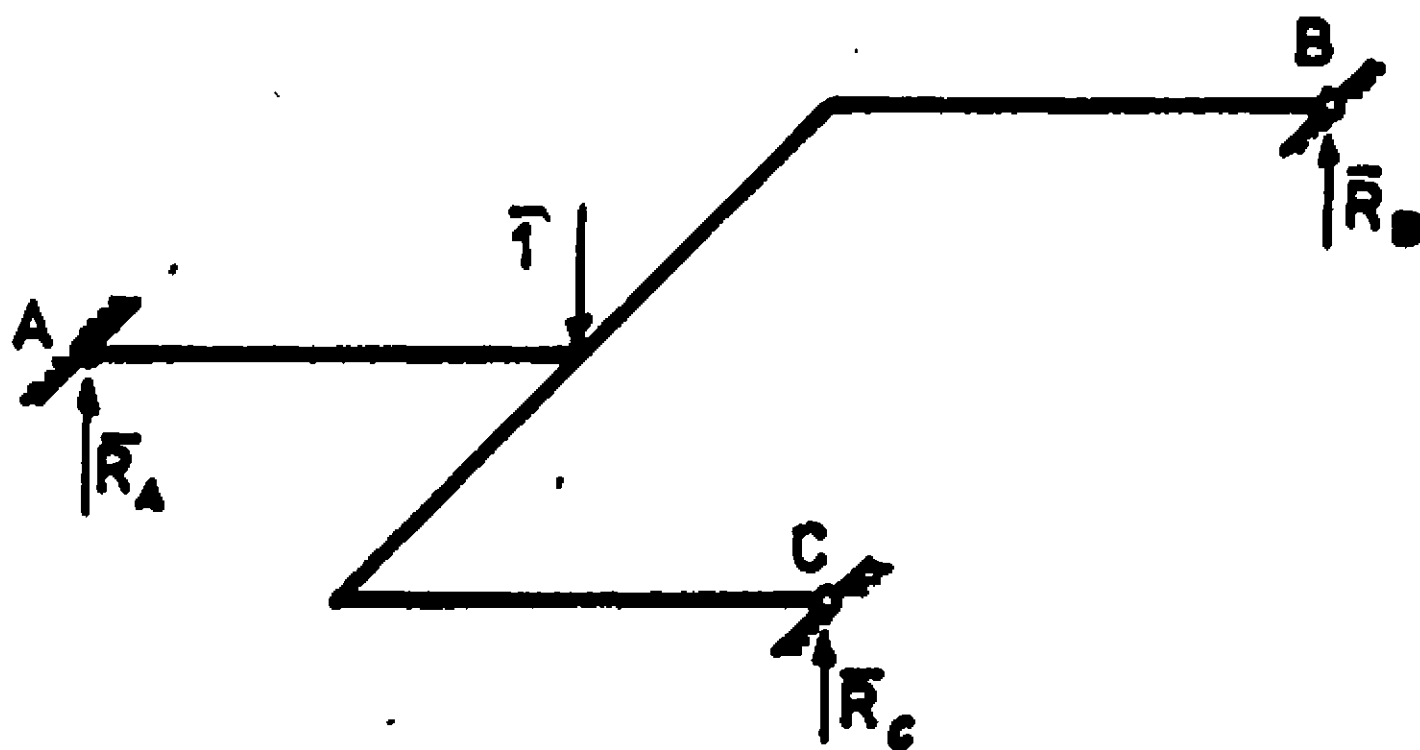
Po rozwiązaniu powyższego układu otrzymujemy

$$R_A = \frac{2}{4} \frac{M_0}{l}, \quad R_B = -\frac{2}{8} \frac{M_0}{l}, \quad R_C = \frac{3 \cdot 2}{8} \frac{M_0}{l}.$$

Wykresy momentów zginających "M" i skręcających "M_s" od obciążenia zewnętrznego przedstawiono na rysunku 5.6.



Rys. 5.6



Rys. 5.7

W celu znalezienia przemieszczenia pionowego w punkcie D należy założyć w tym punkcie jednostkową siłę wirtualną o kierunku pionowym.

Obliczenie reakcji wirtualnych

$$\sum Z = 0$$

$$\bar{R}_A + \bar{R}_B + \bar{R}_C = 1,$$

$$\sum M_x = 0$$

$$\bar{R}_C \cdot 1 - \bar{R}_B \cdot 1 = 0,$$

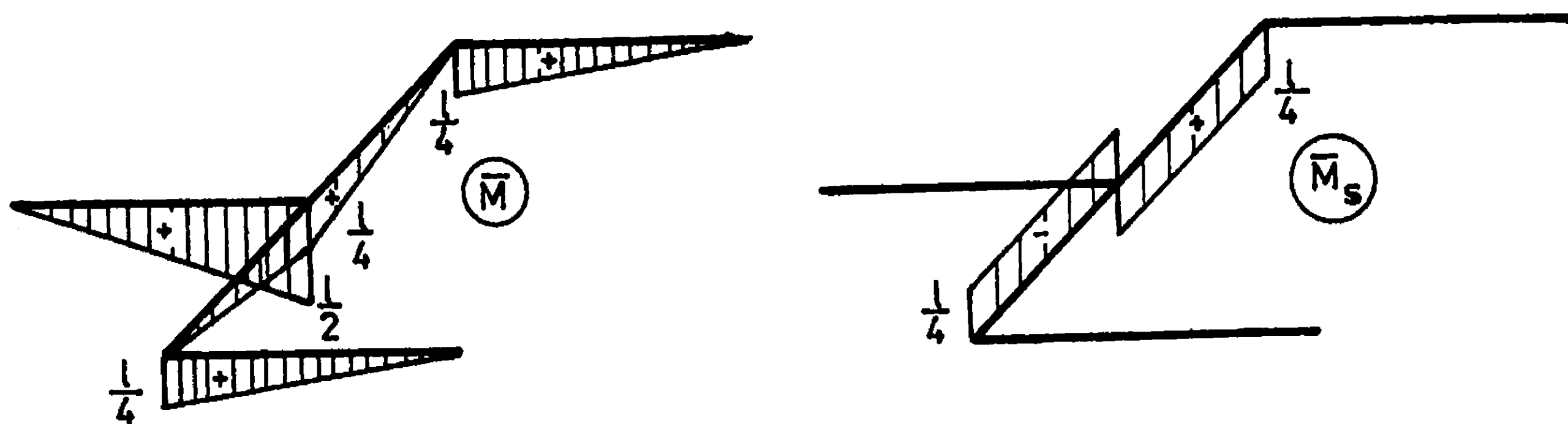
$$\sum M_y = 0$$

$$-\bar{R}_C \cdot 21 - \bar{R}_B \cdot 21 + 1 = 0.$$

Z rozwiązania tego układu otrzymujemy:

$$\bar{R}_A = \frac{1}{2}, \quad \bar{R}_B = \frac{1}{4}, \quad \bar{R}_C = \frac{1}{4}.$$

Wykresy wirtualnych momentów zginających "M" i wirtualnych momentów skręcających "M_s" przedstawiono na rysunku 5.8.



Rys. 5.8.

Całkując wykresy momentów zginających i momentów skręcających od obciążenia czynnego i wirtualnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} \delta_D = & -\frac{1}{EJ} \frac{1}{4} \frac{M_0 \sqrt{2}}{8} l \frac{1}{3} + \frac{1}{EJ} \frac{1}{4} \frac{3\sqrt{2}}{8} M_0 l \frac{1}{3} - \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{4} M_0 l \frac{1}{3} + \\ & -\frac{1}{EJ} \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}}{8} M_0 l \frac{1}{3} - \frac{1}{EJ} \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}}{8} M_0 l \frac{1}{3} - \frac{1}{EJ} \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} M_0 l \frac{1}{6} + \\ & -\frac{1}{GC} \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}}{8} M_0 l : 2 = -\frac{\sqrt{2}}{16} \frac{M_0 l^2}{EJ} - \frac{\sqrt{2}}{16} \frac{M_0 l^2}{GC}. \end{aligned}$$

Dla $\frac{EJ}{GC} = 2$ mamy

$$\delta_D = -\frac{3\sqrt{2}}{16} \cdot \frac{M_0 l^2}{EJ} \quad [\text{m}].$$

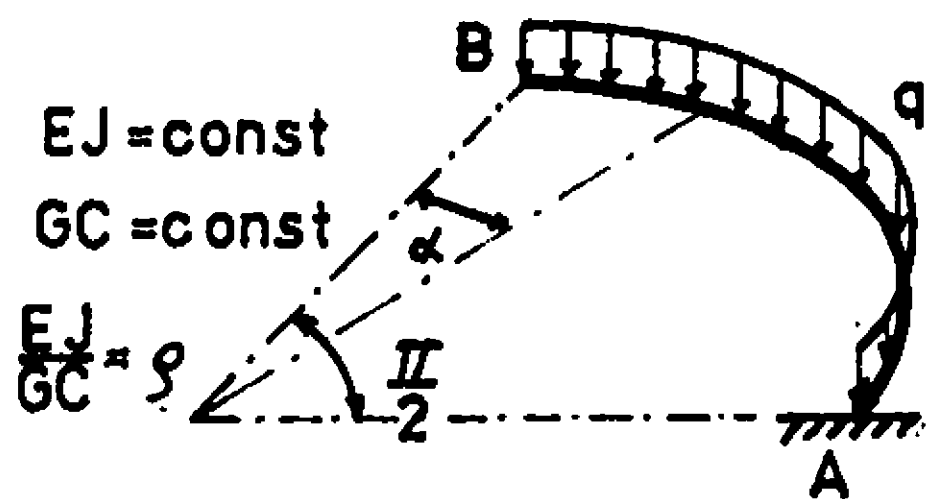
Znak „-” wskazuje na to, że przemieszczenie δ_D wywołane momentem M_0 następuje w kierunku przeciwnym aniżeli założona wirtualna siła jednostkowa.

Zadanie 5.3

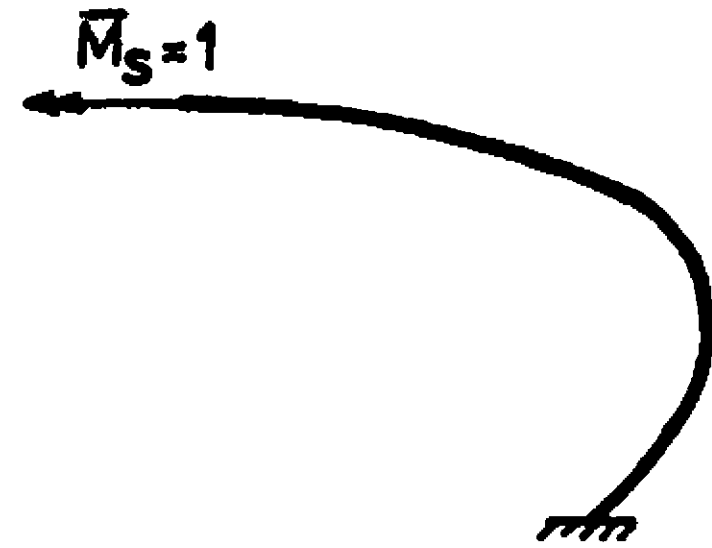
Dla danego dźwigara zakrzywionego w płanie, przy danym obciążeniu wyznaczyć kąt skręcania ψ przekroju B (rys. 5.9).

Rozwiązanie

Dla przekroju $\alpha = 0$ jest $M(0) = 0$, $M_s(0) = 0$, $T(0) = 0$. Z powyższych warunków brzegowych obliczymy stałe A, B, C. Wynoszą one: $A = 0$, $B = qr^2$, $C = 0$, stąd: $M = -qr^2(1 - \cos\alpha)$, $M_s = qr^2(\alpha - \sin\alpha)$. Jako obciążenie wirtualne przyjmujemy moment $\bar{M}_s = 1$ w punkcie B (rys. 5.10).



Rys. 5.9



Rys. 5.10

Dla przekroju $\alpha = 0$ jest $\bar{M}(0) = 0$, $\bar{M}_s(0) = 1$, $\bar{T}(0) = 0$. Z powyższych warunków brzegowych otrzymamy $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, stąd $\bar{M} = 1 \sin \alpha$, $\bar{M}_s = 1 \cos \alpha$.

Kąt skręcenia ψ_B znajdziemy ze wzoru

$$\begin{aligned} \psi_B &= \int_s \frac{\bar{M}\bar{M}}{EJ} dS + \int_s \frac{\bar{M}_s \bar{M}_s}{GC} dS = - \frac{qr^3}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \alpha - 0,5 \sin 2\alpha) d\alpha + \\ &+ \frac{qr^3}{GC} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\alpha \cos \alpha - 0,5 \sin 2\alpha) d\alpha = - \frac{qr^3}{EJ} \frac{1}{2} + \frac{qr^3}{GC} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \right) = \\ &= \frac{qr^3}{2EJ} (-1 - 3\varrho + \pi\varrho) \quad [\text{rad}]. \end{aligned}$$

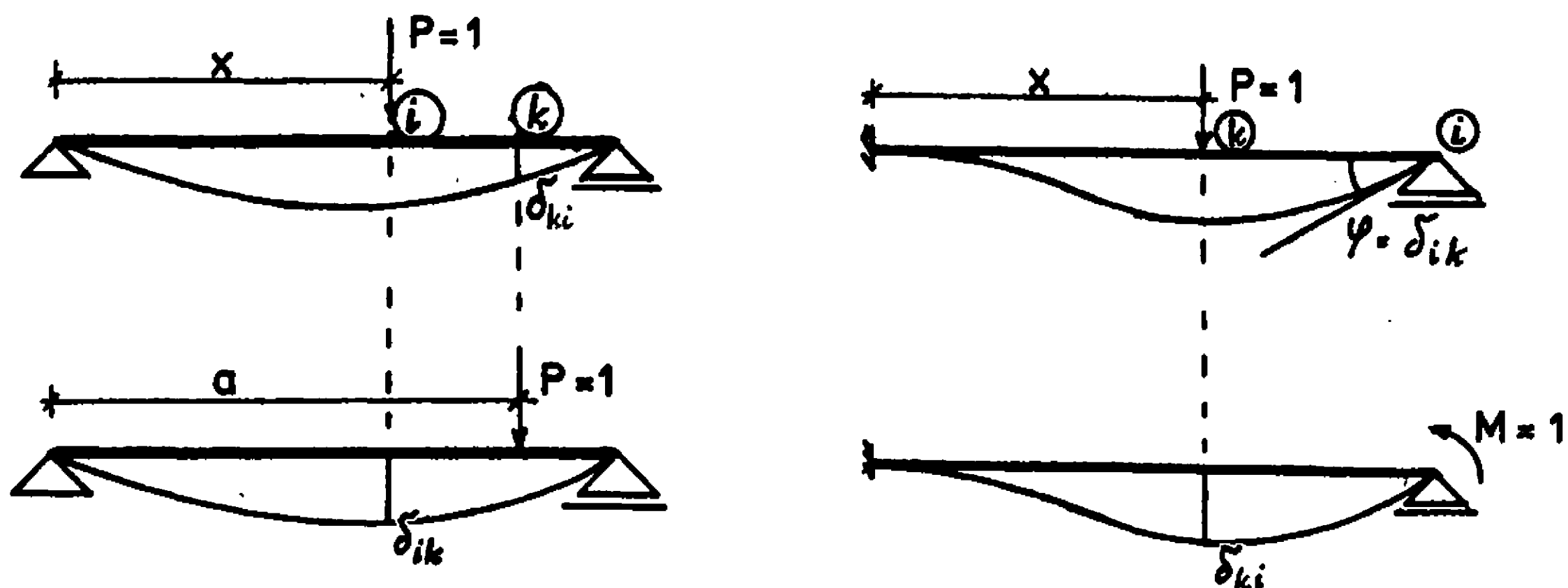
gdzie $\varrho = \frac{EJ}{GC}$.

6. LINIE WPŁYWOWE PRZEMIESZCZEŃ W UKŁADACH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH

Przy wyznaczaniu linii wpływowej przemieszczenia korzystamy z twierdzenia Maxwella o wzajemności przemieszczeń. Możemy je wyrazić następująco: siła uogólniona równa jedności, działająca na układ sprężysty wzdłuż kierunku "k" wywołuje na kierunku "i" przemieszczenie o takiej samej wartości jak przemieszczenie na kierunku "k" w przypadku obciążenia tegoż układu siłą równą jedności działającą na kierunku "i".

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}.$$

Twierdzenie to jest zilustrowane na rysunku 6.1, jest ono słuszne dla dowolnego punktu i kierunku, czyli że punkt przyłożenia siły P może być dowolnym punktem konstrukcji, a w związku z tym siła P może być obciążeniem ruchomym.



Rys. 6.1

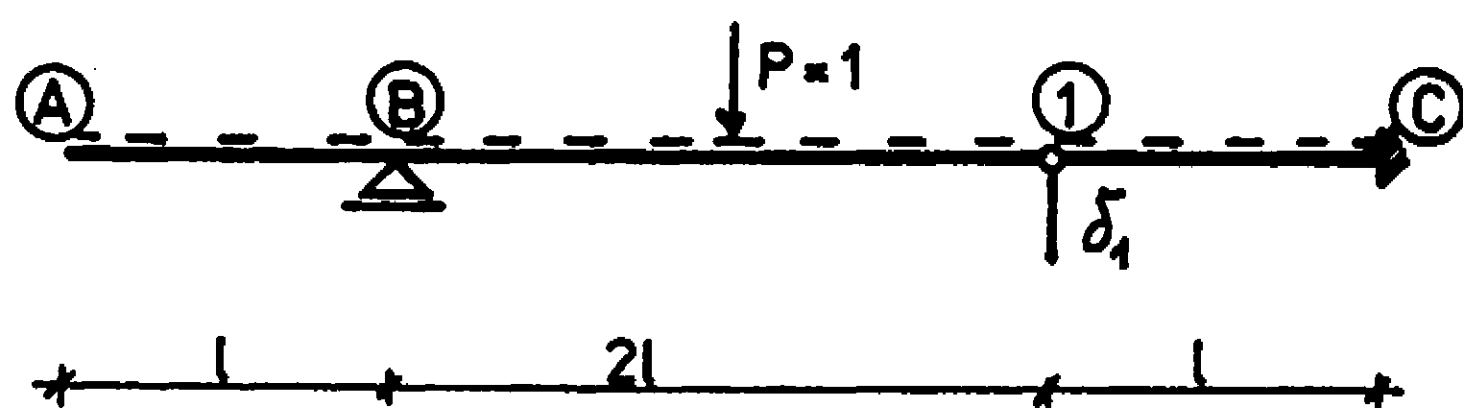
Z twierdzenia Maxwella wynika, że wyznaczenie linii wpływowej przemieszczenia sprowadza się do znalezienia linii ugięcia układu, wywołanego siłą jednostkową działającą w kierunku tego przemieszczenia. Na tej samej podstawie stwierdzamy, że linia wpływowa kąta obrotu φ_1 (rys. 6.1) jest równa linii ugięcia układu od obciążenia go momentem $M_1 = 1$. Samą linię ugięcia możemy wyznaczyć dowolną metodą.

Zadanie 6.1

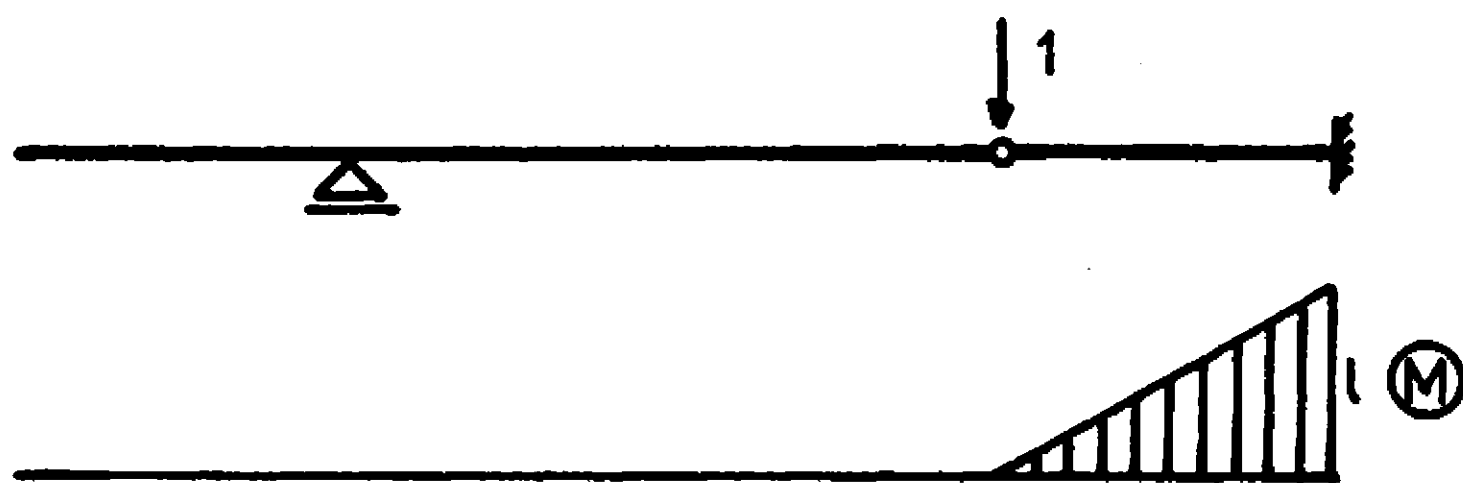
Dana jest belka podparta na dwóch podporach obciążona poruszającą się siłą jednostkową $P = 1$. Wyznaczyć linię wpływową pionowego przemieszczenia punktu 1 (rys. 6.2).

Rozwiązanie

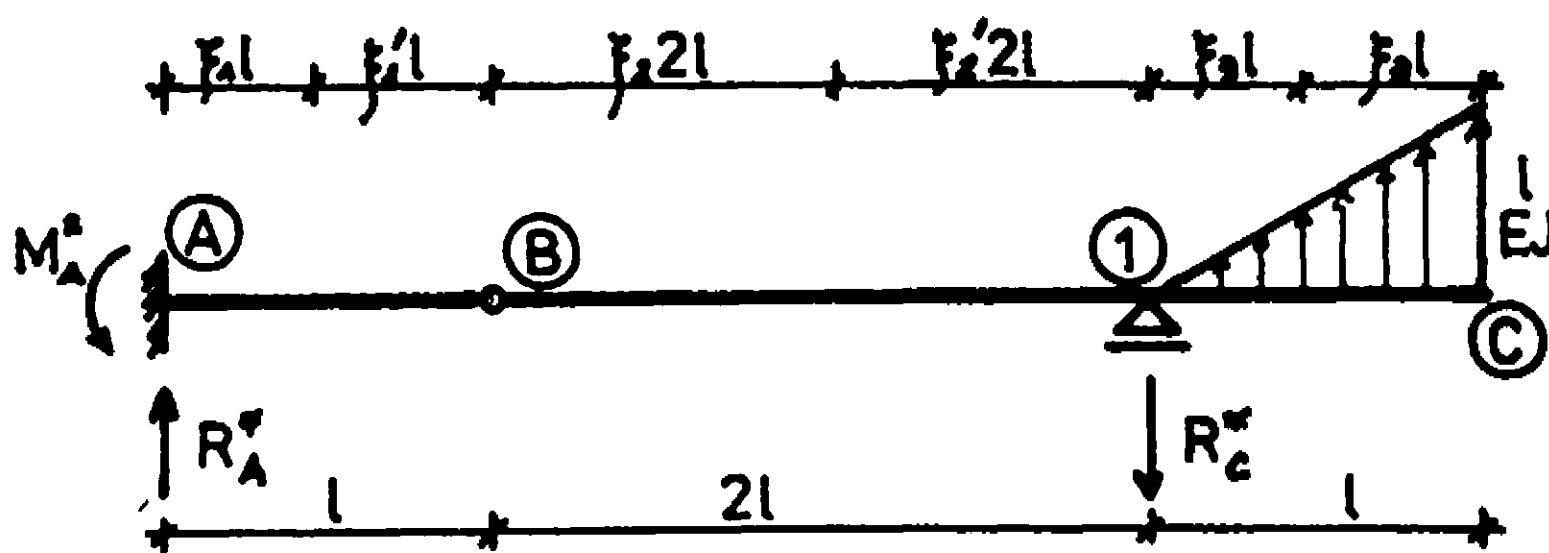
W punkcie 1 zakładamy jednostkową siłę od działania której szukamy linii ugięcia belki. Linia ta jest poszukiwaną linią wpływową. Linię ugięcia wyznaczamy metodą Mohra. Traktując wykres momentów zginających M jako obciążenie wtórne, obciążamy nim belkę fikcyjną, uzyskując drogą modyfikacji podpór belki rzeczywistej (rys. 6.4).



Rys. 6.2



Rys. 6.3



Rys. 6.4

Wykorzystując równania $\sum M_B^D = 0$, $\sum M_A = 0$, $\sum P_y = 0$ obliczamy reakcje wtórne R_A^* , M_A^* , R_C^* , wynoszą one odpowiednio:

$$R_A^* = \frac{l^2}{6}, \quad M_A^* = \frac{l^3}{6}, \quad R_C^* = \frac{2l^2}{3}.$$

Równania wtórnych momentów zginających dla belki fikcyjnej są następujące:

Przedział (A-B)

$$M_{AB}^* = -M_A^* + R_A^* \cdot l \xi_1 = -\frac{1}{6} l^3 + \frac{1}{6} \xi_1^2 l = -\frac{1}{6} \xi_1'.$$

Przedział (B-1)

$$M_{B1}^* = \frac{1}{6} l^2 \xi_2^2 l = \frac{1}{3} l^3 \xi_2.$$

Przedział (1-C)

$$\begin{aligned} M_{1c}^* &= \frac{1}{6} l^2 (2l + \xi_3 l) - \frac{4}{6} l^2 \xi_3 l + \frac{1}{2} \xi_3 l \cdot \xi_3 l \cdot \frac{1}{3} \xi_3 l = \\ &= \frac{1}{3} l^3 - \frac{1}{2} l^3 \xi_3 + \frac{1}{6} l^3 (\xi_3)^3. \end{aligned}$$

Dzieląc wtórne momenty zginające M^* przez sztywność zginania belki rzeczywistej otrzymamy linię ugięcia belki rzeczywistej, a tym samym linię wpływową pionowego przemieszczenia punktu 1.

Przedział (A-B)

$$\text{l.w. } \delta_1 = -\frac{l^3}{6 EJ} \xi_1'.$$

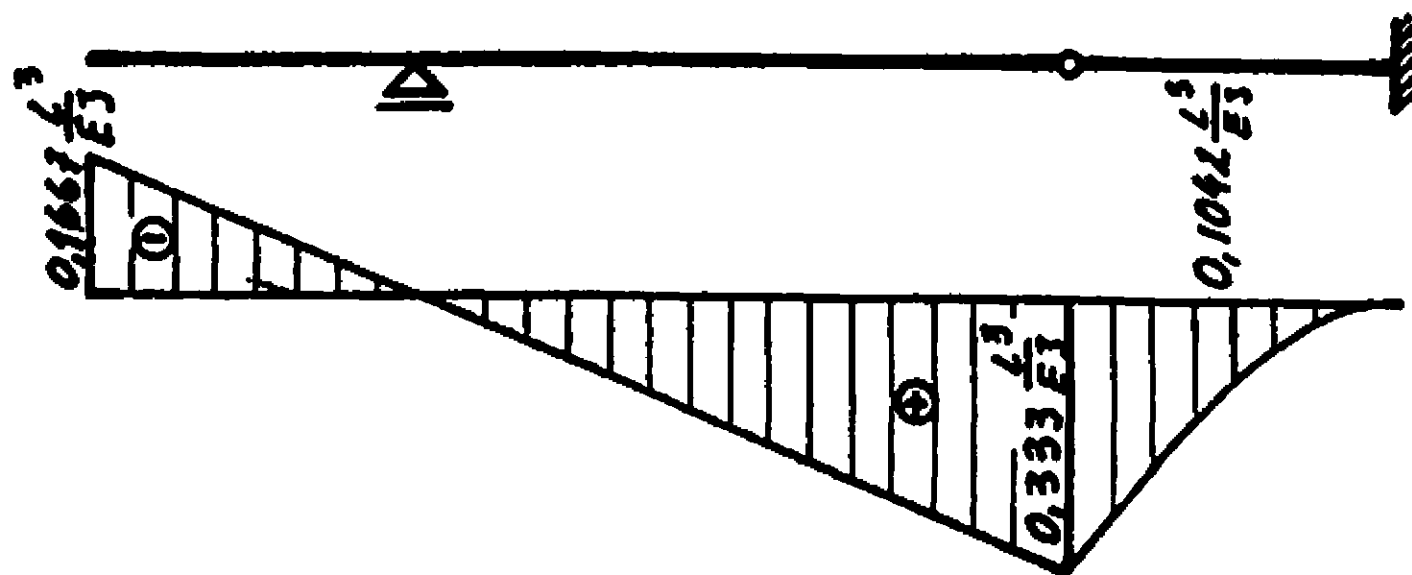
Przedział (B-1)

$$\text{l.w. } \delta_1 = \frac{l^3}{3 EJ} \xi_2.$$

Przedział (1-C)

$$\text{l.w. } \delta_1 = \frac{l^3}{3 EJ} - \frac{l^3}{2 EJ} \xi_3 + \frac{l^3}{6 EJ} (\xi_3)^3.$$

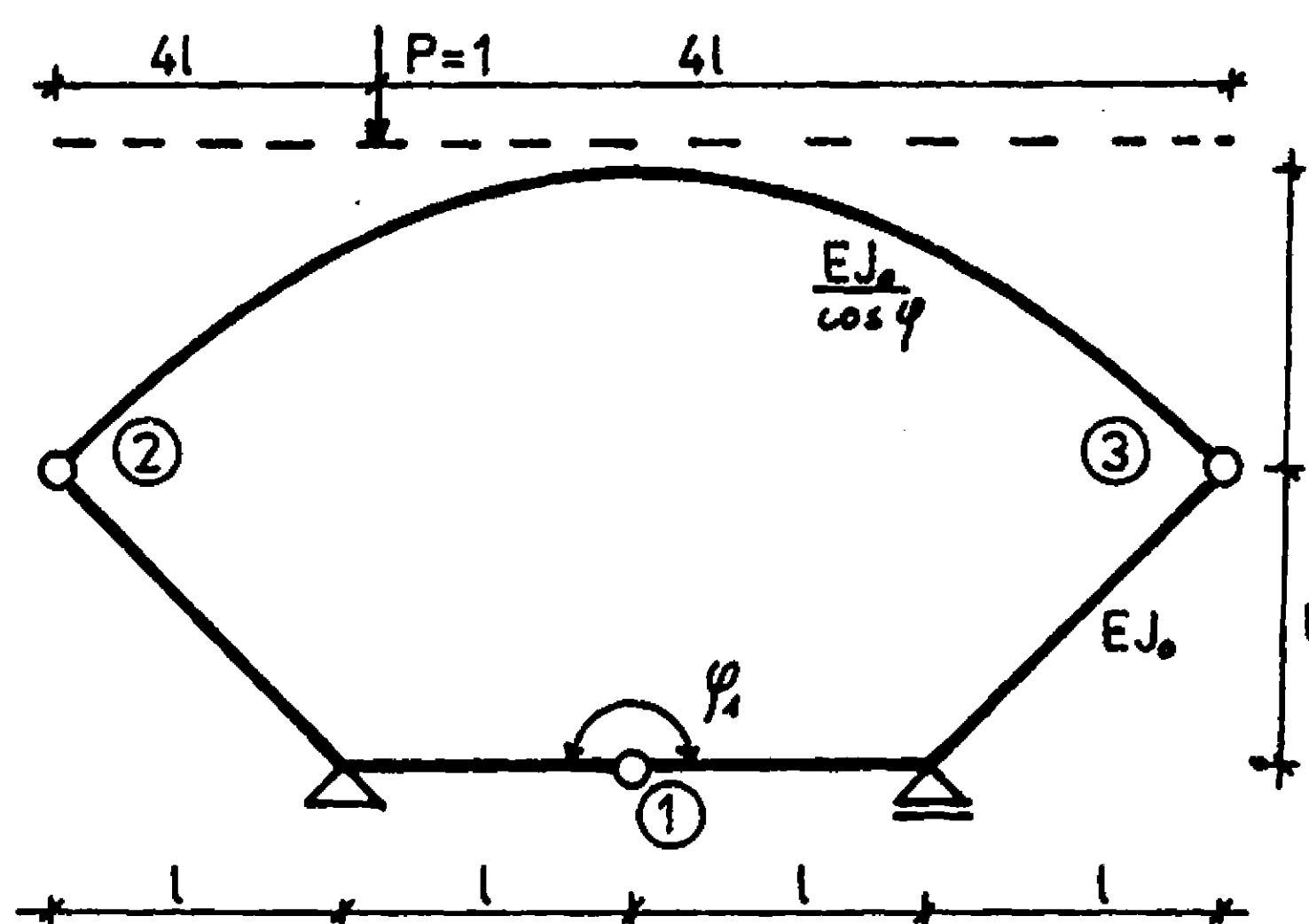
Wykres linii wpływowej pionowego przemieszczenia punktu 1 przedstawiono na rysunku 6.5.



Rys. 6.5

Zadanie 6.2

Dany jest ramożuk obciążony poruszającą się siłą jednostkową $P = 1$. Wyznaczyć linię wpływową zmiany $\Delta\varphi_1$ kąta φ_1 (rys. 6.6).



Rys. 6.6

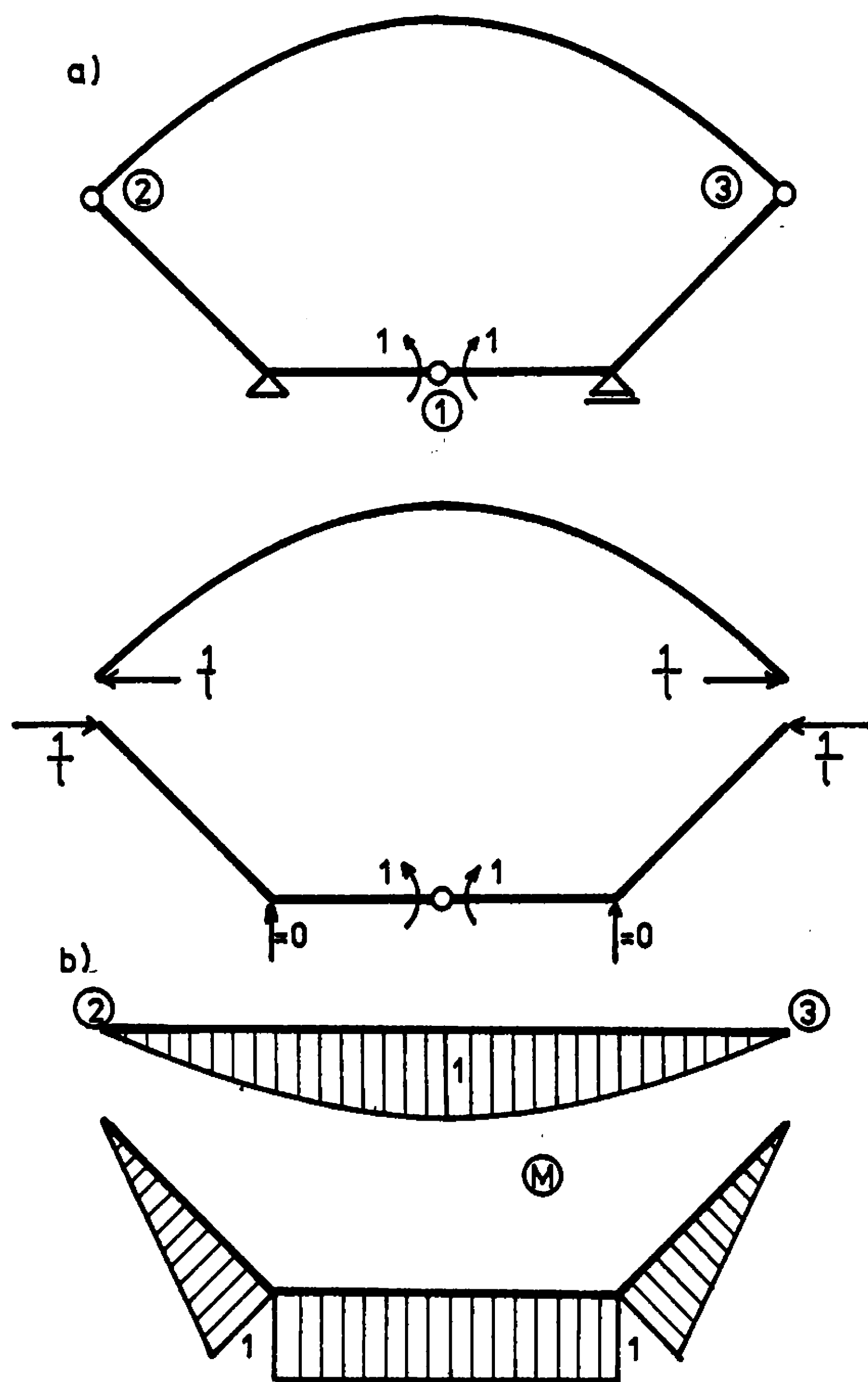
Rozwiązanie

Aby wyznaczyć linię wpływu zmiany $\Delta\varphi_1$ kąta φ_1 , zakładamy w bezpośrednim sąsiedztwie przegubu parę momentów jednostkowych, dla których szukamy linii ugięcia tej części ramożuku, po której porusza się siła jednostkowa. Linia ta jest poszukiwaną linią wpływową.

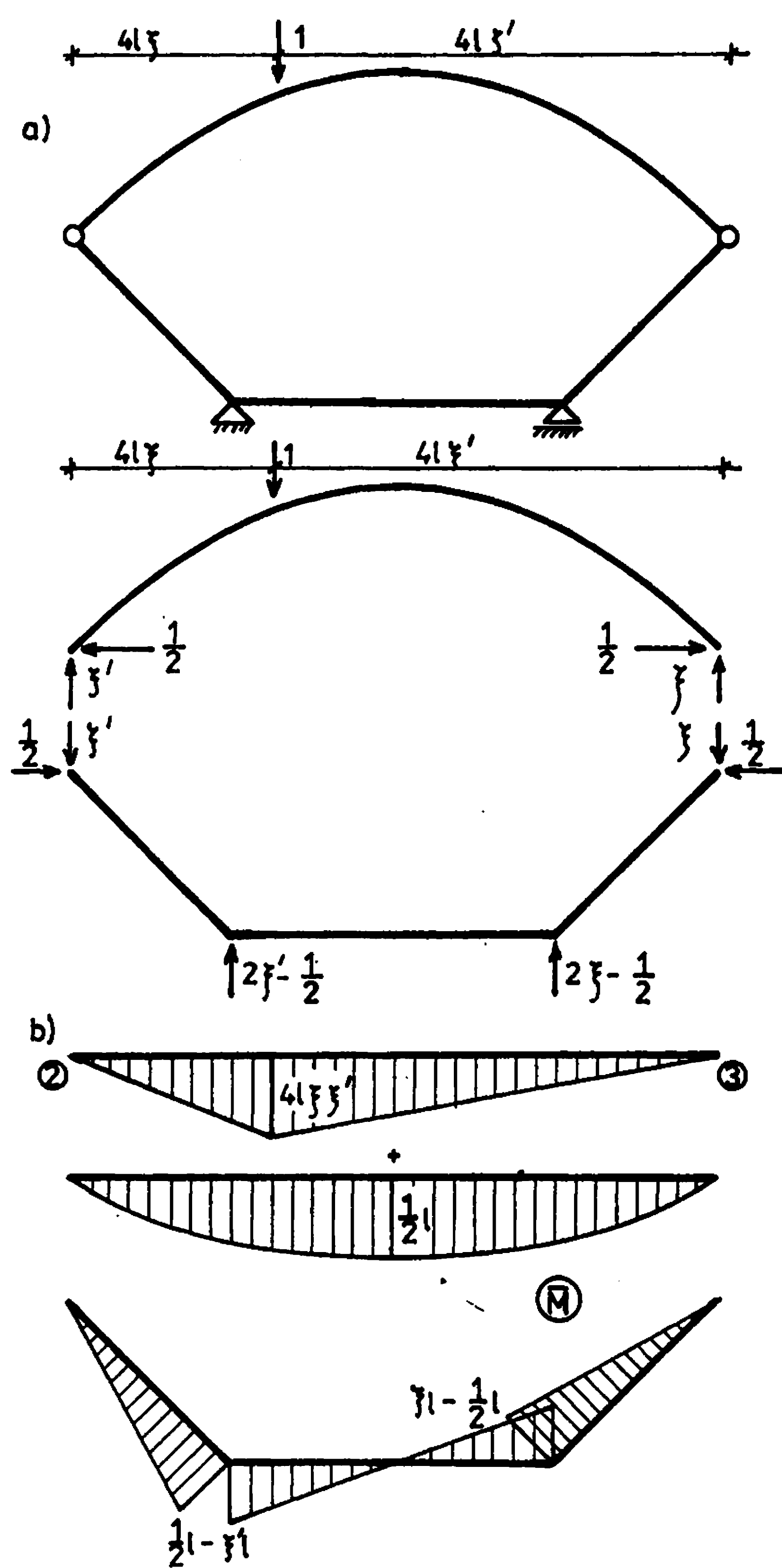
Linie ugięcia wyznaczamy korzystając z równania prac wirtualnych. Całkując graficznie wykresy momentów zginających przedstawionych na rysunku 6.7 i 6.8 otrzymujemy (wpływu sił normalnych i tnących nie uwzględniono)

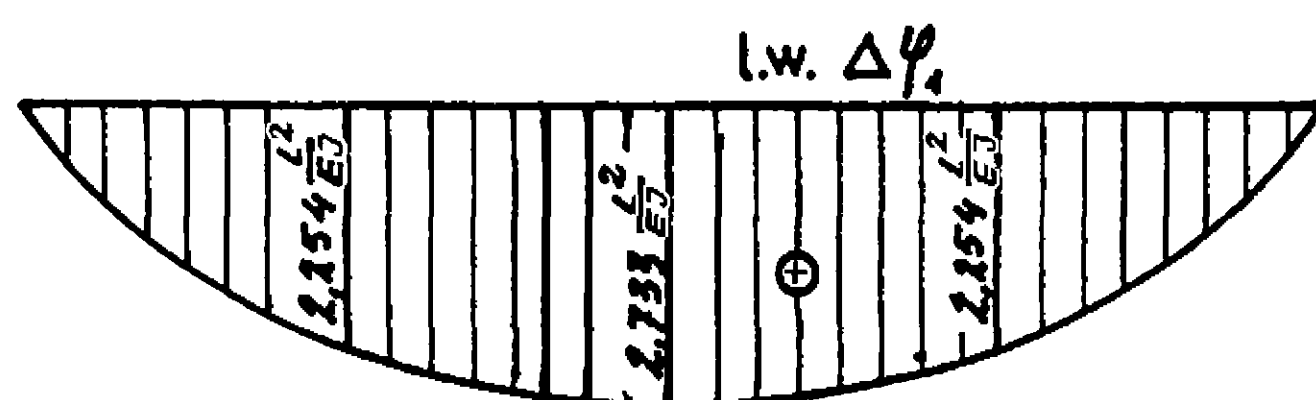
$$\begin{aligned}
 \text{l.w. } \Delta\varphi_1 &= \int \frac{M\bar{M}}{EJ} ds = \frac{1}{EJ_0} \left[\frac{1 \cdot 4l^2}{3} (\xi - 2\xi^3 + \xi^4) + \frac{8}{15} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} 4l - \right. \\
 &\quad + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (\xi l - \frac{1}{2} l) l \sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (\xi l - \frac{1}{2} l) l + \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (\frac{1}{2} l - \xi' l) l + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (\frac{1}{2} l - \xi' l) l \sqrt{2} \right] = \\
 &= \frac{1}{EJ_0} \left[\frac{16}{15} + \frac{16}{3} (\xi - 2\xi^3 + \xi^4) \right].
 \end{aligned}$$

Wykres linii wpływowej zmiany $\Delta\varphi_1$ kąta φ_1 przedstawiono na rysunku 6.9.



Rys. 6.7a-b

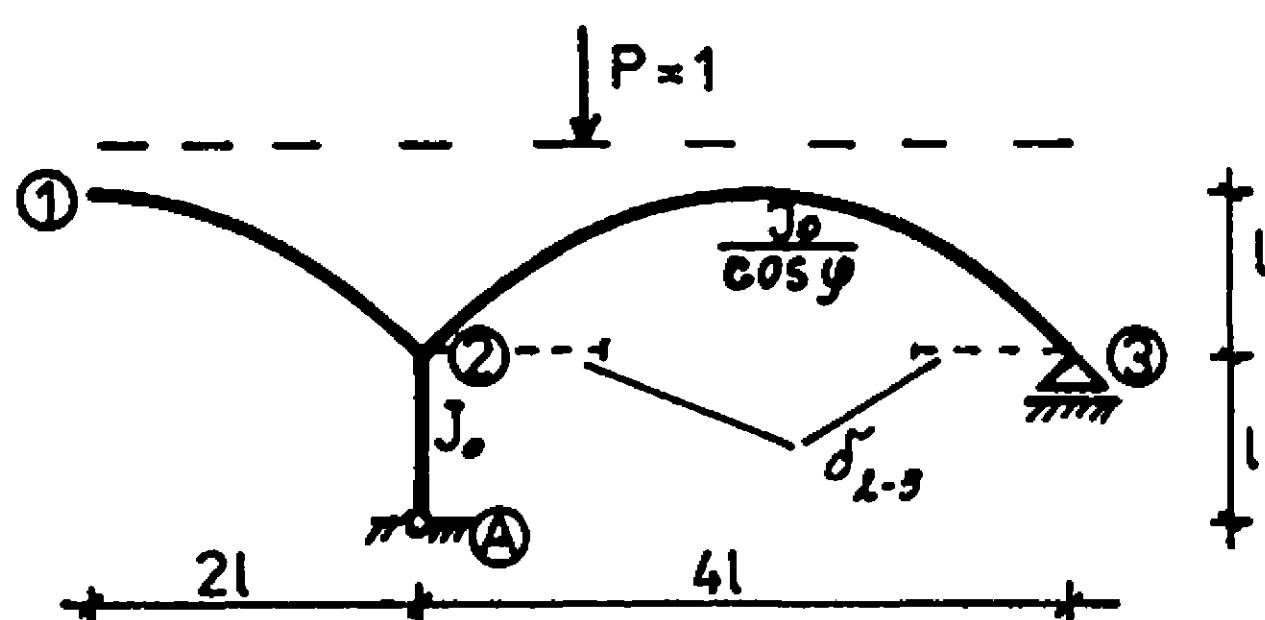




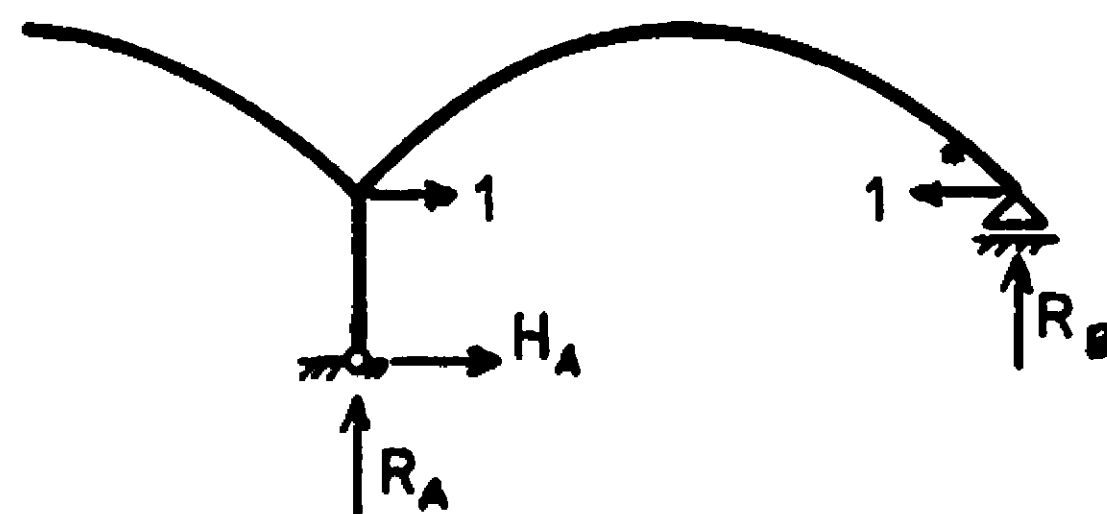
Rys. 6.9

Zadanie 6.3

Dla podanego układu obciążonego poruszającą się siłą jednostkową $P = 1$. Wyznaczyć linię wpływową zmiany odległości między punktami 2 i 3 (rys. 6.10).



Rys. 6.10



Rys. 6.11

Rozwiązanie

W punktach 2 i 3 zakładamy dwie działające na kierunku $\overline{23}$, przeciwnie skierowane siły jednostkowe. Od powyższego obciążenia szukamy linii ugięcia tej części układu, po którym porusza się siła jednostkowa.

Wykorzystując warunki równowagi $\sum M_1 = 0$, $\sum P_y = 0$ i $\sum P_x = 0$ obliczamy reakcje podporowe

$$R_A = R_B = H_A = 0.$$

Linie ugięcia wyznaczamy korzystając z równania prac wirtualnych.

Wykres momentów zginających wywołany obciążeniem rzeczywistym przedstawia rysunek 6.12.

Wykresy momentów wirtualnych podano na rysunkach 6.13a i 6.13b. Przedział (1-2)

Reakcje wynoszą odpowiednio

$$R_B = -\frac{\xi'_1}{2}, \quad R_A = 1 + \frac{\xi'_1}{2}, \quad H_A = 0,$$

Przedział 2-3

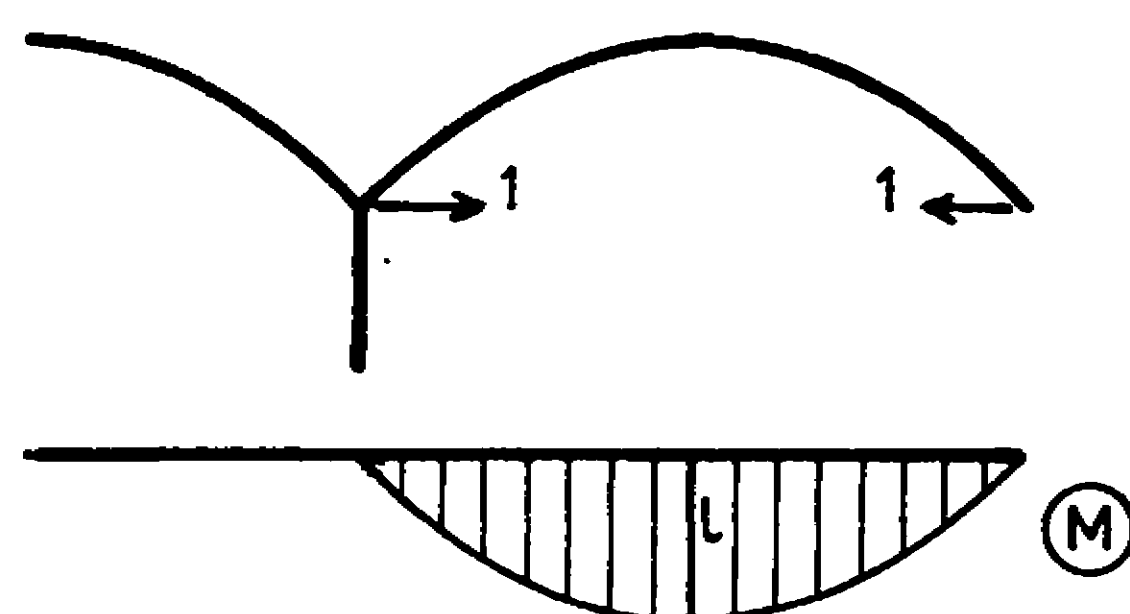
Reakcje wynoszą odpowiednio

$$R_B = \xi_2, \quad R_A = \xi'_2, \quad H_A = 0.$$

Całkując wykresy momentów zginających przedstawionych na rysunku 6.12 i 6.13 otrzymujemy:

Przedział (1-2)

$$\begin{aligned} \text{l.w. } \delta_{2-3} &= \frac{1}{EJ_0} \left(-\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 21 \xi'_1 \cdot 41 \right) = \\ &= \frac{81^3}{3EJ_0} \xi'_1. \end{aligned}$$

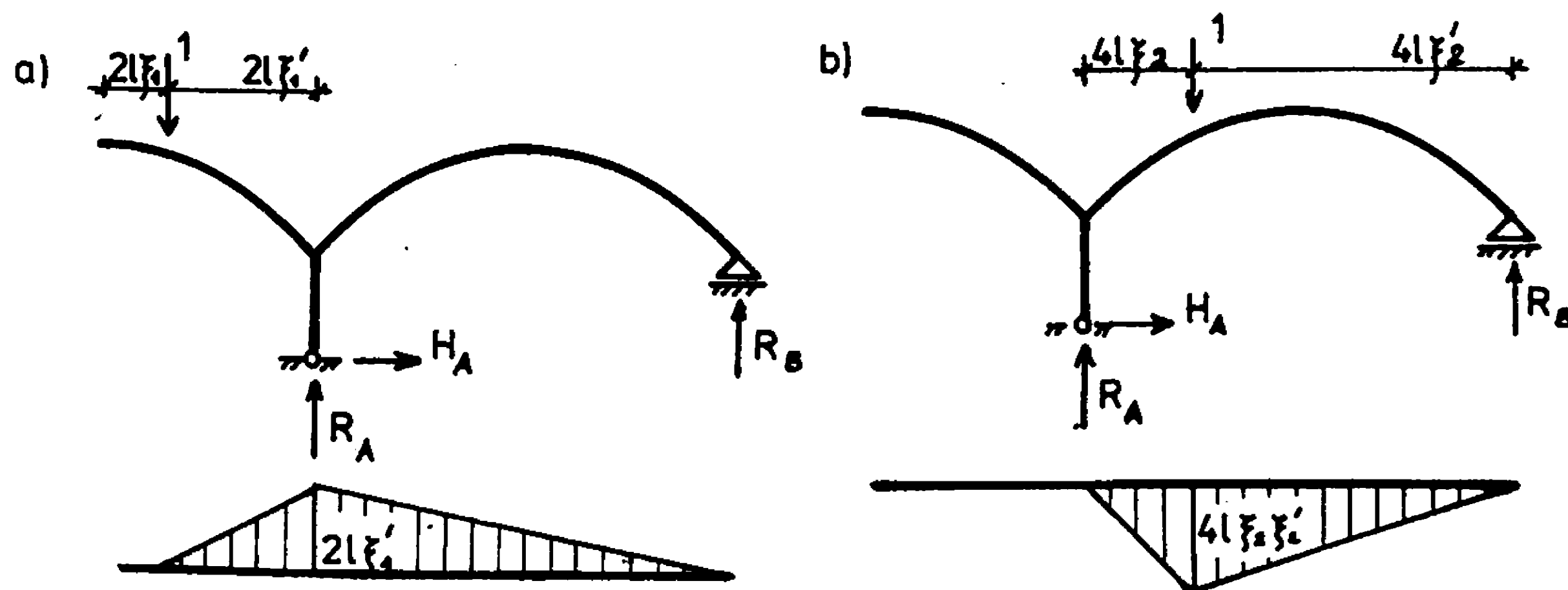


Rys. 6.12

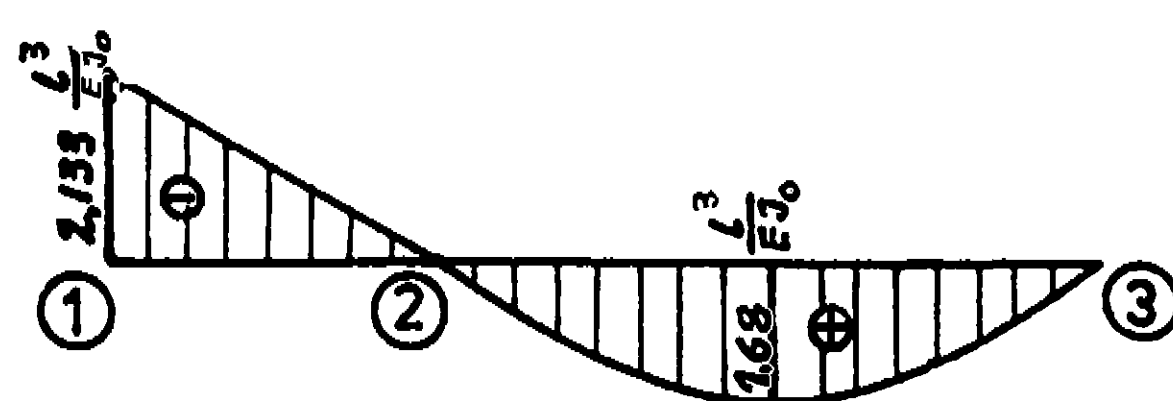
Przedział 2-3

$$\begin{aligned} \text{l.w. } \delta_{2-3} &= \frac{1}{EJ_0} \frac{1 \cdot (41)^2}{3} (\xi_2 - 2 \xi_2^3 + \\ &+ \xi_2^4) = \frac{161^3}{3EJ} (\xi_2 - 2 \xi_2^3 + \xi_2^4). \end{aligned}$$

Wykres linii wpływowej zmiany odległości między punktami 2 i 3 podano na rysunku 6.14.



Rys. 6.13a-b

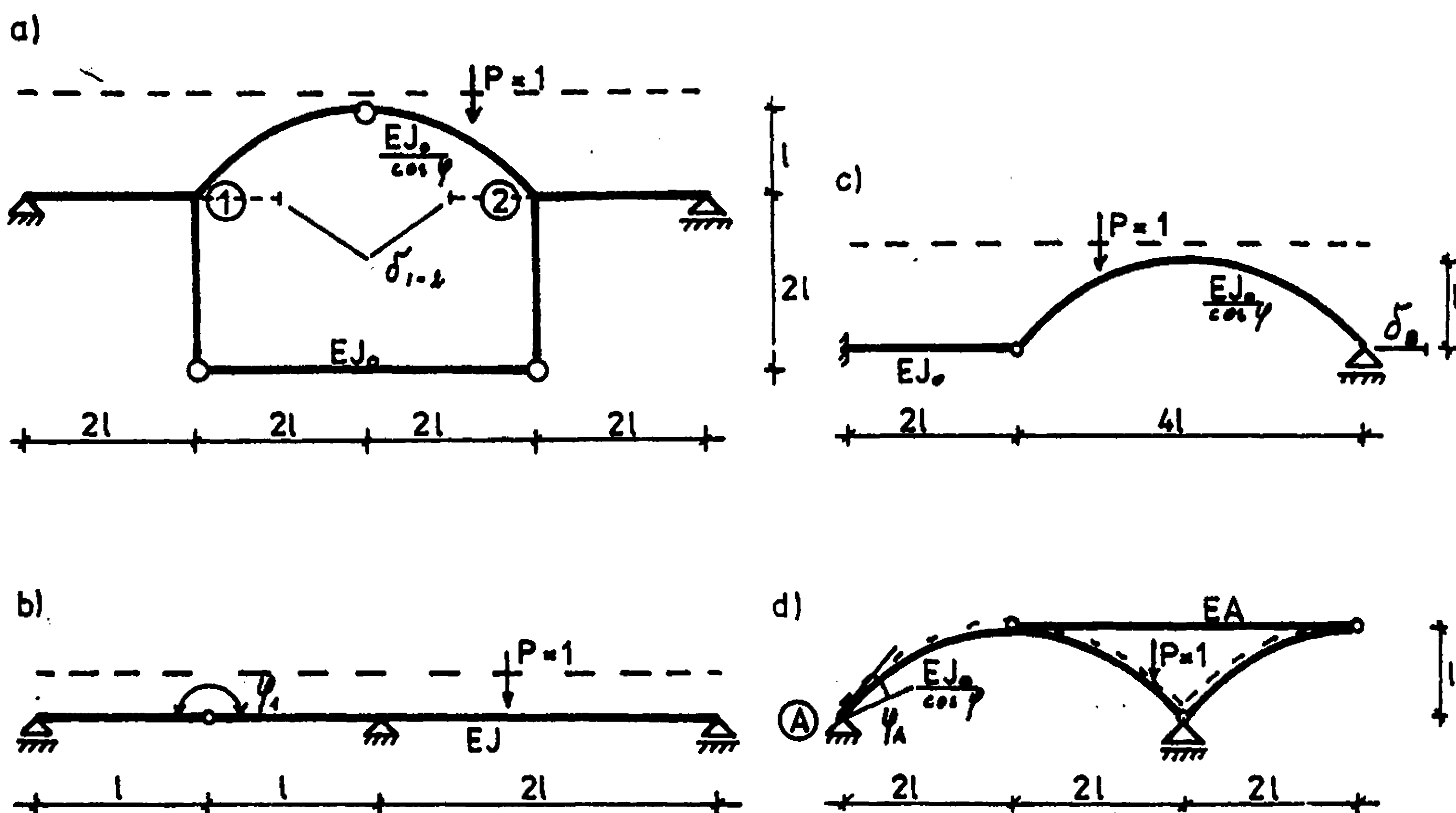


Rys. 6.14

Zadanie 6.4

Dla podanych układów obciążonych poruszającą się siłą jednostkową $P = 1$ wyznaczyć linie wpływowe zaznaczonych przemieszczeń (rys. 6.15a-d).

Rozwiązanie - samodzielne.



Rys. 6.15a-d

7. BELKI STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE

Jako nadliczbowe - w belkach ciągłych - przyjmujemy momenty zginające nad podporami, które wyznaczamy z równań trzech momentów. Równanie trzech momentów dla r -tej podpory ma postać

$$X_{r-1} l'_r + 2X_r (l'_r + l'_{r+1}) + X_{r+1} l'_{r+1} = N_{ro},$$

gdzie

$$l'_r = l_r \frac{J_c}{J_r},$$

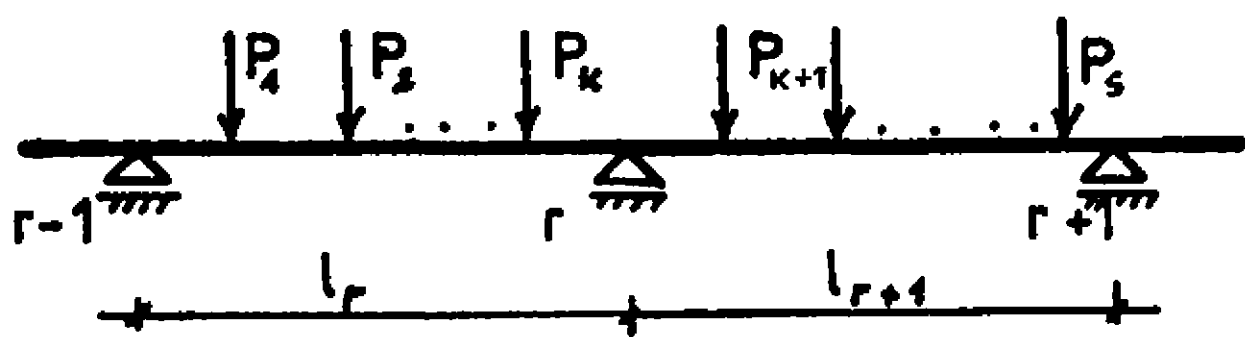
$$l'_{r+1} = l_{r+1} \frac{J_c}{J_{r+1}},$$

natomiast l_r , l_{r+1} , J_r , J_{r+1} są odpowiednio rozpiętościami i momentami bezwładności przęseł sąsiadujących z podporą r -tą, J_c - porównawczy moment bezwładności (najkorzystniej jest przyjąć moment bezwładności jednego z przęseł). N_{ro} zależy od obciążenia zewnętrznego. I tak dla obciążenia przęseł $(r-1)$ - r , r -($r+1$) grupą sił skupionych (rys. 7.1), N_{ro} jest równa

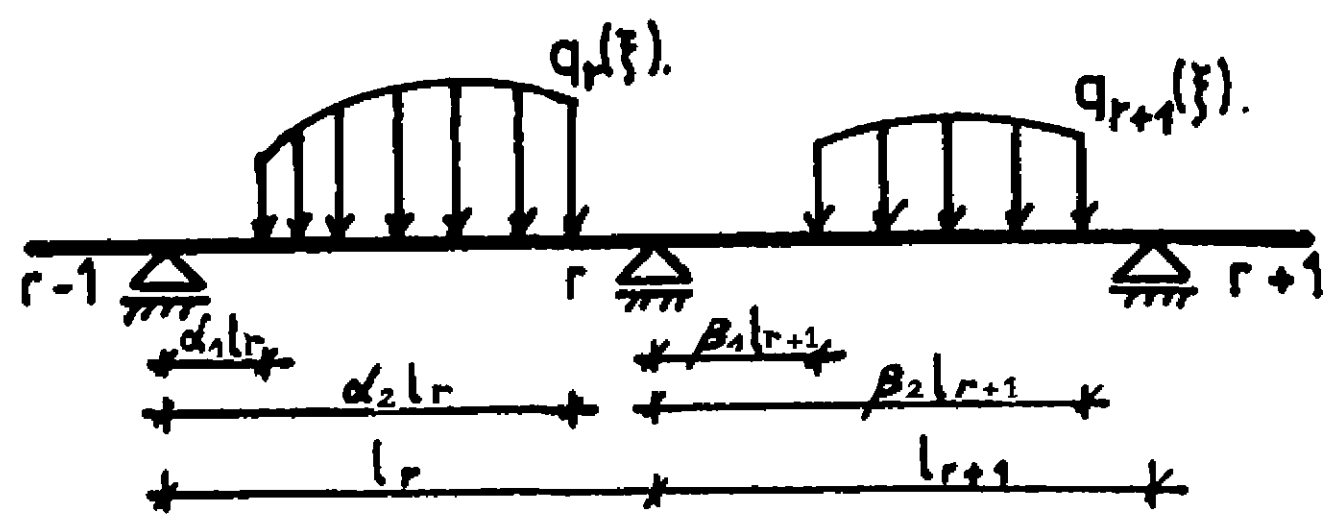
$$N_{ro} = -l_r l'_r \cdot \sum_{i=1}^k P_i w_T(\xi_i) - l_{r+1} l'_{r+1} \cdot \sum_{i=k+1}^s P_i \cdot w'_T(\xi_i).$$

Jeżeli w przęsełach $(r-1)$ - r , r -($r+1$) działa obciążenie ciągłe $q_r(\xi)$, $q_{r+1}(\xi)$ na odcinkach $(\alpha_2 - \alpha_1) l_r$, $(\beta_2 - \beta_1) l_{r+1}$ według rysunku 7.2, N_{ro} ma następującą postać:

$$N_{ro} = -l_r^2 l'_r \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} q_r(\xi) \cdot w_T(\xi) \cdot d\xi - l_{r+1}^2 l'_{r+1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} q_{r+1}(\xi) \cdot w'_T(\xi) \cdot d\xi.$$



Rys. 7.1



Rys. 7.2

W celu obciążenia momentami skupionymi przęseł $(r-1)-r$, $r-(r+1)$ według rysunku 7.3 N_{ro} przyjmuje postać

$$N_{ro} = -l'_r \cdot \sum_{i=1}^k M_i \cdot \omega_M(\xi_i) - l_{r+1} \sum_{i=k+1}^s \omega'_M(\xi_i).$$

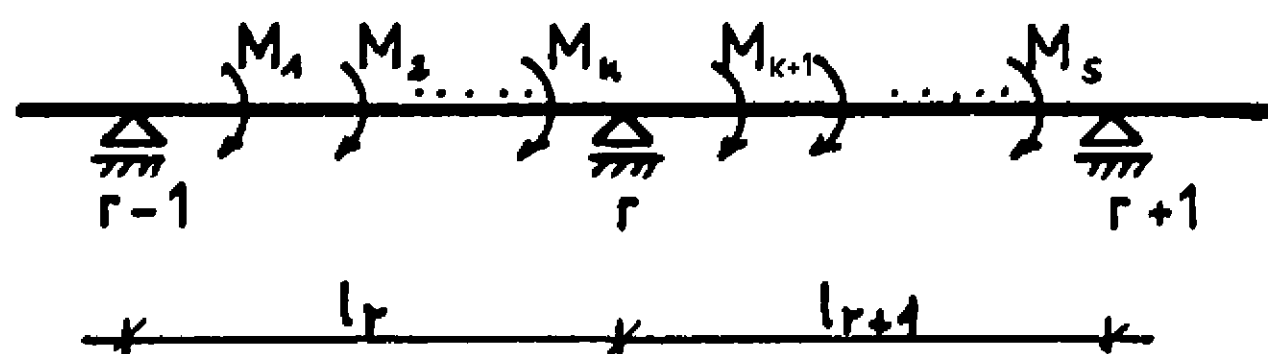
W powyższych wzorach funkcje ω_T , ω'_T , ω_M , ω'_M określają wzory

$$\omega_T(\xi) = \xi - \xi^3, \quad \omega'_T(\xi) = \xi' - \xi'^3 = 2\xi - 3\xi^2 + \xi^3,$$

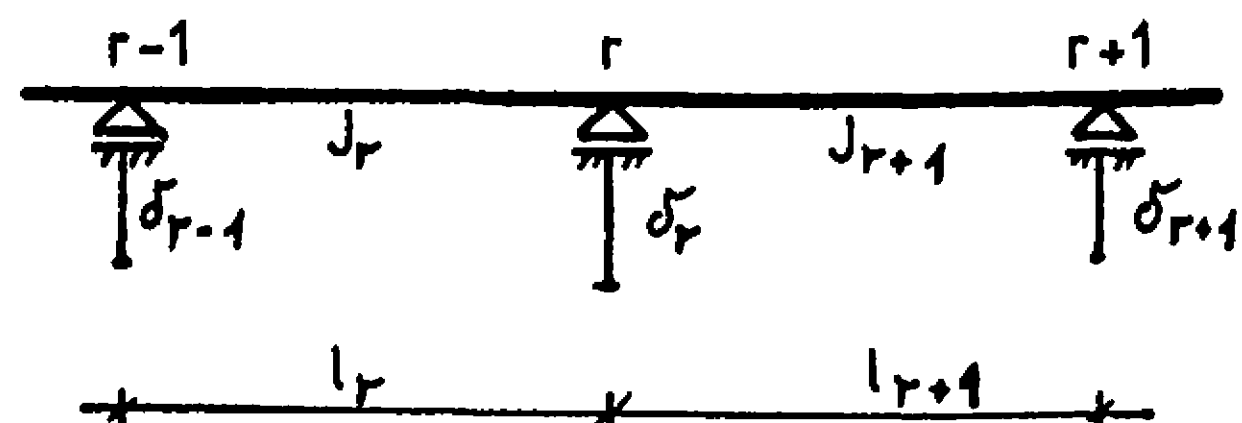
$$\omega_M(\xi) = 1 - 2\xi^2, \quad \omega'_M(\xi) = 3\xi'^2 - 1 = 2 - 6\xi + 3\xi^2.$$

Jeżeli podpory $r-1$, r , $r+1$ doznały przemieszczeń pionowych δ_{r-1} , δ_r , δ_{r+1} tak jak pokazano na rysunku 7.4 to $N_{r\delta}$ ma postać

$$N_{r\delta} = -6EJ_c \left[\frac{\delta_{r-1}}{l_r} - \delta_r \left(\frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}} \right) + \frac{\delta_{r+1}}{l_{r+1}} \right].$$



Rys. 7.3



Rys. 7.4

Natomiast dla obciążenia termicznego N_{rt} wyraża się następująco:

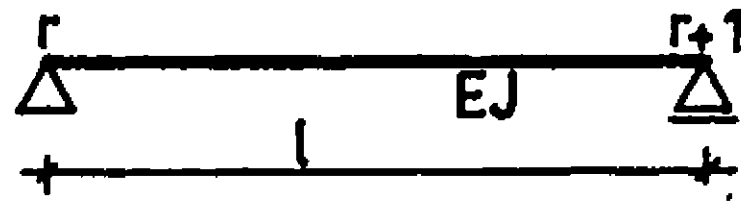
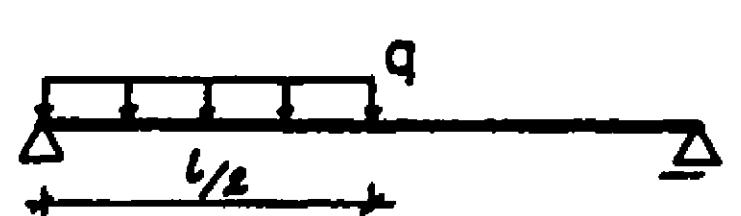
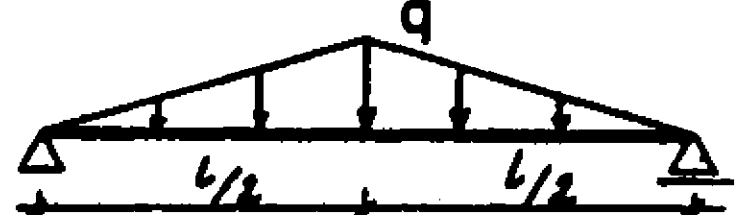
$$N_{rt} = -3EJ_c \cdot \Delta t \cdot \alpha_t \left(\frac{l_r}{h_r} + \frac{l_{r+1}}{h_{r+1}} \right),$$

gdzie h_r , h_{r+1} są wysokościami belek w przęsłach sąsiadujących z podporą r .

Wyrazy wolne N_{ro} dla typowych obciążeń podano w tabelicy 7.1.

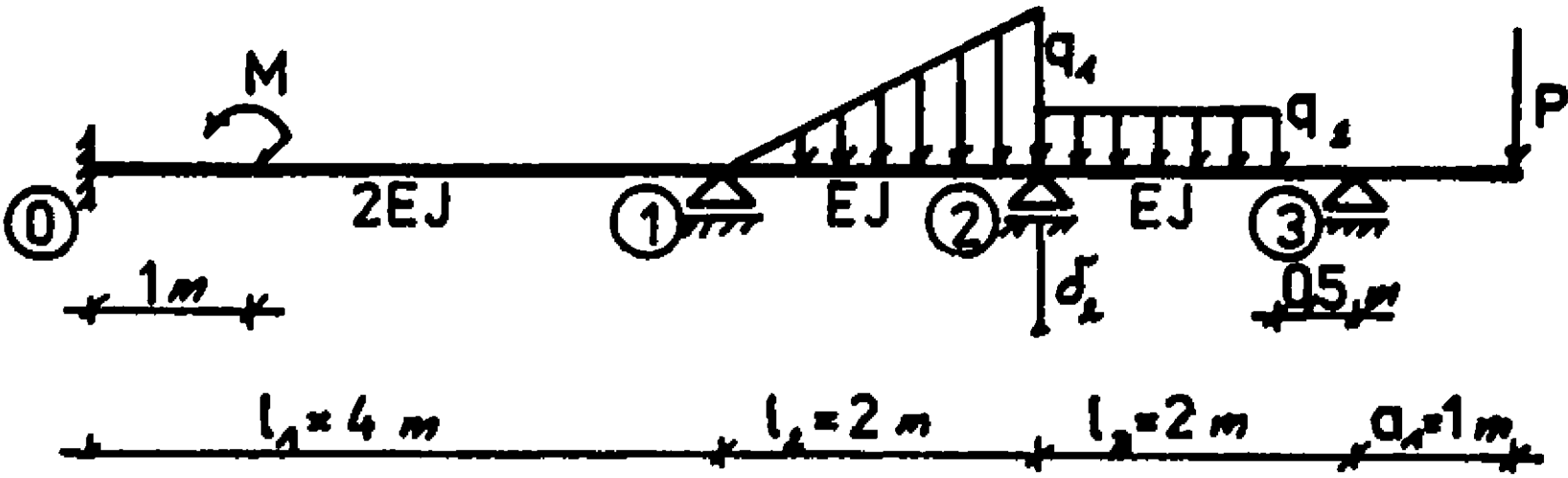
T a b l i c a 7.1

Wyrazy wolne N_{ro} i $N_{r+1,0}$ równania trzech momentów

N_{ro}		$N_{r+1,0}$
$-\frac{1}{4}ql^2l$		$-\frac{1}{4}ql^2l$
$-\frac{9}{64}ql^2l$		$-\frac{7}{64}ql^2l$
$-\frac{7}{60}ql^2l$		$-\frac{8}{60}ql^2l$
$-\frac{5}{32}ql^2l$		$-\frac{5}{32}ql^2l$

Zadanie 7.1

Dla danej belki ciągłej, przy danym obciążeniu, wyznaczyć wykresy momentów zginających i sił poprzecznych (rys. 7.5).
Dane: $P = 4,0 \text{ kN}$, $M = 2 \text{ kNm}$, $q_1 = 2 \text{ kN/m}$, $q_2 = 1,5 \text{ kN/m}$, $\delta_2 = 0,05 \text{ m}$, $EJ = 20 \text{ kNm}^2$.



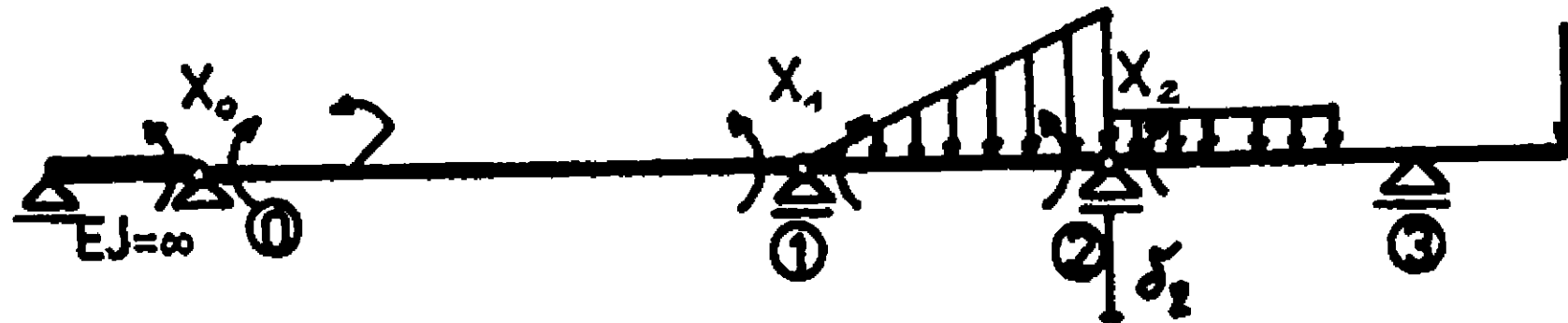
Rys. 7.5

Rozwiązanie

Belka jest trzykrotnie statycznie niewyznaczalna. Wielkości nadliczbowe znajdujemy korzystając z równania trzech momentów.

Napişmy kolejno równania trzech momentów dla podpór 0, 1 i 2:

$$2X_0(l'_1) + X_1l'_1 = N_{00},$$
$$X_0l'_1 + 2X_1(l'_1 + l'_2) + X_2l'_2 = N_{10},$$



rys. 7.6.

$$X_1 l'_2 + 2X_2(l'_2 + l'_3) + M_3 l'_3 = N_{20}.$$

W równaniach tych:

$$l'_1 = l_1 \frac{J_c}{J_1} = 4 \cdot \frac{J}{2J} = 2,$$

$$l'_2 = l_2 = 2,0,$$

$$l'_3 = l_3 = 2,0,$$

$$M_3 = -Pa_1 = -4 \text{ kNm}.$$

Obliczmy najpierw prawe strony równań trzech momentów od obciążenia zewnętrznego

$$-(-M) \cdot 2,0 \cdot \left[2 - 6 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right] =$$

$$= N_{0P} = -M l'_1 \left[2 - 6\alpha_1 + 3(\alpha_1)^2 \right] =$$

$$= 2 \cdot 2,0 \cdot 0,6875 = 2,75 \text{ kNm}^2,$$

$$\begin{aligned}
N_{1P} &= -M \cdot -1' \left[1 - 3(\alpha_1)^2 \right] - l_2^2 l_2' \int_0^1 q_1 \cdot \xi (\xi' - \xi'^3) \cdot d\xi = \\
&= -(-M) \cdot 2,0 \left[1 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 \right] - 2^2 \cdot 2 \int_0^1 2 \cdot \xi \cdot (2 \cdot \xi - 3 \xi^2 + \xi^3) \cdot d\xi = \\
&= 2 \cdot 2,0 \cdot 0,8125 - 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0,1167 = 1,383 \text{ kNm}^2, \\
N_{2P} &= -l_2^2 l_2' \int_0^1 q_1 \cdot \xi (\xi - \xi^3) \cdot d\xi - q_2 \cdot l_3^2 \cdot l_3' \int_0^{\frac{3}{4}} (\xi' - \xi'^3) \cdot d\xi = \\
&= -2^2 \cdot 2 \int_0^1 2 \cdot \xi \cdot (\xi - \xi^3) \cdot d\xi - 1,5 \cdot 2^2 \cdot 2 \int_{\frac{1}{4}}^1 (\xi' - \xi'^3) \cdot d\xi = \\
&= -4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0,1333 - 1,5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 0,2197 = 4,770 \text{ kNm}^2.
\end{aligned}$$

Prawe strony równań trzech momentów od osiadania podpory 2 są określone następująco:

$$N_{0\delta} = 0,$$

$$N_{1\delta} = -6EJ_c \left[\frac{\delta_2}{l_2} \right] = -6 \cdot 20 \cdot \frac{0,05}{2} = -3 \text{ kNm}^2,$$

$$N_{2\delta} = -6EJ_c \left[-\delta_2 \left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) \right] = -6 \cdot 20 \cdot \left[-0,05 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \right] = +6 \text{ kNm}^2.$$

Z zasady superpozycji otrzymamy:

$$N_{00} = N_{0P} + N_{0\delta} = 2,75 \text{ kNm}^2,$$

$$N_{10} = N_{1P} + N_{1\delta} = 1,383 - 3 = -1,617 \text{ kNm}^2,$$

$$N_{20} = N_{2P} + N_{2\delta} = -4,770 + 6 = 1,23 \text{ kNm}^2.$$

Układ równań przyjmuje teraz postać:

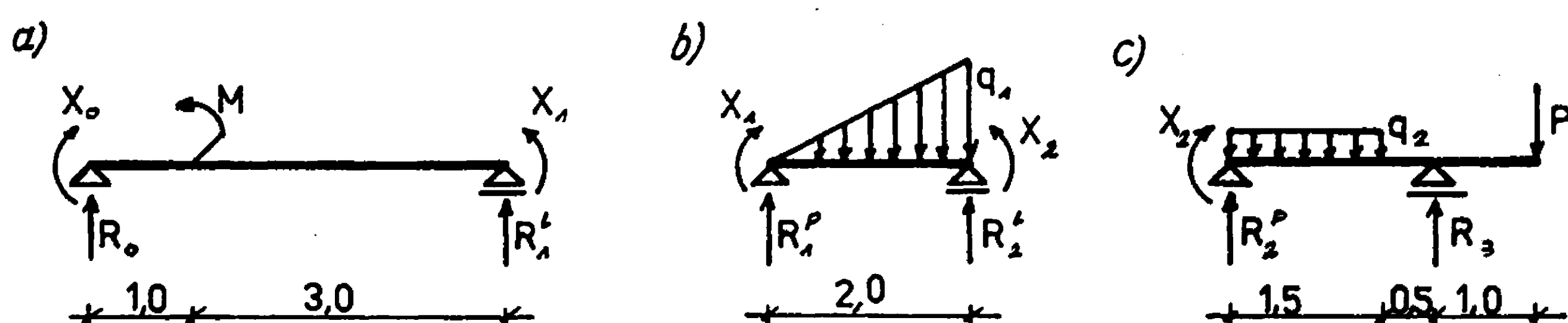
$$4X_0 + 2X_1 - 2,75 = 0,$$

$$2X_0 + 8X_1 + 2X_2 + 1,617 = 0,$$

$$2X_1 + 8X_2 - 4 \cdot 2 - 1,23 = 0$$

i po jego rozwiązaniu otrzymujemy:

$$X_0 = 1,095 \text{ kNm}, \quad X_1 = -0,815 \text{ kNm}, \quad X_2 = 1,358 \text{ kNm}.$$



Rys. 7.7a-c

Po wyliczeniu X_0 , X_1 , X_2 , zadanie sprowadza się do rozwiązania układu statycznie wyznaczalnego obciążonego danym obciążeniem zewnętrznym i wyliczonymi nadliczbowymi X_0 , X_1 , X_2 :

$$\Sigma M_0 = 0 \quad -R_1^1 \cdot 4 - X_1 - M + X_0 = 0,$$

$$R_1^1 = \frac{1}{4} (0,815 + 1,095 - 2) = -0,023 \text{ kN};$$

$$\Sigma M_1 = 0 \quad R_0 \cdot 4 + X_0 - M - X_1 = 0,$$

$$R_0 = 0,023 \text{ kN},$$

$$\Sigma M_1 = 0 \quad -R_2^1 \cdot 2 - X_2 + X_1 + \frac{1}{2} q_1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 0,$$

$$R_2^1 = \frac{1}{2} (-1,358 - 0,815 + \frac{4}{3} \cdot 2) = 0,247 \text{ kN};$$

$$\Sigma M_2 = 0 \quad R_1^P \cdot 2 + X_1 - X_2 - \frac{1}{2} q_1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = 0,$$

$$R_1^P = \frac{1}{2} (0,815 + 1,358 + \frac{2}{3} \cdot 2) = 1,753 \text{ kN};$$

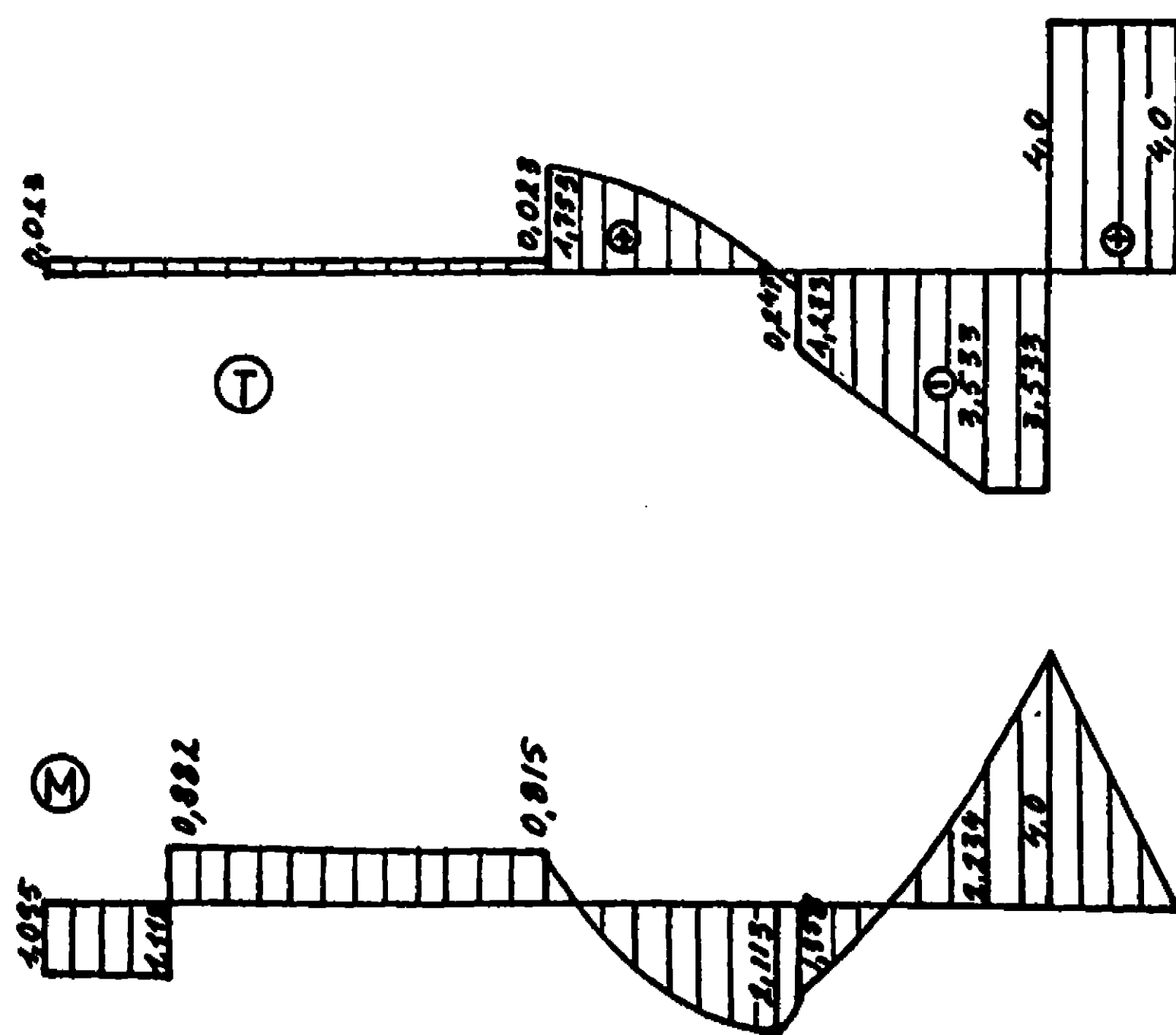
$$\Sigma M_2 = 0 \quad -R_3 \cdot 2 + X_2 + q_2 \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,5 + P \cdot 3 = 0,$$

$$R_3 = \frac{1}{2} (1,358 + \frac{1}{2} \cdot 1,5^3 + 4 \cdot 3) = 7,533 \text{ kN};$$

$$\Sigma M_3 = 0 \quad R_2^P \cdot 2 + X_2 - q_2 \cdot 1,5 \cdot 1,25 + P \cdot 1 = 0,$$

$$R_2^P = \frac{1}{2} (-1,358 + 1,5 \cdot 1,5 \cdot 1,25 - 4) = -1,273 \text{ kN}.$$

Wykresy momentów zginających i sił poprzecznych przedstawiono na rysunku 7.8.

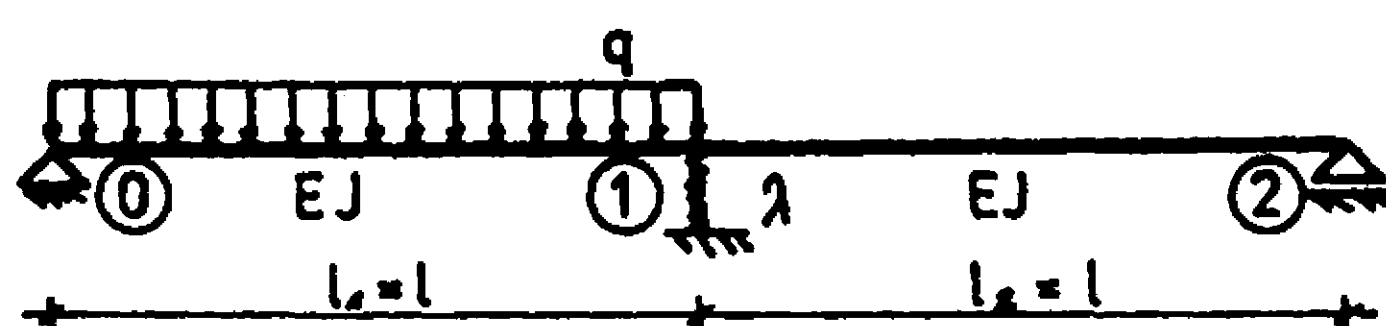


rys. 7.8.

Zadanie 7.2

Dla danej belki ciągłej na sprężystej środkowej podporze przy danym obciążeniu, wyznaczyć wykresy momentów zginających i sił poprzecznych (rys. 7.9).

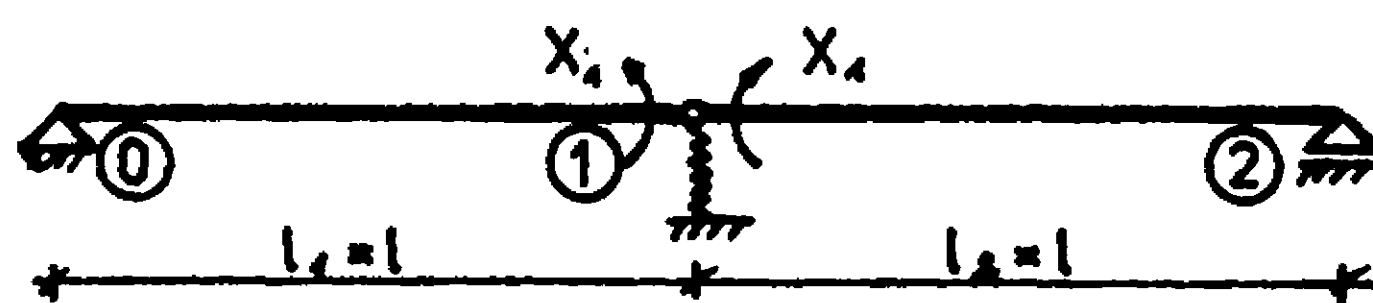
Przyjąć: $\lambda = \frac{30 EJ}{3}$ współczynnik sprężystości, $\frac{1}{\lambda}$ - skrócenie sprężyny wywołane siłą jednostkową.



Rys. 7.9.

Rozwiązanie

Belka jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalna. Jako nadliczbową przyjmijemy moment zginający w belce nad podporą 1. Wielkość tę wyznaczymy z równania trzech momentów.



Rys. 7.10.

Równanie trzech momentów dla podpory 1

$$X_0 l'_1 + 2X_1(l'_1 + l'_2) + X_2 l'_2 = N_{10},$$

$$l'_1 = l'_2 = l \text{ , ponieważ } EJ = \text{const.}$$

Z uwagi na to, że skrajne podpory są przegubowe, nieobciążone momentami, mamy $X_0 = X_2 = 0$ wobec czego:

$$4X_1 l = N_{10},$$

$$N_{10} = N_{1P} - 6EJ_c \left[\frac{\delta_0}{l} - \delta_1 \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l} \right) + \frac{\delta_2}{l} \right],$$

$$N_{1P} = -l^2 \int_0^1 \omega_T(\xi) \cdot d\xi = -ql^3 \int_0^1 (\xi - \xi^3) \cdot d\xi = -\frac{ql^3}{4}.$$

Podpory 0 i 2 nie doznały przemieszczeń stąd mamy $\delta_0 = \delta_2 = 0$.
Obliczenie δ_1

$$\Sigma M_0 = 0 \quad -R_1^l \cdot l - X_1 + ql \cdot \frac{l}{2} = 0,$$

$$R_1^l = \frac{ql}{2} - \frac{X_1}{l};$$

$$\Sigma M_2 = 0 \quad R_1^p \cdot l + X_1 = 0,$$

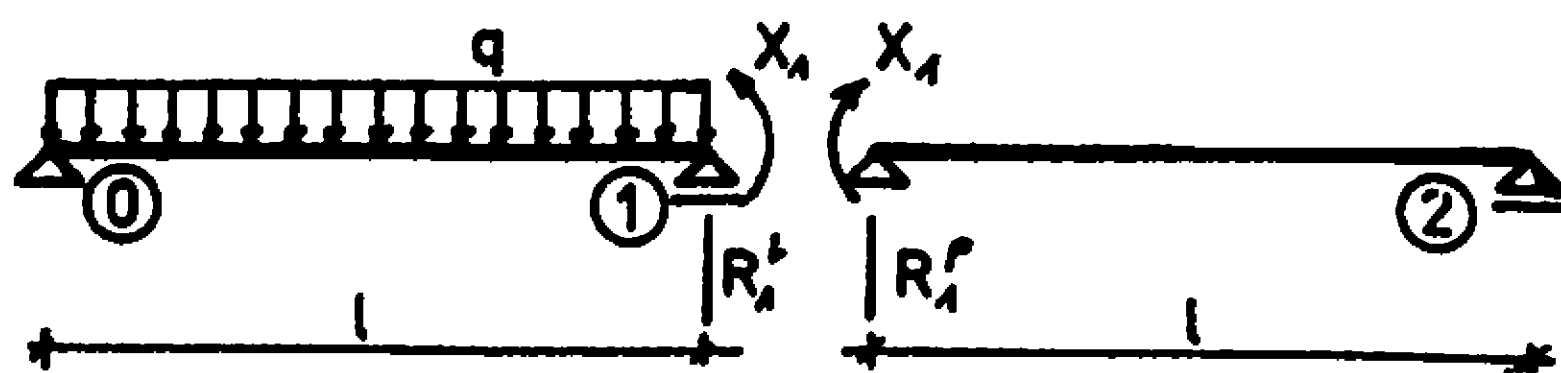
$$R_1^p = -\frac{X_1}{l};$$

$$R_1 = R_1^p + R_1^l = \frac{ql}{2} - \frac{2X_1}{l},$$

$$\delta_1 = \frac{R_1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{ql}{2} - \frac{2X_1}{l} \right).$$

Prawa strona równania trzech momentów jest więc określona następująco:

$$N_{10} = -\frac{ql^3}{4} + 6EJ \cdot \frac{2}{l} \frac{l^3}{30 EJ} \left(\frac{ql}{2} - \frac{2X_1}{l} \right) = -\frac{ql^3}{20} + \frac{4X_1 l}{5}.$$



rys. 7.11.

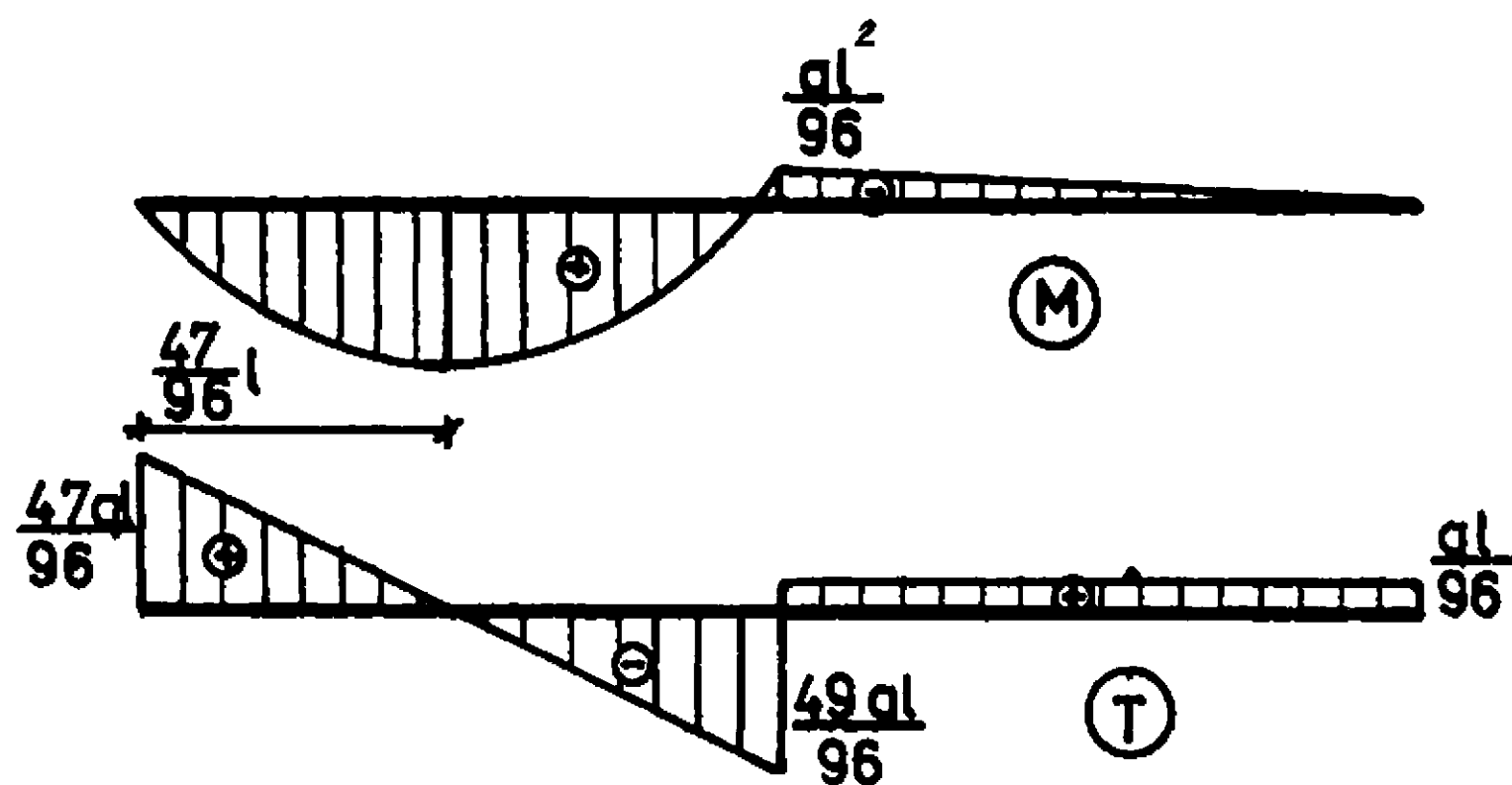
Równanie trzech momentów przyjmuje teraz postać

$$4X_1 l + \frac{4}{5} X_1 l = - \frac{q l^3}{20}.$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy

$$X_1 = - \frac{q l^2}{96} \text{ [kNm]}.$$

Aby otrzymać ostateczne wykresy sił wewnętrznych rozwiązujemy układ statycznie wyznaczalny, obciążony danym obciążeniem zewnętrznym i wyliczonym momentem $X_1 = - \frac{q l^2}{96}$. W wyniku rozwiązania otrzymujemy wykresy momentów zginających sił poprzecznych pokazane na rysunku 7.12.

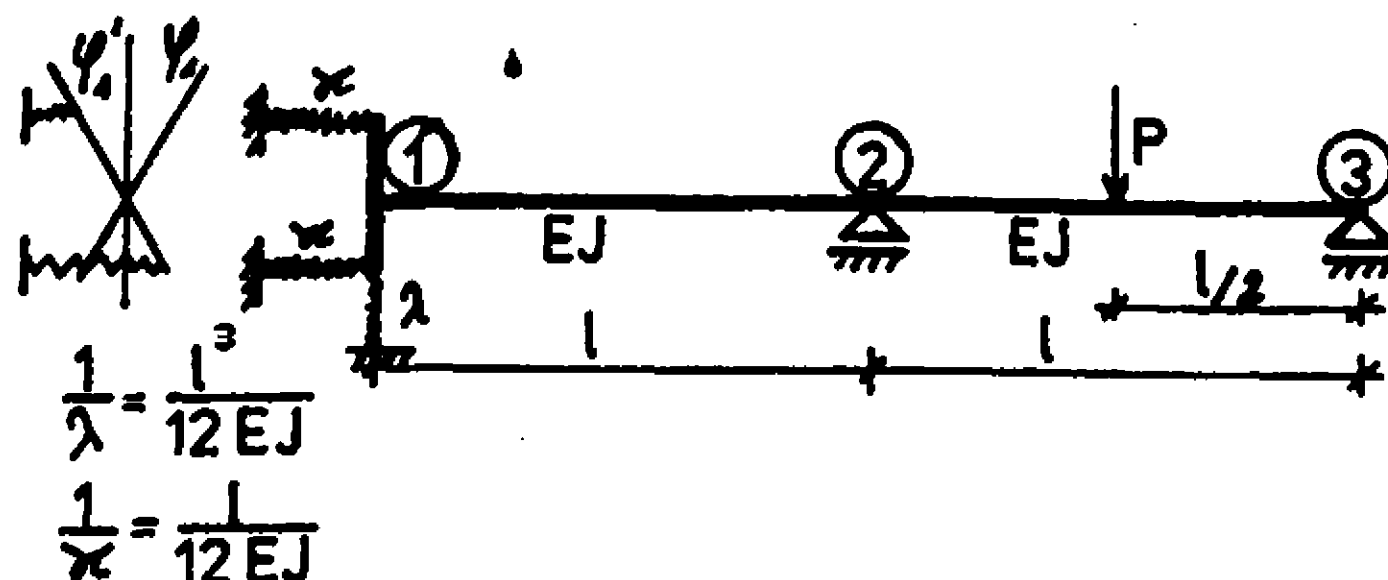


Rys. 7.12

Zadanie 7.3

Dla danej belki ciągłej, przy danym obciążeniu, wyznaczyć wykresy momentów zginających i sił poprzecznych (rys. 7.13).

Przyjąć: $\frac{1}{\lambda} = \frac{l^3}{12 EJ}$, $\frac{1}{\kappa} = \frac{l}{12 EJ}$, $\frac{1}{\kappa}$ - obrót utwierdzenia sprężystego pod wpływem momentu jednostkowego.



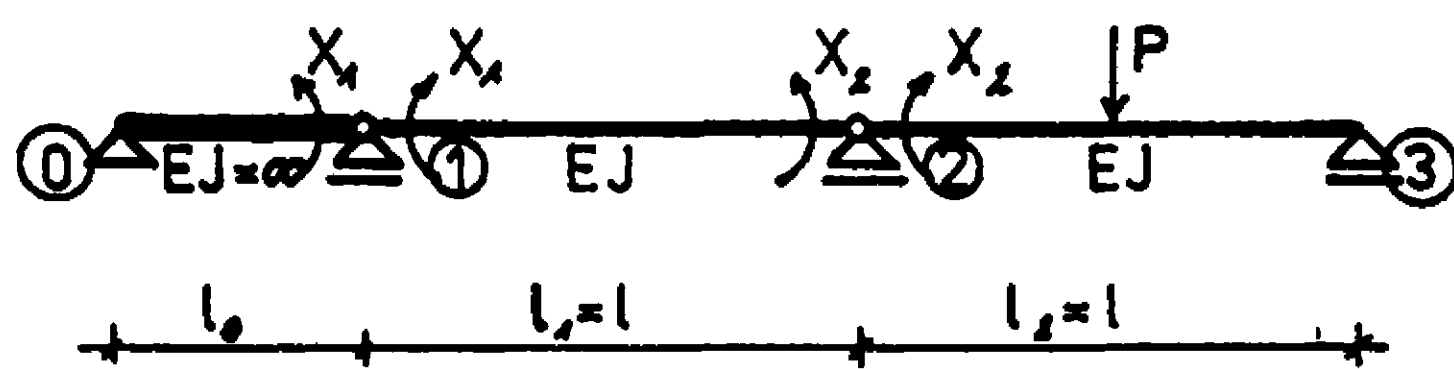
Rys. 7.13

Rozwiązanie

Z warunku ciągłości układu wynika, że płaszczyzna przekroju podporowego belki musi się pokrywać z płaszczyzną utwierdzenia sprężystego. Otrzymujemy zatem równania dodatkowe w postaci

$$\varphi_1 + \varphi_1' = 0 \longrightarrow \varphi_1 = -\varphi_1' = -\frac{x_1}{\lambda}.$$

Belka jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalna. Jako nadliczbowe przyjmujemy momenty zginające nad podporami 1 i 2. Wielkości te wyznaczmy z równań trzech momentów.



Rys. 7.14

Napiszmy kolejno równania trzech momentów dla podpór 1 i 2:

$$X_0 l_0' + 2X_1 (l_0' + l_1') + X_2 l_1' = N_{10},$$

$$X_1 l_1' + 2X_2 (l_1' + l_2') + X_3 l_2' = N_{20}.$$

Przyjmując, że $J_c = J$ otrzymamy $l_1' = l_2' = l$ $l_0' = 0$

$$2X_1 l + X_1 l = N_{10},$$

$$X_1 l + 4X_2 l = N_{20},$$

gdzie

$$N_{10} = 6EJ\varphi_1 - 6EJ \left[\frac{\delta_0}{l_0} - \delta_1 \left(\frac{1}{l_0} + \frac{1}{l} \right) + \frac{\delta_2}{l} \right],$$

$$N_{20} = -Pl^2 \cdot \omega_T' \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{6EJ}{l} \cdot \delta_1.$$

Ponieważ

$$\delta_0 = \delta_2 = 0, \quad \delta_1 = \frac{R_1}{\lambda}, \quad R_1 = \frac{X_2 - X_1}{l}, \quad \omega_T' \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8},$$

otrzymujemy stąd

$$N_{10} = -6EJ \frac{1}{12EJ} X_1 + \frac{6EJ}{l^2} \cdot \frac{l^3}{12EJ} (X_2 - X_1) = -X_1 l + \frac{X_2 l}{2},$$

$$N_{20} = -\frac{3Pl^2}{8} - \frac{6EJ}{l} \frac{l^3}{12EJ} \left(-\frac{X_1}{l} + \frac{X_2}{l} \right) =$$

$$= -\frac{3}{8} Pl^2 + \frac{X_1 l}{2} - \frac{X_2 l}{2}.$$

Wykorzystując wyżej podane wyrażenia, równania trzech momentów przybiorą postać:

$$6X_1 + X_2 = 0,$$

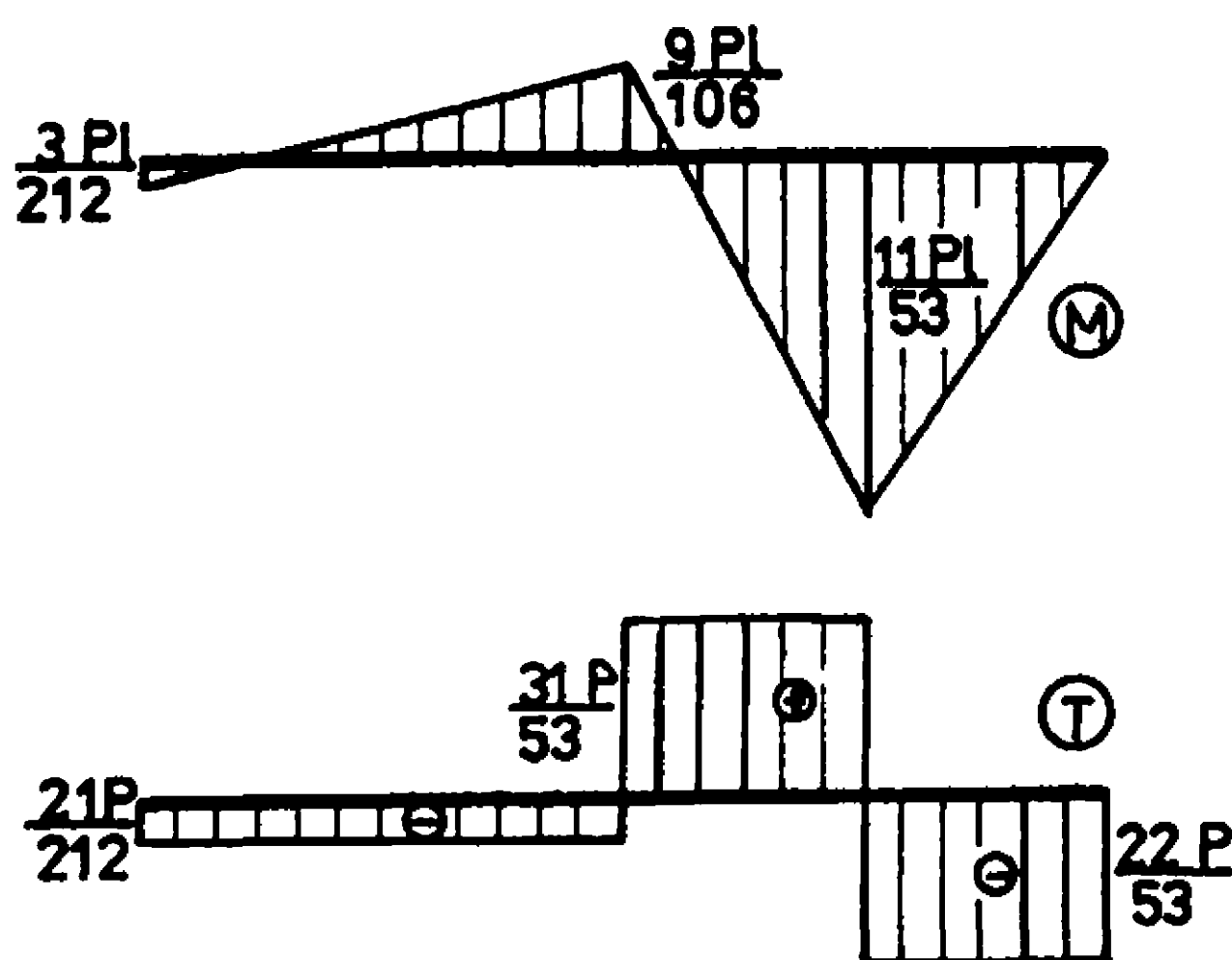
$$X_1 + 9X_2 = -\frac{3}{4} Pl.$$

Rozwiązanie tego układu równań jest następujące:

$$X_1 = \frac{3Pl}{212}, \quad X_2 = -\frac{9Pl}{106}.$$

Dalszy tok postępowania jest podobny jak w zadaniach 7.1, 7.2 i 7.3.

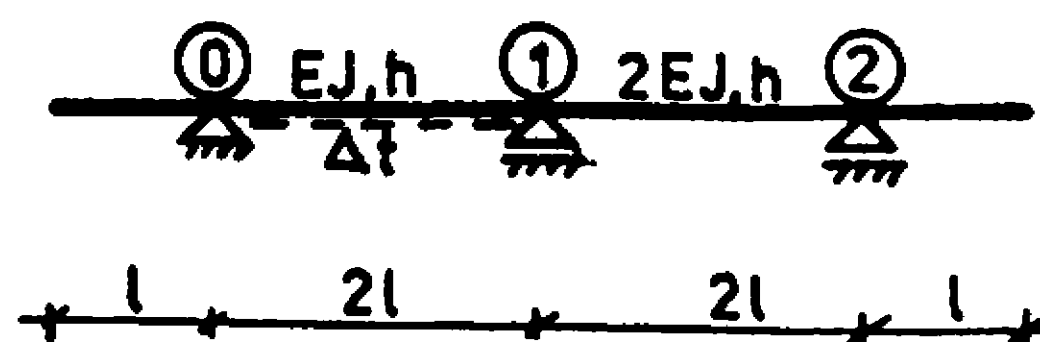
Wykres momentów zginających i sił tnących przedstawiono na rysunku 7.15.



Rys. 7.15

Zadanie 7.4

Dla danej belki ciągłej, przy danym oddziaływaniu temperatury, wyznaczyć wykresy momentów zginających i sił tnących (rys. 7.16).



Rys. 7.16

Rozwiązanie

Belka jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalna. Wielkość nadliczbową wyznaczymy korzystając z równania trzech momentów.

Równanie trzech momentów dla podpory 1:

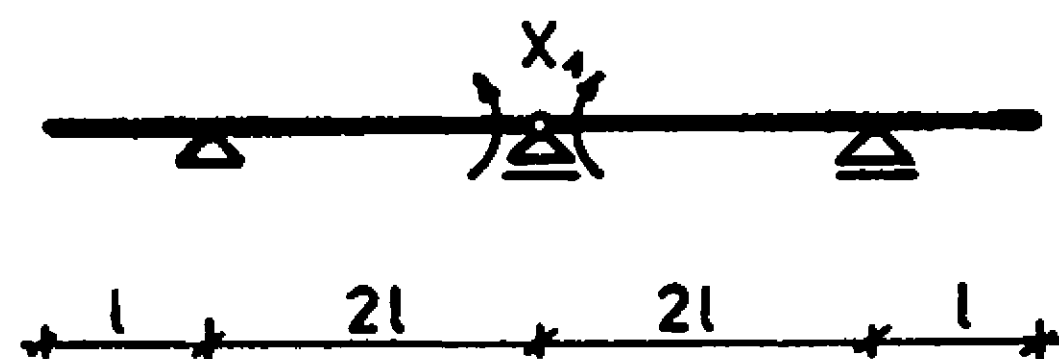
$$X_0 l'_1 + 2X_1 (l'_1 + l'_2) + X_2 l'_2 = N_{10},$$

dla $EJ_c = EJ$,

$$l'_1 = 2l \frac{EJ}{EJ} = 2l, \quad l'_2 = 2l \frac{EJ}{2EJ} = l.$$

Momenty nad podporami 0 i 2 są równe zero i stąd

$$6X_1 l = N_{10},$$



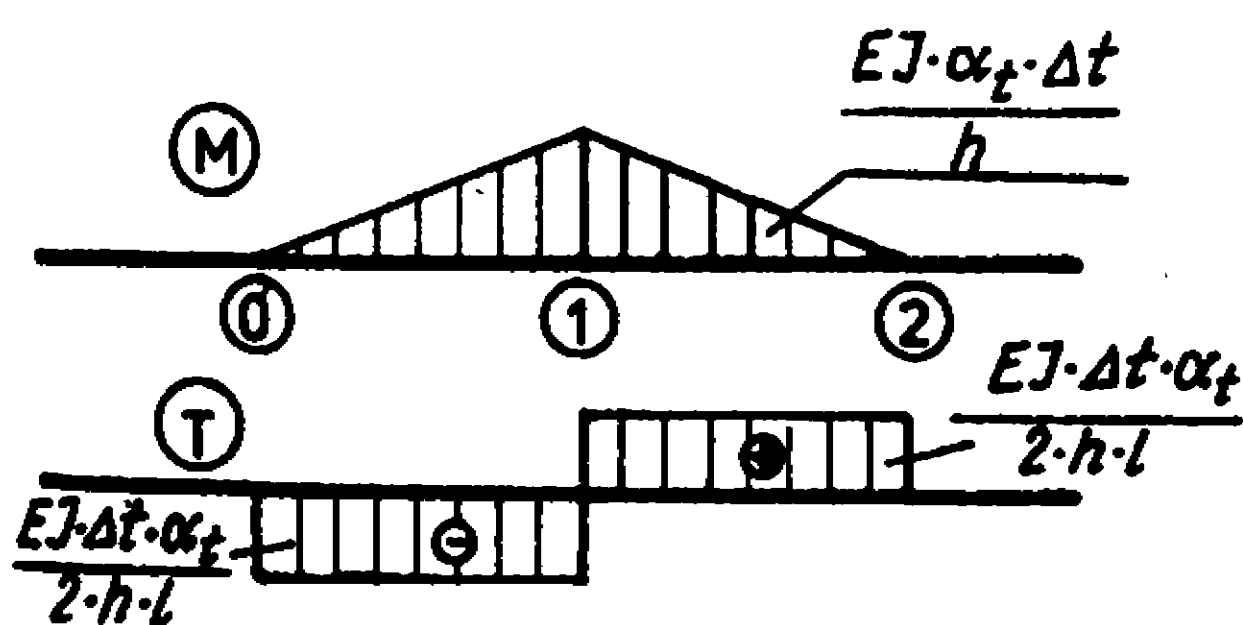
Rys. 7.17

gdzie

$$N_{10} = -3EJ \cdot \Delta t \cdot \alpha_t \left(\frac{2l}{h} \right) = -6 \frac{EJ \cdot \Delta t \cdot \alpha_t \cdot l}{h}.$$

Moment zginający nad podporą 1 jest równy

$$X_1 = - \frac{EJ \cdot \Delta t \cdot \alpha_t}{h}.$$



Rys. 7.18

W celu otrzymania wykresów sił tnących i momentów zginających rozwiązujemy układ statycznie wyznaczalny obciążony wyliczonym momentem nadliczbowym $X_1 = - \frac{EJ \cdot \Delta t \cdot \alpha_t}{h}$. Wykresy momentów zginających i sił tnących przedstawiono na rysunku 7.18.

Zadanie 7.5

Dla podanych belek ciągłych wykonać wykresy momentów zginających i sił tnących (rys. 7.19a-h).

Dane:

a) $EJ = 20 \text{ kNm}^2$, $\delta_1 = 0,05 \text{ m}$, $\delta_2 = 0,10 \text{ m}$;

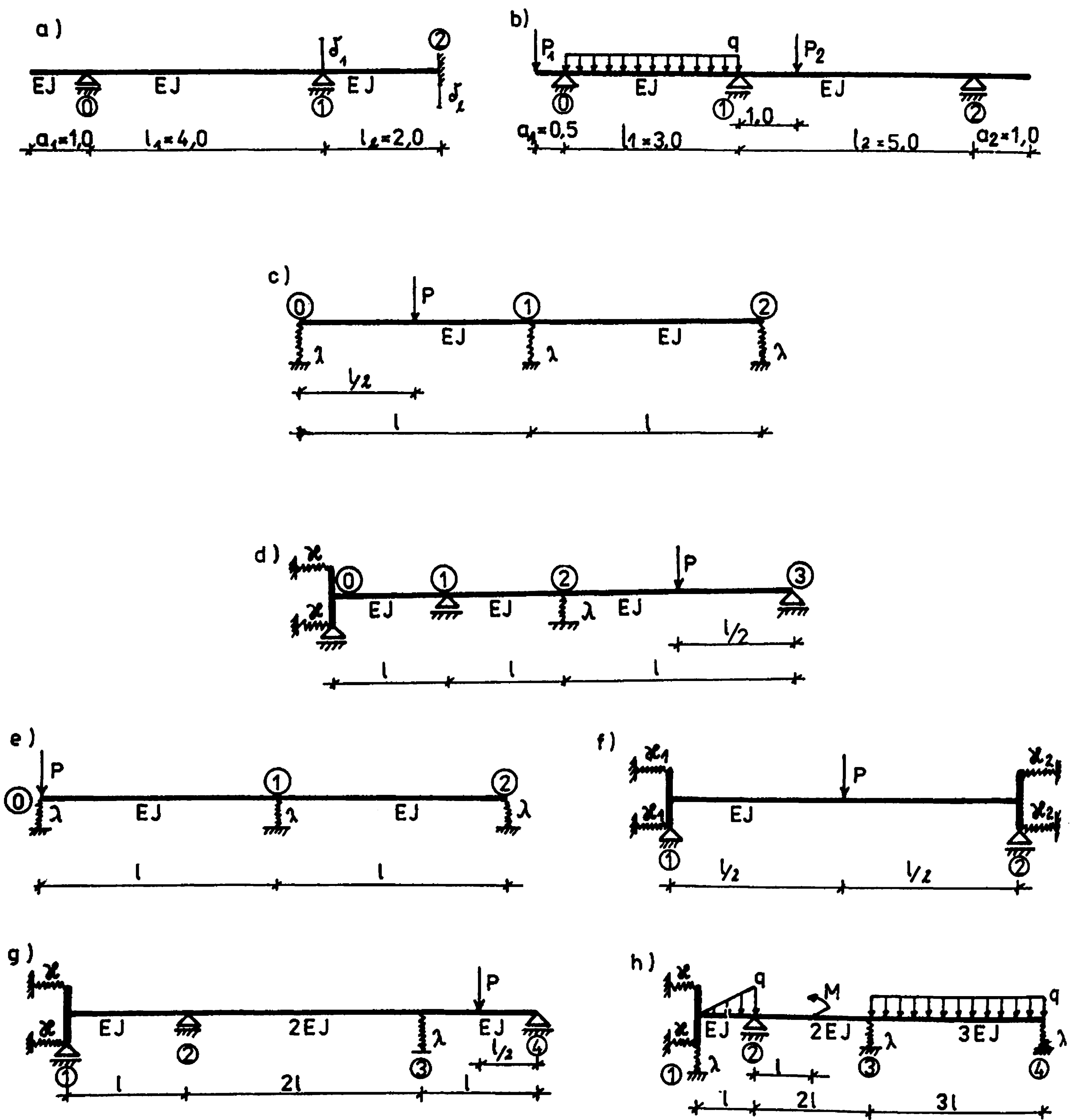
b) $P_1 = 20 \text{ kN}$, $P_2 = 30 \text{ kN}$, $q = 2 \text{ kN/m}$;

c) $\frac{1}{\lambda} = \frac{1^3}{60EJ}$;

d) $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2EJ}$, $\frac{1}{\lambda} = \frac{1^3}{6EJ}$;

e) $\frac{1}{\lambda} = \frac{1^3}{60EJ}$,

f) $\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{8EJ}$, $\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{16EJ}$;



Rys. 7.19a-h

$$g) \frac{1}{\lambda} = \frac{l^3}{6EJ}, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{l}{2EJ};$$

$$h) \frac{1}{\lambda} = \frac{l^3}{12EJ}, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{l}{4EJ}, \quad M = 2 \text{ kNm}, \quad q = 1 \text{ kN/mb}.$$

Rozwiązanie - samodzielne.

8. UKŁADY RAMOWE STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE

Tok postępowania przy rozwiązywaniu układów statycznie niewyznaczalnych metodą sił.

1. Określamy stopień statycznej niewyznaczalności układu ze wzoru

$$n = r + 3z - p - 3,$$

gdzie: r - ilość składowych reakcji układu,

z - ilość pól zamkniętych,

p - ilość przegubów (nie licząc podparć przegubowych).

2. Przyjmujemy układ podstawowy i zakładamy nadliczbowe.

3. Tworzymy równania kanoniczne metody sił za pomocą których wyznaczać będziemy wielkości nadliczbowe, mają one postać

$$\sum_{k=1}^n \delta_{ik} X_k + \delta_{io} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

4. Obliczamy współczynnik δ_{ik} i δ_{io} ze wzorów

$$\delta_{ik} = \int_s \left(\frac{M_i M_k}{EJ} + \frac{N_i N_k}{EA} + \kappa \frac{T_i T_k}{GA} \right) dS,$$

$$\delta_{io} = \int_s M_i \left[\left(\frac{M_o}{EJ} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \right) + N_i \left(\frac{N_o}{EA} + \alpha_t t \right) + \kappa \frac{T_i T_o}{GA} \right] dS,$$

gdzie: M_i, N_i, T_i - oznaczają odpowiednio moment zginający, siłę normalną i siłę poprzeczną od stanu $X_i = 1$,

M_k, N_k, T_k - oznaczają odpowiednio moment zginający, siłę normalną i siłę poprzeczną od stanu $X_k = 1$,

M_o, N_o, T_o - oznaczają odpowiednio moment zginający, siłę normalną i siłę poprzeczną od obciążenia zewnętrznego.

5. Rozwiązujemy układ równań kanonicznych.

6. Określamy końcowe wielkości statyczne korzystając z zasady superpozycji

$$M = M_0 + \sum_{i=1}^n M_i X_i,$$

$$N = N_0 + \sum_{i=1}^n N_i X_i,$$

$$T = T_0 + \sum_{i=1}^n T_i X_i,$$

$$R = R_0 + \sum_{i=1}^n R_i X_i.$$

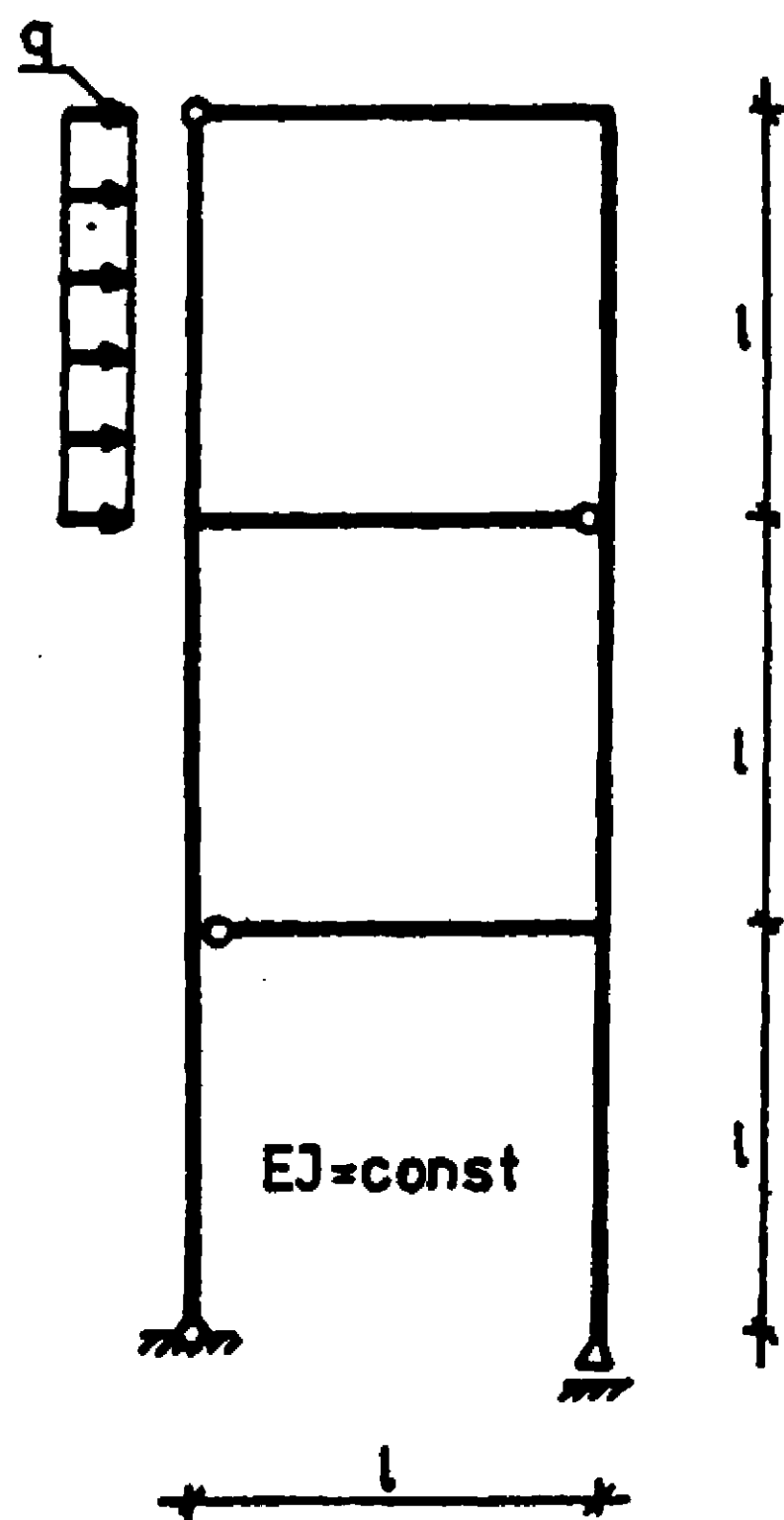
Jeżeli podpory doznały osiadania o wielkości Δ_k , to współczynnik δ_{i0} obliczamy ze wzoru

$$\delta_{i0} = - \sum_{k=1}^n D_k \Delta_k,$$

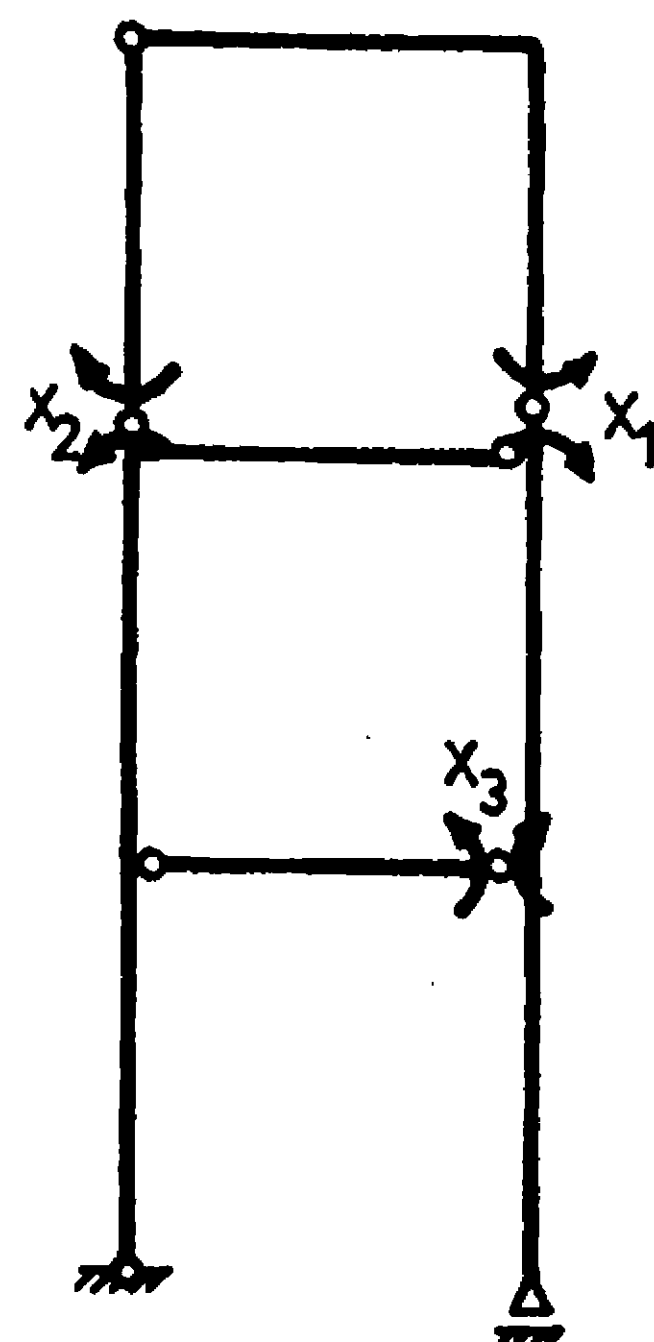
gdzie: D_k oznacza reakcję na k -tej podporze od stanu $X_i = 1$.

Zadanie 8.1

Dla danego układu ramowego, przy danym obciążeniu, wykonać wykresy momentów zginających (rys. 8.1).



Rys. 8.1



Rys. 8.2

Rozwiązanie

Obliczymy stopień statycznej niewyznaczalności układu

$$n = r + 3z - 3 - p,$$

$$r = 3, \quad z = 2, \quad p = 3,$$

$$n = 3 + 3 \cdot 2 - 3 - 3 = 3.$$

Przyjmijmy następujący układ podstawowy. Nieznane wielkości statyczne wyznaczmy z następującego układu równań

$$[\delta_{ik}] \{X_k\} + \{\delta_{i0}\} = \{0\}.$$

W celu wyznaczenia współczynników macierzy podatności δ_{ik} i wyrazów wolnych δ_{i0} wykonujemy następujące wykresy momentów (rys. 8.3, 8.4, 8.5, 8.6).

Obliczamy współczynniki $\delta_{ik} = \int_S \frac{M_i M_k}{EJ} dS$ (uwzględniono tylko wpływ momentów zginających)

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 \right) = 2,333 \frac{1}{EJ},$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \right) = -1,167 \frac{1}{EJ},$$

$$\delta_{13} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \right) = 0,5 \frac{1}{EJ},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 = 1,333 \frac{1}{EJ},$$

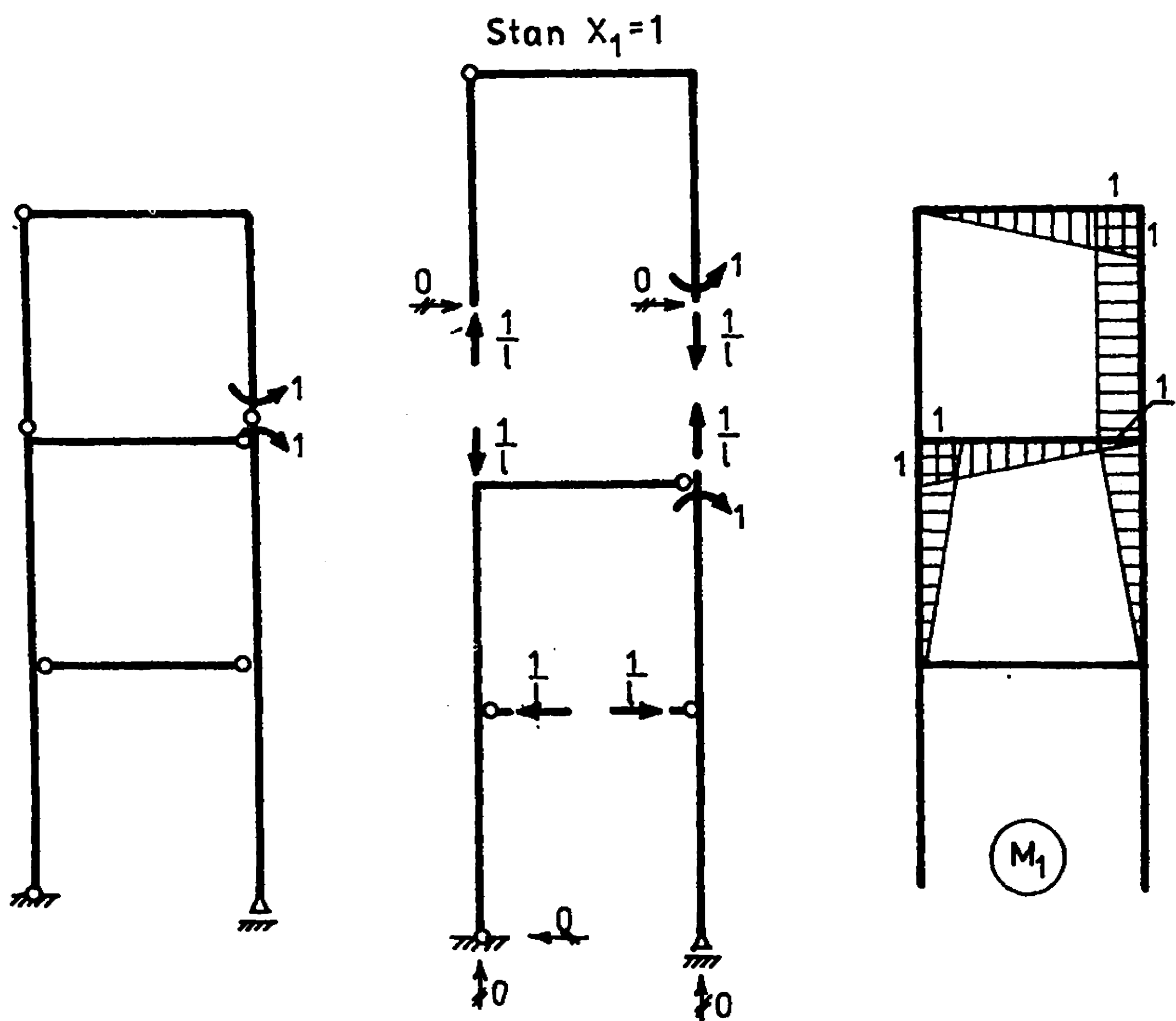
$$\delta_{23} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \right) = -0,333 \frac{1}{EJ}$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 = 1,333 \frac{1}{EJ}$$

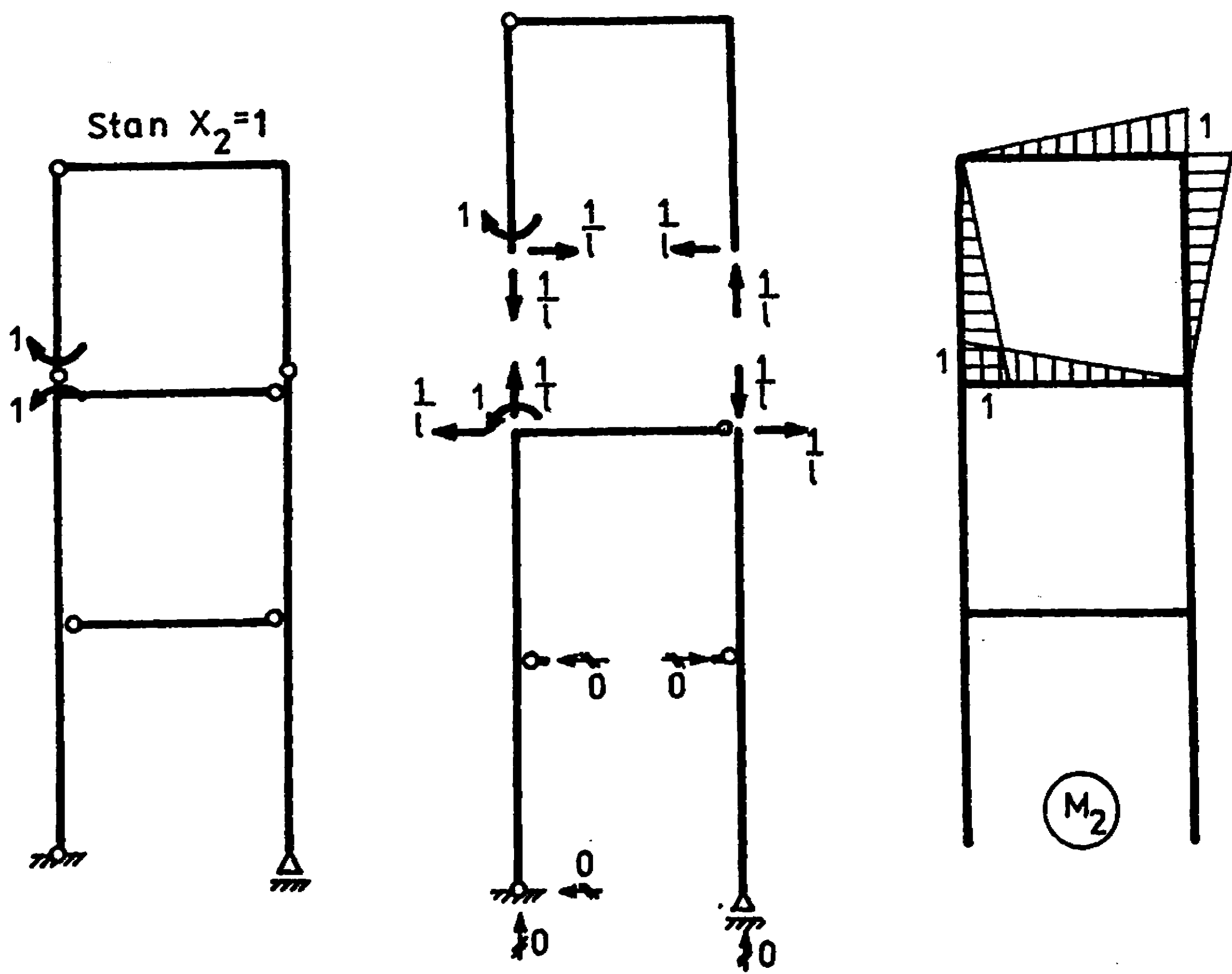
$$\delta_{10} = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} \cdot 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{3} 2ql^2 \cdot 1 \cdot 1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \left(\frac{2}{3} 2ql^2 + \frac{1}{3} ql^2 \right) \right] = 1,083 \frac{ql^3}{EJ},$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{3} \frac{ql^2}{8} \cdot 1 \cdot 1 - \frac{1}{3} 2ql^2 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \right) = -0,292 \frac{ql^2}{EJ},$$

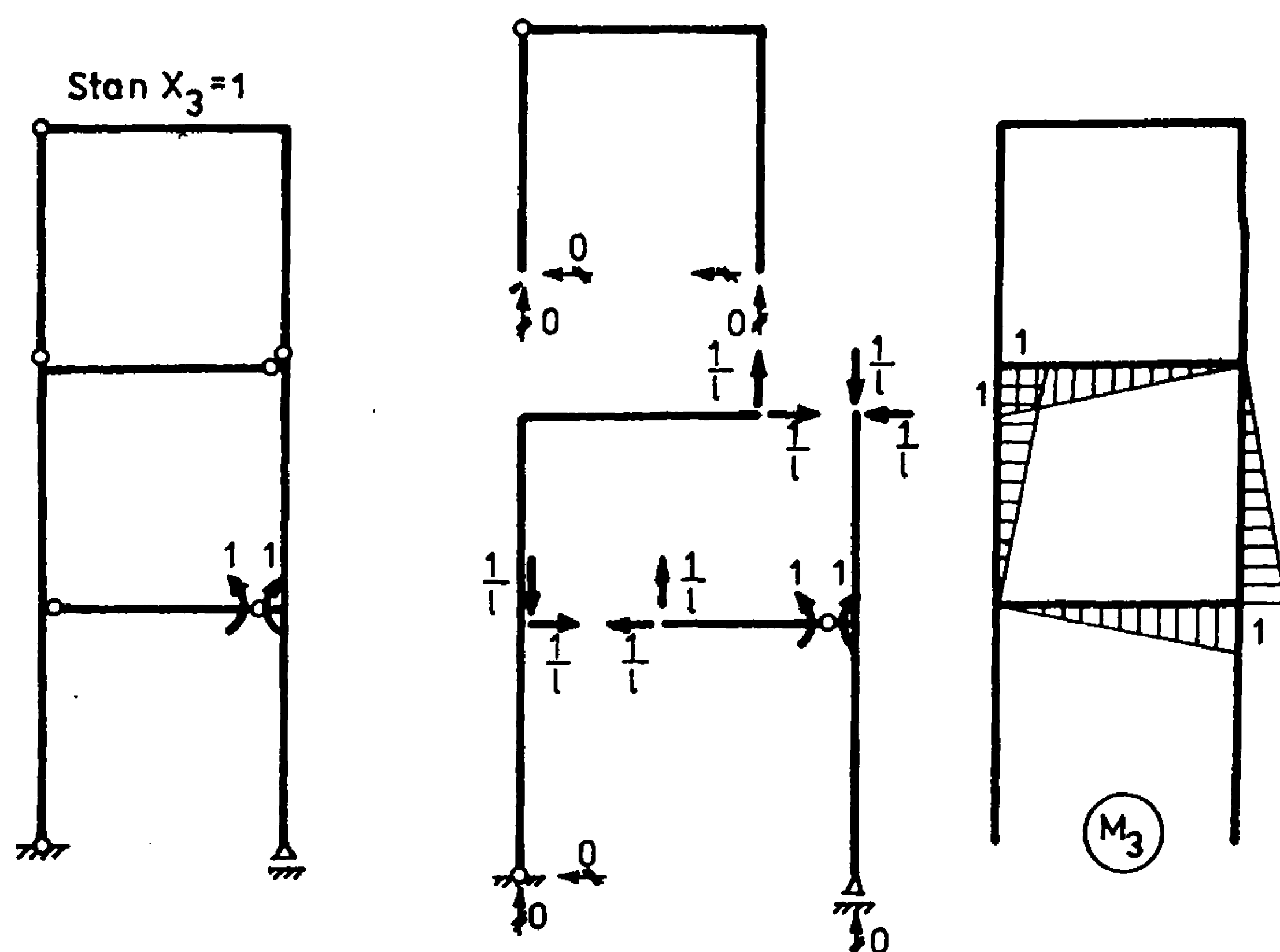
$$\delta_{30} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{3} 2ql^2 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \left(\frac{2}{3} 2ql^2 + \frac{1}{3} ql^2 \right) \right] = 1,500 \frac{ql^3}{EJ},$$



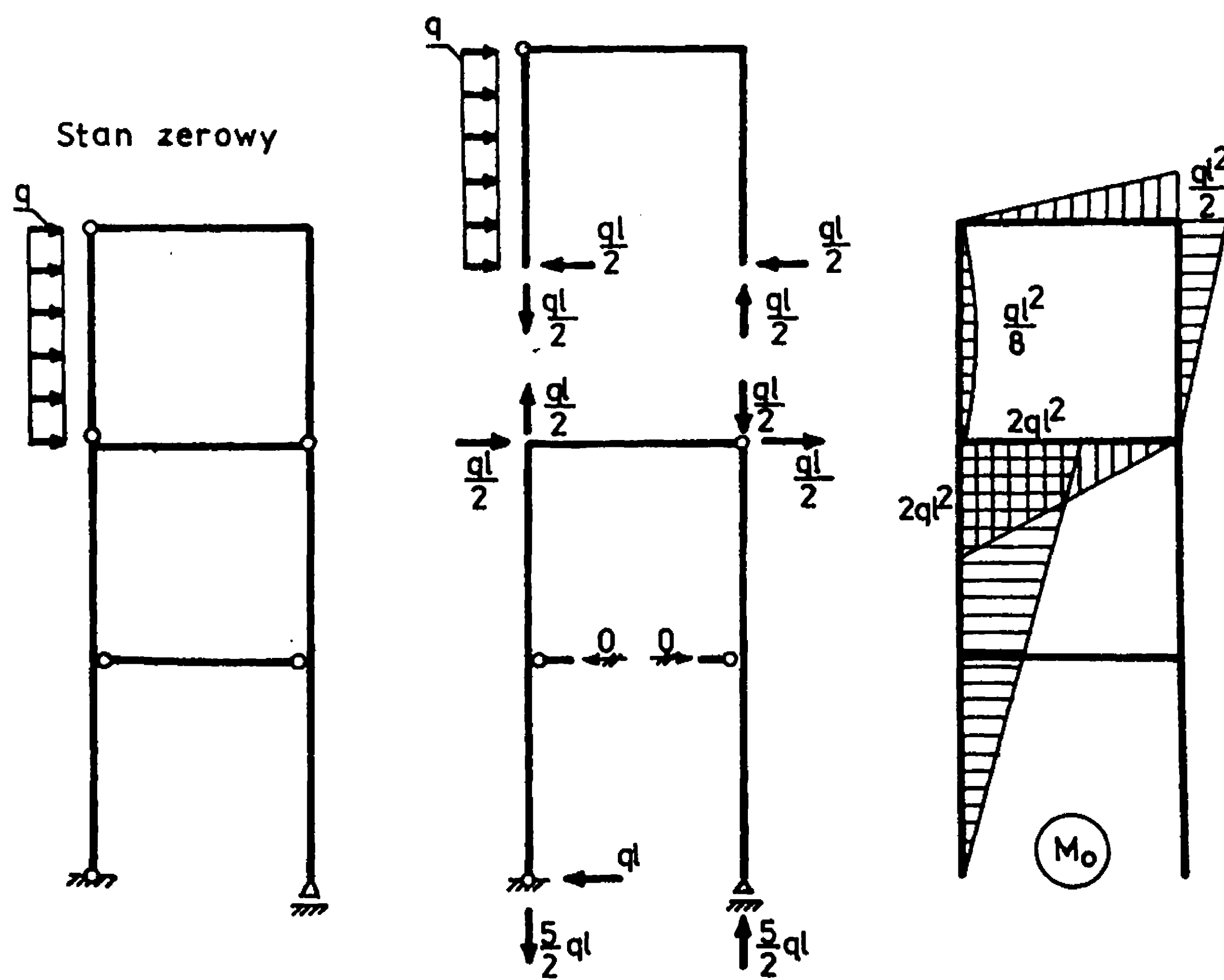
Rys. 8.3



Rys. 8.4



Rys. 8.5



Rys. 8.6

$$[\delta_{ik}] = \frac{1}{EJ} \begin{bmatrix} 2,333 & -1,167 & 0,5 \\ -1,167 & 1,333 & -0,333 \\ 0,5 & -0,333 & 1,333 \end{bmatrix} \quad \{\delta_{i0}\} = \frac{ql^2}{EJ} \begin{bmatrix} 1,083 \\ -0,292 \\ 1,500 \end{bmatrix}$$

Układ równań kanonicznych ma postać

$$\frac{1}{EJ} \begin{bmatrix} 2,333 & -1,67 & 0,5 \\ -1,167 & 1,333 & -0,333 \\ 0,5 & -0,333 & 1,333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} + \frac{ql^3}{EJ} \begin{Bmatrix} 1,083 \\ -0,292 \\ 1,500 \end{Bmatrix} = \{0\}.$$

Powyższy układ równań rozwiążemy poprzez znalezienie macierzy odwrotnej $[\beta_{ik}] = [\delta_{ik}]^{-1}$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \end{Bmatrix}$$

Współczynniki macierzy odwrotnej obliczamy w następujący sposób

$$\beta_{ik} = -(-1)^{i+k} \frac{\Delta_{ik}}{\Delta},$$

gdzie: Δ jest wyznacznikiem głównym macierzy $[\delta_{ik}]$, a Δ_{ik} są podwyznacznikami powstałymi po skreśleniu odpowiednio i -tego wiersza i k -tej kolumny.

W rozważanym zadaniu wyznacznik główny układu jest równy $\Delta = 2,1267 \frac{1}{EJ}$, a współczynniki macierzy odwrotnej wynoszą:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= -0,7834 \frac{EJ}{1}, & \beta_{12} &= \beta_{21} = -0,6532 \frac{EJ}{1}, \\ \beta_{13} &= \beta_{31} = 0,1307 \frac{EJ}{1}, & \beta_{22} &= -1,3448 \frac{EJ}{1}, & \beta_{33} &= -0,8219 \frac{EJ}{1}, \\ \beta_{23} &= \beta_{32} = -0,0909 \frac{EJ}{1}. \end{aligned}$$

Znając współczynniki β_{ik} macierzy odwrotnej nadliczbowe wyznaczmy z następujących związków:

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{11} \delta_{10} + \beta_{12} \delta_{20} + \beta_{13} \delta_{30} = -0,462 ql^2, \\ x_2 &= \beta_{21} \delta_{10} + \beta_{22} \delta_{20} + \beta_{23} \delta_{30} = -0,451 ql^2, \\ x_3 &= \beta_{31} \delta_{10} + \beta_{32} \delta_{20} + \beta_{33} \delta_{30} = -1,065 ql^2. \end{aligned}$$

Rzędne wykresu momentów zginających obliczamy ze związku $M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3$. Wykres ten przedstawiono na rysunku 8.7.

Zadanie 8.2

Dla danego układu ramowego przy zadanym obciążeniu wykonać wykresy momentów zginających, sił poprzecznych i sił normalnych (rys. 8.8).

Rozwiązanie

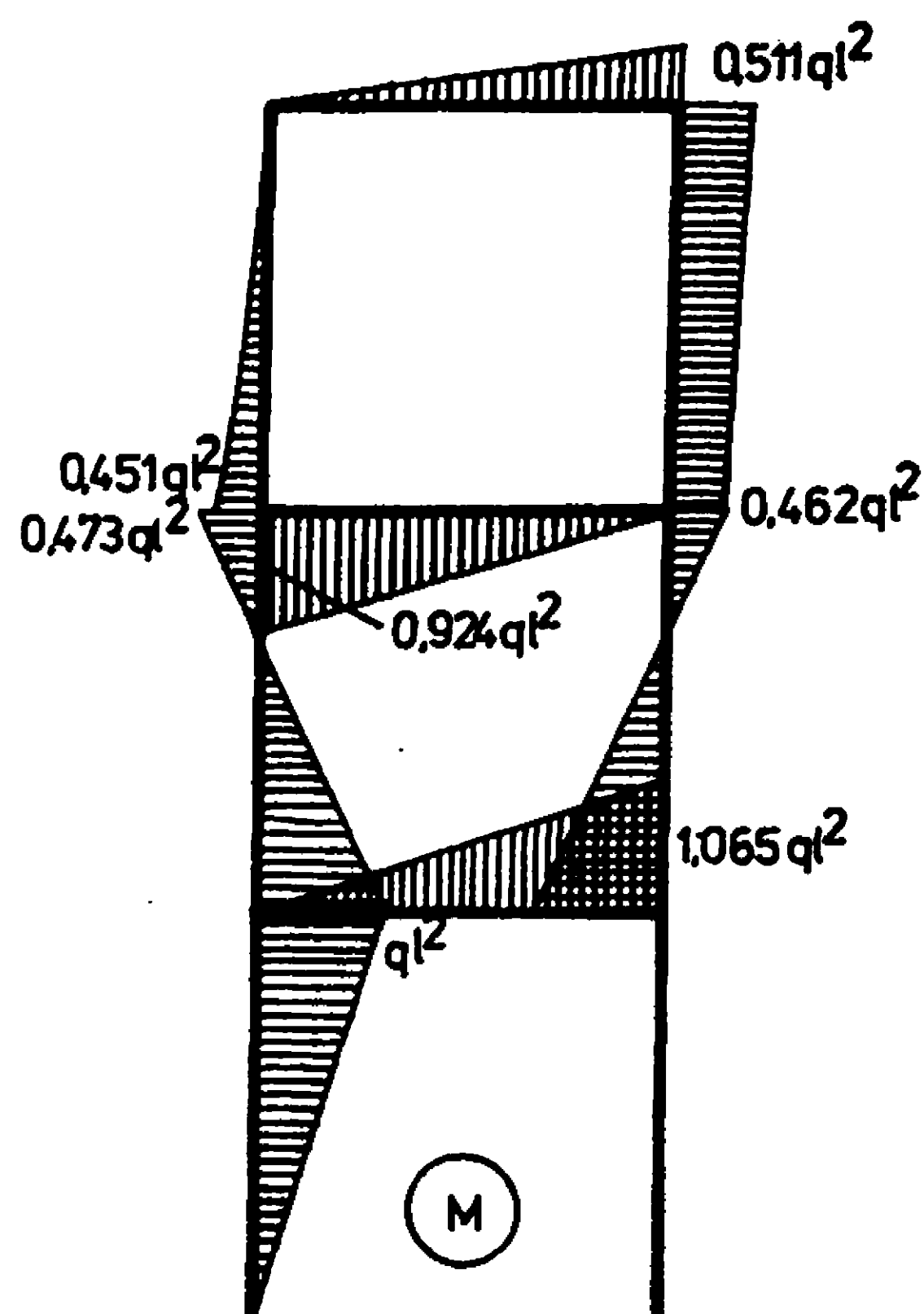
Stopień statycznej niewyznaczalności układu wyznaczmy ze wzoru

$$n = r + 3z - 3 - p,$$

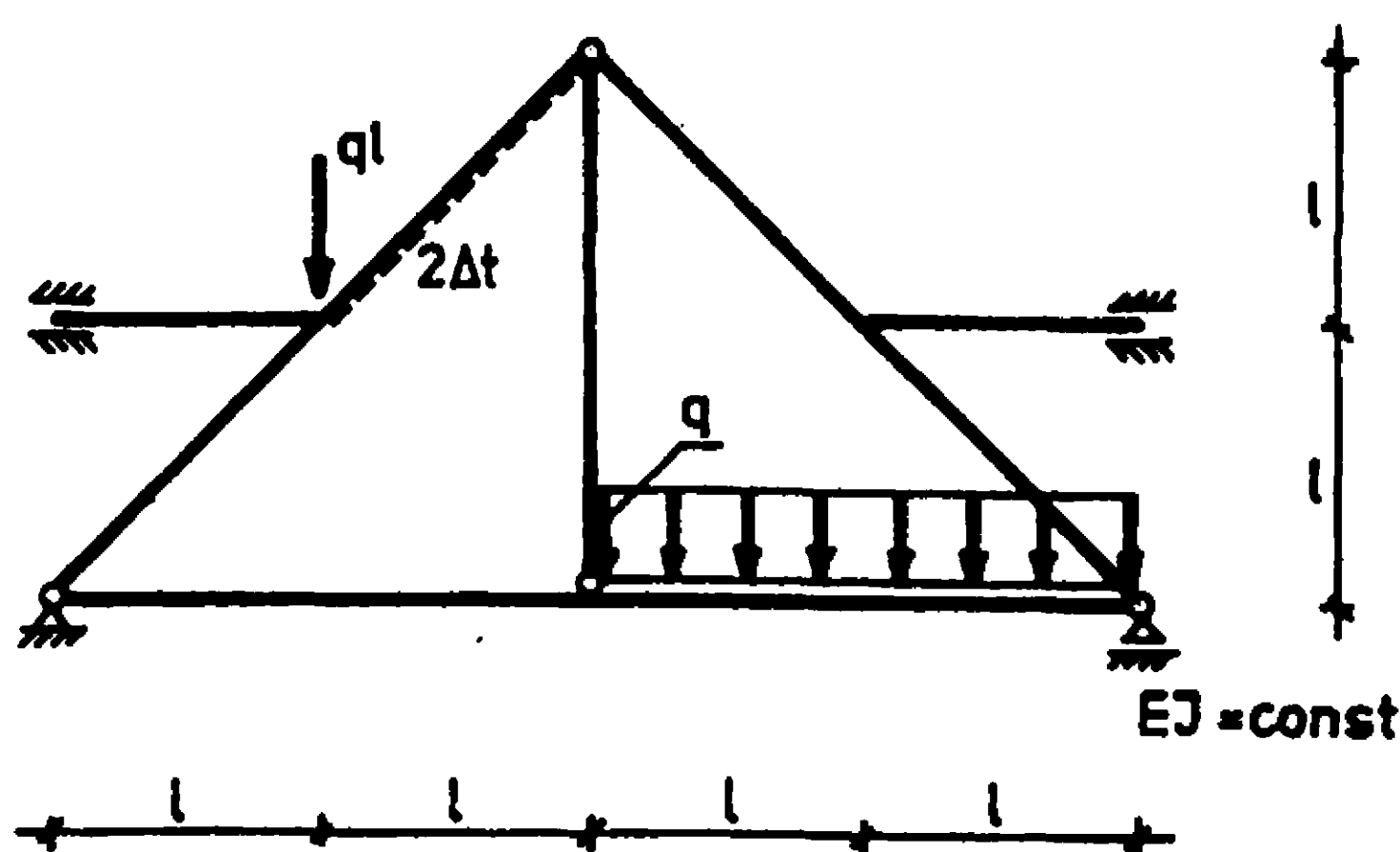
W rozważanym zadaniu mamy $r = 7$, $z = 2$, $p = 5$, zatem

$$n = 7 + 3 \cdot 2 - 3 - 5 = 5.$$

Rozważany układ jest pięciokrotnie statycznie niewyznaczalny.



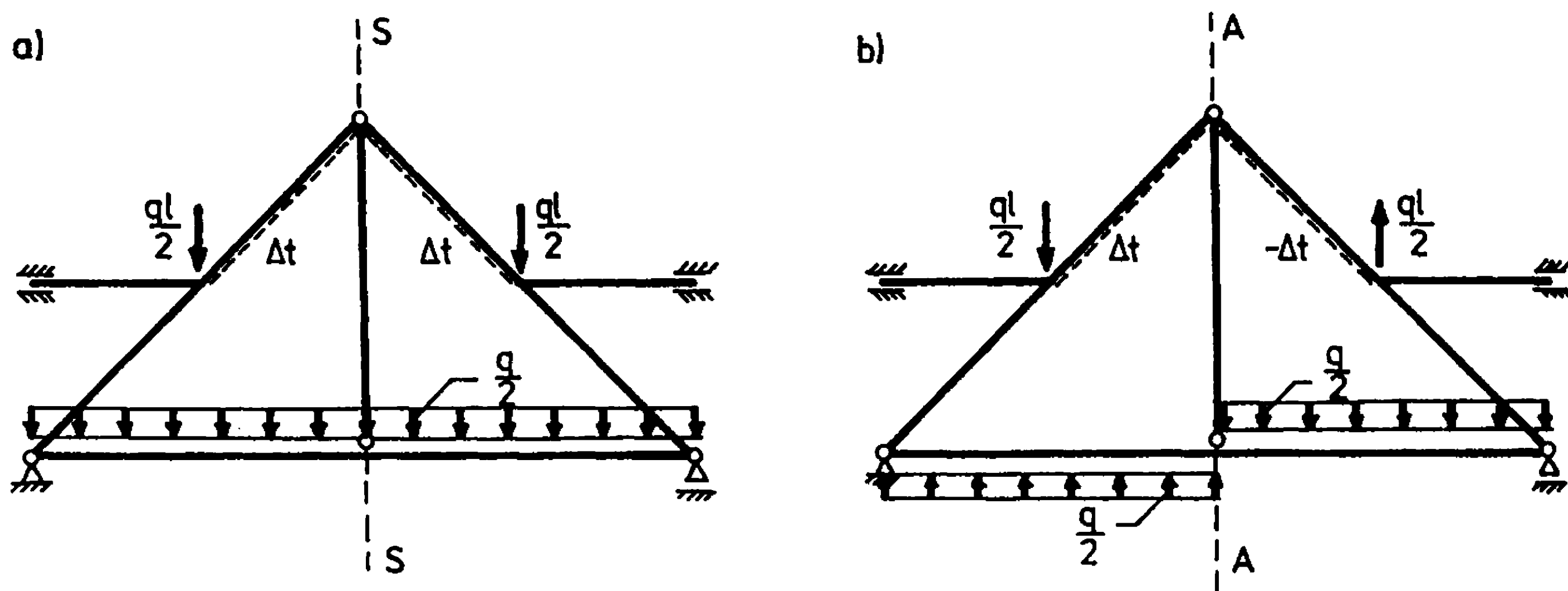
Rys. 8.7



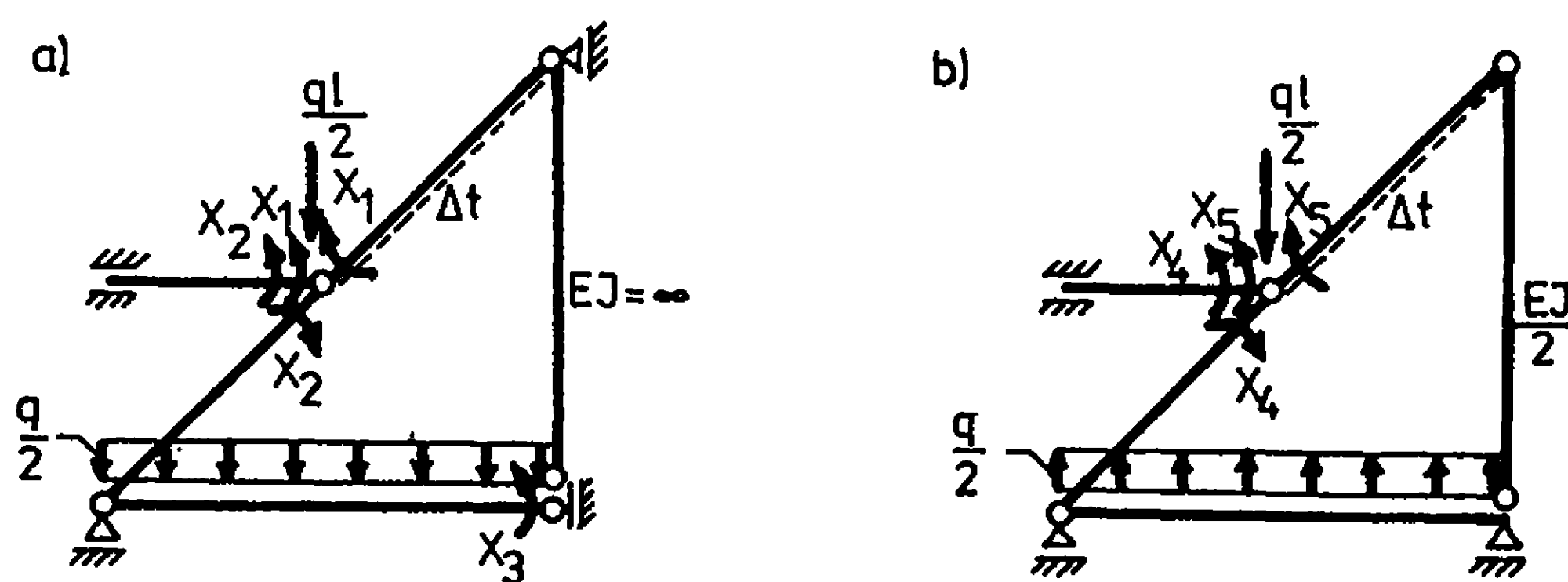
Rys. 8.8

Wykorzystując zasadę symetrii i antysymetrii obciążenia układu symetrycznego, możemy ominąć konieczność rozwiązania układu pięciu równań.

Rozłożmy obciążenie zewnętrzne na symetryczne i antysymetryczne względem osi symetrii układu (rys. 8.9). Schematy zredukowane dla obciążenia symetrycznego i antysymetrycznego wraz z nadliczbowymi przedstawiono na rysunku 8.10.



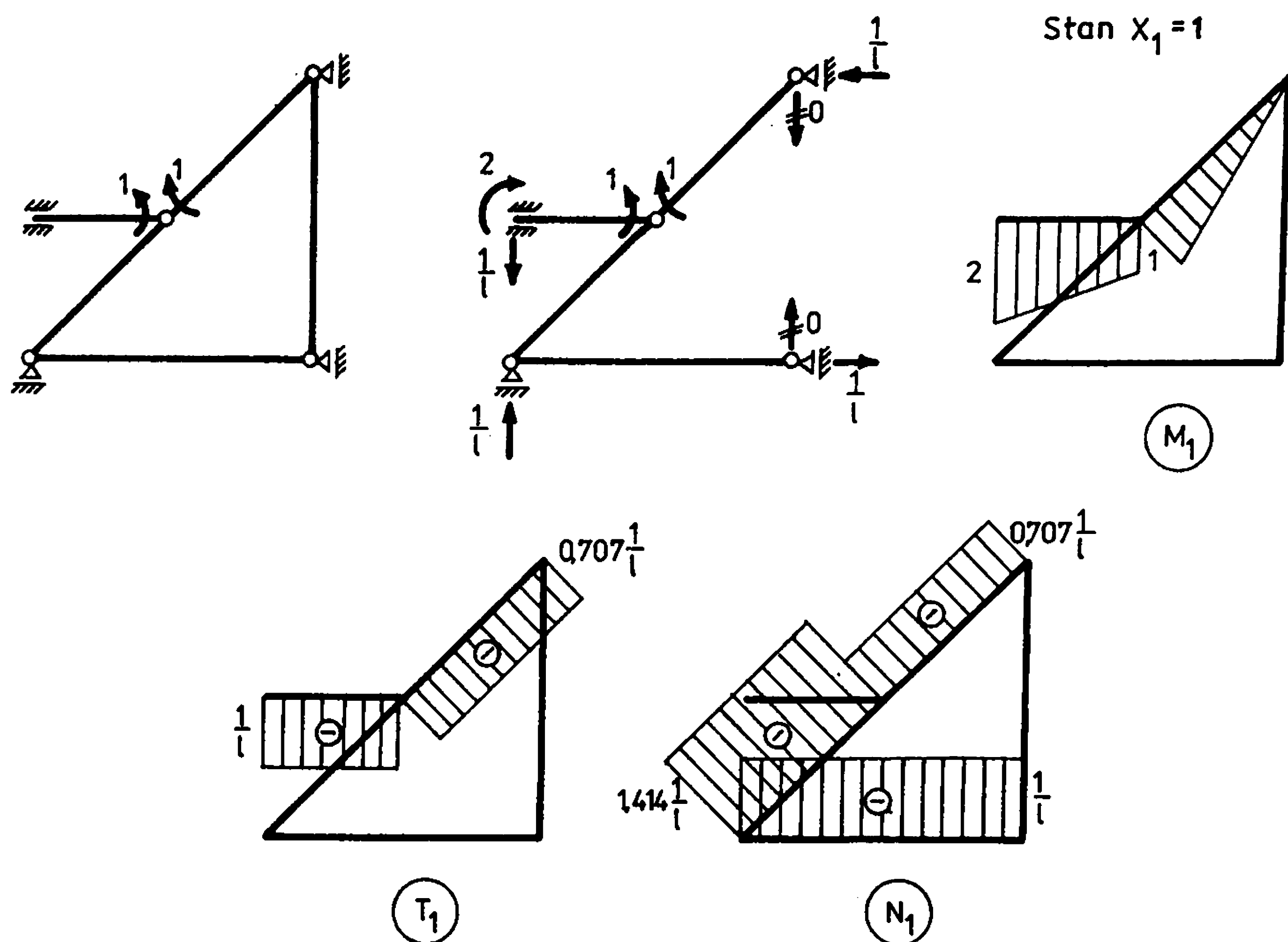
Rys. 8.9a-b



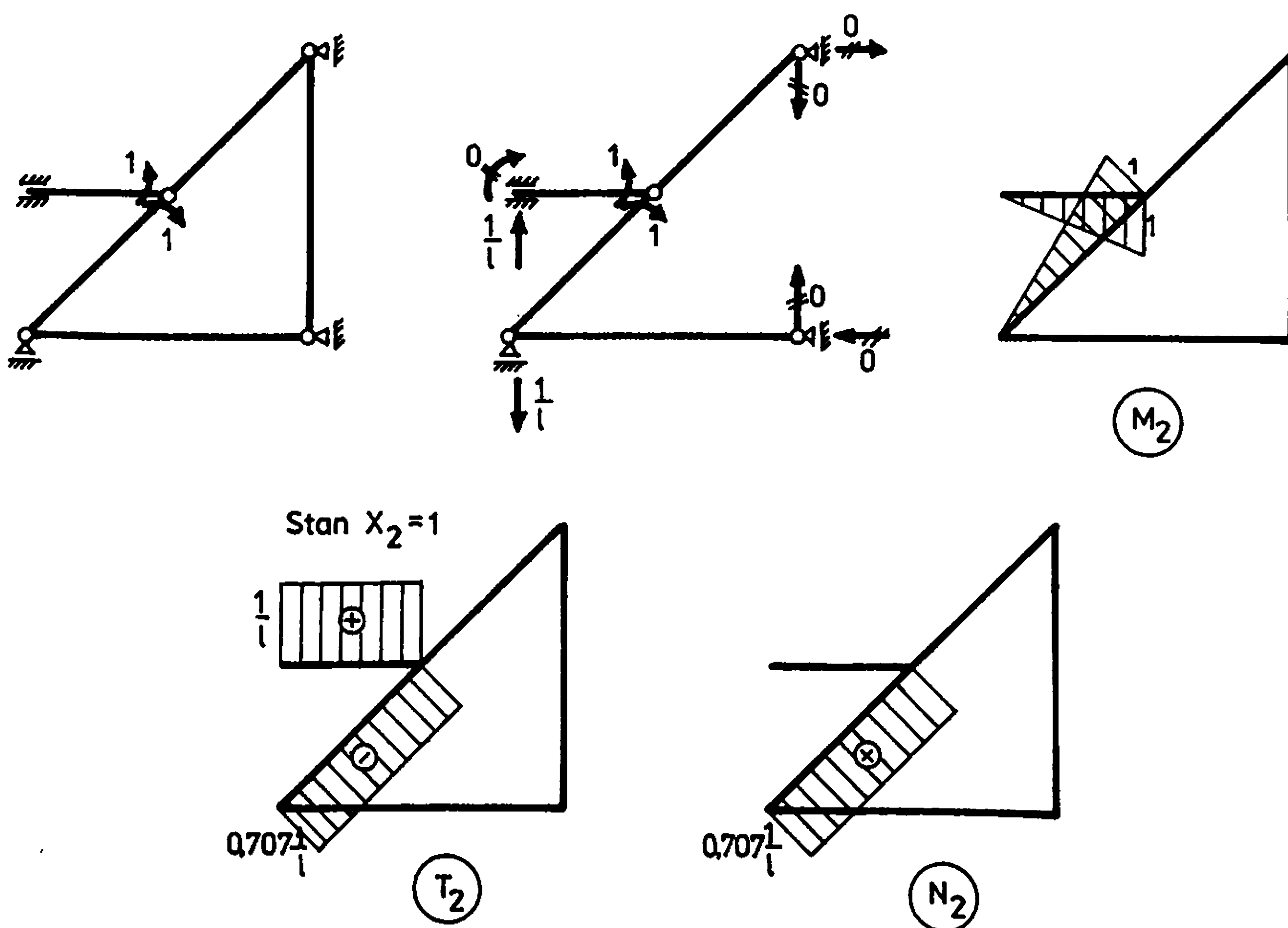
Rys. 8.10a-b

Stopień statycznej niewyznaczalności dla schematu zredukowanego dla obciążenia symetrycznego wynosi $n^s = 6 + 3 \cdot 1 - 3 - 3 = 3$, natomiast dla obciążenia antysymetrycznego $n^a = 4 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 2$.

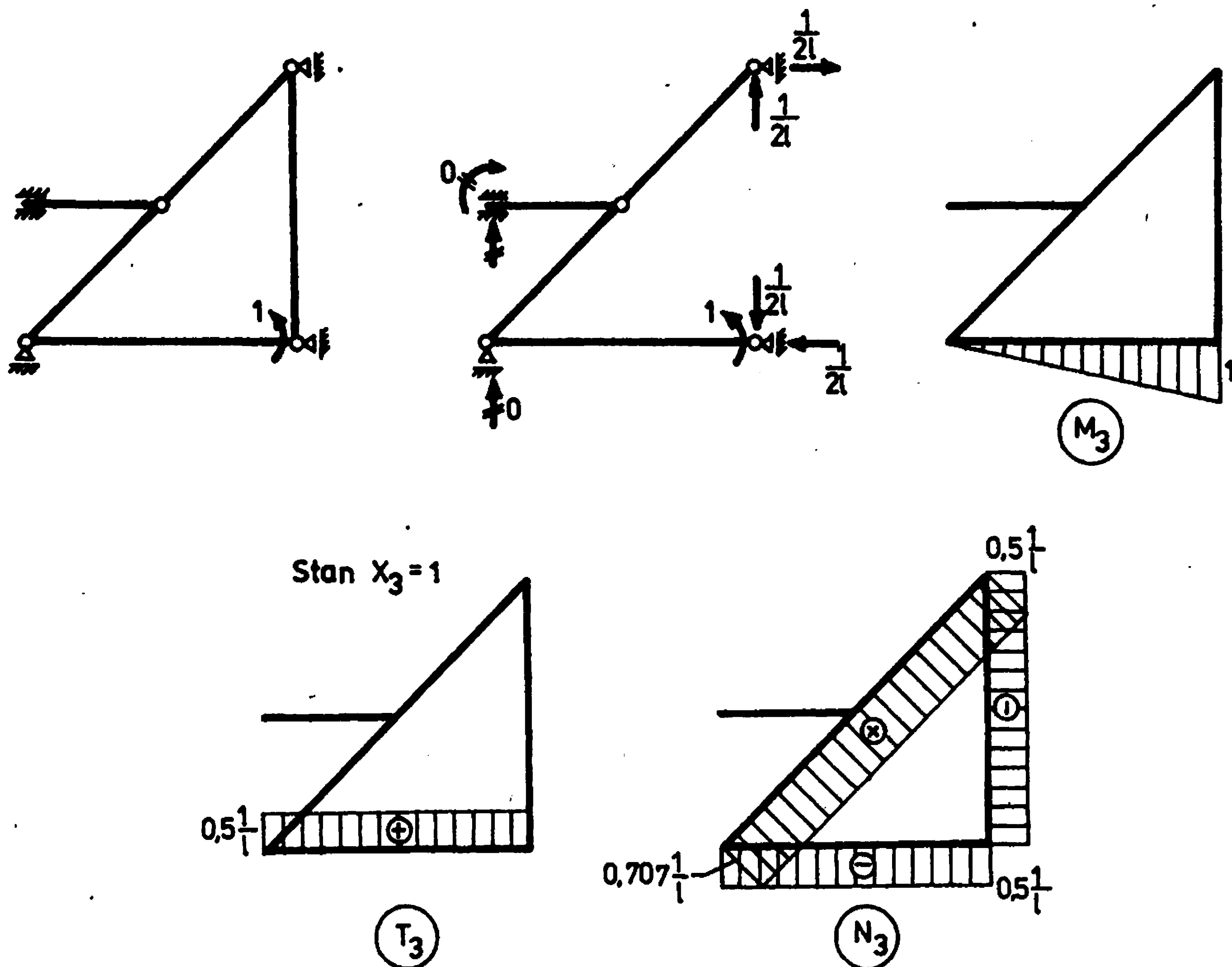
A. Rozważmy najpierw układ, który jest obciążony symetrycznie względem osi symetrii (rys. 8.10a).



Rys. 8.11



Rys. 8.12



Rys. 8.13

Obliczmy współczynniki δ_{ij} i δ_{i0}

$$\delta_{10} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot 2 \right) = -0,4167 \frac{ql^3}{EJ},$$

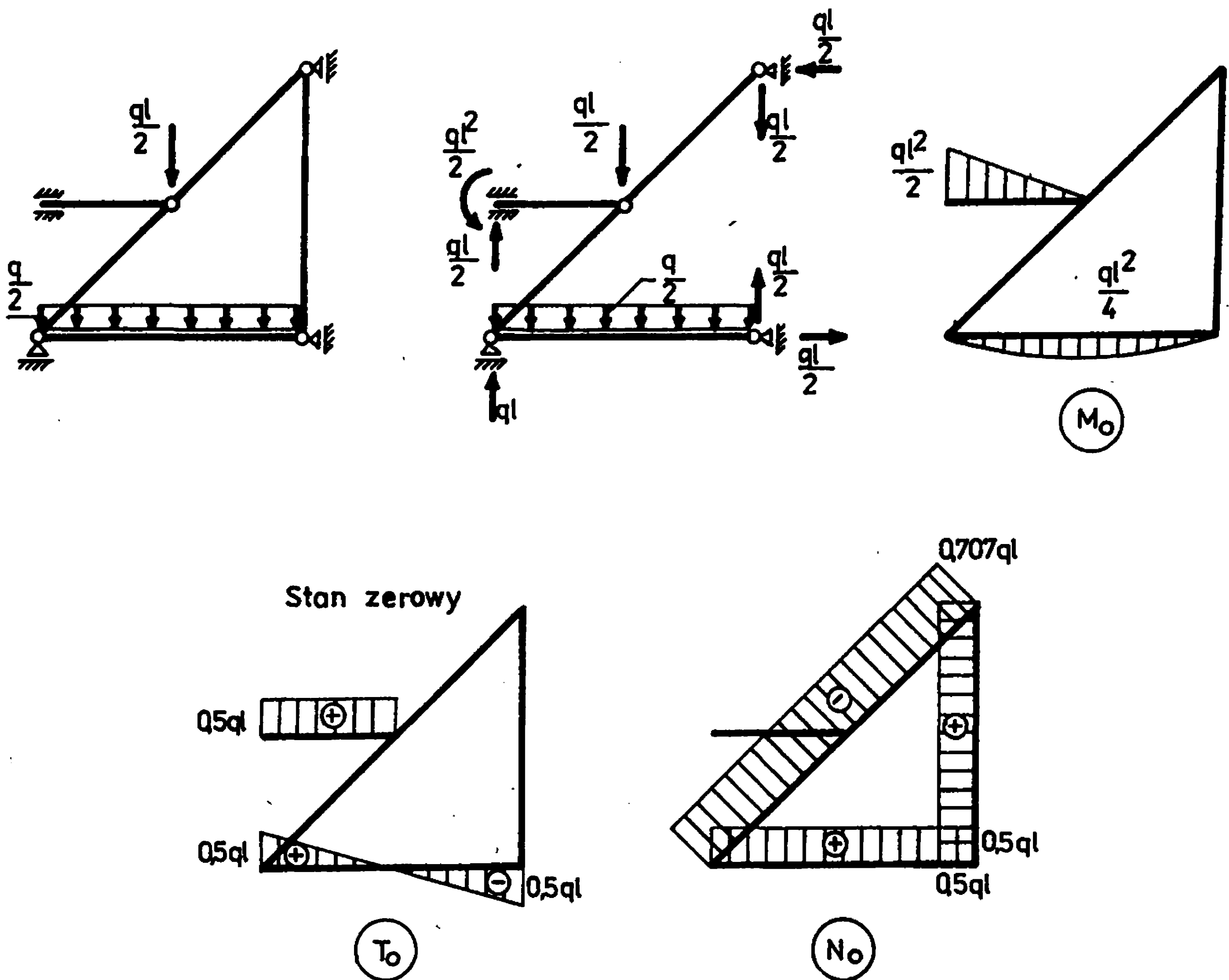
$$\delta_{20} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot 1 \right) = -0,0833 \frac{ql^3}{EJ},$$

$$\delta_{30} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{3} \cdot 2l \cdot ql^2 \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 2l \cdot ql^2 \cdot 1 \right) = 0,1667 \frac{ql^3}{EJ},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 + \right. \\ \left. + 2 \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \sqrt{2} \cdot 1 \right) = 2,805 \frac{1}{EJ},$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \right) = 0,667 \frac{1}{EJ},$$

$$\delta_{13} = 0,$$



Rys. 8.14

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) = 0,805 \frac{1}{EJ},$$

$$\delta_{23} = 0,$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{3} \cdot 21 \cdot 1 \cdot 1 = 0,667 \frac{1}{EJ},$$

Układ równań kanonicznych przyjmuje postać:

$$2,805 x_1 + 0,667 x_2 - 0,4167 q l^2 = 0,$$

$$0,667 x_1 + 0,805 x_2 - 0,0833 q l^2 = 0,$$

$$+ 0,667 x_3 + 0,1667 q l^2 = 0.$$

Po rozwiązaniu otrzymamy:

$$x_1 = 0,1543 q l^2, \quad x_2 = -0,0243 q l^2, \quad x_3 = -0,25 q l^2.$$

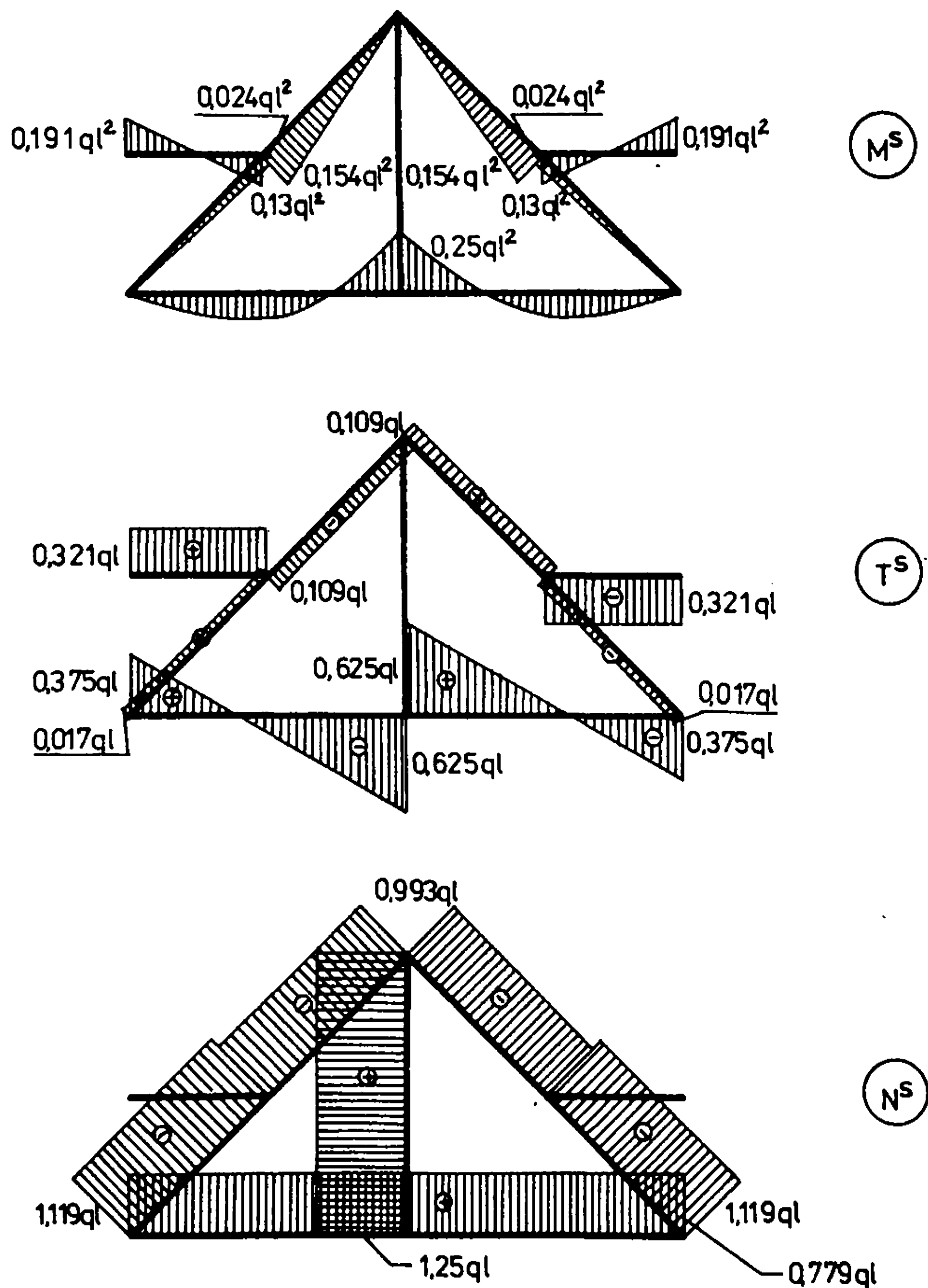
Rzędne wykresów sił wewnętrznych $M^{(S)}$ $T^{(S)}$ $N^{(S)}$ obliczymy ze wzorów:

$$M^{(S)} = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + X_3 M_3,$$

$$T^{(S)} = T_0 + X_1 T_1 + X_2 T_2 + X_3 T_3,$$

$$N^{(S)} = N_0 + X_1 N_1 + X_2 N_2 + X_3 N_3.$$

Wykresy momentów zginających $M^{(S)}$, sił tnących $T^{(S)}$ i sił normalnych $N^{(S)}$ przedstawiono na rysunku 8.15.



Rys. 8.15

Z kolei obliczmy δ_{10} , δ_{20} i δ_{30} od obciążenia termicznego (zakładamy, że zmiana temperatury w osi pręta równa się zero $t_0 = 0$)

$$\delta_{10} = \int_S M_1 \frac{\alpha_t \Delta t}{h} dS = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\alpha_t \Delta t}{h} = 0,707 \frac{\alpha_t \Delta t}{h},$$

$$\delta_{20} = \int_S M_2 \frac{\alpha_t \Delta t}{h} dS = 0,$$

$$\delta_{30} = \int_S M_3 \frac{\alpha_t \Delta t}{h} dS = 0.$$

Układ równań kanonicznych dla obciążenia termicznego ma postać

$$2,805 X_1 + 0,667 X_2 + 0,707 \frac{EJ \alpha_t \Delta t}{h} = 0,$$

$$0,667 X_1 + 0,805 X_2 = 0,$$

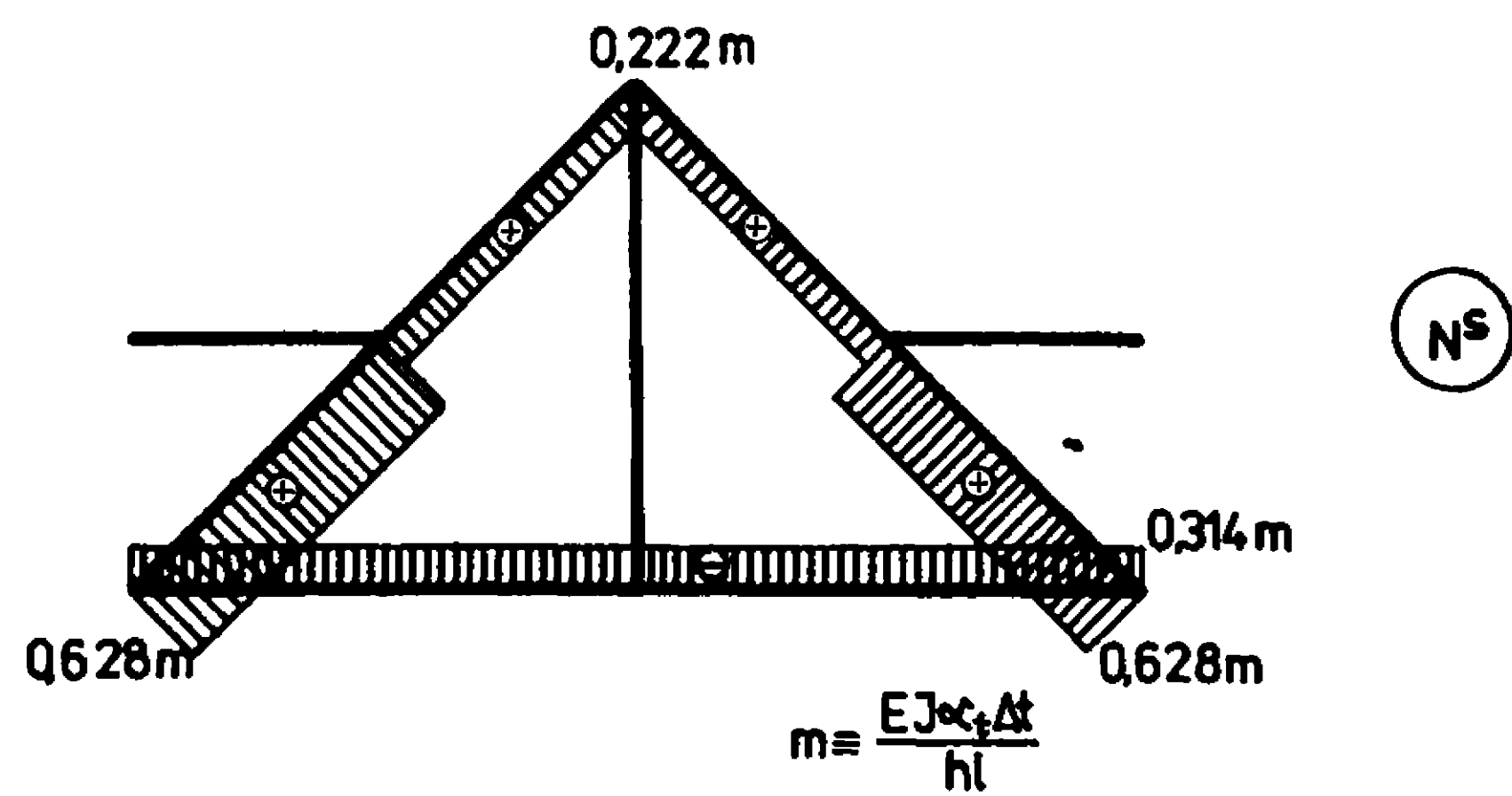
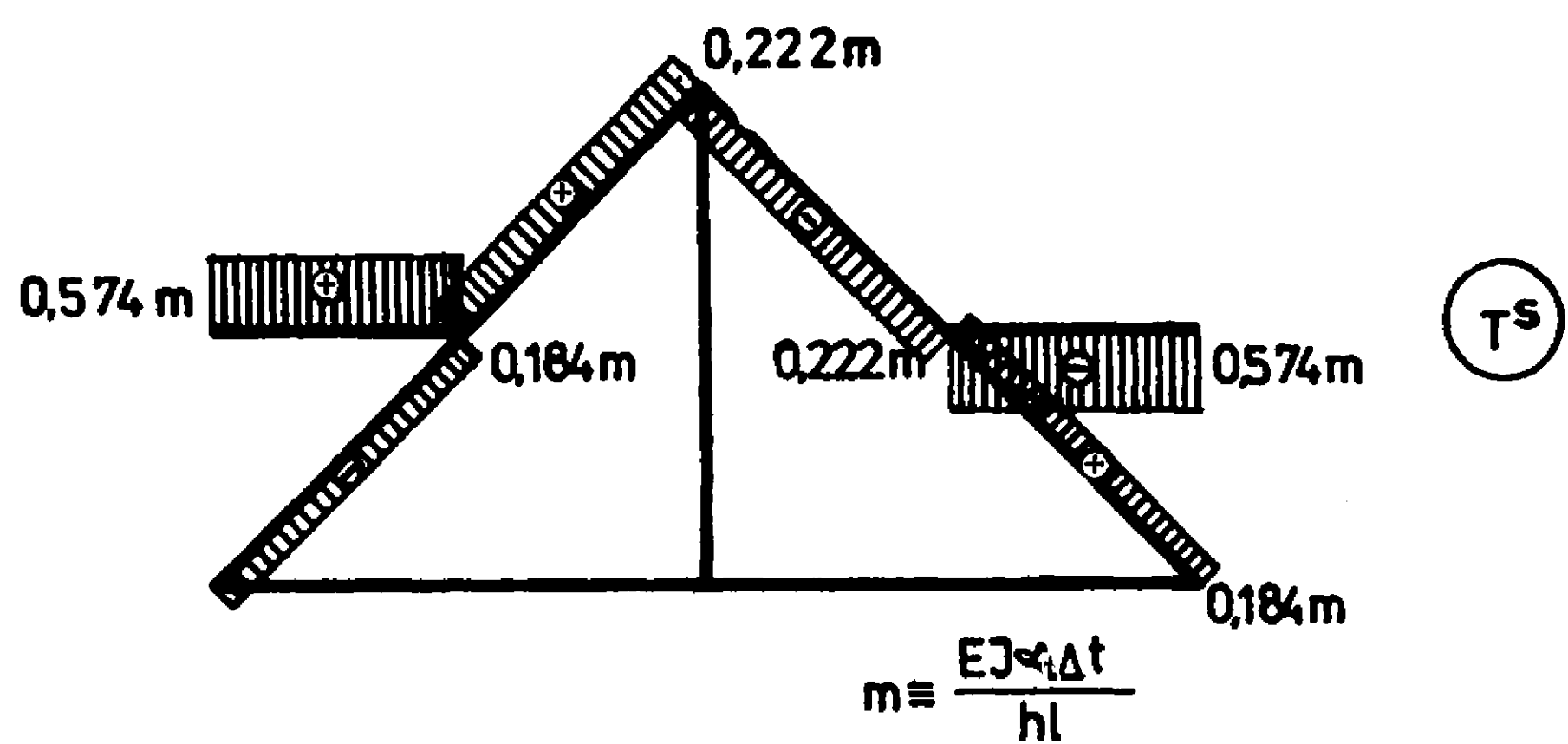
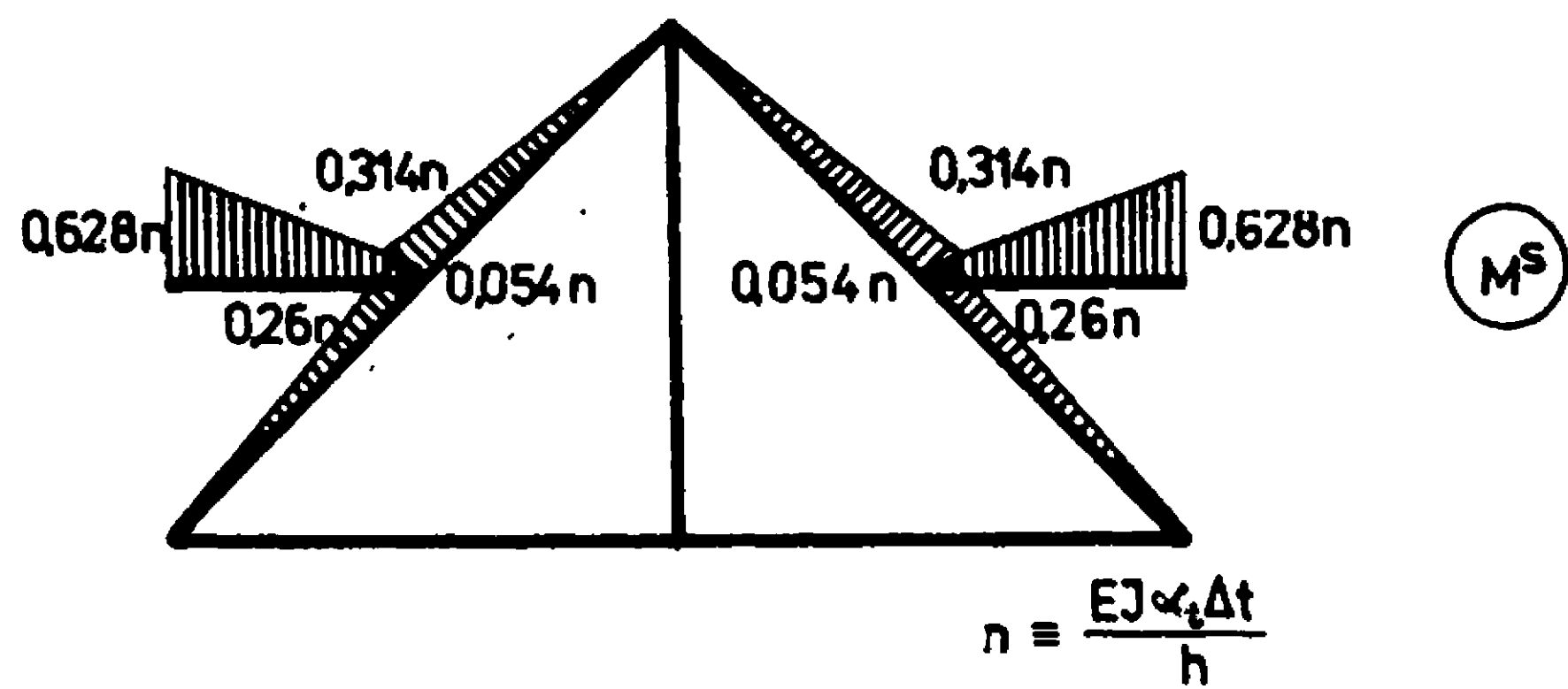
$$+ 0,667 X_3 = 0.$$

Po rozwiązaniu otrzymamy

$$X_1 = -0,314 \frac{EJ \alpha_t \Delta t}{h}, \quad X_2 = 0,26 \frac{EJ \alpha_t \Delta t}{h}, \quad X_3 = 0.$$

Rzędne wykresów sił wewnętrznych od obciążenia termicznego obliczymy analogicznie jak dla obciążenia czynnego. Wykresy sił wewnętrznych $M^{(S)}$, $T^{(S)}$, $N^{(S)}$ od obciążenia termicznego przedstawiono na rysunku 8.16.

B. Rozważmy teraz układ pokazany na rysunku 8.10b. Jest to schemat zredukowany dla antysymetrii.



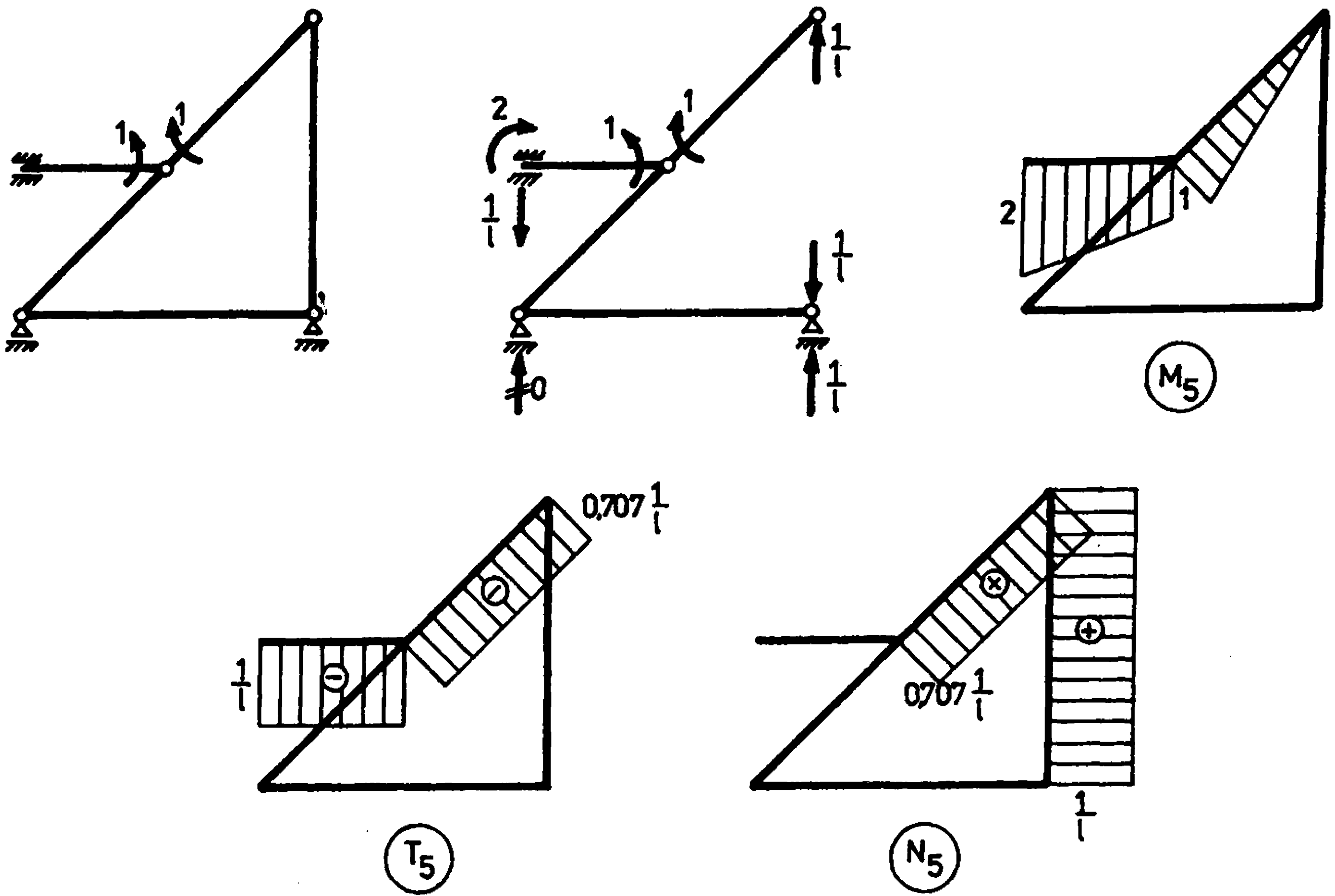
Rys. 8.16

Obliczmy współczynniki δ_{ij} oraz δ_{i0}

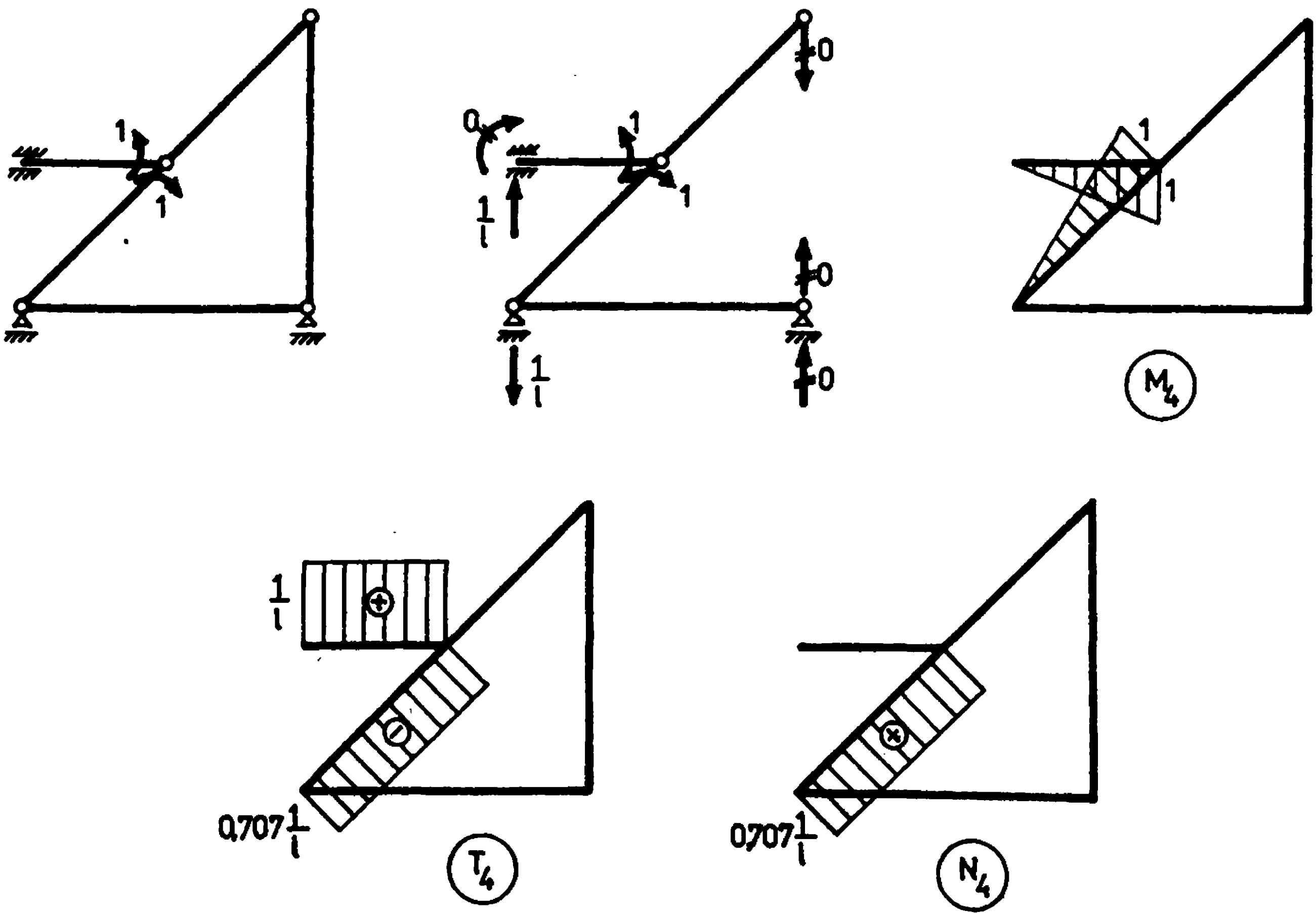
$$\delta_{50} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{q l^2}{2} - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{q l^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{q l^2}{2} \cdot 2 - 1 \cdot \frac{q l^2}{2} \cdot 2 \right) =$$

$$= -0,4167 \frac{q l^3}{EJ},$$

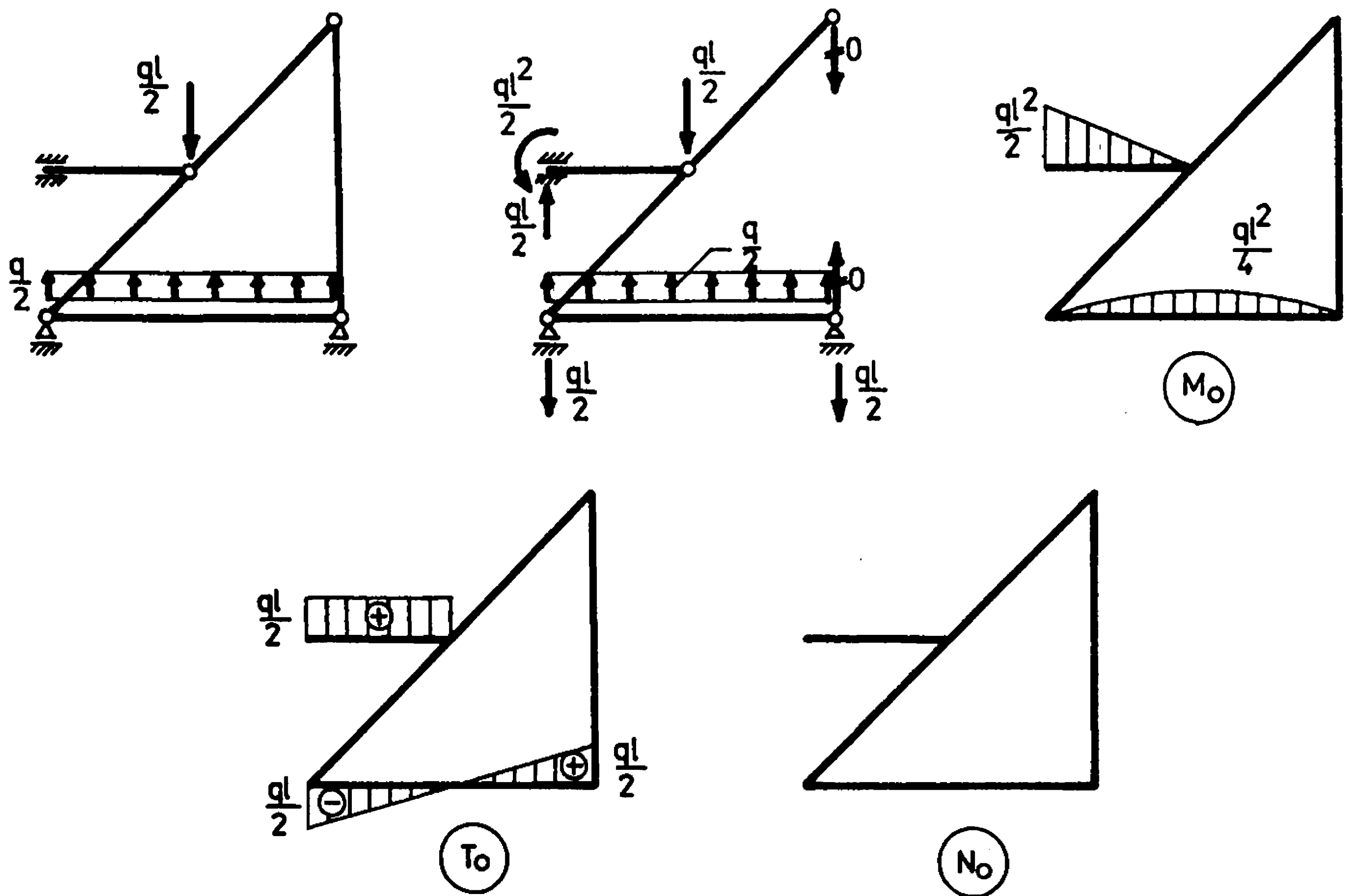
$$\delta_{40} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{q l^2}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{q l^2}{2} \right) = -0,0833 \frac{q l^3}{EJ},$$



Rys. 8.17



Rys. 8.18



Rys. 8.19

$$\delta_{55} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 + \right. \\ \left. + 2 \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) = 2,805 \frac{1}{EJ},$$

$$\delta_{54} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \right) = 0,667 \frac{1}{EJ},$$

$$\delta_{44} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \right) = 0,805 \frac{1}{EJ}.$$

Układ równań kanonicznych ma postać

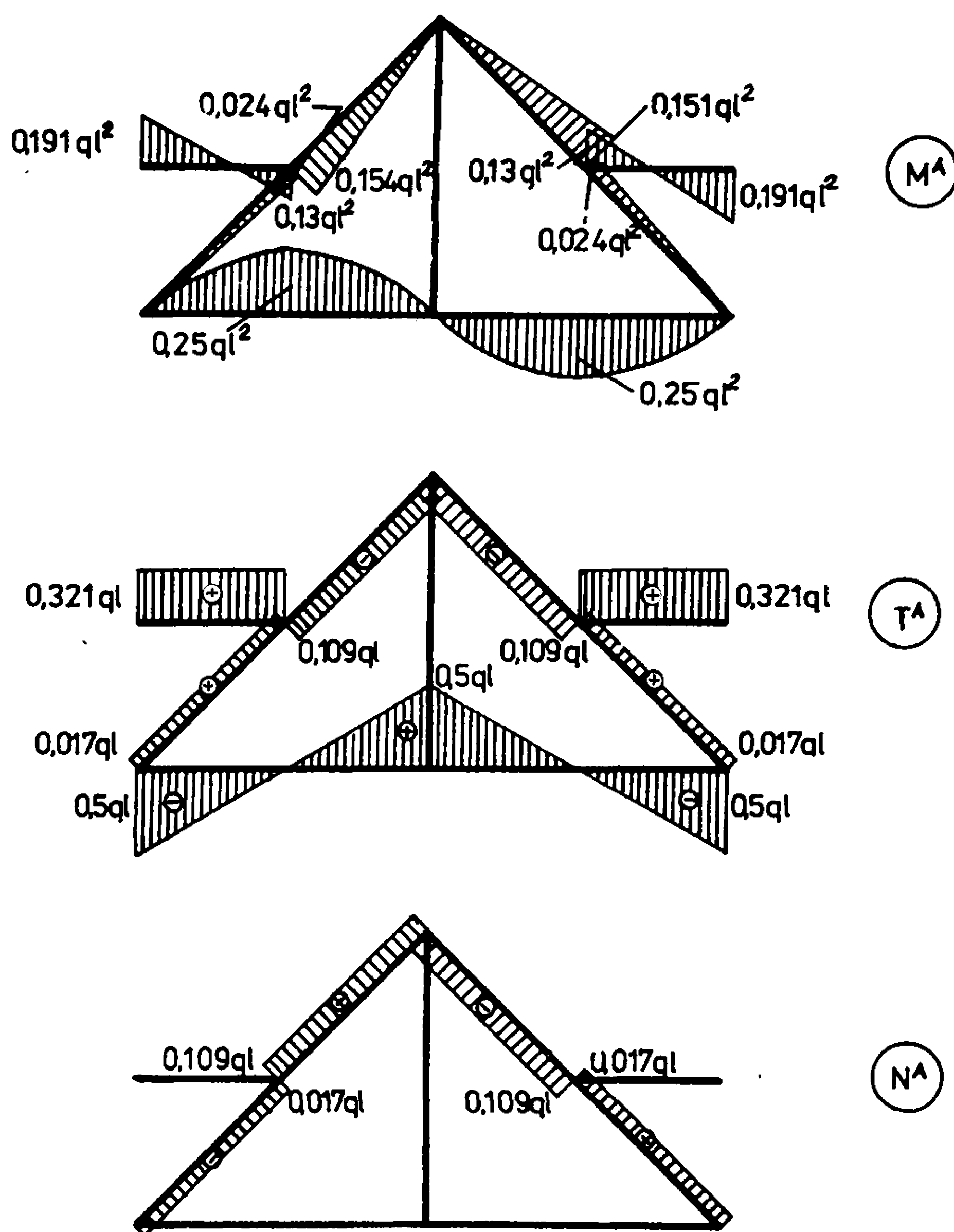
$$2,805 X_5 + 0,667 X_4 - 0,4167 ql^2 = 0,$$

$$0,667 X_5 + 0,805 X_4 - 0,0833 ql^2 = 0.$$

Po rozwiązaniu otrzymamy:

$$X_5 = 0,1543 ql^2, \quad X_4 = -0,0243 ql^2$$

Wykresy sił wewnętrznych $M^{(A)}$, $T^{(A)}$, $N^{(A)}$ przedstawiono na rysunku 8.20.



Rys. 8.20

Zajmiemy się teraz antysymetrycznym obciążeniem termicznym. Współczynniki δ_{i0} od obciążenia termicznego Δt (zakładamy, że temperatura t_0 w osi pręta równa się zero) są równe:

$$\delta_{40} = \int_S M_4 \frac{\alpha_t \Delta t}{h} dS = 0,$$

$$\delta_{50} = \int_S M_5 \frac{\alpha_t \Delta t}{h} dS = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \frac{\alpha_t \Delta t}{h} = 0,707 \frac{\alpha_t \Delta t}{h}.$$

Układ równań kanonicznych dla obciążenia termicznego ma postać

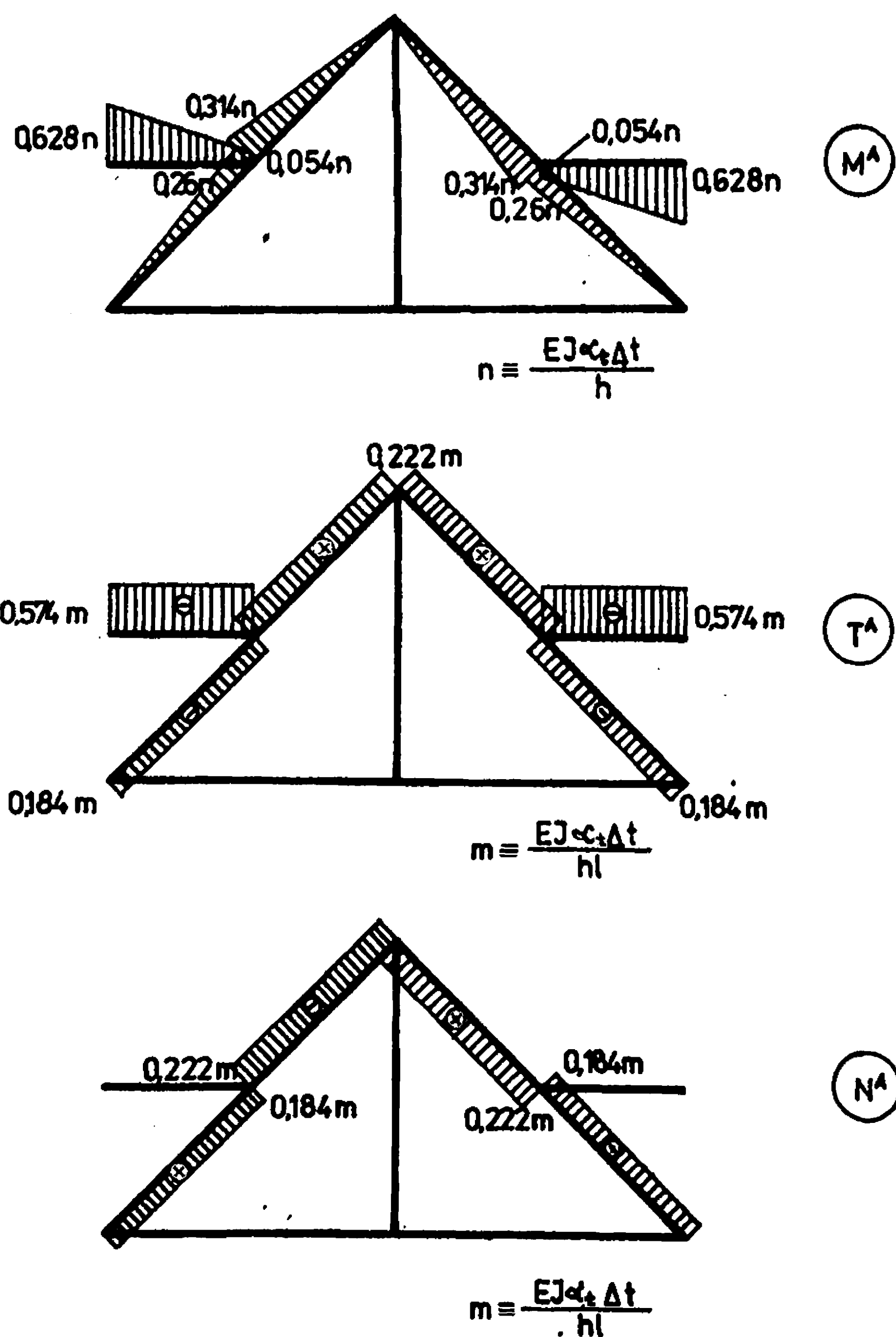
$$2,805 X_5 + 0,667 X_4 + 0,707 \frac{EJ \alpha_t \Delta t}{h} = 0,$$

$$0,667 X_5 + 0,805 X_4 = 0.$$

Po rozwiązaniu otrzymamy

$$X_4 = 0,260 \frac{EJ \alpha_t \Delta t}{h}, \quad X_5 = -0,314 \frac{EJ \alpha_t \Delta t}{h}.$$

Wykresy sił wewnętrznych $M^{(A)}$, $T^{(A)}$ i $N^{(A)}$ od obciążenia termicznego przedstawiono na rysunku 8.21.



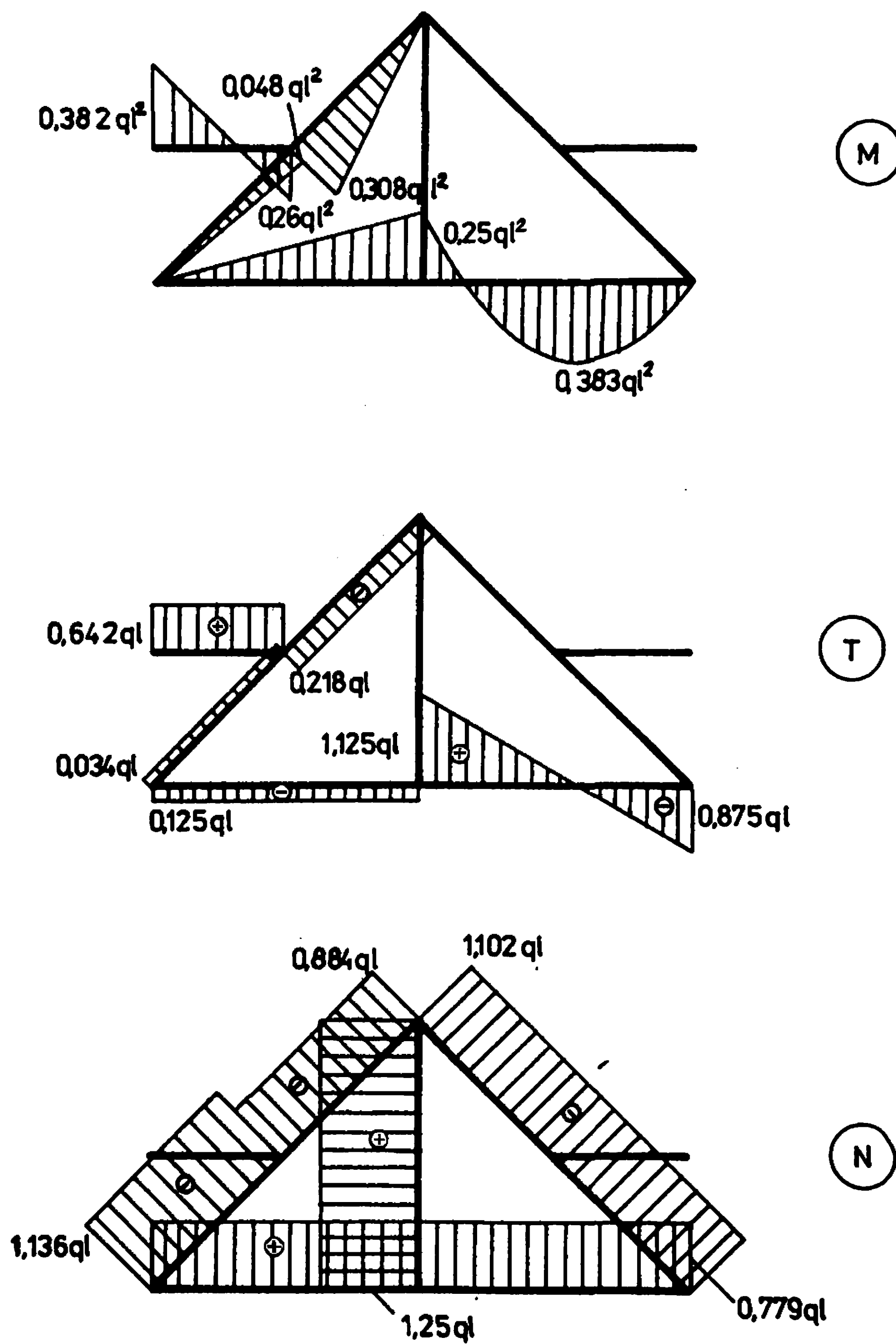
Rys. 8.21

Końcowe wykresy sił wewnętrznych otrzymamy sumując odpowiednie rzędne od obciążenia symetrycznego (rys. 8.15, rys. 8.16) i antysymetrycznego (rys. 8.20, rys. 8.21)

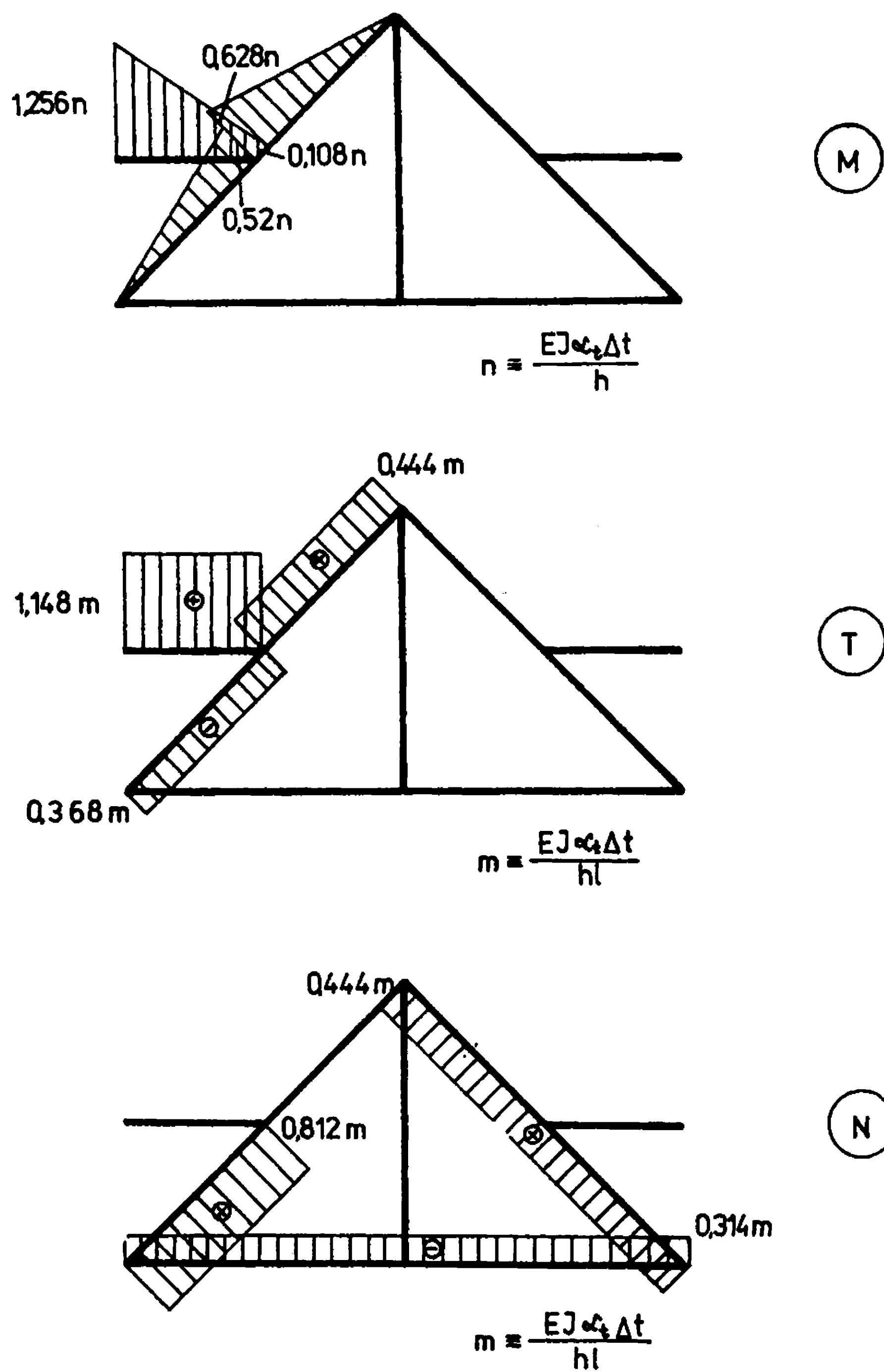
$$M = M^{(s)} + M^{(A)},$$

$$T = T^{(s)} + T^{(A)},$$

$$N = N^{(s)} + N^{(A)}.$$



Rys. 8.22

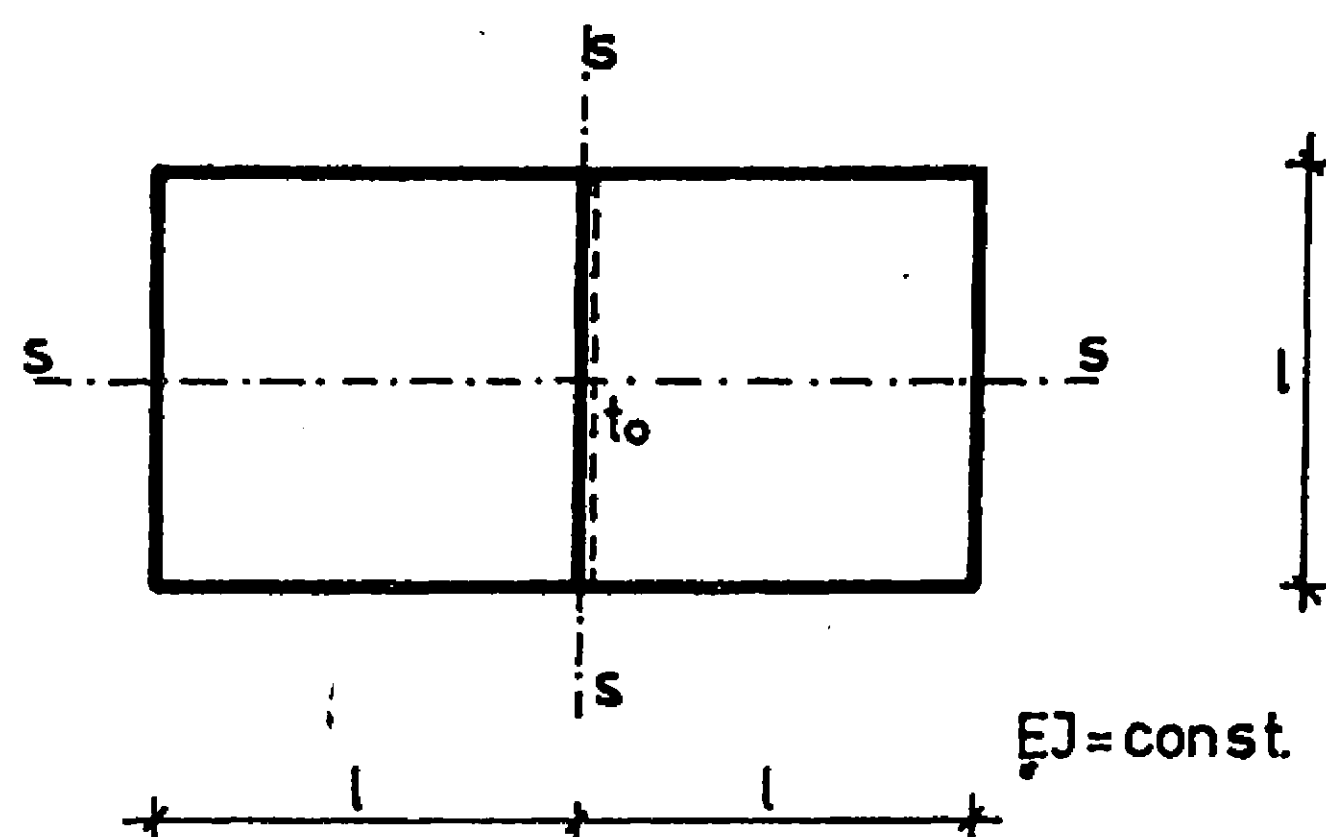


Rys. 8.23

Na rysunku 8.22 przedstawiono ostateczne wykresy sił wewnętrznych od obciążenia czynnego, natomiast na rysunku 8.23 od obciążenia termicznego.

Zadanie 8.3

Dla danego układu ramowego, przy danym obciążeniu, wykonać wykresy momentów zginających (rys. 8.24).



Rys. 8.24

Rozwiązanie

Obliczmy stopień statycznej niewyznaczalności układu

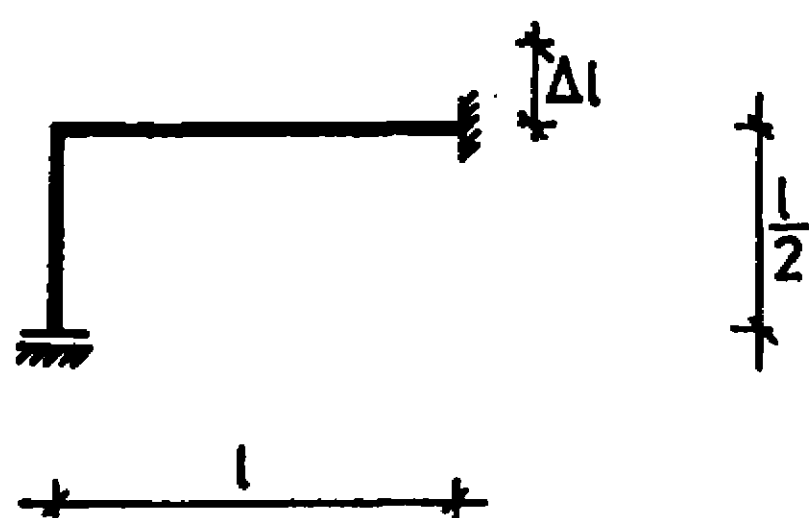
$$n = r + 3z - 3 - p.$$

Ponieważ rozpatrywany układ nie ma reakcji zewnętrznych, we wzorze na stopień statycznej niewyznaczalności liczbę równań równowagi dla całego układu należy przyjąć równą zero

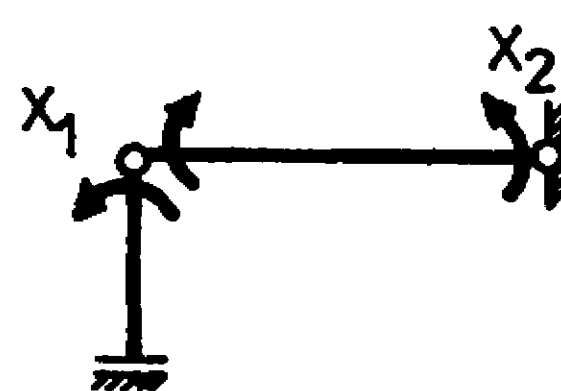
$$r = 0, z = 2, p = 0,$$

$$n = 0 + 3 \cdot 2 - 0 = 6$$

Rozpatrywany układ ma budowę symetryczną względem dwóch osi, również dane obciążenie jest symetryczne względem tych osi. Schemat zredukowany względem obydwu osi symetrii przedstawiono na rysunku 8.25.



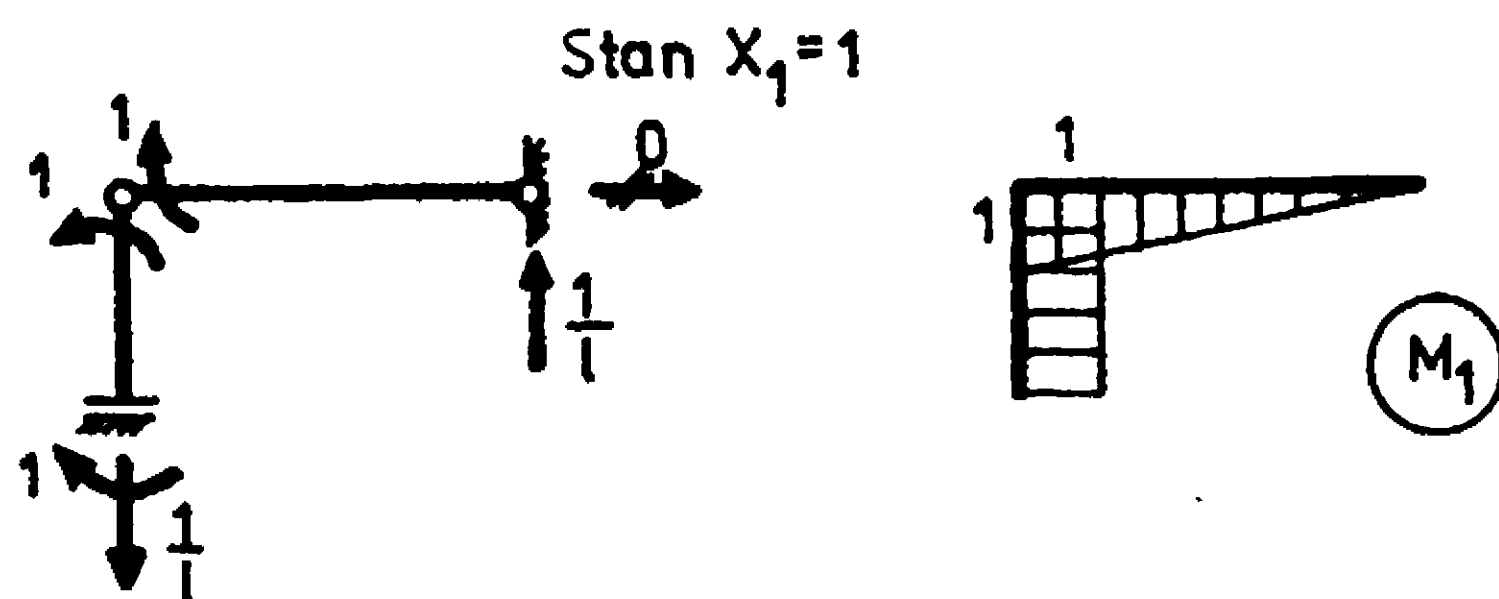
Rys. 8.25



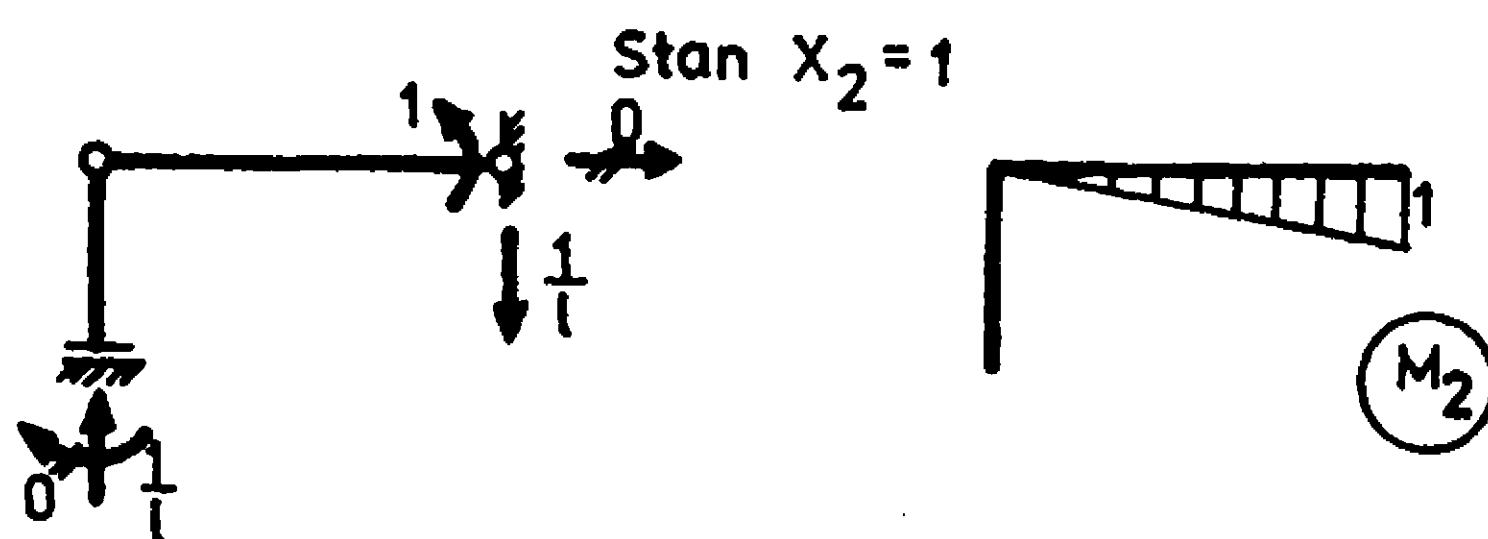
Rys. 8.26

Zadane obciążenie termiczne w schemacie zredukowanym jest równoważne obciążeniu kinematycznemu, będącemu przemieszczeniem podpory B o wartość $\Delta l = t_0 \alpha_t \cdot \frac{l}{2}$.

Stopień statycznej niewyznaczalności dla schematu zredukowanego jest równy $n = r + 3z - 3 - p = 5 + 3 \cdot 0 - 3 - 0 = 2$. Układ podstawowy przedstawiono na rysunku 8.26.



Rys. 8.27



Rys. 8.28

Obliczmy współczynniki δ_{ik} , δ_{i0}

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left(1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \right) = \frac{51}{6EJ},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ} \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6EJ},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3EJ},$$

$$\delta_{10} = -\frac{1}{1} \cdot \Delta l = -\frac{1}{1} \cdot t_0 \cdot \alpha_t \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} t_0 \cdot \alpha_t,$$

$$\delta_{20} = -\left(-\frac{1}{1} \cdot \Delta l\right) = \frac{1}{1} \cdot t_0 \cdot \alpha_t \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} t_0 \cdot \alpha_t.$$

Układ równań kanonicznych ma postać

$$\frac{5}{6} X_1 + \frac{1}{6} X_2 - \frac{t_0 \alpha_t EJ}{2 \cdot 1} = 0,$$

$$\frac{1}{6} X_1 + \frac{1}{3} X_2 + \frac{t_0 \alpha_t EJ}{2 \cdot 1} = 0.$$

Po rozwiązaniu otrzymamy

$$X_1 = \frac{t_0 \alpha_t EJ}{1}, \quad X_2 = -2 \frac{t_0 \alpha_t EJ}{1}.$$

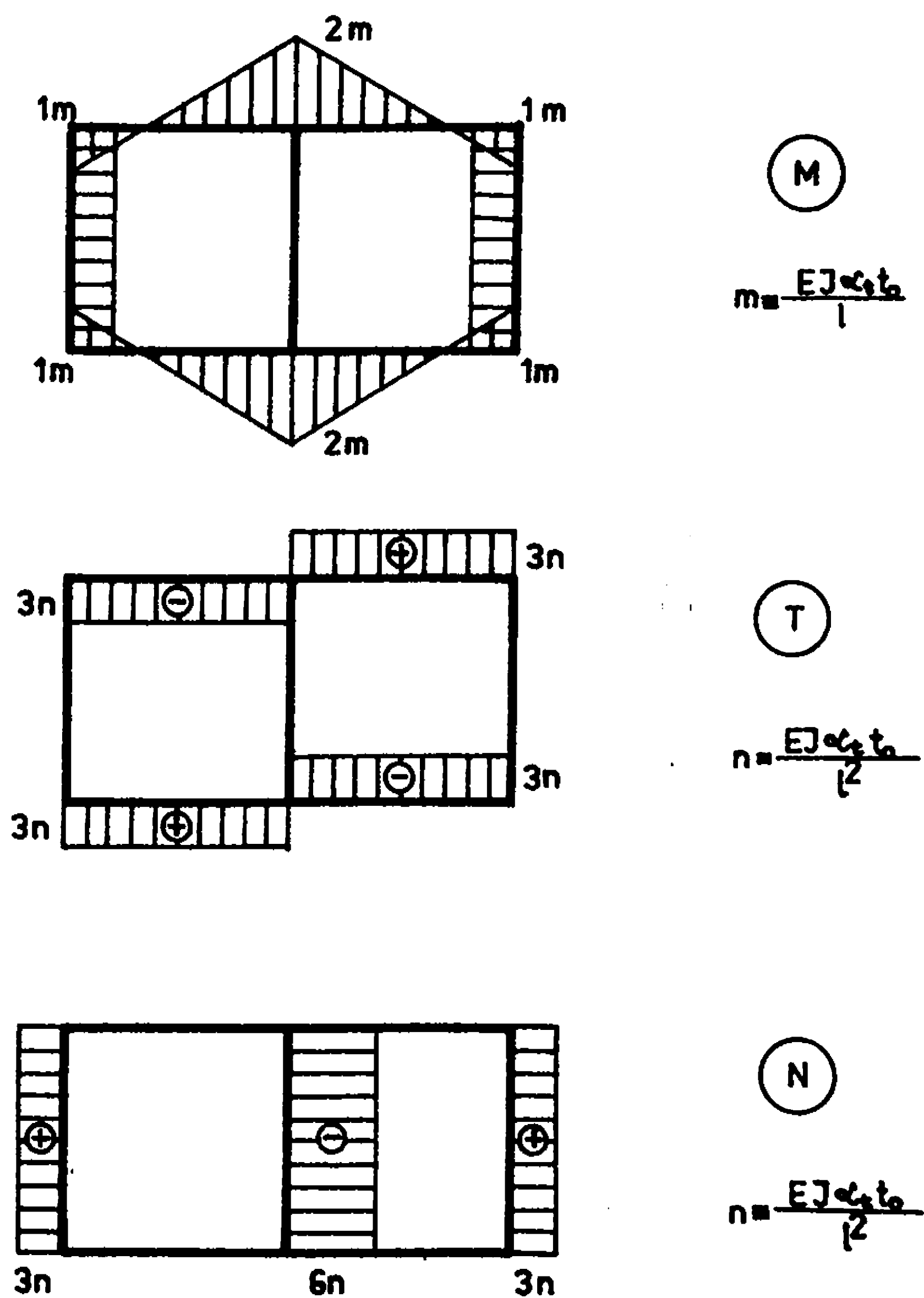
Rzędne momentów zginających M , sił tnących T , sił normalnych N wyliczymy ze wzorów:

$$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2,$$

$$T = T_0 + T_1 X_1 + T_2 X_2,$$

$$N = N_0 + N_1 X_1 + N_2 X_2.$$

Wykresy momentów zginających, sił poprzecznych i sił normalnych przedstawiono na rysunku 8.29.

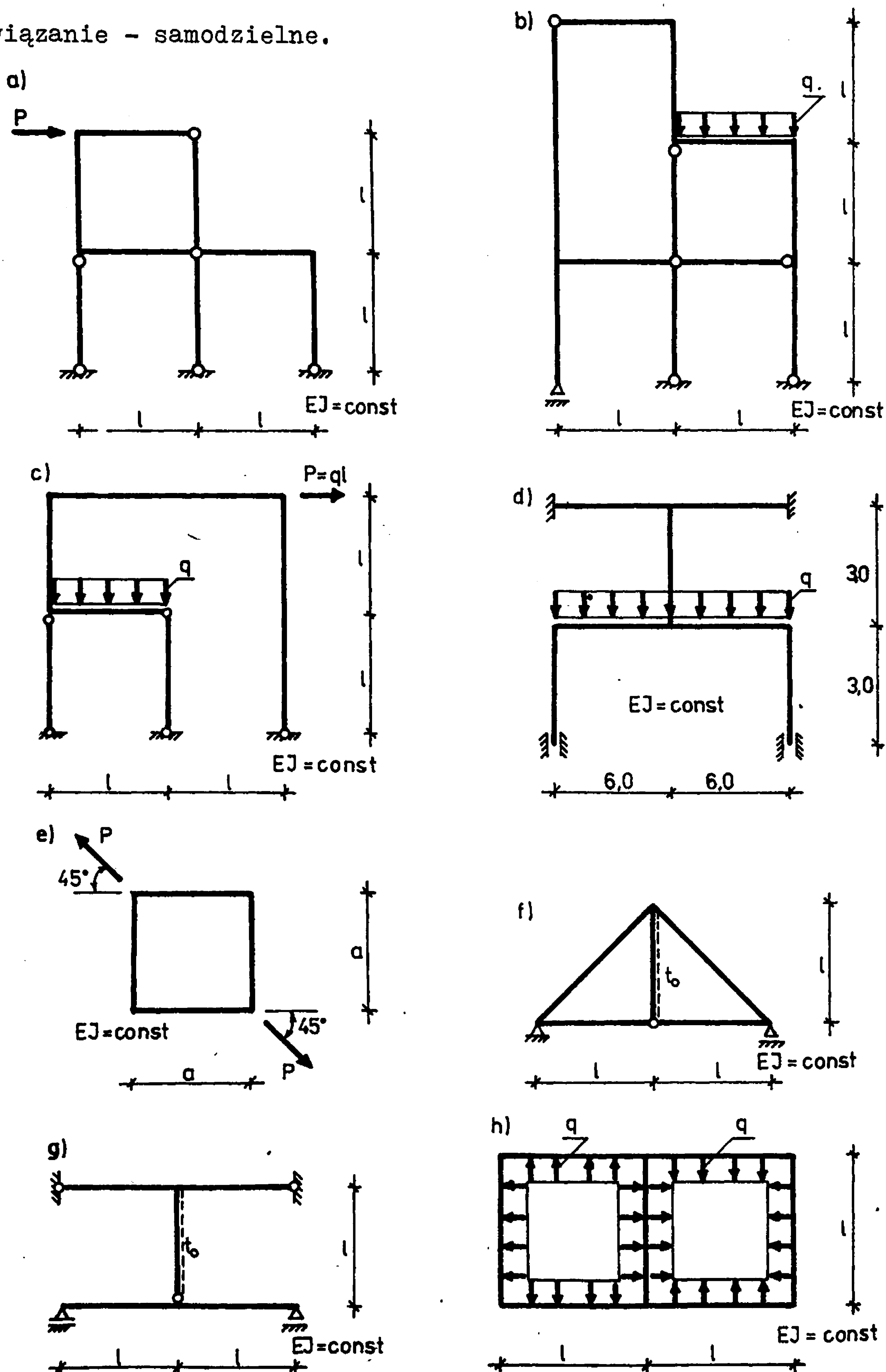


Rys. 8.29

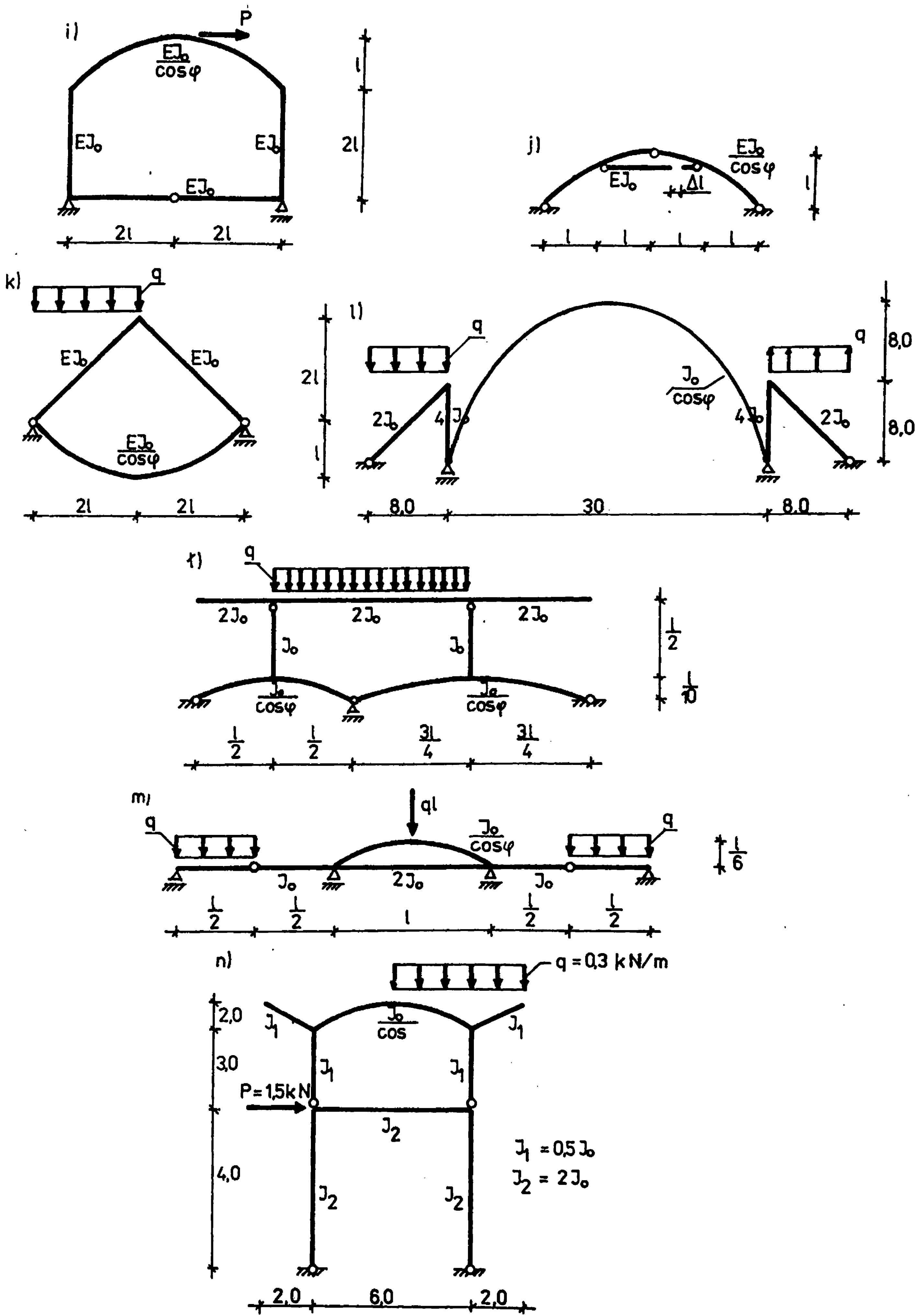
Zadanie 8.4

Dla podanych układów przy danym obciążeniu wykonać wykresy momentów zginających (rys. 8.30a-p)

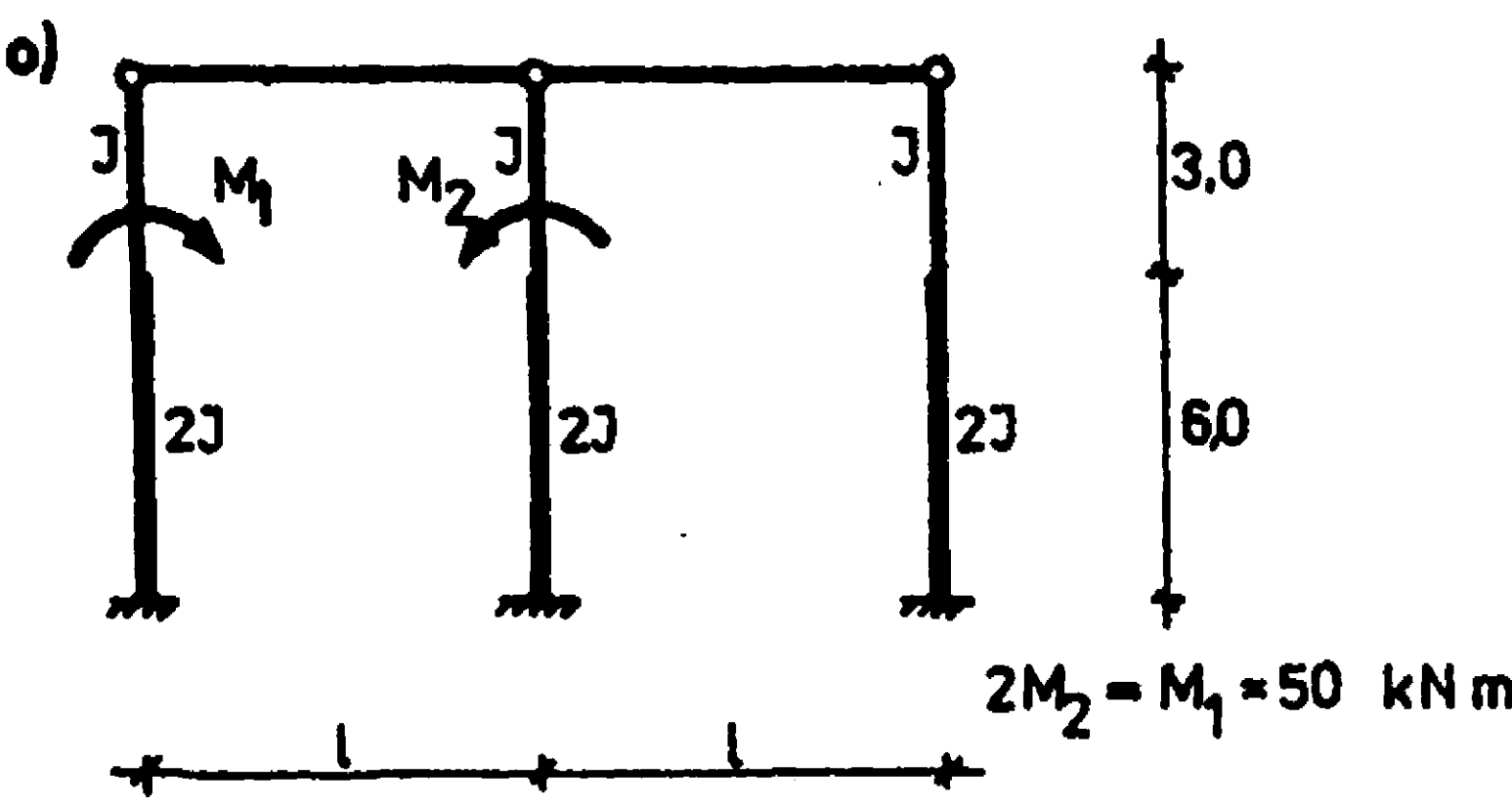
Rozwiązanie - samodzielne.



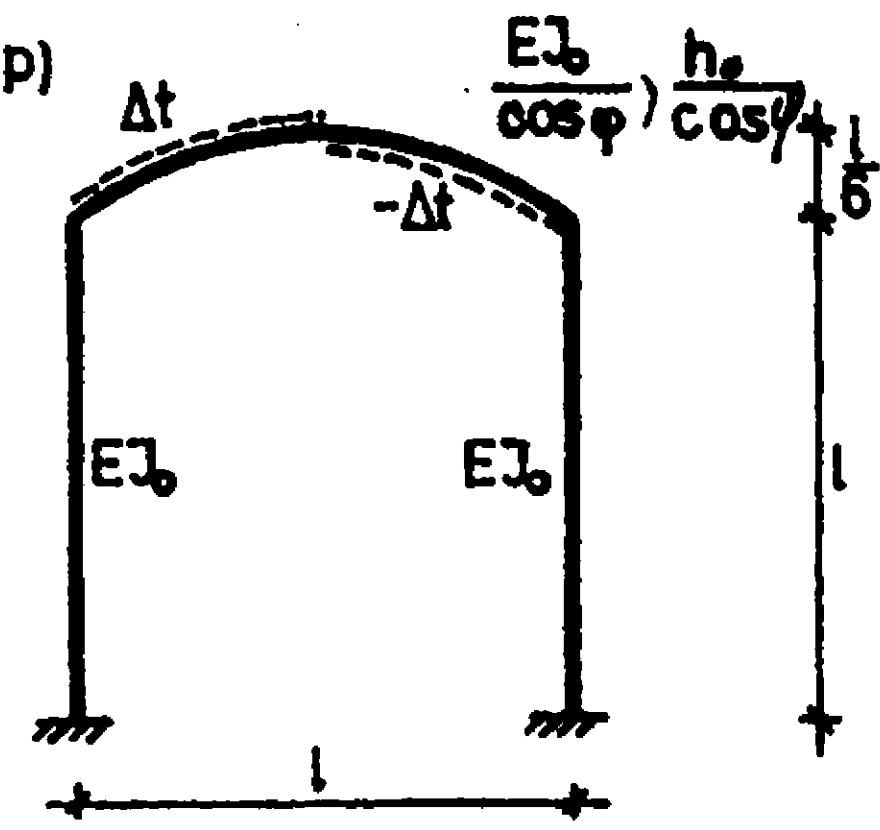
Rys. 8.30a-h



Rys. 8.30i-n



Rys. 8.30o-p



9. KRATOWNICE STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE

Sposób rozwiązywania kratownic statycznie niewyznaczalnych jest podobny do rozwiązywania układów ramowych.

Tworzymy układ równań kanonicznych

$$\sum_{i=1}^n X_i \delta_{ik} + \delta_{k0} = 0,$$

Współczynniki δ_{ik} oraz δ_{k0} obliczamy z poniższych wzorów

$$\delta_{ik} = \sum_{j=1}^n N_i^j N_k^j \frac{l^j}{E_A^j},$$

$$\delta_{k0} = \sum_{j=1}^n N_k^j \left(\frac{N_0^j l^j}{E_A^j} + \alpha_{t^j} t^j l^j \right),$$

gdzie: N_i^j - siła w pręcie j od stanu $X_i = 1$,

N_k^j - siła w pręcie j od stanu $X_k = 1$,

N_0^j - siła w pręcie j od obciążenia zewnętrznego,

l^j - długość pręta j kratownicy,

A^j - pole przekroju pręta j kratownicy,

E^j - moduł sprężystości pręta j kratownicy,

t^j - temperatura w j -tym pręcie kratownicy,

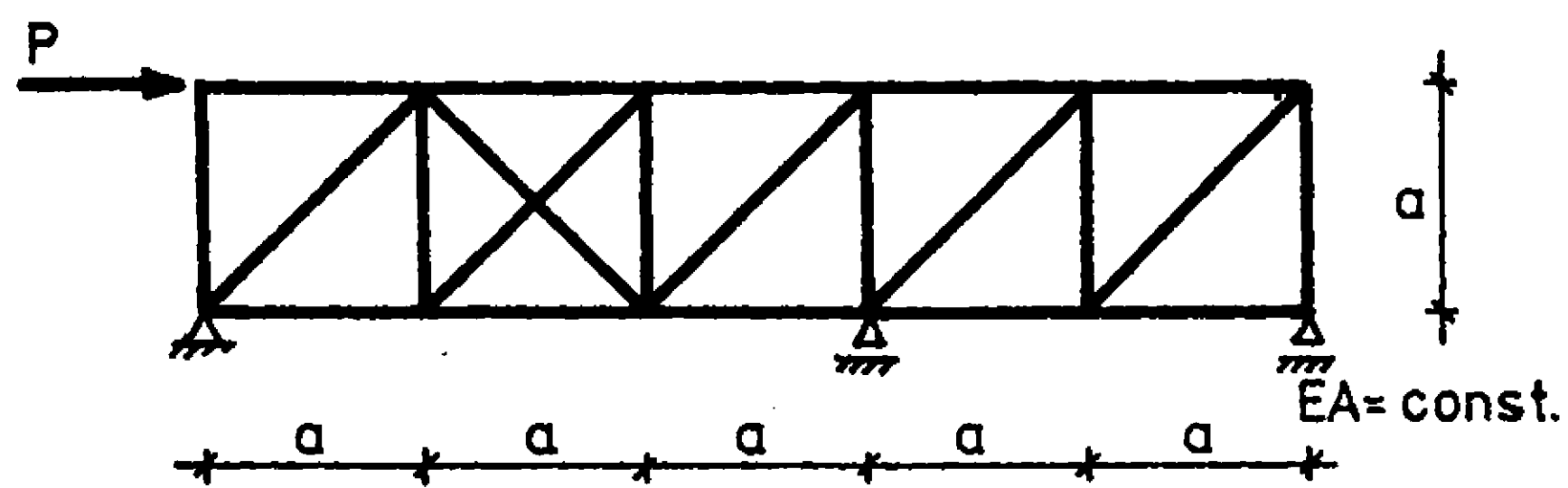
α_{t^j} - współczynnik rozszerzalności liniowej j -tego pręta kratownicy.

Ostateczną siłę w pręcie j kratownicy obliczymy z zależności

$$N^j = N_0^j + X_i N_i^j.$$

Zadanie 9.1

Dla danego układu kratowego przy danym obciążeniu wyznaczyć siły normalne w prętach (9.1).



Rys. 9.1

Rozwiązanie

Stopień statycznej niewyznaczalności układu określamy ze wzoru

$$n = p + r - 2w,$$

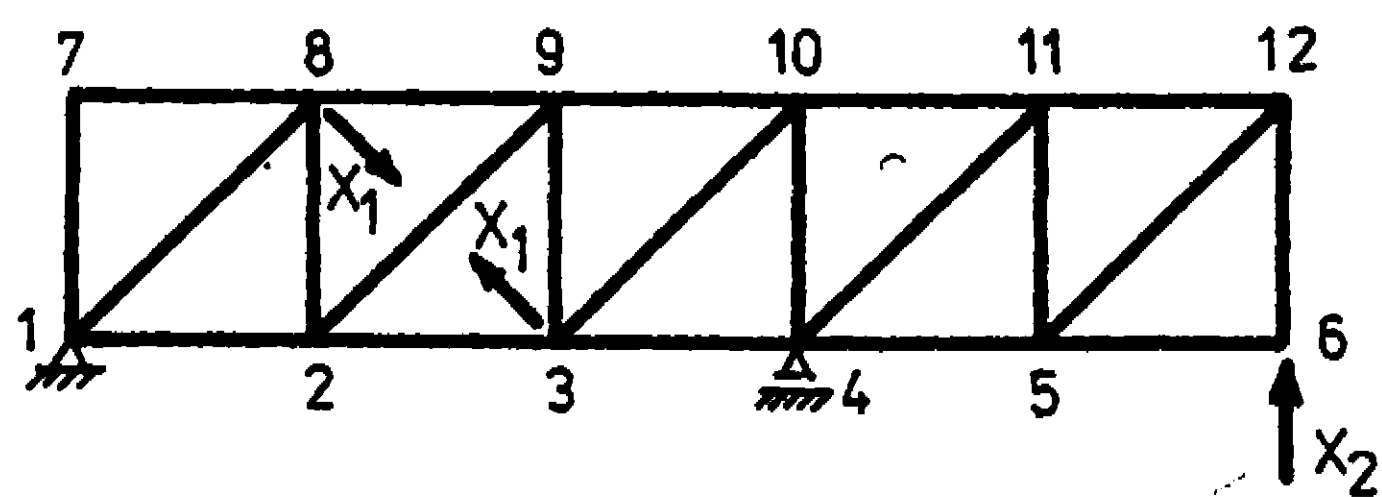
gdzie: p – ilość prętów kratownicy,

r – ilość składowych reakcji,

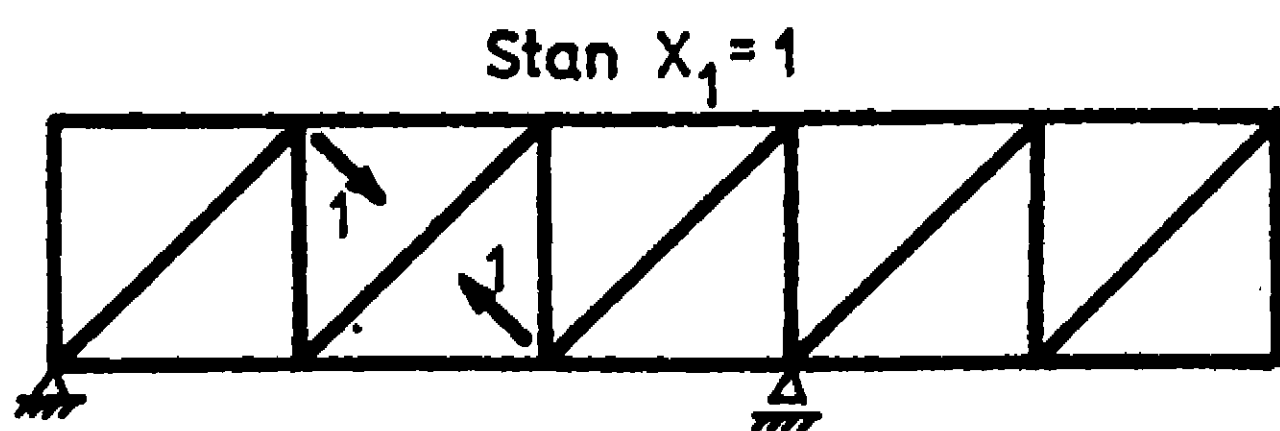
w – ilość węzłów.

W rozpatrywanej kratownicy $p = 22$, $r = 4$, $w = 12$, stąd

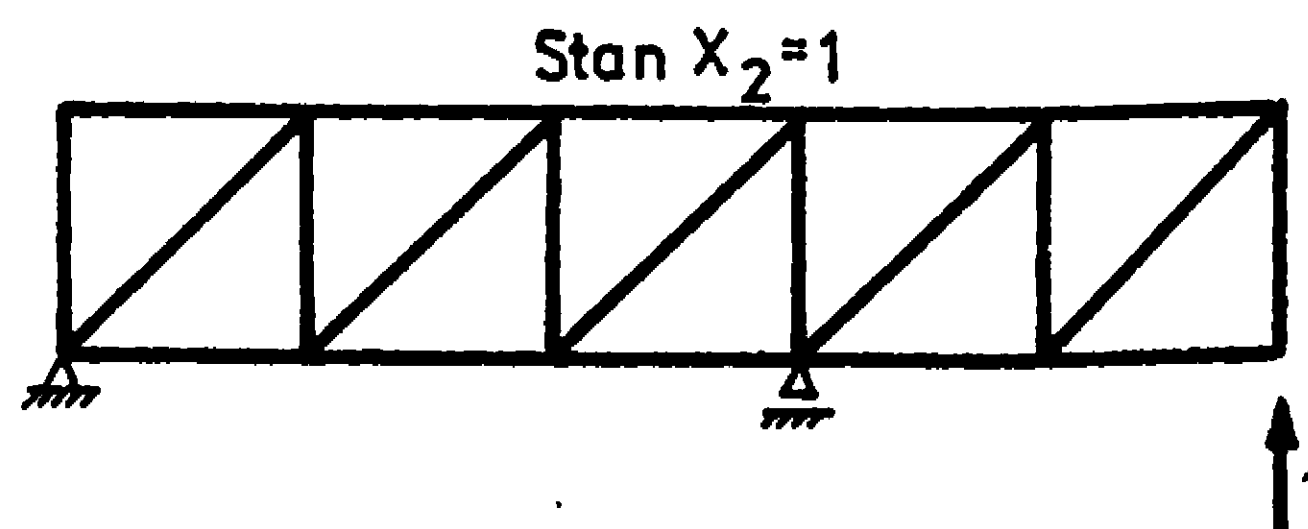
$$n = 22 + 4 - 2 \cdot 12 = 2.$$



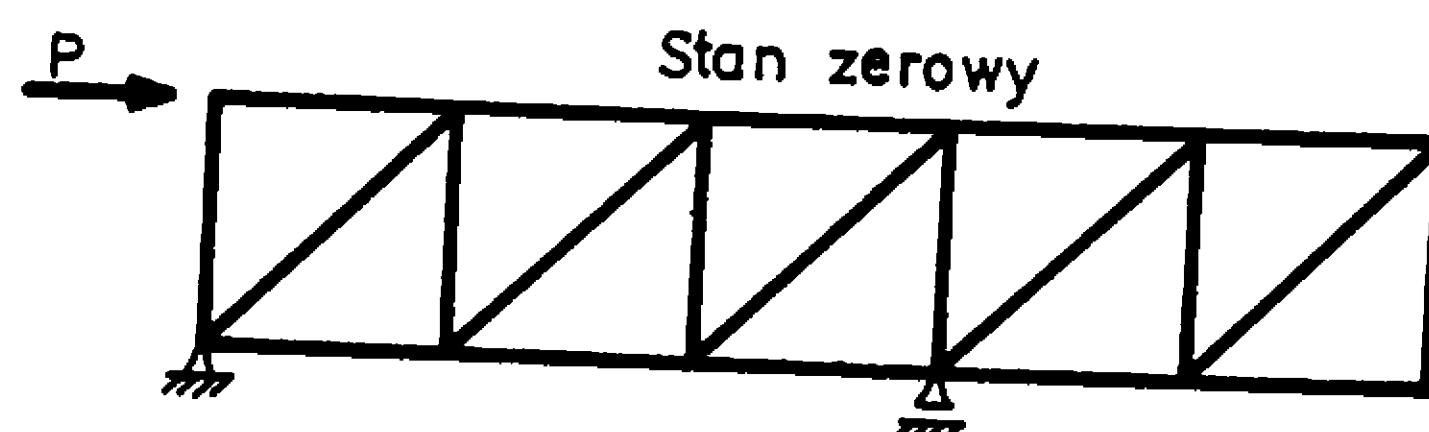
Rys. 9.2



Rys. 9.3



Rys. 9.4



Rys. 9.5

Wartości sił normalnych dla poszczególnych stanów obciążenia zestawiono w tabeli 9.1.

Układ równań kanonicznych ma postać

$$4,82 X_1 - 2,75 X_2 + 1,38 P = 0,$$

$$-2,75 X_1 + 27,72 X_2 - 0,77 P = 0.$$

Po rozwiązaniu tego układu otrzymujemy

$$X_1 = -0,287 P, \quad X_2 = -0,0007 P.$$

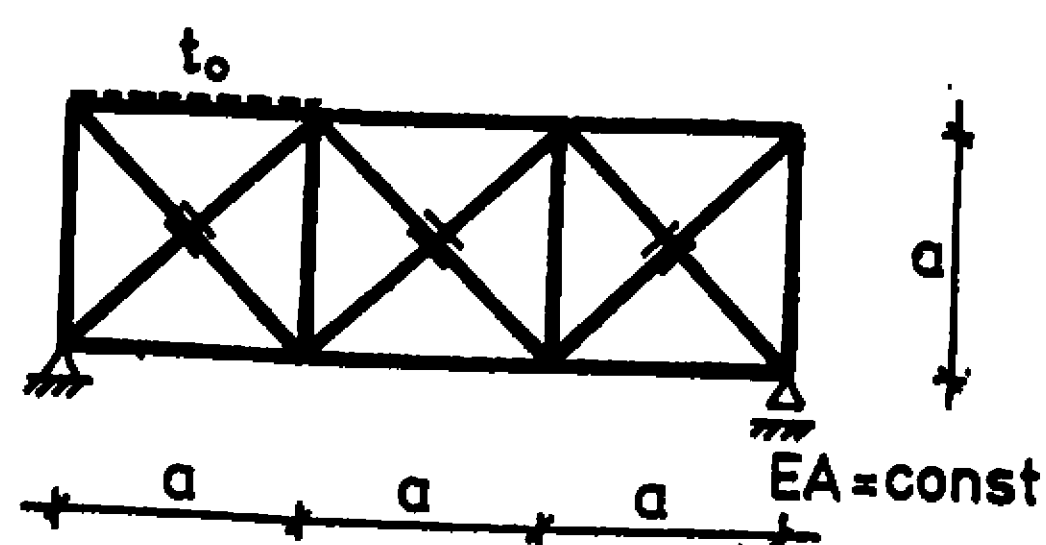
Siły w prętach kratownicy wyznaczamy z zależności

$$N^j = N_0^j + N_1^j X_1 + N_2^j X_2.$$

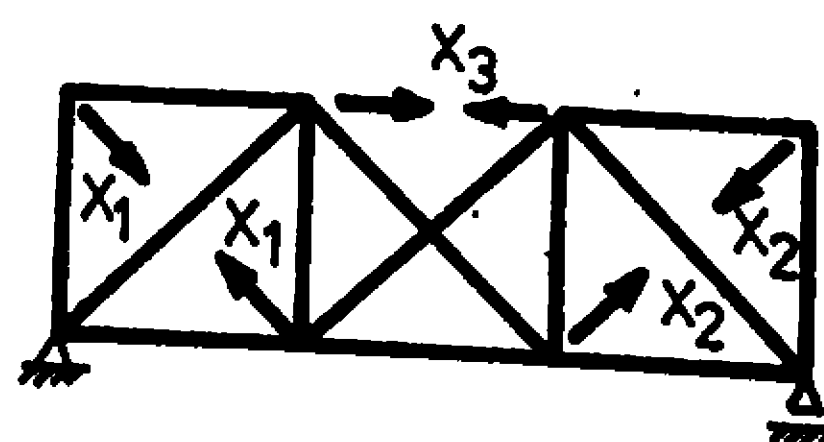
Siły te podano w tabelicy 9.1.

Zadanie 9.2

Dla podanej kratownicy obciążonej termicznie znaleźć wartości sił normalnych w prętach (rys. 9.6).



Rys. 9.6



Rys. 9.7

Rozwiązanie

Stopień statycznej niewyznaczalności układu określimy ze wzoru

$$n = p + r - 2w,$$

gdzie: $p = 16$, $r = 3$, $w = 8$,

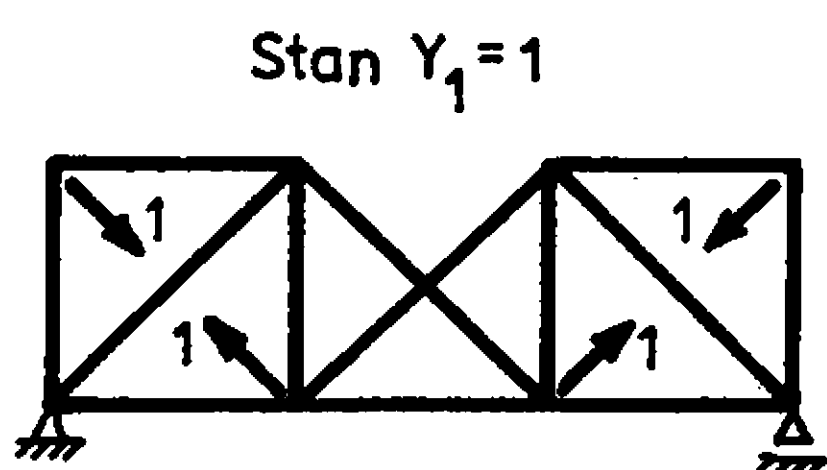
stąd

$$n = 16 + 3 - 2 \cdot 8 = 3.$$

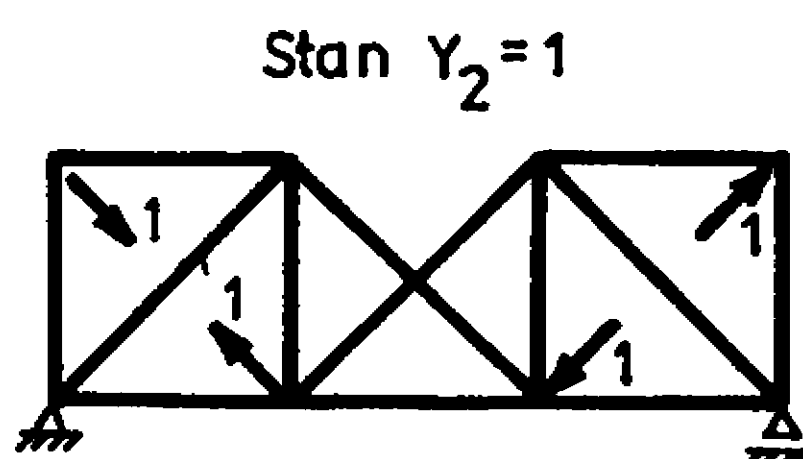
Przyjmijmy następujący układ podstawowy (rys. 9.7). Zamiast pojedynczych sił X_1 , X_2 , X_3 , przyjmijmy niewiadome grupowe Y_1 , Y_2 , Y_3

$$Y_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad Y_2 = \frac{X_1 - X_2}{2}, \quad Y_3 = X_3.$$

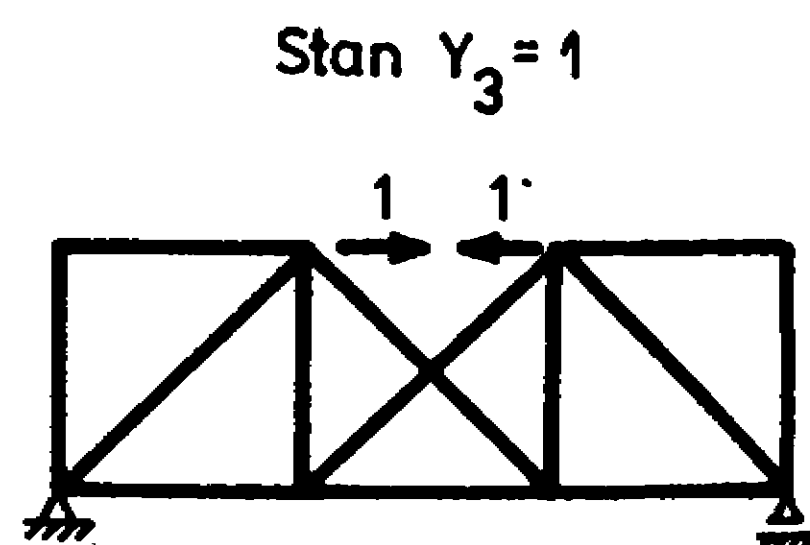
Stany $Y_1 = 1$ i $Y_3 = 1$ dają jednakowe siły normalne w prętach położonych symetrycznie względem osi symetrii, natomiast stan $Y_2 = 1$ daje siły normalne różniące się znakiem w prętach położonych symetrycznie względem osi symetrii. Wynika stąd, że $\delta_{12} = \delta_{32} = 0$.



Rys. 9.8



Rys. 9.9



Rys. 9.10

Wartości sił normalnych dla poszczególnych stanów obciążenia podano w tabeli 9.2.

Układ równań kanonicznych ma postać

$$9,64 Y_1 - 1,42 Y_3 - 0,71 \alpha_t t_0 EA = 0,$$

$$9,64 Y_2 - 0,71 \alpha_t t_0 EA = 0,$$

$$-1,42 Y_1 + 9,66 Y_3 = 0,$$

i po jego rozwiązaniu otrzymujemy

$$Y_1 = 0,0753 t_0 \alpha_t EA, \quad Y_2 = 0,0737 t_0 \alpha_t EA, \quad Y_3 = 0,0111 t_0 \alpha_t EA.$$

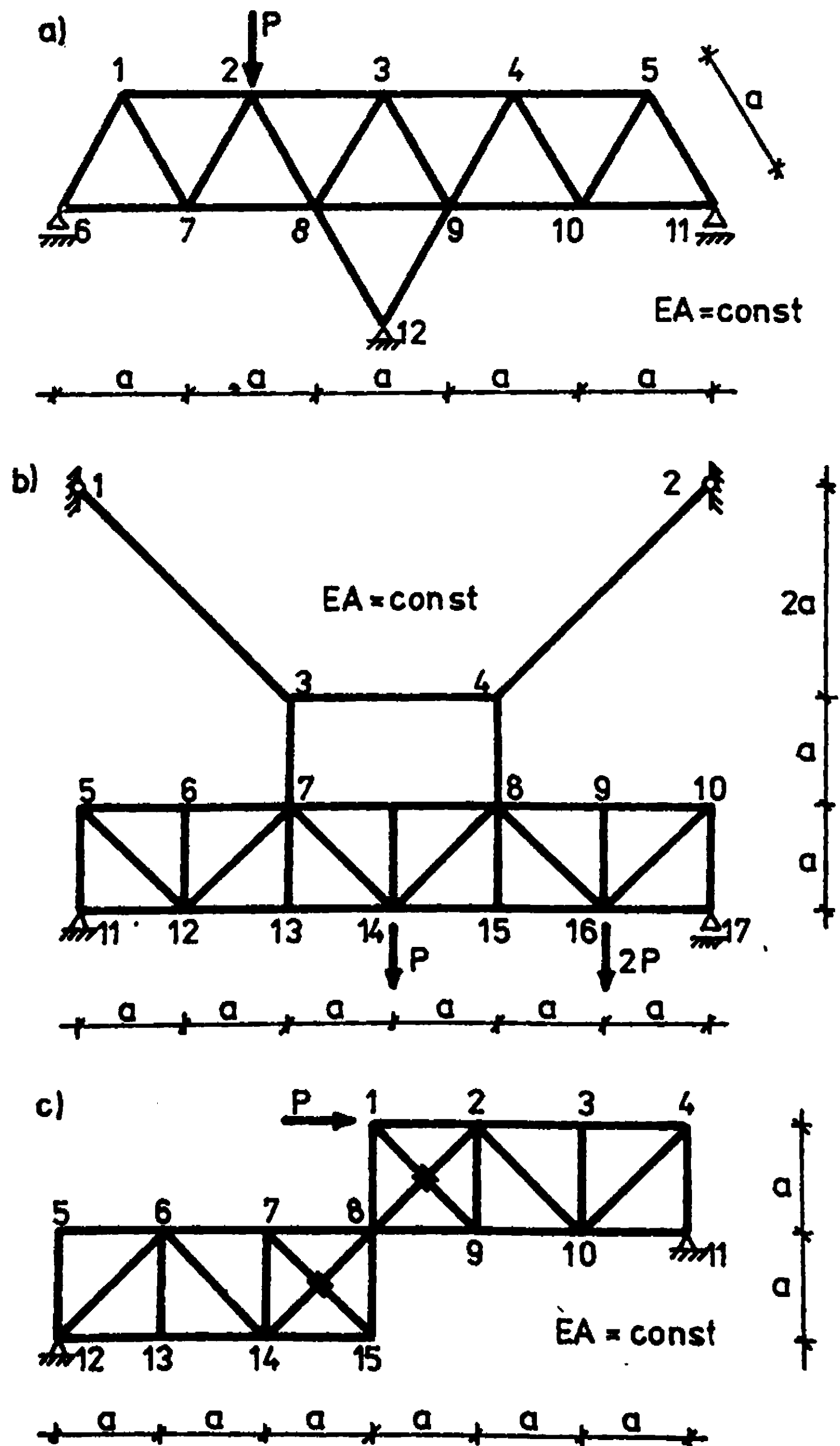
Wartości sił normalnych obliczono ze wzoru

$$N^j = N_1^j x_1 + N_2^j x_2 + N_3^j x_3,$$

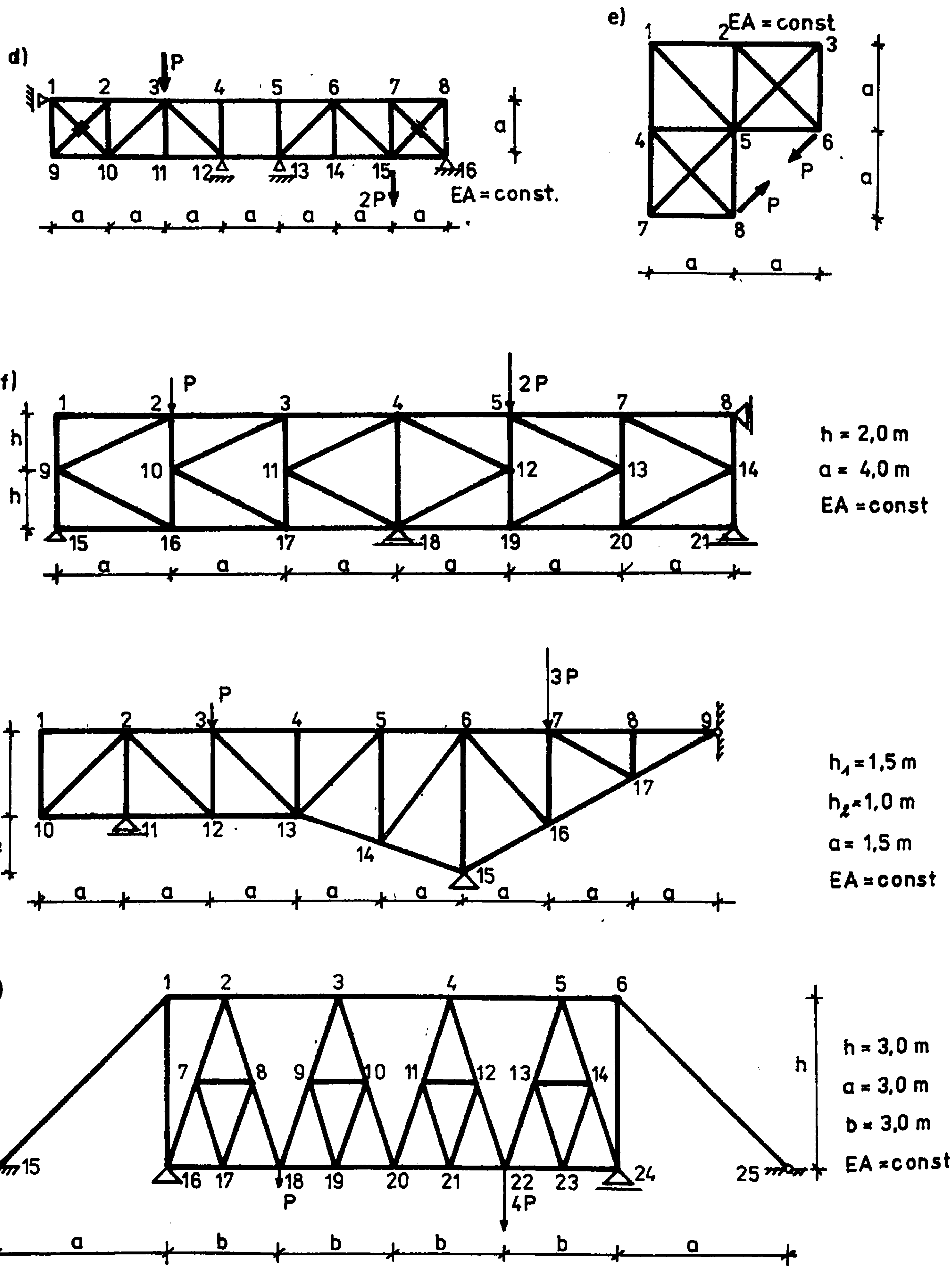
i zestawiono je również w tabeli 9.2 (przy siłach N^j wprowadzono oznaczenie $r = t_0 \alpha_t EA$).

Zadanie 9.3

Dla podanych układów kratowych przy danym obciążeniu wyznaczyć siły w poszczególnych prętach kratownicy (9.11a-i).



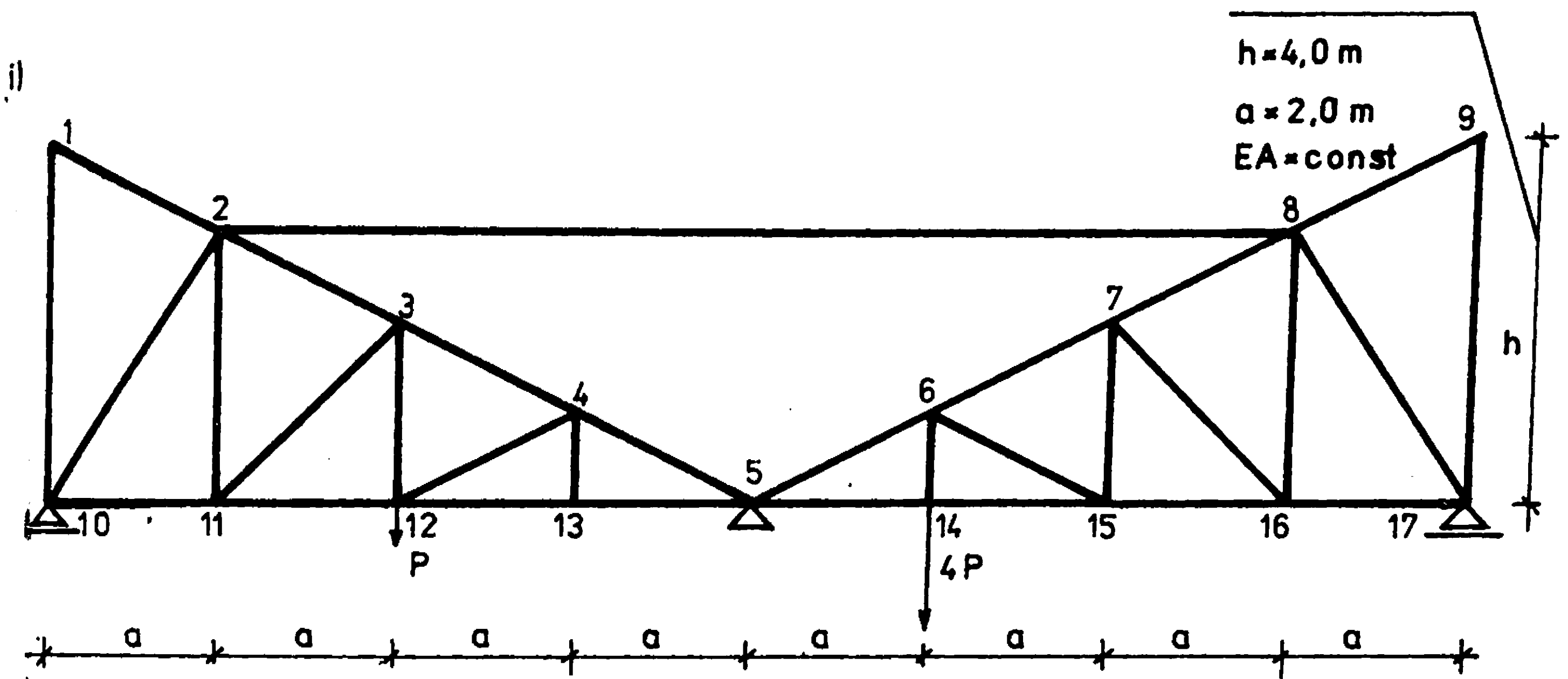
Rys. 9.11a-c



Rys. 9.11d-h

T a b e l a 9.2

Nr preta	N_1^j	N_2^j	N_3^j	l^j	$(EA)^j$	δ_{11}	δ_{22}	δ_{33}	δ_{13}	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	N^j
1-2	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0	a	EA	$0,5 \frac{a}{EA}$	$0,5 \frac{a}{EA}$	0	0	0	0	0	$-0,106 r$
2-3	0	0	1	a	EA	0	0	$\frac{a}{EA}$	0	0	0	0	$0,011 r$
3-4	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	0	a	EA	$0,5 \frac{a}{EA}$	$0,5 \frac{a}{EA}$	0	0	0	0	0	$-0,001 r$
5-6	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0	a	EA	$0,5 \frac{a}{EA}$	$0,5 \frac{a}{EA}$	0	0	$-0,71 \alpha_t t_o a$	$-0,71 \alpha_t t_o a$	0	$-0,106 r$
6-7	0	0	1	a	EA	0	0	$\frac{a}{EA}$	0	0	0	0	$0,011 r$
7-8	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	0	a	EA	$0,5 \frac{a}{EA}$	$0,5 \frac{a}{EA}$	0	0	0	0	0	$-0,001 r$
1-5	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0	a	EA	$0,5 \frac{a}{EA}$	$0,5 \frac{a}{EA}$	0	0	0	0	0	$-0,106 r$
2-6	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	1	a	EA	$0,5 \frac{a}{EA}$	$0,5 \frac{a}{EA}$	$\frac{a}{EA}$	$-0,71 \frac{a}{EA}$	0	0	0	$0,035 r$
3-7	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	a	EA	$0,5 \frac{a}{EA}$	$0,5 \frac{a}{EA}$	$\frac{a}{EA}$	$-0,71 \frac{a}{EA}$	0	0	0	$0,010 r$
4-8	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	0	a	EA	$0,5 \frac{a}{EA}$	$0,5 \frac{a}{EA}$	$\frac{a}{EA}$	0	0	0	0	$-0,001 r$
1-6	1	1	0	$a\sqrt{2}$	EA	$1,41 \frac{a}{EA}$	$1,41 \frac{a}{EA}$	0	0	0	0	0	$0,149 r$
2-7	0	0	$-\sqrt{2}$	$a\sqrt{2}$	EA	0	0	$2,83 \frac{a}{EA}$	0	0	0	0	$-0,016 r$
3-8	1	-1	0	$a\sqrt{2}$	EA	$1,41 \frac{a}{EA}$	$1,41 \frac{a}{EA}$	0	0	0	0	0	$0,002 r$
5-2	1	1	0	$a\sqrt{2}$	EA	$1,41 \frac{a}{EA}$	$1,41 \frac{a}{EA}$	0	0	0	0	0	$0,149 r$
6-3	0	0	$-\sqrt{2}$	$a\sqrt{2}$	EA	0	0	$2,83 \frac{a}{EA}$	0	0	0	0	$-0,016 r$
7-4	1	-1	0	$a\sqrt{2}$	EA	$1,41 \frac{a}{EA}$	$1,41 \frac{a}{EA}$	0	0	0	0	0	$0,002 r$
Σ						$9,64 \frac{a}{EA}$	$9,64 \frac{a}{EA}$	$9,66 \frac{a}{EA}$	$-1,42 \frac{a}{EA}$	$-0,71 \alpha_t t_o a$	$-0,71 \alpha_t t_o a$	0	



Rys. 9.11i

rozwiązanie - samodzielne.

10. UKŁADY BELKOWO-KRATOWE

Zadanie 10.1

Dla danego układu belkowo-kratowego wyznaczyć linie wpływowe momentu zginającego, siły tnącej w przekroju $\alpha-\alpha$ oraz siły normalnej w pręcie Z_{3-4} od poruszającej się siły jednostkowej (rys. 10.1).

Przyjąć: $EJ_b = \text{const} [\text{kN/m}^2]$,

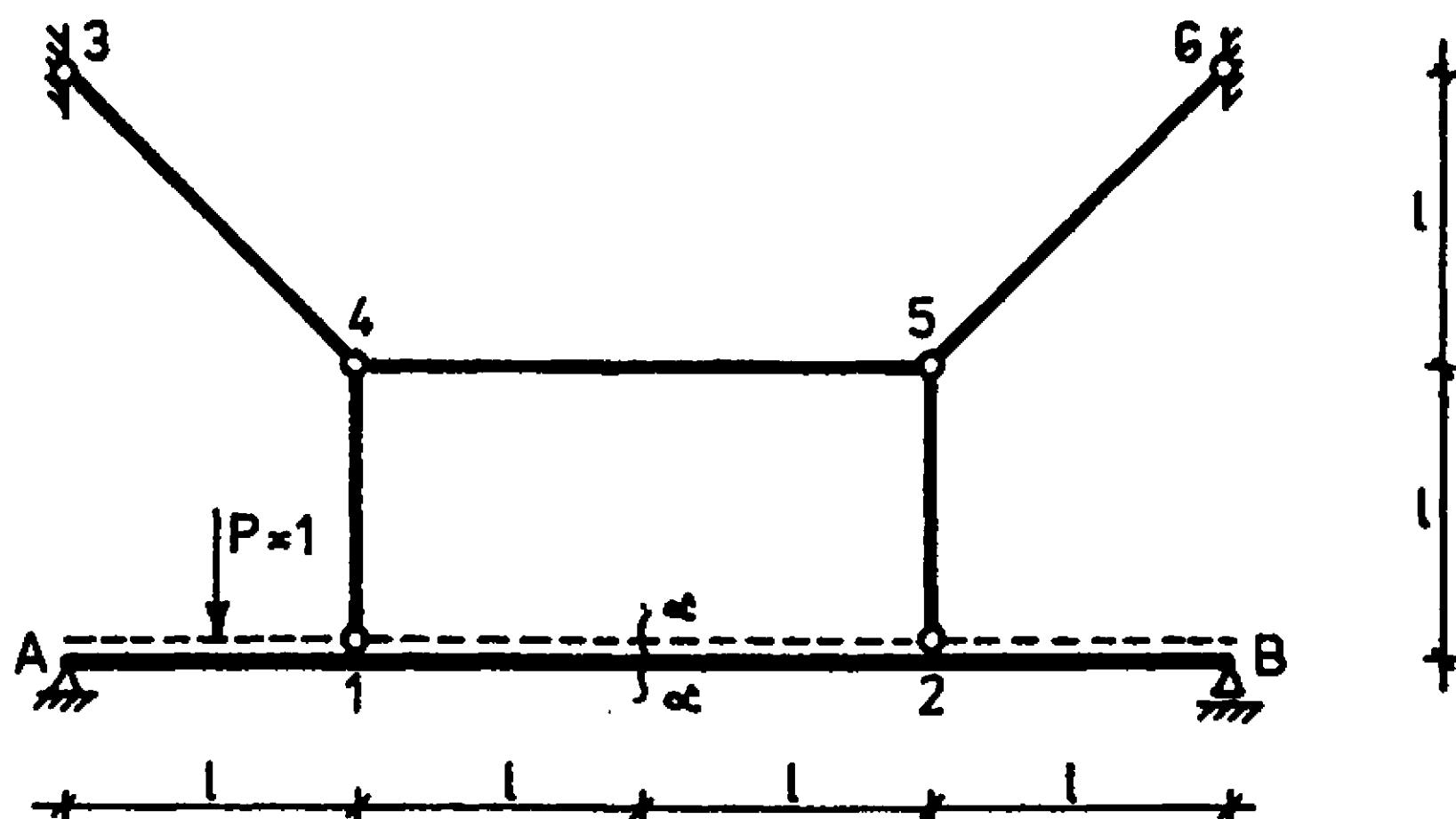
$EA_b = \text{const} [\text{kN}]$,

$EA_p = \text{const} [\text{kN}]$,

A_b - pole przekroju belki sztywnej,

A_p - pole przekroju prętów wiotkich,

$A_b = 20 A_p = 200 \frac{J_b}{l^2}$.



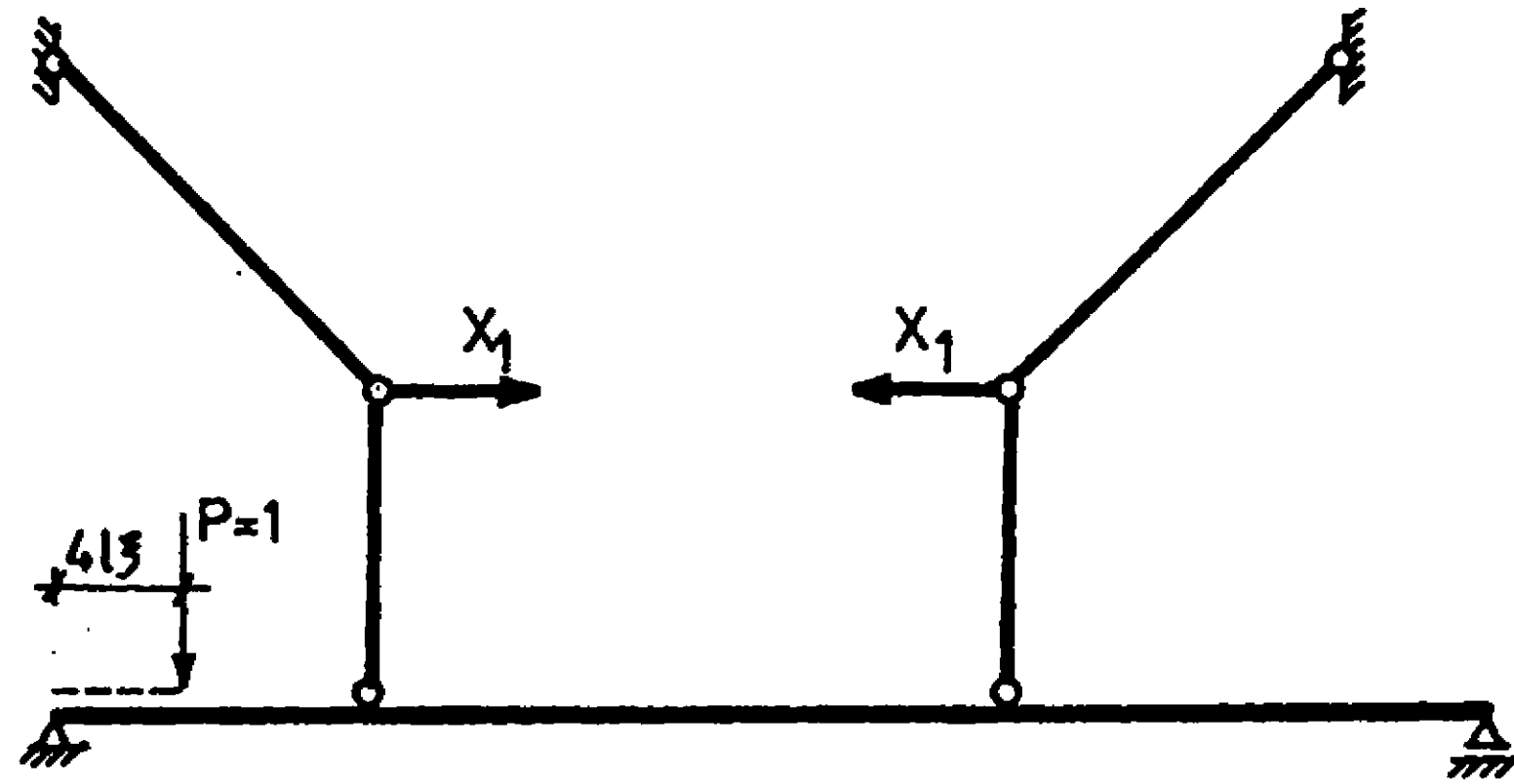
Rys. 10.1

Rozwiązanie

Układy belkowo-kratowe zawierają część prętów sztywnych, w których działają momenty zginające, siły poprzeczne i siły normalne oraz pręty wiotkie, w których działają siły normalne. Przy wyznaczaniu przemieszczeń w takim układzie będziemy pomijać wpływ sił poprzecznych jak i wpływ sił podłużnych w prętach sztywnych, z uwagi na znacznie większy przekrój pręta sztywnego w porównaniu z prętem wiotkim.

Rozważany układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny. Jako nadliczbową X_1 przyjmiemy siłę w pręcie 4-5. Przy obliczaniu przemieszczeń będziemy całkować siły normalne w prętach wiotkich i momenty zginające w pręcie sztywnym A-B.

Układ podstawowy

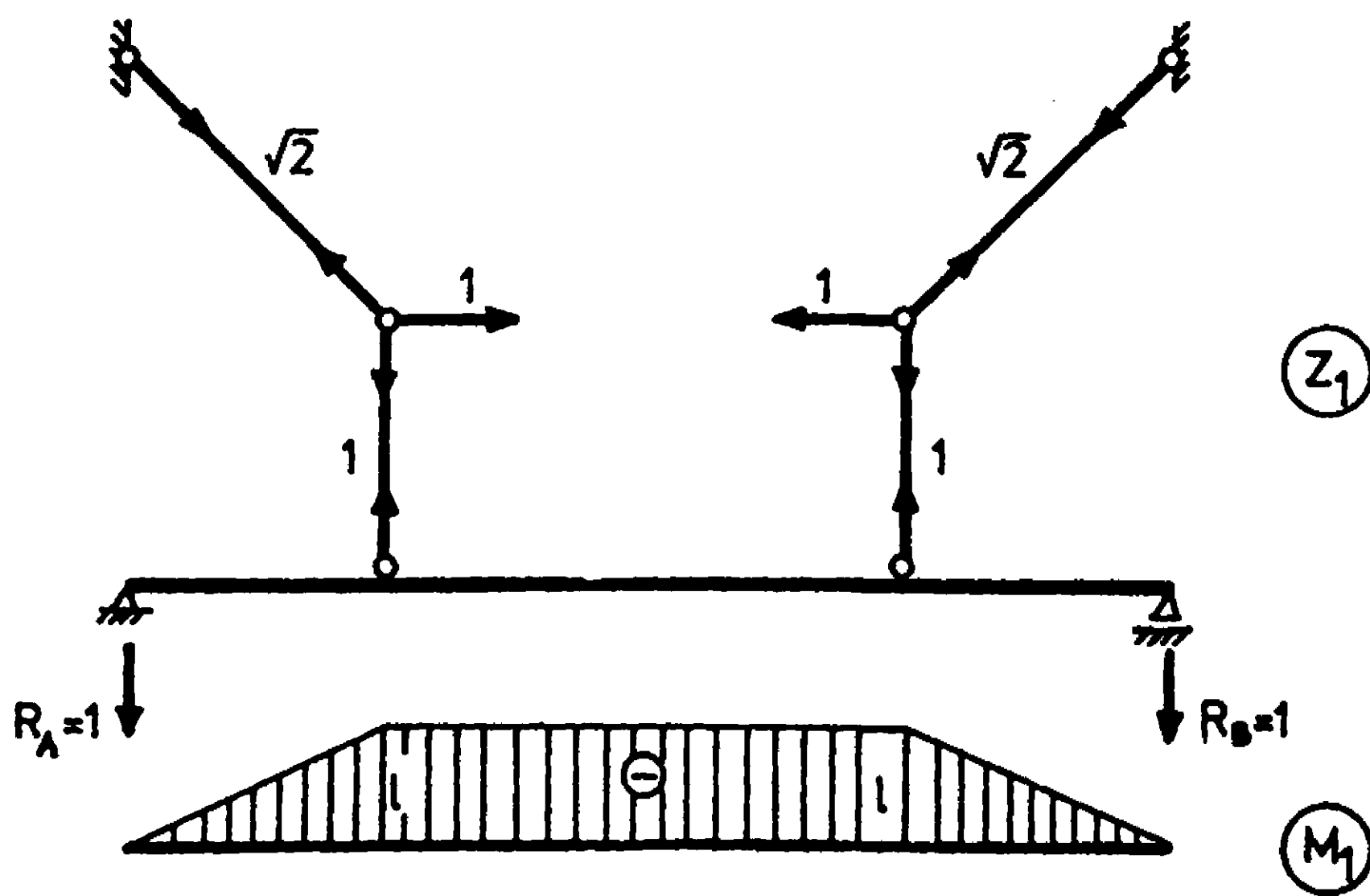


Rys. 10.2

Nadliczbową wyznaczamy z równania

$$X_1(\xi) \delta_{11} + \delta_{10}(\xi) = 0,$$

stan $X_1 = 1$



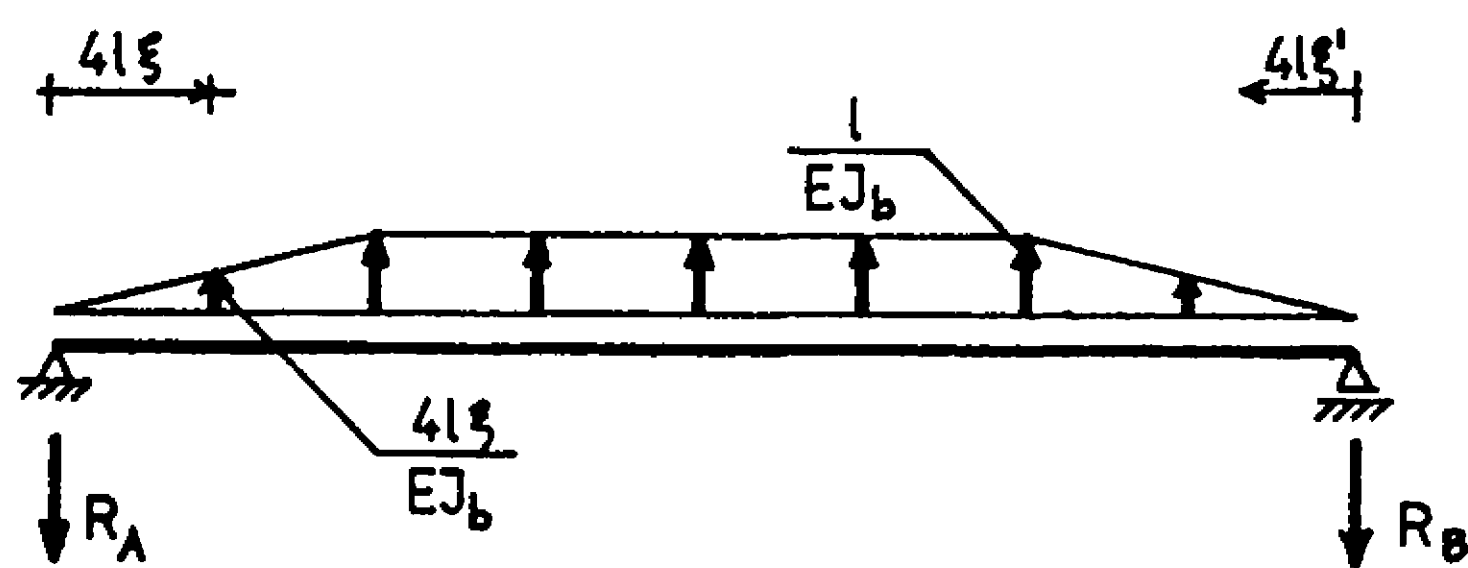
Rys. 10.3

$$\delta_{11} = \int_S \frac{M_1 M_1}{EJ_b} dS + \sum_{j=1}^n \frac{Z_1^j Z_1^j}{EA_p} 1^j,$$

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EJ_b} \left(\frac{1}{3} 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 21 \right) + \frac{1}{EA_p} (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 + \\ &\quad + 2 \cdot 2 \cdot 12 + 1 \cdot 1 \cdot 21) = \\ &= 2,67 \frac{1^3}{EJ_b} + 6,82 \frac{1}{EA_p} = (2,67 + 0,682) \frac{1^3}{EJ_b} = 3,352 \frac{1^3}{EJ_b}.\end{aligned}$$

Z twierdzenia Maxwella wynika, że linia wpływowa przemieszczenia $\delta_{10}(\xi)$ jest linią ugięcia belki AB od obciążenia $X_1 = 1$. Tę linię ugięcia wyznaczymy metodą Mohra. Belkę fikcyjną obciążymy więc wykresem momentów zginających od stanu $X_1 = 1$

$$R_A = R_B = \frac{3}{2} \frac{1^2}{EJ_b}.$$



Rys. 10.4

Przedział A-1: $0 \leq \xi \leq \frac{1}{4}$

$$\text{l.w. } \delta_{10} = -R_A \cdot 4l\xi + \frac{1}{2} \frac{(4l\xi)^2}{EJ_b} \cdot \frac{1}{3} 4l\xi = -\frac{1^3}{3EJ_b} (18\xi - 32\xi^3).$$

Przedział 1-2: $\frac{1}{4} \leq \xi \leq \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}\text{l.w. } \delta_{10} &= -R_A \cdot 4l\xi + \frac{1}{2} \frac{1}{EJ_b} \cdot 1 \cdot (4l\xi - \frac{2}{3} l) + \frac{1}{EJ_b} \frac{(4l\xi - l)^2}{2} = \\ &= -\frac{1^3}{EJ_b} (8\xi - 8\xi^2 - \frac{1}{6}).\end{aligned}$$

Przedział 2-3 (symetrycznie do przedziału A-1): $\frac{3}{4} \leq \xi \leq 1$

$$\text{l.w. } \delta_{10} = -\frac{1^3}{3EJ_b} (18\xi' - 32\xi'^3).$$

Zatem nadliczbowa X_1 ma następujące równania w poszczególnych przedziałach:

A-1

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{1^3}{3EJ_b} (18\xi - 32\xi^3)}{3,352 \frac{1^3}{EJ_b}} = 1,790\xi - 3,182\xi^3;$$

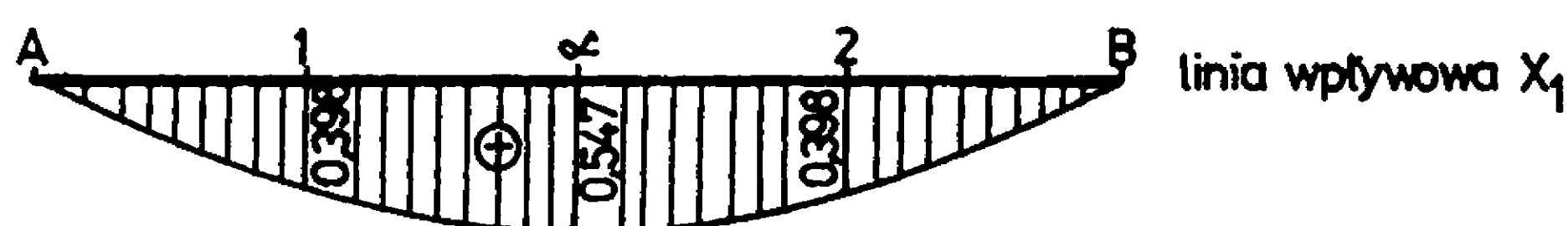
1-2

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{1^3}{EJ_b} (8\xi - 8\xi^2 - \frac{1}{6})}{3,352 \frac{1^3}{EJ_b}} = 2,387(\xi - \xi^2) - 0,0497;$$

2-B

$$X_1 = 1,790\xi' - 3,182\xi'^3;$$

Wykres linii wpływowej siły X_1 przedstawiono na rysunku 10.5.

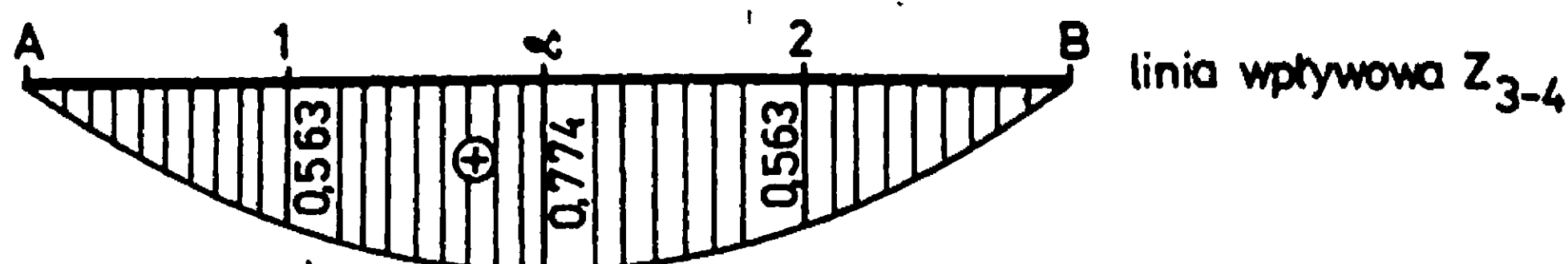


Rys. 10.5

Linie wpływową siły w przęcie Z_{3-4} otrzymamy z równowagi węzła 4

$$\text{l.w. } Z_{3-4} = \sqrt{2} \text{ l.w. } X_1.$$

Wykres linii wpływowej siły Z_{3-4} przedstawiono na rysunku 10.6.



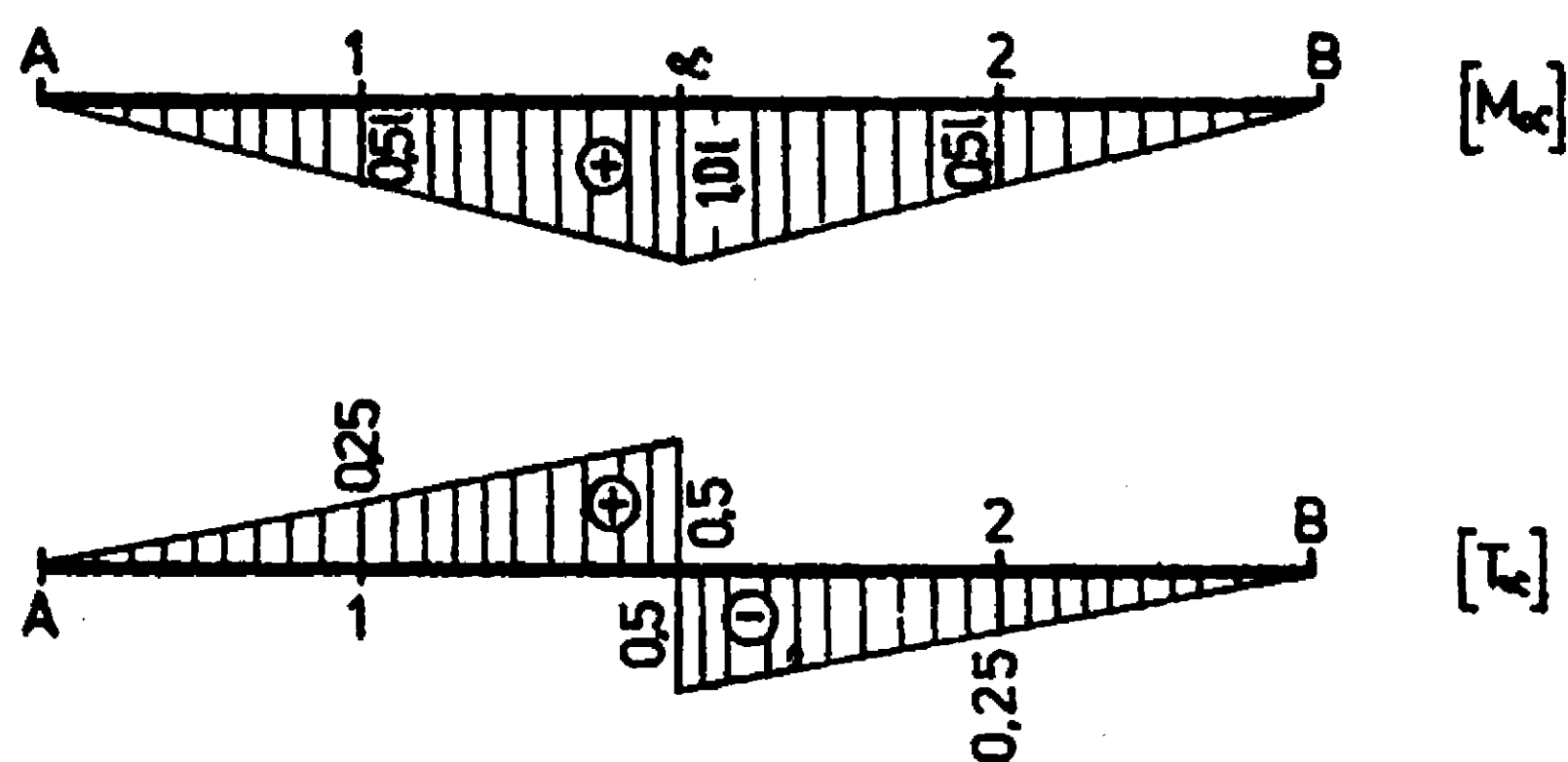
Rys. 10.6

Linie wpływową momentu zginającego i siły tnącej w przekroju $\alpha-\alpha$ otrzymamy z zależności

$$M_\alpha = [M_\alpha] + X_1 \quad M_{\alpha 1} = [M_\alpha] - \text{l.w. } X_1,$$

$$T_{\alpha} = [T_{\alpha}] + X_1 \quad T_{\alpha 1} = [T_{\alpha}],$$

gdzie $[M_{\alpha}]$ i $[T_{\alpha}]$ - linie wpływowe momentu zginającego i siły tnącej w przekroju $\alpha - \alpha$ dla belki swobodnie podpartej (rys. 10.7).



Rys. 10.7

Równania linii wpływowych M_{α} i T_{α} są następujące:

$$A-1: \quad 0 \leq \xi \leq \frac{1}{4}$$

$$M_{\alpha} = \frac{1}{2} 41 \xi - 1 \cdot (1,790 \xi - 3,182 \xi^3) = 0,210 \xi^1 + 3,182 \xi^3 1,$$

$$T_{\alpha} = -\frac{1}{41} 41 \xi = -\xi;$$

$$1-2: \quad \frac{1}{4} < \xi < \frac{1}{2}$$

$$M_{\alpha} = \frac{1}{2} 41 \xi - 1 \cdot [2,387 (\xi - \xi^2) - 0,0497] = -0,387 \xi^1 + 2,387 \xi^2 1 + 0,0497 1,$$

$$T_{\alpha} = -\frac{1}{41} 41 \xi = -\xi;$$

$$\alpha-2: \quad \frac{1}{2} < \xi < \frac{3}{4}$$

$$M_{\alpha} = \frac{1}{2} 41 \xi' - 1 [2,387 (\xi - \xi^2) - 0,0497] =$$

$$= -4,387 \xi^1 + 2,387 \xi^2 1 + 2,0497 1,$$

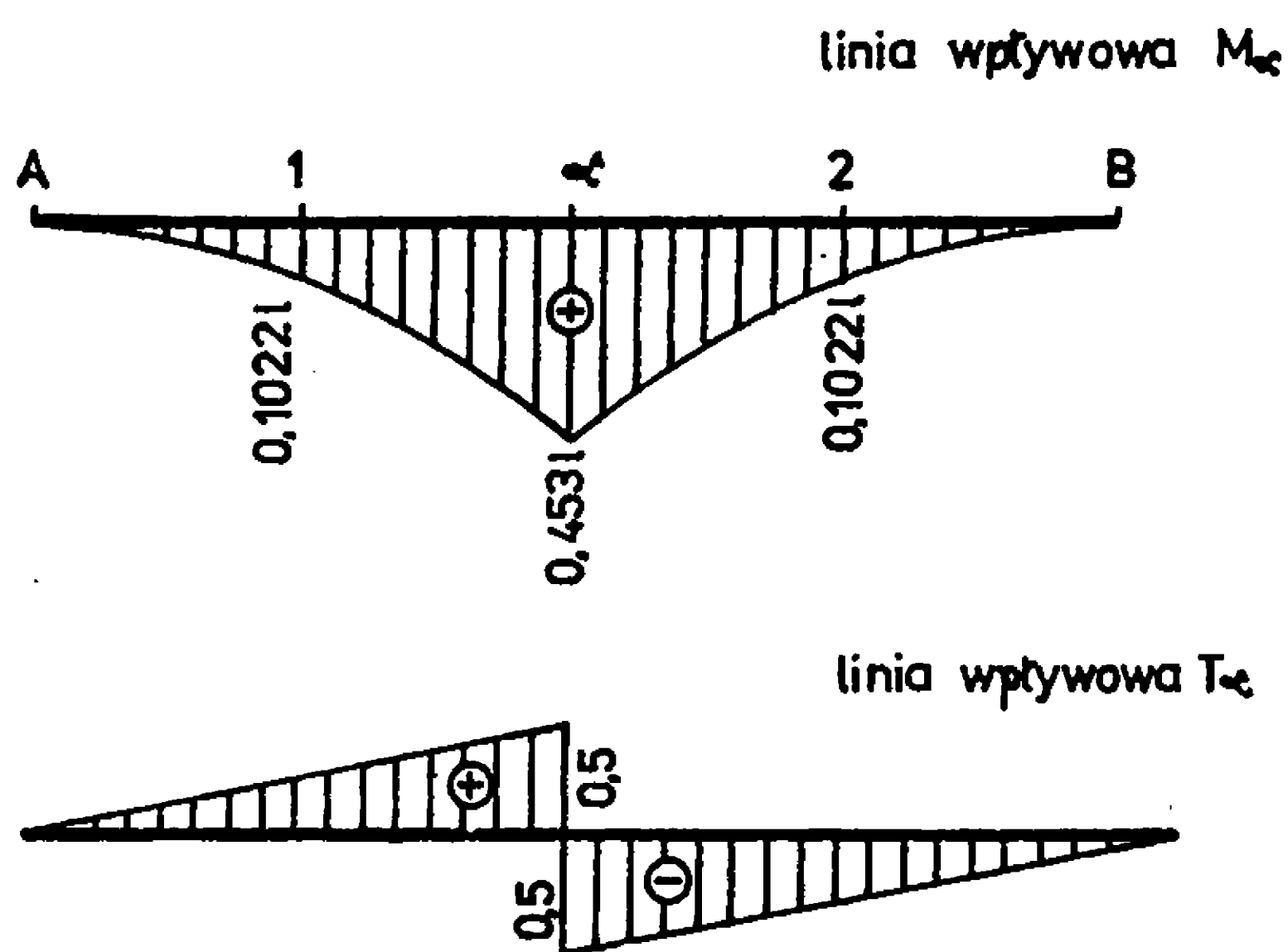
$$T_{\alpha} = \frac{1}{41} 41 \xi' = \xi';$$

$$2-B: \frac{3}{4} \leq \xi \leq 1$$

$$M_{\alpha} = \frac{1}{2} 4l \xi' - 1 (1,790 \xi' - 3,182 \xi'^3) = 0,210 \xi' l + 3,182 \xi'^3 l,$$

$$T_{\alpha} = \frac{1}{4l} 4l \xi' = \xi'.$$

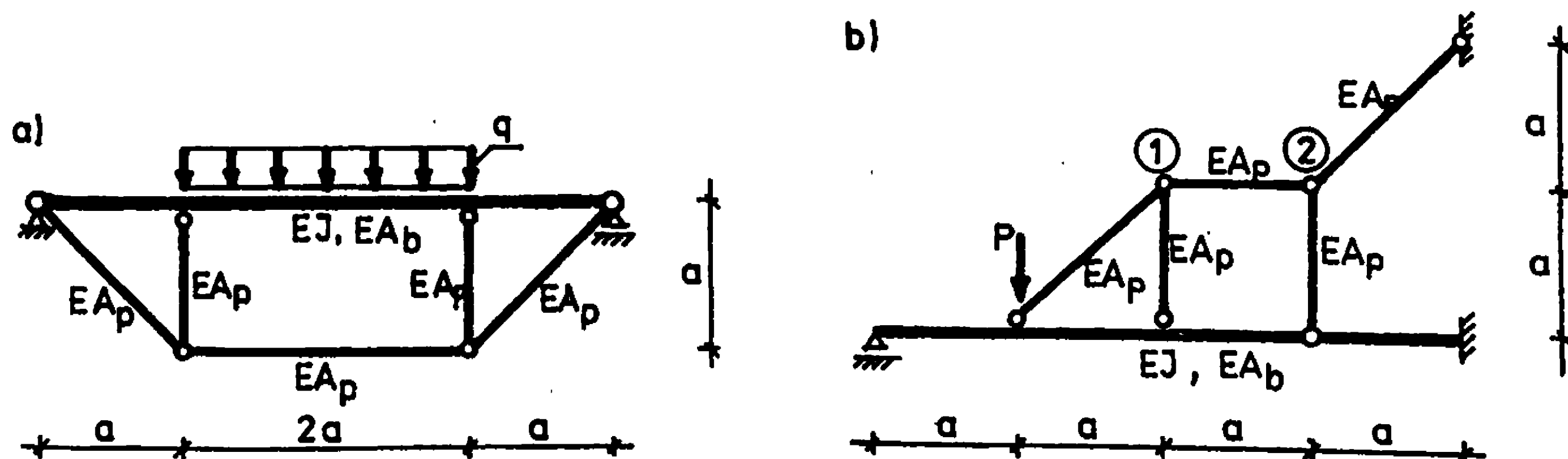
Wykresy linii wpływowej momentu zginającego i siły tnącej przedstawiono na rysunku 10.8.



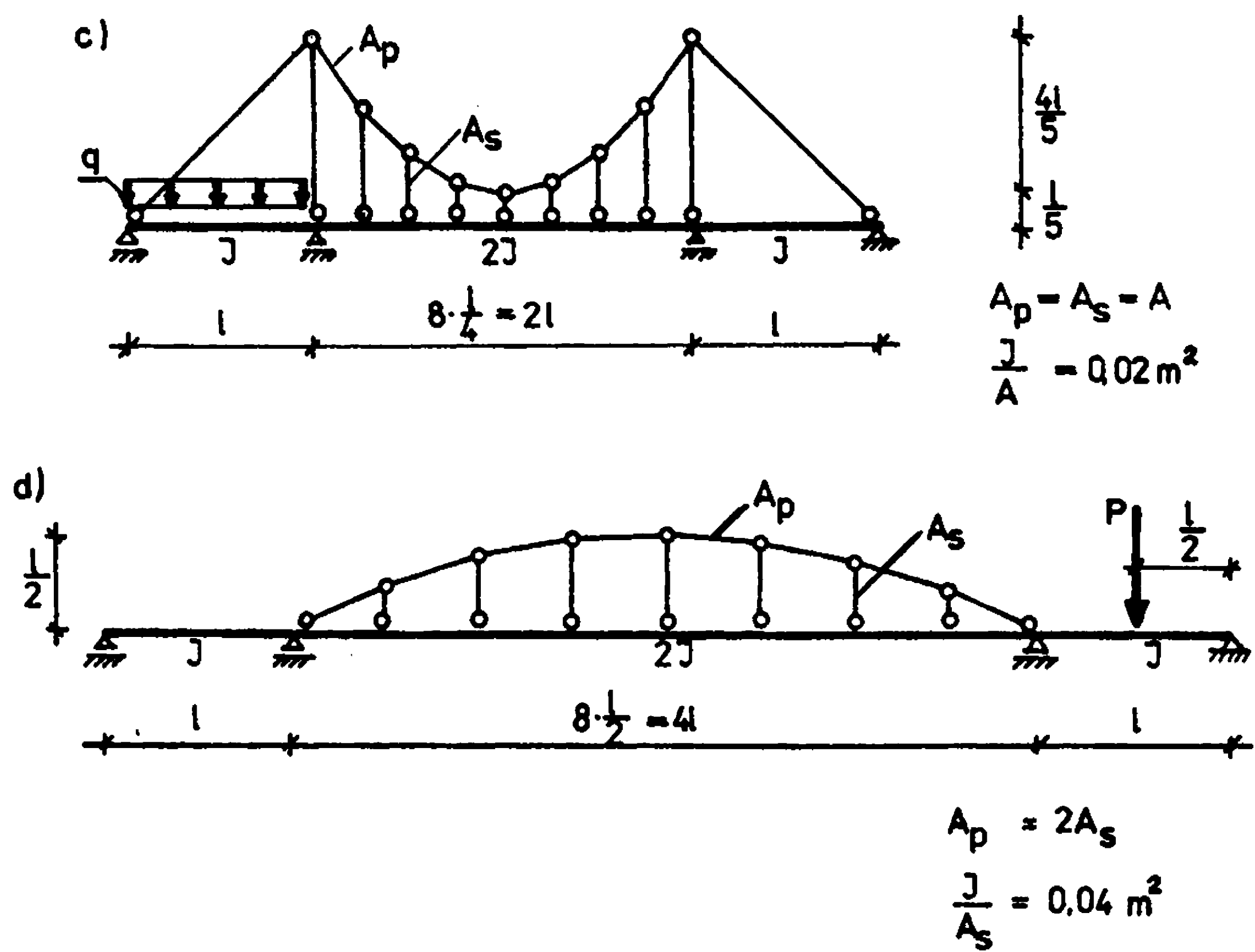
Rys. 10.8

Zadanie 10.2

Dla podanych układów przy danym obciążeniu sporządzić wykresy sił wewnętrznych (10.9a-d).



Rys. 10.9a-b



Rys. 10.9c-d

Rozwiązanie - samodzielne.

11. WYZNACZANIE PRZEMIESZCZEŃ W UKŁADACH STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH

Twierdzenia redukcyjne

Równanie pracy wirtualnej przy wirtualnym stanie obciążenia jest słuszne dla układów statycznie niewyznaczalnych jak i statycznie wyznaczalnych. W układach statycznie wyznaczalnych chcąc znaleźć przemieszczenie wywołane obciążeniem zewnętrznym, temperaturą lub osiada-
niem podpór ustawialiśmy na kierunku tego przemieszczenia wirtualną si-
łę jednostkową i całkowaliśmy wykresy sił wewnętrznych powstałych od
danego obciążenia. W ten sam sposób możemy postąpić w wypadku układów
statycznie niewyznaczalnych. W tym przypadku, wykresy sił wewnętrznych
od obciążenia zewnętrznego i od wirtualnej siły jednostkowej musimy wy-
znaczyć w układzie statycznie niewyznaczalnym. Z faktu tego wynika, że
w celu wyznaczenia przemieszczenia w układzie statycznie niewyznaczal-
nym, należy dwukrotnie rozwiązać układ statycznie niewyznaczalny; raz
dla obciążenia zewnętrznego, drugi raz dla obciążenia wirtualnego.

Wyznaczanie przemieszczeń w układach statycznie niewyznaczalnych
można znacznie uprościć wykorzystując twierdzenia redukcyjne, z któ-
rych wynika, że dwukrotne rozwiązywanie układu statycznie niewyznaczal-
nego nie jest konieczne. Pierwsze twierdzenie redukcyjne ozn sformu-
łować następująco: aby wyznaczyć przemieszczenie w układzie statycznie
niewyznaczalnym należy sporządzić wykresy sił wewnętrznych od obciąże-
nia zewnętrznego na układzie statycznie niewyznaczalnym, natomiast od
obciążenia wirtualnego wykresy wirtualnych sił wewnętrznych należy spo-
rządzić na dowolnie przyjętym układzie statycznie wyznaczalnym. Twier-
dzenie to dla układów ramowych możemy zapisać:

$$\delta^n = \int_s \left[\bar{M}^{(0)} \left(\frac{M^{(n)}}{EJ} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \right) + \bar{N}^{(0)} \left(\frac{N^{(n)}}{EA} + \alpha_t t \right) + \kappa \frac{\bar{T}^{(0)} T^{(n)}}{A} \right] ds.$$

Natomiast drugie twierdzenie redukcyjne można wyrazić następująco: aby znaleźć przemieszczenie w układzie statycznie niewyznaczalnym należy sporządzić wykresy sił wewnętrznych od obciążenia zewnętrznego na dowolnym układzie podstawowym, natomiast od obciążenia wirtualnego sporządzić wykresy wirtualnych sił wewnętrznych na układzie statycznie niewyznaczalnym:

$$\delta^{(0)} = \int_S \left[\bar{M}^{(n)} \left(\frac{M^{(0)}}{EJ} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \right) + \bar{N}^{(n)} \left(\frac{N^{(0)}}{EA} + \alpha_t t + \lambda \frac{T^{(n)} T^{(0)}}{GA} \right) \right] dS.$$

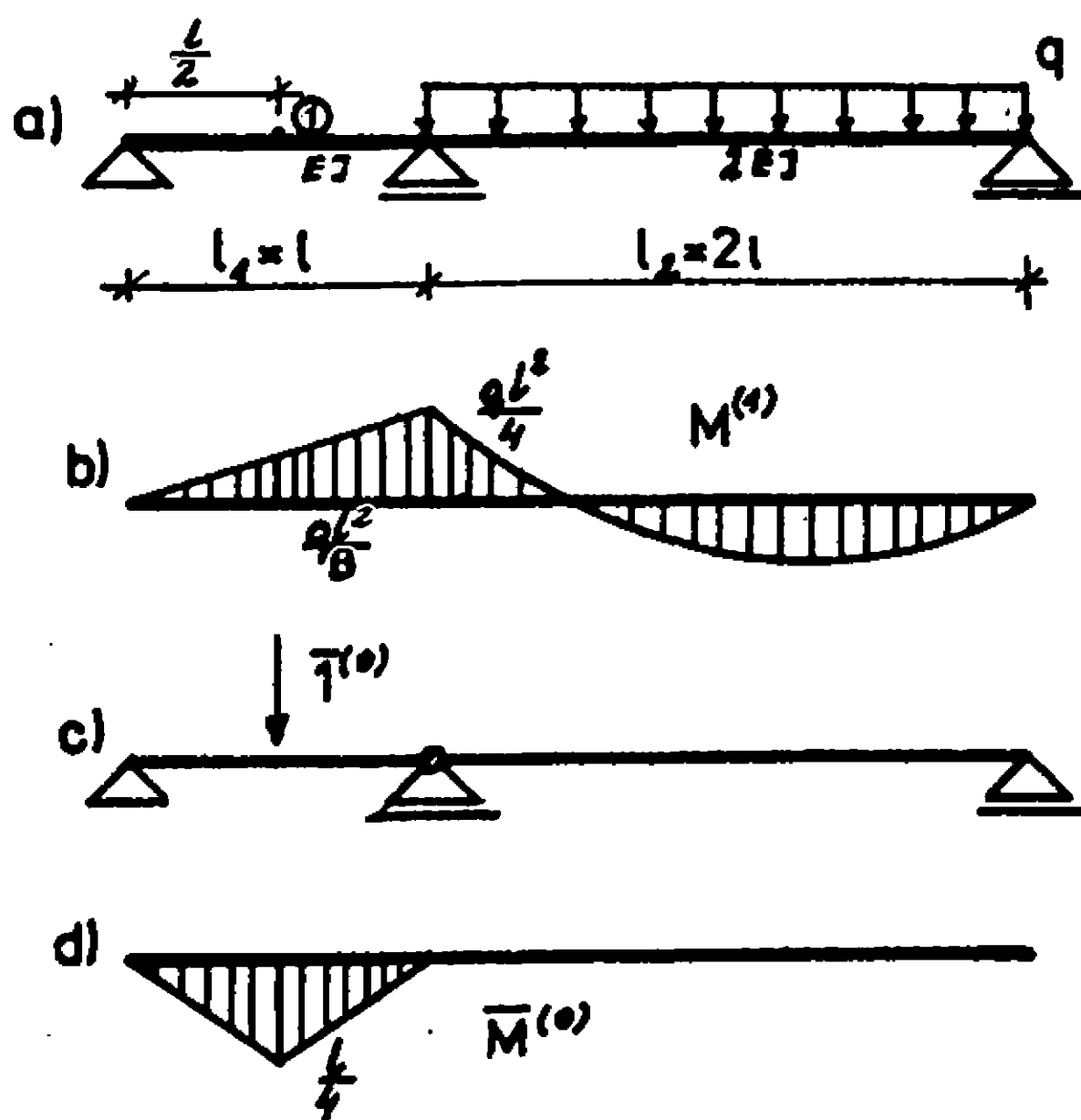
Zadanie 11.1

Dla danej belki ciągłej statycznie niewyznaczalnej przy danym obciążeniu wyznaczyć przemieszczenie pionowe punktu 1 (rys. 11.1a).

Rozwiązanie

Zadanie to rozwiążemy stosując pierwsze twierdzenie redukcyjne. Rozważany układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny.

Rozwiązanie przeprowadzimy w oparciu o równanie trzech momentów:



rys. 11.1

$$2X_B (l'_1 + l'_2) = N_{B0},$$

$$l'_2 = l_2 \frac{J}{2J} = 2l \frac{J}{2J} = 1,$$

$$l'_1 = 1,$$

$$4X_B 1 = N_{B0},$$

$$N_{B0} = -q l_2^2 l'_2 \int_0^1 \omega'_T(\xi') d\xi = -q \cdot 4l^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = -ql^3,$$

$$4X_B 1 = -ql^3,$$

$$X_B = -\frac{ql^3}{4}.$$

Wykres momentów zginających od obciążenia zewnętrznego przedstawiono na rysunku 11.1b. Zgodnie z pierwszym twierdzeniem redukcyjnym obciążenie wirtualne przyłożono w punkcie 1 na układzie statycznie wyznaczalnym (rys. 11.1c), a wykres wirtualnych momentów od tego obciążenia przedstawiono na rysunku 11.1d.

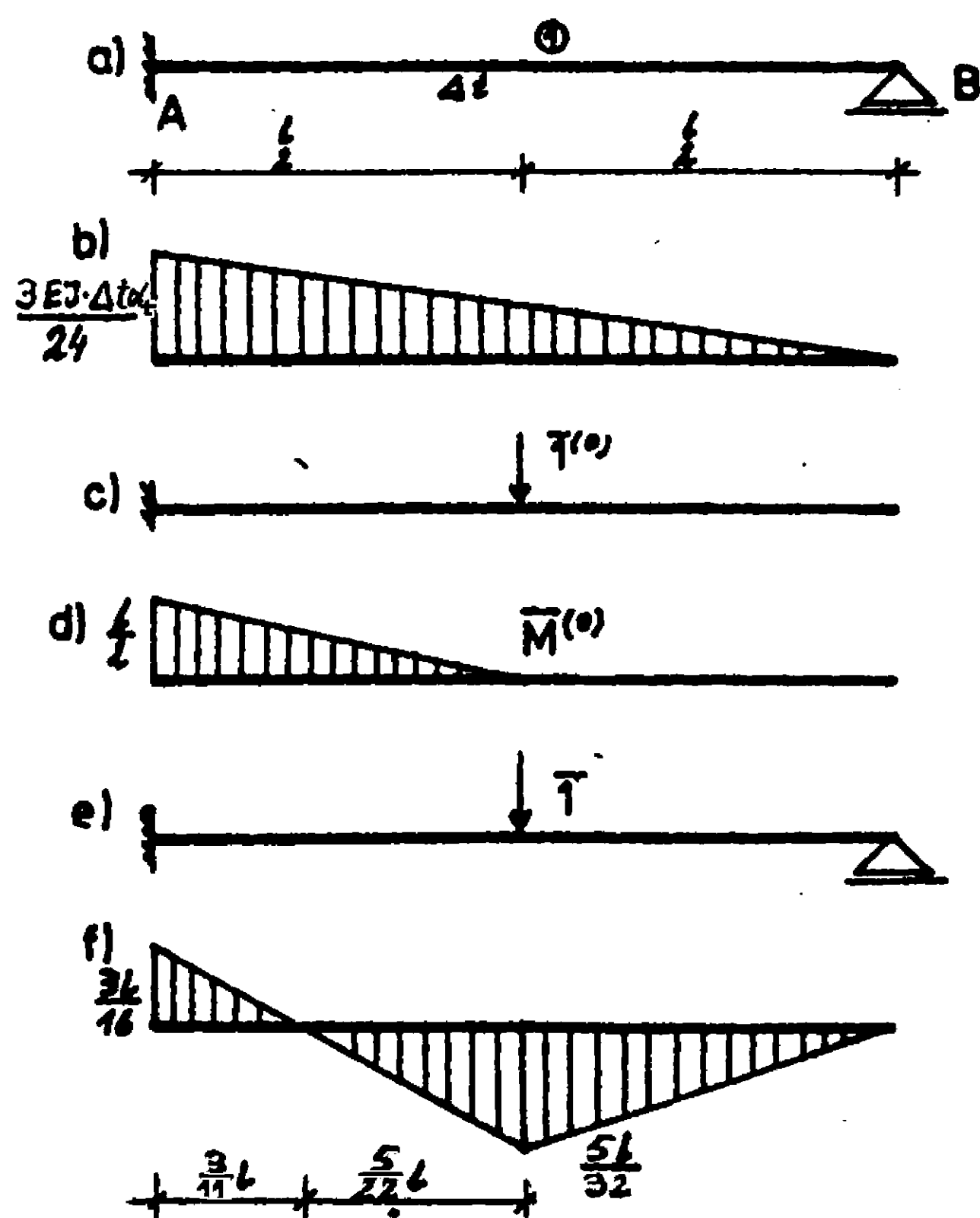
Całkując te wykresy otrzymujemy

$$\delta_1 = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{ql^2}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{ql^2}{8} + \frac{ql^2}{24} \right) \right] =$$

$$= -\frac{ql^4}{3 \cdot 64 EJ} - \frac{ql^4}{4 \cdot 24 EJ} = -\frac{ql^4}{6 EJ} \quad [m] .$$

Zadanie 11.2

Dla danej belki statycznie niewyznaczalnej przy danym obciążeniu wyznaczyć przemieszczenie pionowe punktu 1 (rys. 11.2a).



rys. 11.2.

Rozwiązanie

Rozważany układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny. Rozwiążemy go od obciążenia zewnętrznego równaniem trzech momentów:

$$2X_A l = N_{AO},$$

$$N_{AO} = - 3EJ \alpha_t \frac{\Delta t l}{h},$$

$$X_A = - \frac{3EJ \alpha_t \Delta t}{2h}.$$

Wykres momentów zginających od obciążenia termicznego przedstawiono na rysunku 11.2b. Obciążenie wirtualne przyłożono w punkcie 1 na układzie statycznie wyznaczalnym (rys. 11.2c), a wykres wirtualnych momentów zginających przedstawiono na rysunku 11.2d. Całkując te wykresy otrzymamy-

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \int_S \bar{M}^{(0)} \left(\frac{M^{(1)}}{EJ} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \right) dS = \\ &= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3EJ \alpha_t \Delta t}{4h} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3EJ \alpha_t \Delta t}{4h} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_t \Delta t}{h} = \frac{l^2 \alpha_t \Delta t}{32 h} [m]. \end{aligned}$$

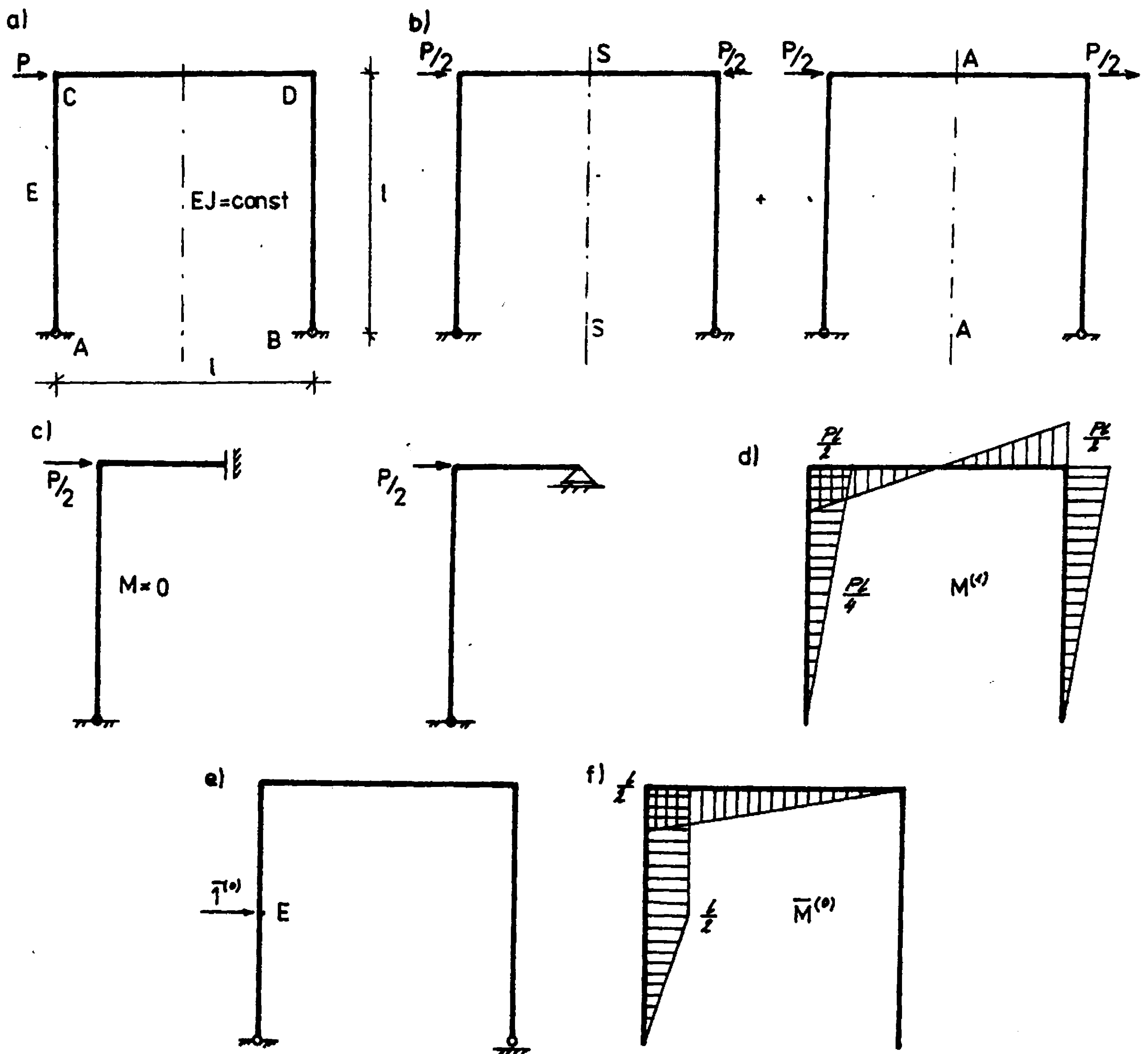
Zadanie to rozwiążemy jeszcze raz wykorzystując drugie twierdzenie redukcyjne. Zgodnie z tym twierdzeniem układ statycznie niewyznaczalny obciążamy jednostkowym obciążeniem wirtualnym (rys. 11.2e).

Wykres momentów zginających od tego obciążenia przedstawiono na rysunku 11.2f (szczegóły obliczeń pominięto):

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \int_S \bar{M}^{(1)} \left(\frac{M^{(0)}}{EJ} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \right) dS = \int_S \bar{M}^{(1)} \alpha_t \frac{\Delta t}{h} dS, \\ \delta_1 &= \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \left(\frac{51}{32} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{51}{32} \cdot \frac{51}{22} \cdot \frac{1}{2} + \frac{31}{16} \cdot \frac{31}{11} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{l^2 \alpha_t \Delta t}{32 h} [m]. \end{aligned}$$

Zadanie 11.3

Dla danej ramy statycznie niewyznaczalnej przy danym obciążeniu wyznaczyć poziome przemieszczenie punktu E (rys. 11.3a).



rys. 11.3

rozwiązanie

Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny. Rozwiązanie przeprowadzimy wykorzystując oś symetrii układu. Obciążenie zewnętrzne rozkładamy na symetryczne i antysymetryczne (rys. 11.3b). Schematy zredukowane dla obciążenia symetrycznego i antysymetrycznego przedstawiono na rysunku 11.3c.

Wykres momentów zginających od obciążenia symetrycznego jest równy zero. Schemat zredukowany dla obciążenia antysymetrycznego jest układem statycznie wyznaczalnym, stąd też jest łatwo sporządzić wykres momentów zginających (rys. 11.3d).

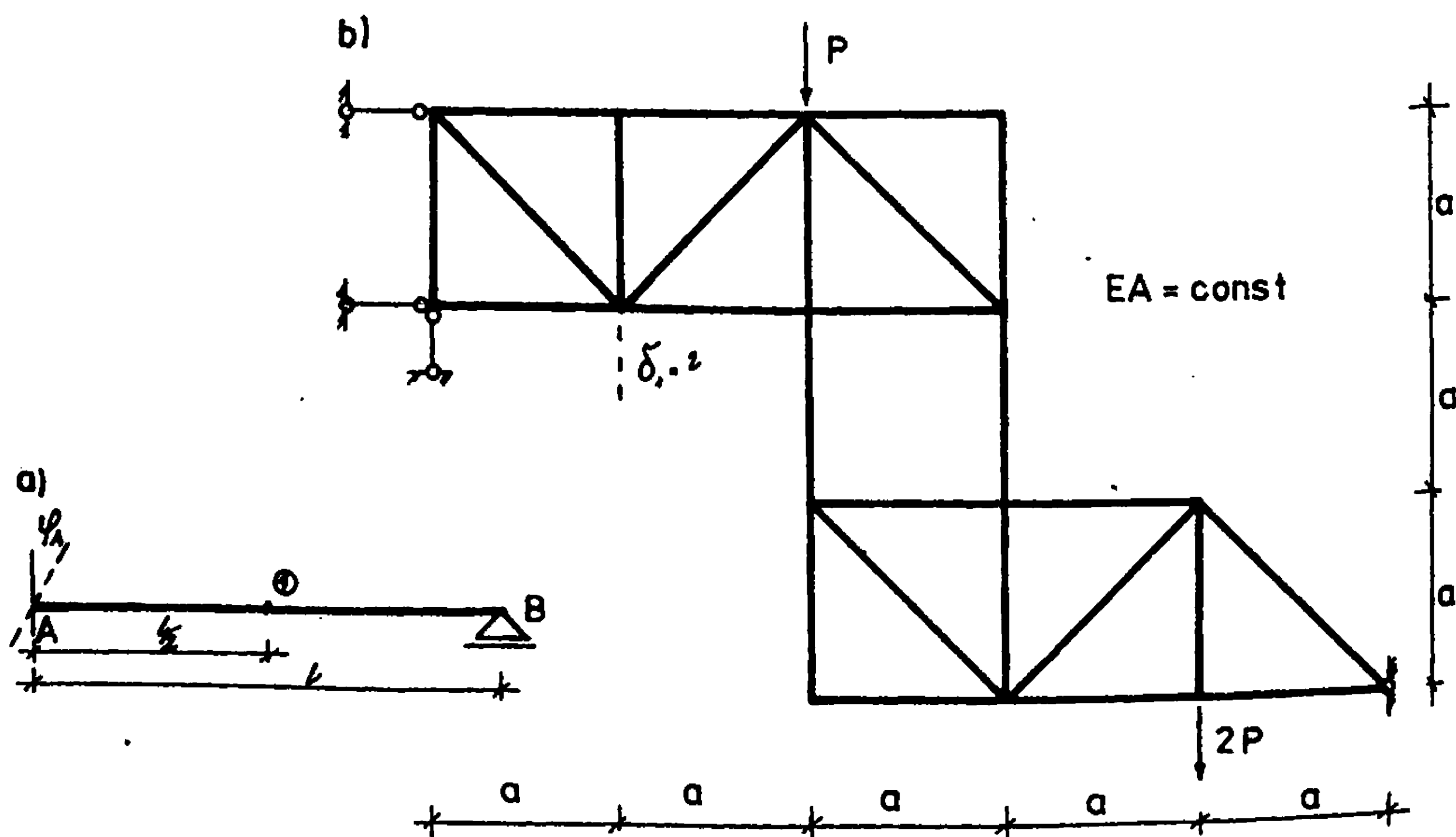
Zgodnie z pierwszym twierdzeniem redukcyjnym obciążenie wirtualne przyłożono w punkcie E o kierunku poziomym (rys. 11.3e), a wykres wirtualnych momentów zginających przedstawiono na rysunku 11.3f

$$\begin{aligned} \delta_1 = \int_S \frac{\bar{M}^{(0)} M^{(1)}}{EJ} dS = \frac{1}{EJ} & \left[\frac{Pl}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{Pl}{2} + \frac{Pl}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{Pl}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) - \\ & \left. - \frac{Pl}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \right] = \frac{7Pl^3}{48EJ} \quad [m] \end{aligned}$$

Zadanie 11.4

Dla układów przedstawionych na rysunku 11.4a,b, przy danym obciążeniu wyznaczyć pionowe przemieszczenie punktu 1.

Rozwiązanie - samodzielne



rys. 11.4

12. RUSZTY PŁASKIE

Rusztom płaskim nazywać będziemy układ belek prostych, wzajemnie krzyżujących się i leżących w jednej płaszczyźnie. Obciążenie zewnętrzne jest skierowane prostopadłe do płaszczyzny rusztu. Końce belek mogą być wolno podparte lub utwierdzone. W węzłach rusztu belki mogą się wzajemnie przenikać (węzeł sztywny), albo mogą być połączone przegubowo.

W tym rozdziale będziemy się zajmować tylko rusztami, które są połączone w punktach skrzyżowania przegubowo.

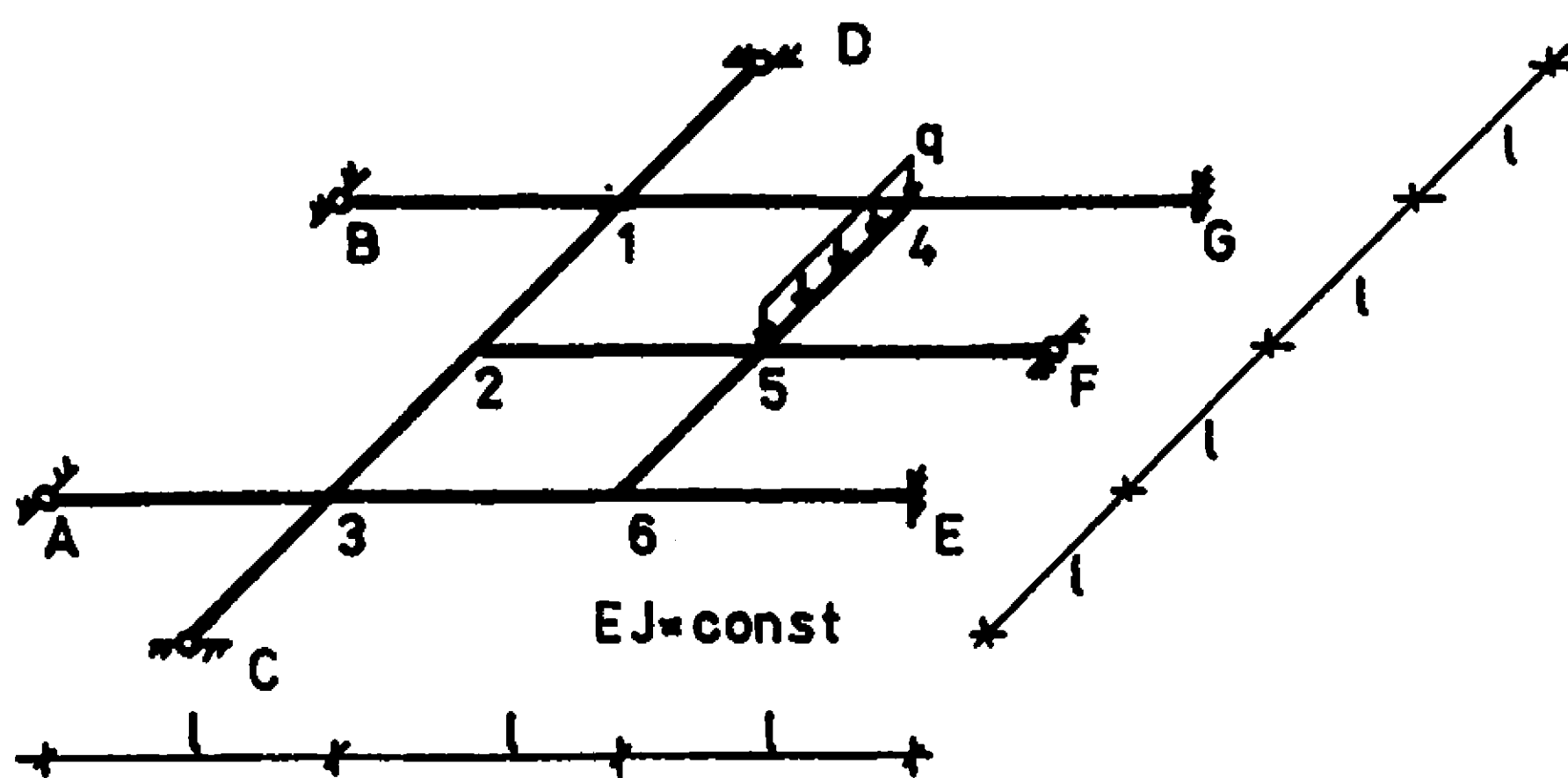
Stopień statycznej niewyznaczalności rusztów płaskich, połączonych w punktach skrzyżowania przegubowo będziemy wyznaczać ze wzoru

$$n = w + r - 2b - p,$$

gdzie: w - liczba węzłów w ruszcie,
 r - liczba składowych reakcji,
 b - liczba belek rusztu płaskiego,
 p - liczba przegubów w belkach rusztu.

Zadanie 12.1

Dla danego rusztu płaskiego przy danym obciążeniu wyznaczyć wykres momentów zginających (rys. 12.1)



Rozwiązanie

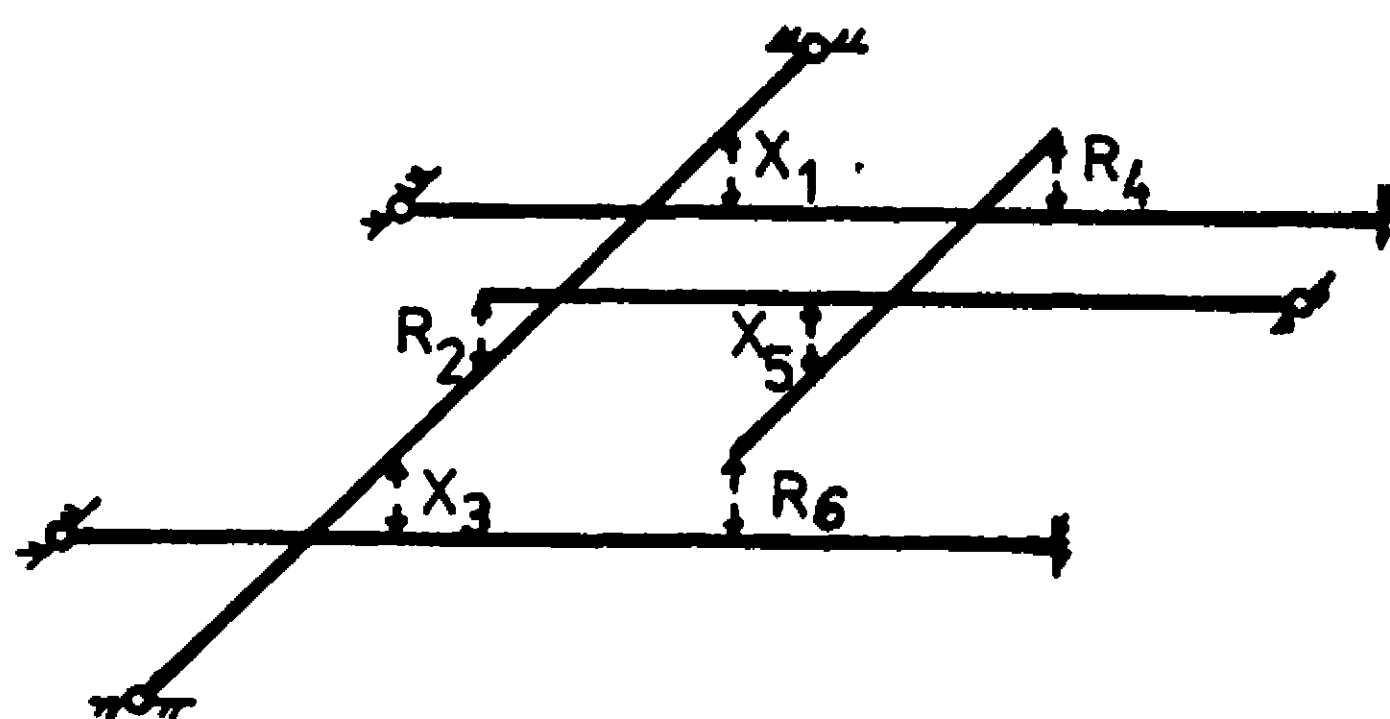
Określmy stopień statycznej niewyznaczalności tego rusztu płaskiego:

$$n = w + r - 2b - p,$$

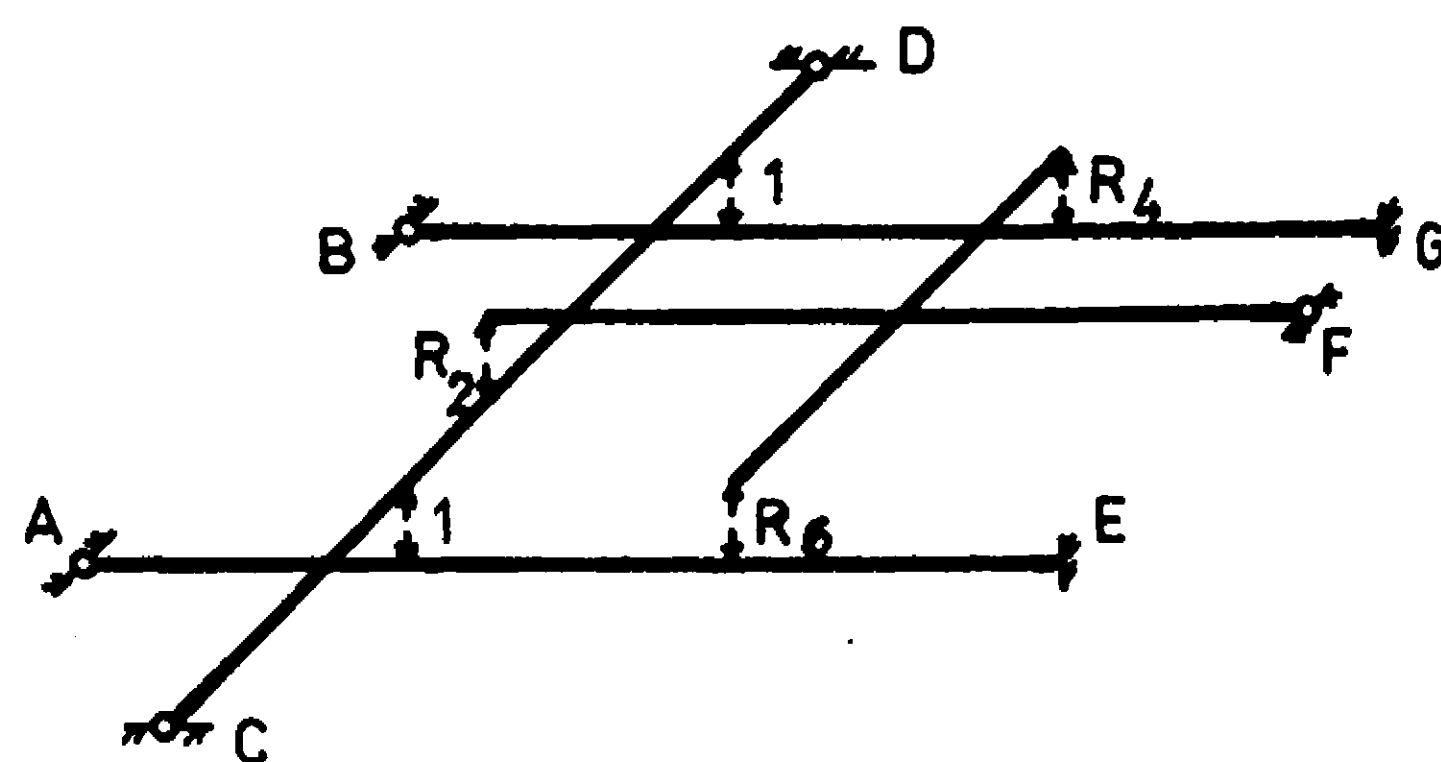
$$w = 6, r = 9, b = 5, p = 0,$$

$$n = 6 + 9 - 2 \cdot 5 - 0 = 5.$$

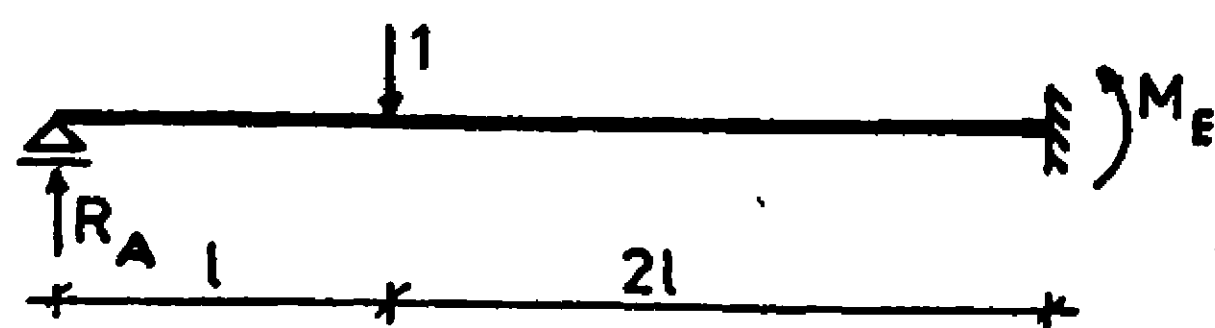
Jako nadliczbowe przyjmujemy siły w węzłach 1,3,5, tym samym przyjmujemy statycznie niewyznaczalny układ podstawowy (rys. 12.2).



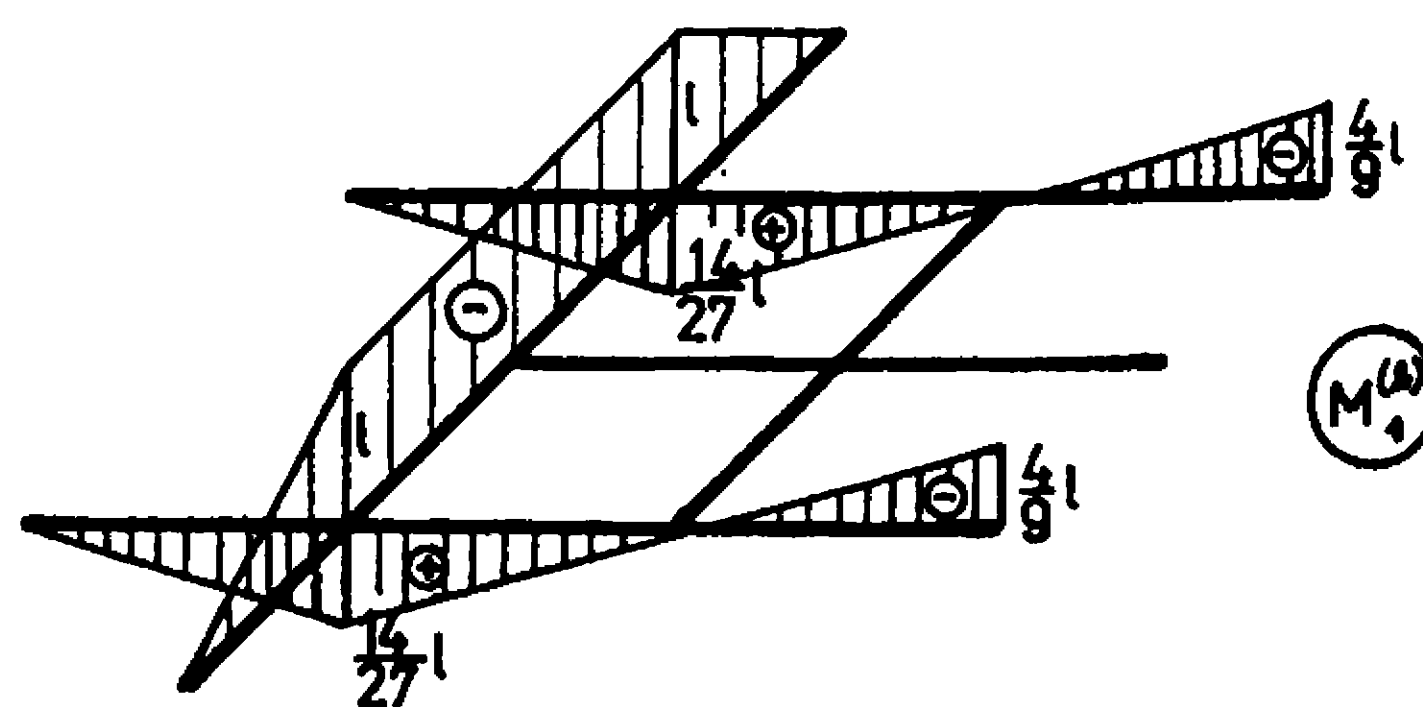
rys. 12.2.



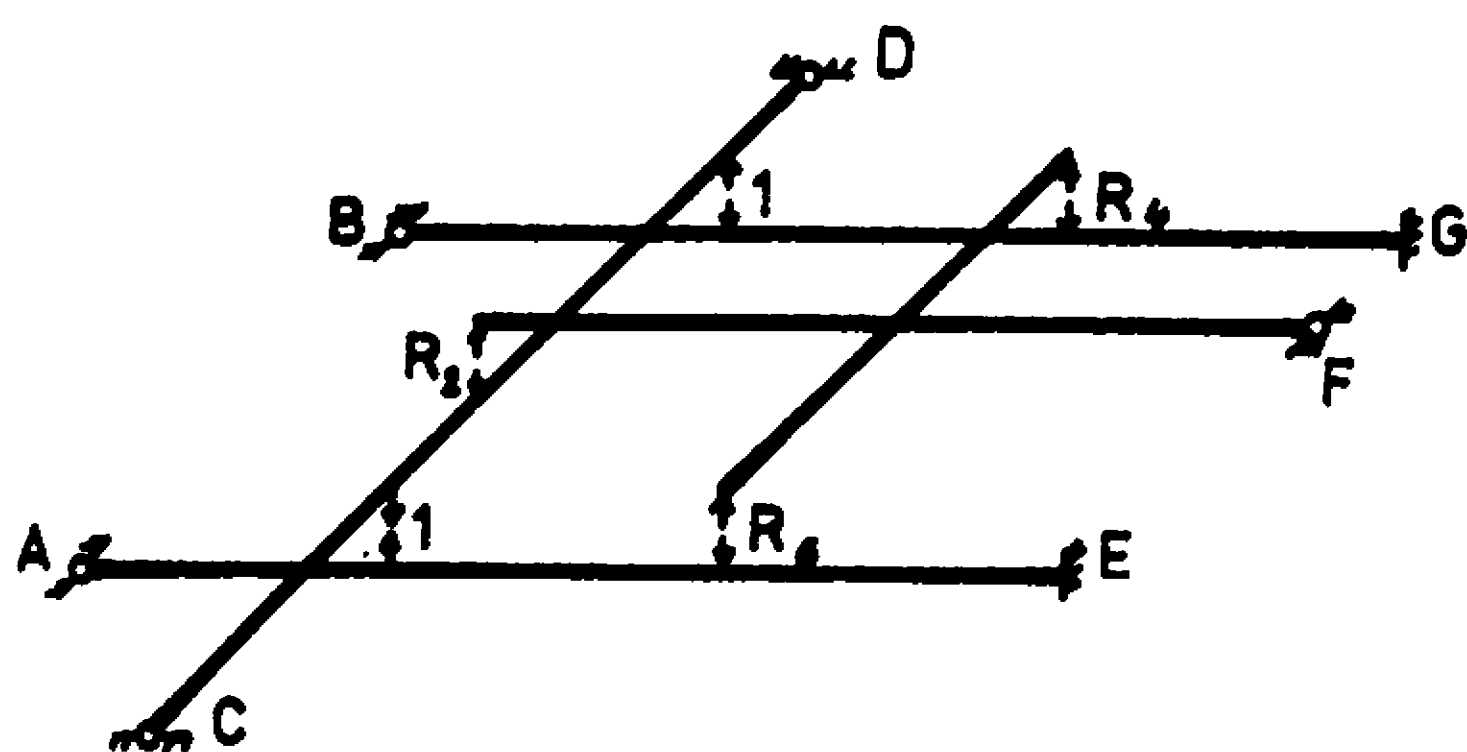
rys. 12.3.



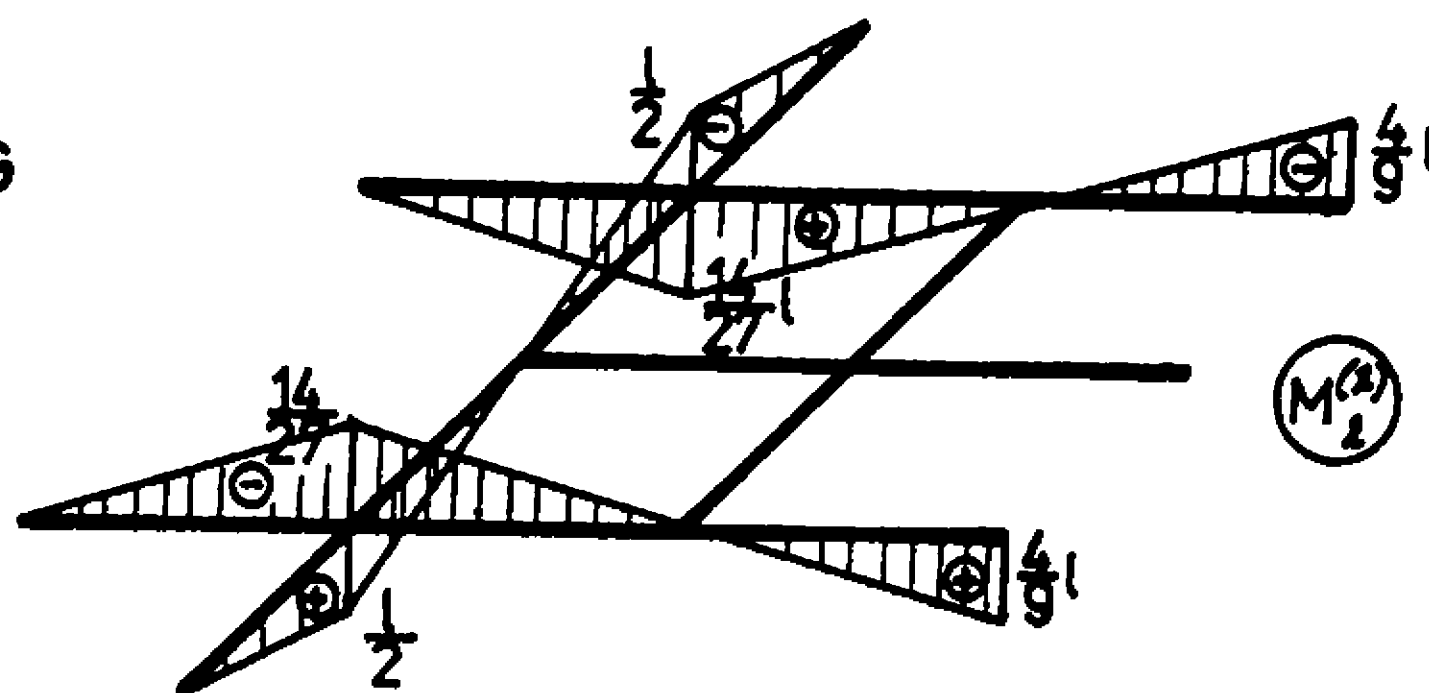
rys. 12.4.



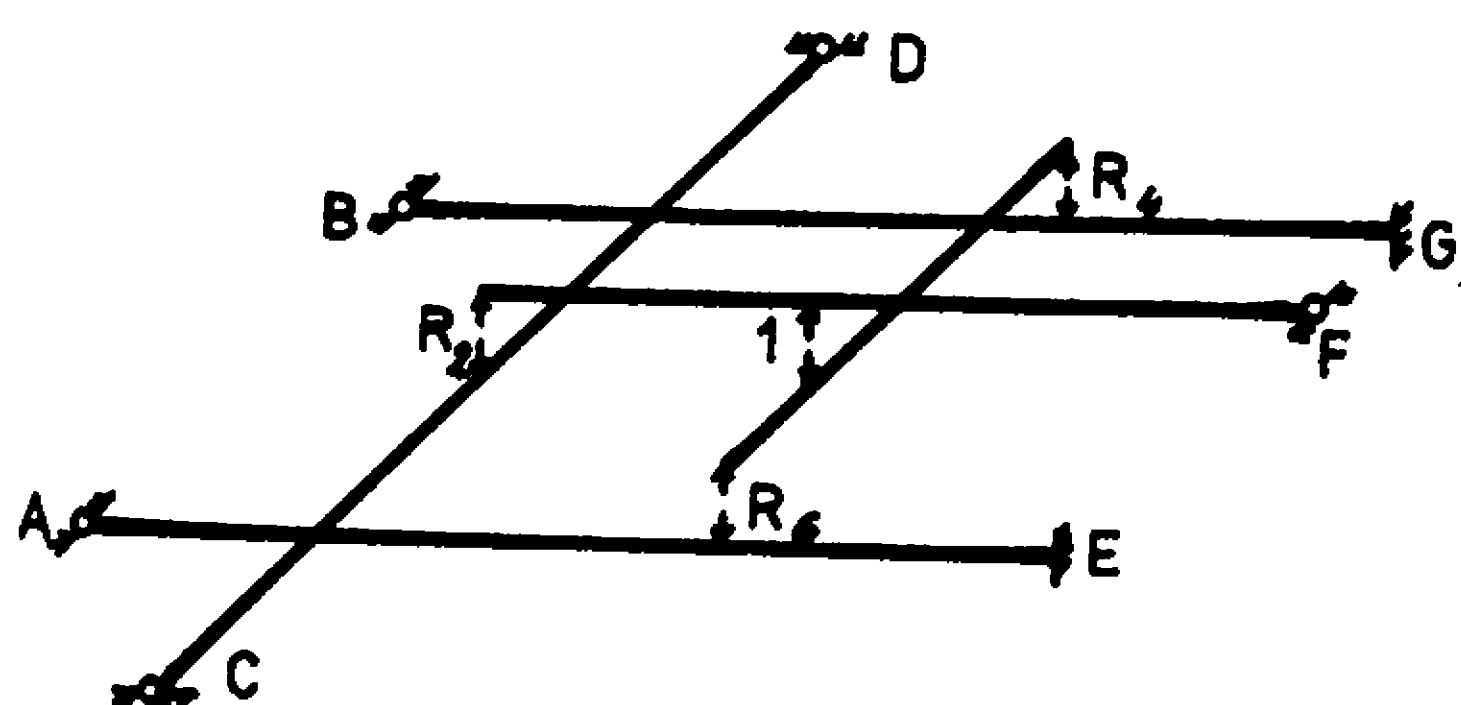
rys. 12.5.



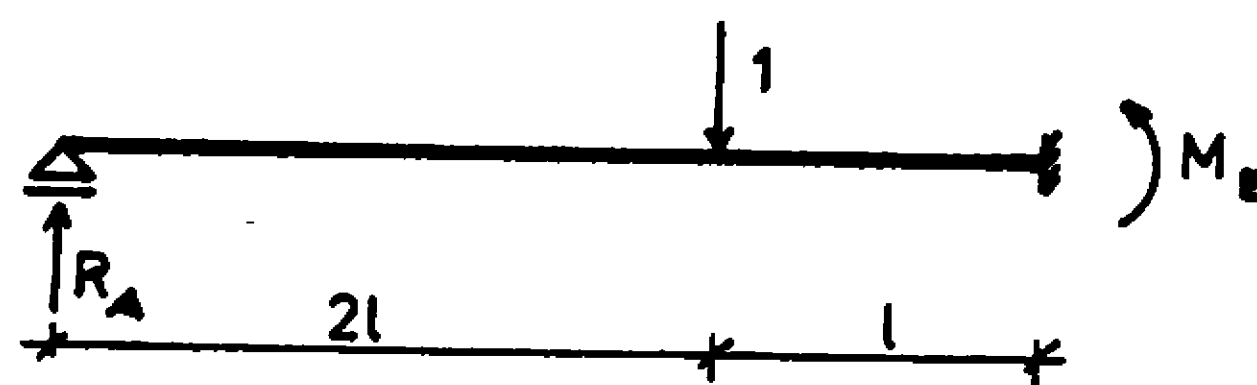
rys. 12.6.



rys. 12.7.



rys. 12.8.



rys. 12.9.

Zadanie rozwiążemy przyjmując niewiadome grupowe

$$Y_1 = \frac{X_1 + X_3}{2}, \quad Y_2 = \frac{X_1 - X_3}{2}, \quad Y_3 = X_5.$$

Stan $Y_1 = 1$

Reakcje $R_2 = R_b = R_4 = 0$.

Momenty w utwierdzeniach dla belek statycznie niewyznaczalnych A-E i B-G obliczymy z (wzoru $M = -\frac{Pl}{2} \omega_T(\xi)$):

$$\xi = \frac{1}{3l} = \frac{1}{3}, \quad \omega_T\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{27} = \frac{8}{27},$$

$$M_E = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3l}{27} \cdot \frac{8}{27} = -\frac{4}{9} l, \quad R_A = \frac{14}{27}.$$

Wykres momentów zginających dla stanu $Y_1 = 1$ przedstawiono na rysunku 12.5.

Stan $Y_2 = 1$

Reakcje $R_2 = R_4 = R_6 = 0$.

Wykres momentów zginających od stanu $Y_2 = 1$ przedstawiono na rysunku 12.7.

Stan $Y_3 = 1$

Reakcje $R_2 = -\frac{1}{2}$, $R_4 = R_6 = \frac{1}{2}$.

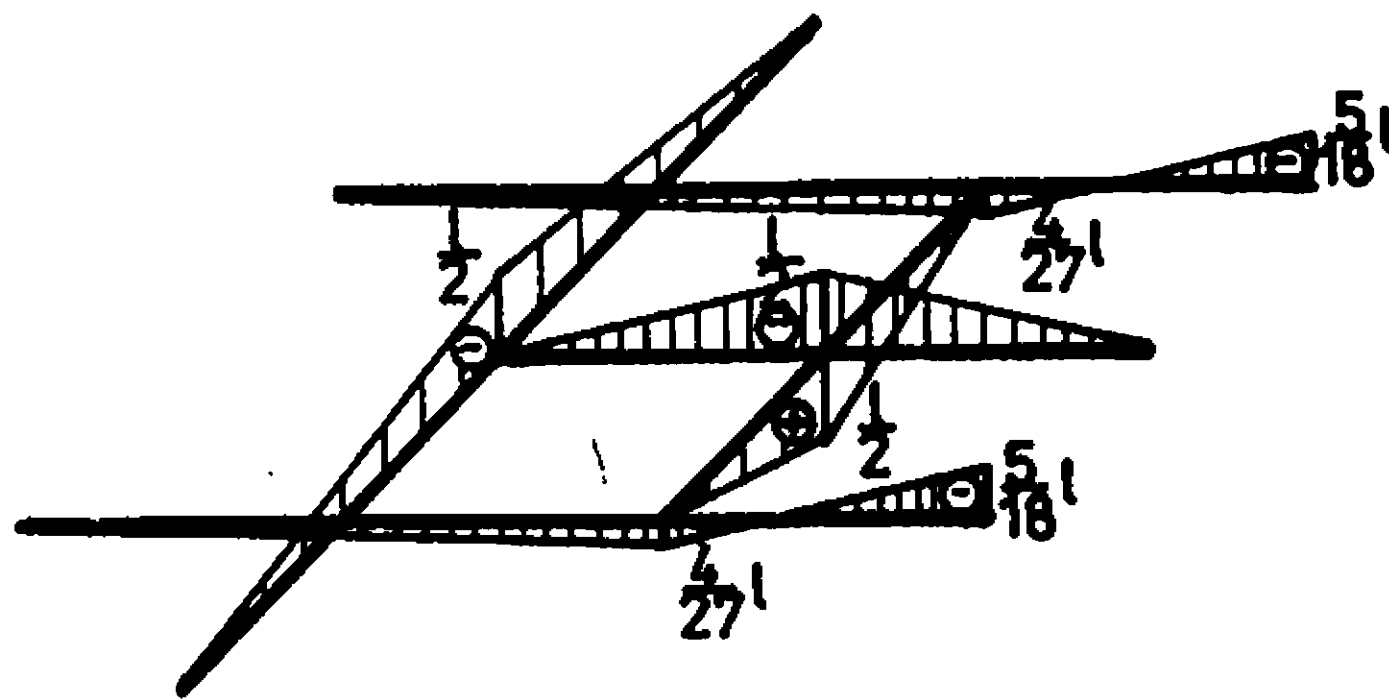
Moment w utwierdzeniu E od stanu $Y_3 = 1$ wynosi:

$$M_E = -\frac{Pl}{2} \omega_T(\xi),$$

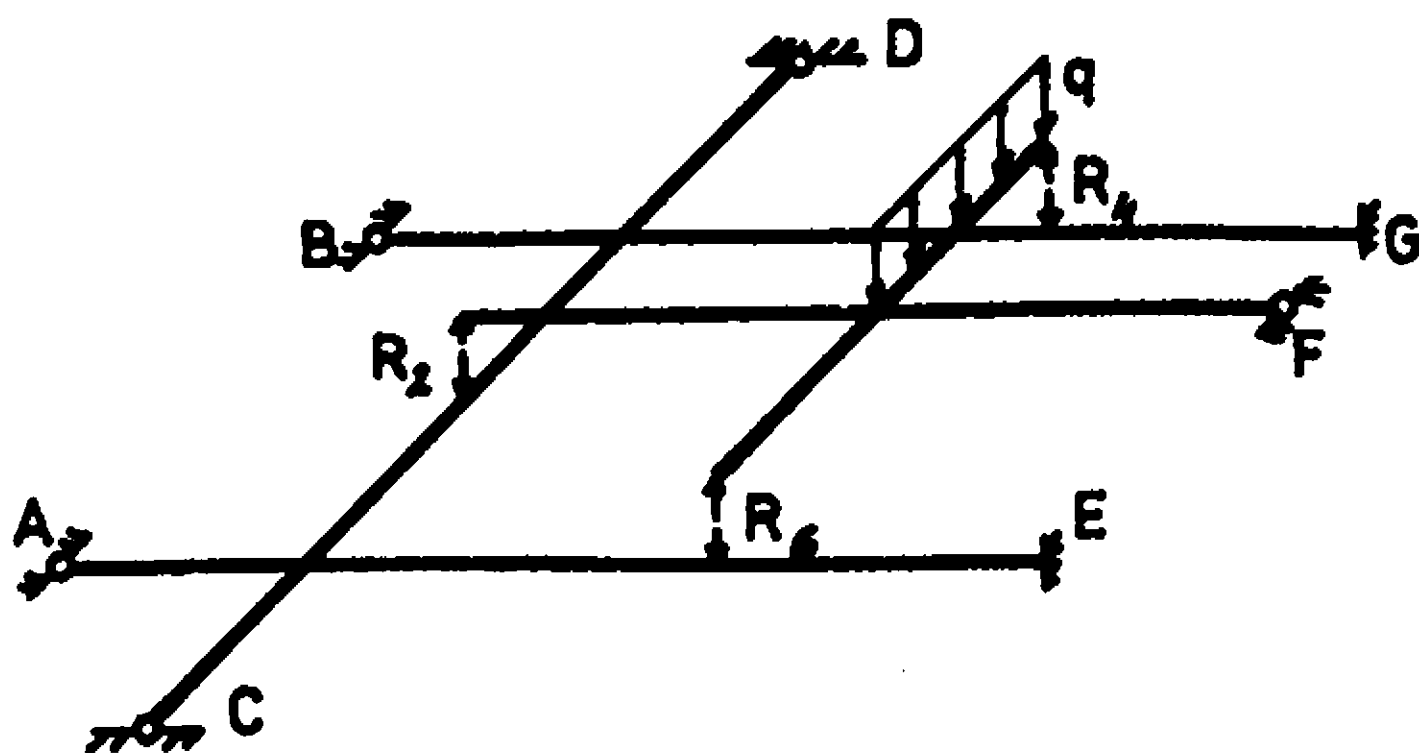
$$\xi = \frac{21}{31} = \frac{2}{3}, \quad \omega_T\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{8}{27} = \frac{10}{27},$$

$$M_E = \frac{\frac{1}{2} \cdot 31}{2} \cdot \frac{10}{27} = -\frac{51}{18}.$$

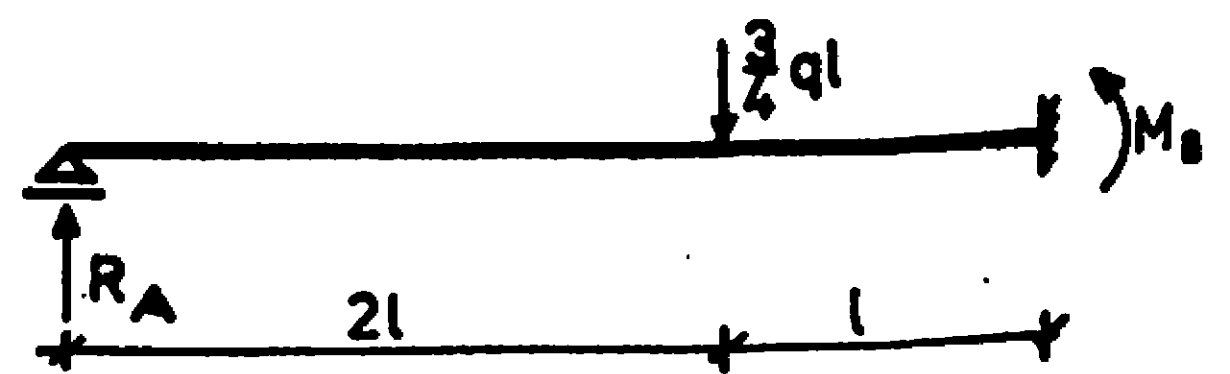
Wykres momentów zginających od stanu $Y_3 = 1$ przedstawiono na rysunku 12.10.



Rys. 12.10



Rys. 12.11



Rys. 12.12

Stan zerowy

$$\text{Reakcje: } R_2 = 0, \quad R_4 = \frac{3}{4} ql, \quad R_6 = \frac{ql}{4};$$

$$M_E = -\frac{1}{2} Pl \omega_T(\xi), \quad \xi = \frac{2l}{3l} = \frac{2}{3}, \quad \omega_T\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{8}{27} = \frac{10}{27},$$

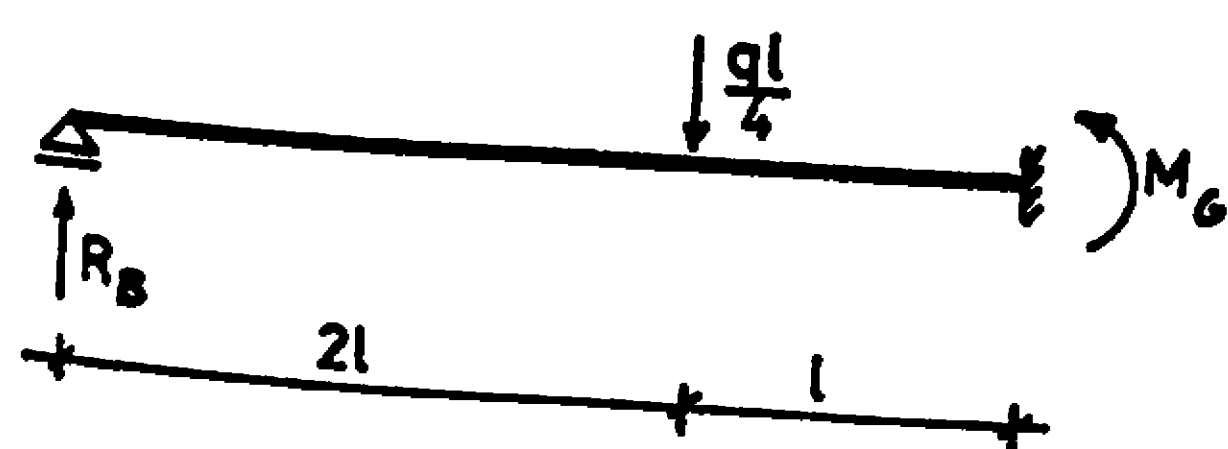
$$M_E = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} ql \cdot 3l \cdot \frac{10}{27} = -\frac{5}{12} ql^2 = -0,417 ql^2,$$

$$R_A = \frac{1}{3l} \left(\frac{3}{4} ql \cdot l + \frac{5}{12} ql^2 \right) = \frac{ql^2}{9} = 0,1111 ql,$$

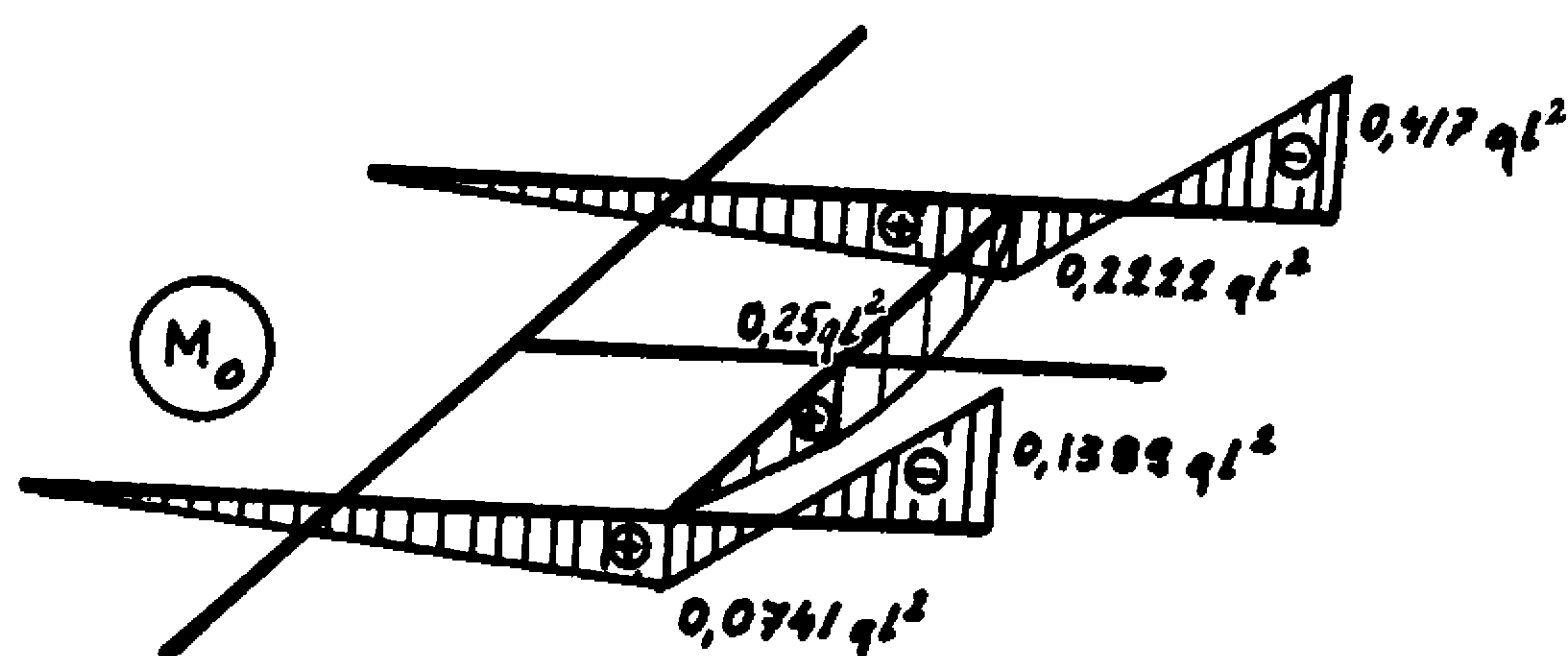
$$M_6 = -\frac{1}{2} \frac{ql}{4} \cdot \frac{10}{27} \cdot 3l = -\frac{5}{36} ql^2 = -0,1389 ql^2,$$

$$R_B = \frac{1}{3l} \left(\frac{ql}{4} \cdot l - \frac{5}{36} ql^2 \right) = \frac{1}{27} ql = 0,0270 ql.$$

Wykres momentów zginających od stanu zerowego przedstawiono na rysunku 12.14.

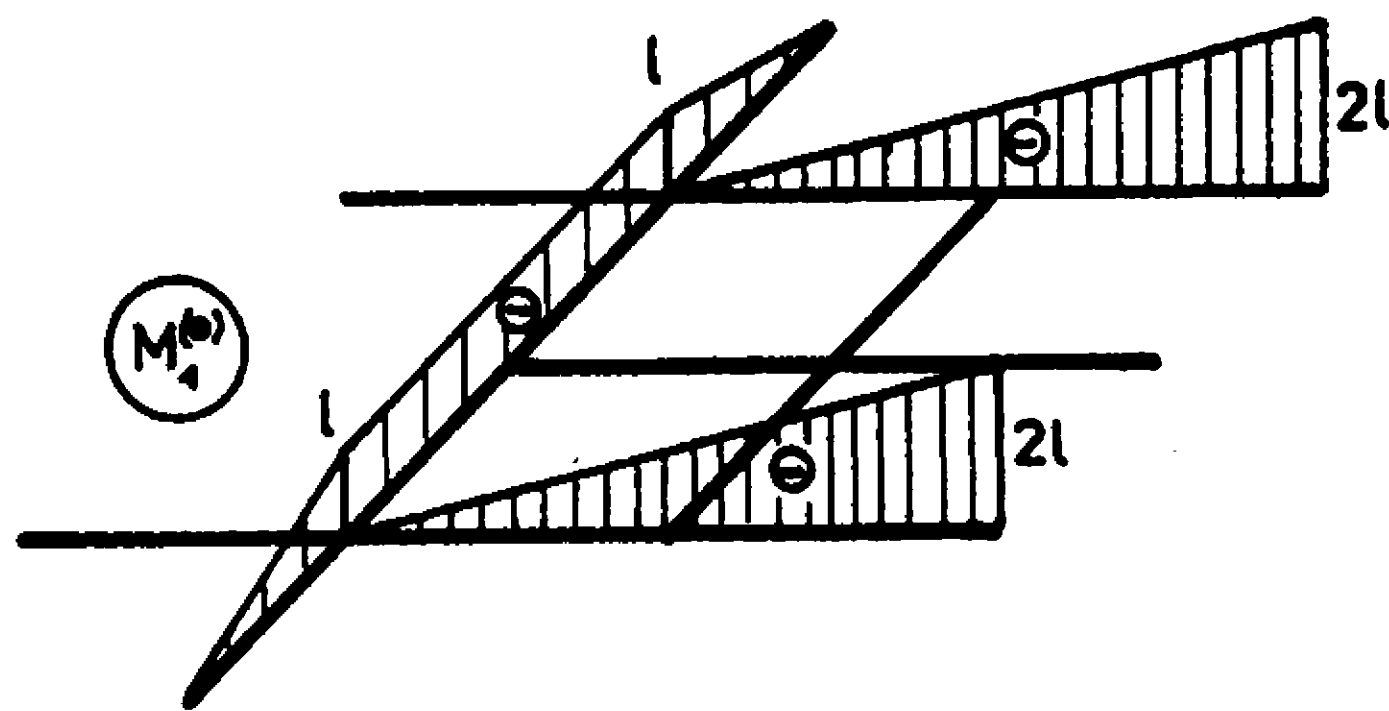


rys. 12.13.

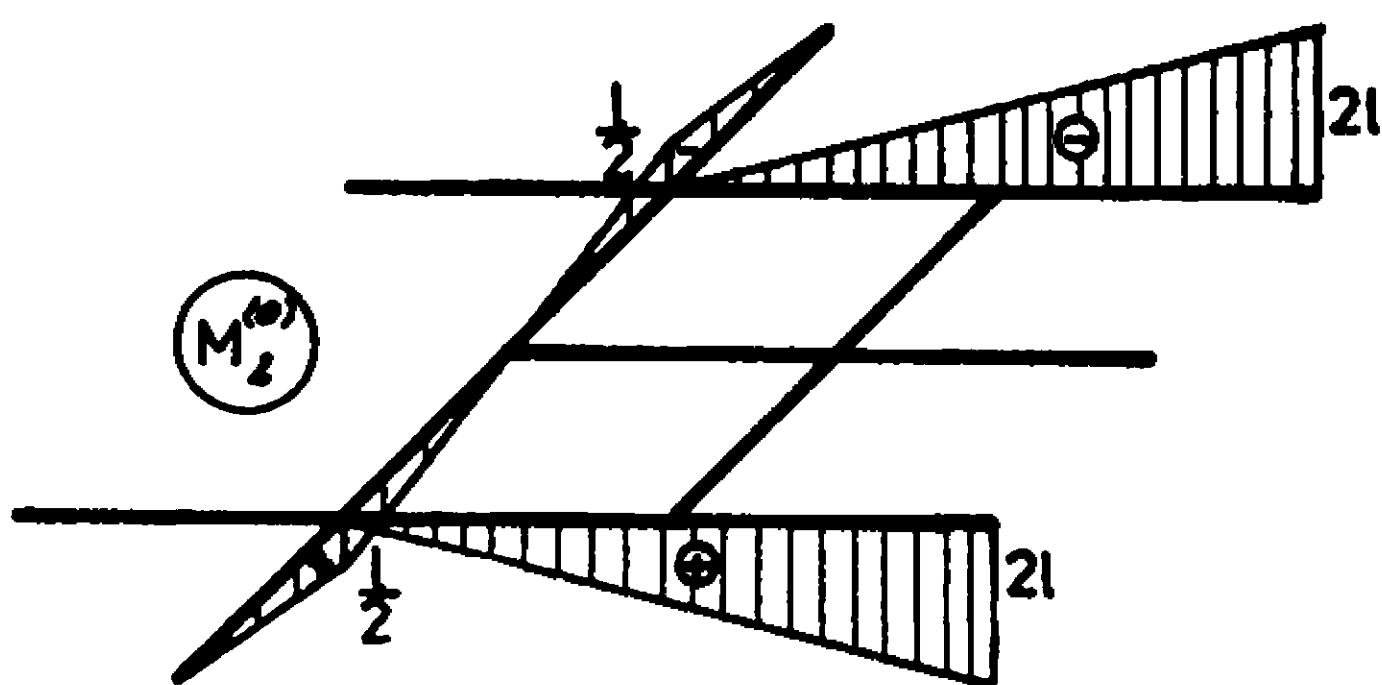


rys. 12.14.

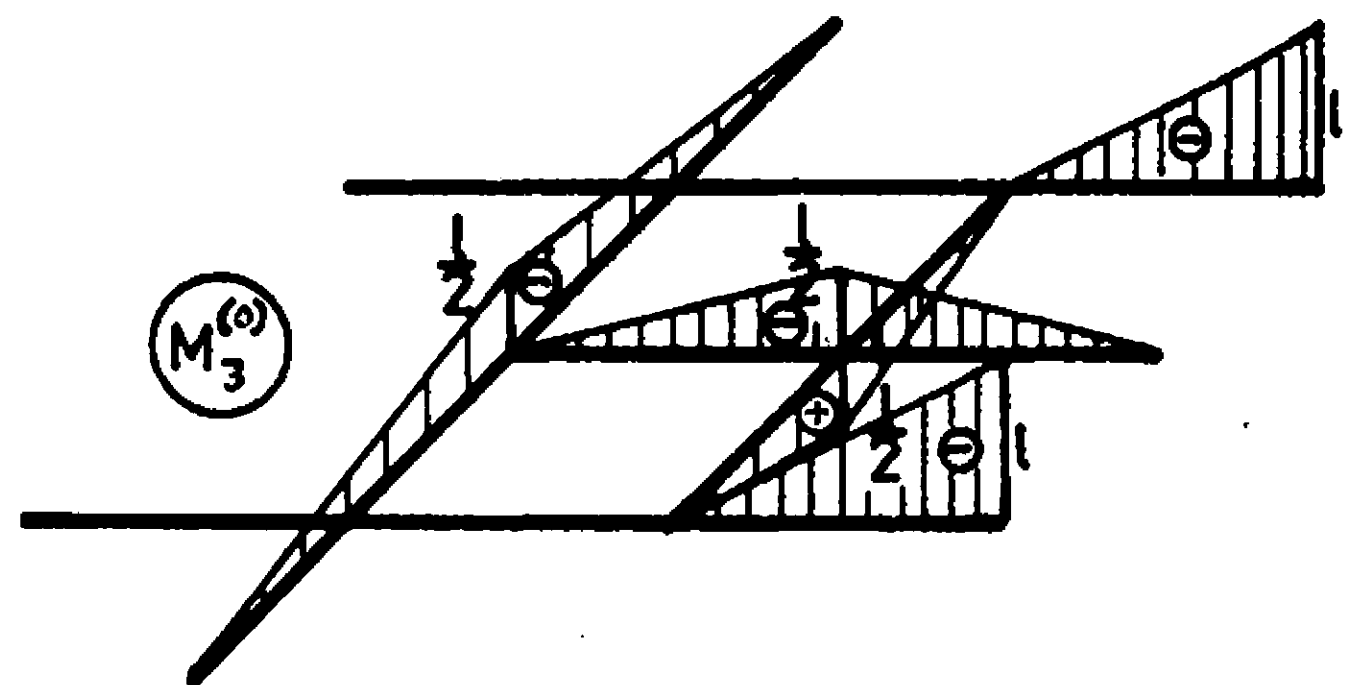
Przy obliczeniu współczynników w układzie równań kanonicznych przesłanym, korzystając będziemy z I twierdzenia redukcyjnego. W zastosowanym dwukrotnie statycznie niewyznaczalnym ruszcie odrzucamy podpory A i B, tworząc z tego rusztu układ statycznie wyznaczalny. Momenty zginające od stanów $Y_1 = 1$, $Y_2 = 1$ i $Y_3 = 1$ przedstawiono na rysunkach 12.15, 12.16 i 12.17.



Rys. 12.15.



Rys. 12.16.



Rys. 12.17.

Obliczmy współczynniki w równaniach kanonicznych:

$$\delta_{11} = \int_S \frac{M_1^{(0)} M_1^{(2)}}{EJ} dS = \frac{1}{EJ} \left\{ \frac{1}{3} 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 21 + \left[\frac{1}{3} 21 \cdot \left(\frac{4}{9} + \frac{14}{27} \right) 1 \cdot 21 - \frac{1}{2} 21 \cdot \frac{14}{27} 1 \cdot 21 \right] \cdot 2 \right\} = 3,160 \frac{l^3}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \int_S \frac{M_2^{(0)} M_2^{(2)}}{EJ} dS = \frac{1}{EJ} \left\{ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 + \left[\frac{1}{3} 21 \cdot \left(\frac{4}{9} + \frac{14}{27} \right) 1 \cdot 21 - \frac{1}{2} 21 \cdot \frac{14}{27} 1 \cdot 21 \right] \cdot 2 \right\} = 0,827 \frac{l^3}{EJ};$$

$$\delta_{33} = \int_S \frac{M_3^{(0)} M_3^{(2)}}{EJ} dS = \frac{1}{EJ} \left\{ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \left[\frac{1}{3} 1 \cdot \left(\frac{4}{27} + \frac{5}{18} \right) \cdot 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} 1 \cdot \frac{4}{27} 1 \cdot \frac{1}{9} \right] \cdot 2 \right\} = 0,802 \frac{l^3}{EJ};$$

$$\delta_{12} = 0;$$

$$\delta_{13} = \int_S \frac{M_1^{(2)} M_3^{(0)}}{EJ} dS = \frac{1}{EJ} \left\{ \frac{1}{3} l, \frac{1}{4} \cdot l \cdot 2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \cdot l \cdot l \cdot 2 + \right. \\ \left. + \left[-\frac{1}{6} l \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} + \frac{14}{27} \right) l \cdot l + \frac{1}{2} l \cdot \frac{4}{9} l \cdot l \right] \cdot 2 \right\} = 1,201 \frac{l^3}{EJ};$$

$$\delta_{23} = 0;$$

$$\delta_{10} = \int_S \frac{M_0^{(0)} M_1^{(2)}}{EJ} dS = \frac{1}{EJ} \left\{ \left[-\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} ql^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} + \frac{14}{27} \right) l \cdot l + \right. \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{3}{4} ql^2 \cdot \frac{4}{9} l \cdot l \right] + \left[-\frac{1}{6} \frac{ql^2}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} + \frac{14}{27} \right) l \cdot l + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{4} \cdot \frac{4}{9} l \cdot l \right] \right\} = 0,1420 \frac{ql^4}{EJ};$$

$$\delta_{20} = \int_S \frac{M_0^{(0)} M_2^{(2)}}{EJ} dS = \frac{1}{EJ} \left\{ \left[-\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} ql^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} + \frac{14}{27} \right) l \cdot l + \right. \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{3}{4} ql^2 \cdot \frac{4}{9} l \cdot l \right] - \left[-\frac{1}{6} \frac{ql^2}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} + \frac{14}{27} \right) l \cdot l + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{ql^2}{4} \cdot \frac{4}{9} l \cdot l \right] \right\} = 0,0710 \frac{ql^4}{EJ};$$

$$\delta_{30} = \int_S \frac{M_0^{(2)} M_3^{(0)}}{EJ} dS = \frac{1}{EJ} \left\{ \frac{1}{3} \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot l + \frac{1}{3} 0,25 ql^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot 2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{3} l \cdot (0,417 + 0,2222) ql^2 \cdot l - \frac{1}{2} l \cdot 0,2222 ql^2 \cdot l \right] + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{3} l \cdot (0,1389 + 0,0741) ql^2 \cdot l - \frac{1}{2} l \cdot 0,0741 ql^2 \cdot l \right] \right\} = \\ = 0,240 \frac{ql^4}{EJ}.$$

Układ równań kanonicznych ma postać

$$3,160 Y_1 + 1,201 Y_3 + 0,1420 ql = 0,$$

$$0,827 Y_2 + 0,0710 ql = 0,$$

$$1,201 Y_1 + 0,802 Y_3 + 0,240 ql = 0,$$

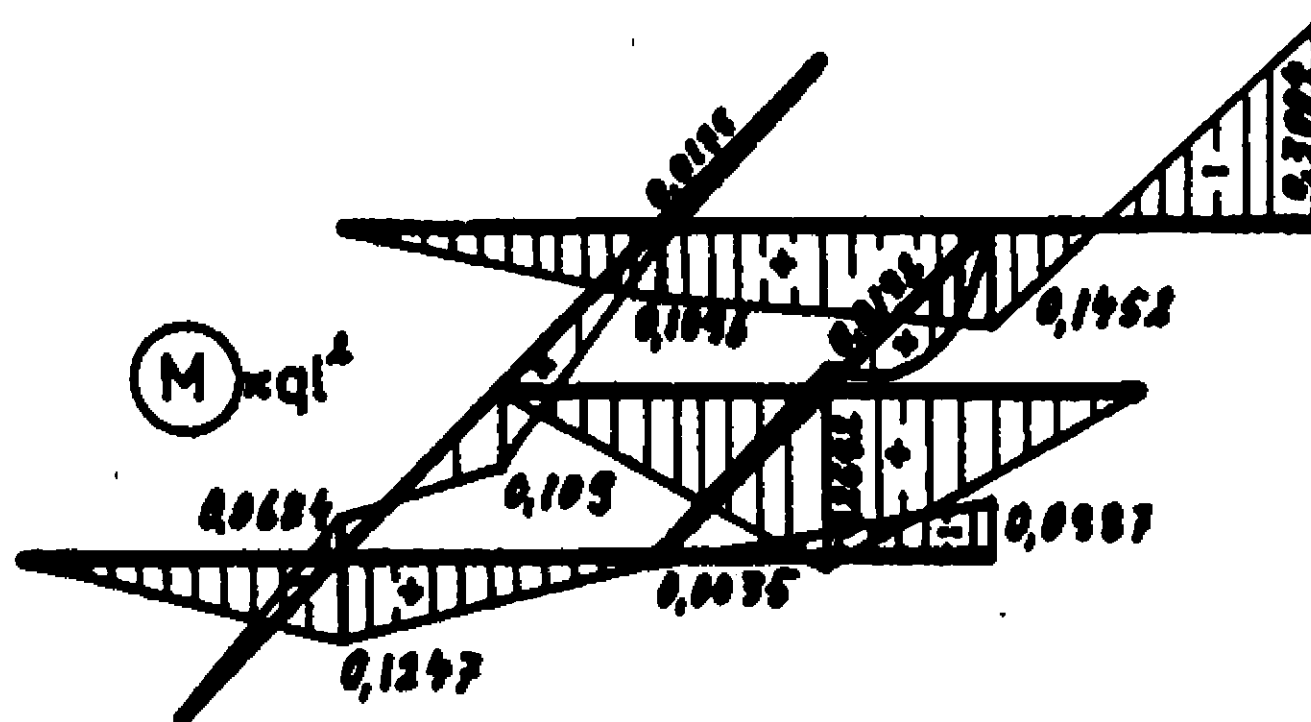
Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy

$$Y_1 = 0,160 \, ql, \quad Y_2 = -0,0859 \, ql, \quad Y_3 = -0,5383 \, ql.$$

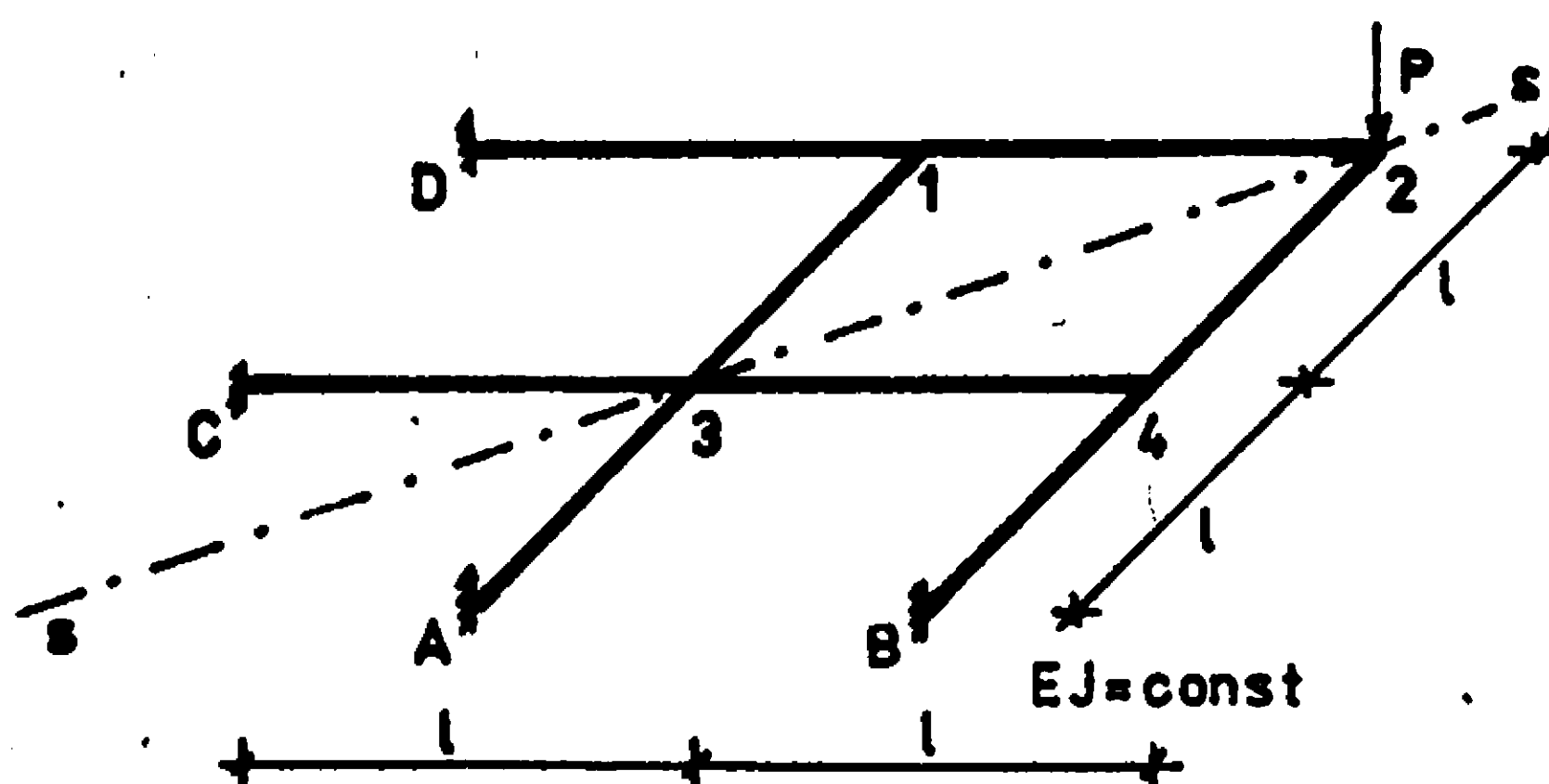
Rzędne wykresów momentów zginających obliczymy ze związku

$$M = M_0 + M_1 Y_1 + M_2 Y_2 + M_3 Y_3.$$

Ma on kształt następujący:



rys. 12.18.



rys. 12.19.

Zadanie 12.2

Dla danego rusztu płaskiego przy danym obciążeniu wyznaczyć wykres momentów zginających.

Rozwiązanie

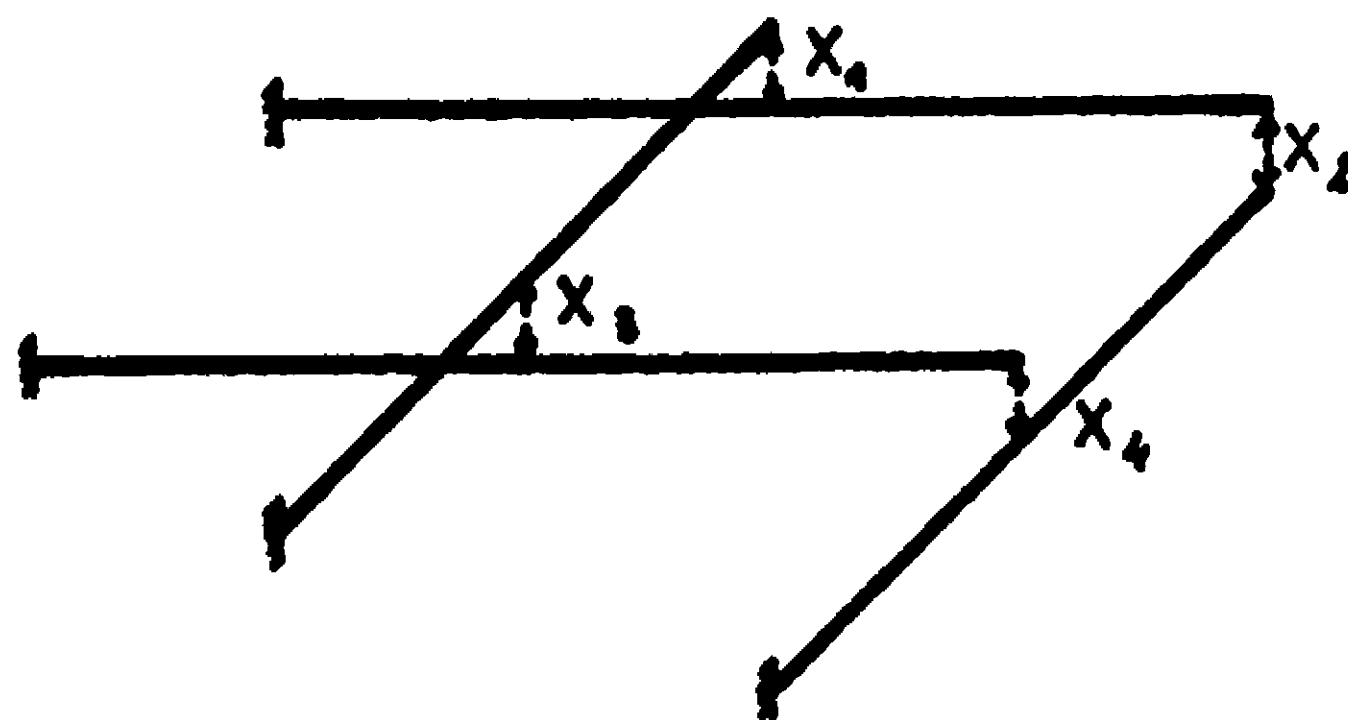
Stopień statycznej niewyznaczalności tego układu wyznaczmy ze wzoru:

$$n = w + r - 2b - p,$$

$$w = 4, \quad r = 8, \quad b = 4, \quad p = 0,$$

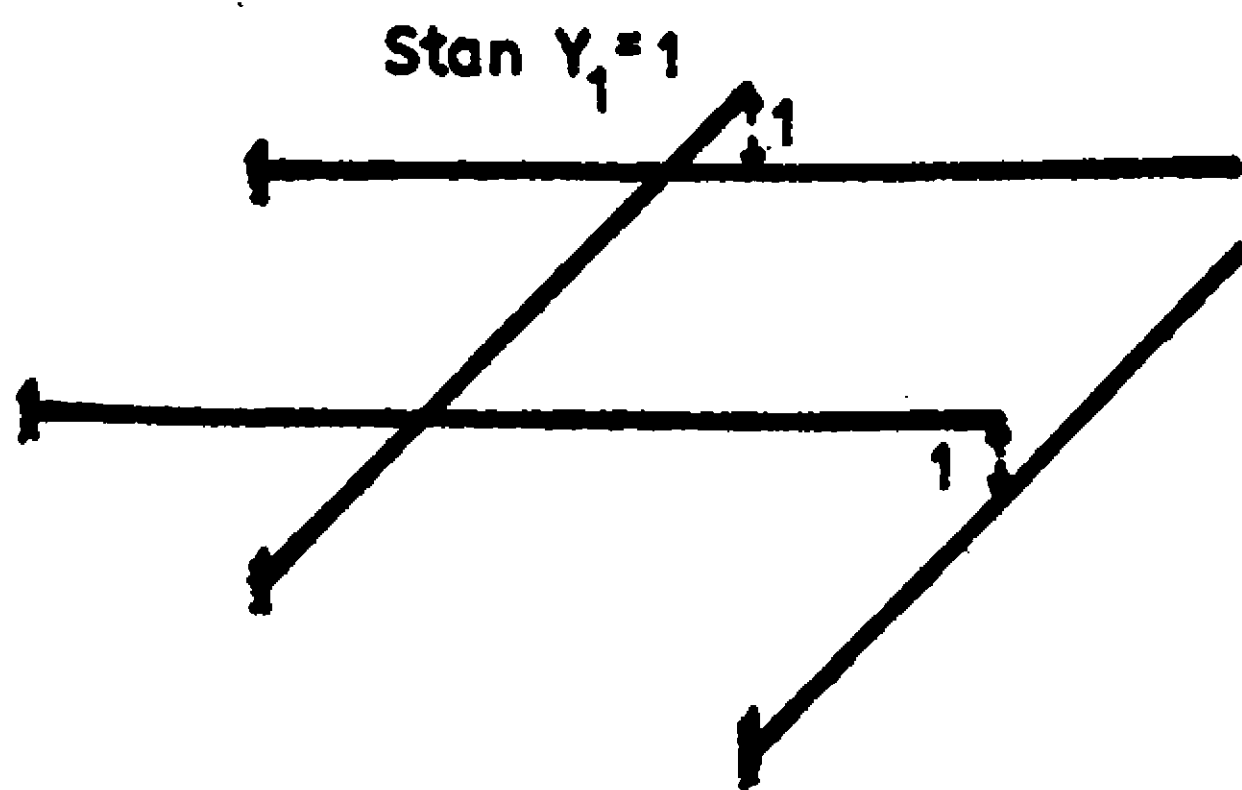
$$n = 4 + 8 - 2 \cdot 4 - 0 = 4.$$

Jako nadliczbowe przyjmujemy siły w węzłach 1,2,3,4 (rys. 12.20).

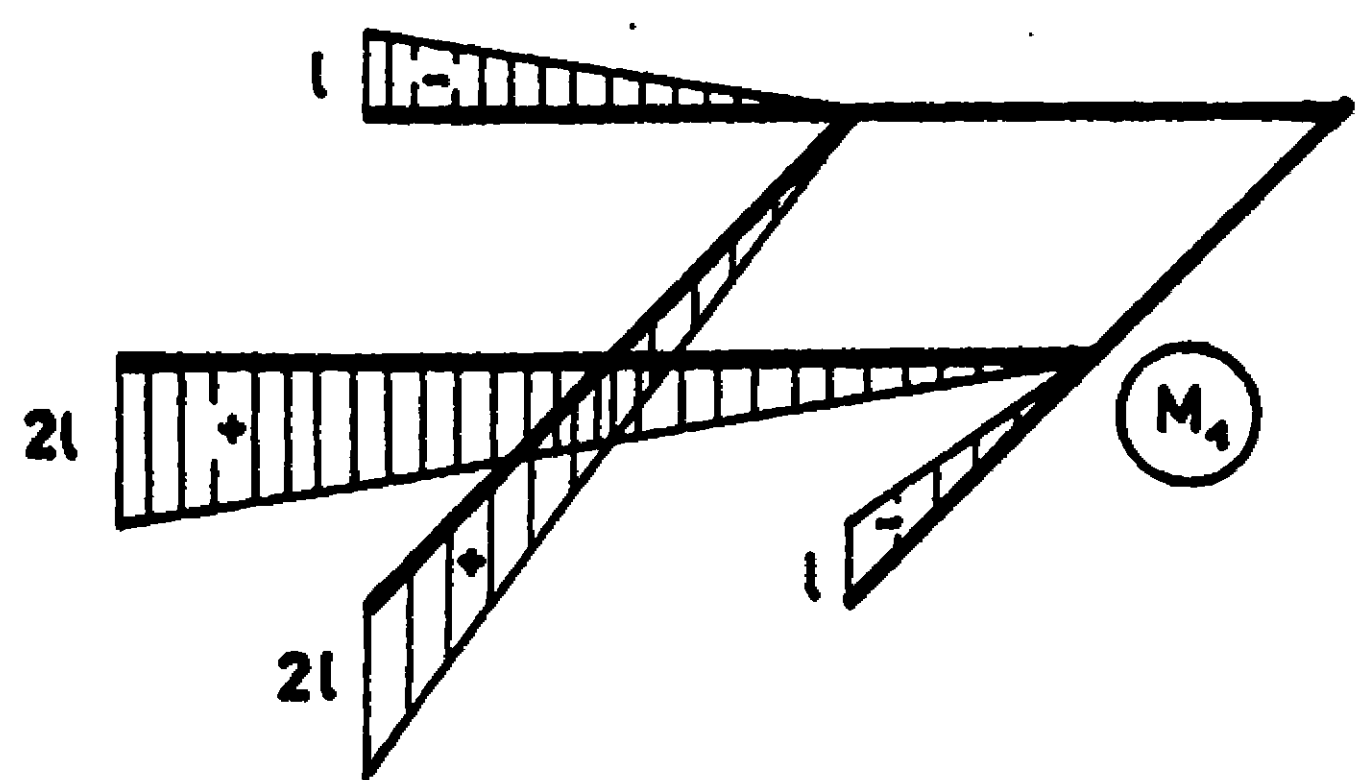


rys. 12.20.

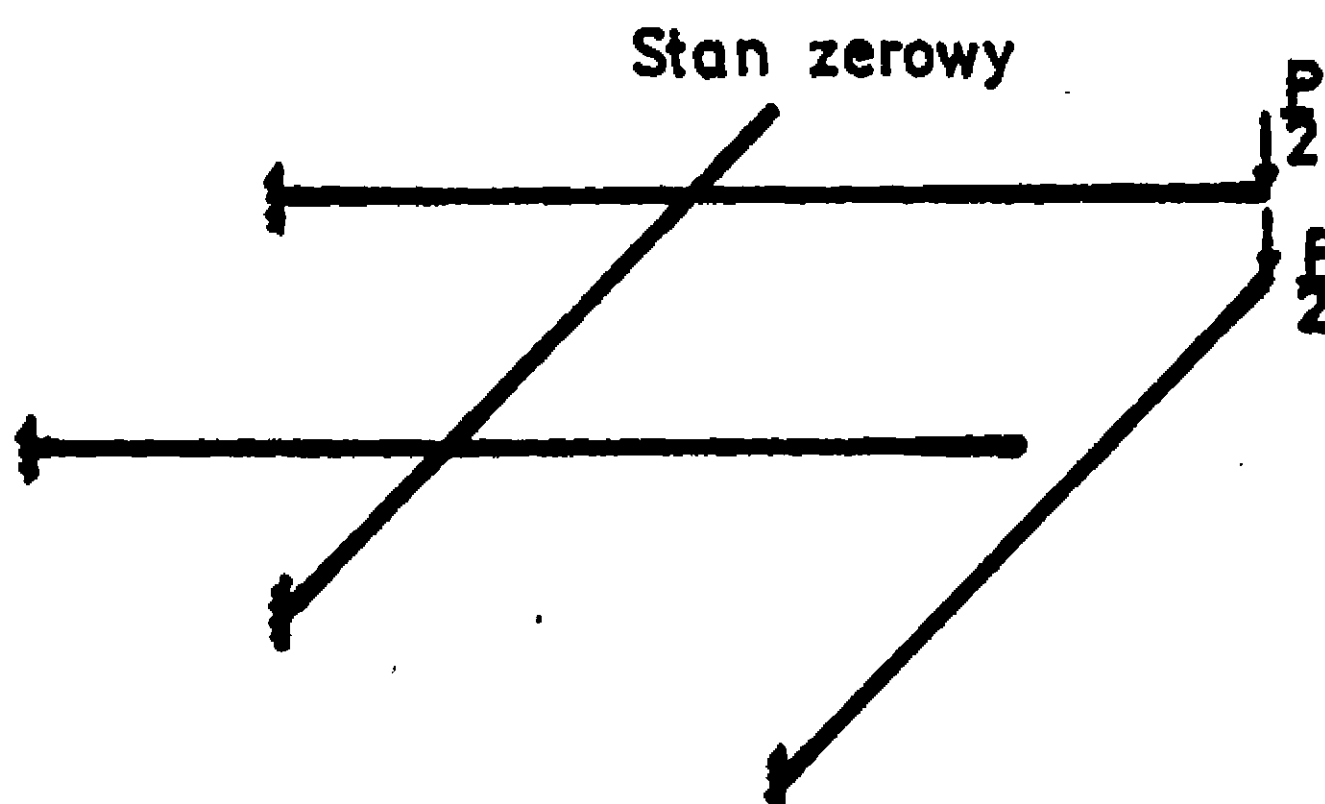
Prosta przechodząca przez węzły 2 i 3 jest osią symetrii układu i obciążenia. Stąd liczba niewiadomych redukuje się do jednej. Mamy więc $X_2 = X_3 = 0$, $X_1 = X_4$. Jako nadliczbową przyjmujemy grupę sił $Y_1 = \frac{X_1 + X_4}{2}$.



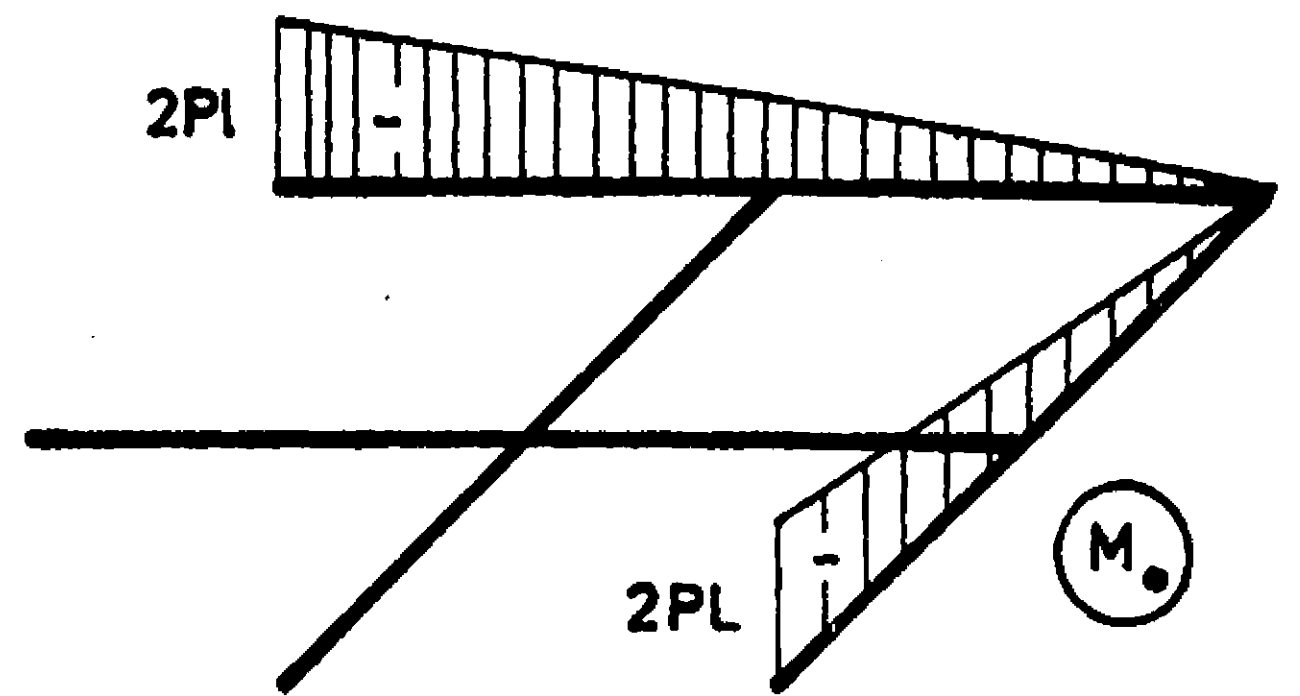
12.21.



rys. 12.22.



rys. 12.23.



rys. 12.24.

Nadliczbową Y_1 otrzymamy z równania

$$Y_1 \delta_{11} + \delta_{10} = 0.$$

Obliczmy wielkości δ_{11} i δ_{10}

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_S \frac{M_1 M_1}{EJ} dS = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{3} 2l \cdot 2l \cdot 2l \cdot 2 + \frac{1}{3} 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \right) = \\ &= 6 \frac{l^3}{EJ}, \end{aligned}$$

$$\delta_{10} = \int_S \frac{M_1 M_0}{EJ} dS = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{6} 1 \cdot 1 (2 \cdot 2pl + pl) \cdot 2 \right] = \frac{5}{3} \frac{pl^2}{EJ}$$

$$6Y_1 + \frac{5}{3} pl = 0.$$

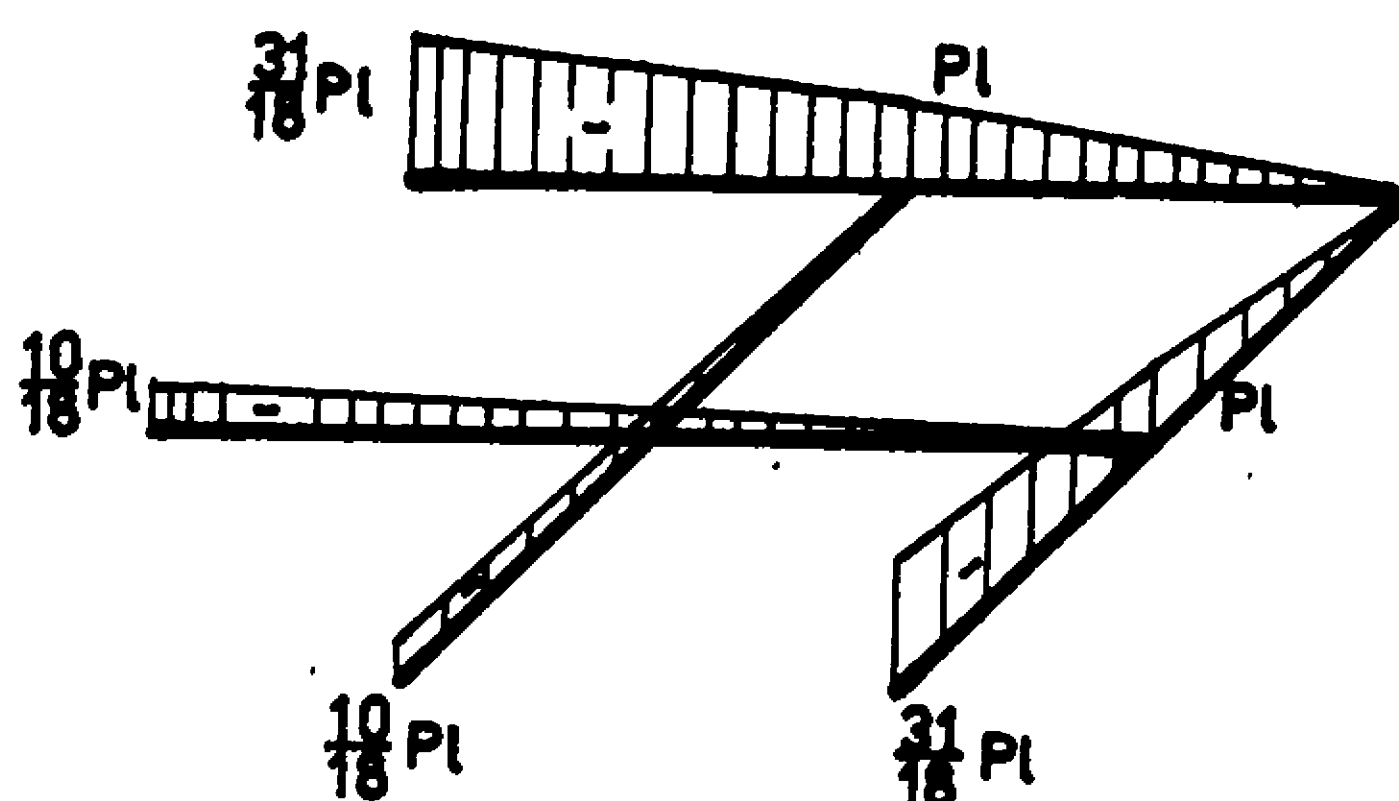
Z rozwiązania tego równania otrzymujemy

$$Y_1 = - \frac{5}{18} p.$$

Rzędne wykresów momentów zginających obliczymy ze związku

$$M = M_0 + M_1 Y_1.$$

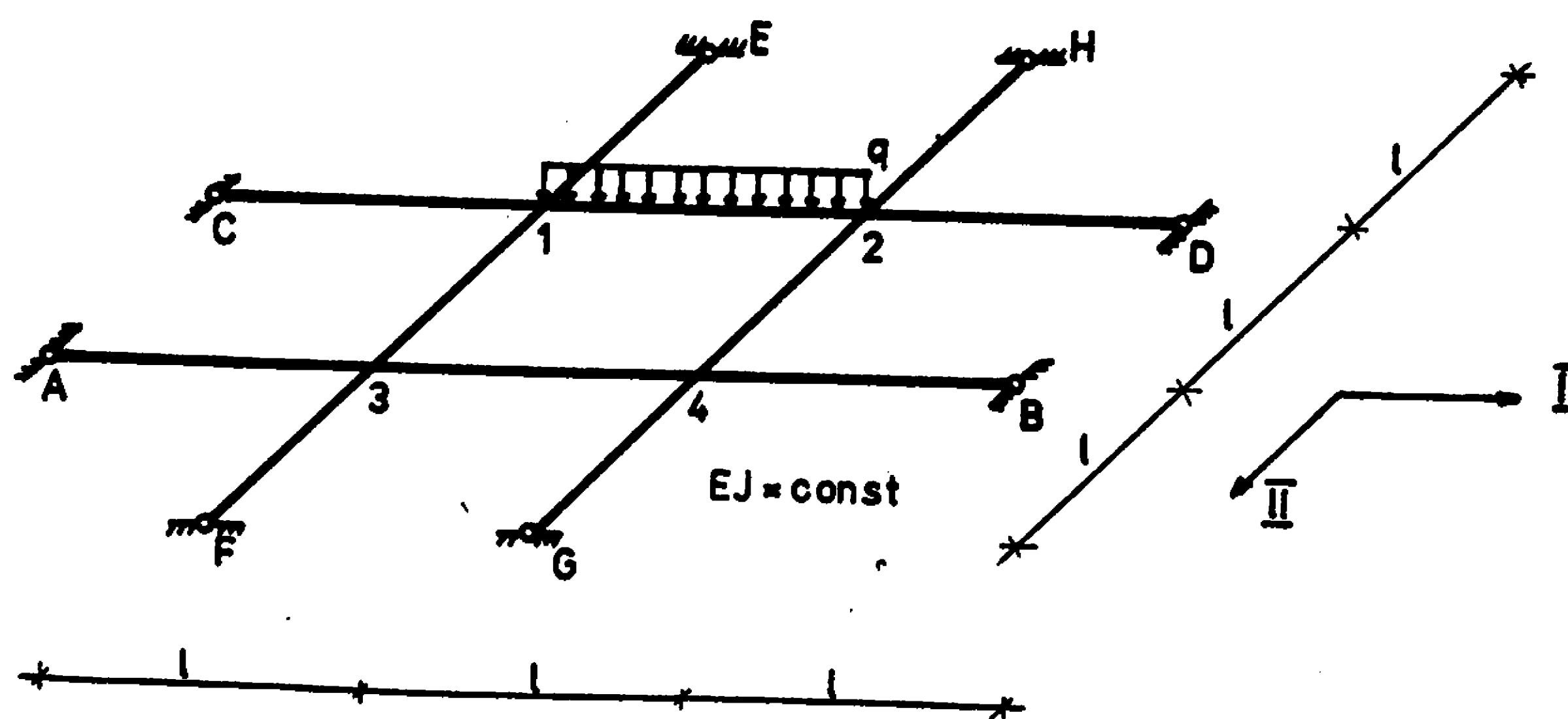
Na rysunku 12.25. podano wykres momentów zginających.



rys. 12.25.

Zadanie 12.3

Dla danego rusztu płaskiego przy danym obciążeniu wyznaczyć wykresy momentów zginających i sił tnących.



rys. 12.26.

Rozwiązanie

Rozważany układ jest czterokrotnie statycznie niewyznaczalny. Rozwiążemy go wykorzystując równanie trzech momentów, traktując węzły 1, 2, 3, 4 jako podpory sprężyste o przemieszczeniach w_1, w_2, w_3, w_4 . Oznaczmy momenty podporowe w kierunku osi I przez M , w kierunku osi II przez L z odpowiednimi wskaźnikami odnoszącymi się do numeracji węzłów.

Dla belek w kierunku osi I, stosując równania trzech momentów mamy:

$$4M_1 + M_2 = -\frac{ql^3}{4} + \frac{6EJ}{l^2} (2w_1 - w_2),$$

$$M_1 + 4M_2 = -\frac{ql^3}{4} + \frac{6EJ}{l^2} (-w_1 + 2w_2),$$

$$4M_3 + M_4 = \frac{6EJ}{l^2} (2w_3 - w_4),$$

$$M_3 + 4M_4 = \frac{6EJ}{l^2} (-w_3 + 2w_4).$$

Dla belek w kierunku osi II uzyskamy:

$$L_1 + 4L_3 = \frac{6EJ}{l^2} (2w_3 - w_1),$$

$$4L_1 + L_3 = \frac{6EJ}{l^2} (2w_1 - w_3),$$

$$L_2 + 4L_4 = \frac{6EJ}{l^2} (2w_4 - w_2),$$

$$4L_2 + L_4 = \frac{6EJ}{l^2} (2w_2 - w_4).$$

Otrzymane układy równań rozwiążemy względem momentów podporowych M_i , L , traktując prawą stronę równań jako obciążenie zewnętrzne:

$$M_1 = -\frac{ql^2}{20} + \frac{6EJ}{l^2} \left(\frac{3}{5}w_1 - \frac{2}{5}w_2 \right),$$

$$M_2 = -\frac{ql^2}{20} + \frac{6EJ}{l^2} \left(-\frac{2}{5}w_1 + \frac{3}{5}w_2 \right),$$

$$M_3 = \frac{6EJ}{l^2} \left(\frac{3}{5}w_3 - \frac{2}{5}w_4 \right),$$

$$M_4 = \frac{6EJ}{l^2} \left(-\frac{2}{5}w_3 + \frac{3}{5}w_4 \right),$$

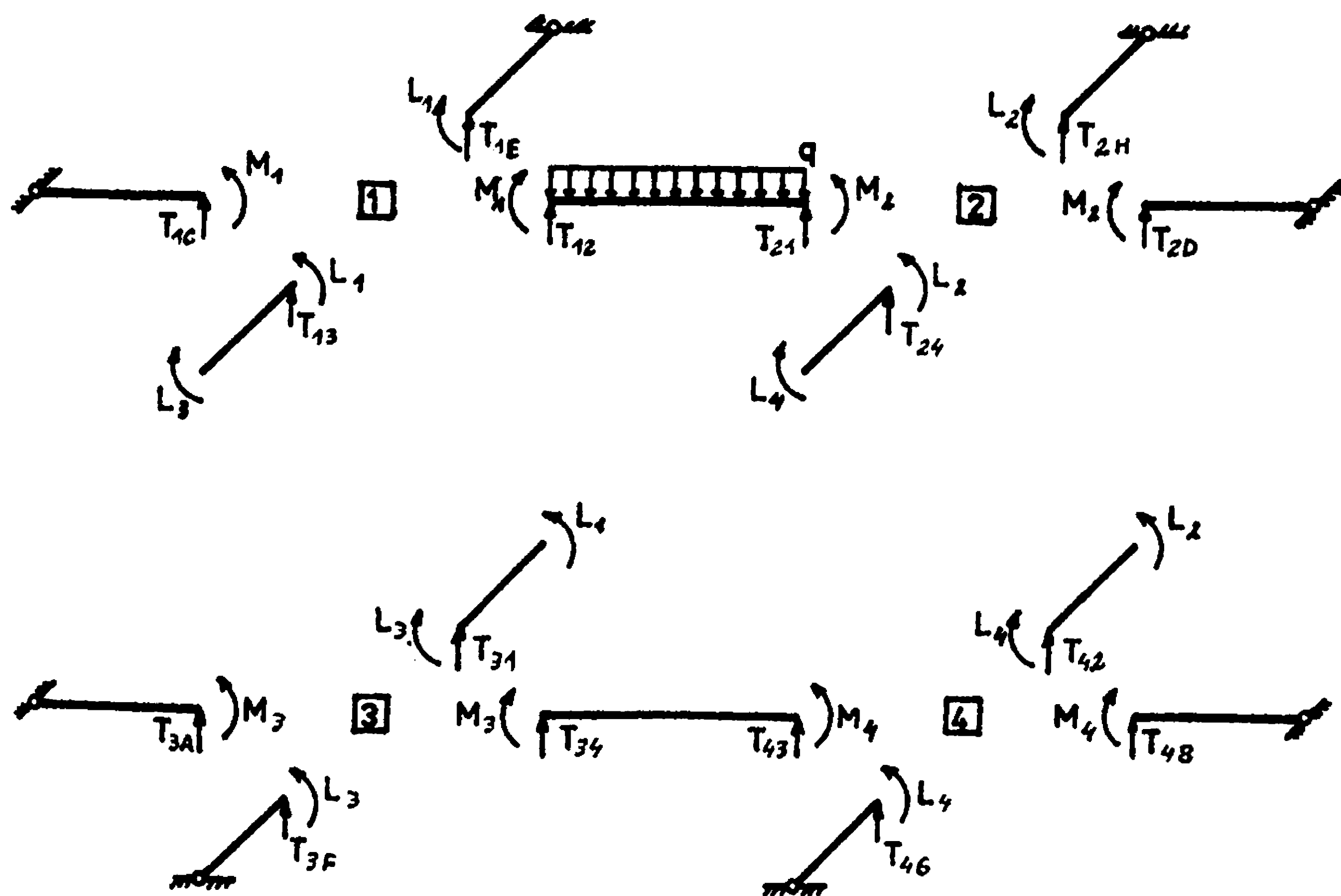
$$L_1 = \frac{6EJ}{l^2} \left(\frac{3}{5}w_1 - \frac{2}{5}w_3 \right),$$

$$L_2 = \frac{6EJ}{l^2} \left(\frac{3}{5}w_2 - \frac{2}{5}w_4 \right),$$

$$L_3 = \frac{6EJ}{l^2} \left(-\frac{2}{5}w_1 + \frac{3}{5}w_3 \right),$$

$$L_4 = \frac{6EJ}{l^2} \left(-\frac{2}{5}w_2 + \frac{3}{5}w_4 \right).$$

Powyższy układ równań wiąże dwanaście nieznanymi wielkościami: osiem momentów podporowych oraz cztery ugięcia węzłów. Brakujące związki otrzymamy ze zrównoważenia węzłów 1,2,3,4. Wytnijmy węzły 1,2,3,4 (rys. 12.27).



rys. 12.27.

Suma sił działających na węzły 1,2,3,4 powinna być równa zero:

$$T_{1E} + T_{1C} + T_{13} + T_{12} = 0,$$

$$T_{21} + T_{24} + T_{2D} + T_{2H} = 0,$$

$$T_{31} + T_{34} + T_{3F} + T_{3A} = 0,$$

$$T_{43} + T_{42} + T_{4B} + T_{4G} = 0.$$

Obliczmy siły tnące

$$T_{1C} = -\frac{M_1}{1}, \quad T_{1E} = -\frac{L_1}{1}, \quad T_{13} = \frac{L_3 - L_1}{1}, \quad T_{12} = \frac{q_1}{2} + \frac{M_2 - M_1}{1},$$

$$T_{21} = \frac{q_1}{2} + \frac{M_1 - M_2}{1}, \quad T_{24} = \frac{L_4 - L_2}{1}, \quad T_{2D} = -\frac{M_2}{1}, \quad T_{2H} = -\frac{L_2}{1},$$

$$T_{31} = \frac{L_1 - L_3}{1}, \quad T_{34} = \frac{M_4 - M_3}{1}, \quad T_{3F} = -\frac{L_3}{1}, \quad T_{3A} = -\frac{M_3}{1},$$

$$T_{43} = \frac{M_3 - M_4}{1}, \quad T_{42} = \frac{L_2 - L_4}{1}, \quad T_{4B} = -\frac{M_4}{1}, \quad T_{4G} = -\frac{L_4}{1}.$$

Po podstawieniu danych związków do równań równowagi węzłów 1, 2, 3, 4 otrzymujemy:

$$2M_1 - M_2 + 2L_1 - L_3 = \frac{q_1^2}{2},$$

$$-M_1 + 2M_2 + 2L_2 - L_4 = \frac{q_1^2}{2},$$

$$2M_3 - M_4 + 2L_3 - L_1 = 0,$$

$$-M_3 + 2M_4 - L_2 + 2L_4 = 0.$$

Wstawiając do powyższych równań wielkości $M_1, M_2, M_3, M_4, L_1, L_2, L_3, L_4$ otrzymamy układ równań, w których występują jedynie ugięcia w_1, w_2, w_3 i w_4 :

$$16w_1 - 7w_2 - 7w_3 = \frac{11ql^2}{4} \cdot \frac{l^2}{6EJ},$$

$$-7w_1 + 16w_2 - 7w_4 = \frac{11ql^2}{4} \frac{l^2}{6EJ},$$

$$-7w_1 + 16w_3 - 7w_4 = 0,$$

$$-7w_2 - 7w_3 + 16w_4 = 0.$$

Z rozwiązania tego układu otrzymujemy:

$$w_1 = w_2 = \frac{99ql^2}{128} \frac{l^2}{6EJ},$$

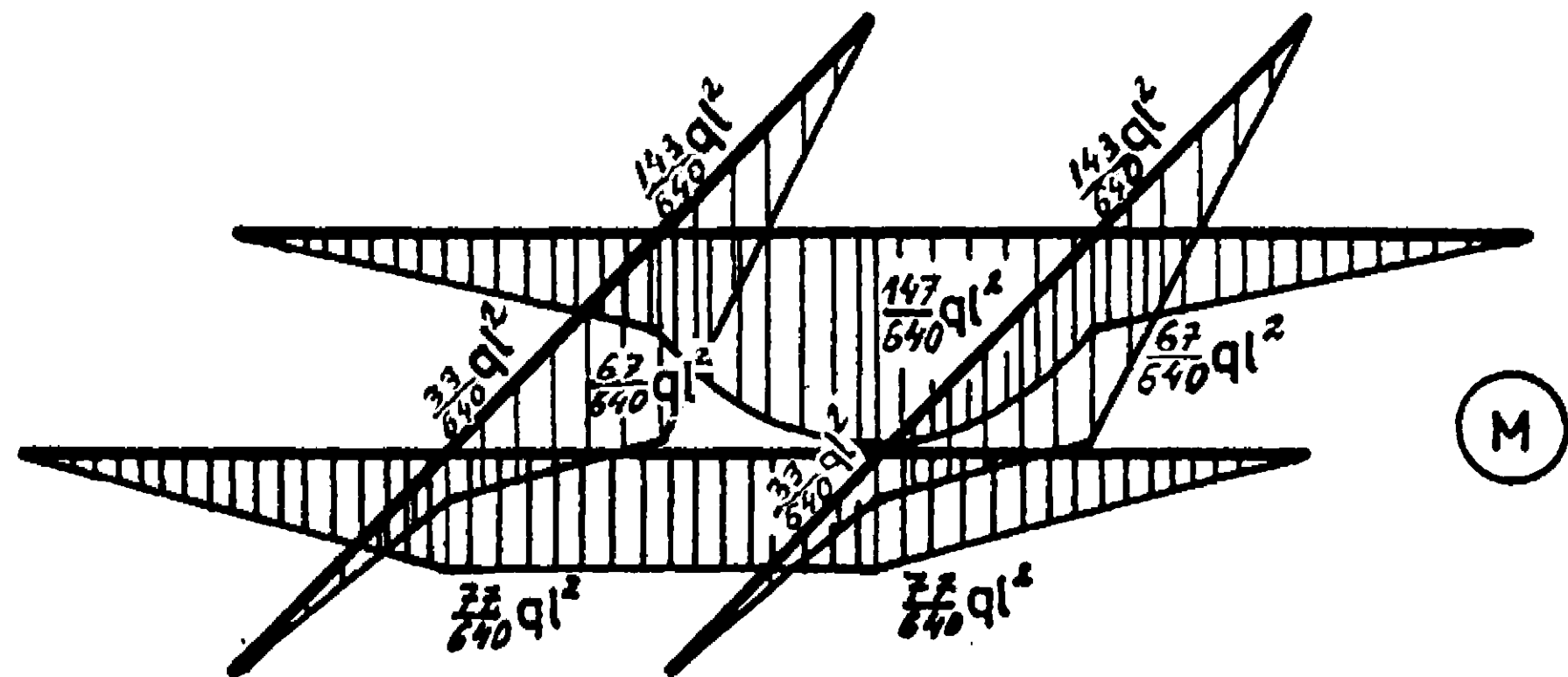
$$w_3 = w_4 = \frac{77ql^2}{128} \frac{l^2}{6EJ}.$$

Ze związków na momenty zginające $M_1, M_2, M_3, M_4, L_1, L_2, L_3, L_4$ mamy

$$M_1 = M_2 = \frac{67}{640} ql^2, \quad L_1 = L_2 = \frac{143}{640} ql^2,$$

$$M_3 = M_4 = \frac{77}{640} ql^2, \quad L_3 = L_4 = \frac{33}{640} ql^2.$$

Na rysunku 12.28 podano wykres momentów zginających.



rys. 12.28.

Znając momenty przywęzłowe możemy obliczyć przywęzłowe siły tnące, wynoszą one:

$$T = -\frac{67}{640} ql, \quad T_{21} = \frac{ql}{2},$$

$$T_{1E} = -\frac{147}{640} ql, \quad T_{2H} = -\frac{143}{640} ql,$$

$$T_{13} = -\frac{110}{640} ql, \quad T_{2D} = -\frac{67}{640} ql,$$

$$T_{12} = \frac{ql}{2}, \quad T_{24} = -\frac{110}{640} ql,$$

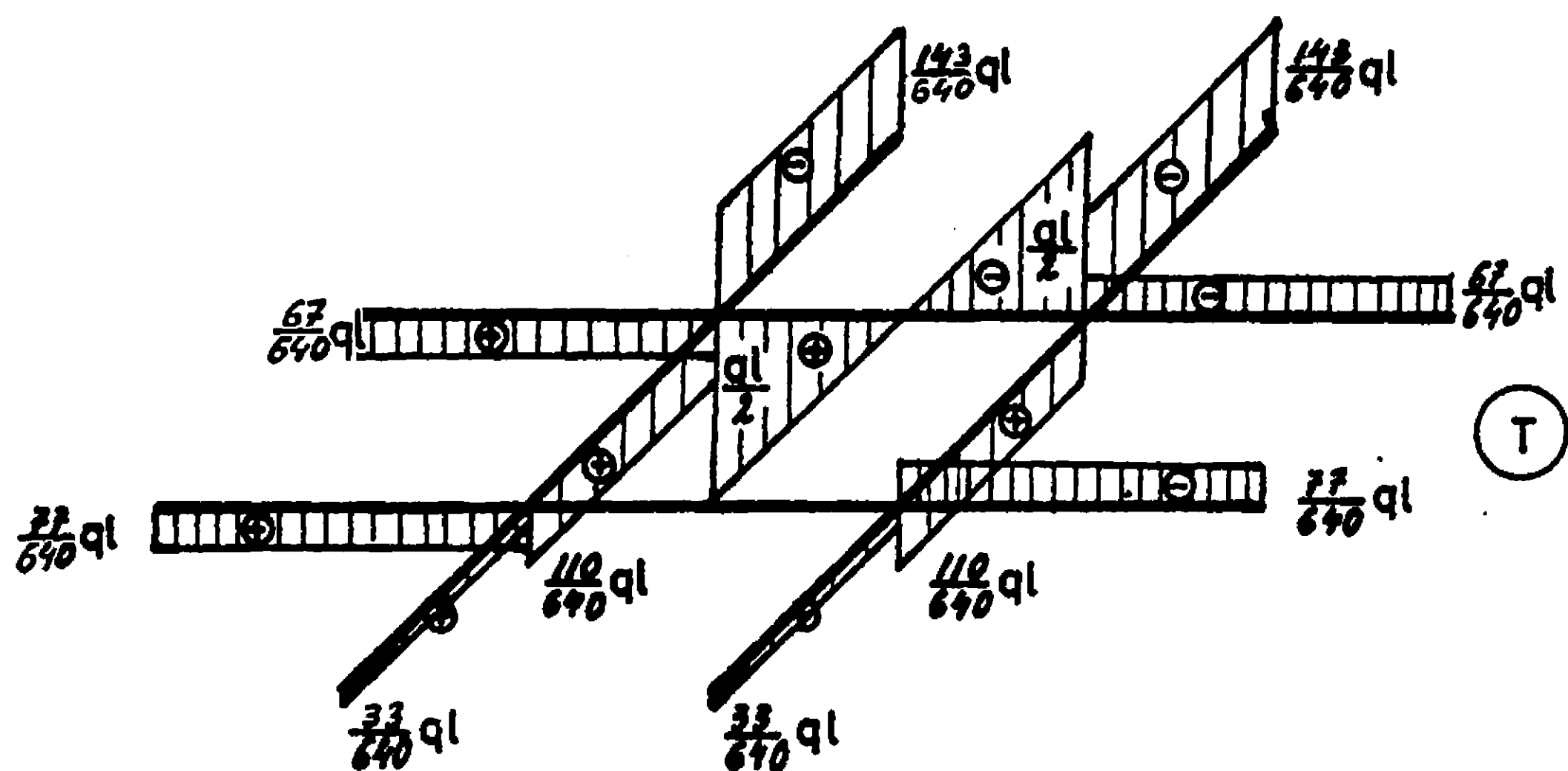
$$T_{31} = \frac{110}{640} ql, \quad T_{43} = 0,$$

$$T_{34} = 0, \quad T_{42} = \frac{110}{640} ql,$$

$$T_{3F} = -\frac{33}{640} ql, \quad T_{4B} = -\frac{77}{640} ql,$$

$$T_{3A} = -\frac{77}{640} ql, \quad T_{46} = -\frac{33}{640} ql.$$

Na rysunku 12.29 podano wykres sił tnących.

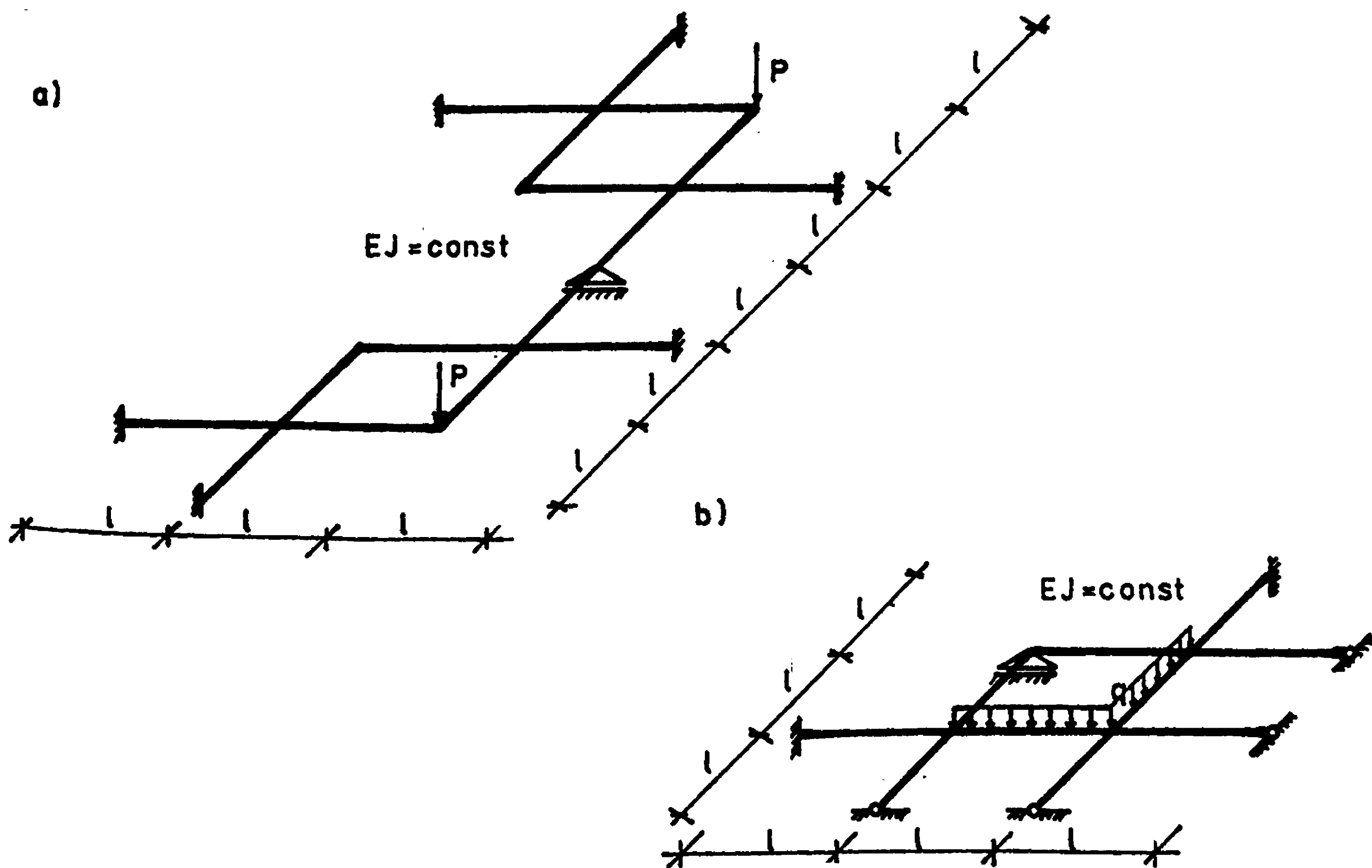


rys. 12.29.

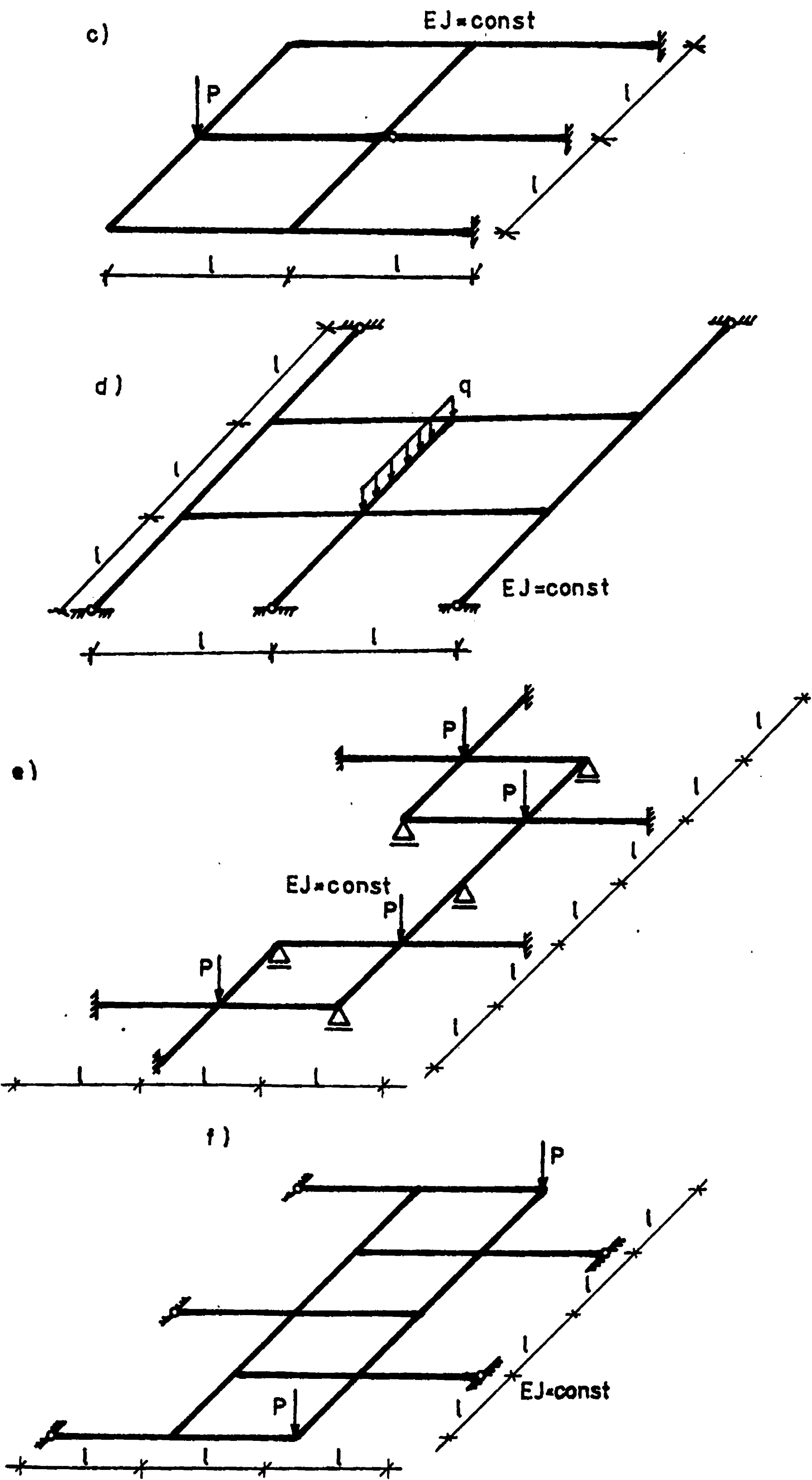
Zadanie 12.4

Dla układów przedstawionych na rysunku 12.30 przy danym obciążeniu wyznaczyć wykresy momentów zginających.

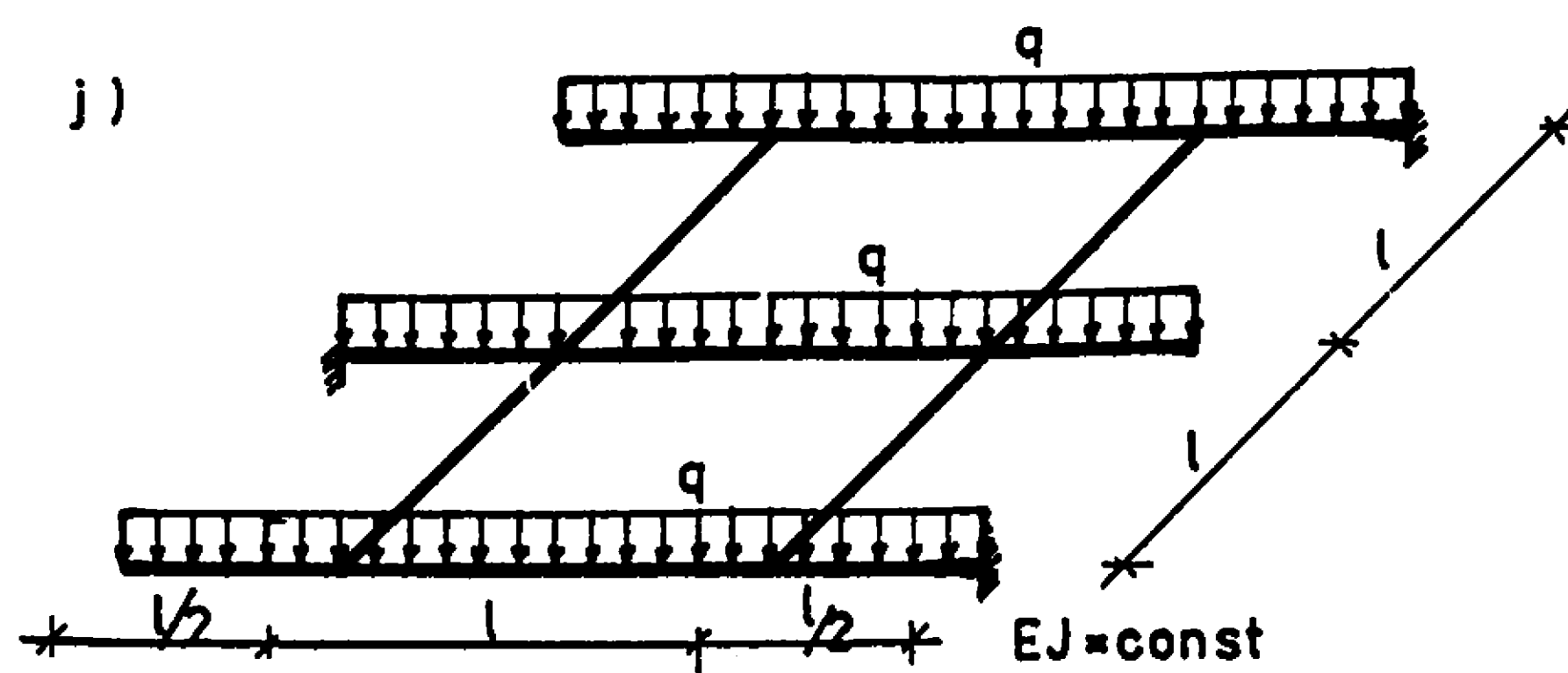
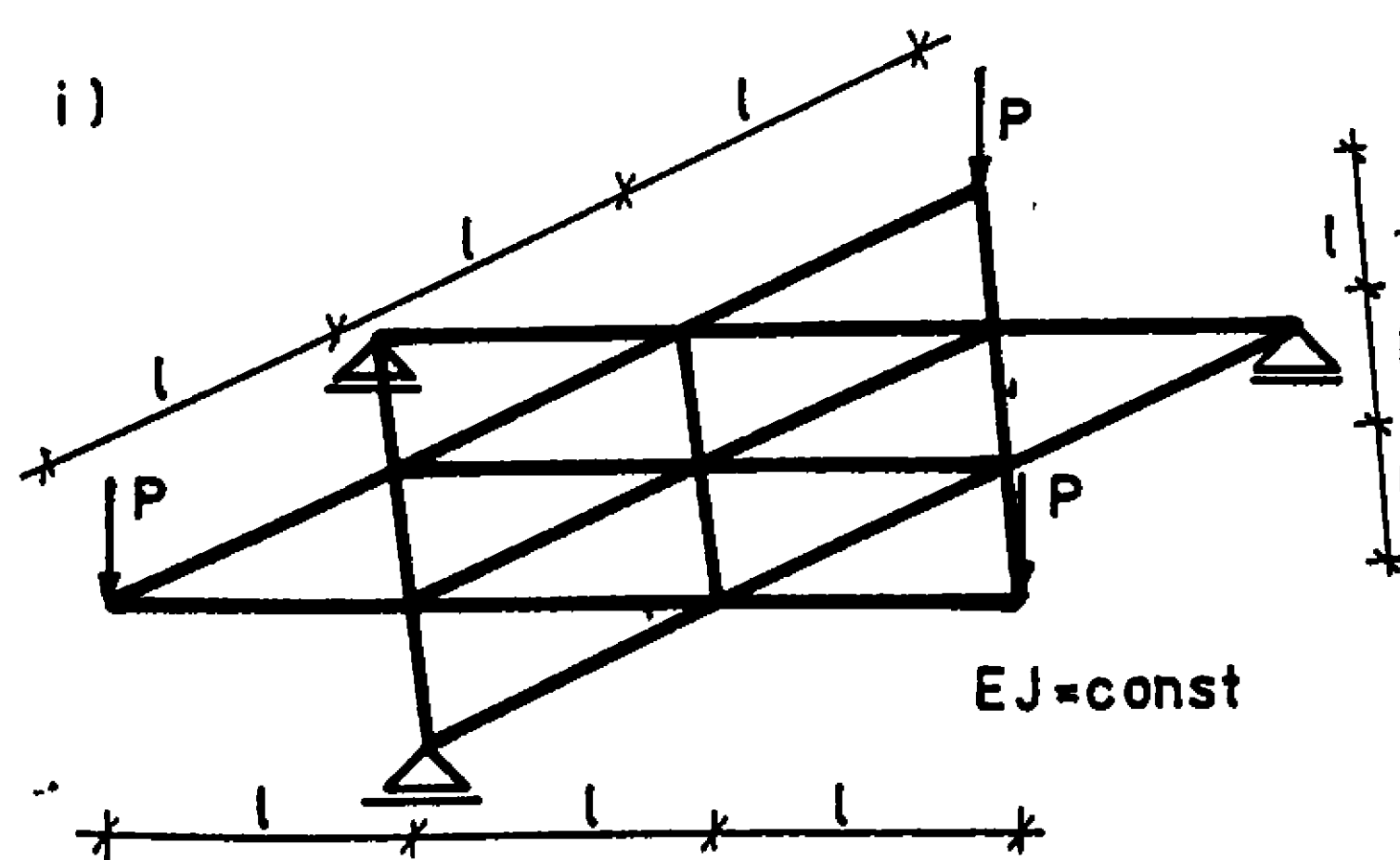
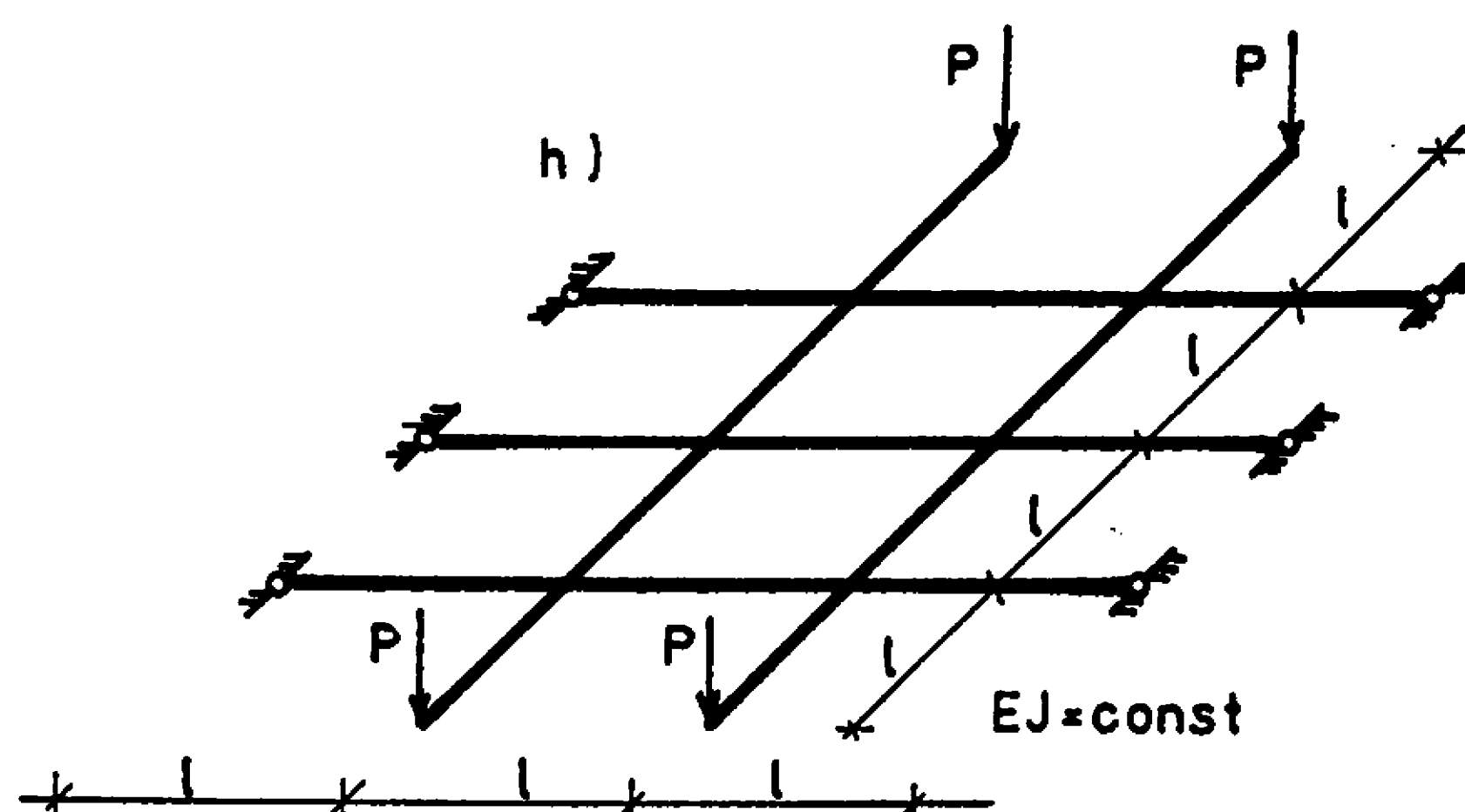
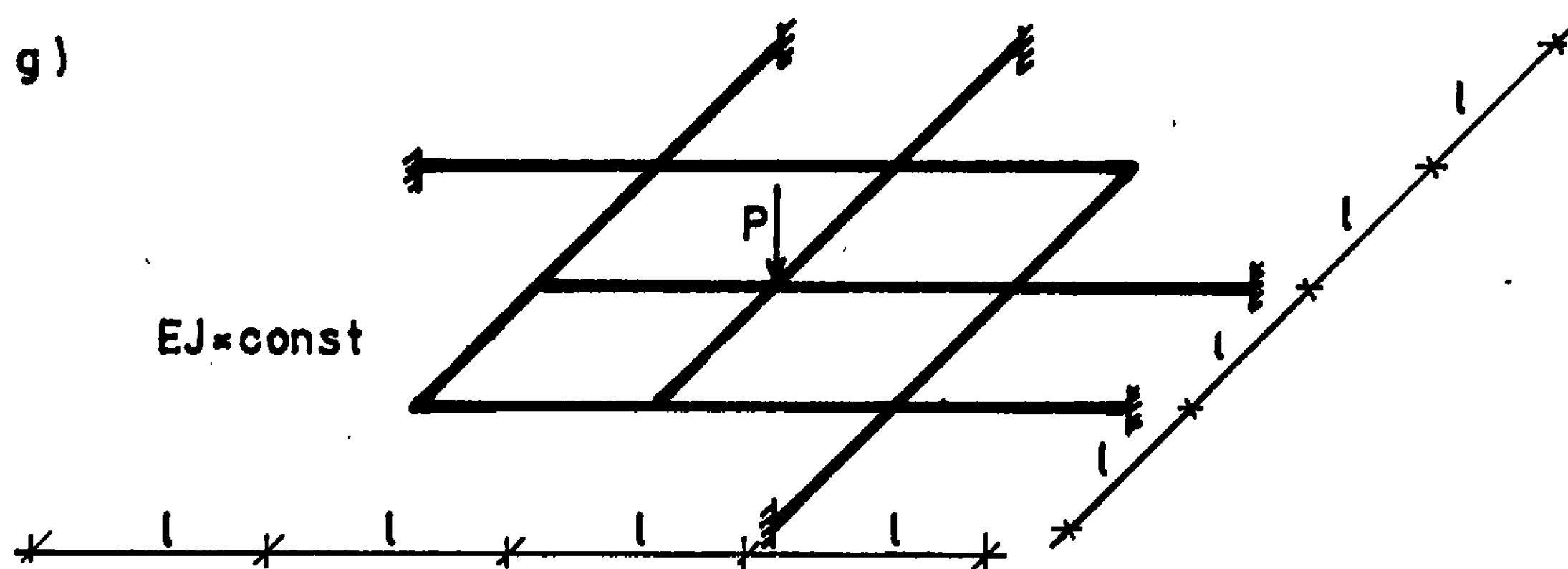
Rozwiązanie - samodzielne



rys. 12.30a-b



Rys. 12.30c-f



.Rys. 12.30g-j

13. STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE DŹWIGARY ZAŁAMANE LUB ZAKRZYWIONE W PLANIE

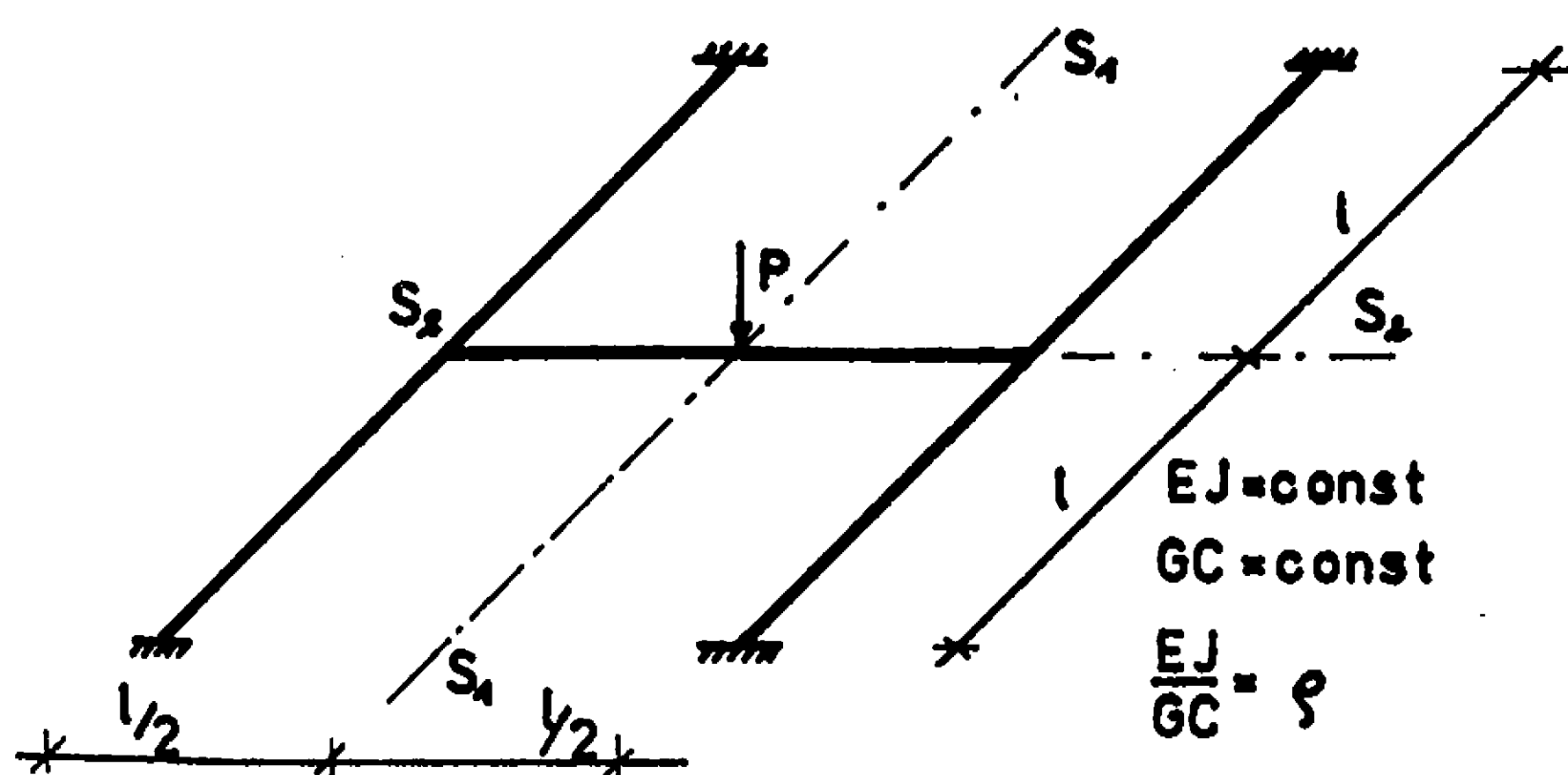
Układy statycznie niewyznaczalne rozwiązywać będziemy metodą sił. Nadliczbowe mogą być obierane jako składowe reakcji podporowych lub sił wewnętrznych.

Jeżeli układ jest symetryczny to siły wewnętrzne układu obciążonego symetrycznie muszą być rozłożone symetrycznie. I tak momenty zginające w punktach symetrycznych są jednakowe co do wielkości i znaku, zatem wykresy momentów zginających są symetryczne. Momenty skręcające i siły tnące w punktach symetrycznie położonych są jednakowej wielkości, lecz przeciwnych znaków, zatem wykresy M_s i T są antysymetryczne.

Jeżeli układ symetryczny jest obciążony antysymetrycznie to momenty zginające w punktach symetrycznych są jednakowe, lecz przeciwnych znaków, zatem wykres momentu zginającego jest antysymetryczny. Momenty skręcające i siły tnące w punktach symetrycznych są jednakowe co do wielkości i znaku, zatem wykresy M_s i T są symetryczne. Stąd też symetrię układu załamanego lub zakrzywionego w planie można wykorzystać do obliczeń statycznych podobnie jak w układach ramowych.

Zadanie 13.1

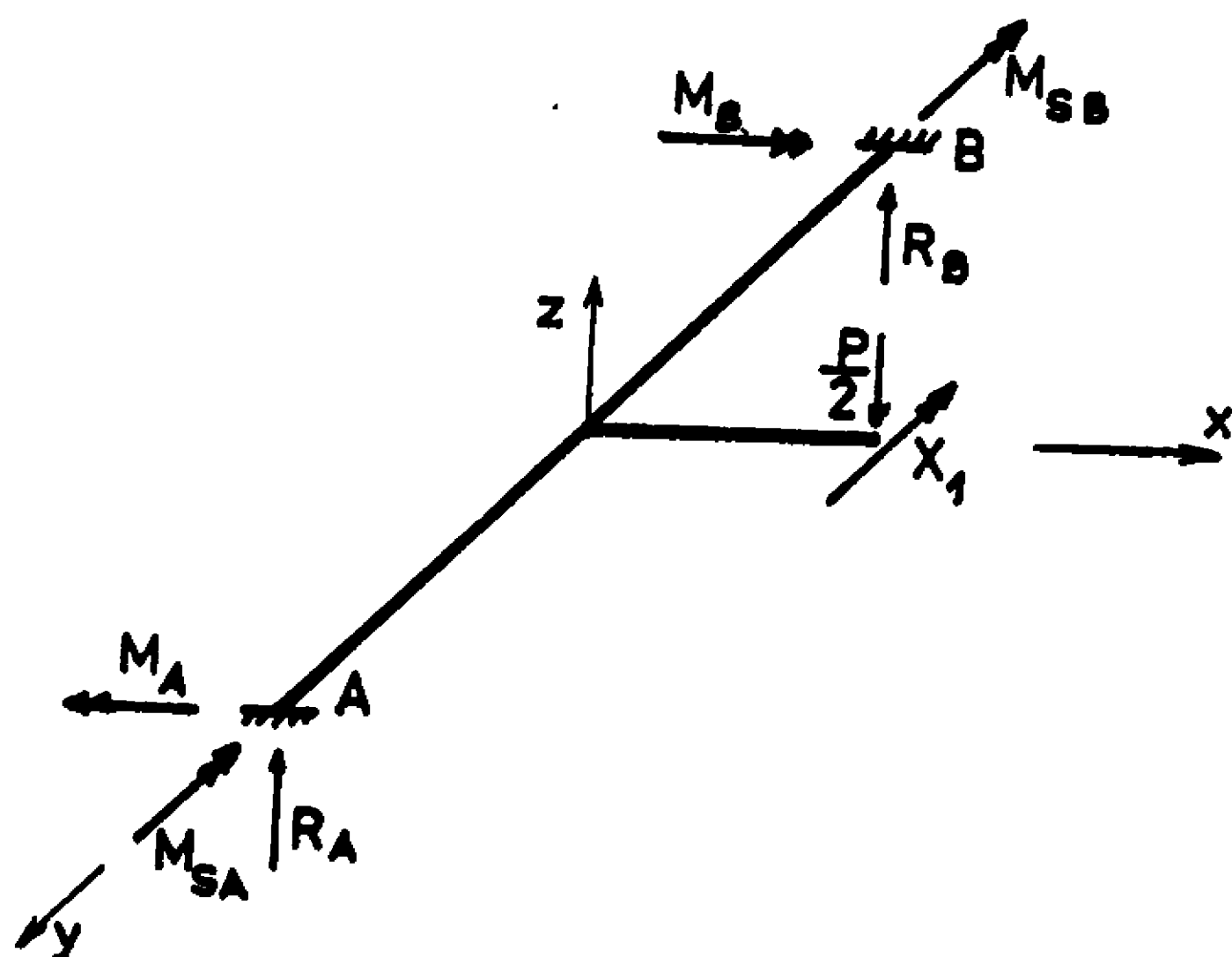
Dla danego dźwigara załamanego w planie, przy danym obciążeniu, wyznaczyć wykresy momentów zginających i skręcających (rys. 13.1).



Rys. 13.1

Rozwiązanie

Ze względu na symetrię układu i obciążenia, w przekroju pod siłą znika siła tnąca i moment skręcający. Tak więc przy wyborze momentu zginającego X_1 w przekroju pod siłą P jako wielkości nadliczbowej układ jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalny. Układ podstawowy przyjmiemy jednokrotnie statycznie niewyznaczalny. Z symetrii względem osi x wynika, że $R_A = R_B$, $M_A = M_B$, $M_{SA} = -M_{SB}$.



Rys. 13.2

Reakcje podporowe obliczymy z następujących równań:

$$\sum Z = 0$$

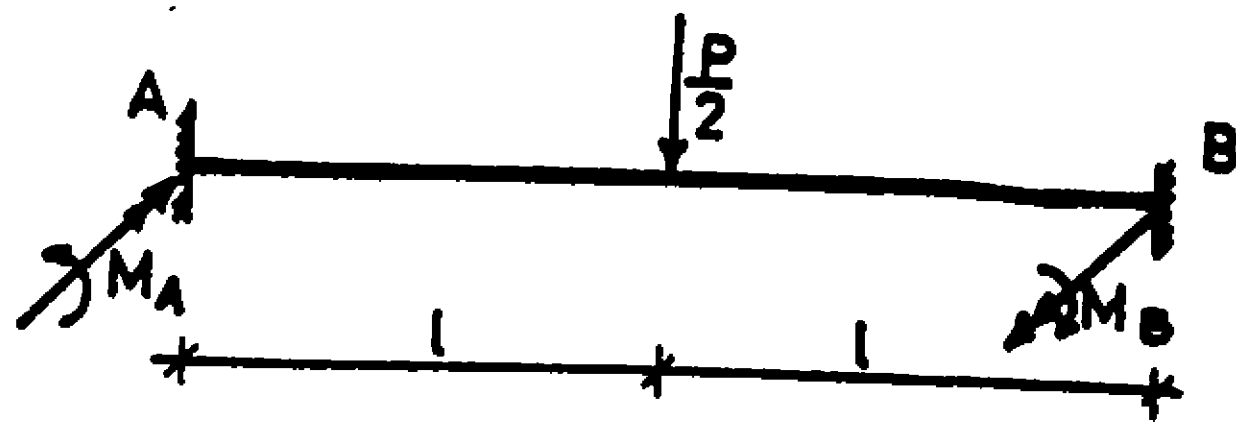
$$R_A + R_B = \frac{P}{2}, \quad 2R_A = \frac{P}{2} \longrightarrow R_A = R_B = \frac{P}{4};$$

$$\sum M_y = 0$$

$$-M_{SA} - M_{SB} + \frac{Pl}{4} = 0, \quad 2M_{SA} = \frac{Pl}{4} \longrightarrow M_{SA} = \frac{Pl}{8}.$$

Momenty $M_A = M_B$ należy wyznaczyć tak jak dla belki dwustronnie utwierdzonej o rozpiętości $2l$ i obciążonej w środku siłą $P/2$ (rys. 13.3).

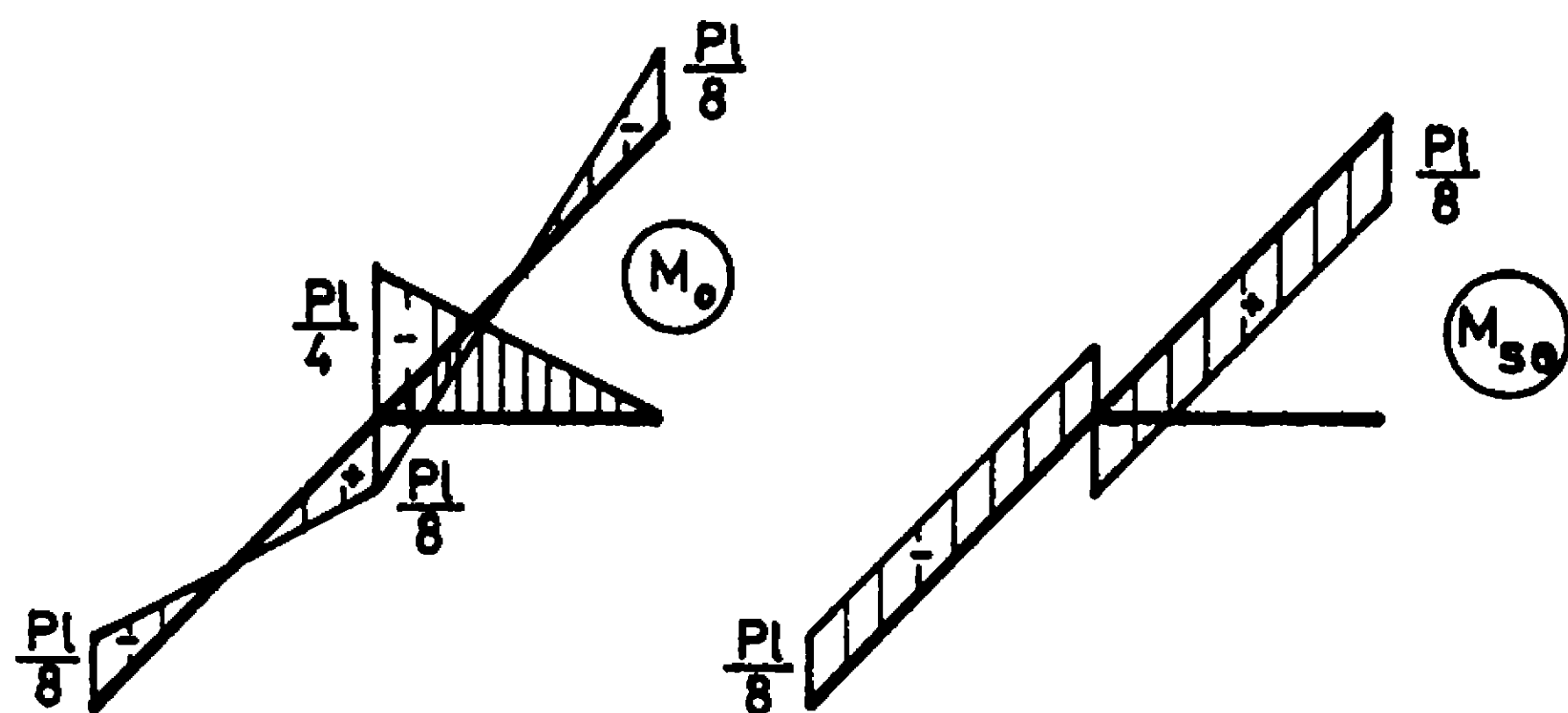
Rozwiązując daną belkę równaniem trzech momentów otrzymamy $M_A = M_B = \frac{Pl}{8}$.



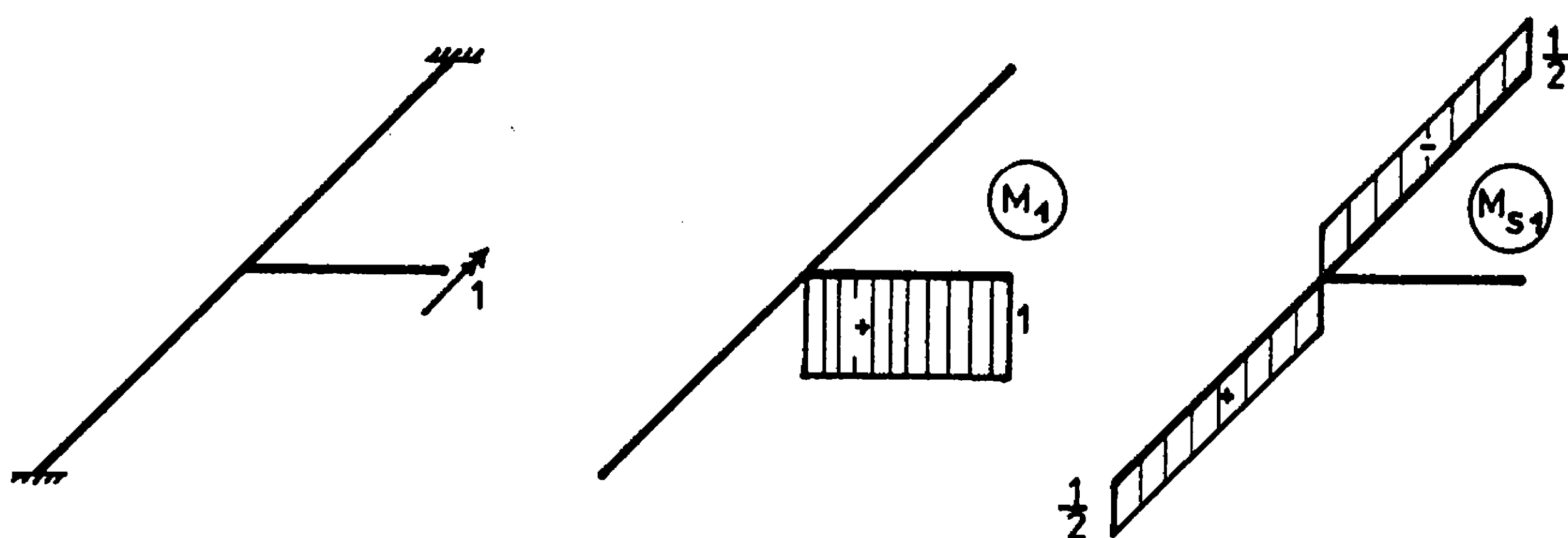
Rys. 13.3

Wykres momentu zginającego i skręcającego od obciążenia zewnętrznego przedstawiono na rysunku 13.4.

Wykres momentu zginającego i skręcającego od stanu $X_1 = 1$ przedstawiono na rysunku 13.5.



Rys. 13.4



Rys. 13.5

Nadliczbową X_1 wyznaczmy z równania

$$X_1 \delta_{11} + \delta_{10} = 0,$$

$$\delta_{11} = \int_S \frac{M_1 M_1}{EJ} dS + \int_S \frac{M_{s1} M_{s1}}{GC} dS =$$

$$= \frac{1}{EJ} 1 \cdot \frac{1}{2} 1 + \frac{1}{GC} \frac{1}{2} 1 \cdot \frac{1}{2} 2 = \frac{1}{2EJ} (1 + \varrho),$$

$$\delta_{10} = \int_S \frac{M_0 M_1}{EJ} dS + \int_S \frac{M_{s0} M_{s1}}{GC} dS =$$

$$= - \frac{1}{EJ} \frac{Pl}{4} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{GC} 2 \frac{Pl}{8} 1 \frac{1}{2} = - \frac{Pl^2}{16EJ} (1 + 2\varrho),$$

$$X_1 = - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = - \frac{\frac{Pl^2}{16EJ} (1 + 2g)}{\frac{1}{2EJ} (1 + g)} = \frac{Pl}{8} \frac{(1 + 2g)}{(1 + g)} = \frac{Pl}{8} k,$$

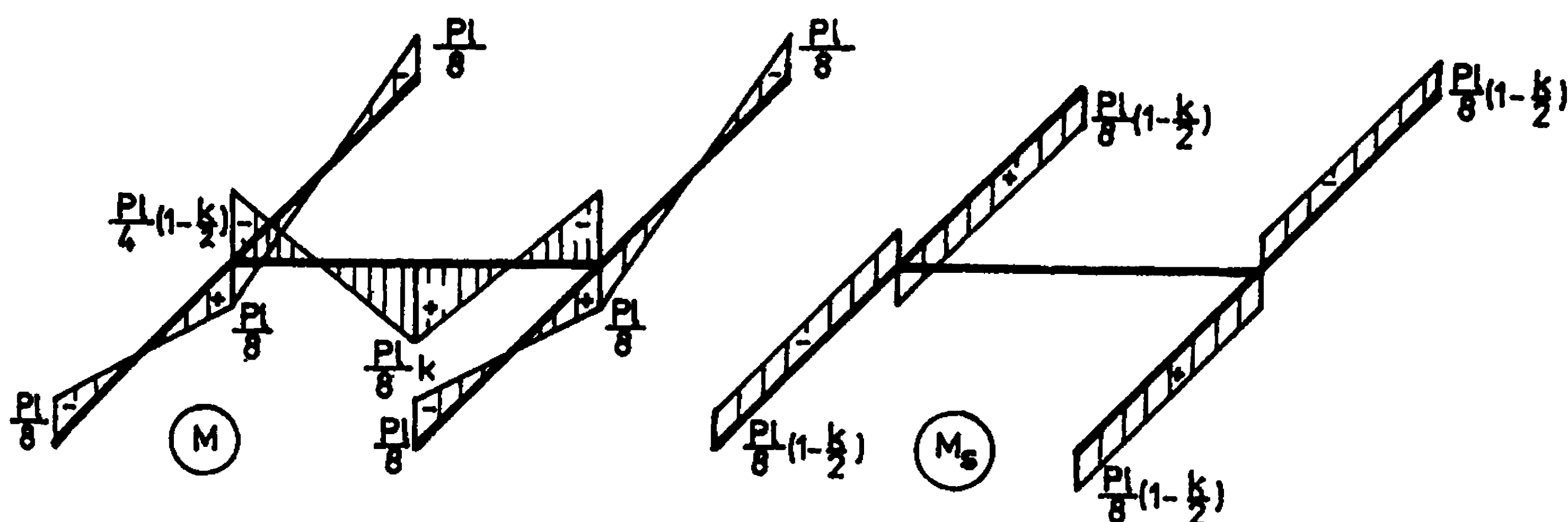
gdzie $k = \frac{1 + 2g}{1 + g}$.

Momenty zginające i skręcające wyznaczymy ze wzorów superpozycyjnych

$$M = M_0 + M_1 X_1,$$

$$M_s = M_{s0} + M_{s1} X_1,$$

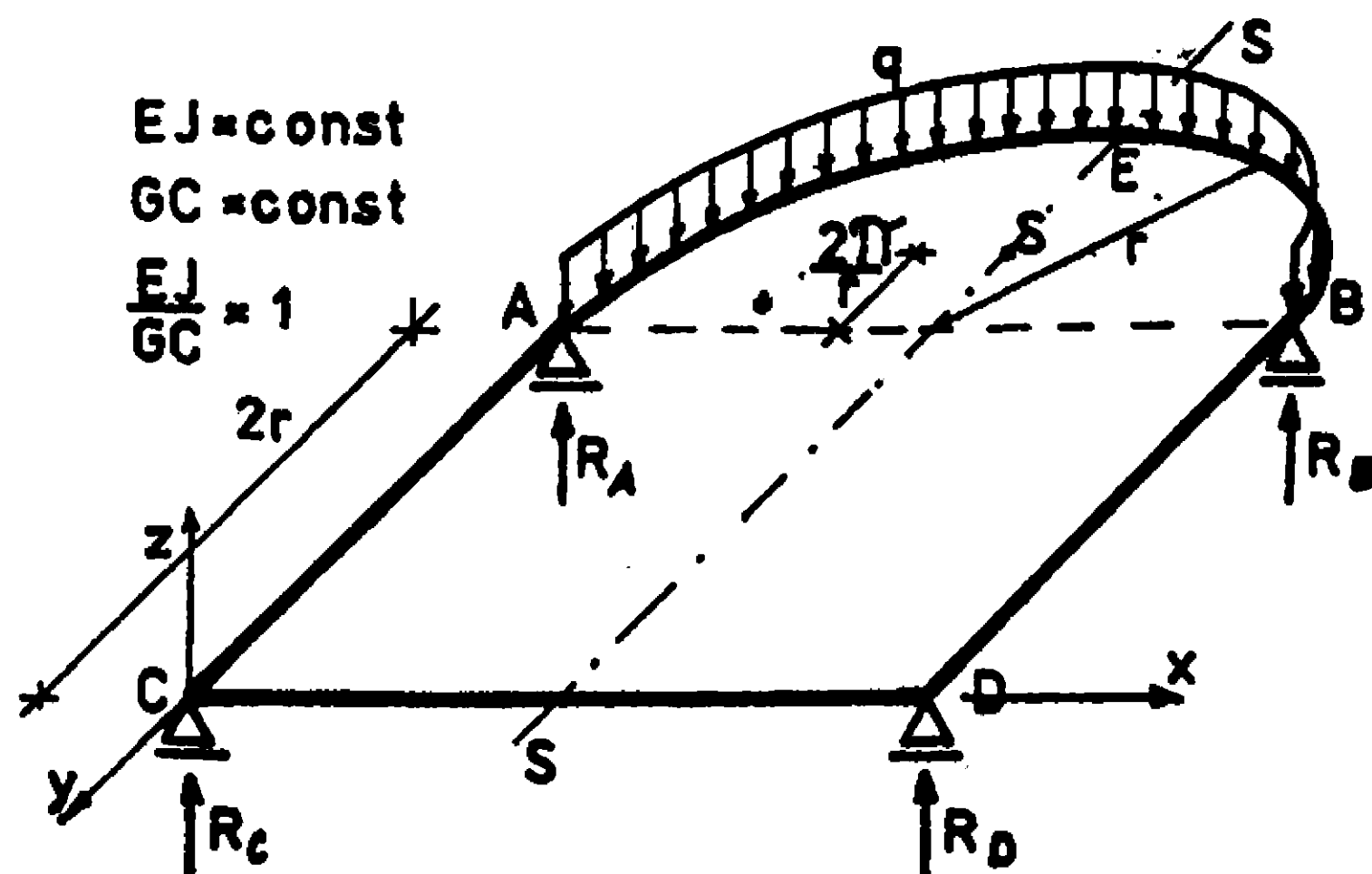
Na rysunku 13.6 podano wykres momentów M , M_s .



Rys. 13.6

Zadanie 13.2

Dla danego układu zakrzywionego w płanie przy danym obciążeniu wyznaczyć wykresy momentów zginających i skręcających (rys. 13.7; $EJ = GC$).



Rys. 13.7

Rozwiązanie

Ze względu na symetrię układu i obciążenia w przekroju w punkcie E znika siła tnąca i moment skręcający. Przyjmując moment zginający X_1 w przekroju w punkcie E za nadliczbową układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny. Obliczenie reakcji podporowych!

Środek ciężkości s półokręgu leży na osi symetrii w odległości $\frac{2r}{\pi}$ od środka okręgu:

$$\sum M_x = 0,$$

$$-(R_A + R_B) 2r + \pi q r \left(2r + \frac{2r}{\pi} \right) = 0,$$

$$\sum Z = 0,$$

$$R_A + R_B + R_C + R_D - \pi q r = 0.$$

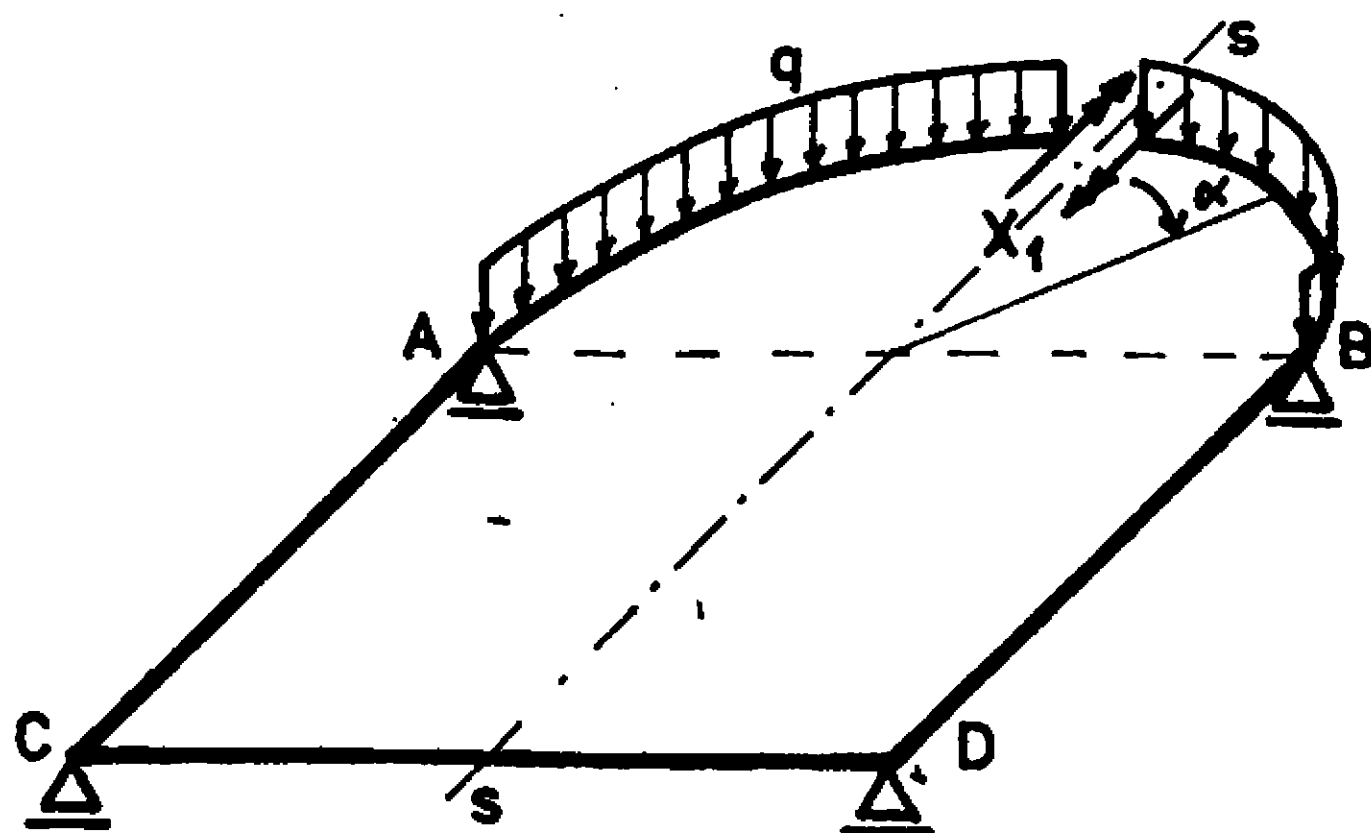
Z symetrii układu i obciążenia wynika, że $R_A = R_B$ oraz $R_C = R_D$.

Z rozwiązania powyższego układu otrzymujemy

$$R_A = R_B = \frac{q r}{2} (1 + \pi),$$

$$R_C = R_D = -\frac{q r}{2}.$$

Układ podstawowy statycznie wyznaczalny przedstawiono na rysunku 13.8.



Rys. 13.8

Siły wewnętrzne na półokręgu wyznaczmy z poniższych wzorów

$$M = A \sin \alpha + B \cos \alpha - q r^2,$$

$$M_s = A \cos \alpha - B \sin \alpha + q r^2 \alpha + C,$$

$$T = -q r \alpha - \frac{C}{r}.$$

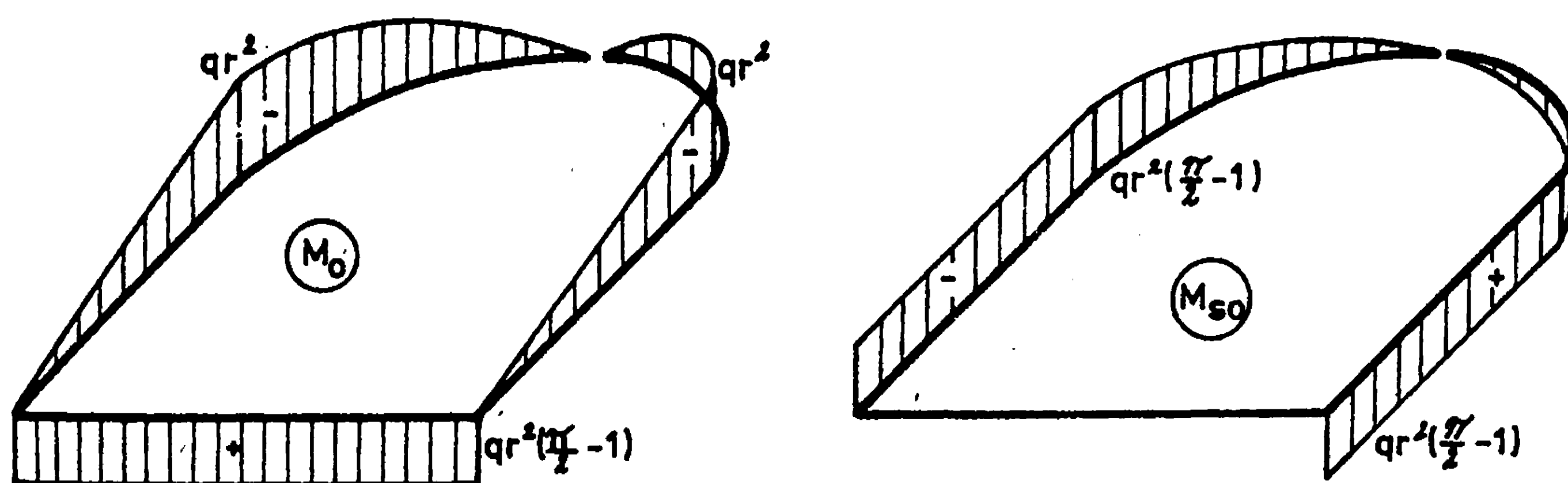
Dla $\alpha = 0$ mamy $M(0) = 0$, $M_s(0) = 0$, $T(0) = 0$. Z tych warunków brzegowych wyznaczmy stałe całkowania A , B , C . Wynoszą one $A = C = 0$, $B = qr^2$, stąd:

$$M_0 = -qr^2 (1 - \cos\alpha),$$

$$M_{s0} = qr^2 (\alpha - \sin\alpha).$$

Dla lewej części łuku należy przyjąć $\alpha = -\alpha$.

Na rysunku 13.9 podano wykresy momentów zginających i skręcających wywołanych obciążeniem q w układzie podstawowym statycznie wyznaczalnym.



Rys. 13.9

Dla nadliczbowej $X_1 = 1$, stałe całkowania A , B , C wyznaczmy z następujących warunków brzegowych: $M_1(0) = 1$, $M_{s1}(0) = 0$, $T_1(0) = 0$. Z powyższych warunków otrzymujemy $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, stąd:

$$M_1 = \cos\alpha,$$

$$M_{s1} = -\sin\alpha.$$

Wykresy momentów zginających i skręcających wywołanych nadliczbową $X_1 = 1$ podano na rysunku 13.10.

Nadliczbową X_1 wyznaczmy z równania kanonicznego

$$X_1 \delta_{11} + \delta_{10} = 0.$$

Wyliczmy współczynniki równania kanonicznego

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{2}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \cdot r d\alpha + \frac{2}{GC} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \cdot r d\alpha + \frac{1}{EJ} \cdot 2r \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{GC} \cdot 2r \cdot 1 \cdot 1 = \\ &= \frac{\pi r}{EJ} + \frac{6r}{EJ} = 9,14 \frac{r}{EJ}; \end{aligned}$$

$$\delta_{10} = \frac{2}{EJ} \left[-qr^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos\alpha) \cos\alpha d\alpha \right] + \frac{2}{GC} \left[-qr^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\alpha - \sin\alpha) \sin\alpha d\alpha \right] +$$

$$- \frac{1}{EJ} qr^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \cdot 2r \cdot 1 - \frac{2}{GC} qr^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \cdot 2r \cdot 1 = - \frac{2qr^3}{EJ} (\pi - 1),$$

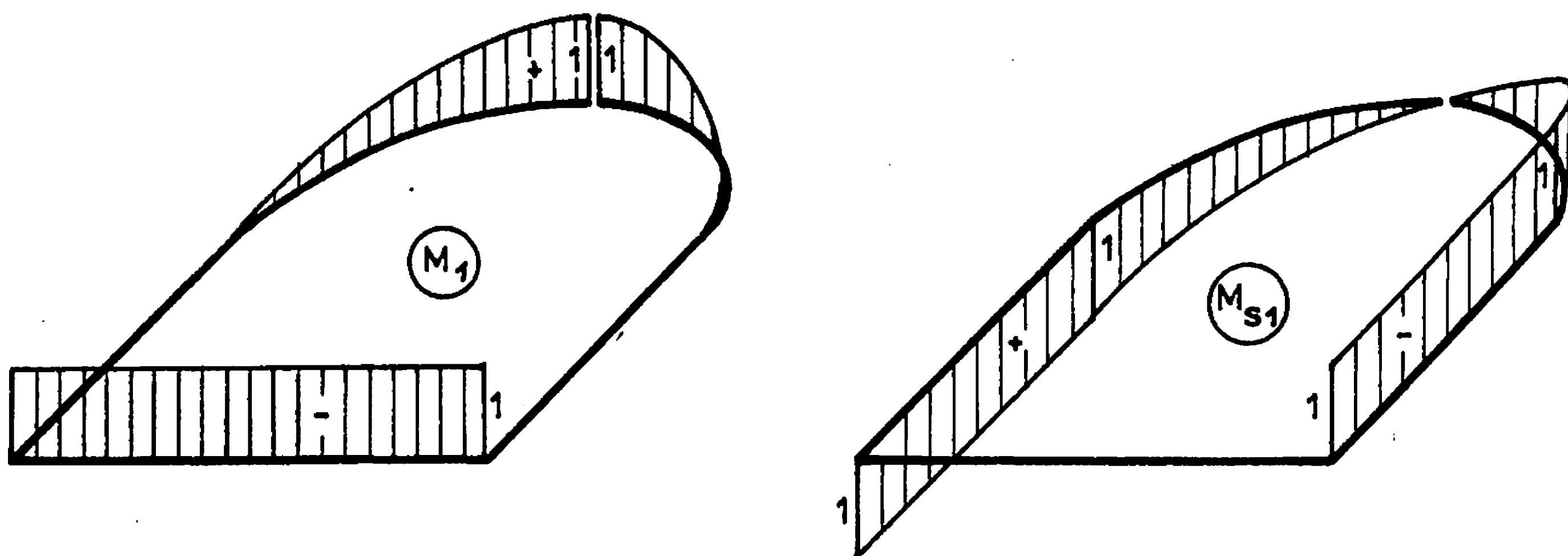
a zatem

$$X_1 = - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{2qr^3 (\pi - 1)}{9,14 r} = 0,468 qr^2.$$

Ze wzorów

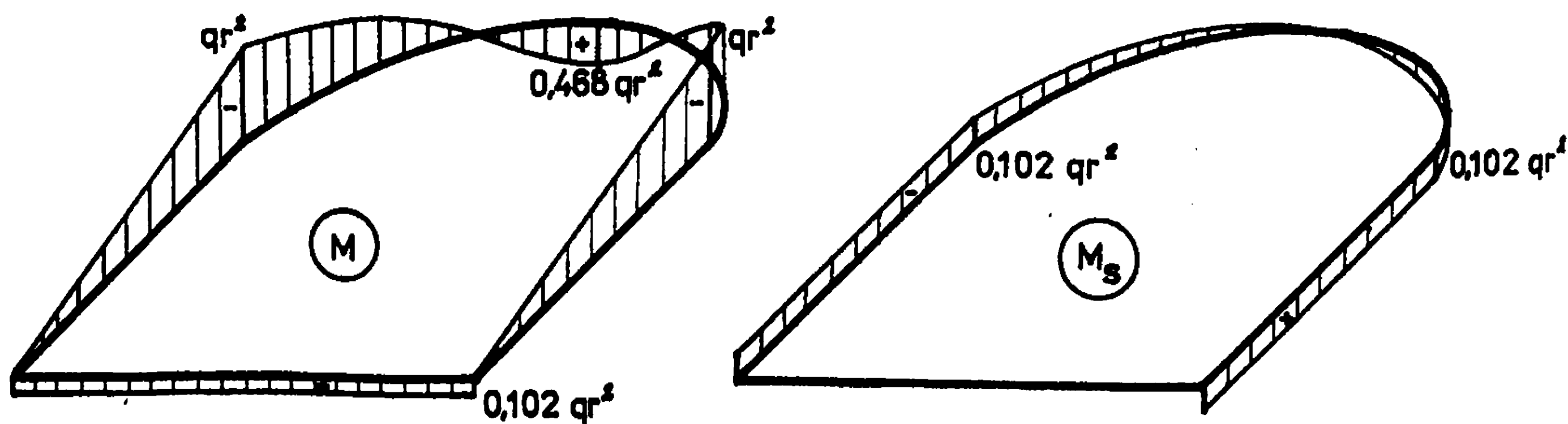
$$M = M_0 + M_1 X_1,$$

$$M_2 = M_{s0} + M_{s1} X_1.$$



Rys. 13.10

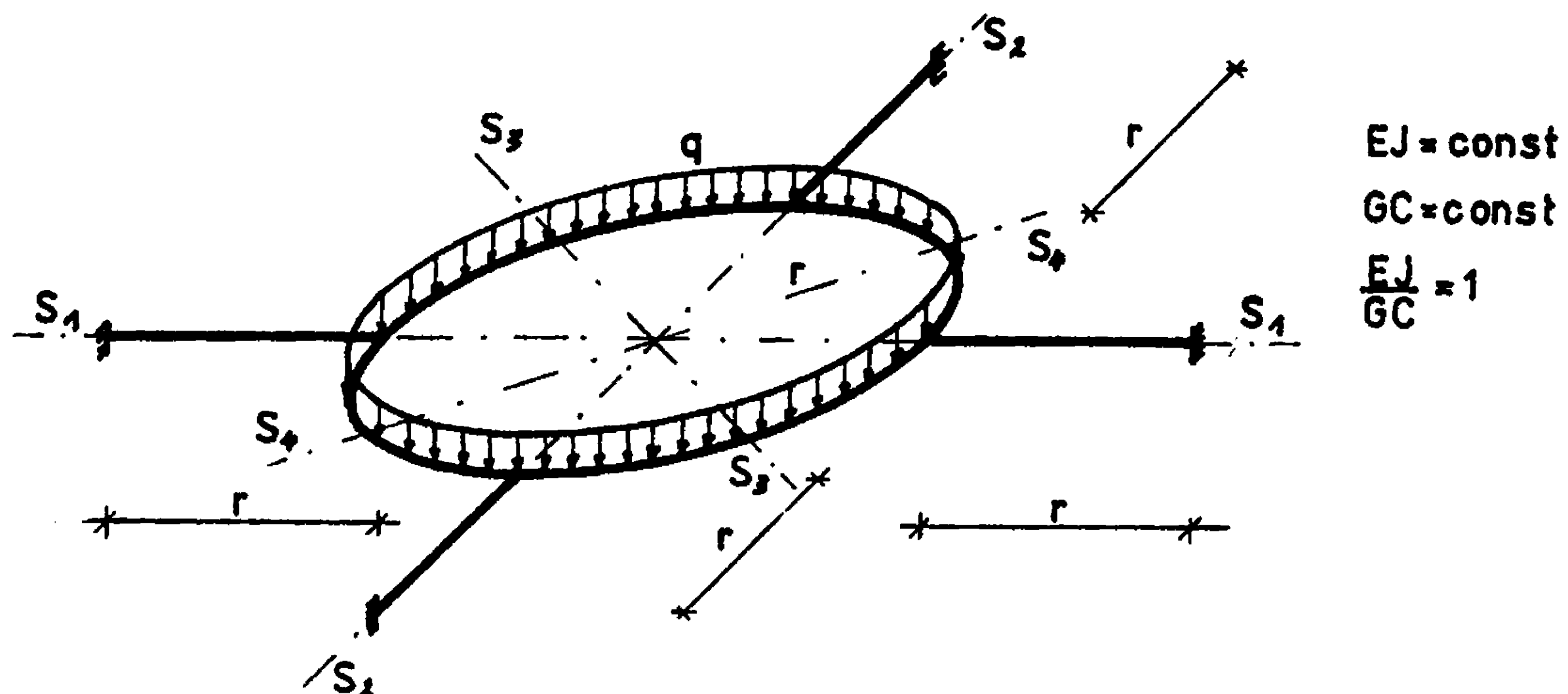
Wyliczamy rzędne wykresów momentów zginających i skręcających w rozważanym układzie. Wykresy momentów zginających i skręcających przedstawiono na rysunku 13.11.



Rys. 13.11

Zadanie 13.3

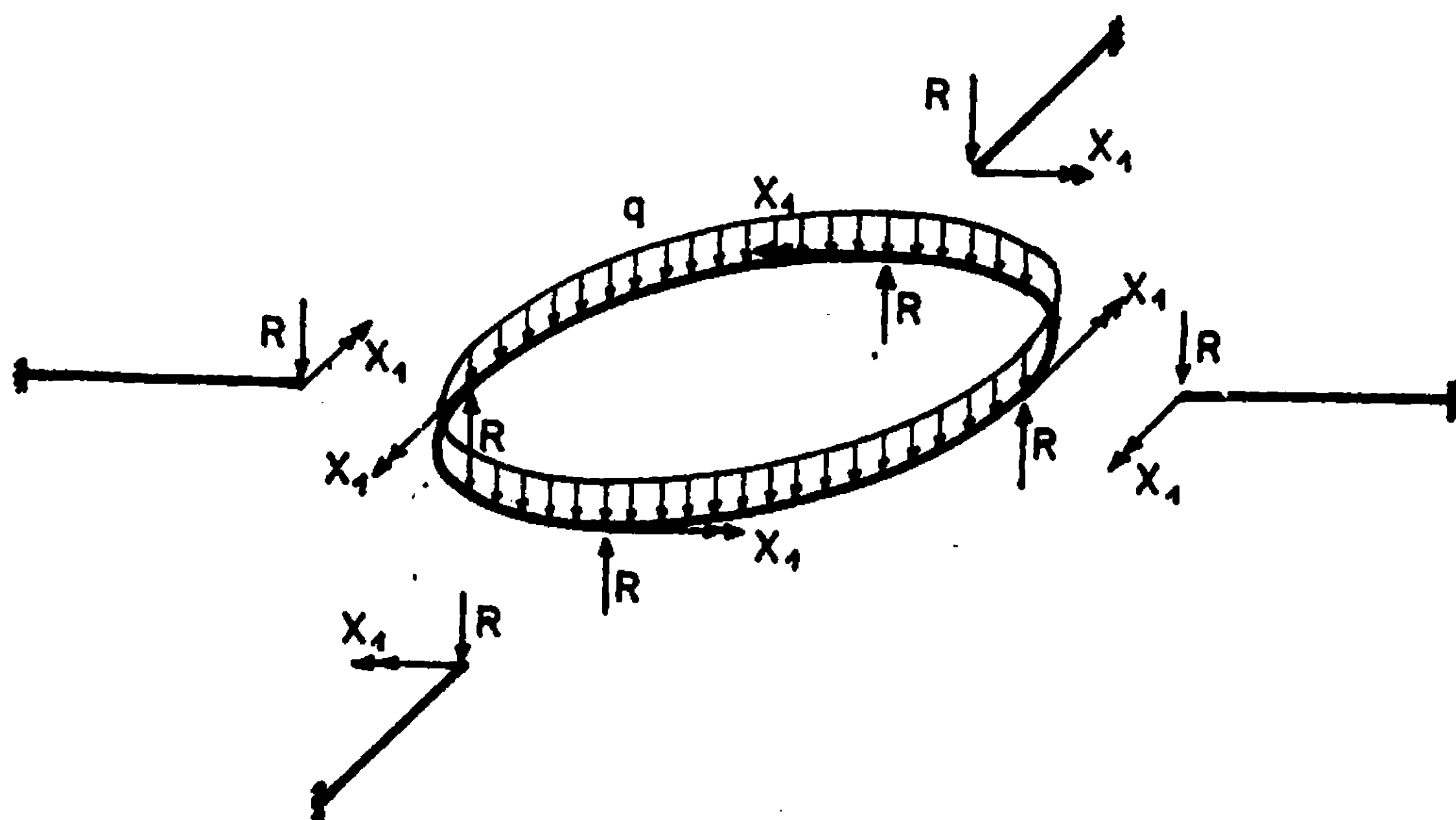
Dla danego układu zakrzywionego w planie, przy danym obciążeniu, wyznaczyć wykresy momentów zginających i skręcających (rys. 13.12; $EJ = GC$).



Rys. 13.12

Rozwiązanie

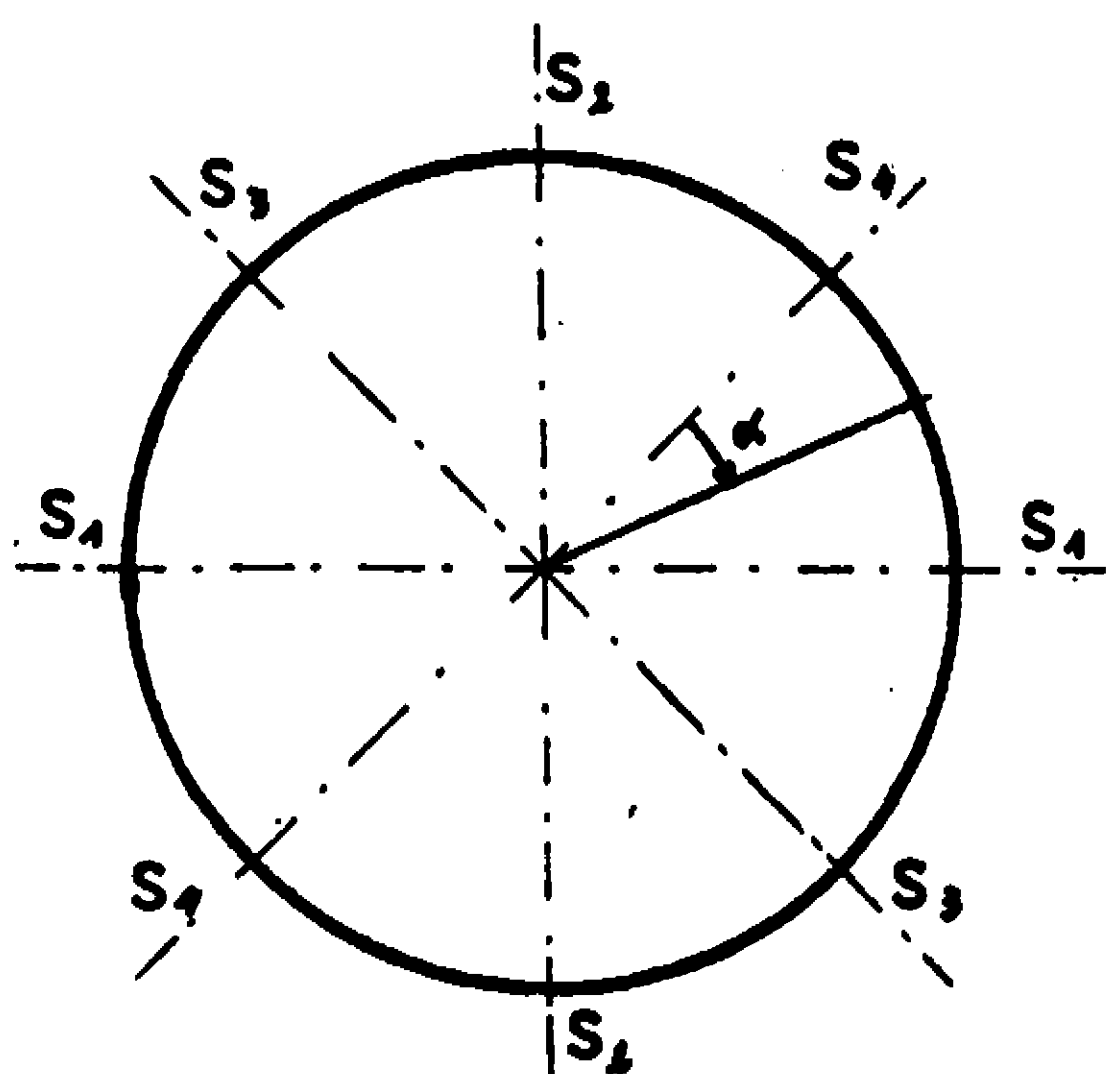
Rozważany układ ze względu na istniejące cztery osie symetrii jest układem jednokrotnie statycznie niewyznaczalnym. Jako nadliczbową X_1 przyjmujemy momenty zginające na końcach wsporników (rys.13.13.).



Rys. 13.13

Obliczenie reakcji R od obciążenia zewnętrznego q

$$\sum Z = 0, \quad 2 \pi r q - 4R = 0 \longrightarrow R = \frac{\pi r q}{2}.$$



Rys. 13.14

Dla przekroju $\alpha = 0$ (rys. 13.14) jest $M_{s0}(0) = 0$, $T_0(0) = 0$ oraz dla $\alpha = \frac{\pi}{4}$ mamy $M_{s0} \frac{\pi}{4} = 0$. Z powyższych warunków brzegowych wyliczymy stałe A,

B, C. Wynoszą one: $A = 0$, $B = \frac{qr^2\pi}{2\sqrt{2}}$, $C = 0$; stąd

$$M_0 = qr^2 \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cos \alpha - 1 \right),$$

$$M_{s0} = qr^2 \left(-\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sin \alpha + \alpha \right).$$

Na rysunkach 13.15 podano wykresy momentów zginających i skręcających, wywołanych obciążeniem q w układzie podstawowym. Wykresy momentów zginających M_1 od nadliczbowej X_1 dla prętów prostoliniowych przedstawiono na rysunku 13.16.

Dla pręta kołowego ze względu na symetrię układu i obciążenia mamy następujące warunki brzegowe $T_1(0) = 0$, $M_{s1} \left(\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (rys. 13.17). Z powyższych warunków brzegowych otrzymamy $A = 0$, $B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $C = 0$. Tak więc:

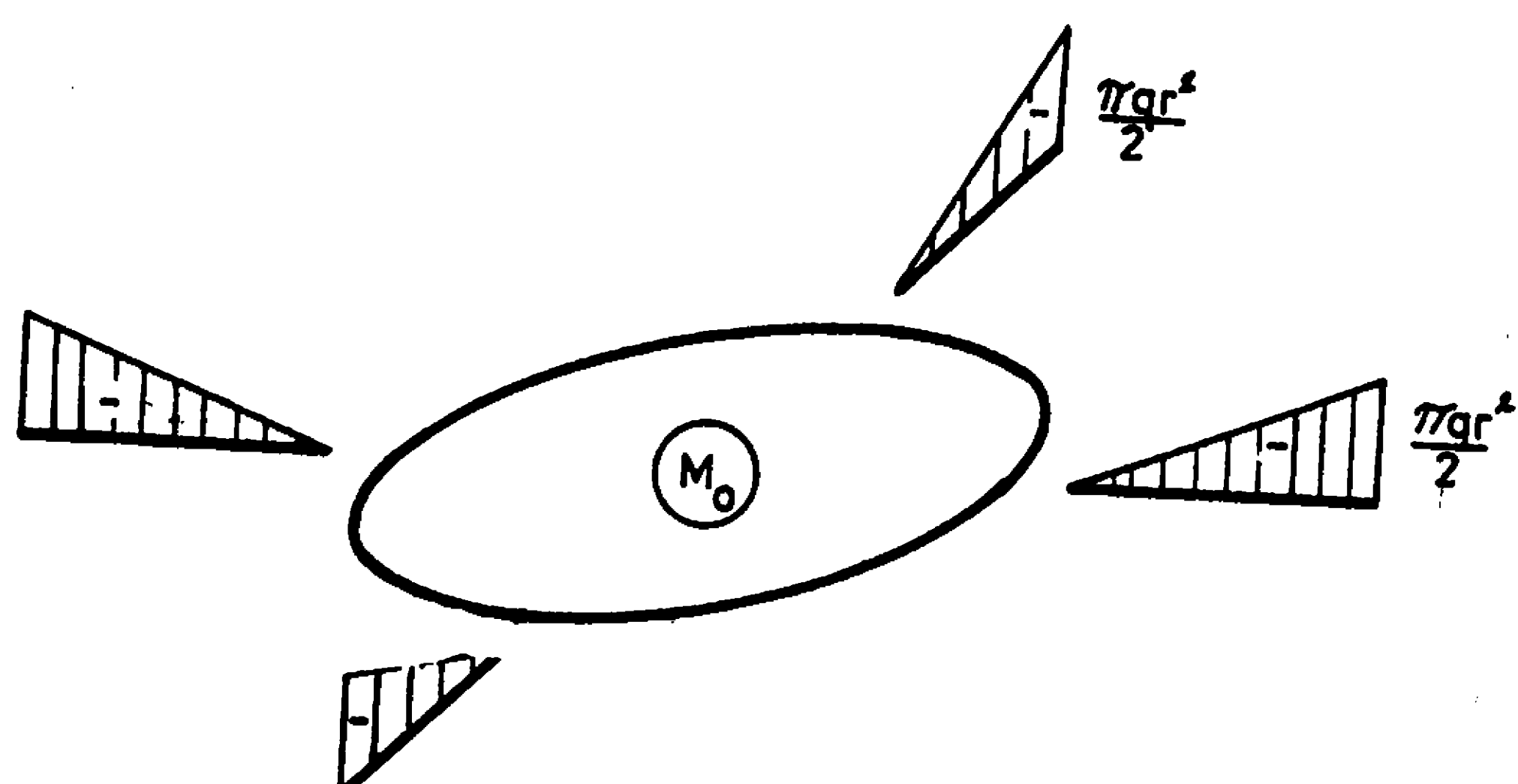
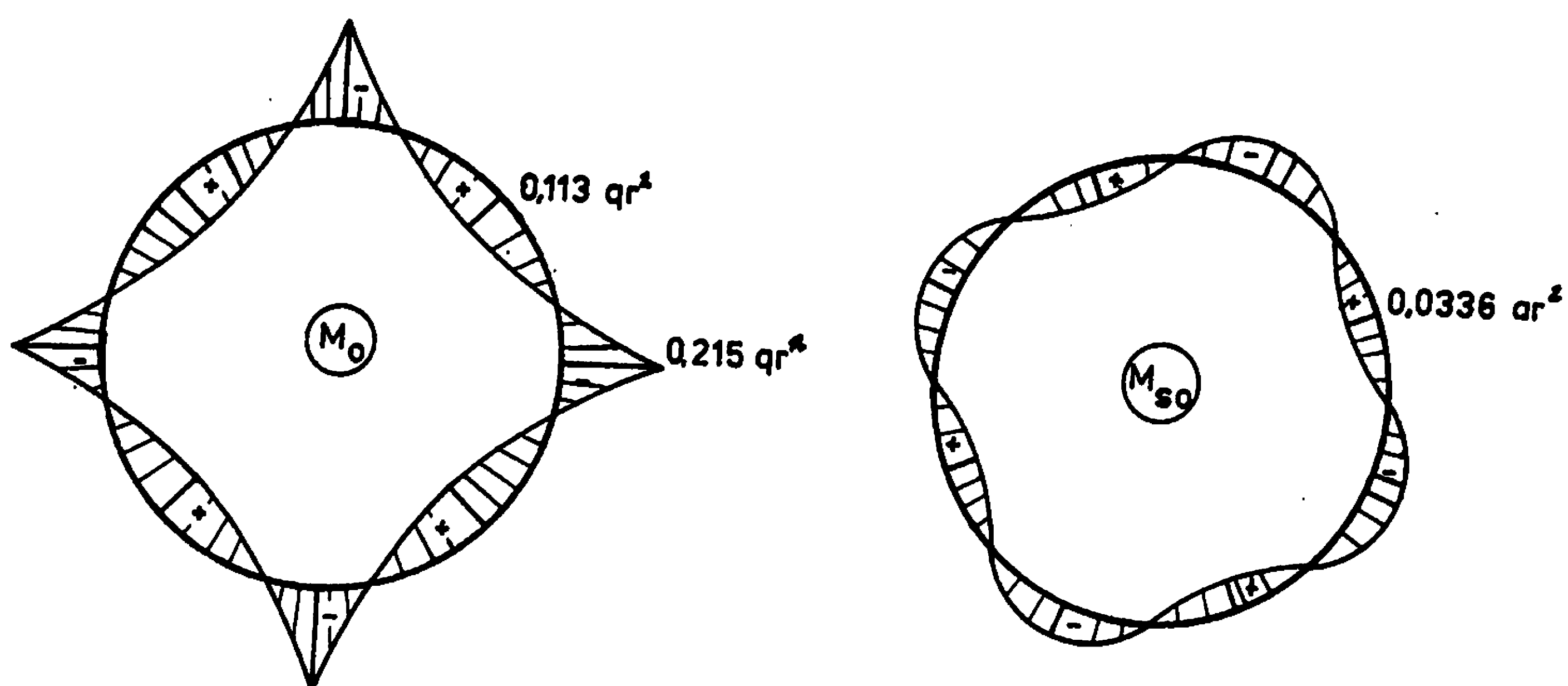
$$M_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha,$$

$$M_{s1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha.$$

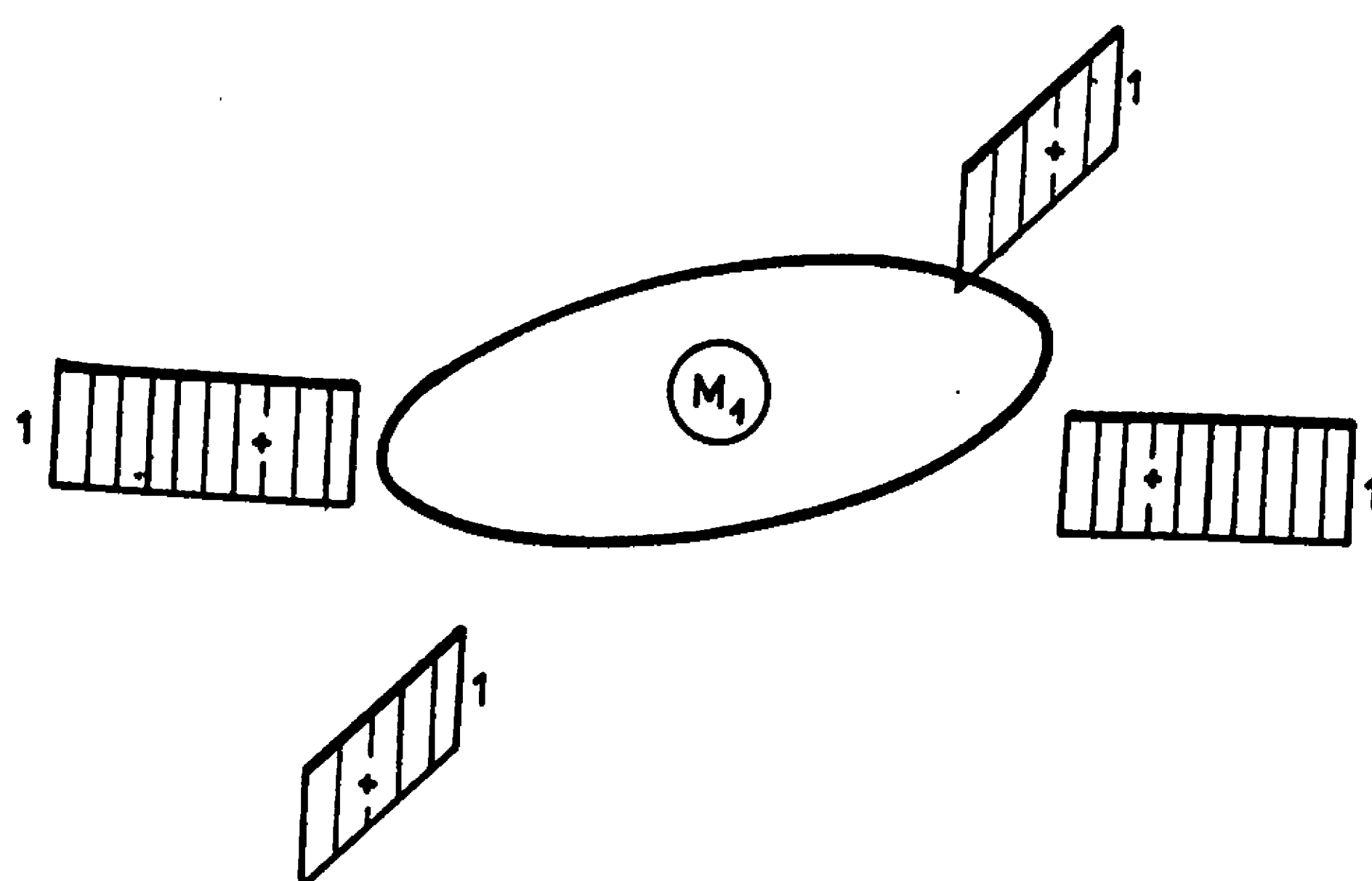
Wykres momentów M_1 , M_{s1} podano na rysunku 13.18.

Obliczmy współczynniki równania kanonicznego

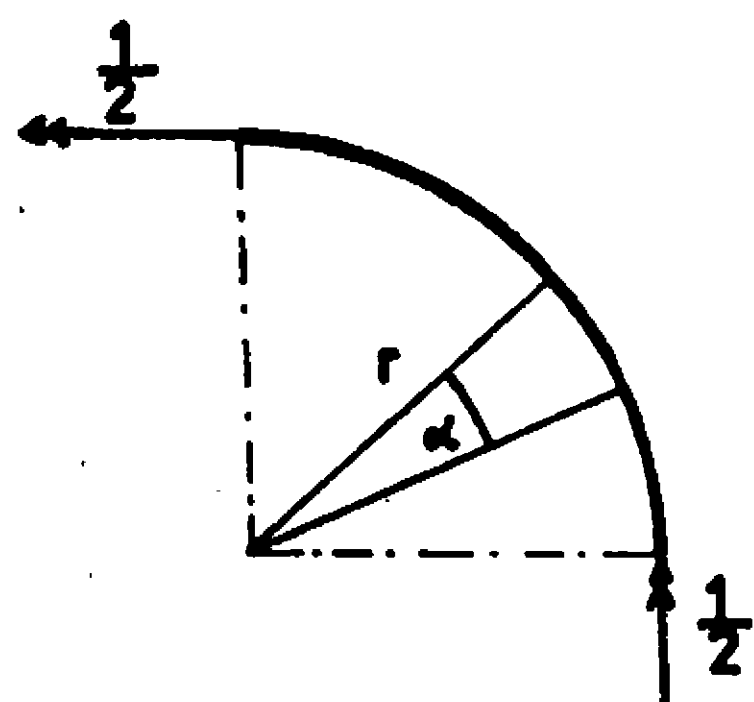
$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EJ} 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \, r d\alpha + \frac{1}{GC} 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \, r d\alpha + \frac{1 \cdot r \cdot 1 \cdot 4}{EJ} = \frac{\pi r}{EJ} + \\ &+ \frac{4r}{EJ} = \frac{7,14r}{EJ}, \end{aligned}$$



Rys. 13.15



Rys. 13.16



Rys. 13.17

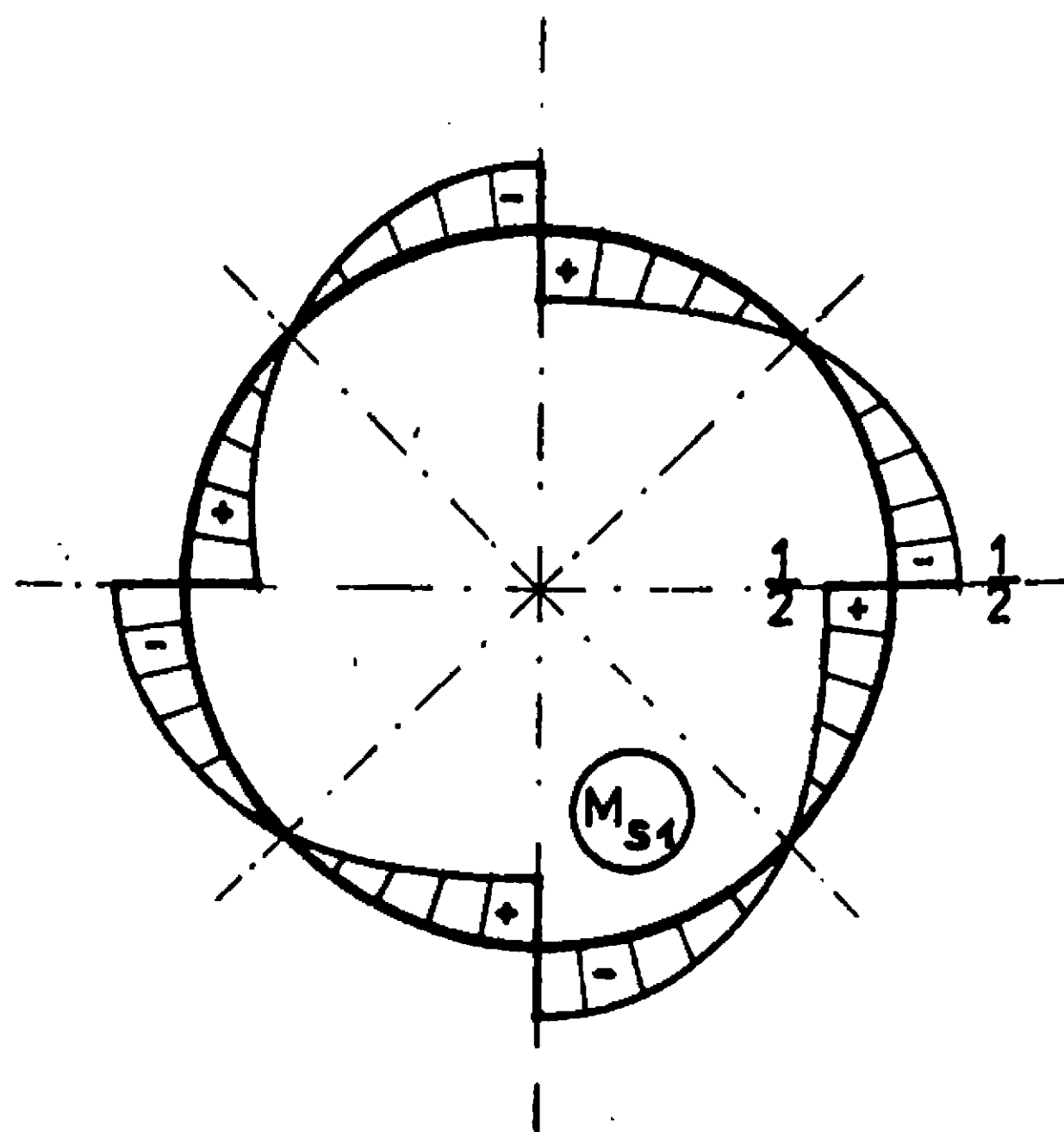
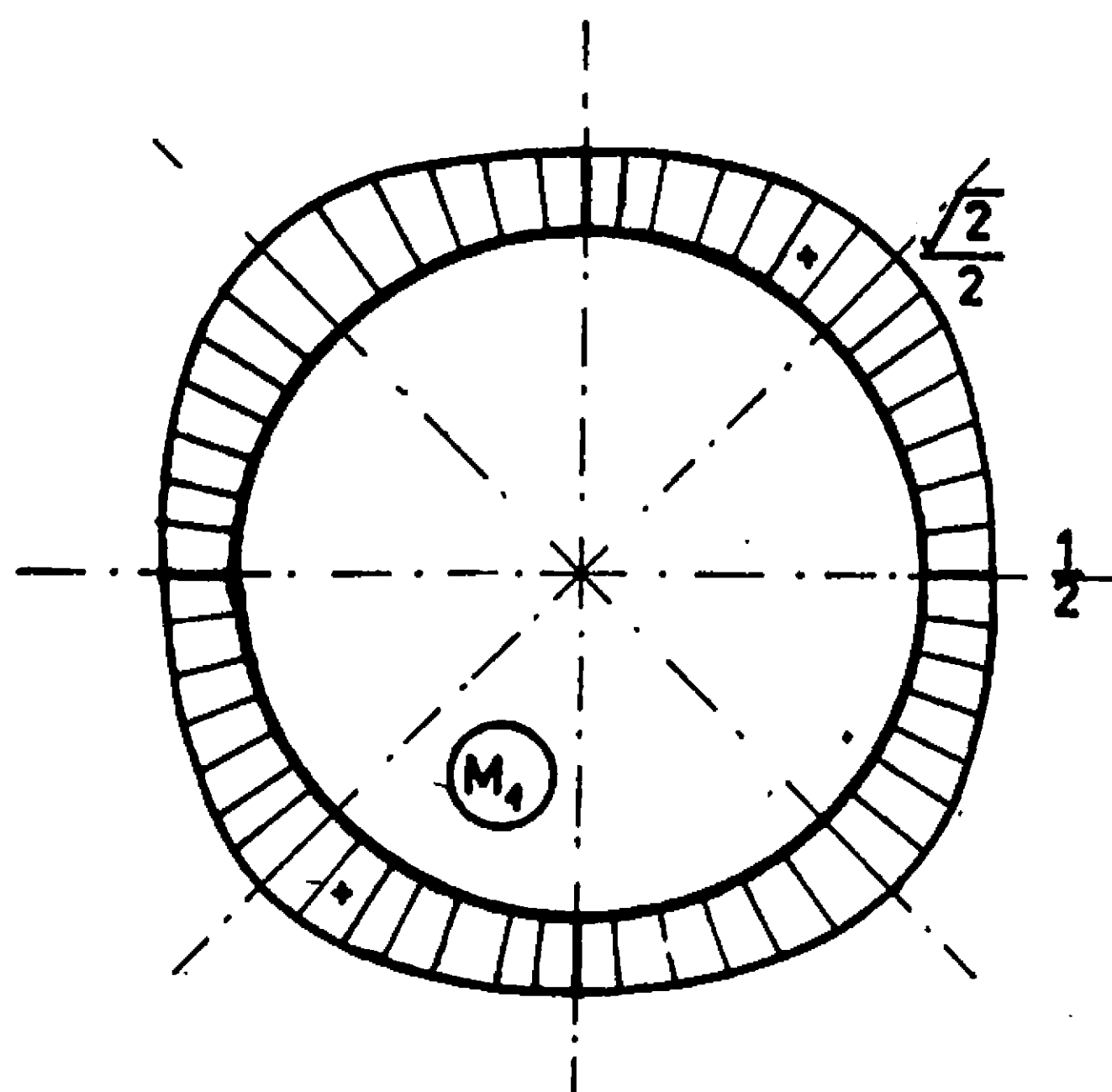
$$\begin{aligned}\delta_{10} &= \frac{1}{EJ} 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[-qr^2 \left(1 - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cos \alpha \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right] r d\alpha + \\ &+ \frac{1}{GC} 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[qr^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sin \alpha \right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right) \right] r d\alpha. \\ &- \frac{qr^2 \pi}{2EJ} \cdot \frac{r}{2} \cdot 1 \cdot 4 = - \frac{4qr^3}{EJ} \left(2 - \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{qr^3 \pi}{EJ} = \\ &= - \frac{3,0702}{EJ} qr^3.\end{aligned}$$

Z rozwiązania równania kanonicznego

$$X_1 \delta_{11} + \delta_{10} = 0,$$

otrzymamy

$$X_1 = - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = - \frac{-3,0702}{7,14} \frac{qr^2}{r} = 0,430 qr^2.$$



Rys. 13.18

Ze wzorów

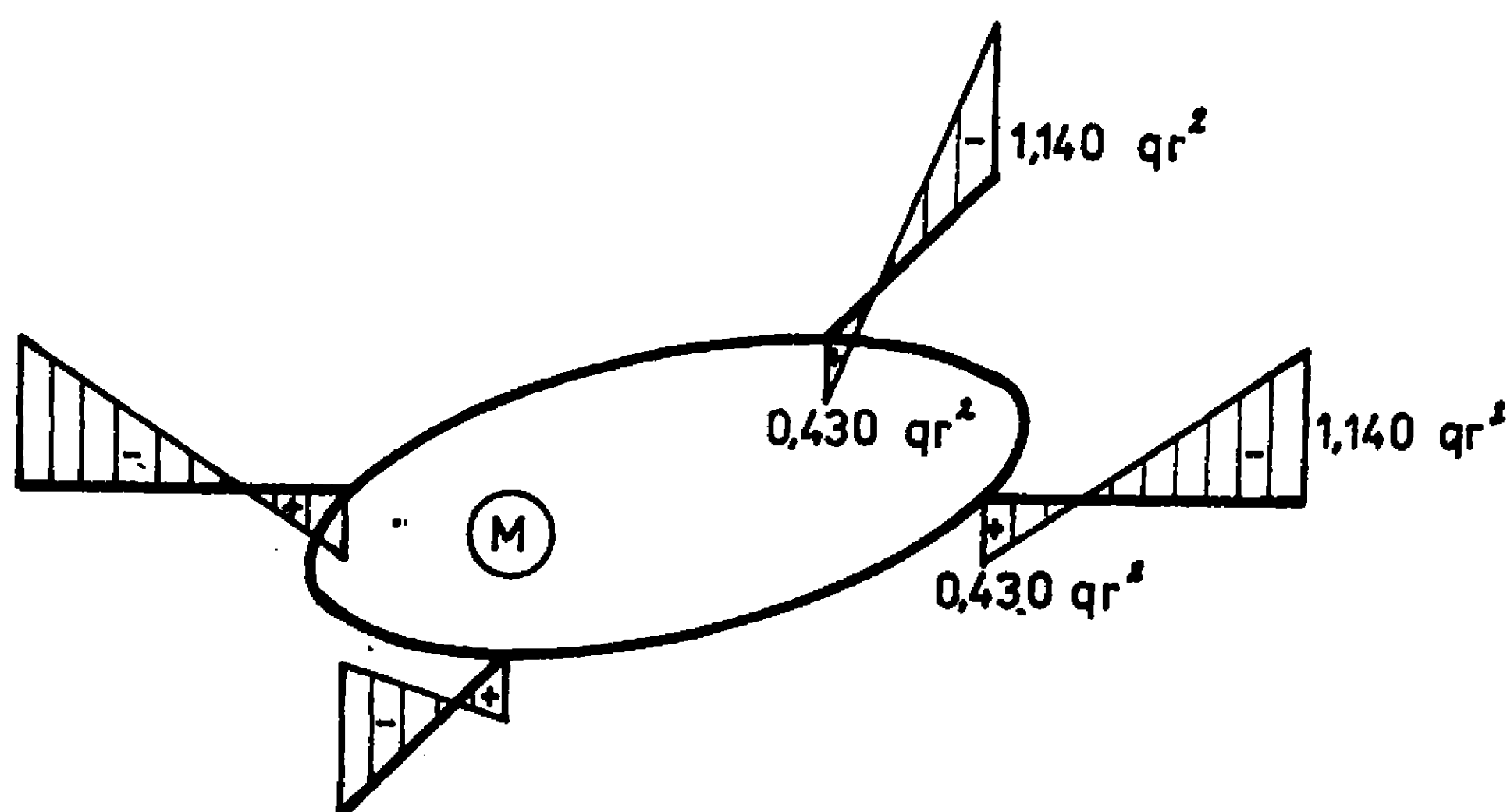
$$M = M_0 + M_1 X_1,$$

$$M_s = M_{s0} + M_{s1} X_1,$$

wyliczymy rzędne wykresów momentów zginających i skręcających.

Dla prętów prostoliniowych, wykres momentu zginającego podano na rysunku 13.19. Natomiast dla pręta kołowego równania momentów M , M_s mają postać:

$$\begin{aligned} M &= qr^2 \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cos \alpha - 1 \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} 0,430 qr^2 \cos \alpha = \\ &= qr^2 (1,4142 \cos \alpha - 1), \end{aligned}$$



Rys. 13.19

$$\begin{aligned} M_s &= qr^2 \left(-\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sin \alpha + \alpha \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} 0,430 qr^2 \sin \alpha = \\ &= qr^2 (\alpha - 1,4142 \sin \alpha); \end{aligned}$$

dla $\alpha = 0$ mamy

$$M = 0,4142 qr^2,$$

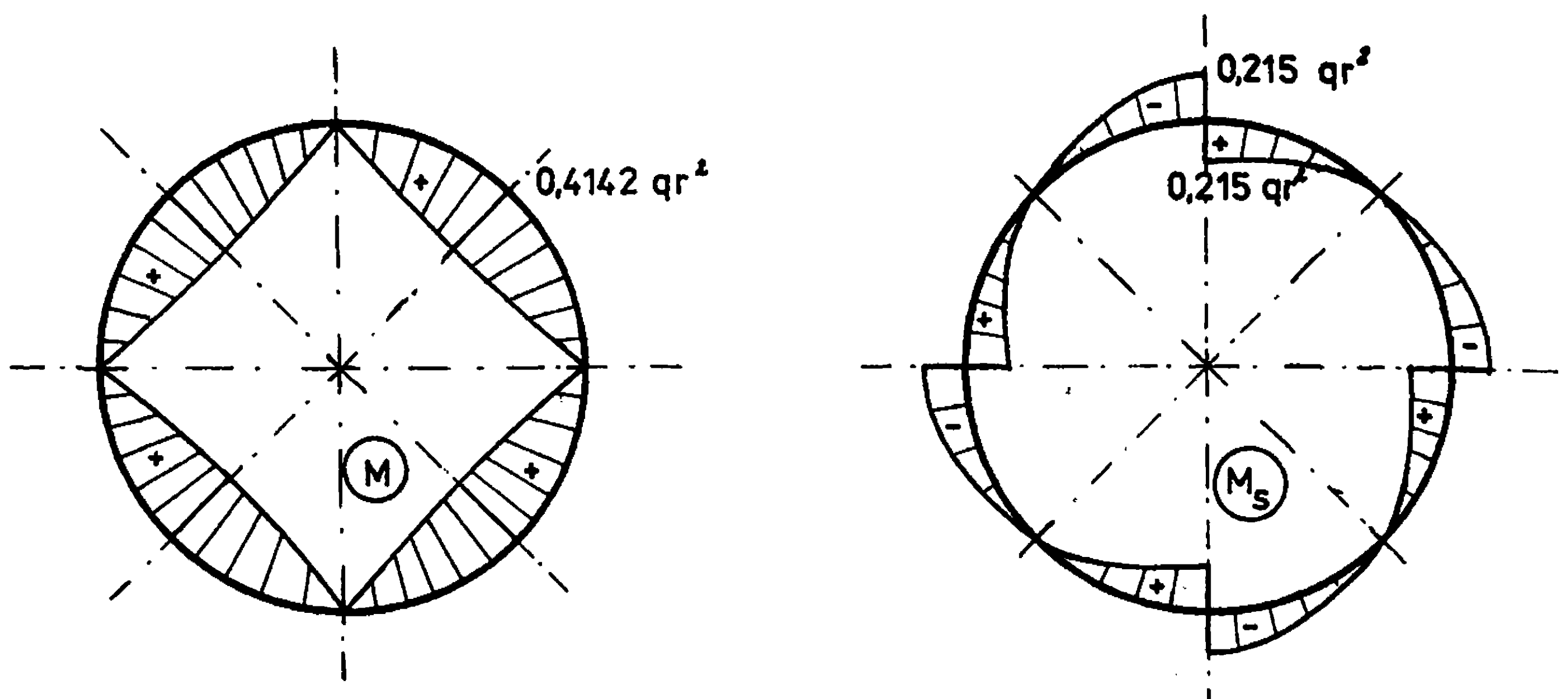
$$M_s = 0;$$

natomiast dla $\alpha = \frac{\pi}{4}$ otrzymujemy

$$M = 0,$$

$$M_s = -0,2150 qr^2.$$

Wykresy momentów M , M_s dla pręta kołowego podano na rysunku 13.20.

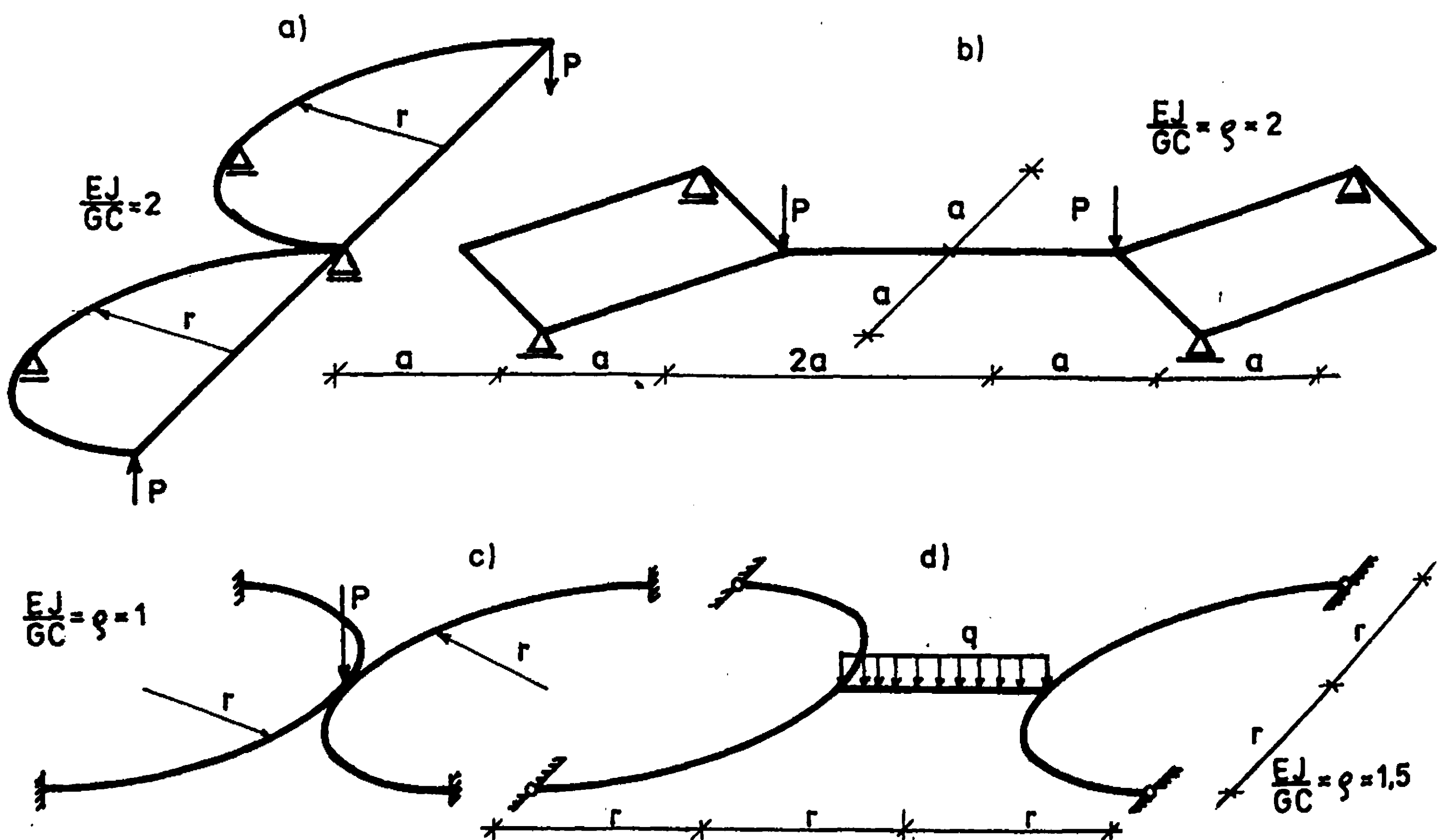


Rys. 13.20

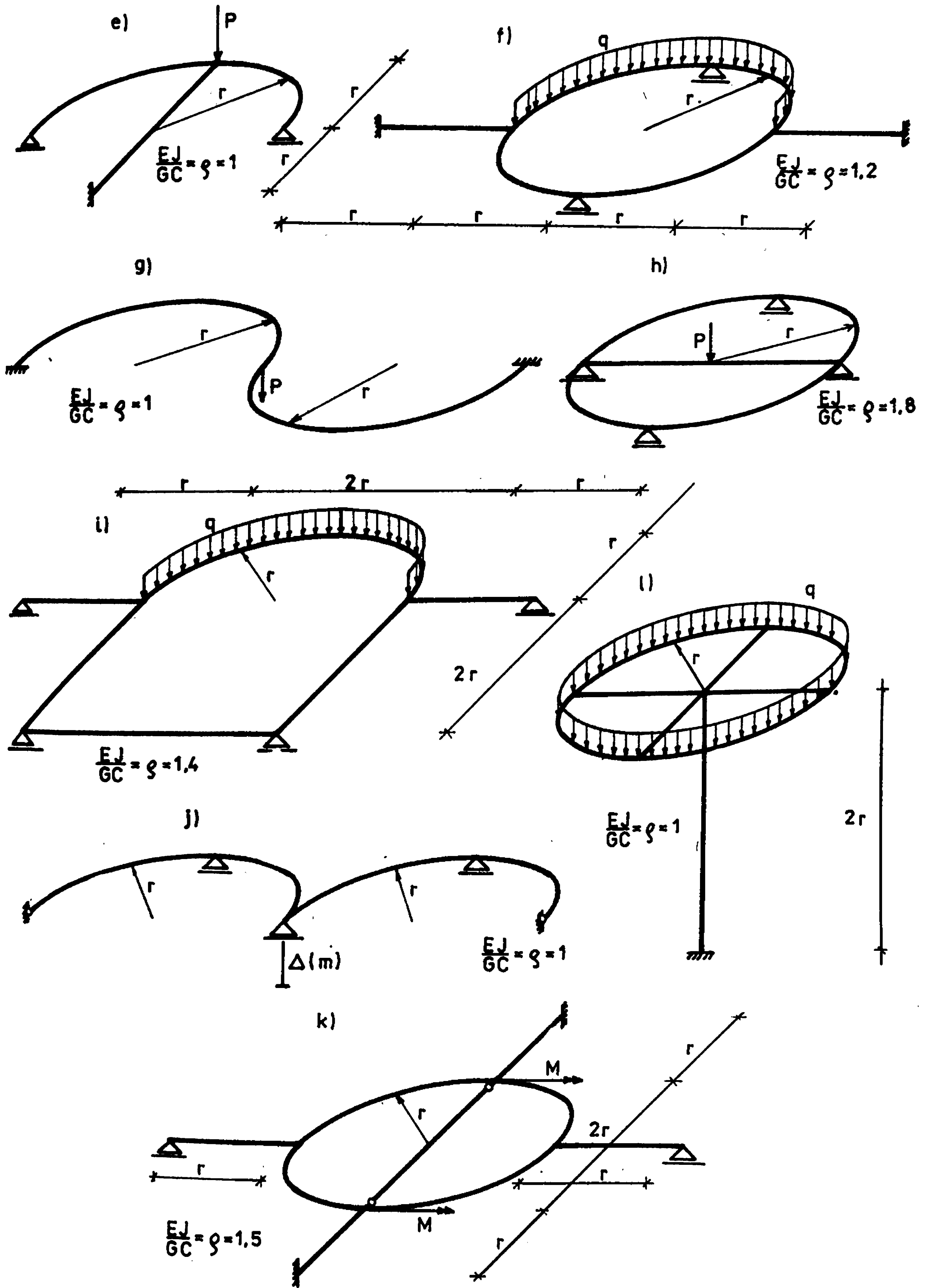
Zadanie 13.4

Dla podanych układów zakrzywionych w płanie przy danym obciążeniu sporządzić wykresy momentów zginających i skręcających ($EJ = \text{const}$, $GC = \text{const}$).

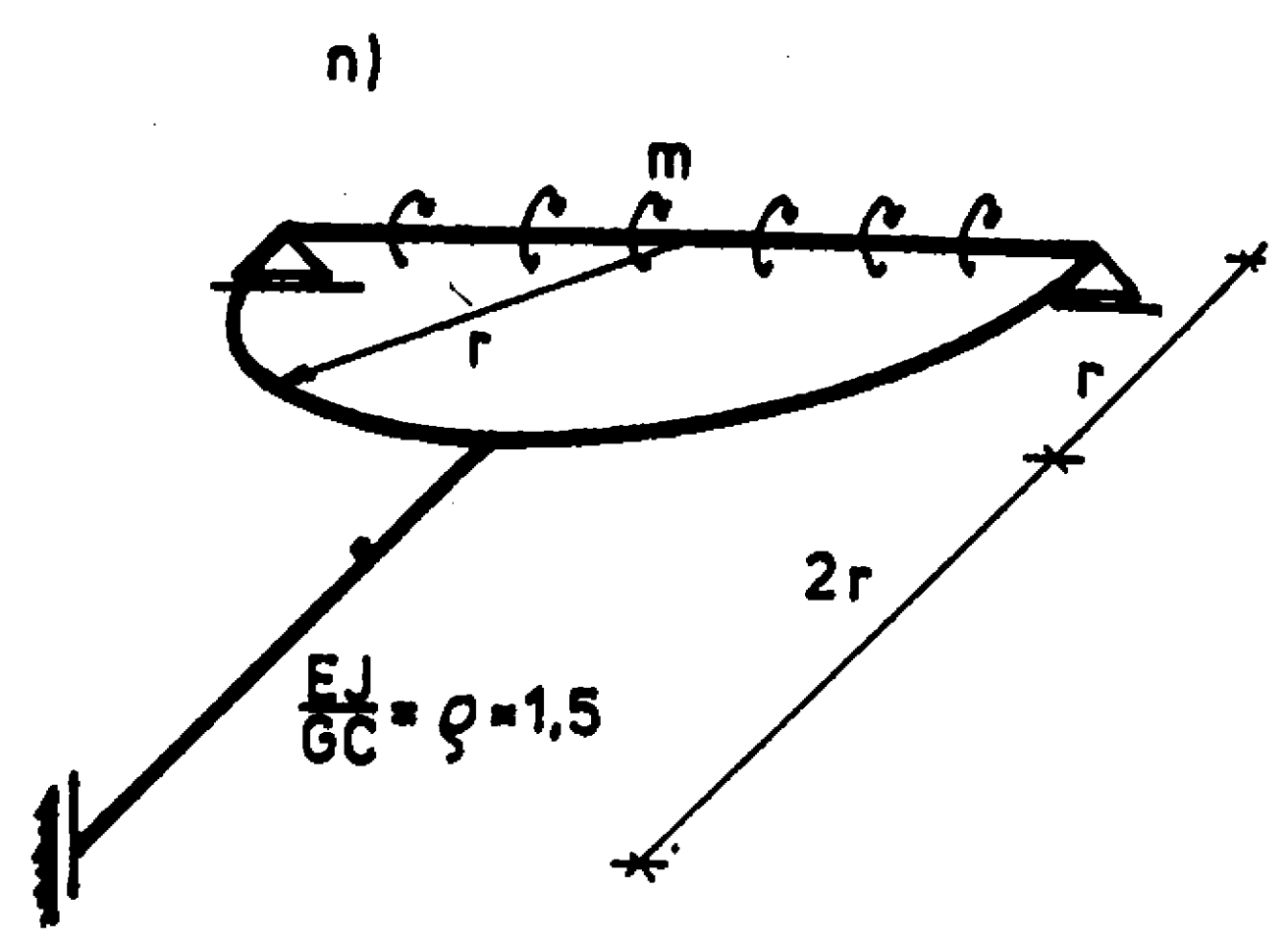
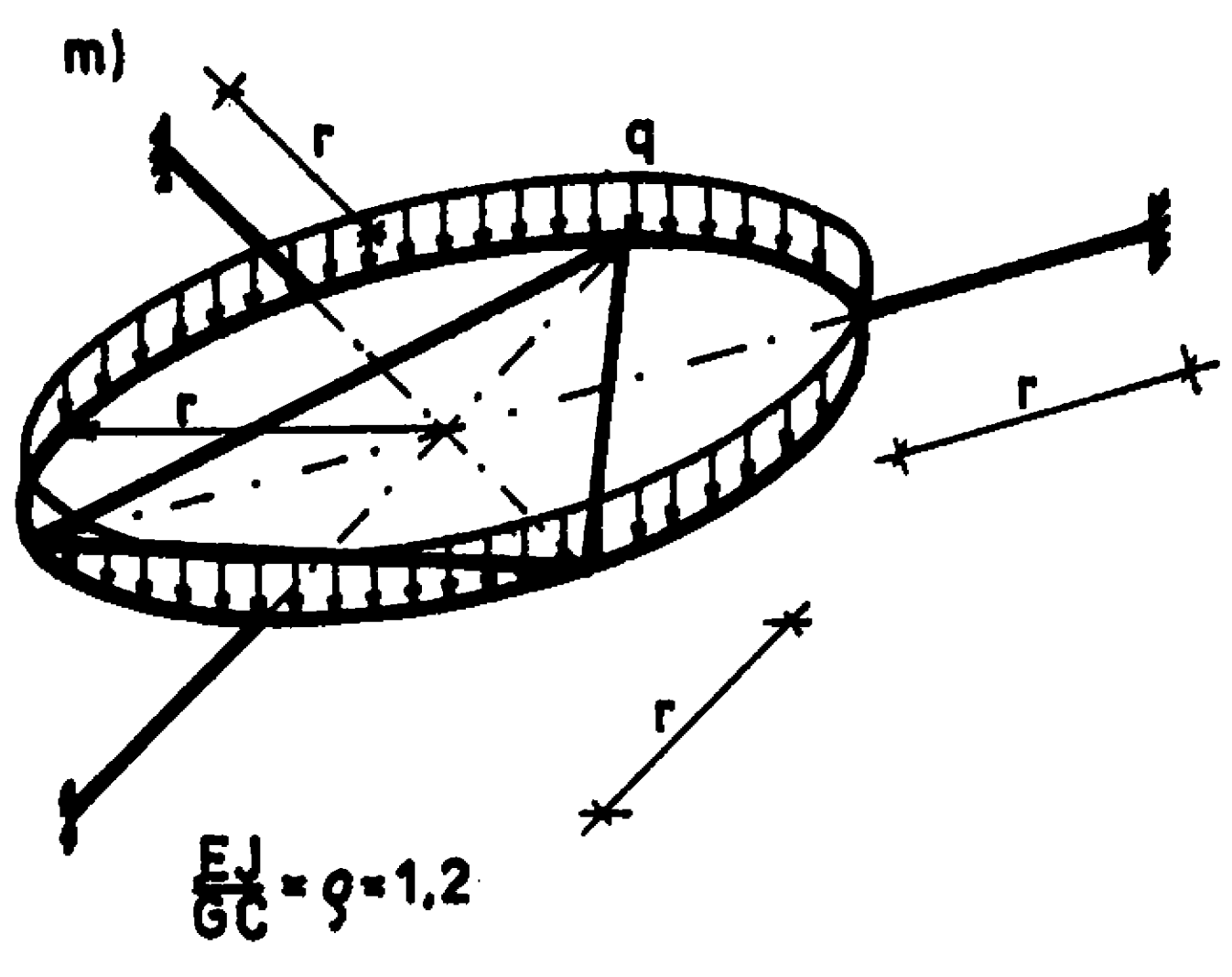
Rozwiązanie - samodzielne.



Rys. 13.21a-d



Rys. 13.21e-1

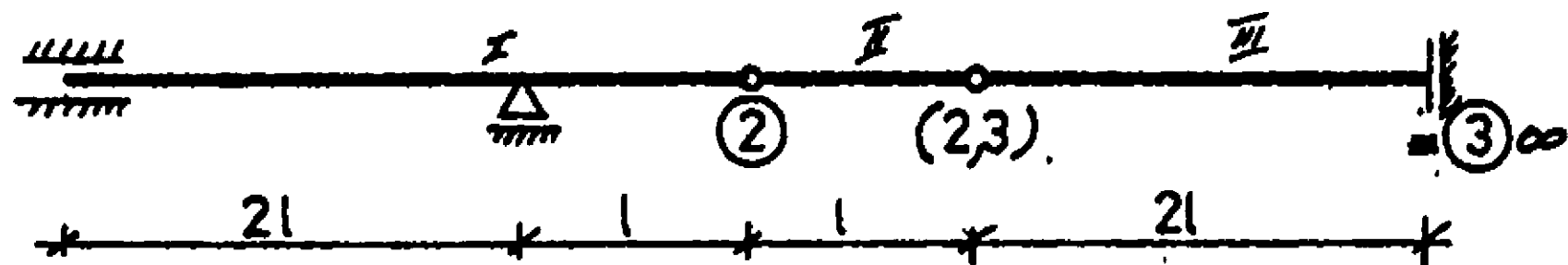


Rys. 13.21m-n

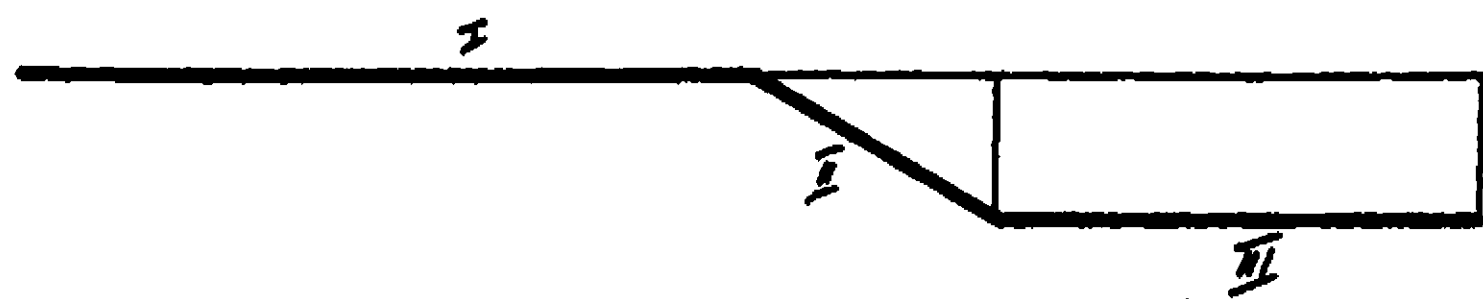
14. ODPOWIEDZI DO ZADAŃ

Zadanie 1.4

Odpowiedź do rysunku 16a: $\gamma = 0$. Biegun względny (23) leży na prostej łączącej bieguny główne tarcz 2 i 3 (rys. 14.1). W planie biegunów otrzymaliśmy zgodność, stąd układ jest geometrycznie zmienny. Plan przemieszczeń przedstawiono na rysunku 14.2.



Rys. 14.1



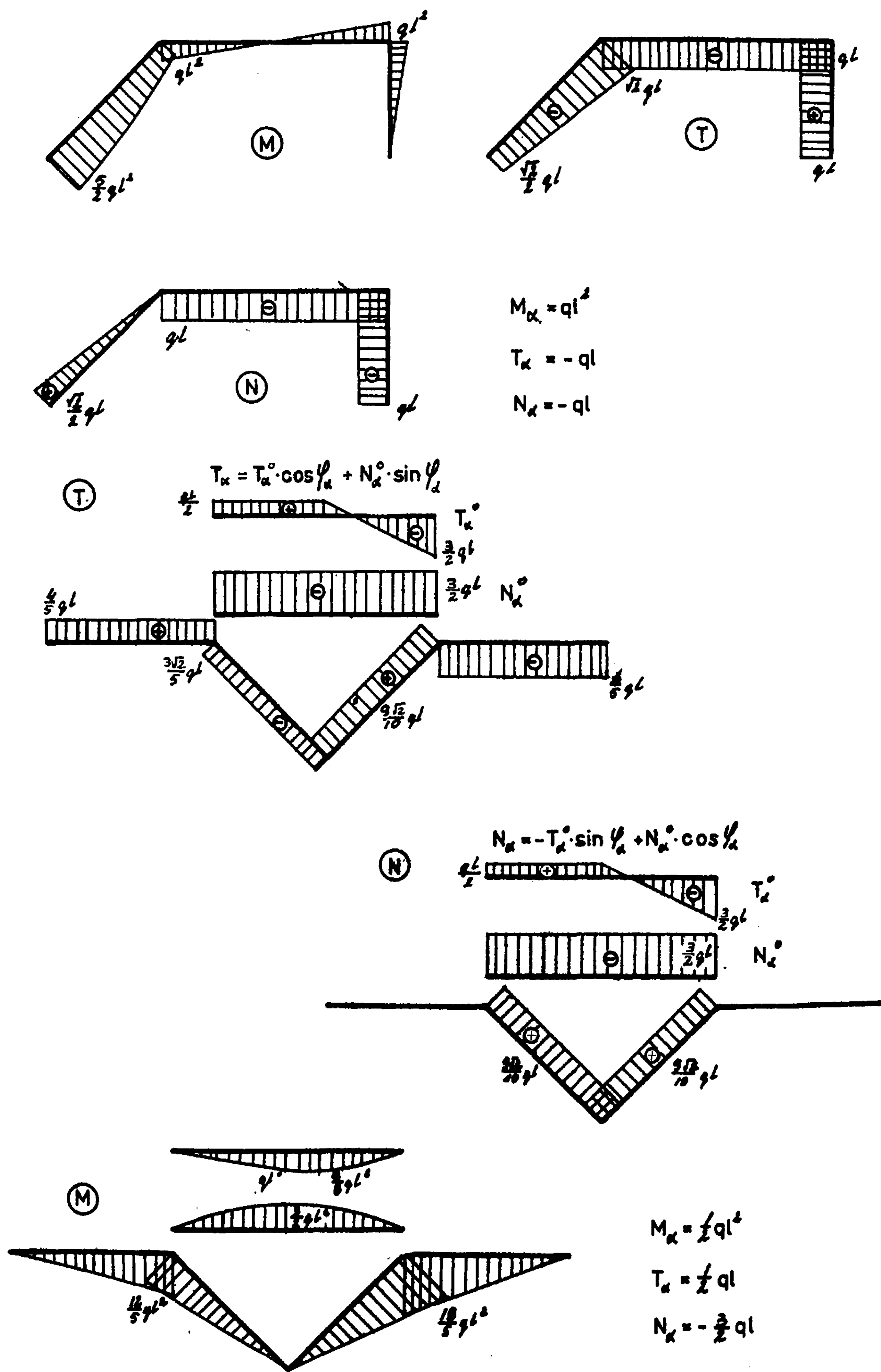
Rys. 14.2

Odpowiedź do rysunku 1.6b: $\gamma = 0$, układ jest geometrycznie niezmienny.

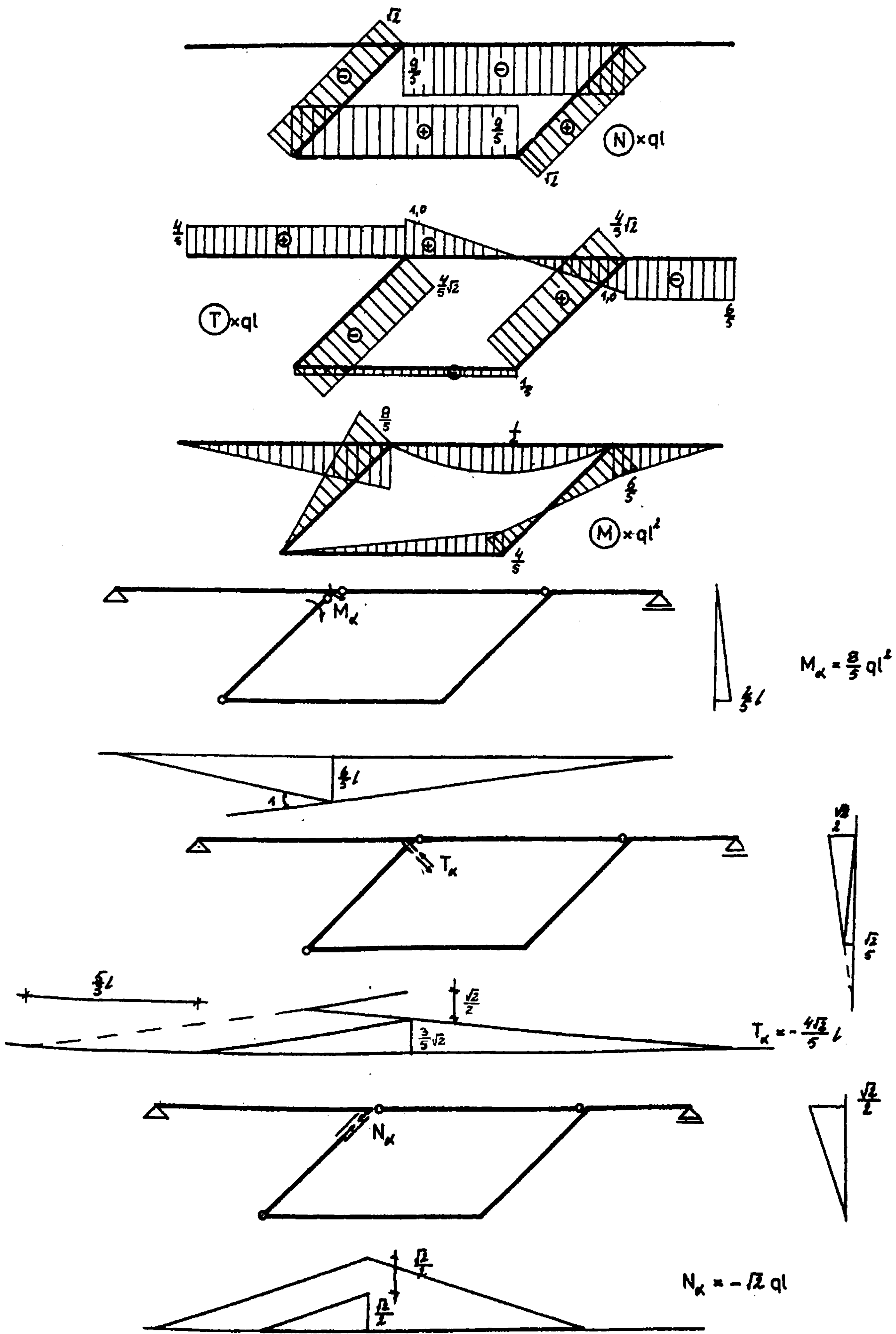
Odpowiedź do rysunku 1.6c: $\gamma = 0$, układ jest geometrycznie zmienny.

Zadanie 2.4

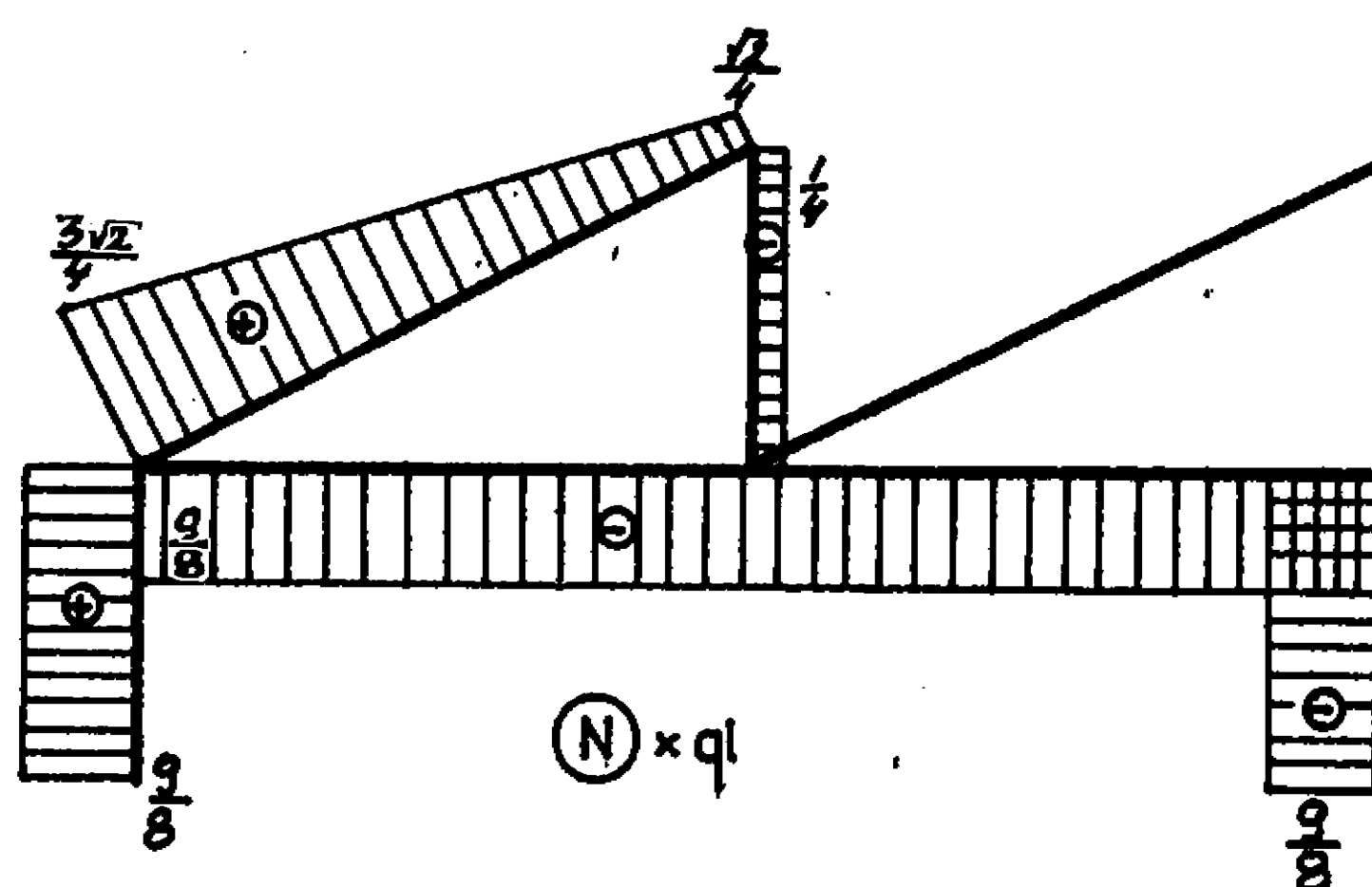
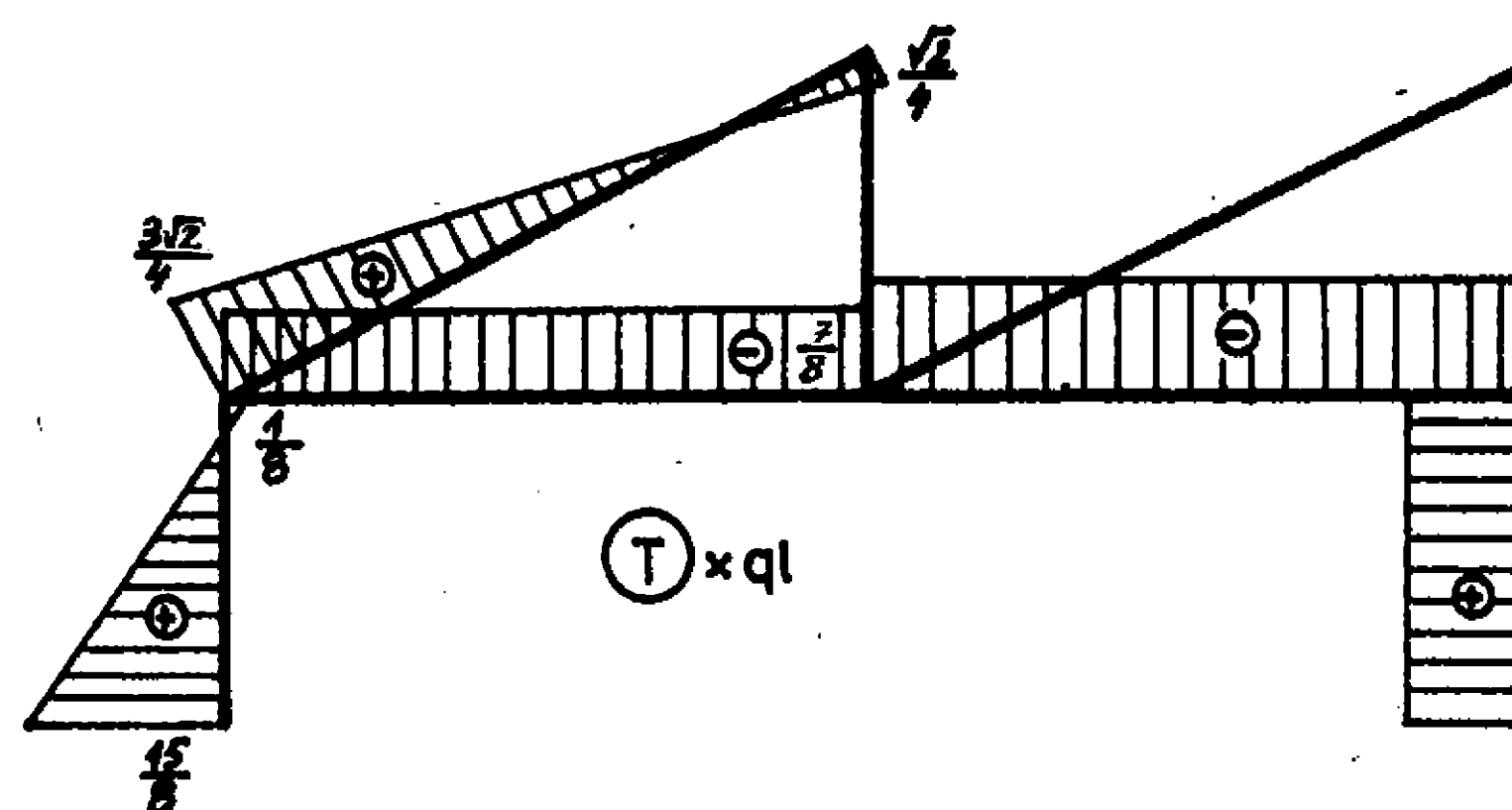
Odpowiedzi do zadań przedstawionych na rysunkach 2.7a-f pokazano na rysunkach 14.3a-f.



Rys. 14.3a-b

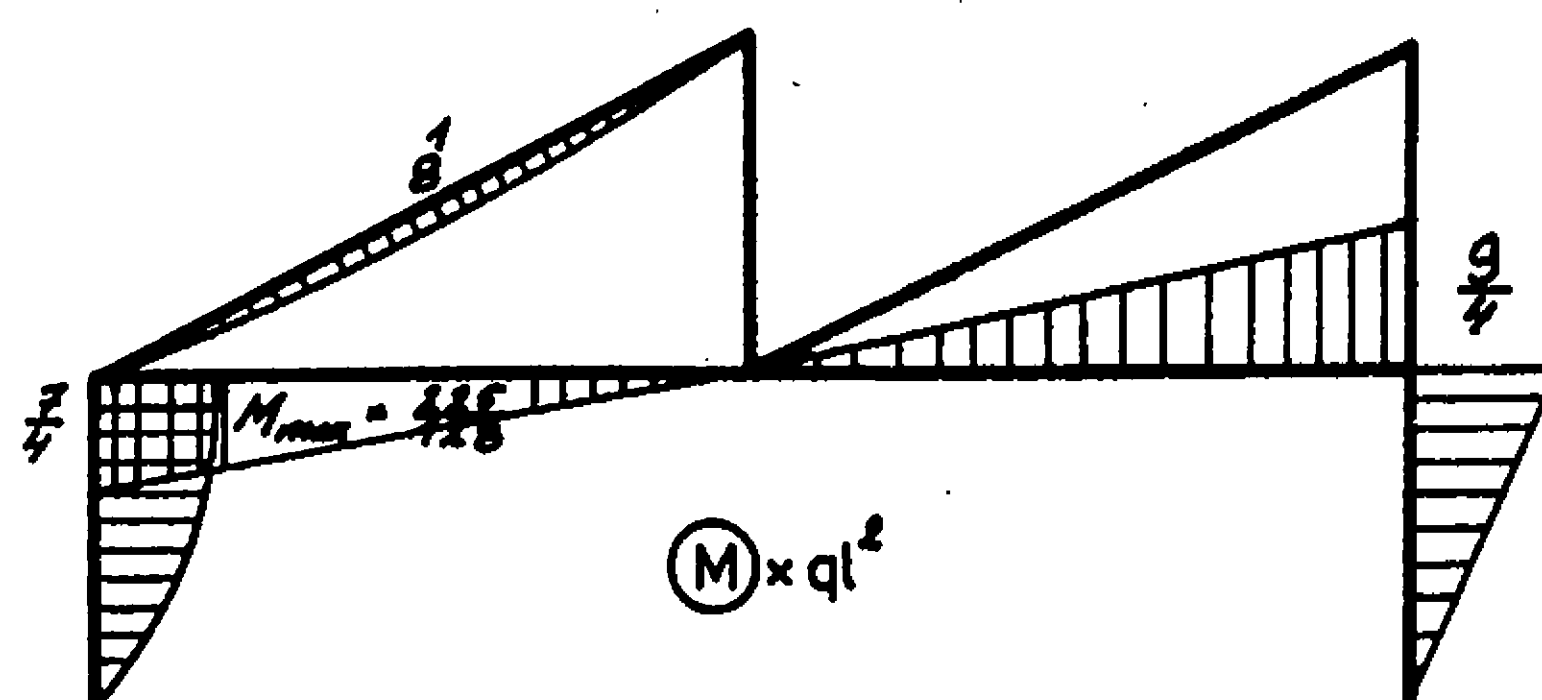


Rys. 14.3c

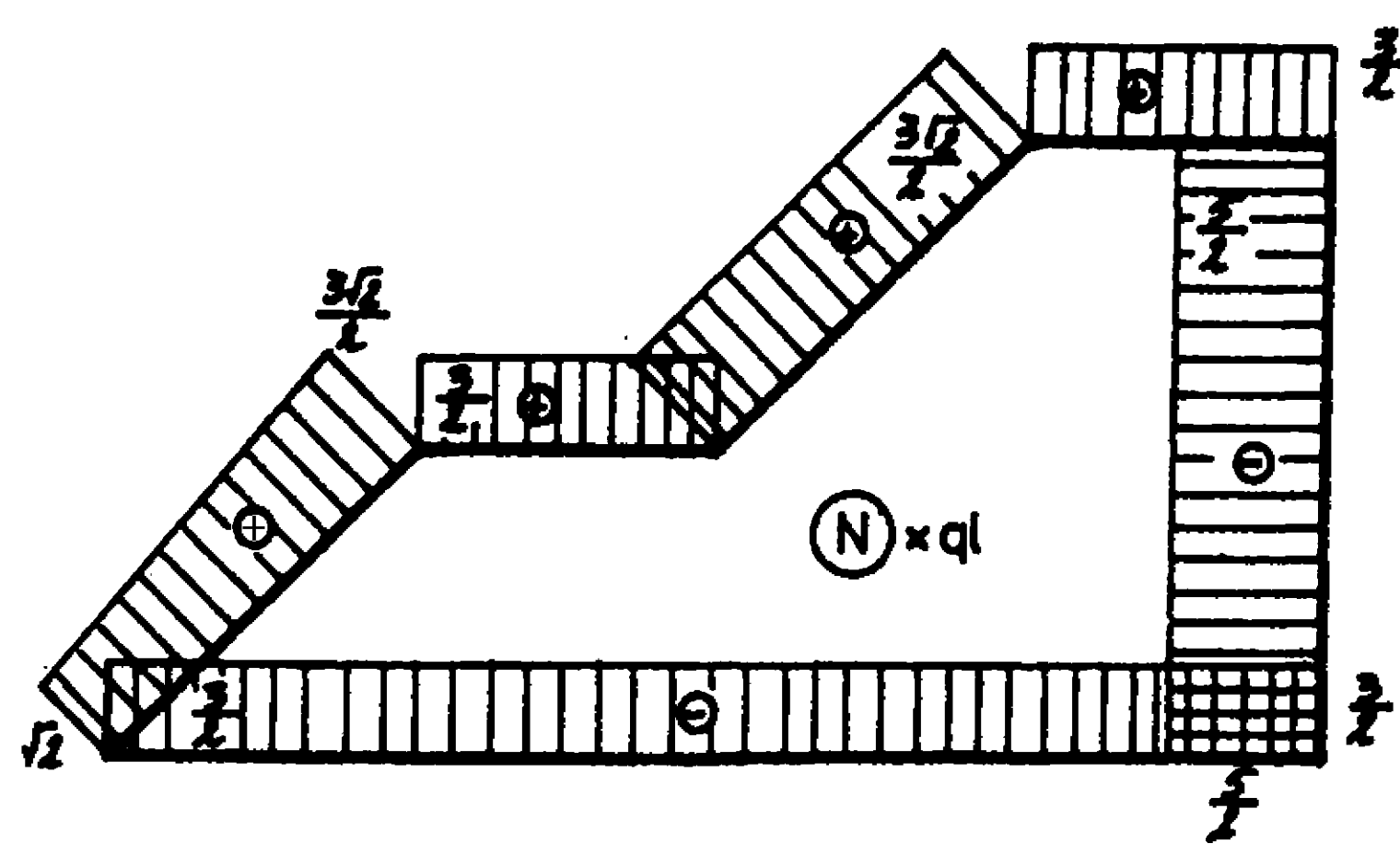
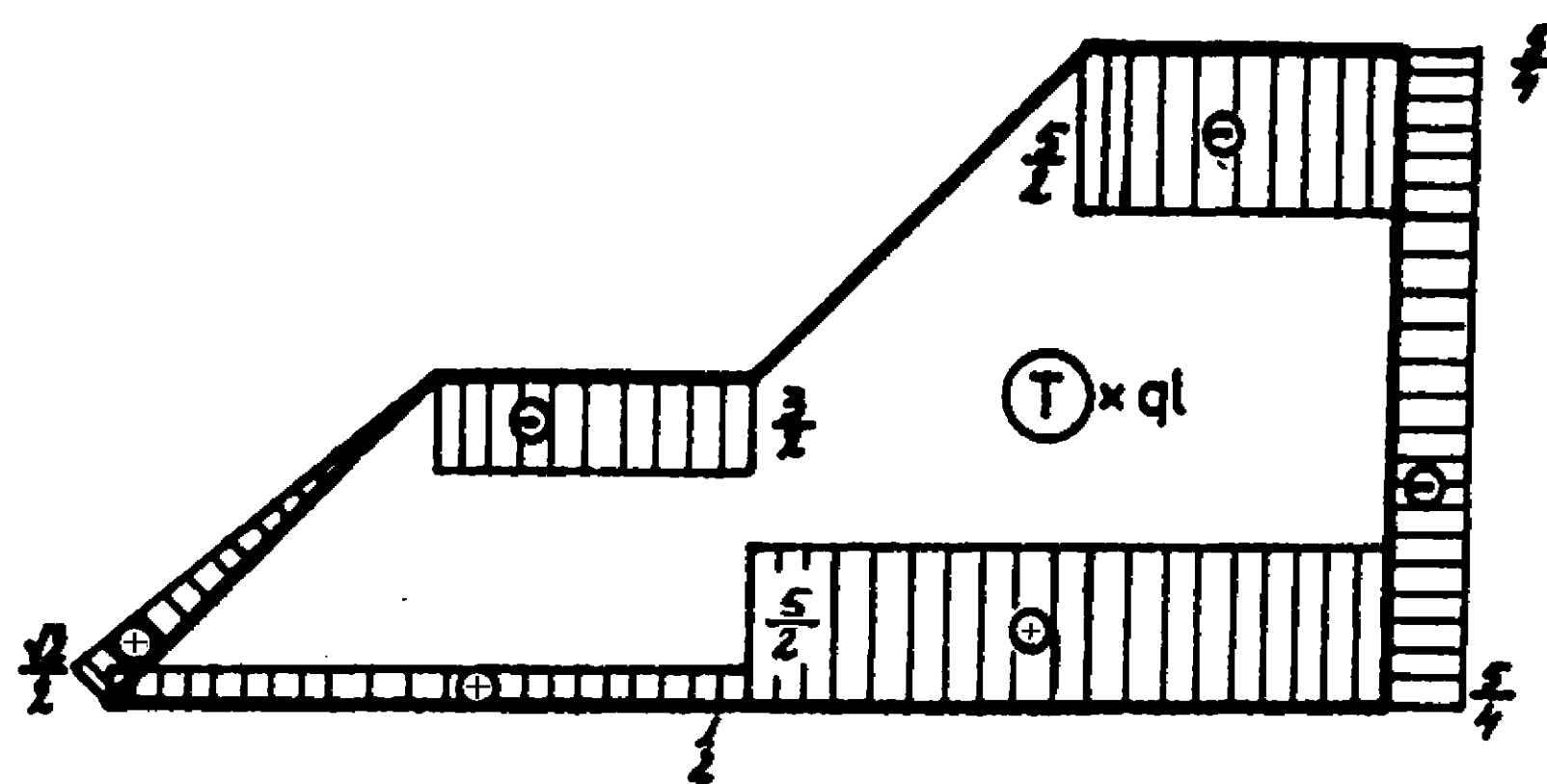


$$M_A = \frac{9}{4} ql^2 \quad T_A = \frac{9}{8} ql \quad N_A = -\frac{9}{8} ql$$

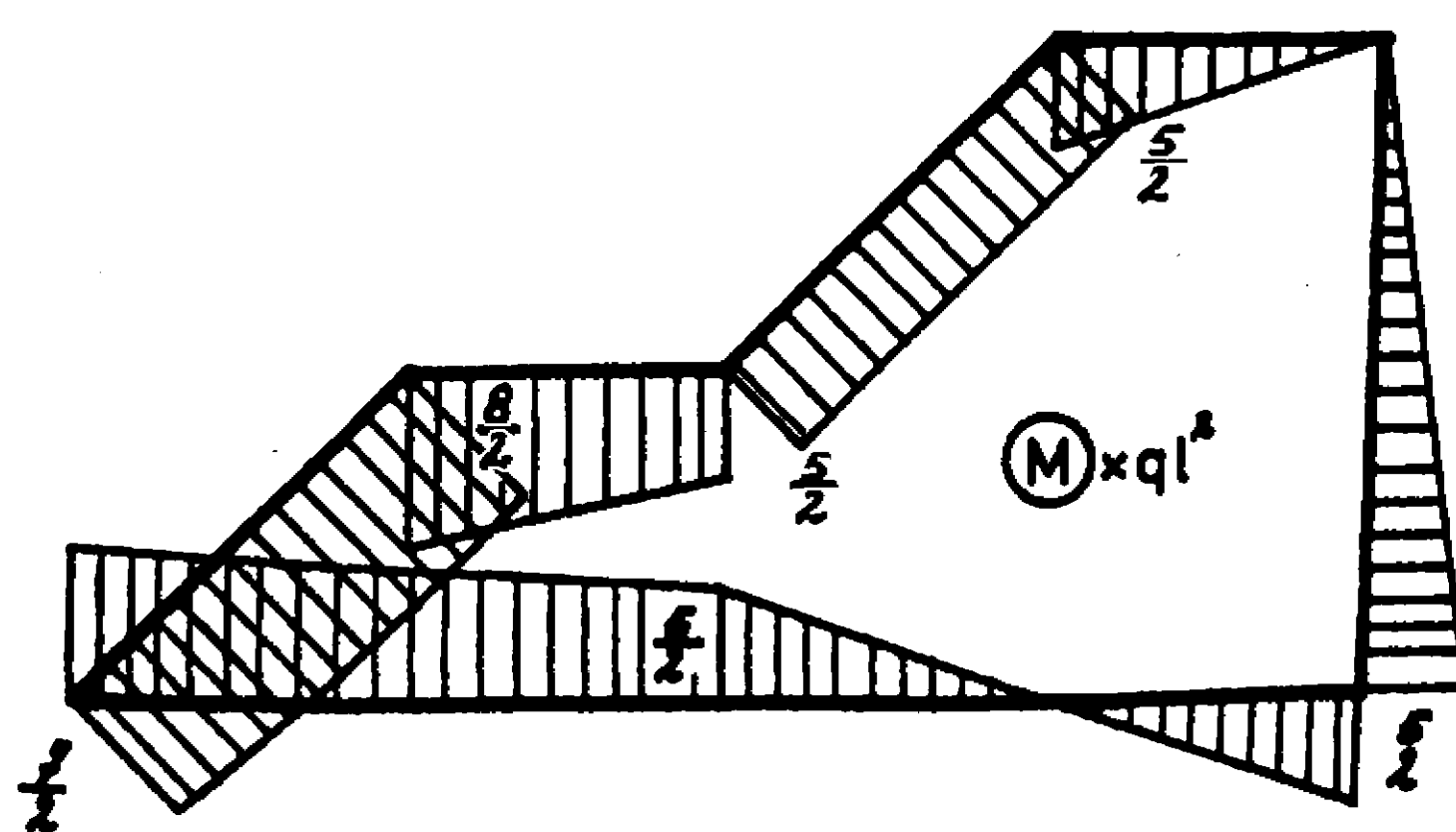
$$M_B = \frac{9}{4} ql^2 \quad T_B = -\frac{9}{8} ql \quad N_B = -\frac{9}{8} ql$$



Rys. 14.3d

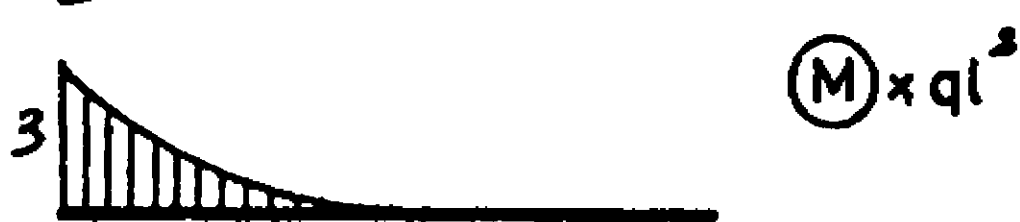
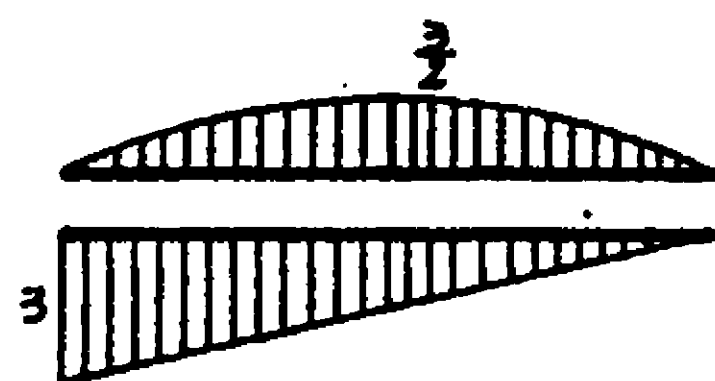
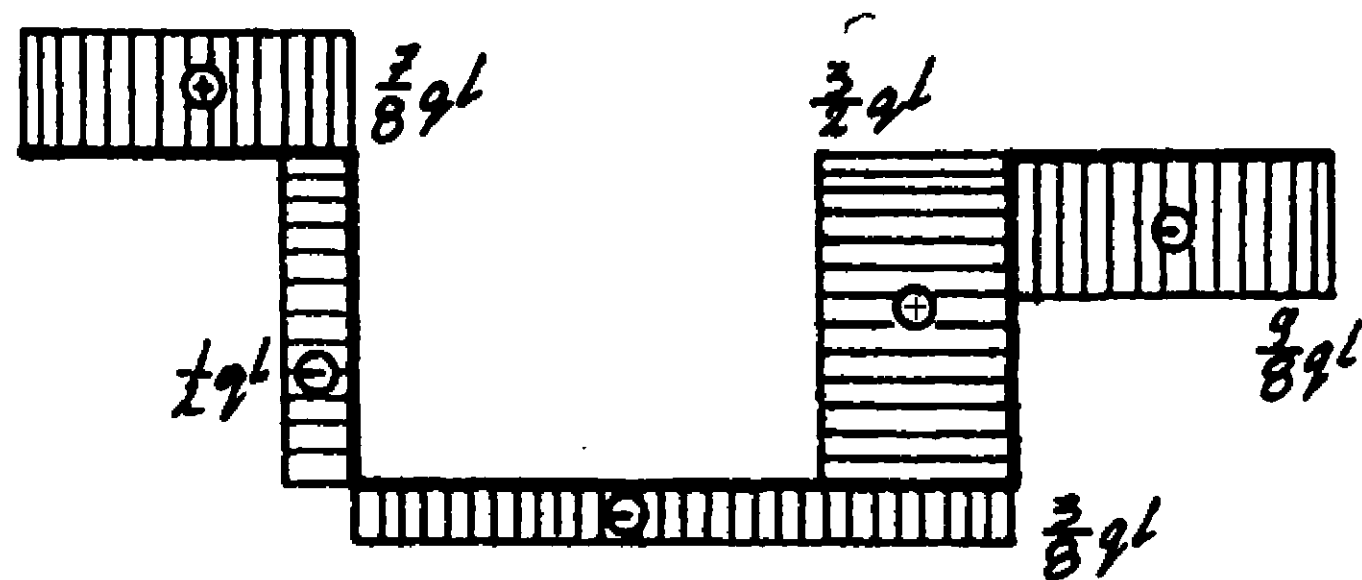
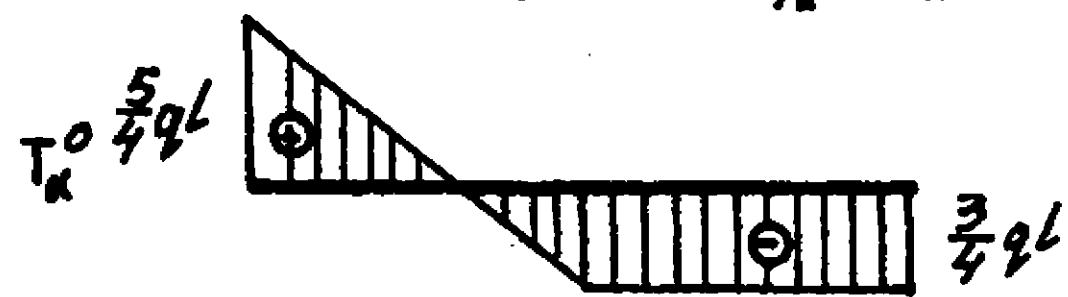


$$M_{\alpha} = \frac{5}{2}ql^2 \quad T_{\alpha} = 0 \quad N_{\alpha} = 3\frac{\sqrt{2}}{2}ql$$

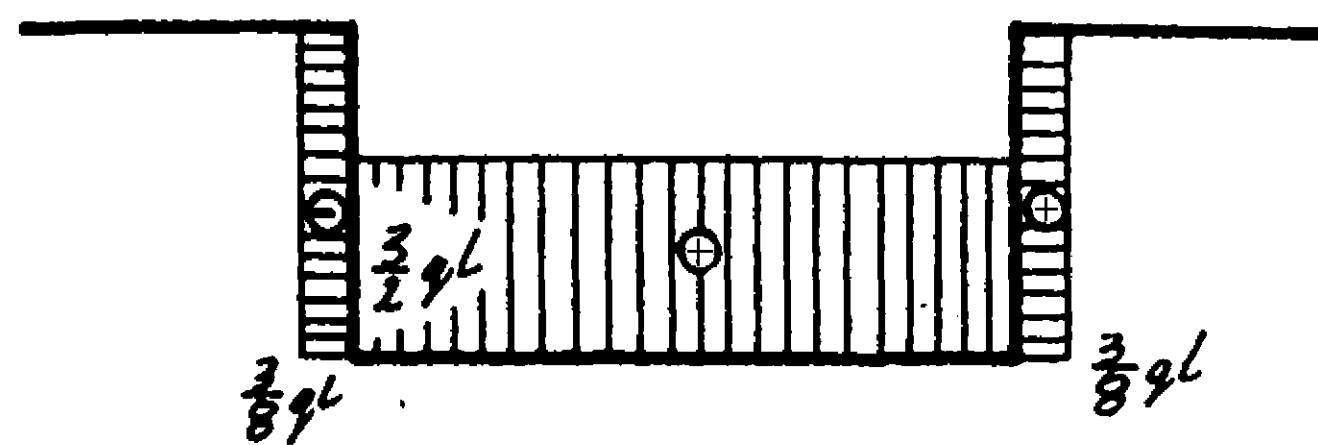
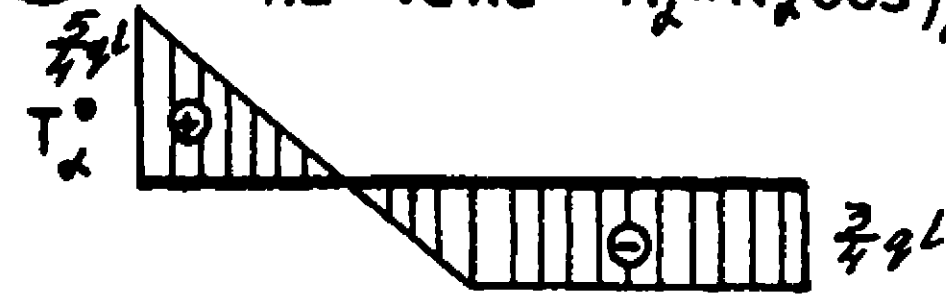


Rys. 14.3e

Ⓓ na łuku $T_{\alpha} = T_{\alpha}^{\circ} \cos \varphi_{\alpha} + N_{\alpha}^{\circ} \sin \varphi_{\alpha}$



Ⓔ na łuku $N_{\alpha} = N_{\alpha}^{\circ} \cos \varphi_{\alpha} - T_{\alpha}^{\circ} \sin \varphi_{\alpha}$

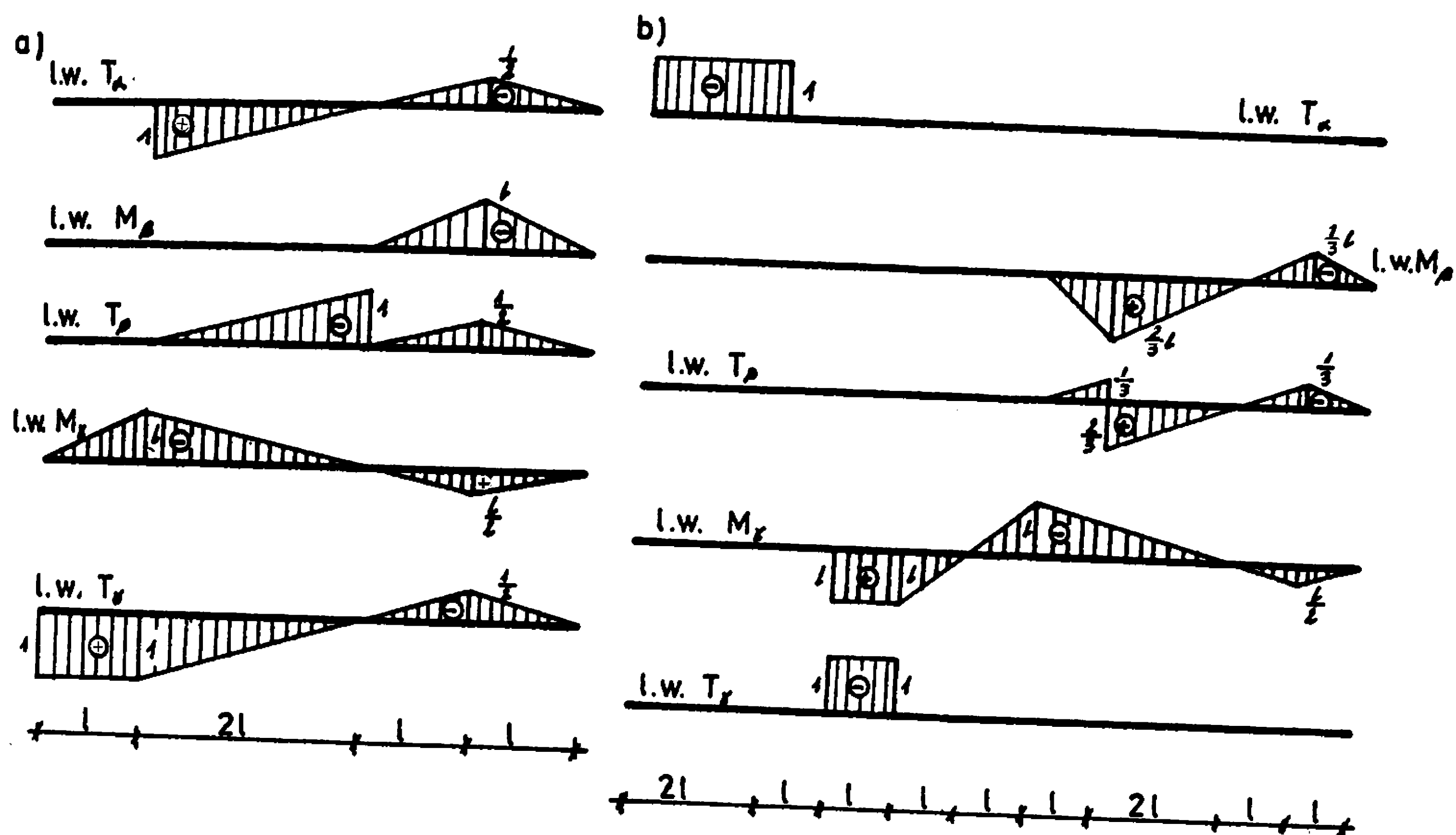


$$M_{\alpha} = \frac{7}{8} ql^2 \quad T_{\alpha} = -\frac{1}{2} ql \quad N_{\alpha} = -\frac{3}{8} ql$$

Rys. 14.3f

Zadanie 3.7

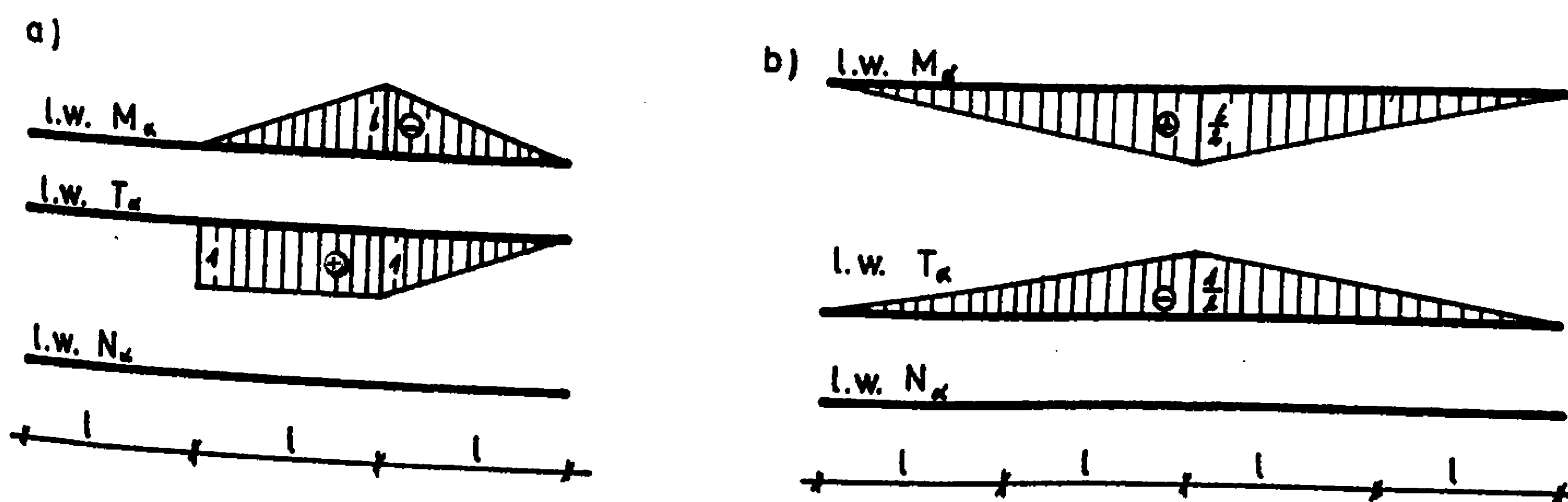
Odpowiedzi do zadań przedstawionych na rysunkach 3.27a-b stanowią rysunki 14.4a-b



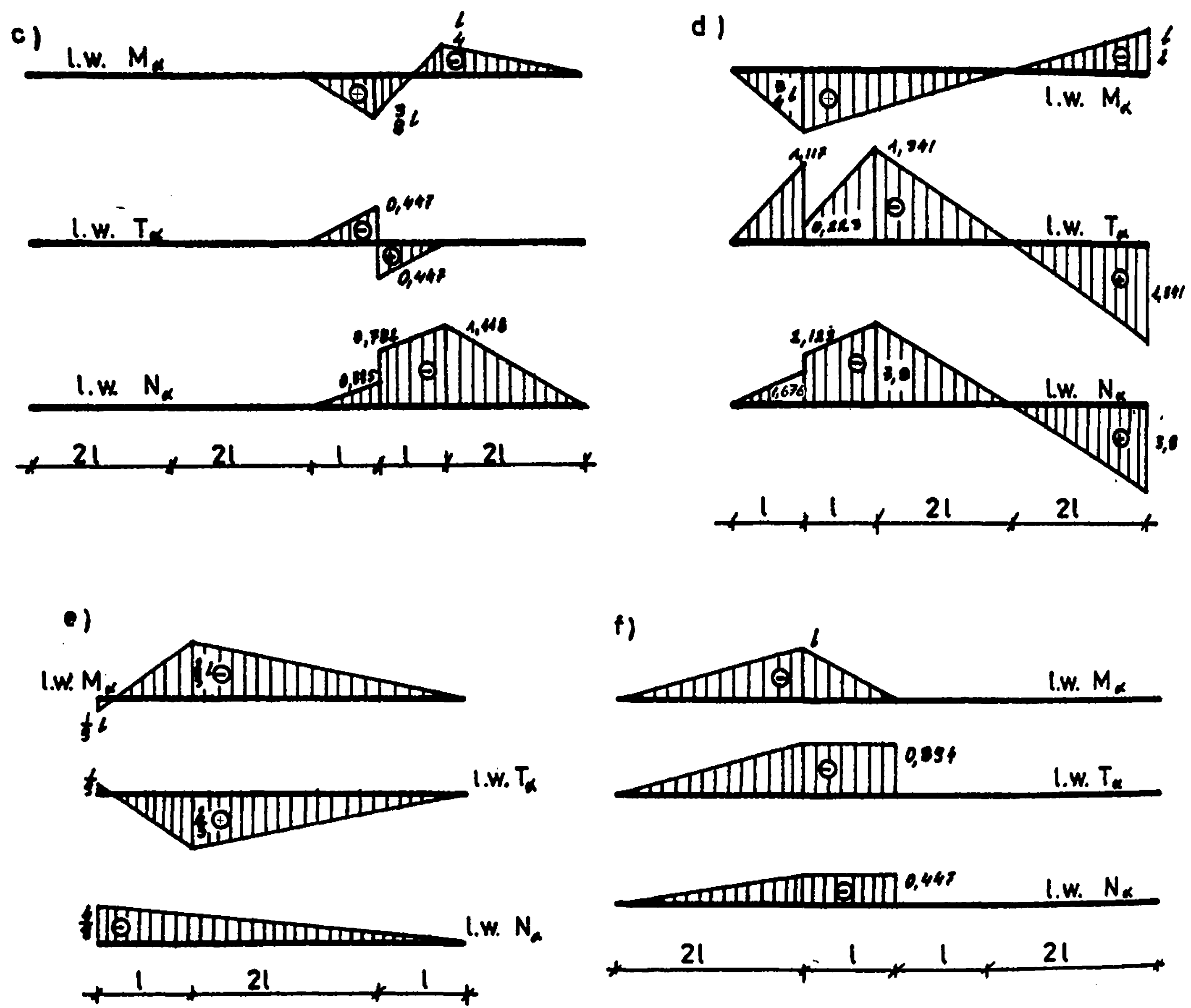
Rys. 14.4a-b

Zadanie 3.8

Odpowiedzi do zadań przedstawionych na rys. 3.28a-f stanowią rys. 14.5a-f.



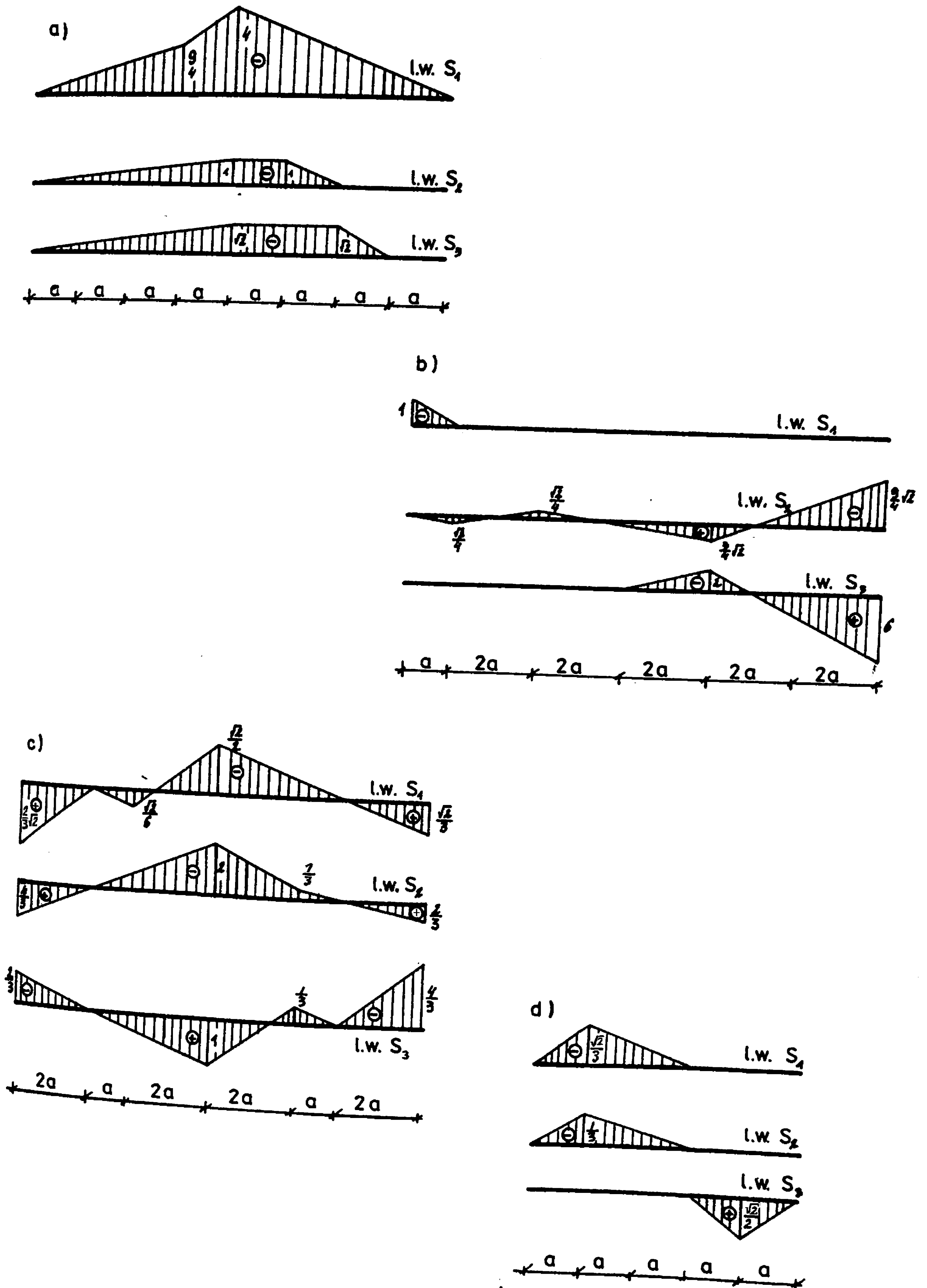
Rys. 14.5a-b



Rys. 14.5c-f

Zadanie 3.9

Odpowiedzi do zadań przedstawionych na rys. 3.29a-d stanowią rysunki 14.6a-d.



Rys. 14.6a-d

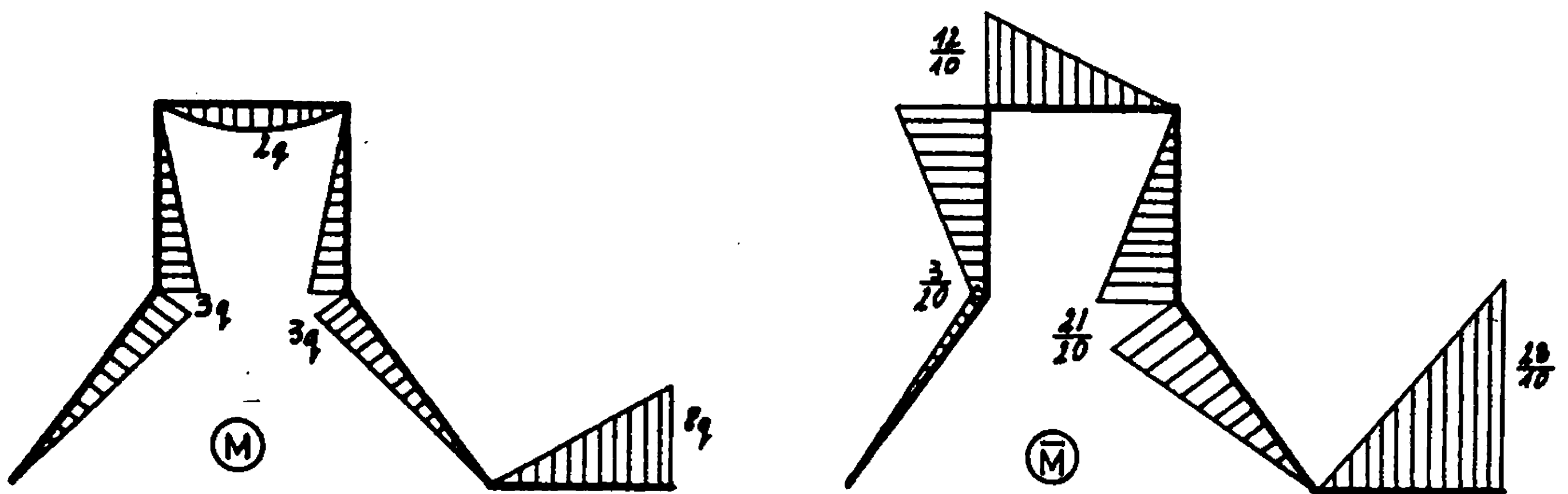
Zadanie 4.11

Odpowiedzi do rysunku 4.32a przedstawiono na rysunku 14.7.

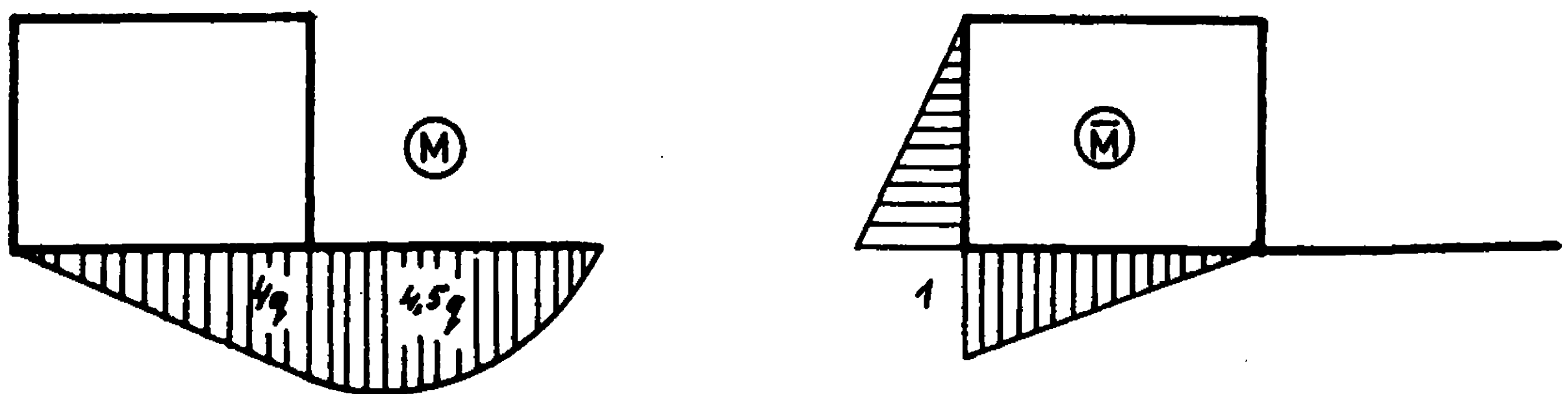
$$\delta = \frac{98q}{3EJ_0} - \frac{3}{4} \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} \quad [\text{m}].$$

Odpowiedzi do rysunku 4.32b przedstawiono na rysunku 14.8

$$\Delta \varphi = \frac{8q}{3EJ} \quad [\text{rad}].$$



Rys. 14.7



Rys. 14.8

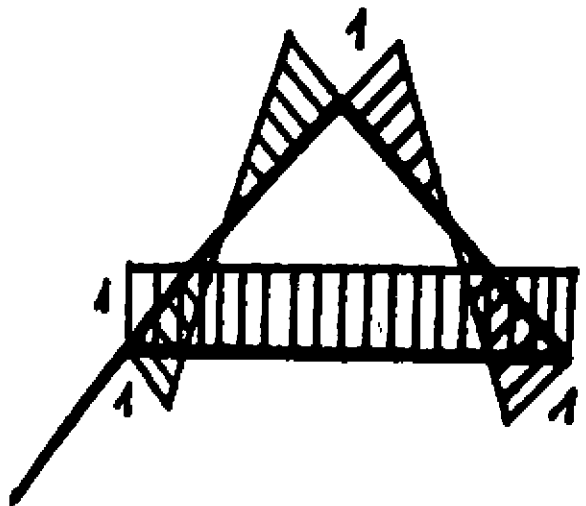
Odpowiedzi do rysunków: 4.32c ($\delta = \frac{9M}{16EA} [\text{m}]$) i 4.32d ($\delta = 0$) przedstawiono na rysunku 14.9.

Odpowiedź do rysunku 4.32e przedstawiono na rysunku 14.10

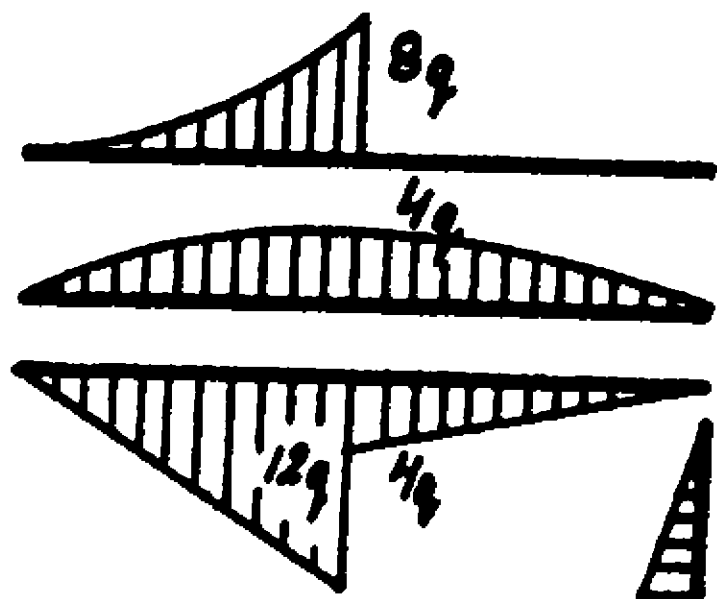
$$\Delta \varphi = \frac{1,5 \sqrt{2}}{2} \alpha_t \frac{\Delta t}{4} \quad [\text{rad}].$$

Odpowiedzi do rysunku 4.32f przedstawiono na rysunku 14.11

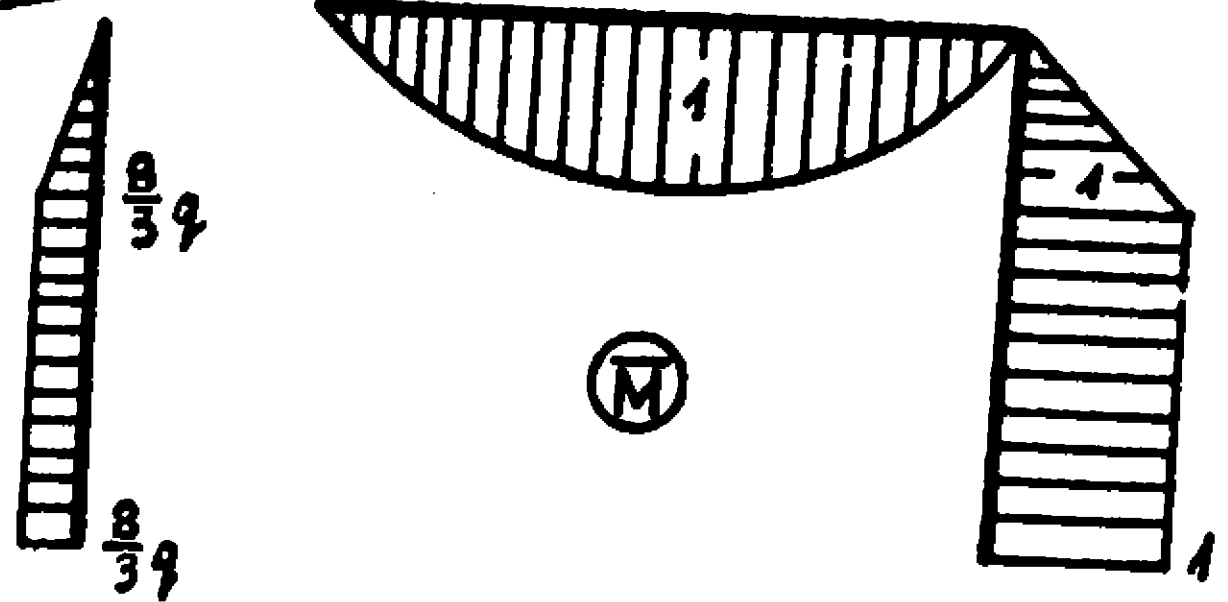
$$\Delta \varphi = - \frac{224 q}{27 EJ_0} \quad [\text{rad}].$$



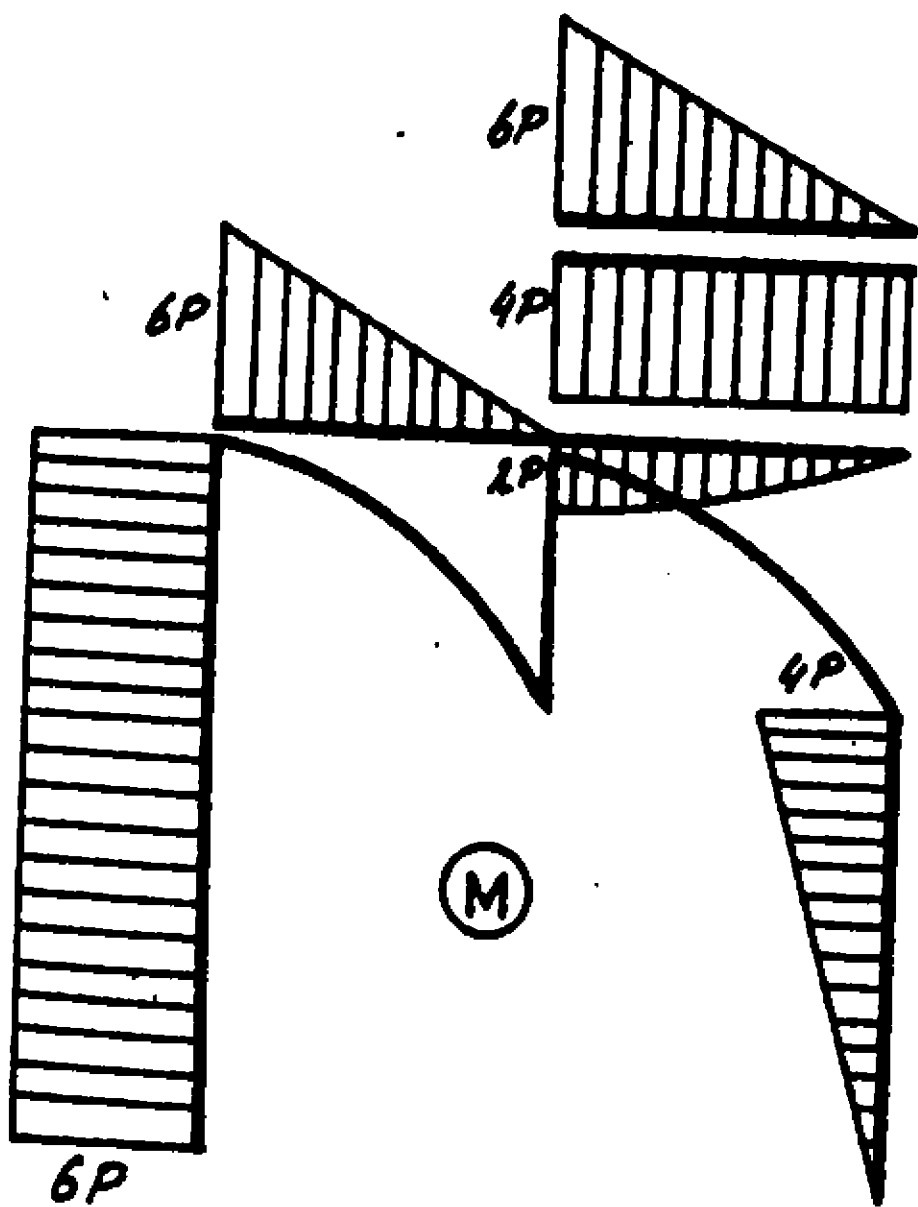
Rys. 14.9



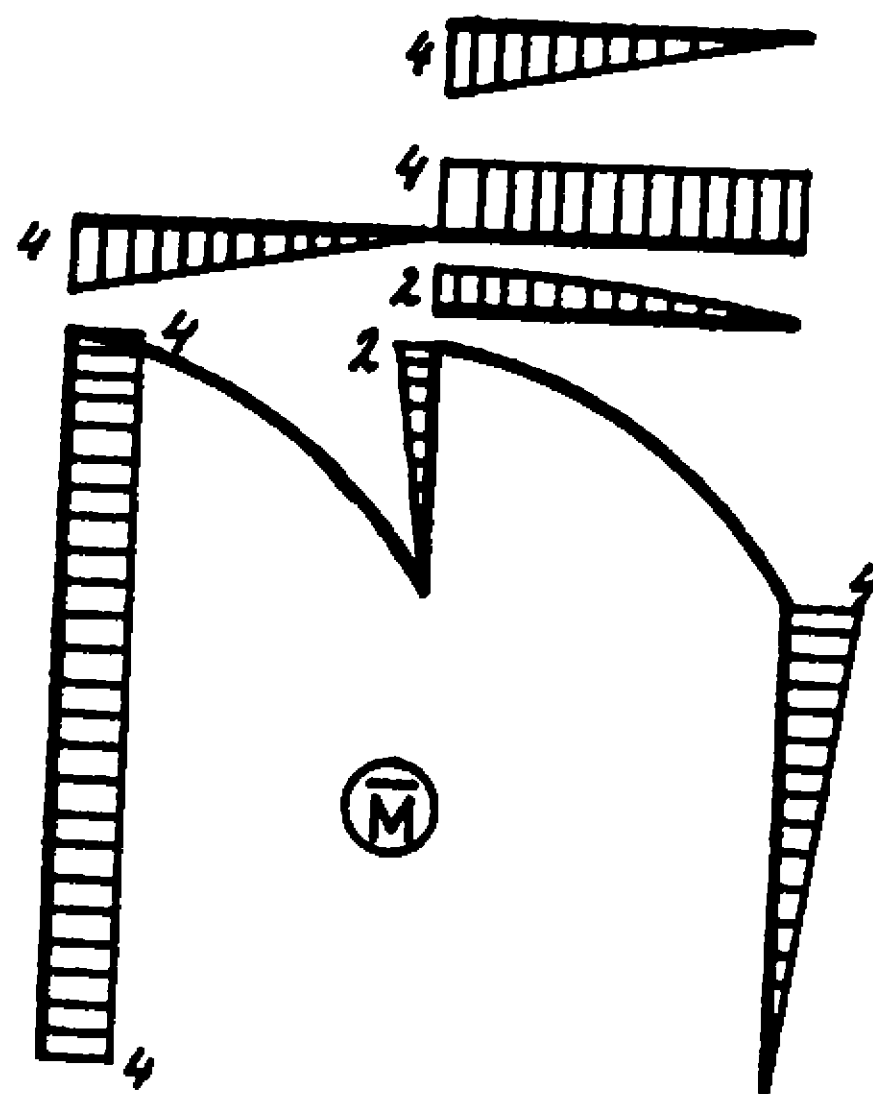
(M)



Rys. 14.10



(M)



(M)

Rys. 14.11

Odpowiedź do rysunku 4.32g:

$$\delta = - \frac{286 \cdot 73}{EJ_0} \quad [\text{m}].$$

Odpowiedź do rysunku 4.32h:

$$\Delta \varphi = 1,00/7 \frac{q l^4}{EJ_0} \quad [\text{rad}].$$

Odpowiedź do rysunku 4.32i:

$$\Delta \varphi_1 = -0,2666 \frac{Pl^2}{EJ_0} + 32 \frac{P}{EA_2} \quad [\text{rad}].$$

Odpowiedź do rysunku 4.32j:

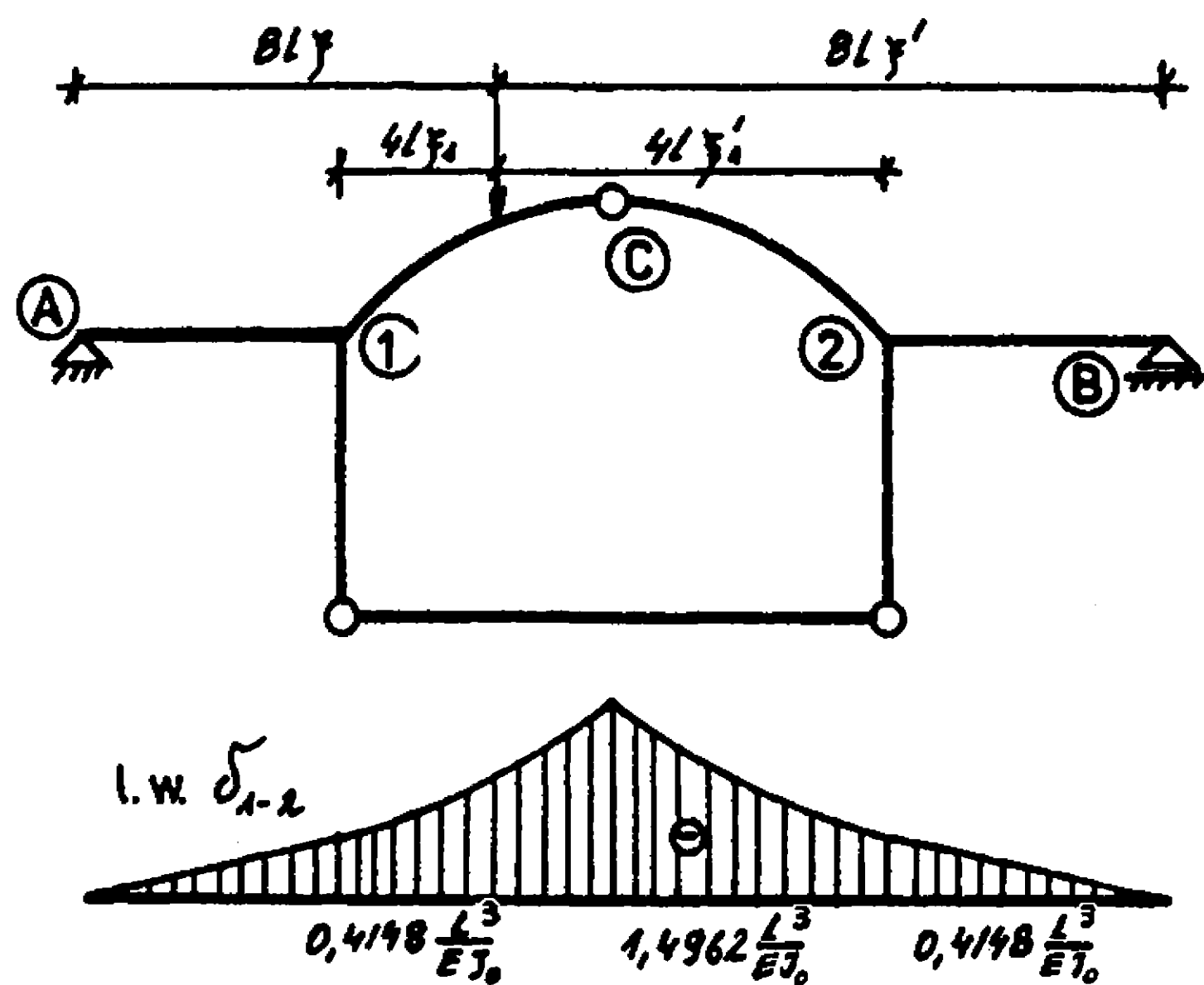
$$\Delta \varphi = 1,61 \frac{P}{EA} \quad [\text{rad}].$$

Odpowiedź do rysunku 4.32k:

$$\delta = 25,90 \frac{Pa}{EA} \quad [\text{m}].$$

Zadanie 6.4

Odpowiedź do rysunku 6.15a przedstawiono na rysunku 14.12.



Rys. 14.12

Równania linii wpływowej są następujące:

$P \in (A - 1)$

$$\text{l.w. } \delta_{1-2} = -1,6593 \frac{\xi_1^3}{EJ_0};$$

$P \in (1 - C)$

$$\frac{1}{4} < \xi < \frac{1}{2}, \quad 0 < \xi_1 < \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{l.w. } \delta_{1-2} = \frac{1^3}{EJ_0} & (0,8889 - 5,2148 \xi + 1,7778 \xi_1 - 5,333 \xi_1^2 + \\ & + 7,111 \xi_1^3 - 3,555 \xi_1^4); \end{aligned}$$

$P \in (C - 2)$

$$\frac{1}{4} < \xi' < \frac{1}{2}, \quad 0 < \xi'_1 < \frac{1}{2},$$

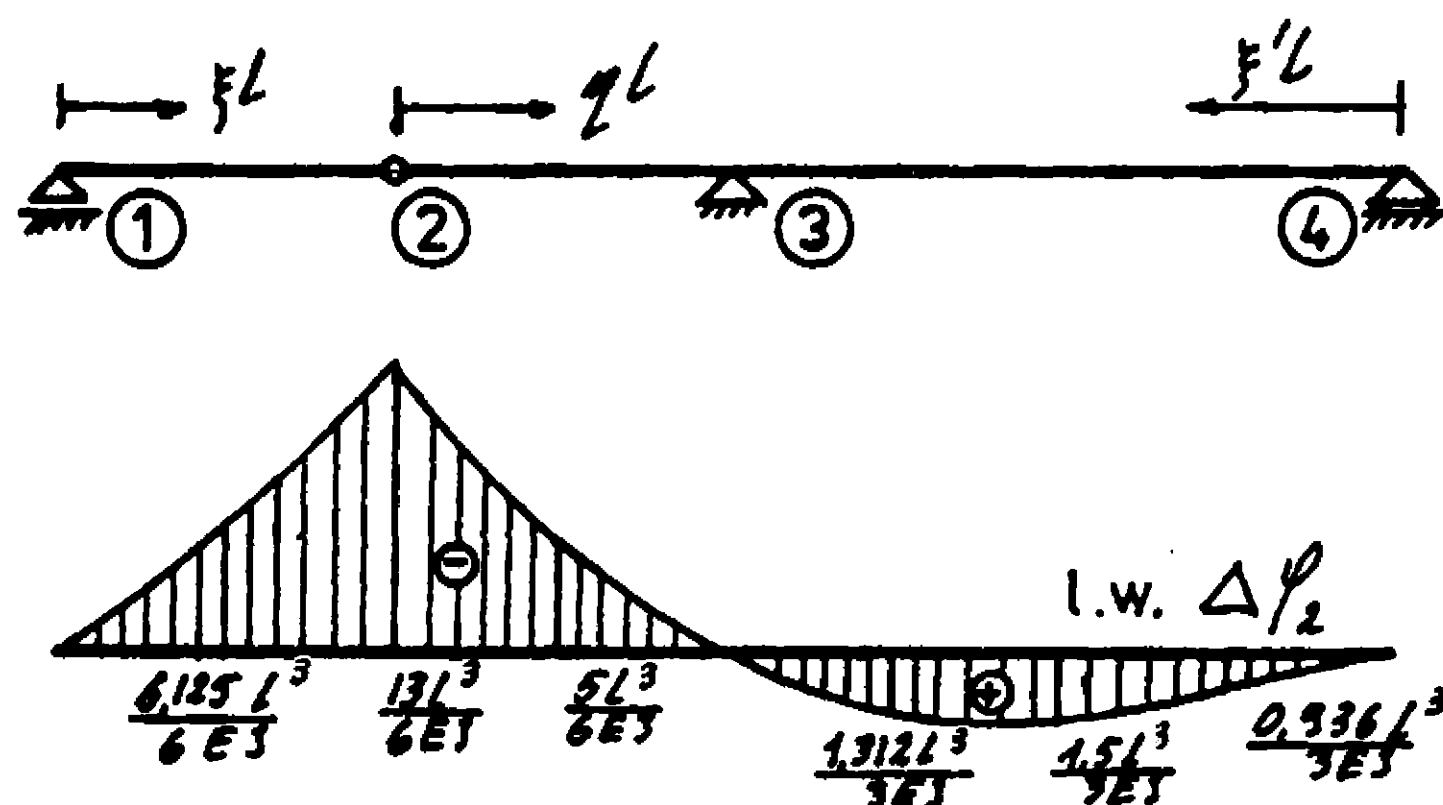
$$1.w. \delta_{1-2} = \frac{1^3}{EJ_0} \left(0,8889 - 5,2148 \xi' + 1,7778 \xi_1' - 5,333 \xi_1'^2 + \right. \\ \left. + 7,111 \xi_1'^3 - 3,555 \xi_1'^4 \right);$$

$P \in (2 - B)$

$$0 \leq \xi' \leq \frac{1}{4},$$

$$1.w. \delta_{1-2} = -1,6593 \frac{\xi_1'^3}{EJ}.$$

Odpowiedź do rysunku 6.15b przedstawiono na rysunku 14.13.



Rys. 14.13

Równania linii wpływowej zmiany kąta φ_2

$P \in (1 - 2)$

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad \xi = \frac{x}{l},$$

$$1.w. \Delta \varphi_2 = - \frac{1^3}{6EJ} (12 \xi + \xi^3);$$

$P \in (2 - 3)$

$$0 \leq \eta \leq 1, \quad \eta = \frac{x}{l},$$

$$1.w. \Delta \varphi_2 = - \frac{1^3}{6EJ} (13 - 17 \eta + 2 \eta^2 + \eta^3);$$

$P \in (3 - 4)$

$$0 \leq \xi' \leq 1, \quad \xi' = \frac{x}{2l},$$

$$1.w. \Delta \varphi_2 = \frac{41^3}{3EJ} (\xi' - \xi'^3);$$

Odpowiedź do rysunku 6.15c przedstawiono na rysunku 14.14.

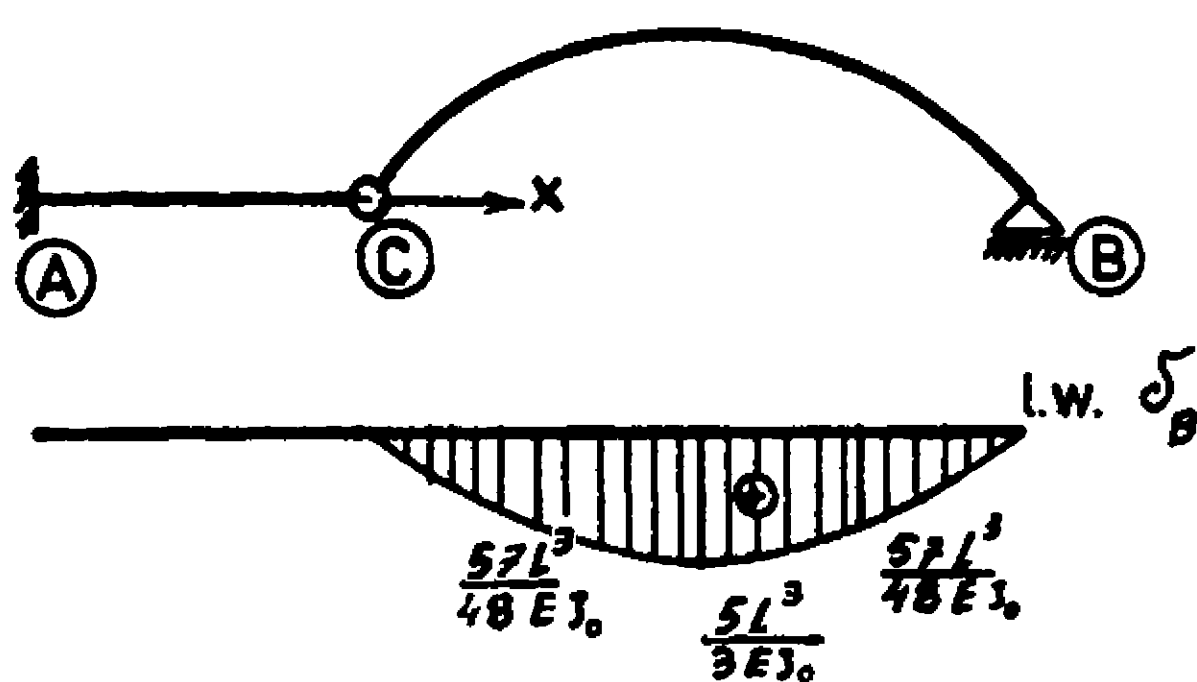
$P \in (A - C)$

$$\text{l.w. } \delta_B = 0;$$

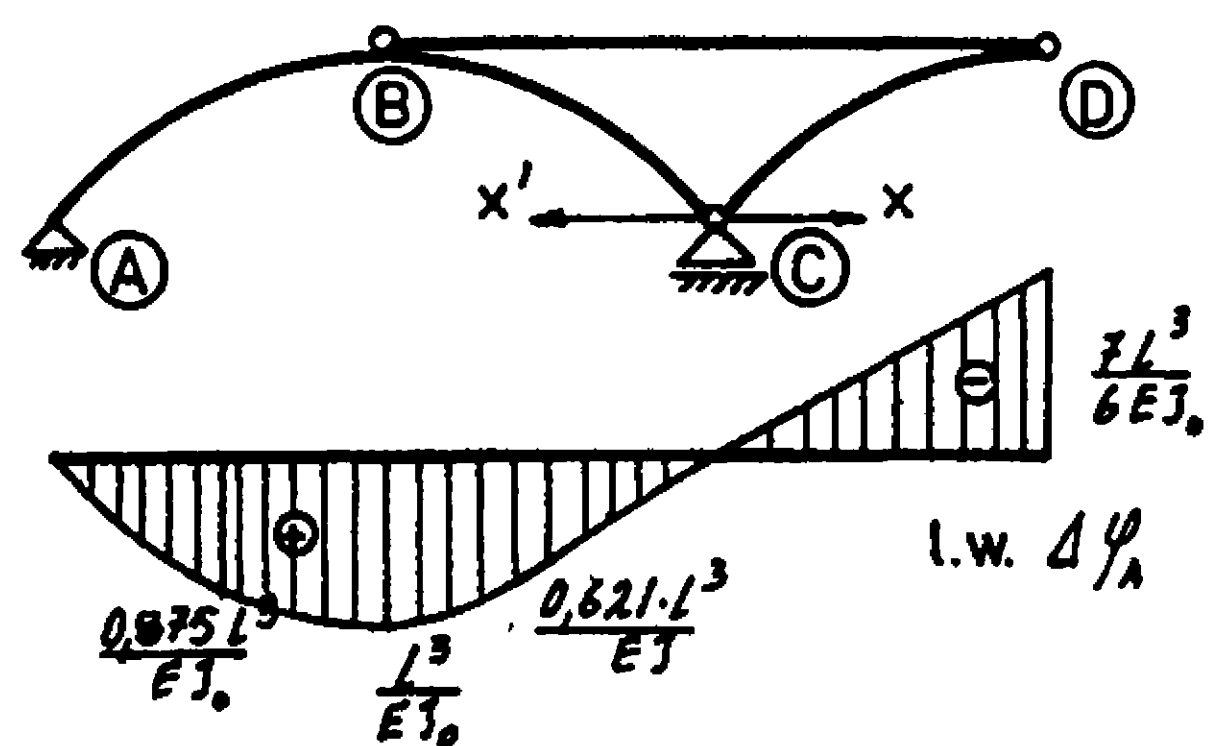
$P \in (C - B)$

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad \xi = \frac{x}{4l},$$

$$\text{l.w. } \delta_B = \frac{16l^3}{3EJ_0} (\xi - 2\xi^3 + \xi^4);$$



Rys. 14.14



Rys. 14.15

Odpowiedź do rysunku 6.15d przedstawiono na rysunku 14.15.

Równania linii wpływowej zmiany kąta φ_A .

$P \in (A - C)$

$$0 \leq \xi' \leq 1, \quad \xi' = \frac{x}{4l},$$

$$\text{l.w. } \Delta\varphi_A = \frac{8l^3}{3EJ_0} (\xi' - \xi'^3);$$

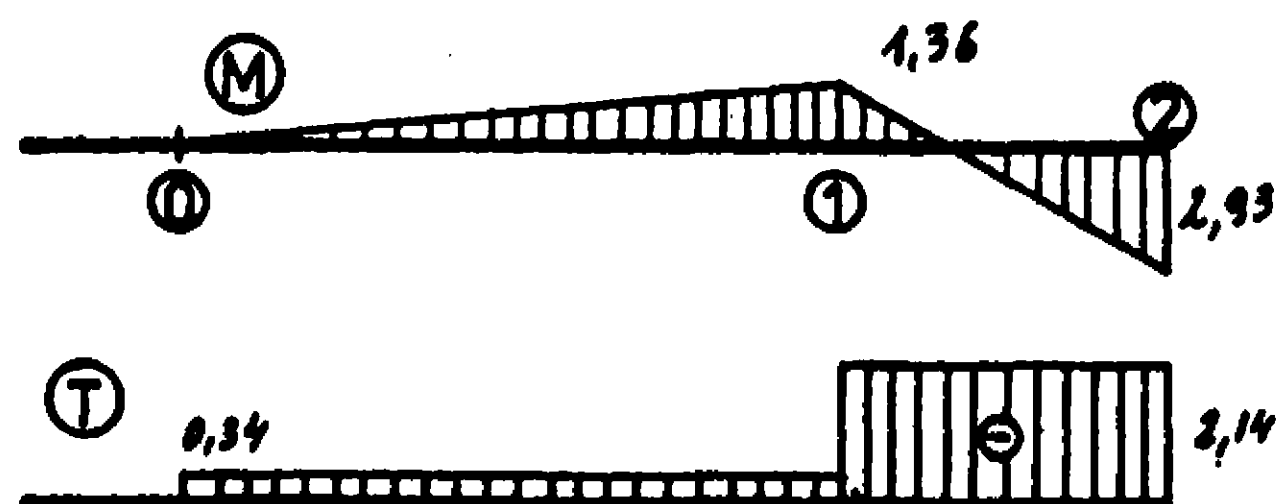
$P \in (C - D)$

$$0 \leq x \leq 2l,$$

$$\text{l.w. } \Delta\varphi_A = -\frac{7l}{12EJ_0} x;$$

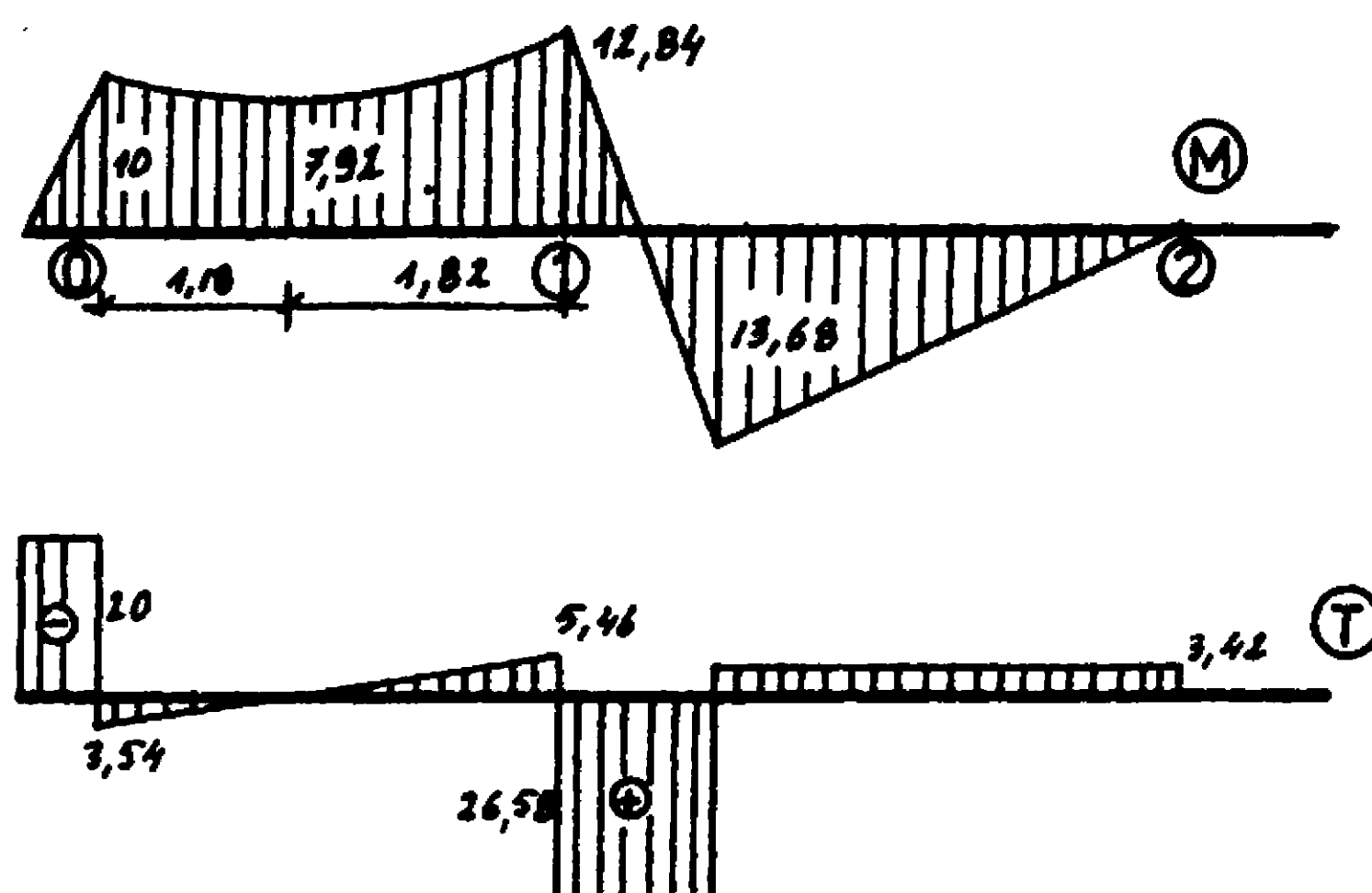
Zadanie 7.5

Odpowiedź do rysunku 7.19a przedstawiono na rysunku 14.16.



Rys. 14.16

Odpowiedź do rysunku 7.19b przedstawiono na rysunku 14.17.



Rys. 14.17

Równanie trzech momentów ma postać

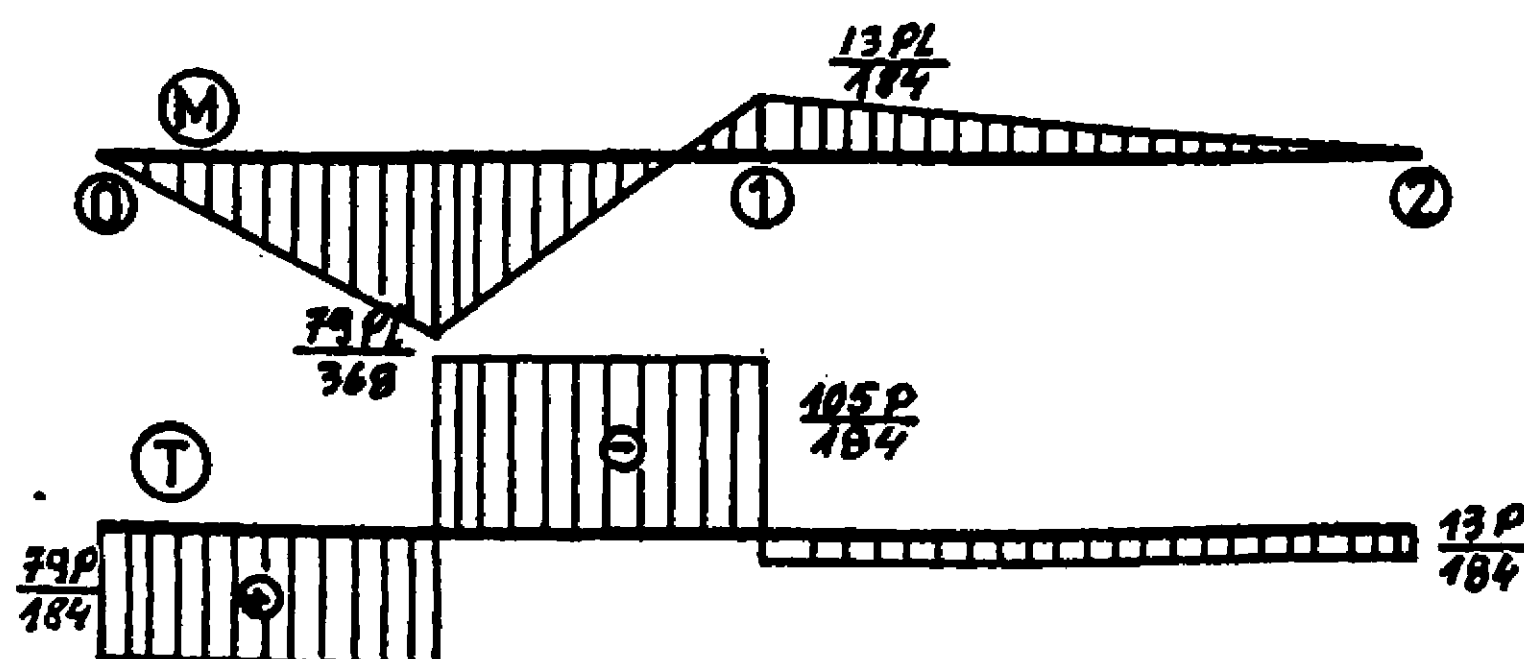
$$16x_1 = N_{10} - 3x_0,$$

$$N_{10} = -236,25, \quad x_0 = 10 \quad [\text{kNm}],$$

$$x_1 = -12,89 \quad [\text{kNm}].$$

Odpowiedź do rysunku 7.19c przedstawiono na rysunku 14.18

$$x_1 = - \frac{13}{184} Pl.$$

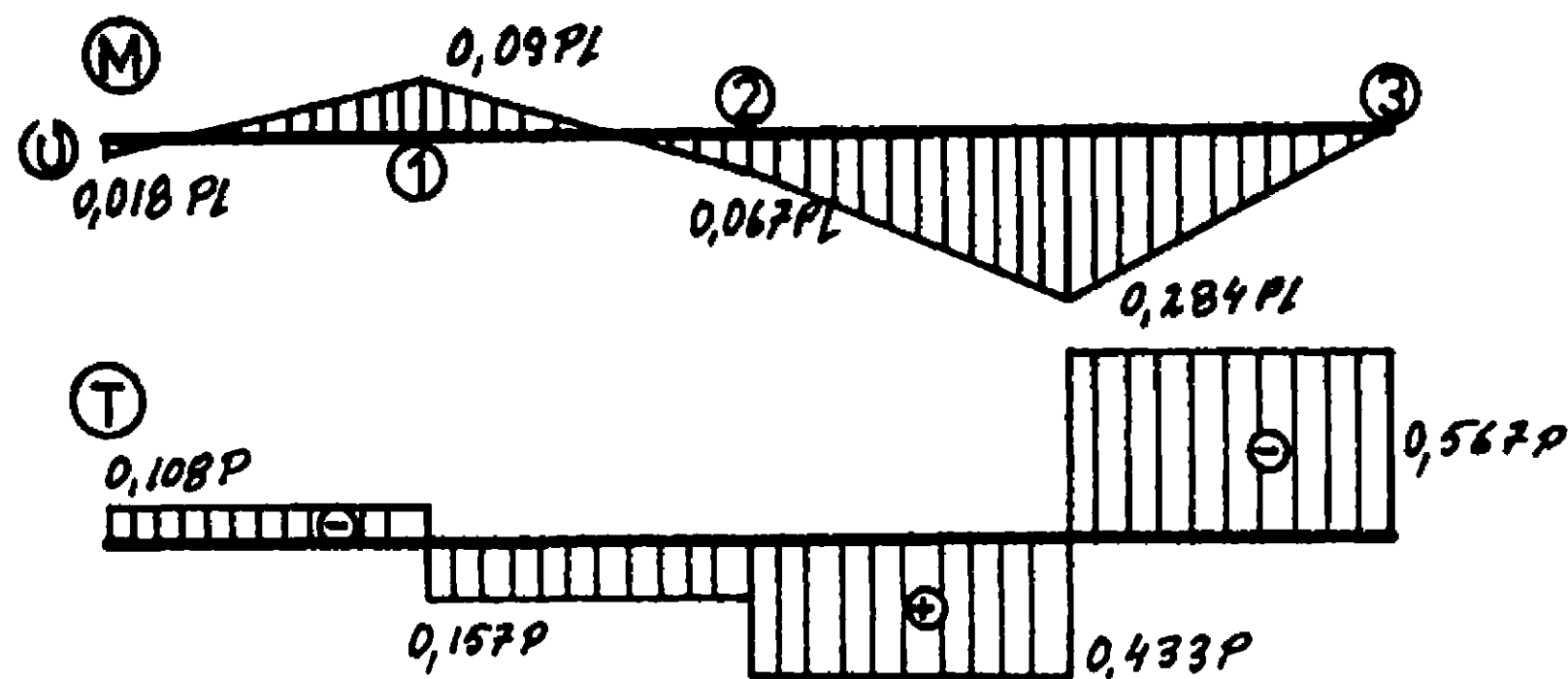


Rys. 14.18

Odpowiedź do rysunku 7.19d przedstawiono na rysunku 14.19

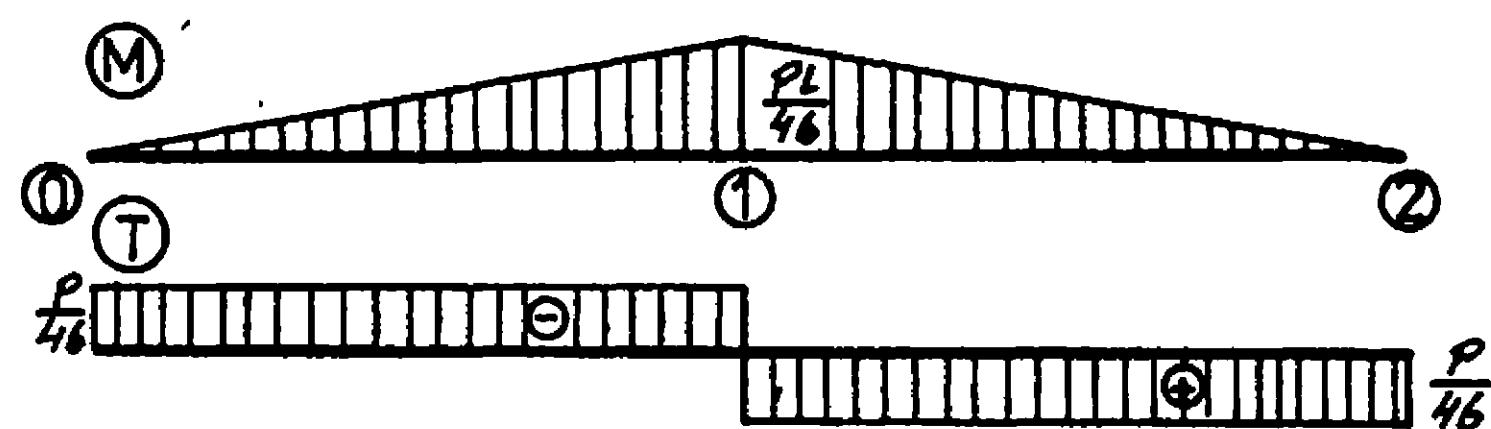
$$x_0 = 0,018 Pl, \quad x_1 = -0,09 Pl,$$

$$x_2 = 0,067 Pl.$$



Rys. 14.19

Odpowiedź do rysunku 7.19e przedstawiono na rysunku 14.20.



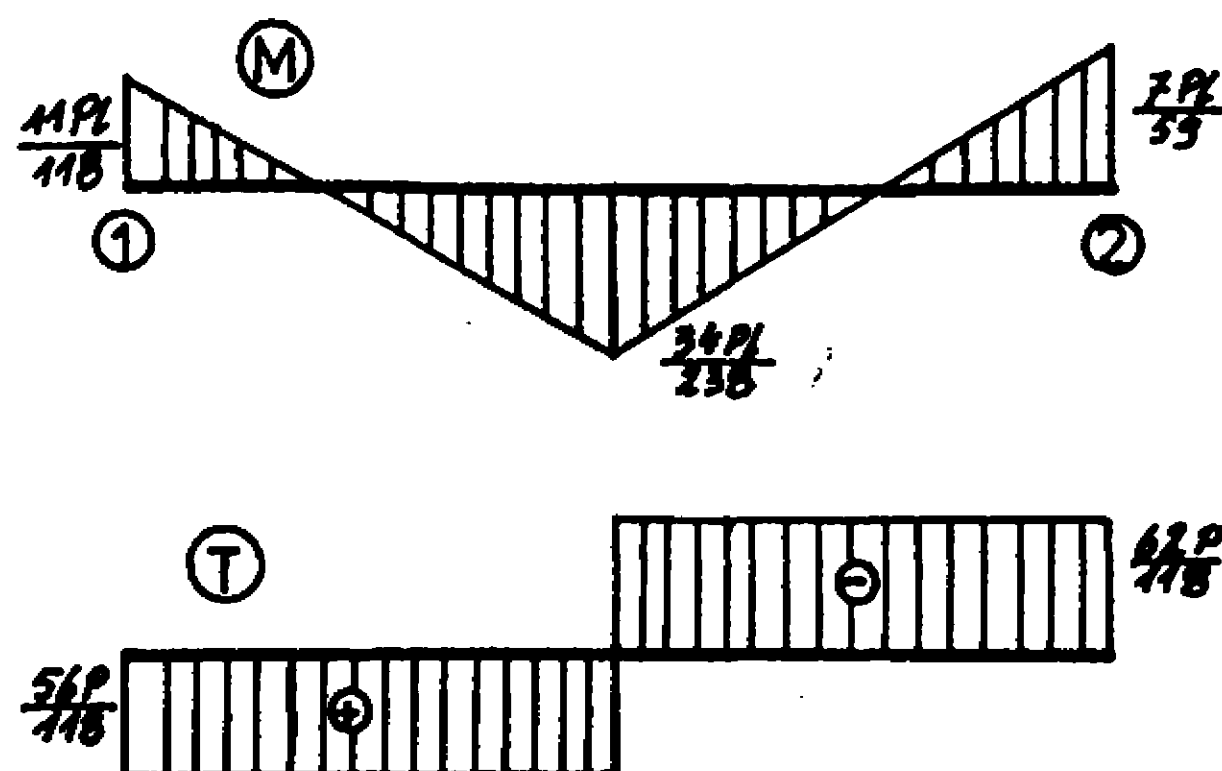
Rys. 14.20

Zadanie należy rozwiązać tak samo jak zadanie c. Wyrażenia dla δ_0 , δ_1 , δ_2 przybiorą tu następującą postać:

$$\delta_0 = \frac{1}{\lambda} \left(P + \frac{x_1}{1} \right); \quad \delta_1 = -\frac{2x_1}{\lambda 1}; \quad \delta_2 = \frac{x_1}{\lambda 1}.$$

$$x_1 = -\frac{Pl}{46}.$$

Odpowiedź do rysunku 7.19f przedstawiono na rysunku 14.21.



Rys. 14.21

Równanie trzech momentów dla podpór 1 i 2 ma następującą postać:

$$2X_1l + X_2l = -\frac{3Pl^2}{8} - 6EJ \frac{X_1l}{8EJ},$$

$$X_1l + 2X_2l = -\frac{3Pl^2}{8} - 6EJ \frac{X_2l}{16EJ},$$

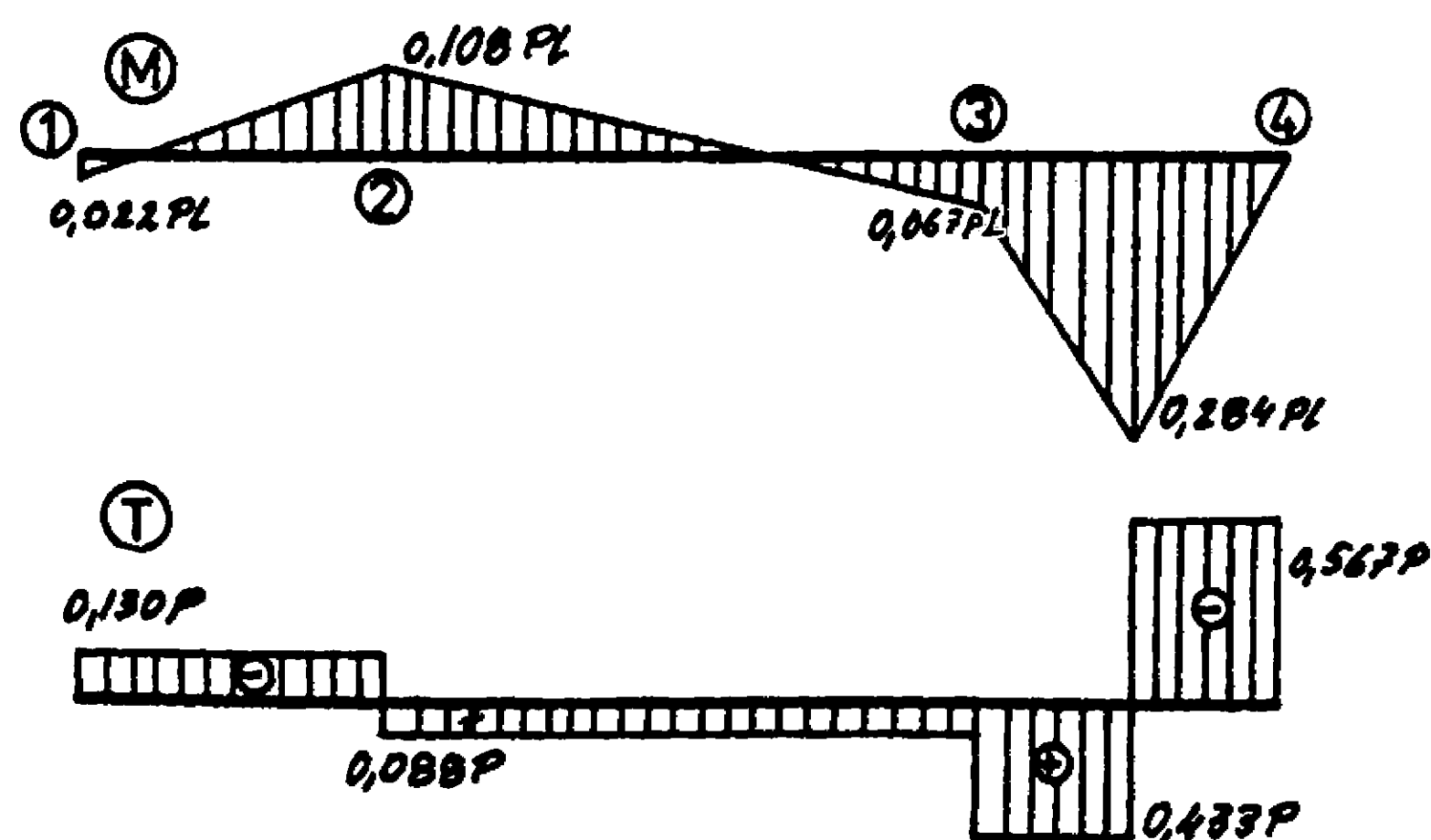
stąd

$$X_1 = -\frac{11Pl}{118}; \quad X_2 = -\frac{7Pl}{59}.$$

Odpowiedź do rysunku 7.19g przedstawiono na rysunku 14.22

$$X_1 = 0,022 Pl; \quad X_2 = -0,108 Pl;$$

$$X_3 = 0,067 Pl.$$



Rys. 14.22

Odpowiedź do rysunku 7.19h przedstawiono na rysunku 14.23.

Równanie trzech momentów dla podpór 1, 2 i 3 ma następującą postać:

$$4X_1 + 0,5X_2 = -0,1333,$$

$$0,5X_1 + 4,625X_2 + 0,7917X_3 = -2,6169,$$

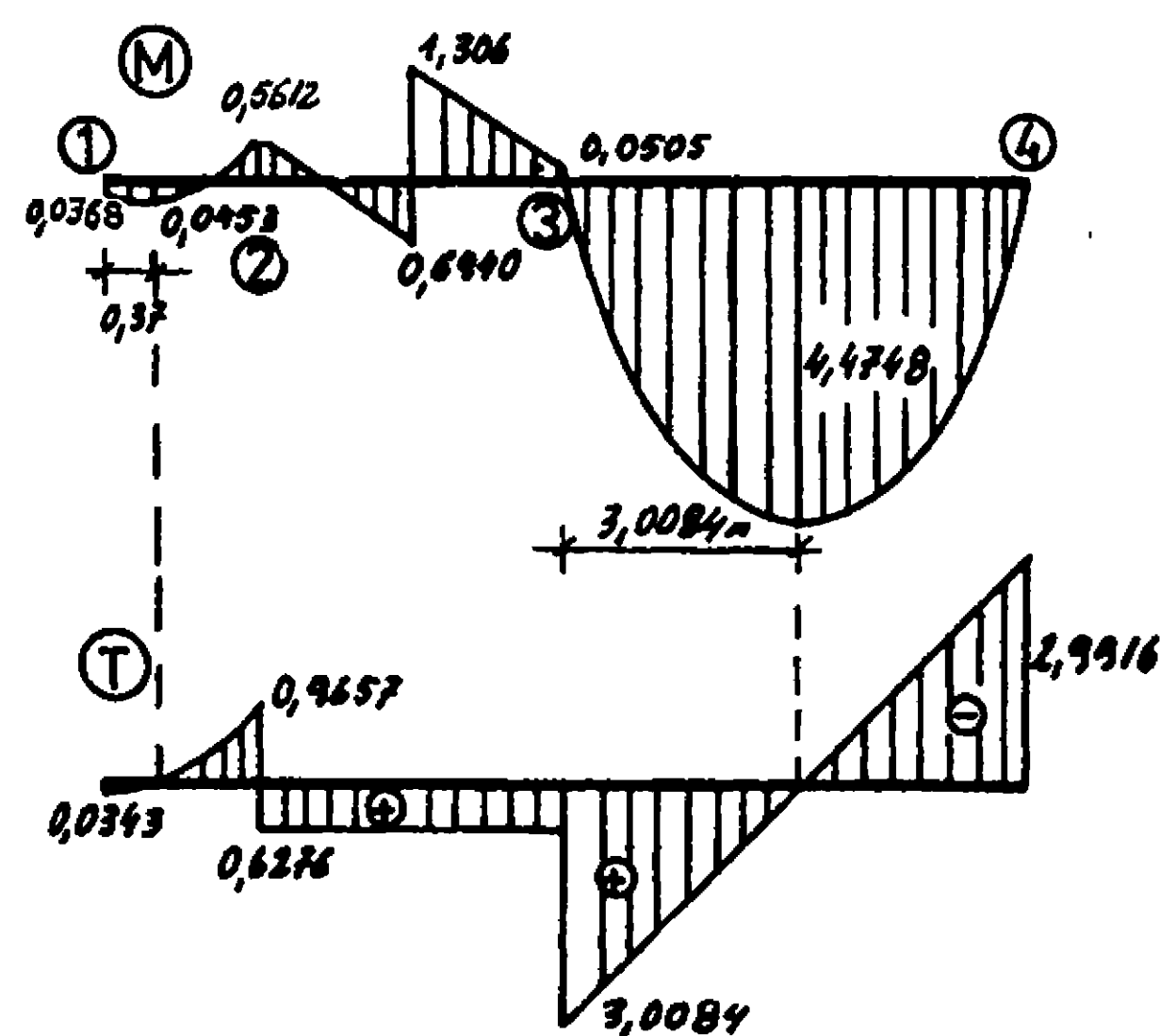
$$0,7917X_2 + 4,4028X_3 = -0,6667$$

stąd

$$X_1 = 0,0368 \quad [\text{kNm}],$$

$$X_2 = -0,5612 \quad [\text{kNm}],$$

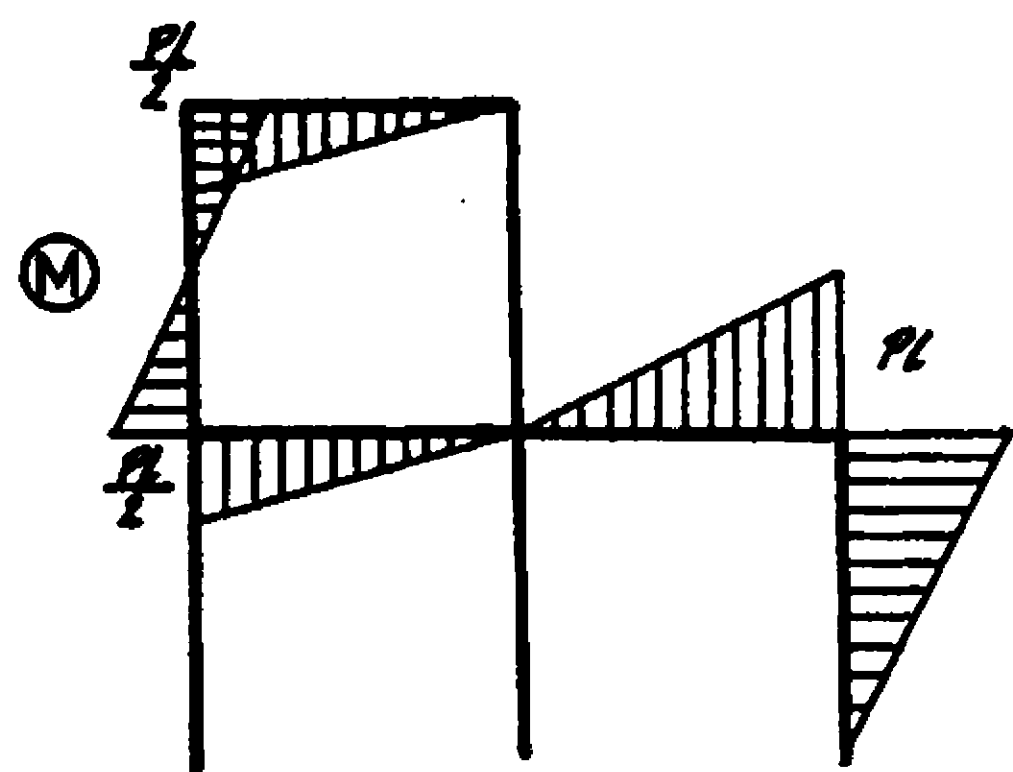
$$X_3 = -0,0505 \quad [\text{kNm}],$$



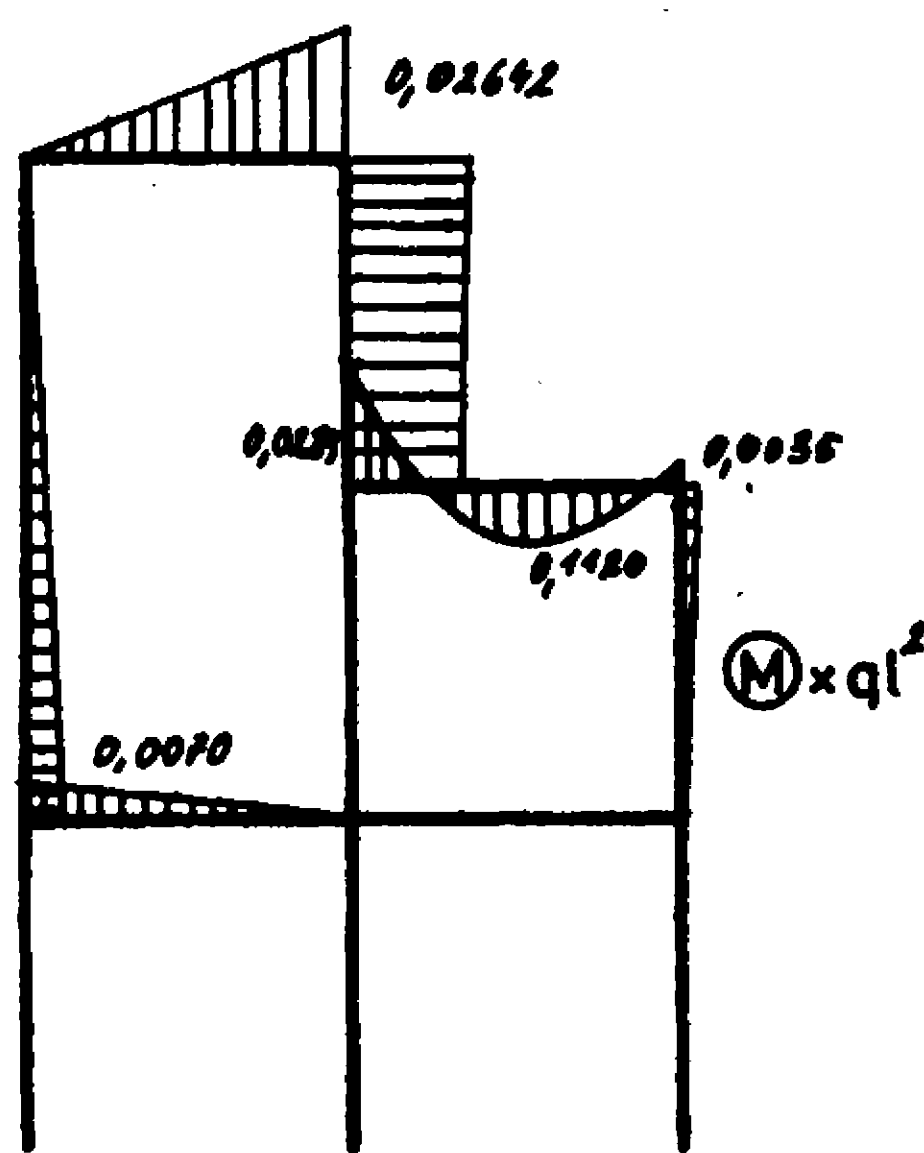
Rys. 14.23

Zadanie 8.4

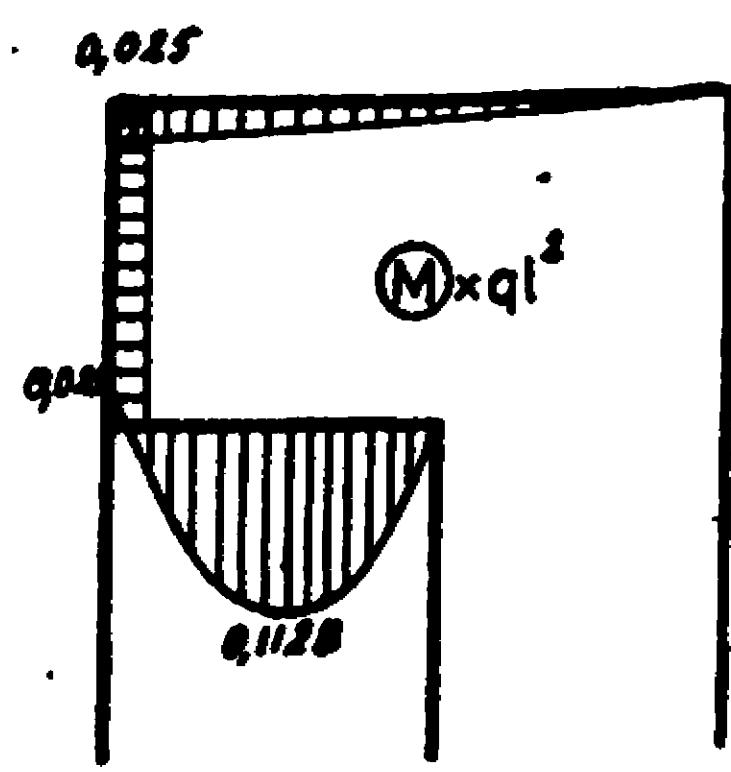
Odpowiedzi do rysunków 8.30a-p są przedstawione kolejno na rysunkach 14.24-14.40.



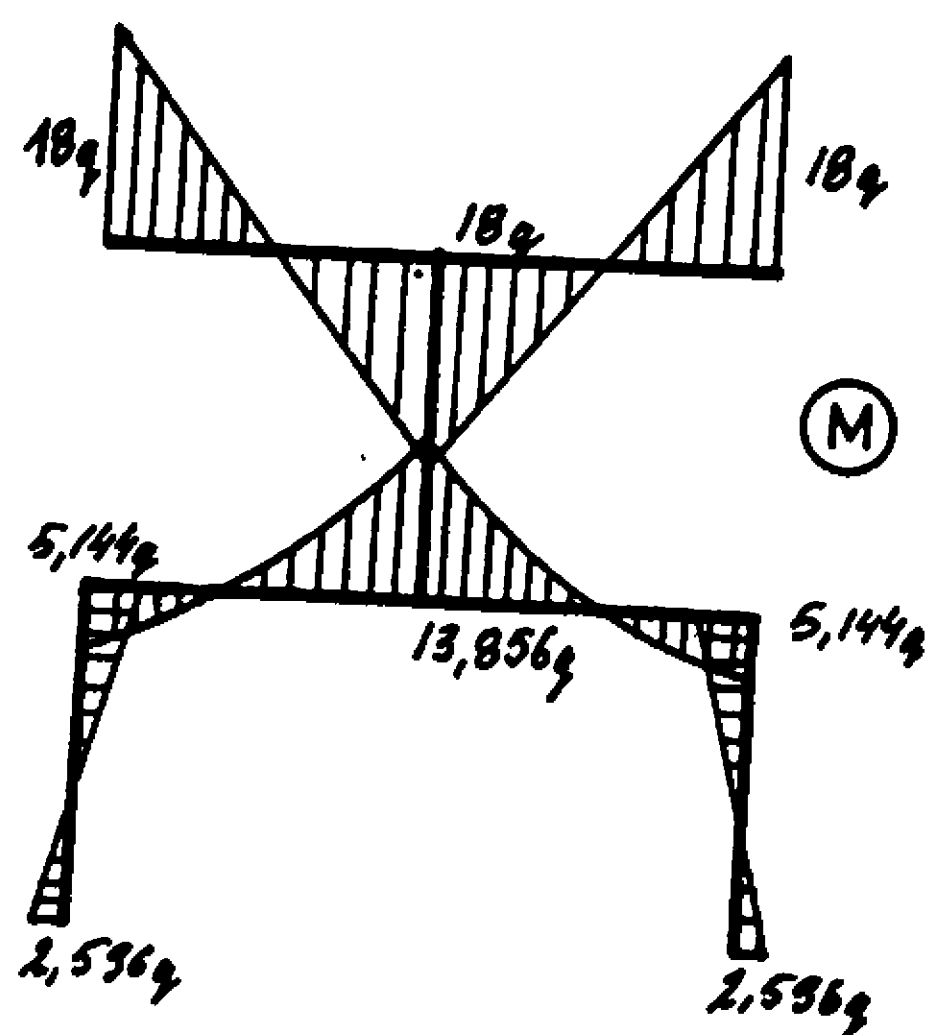
Rys. 14.24



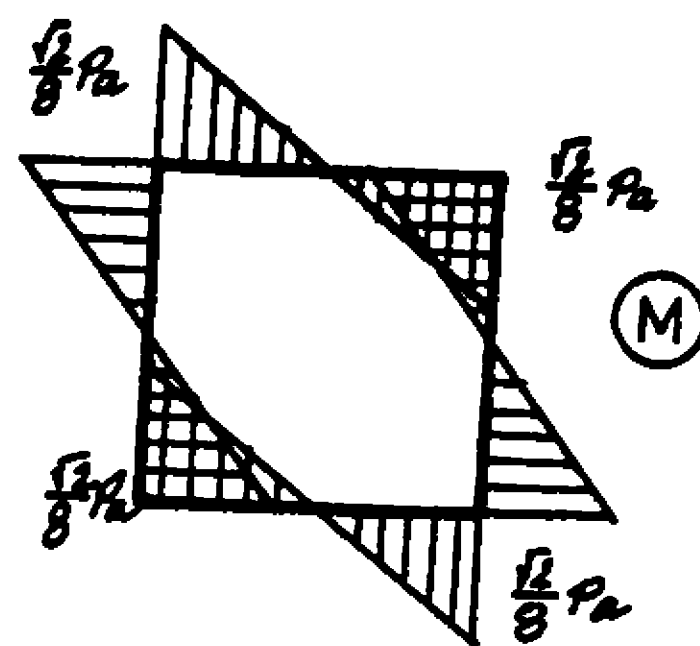
Rys. 14.25



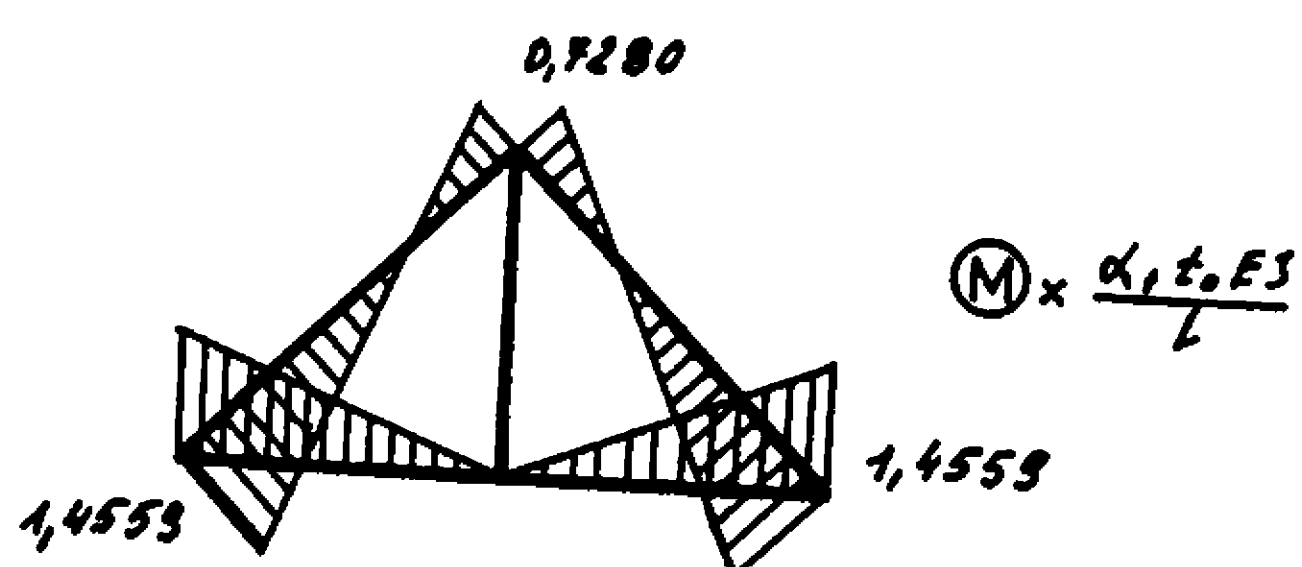
Rys. 14.26



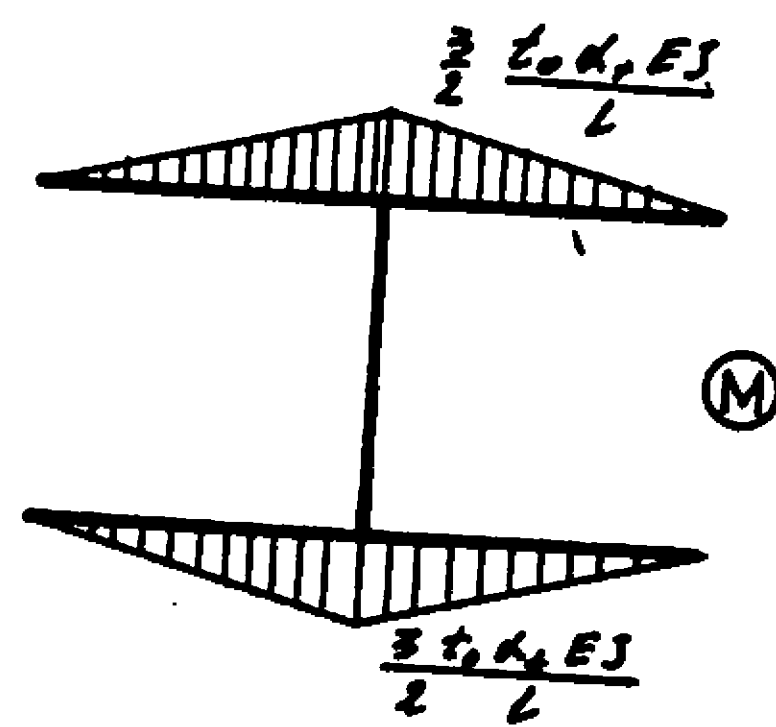
Rys. 14.27



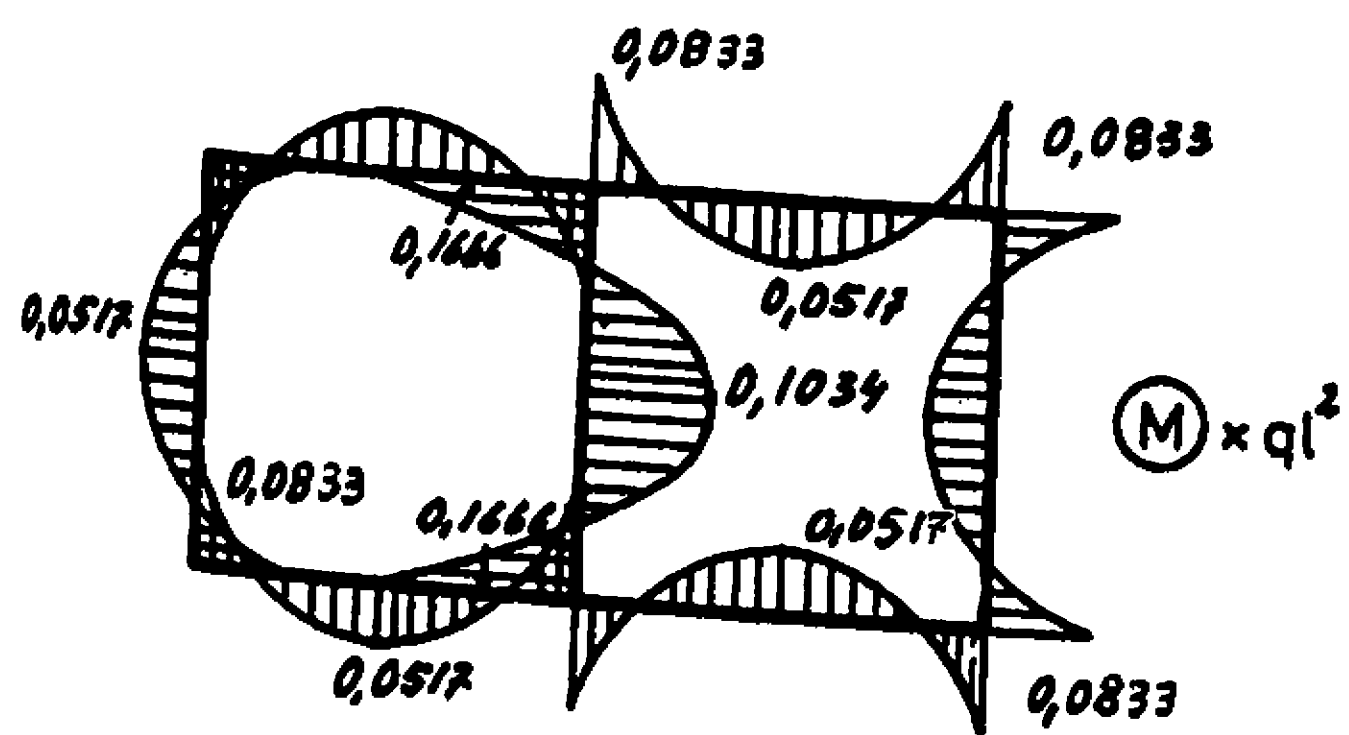
Rys. 14.28



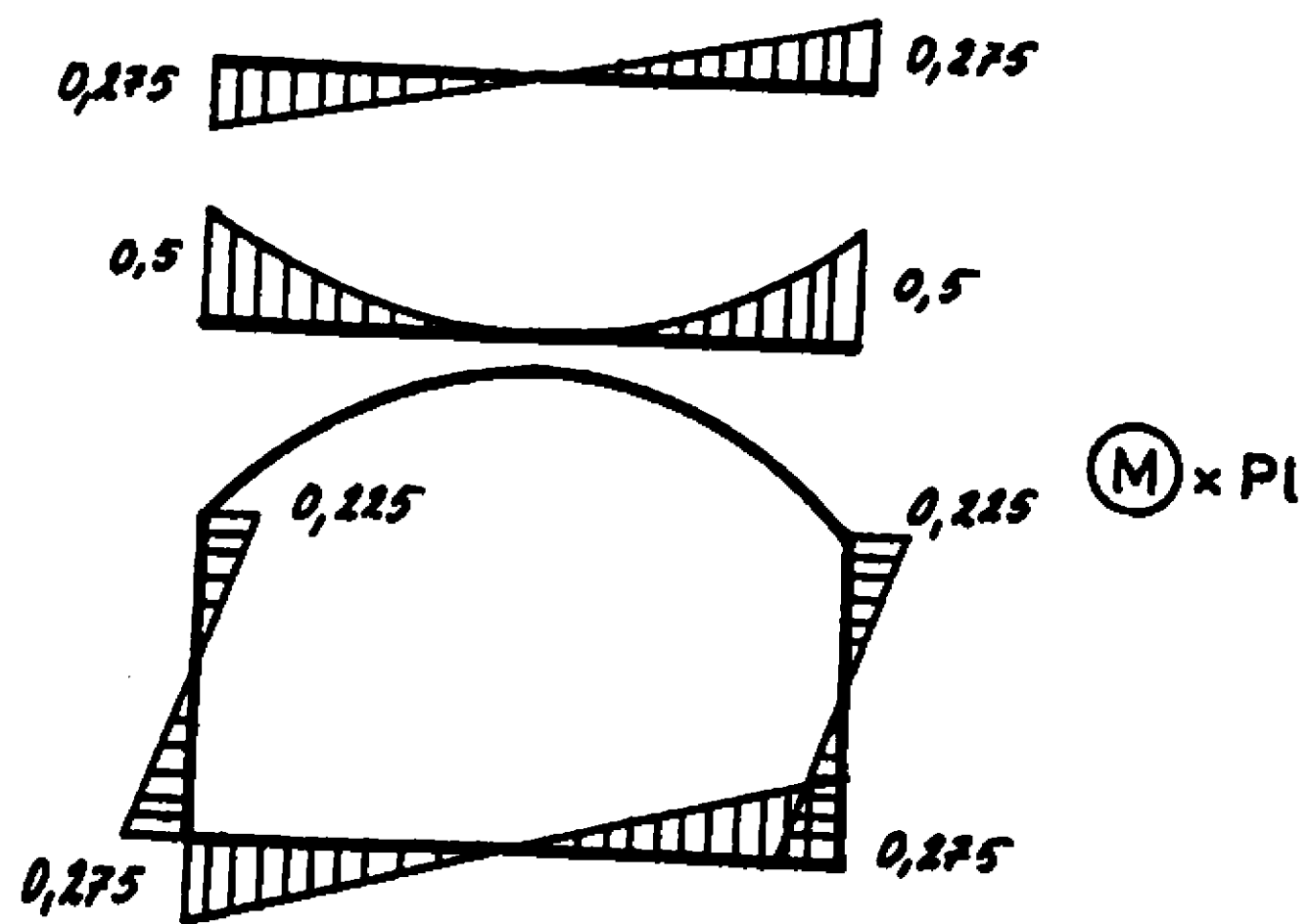
Rys. 14.29



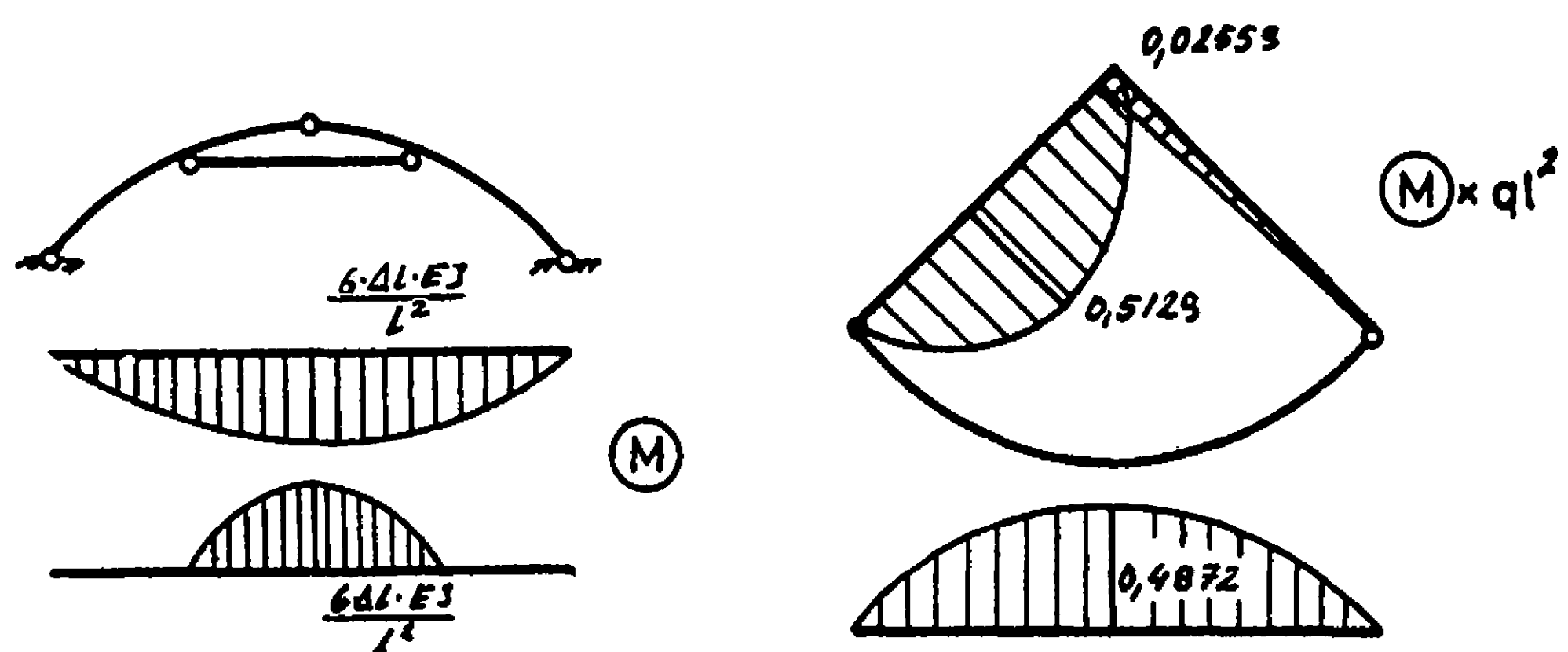
Rys. 14.30



Rys. 14.31

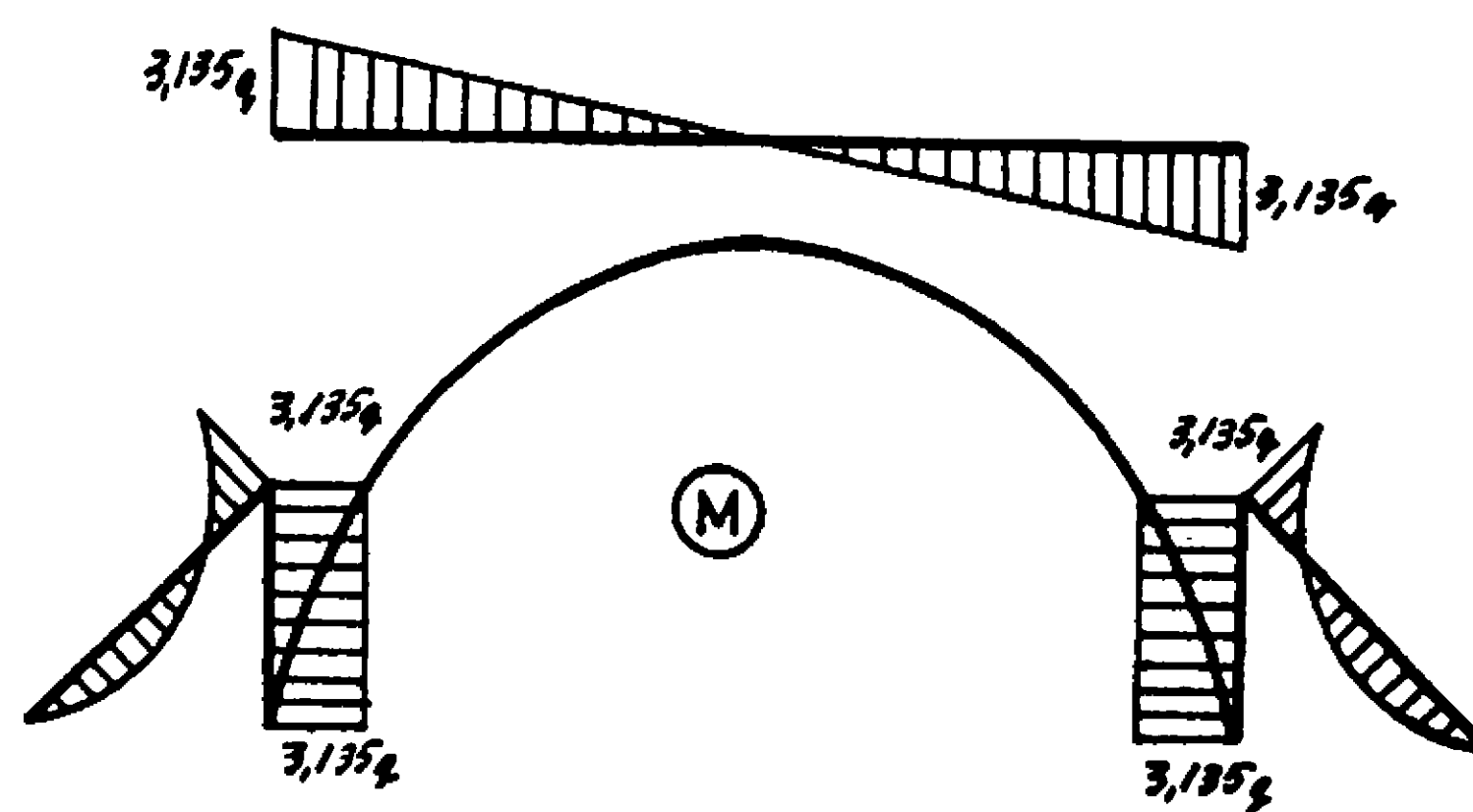


Rys. 14.32

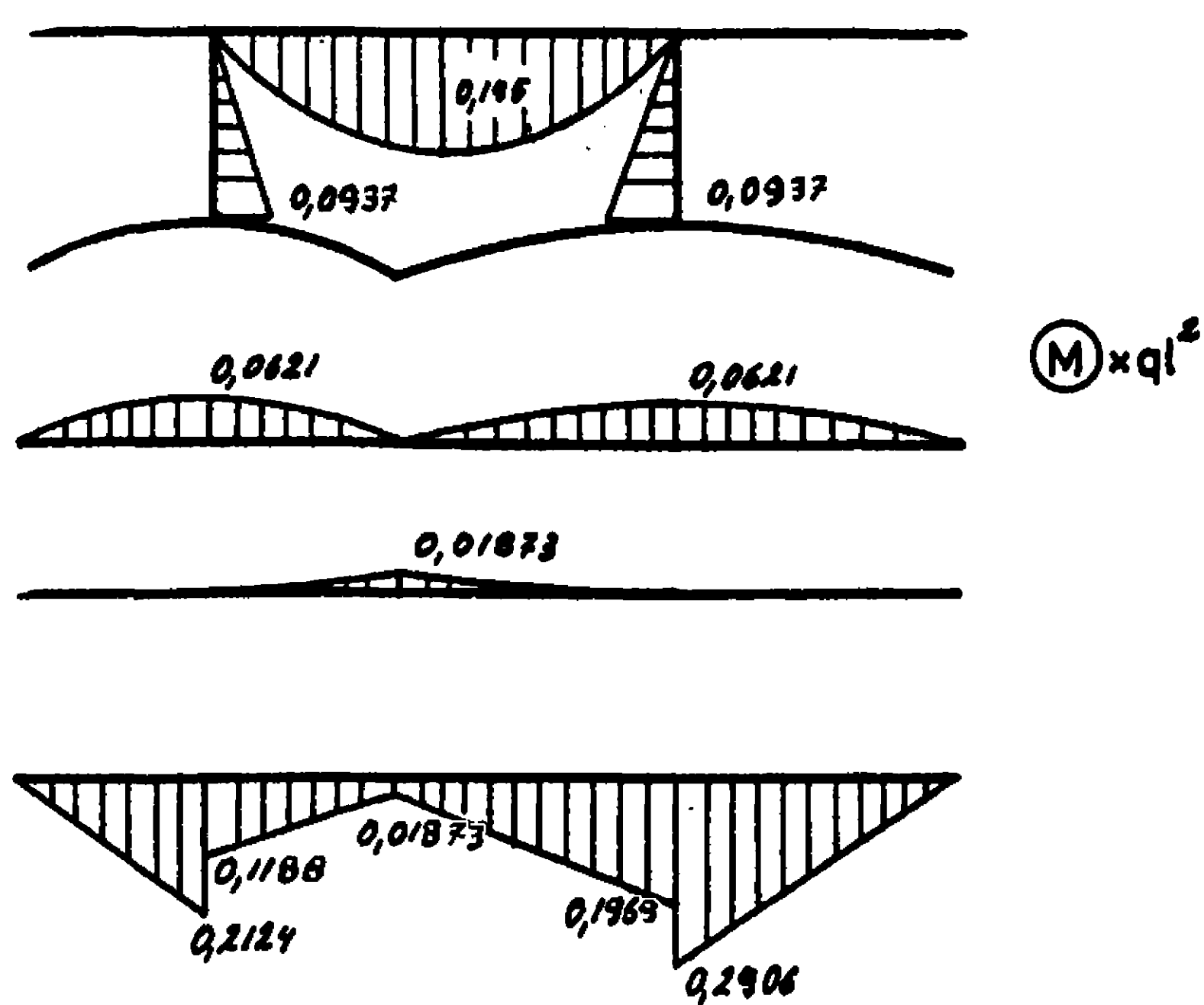


Rys. 14.33

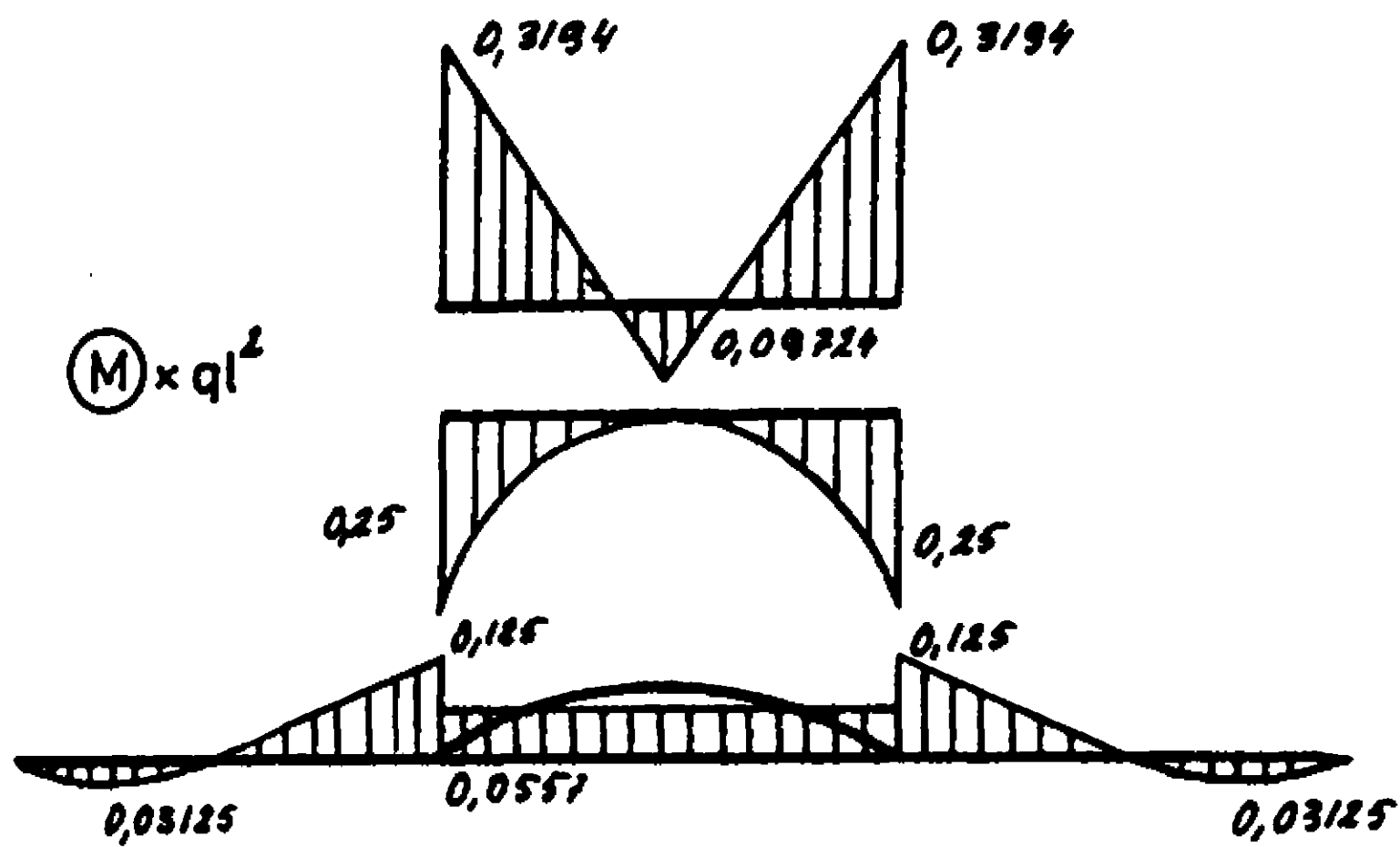
Rys. 14.34



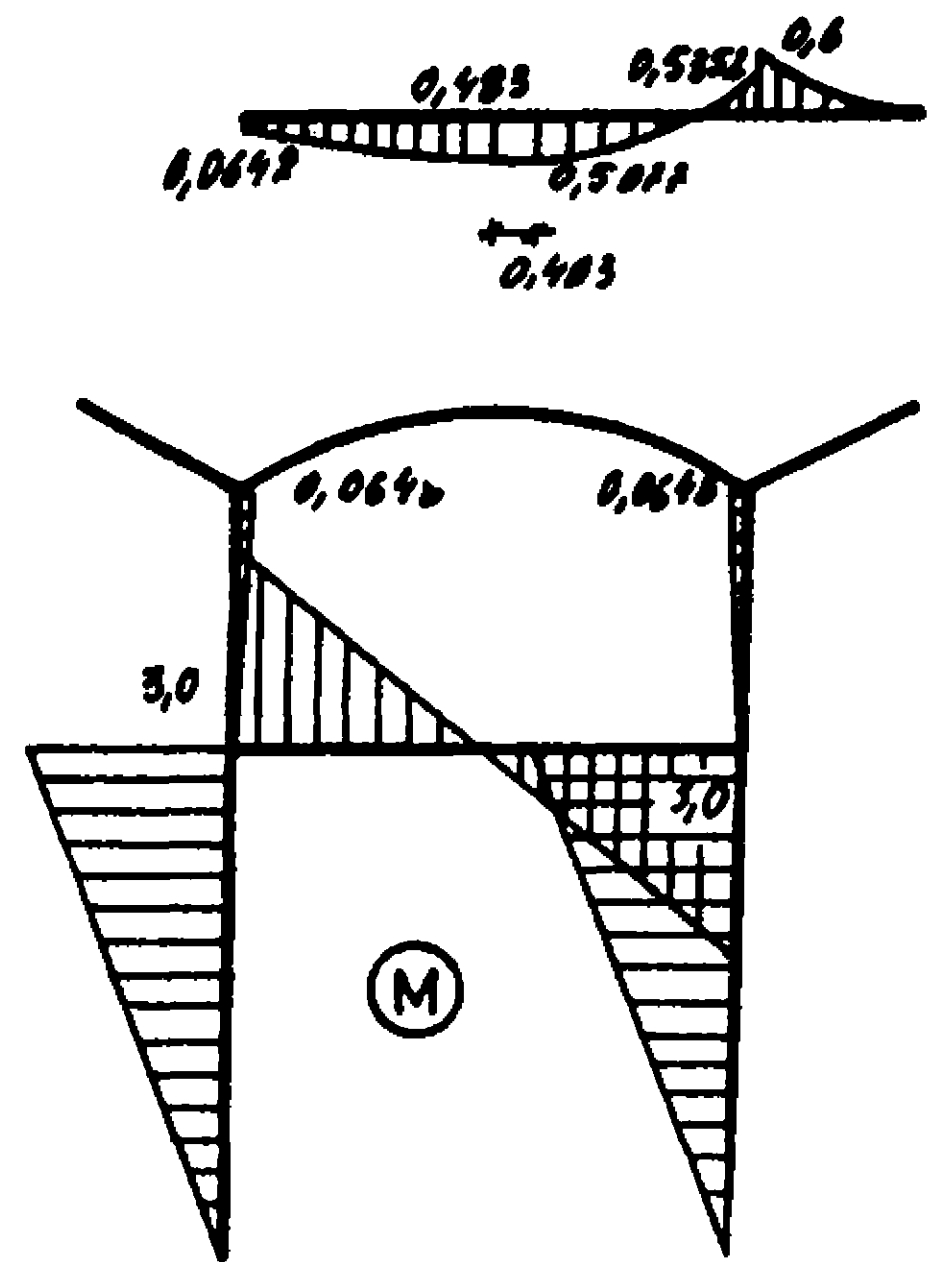
Rys. 14.35



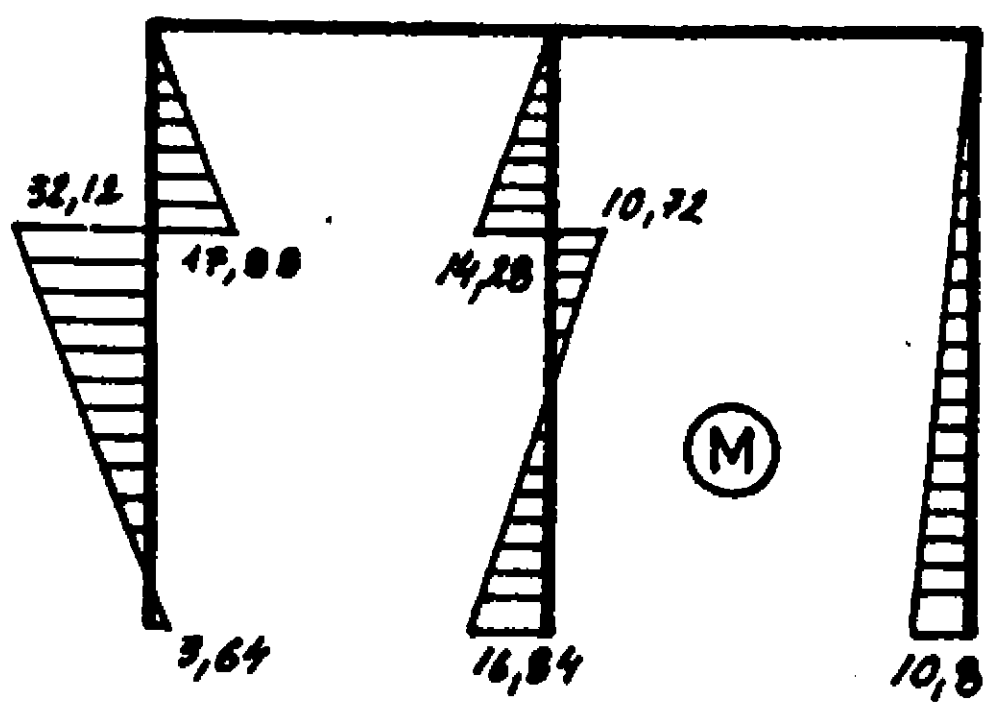
Rys. 14.36



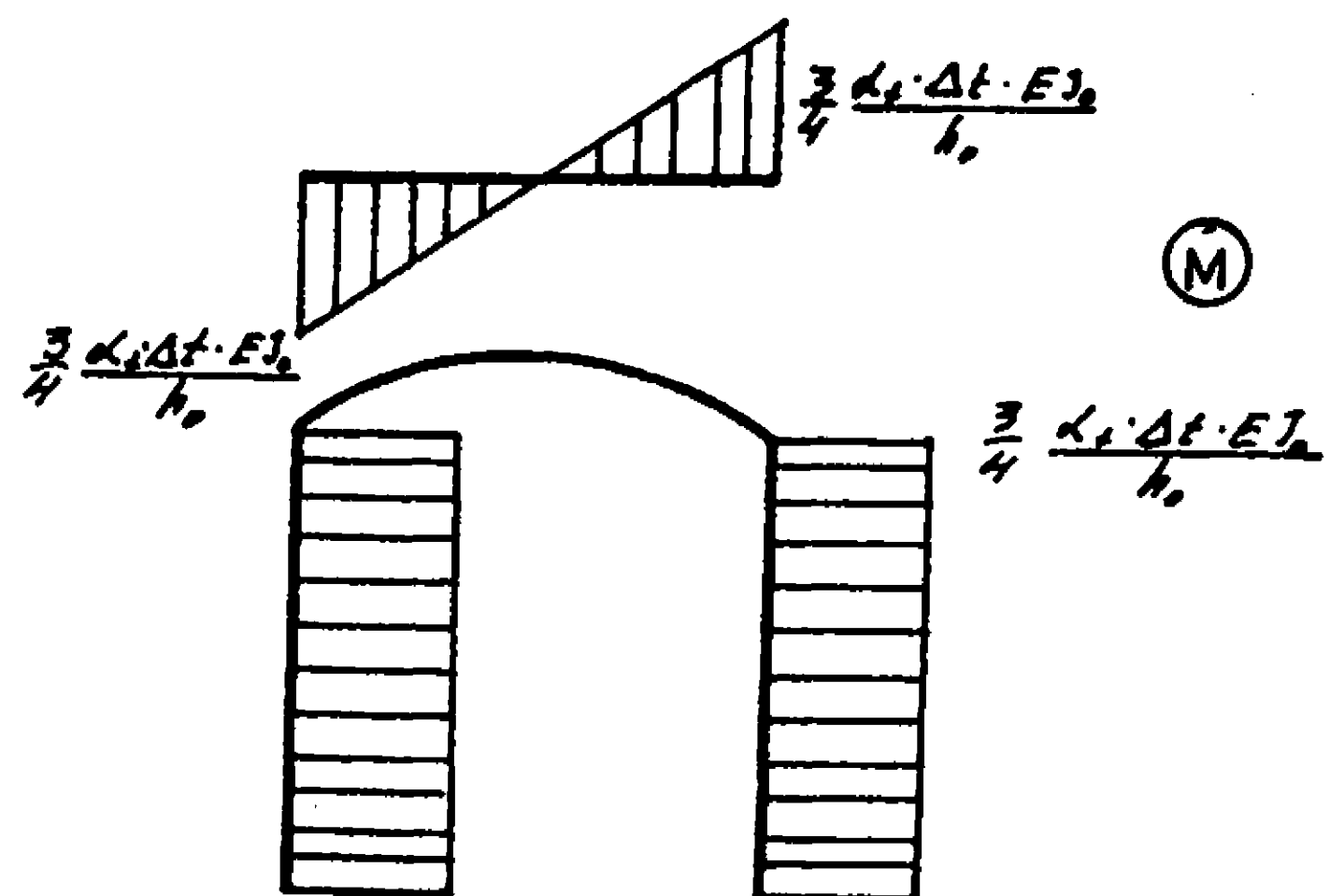
Rys. 14.37



Rys. 14.38



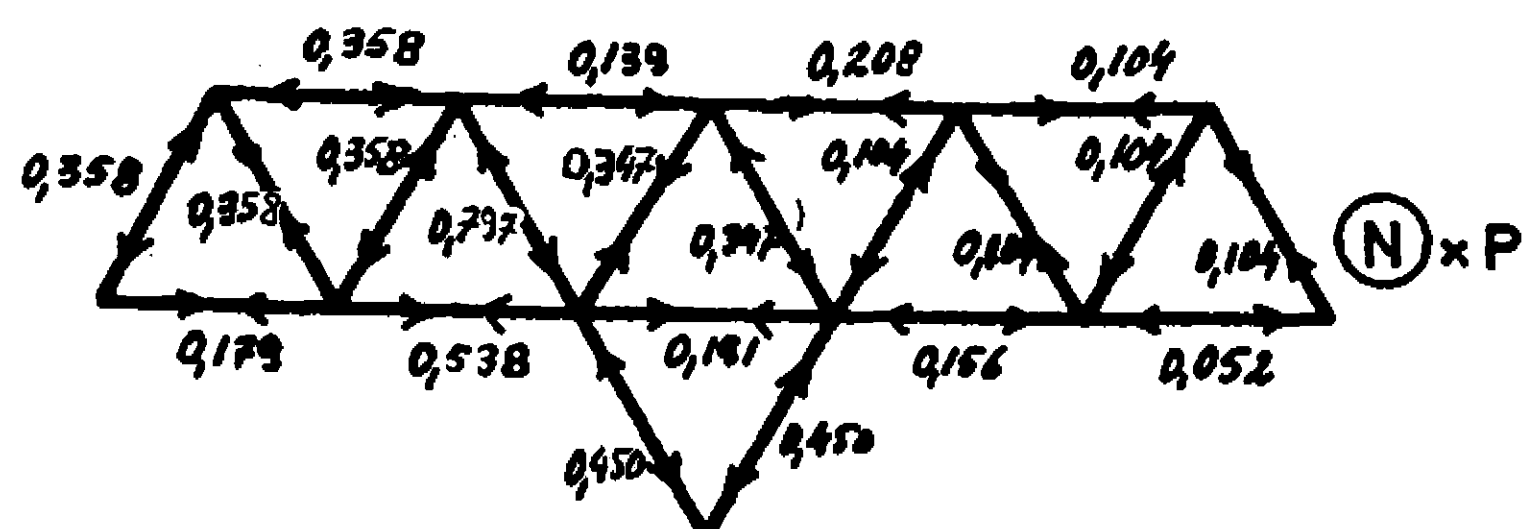
Rys. 14.39



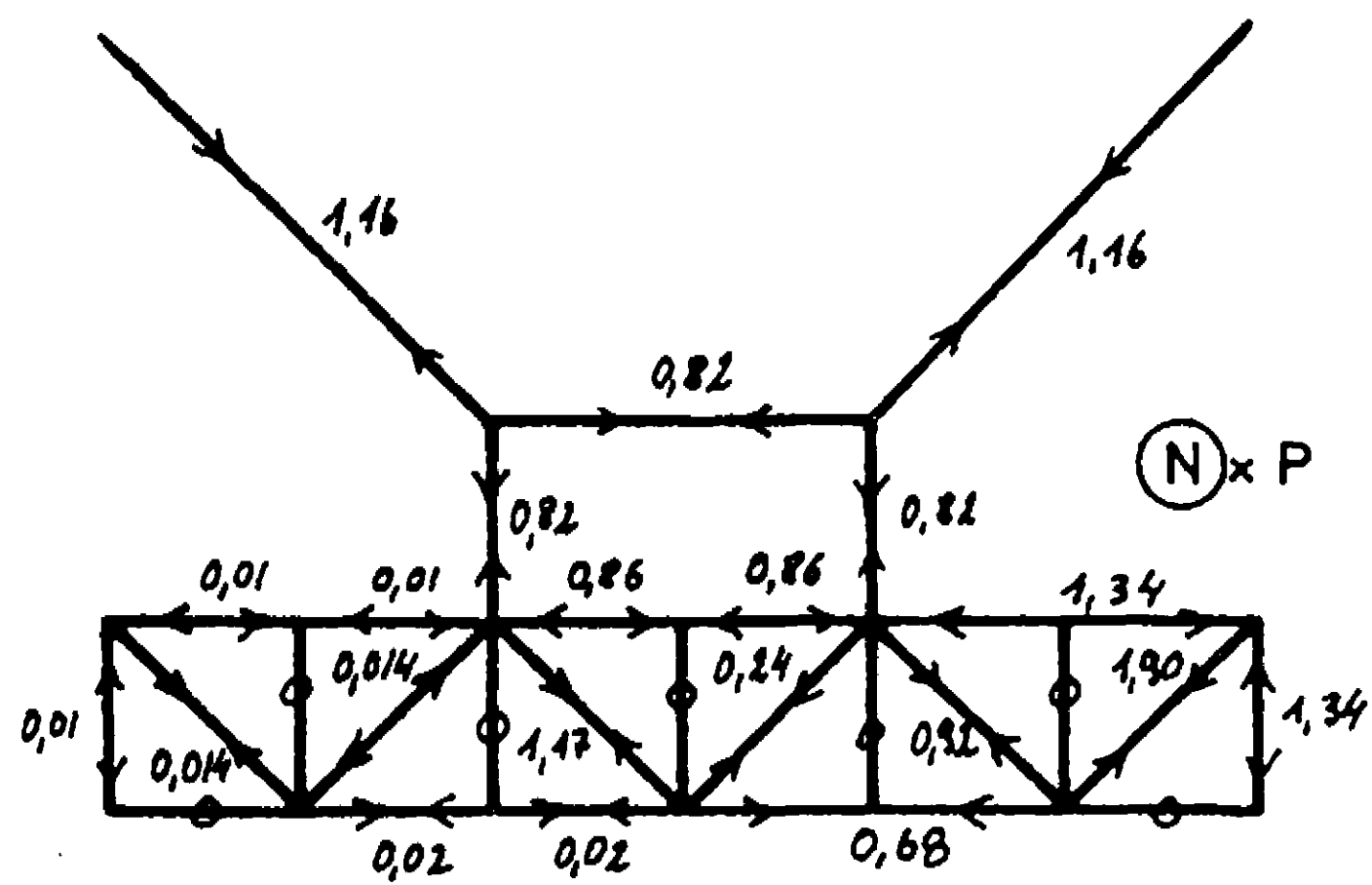
Rys. 14.40

Zadanie 9.3

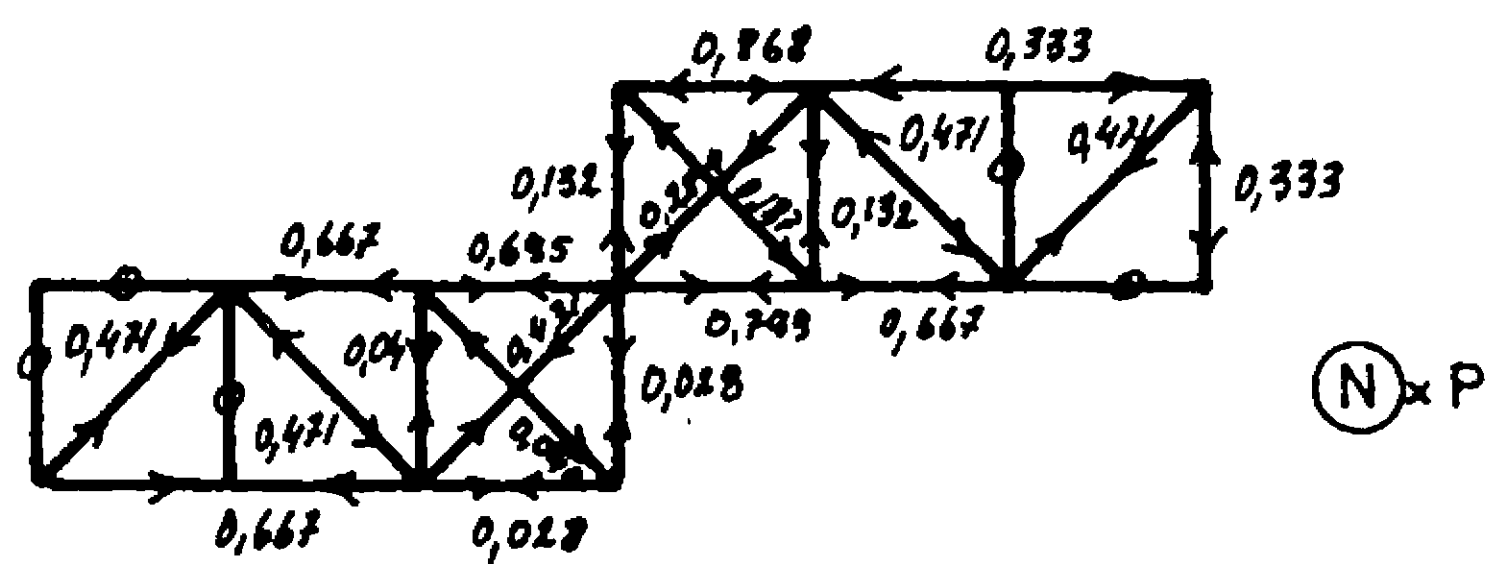
Odpowiedzi do rysunków 9.11a-i są przedstawione kolejno na rysunkach 14.41-14.49.



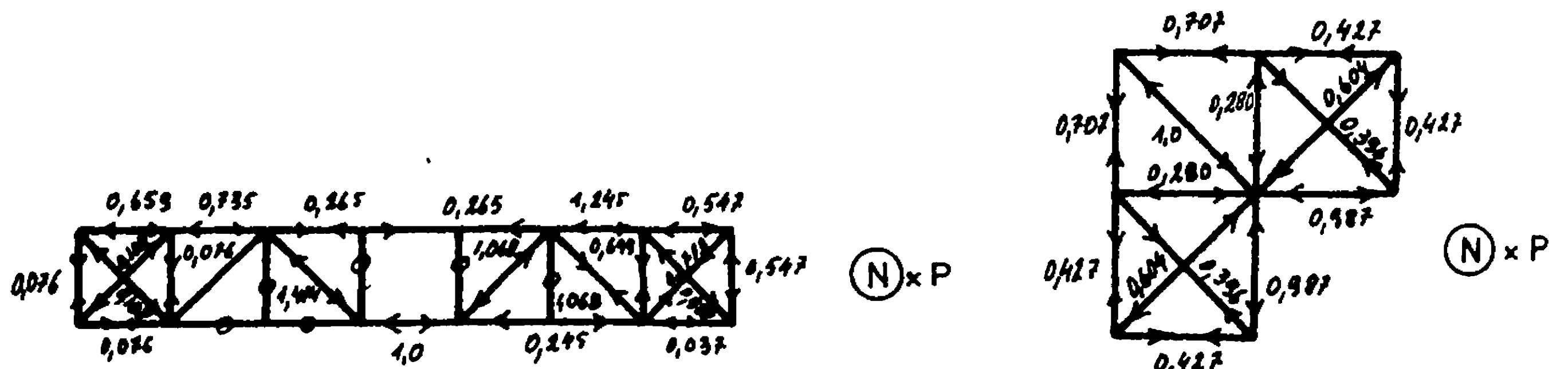
Rys. 14.41



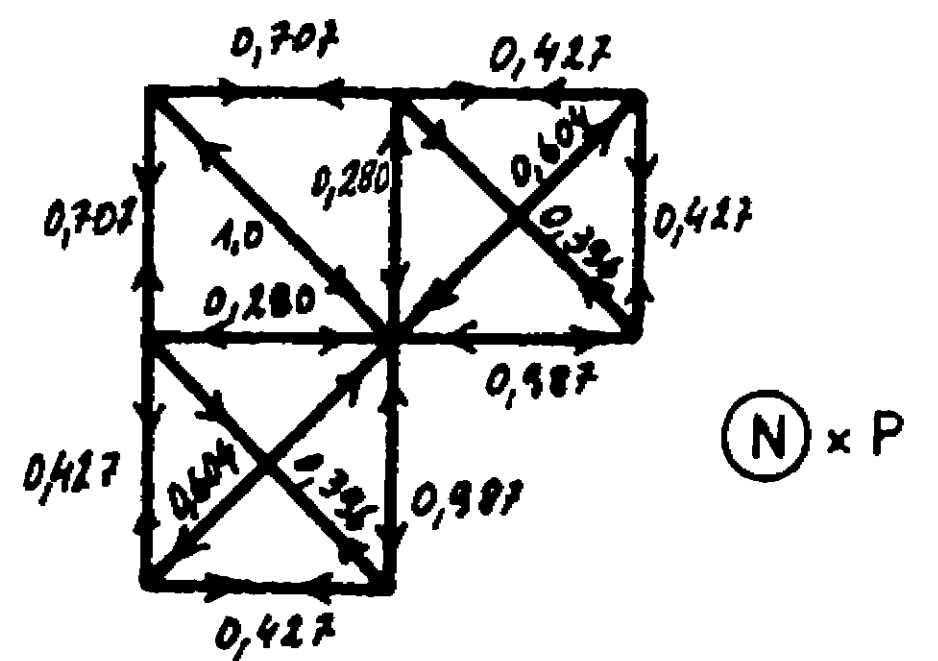
Rys. 14.42



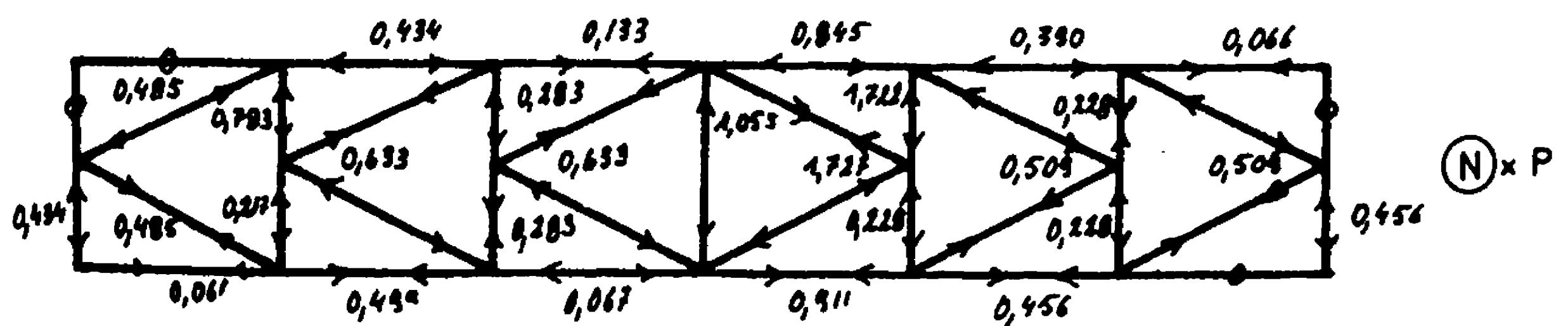
Rys. 14.43



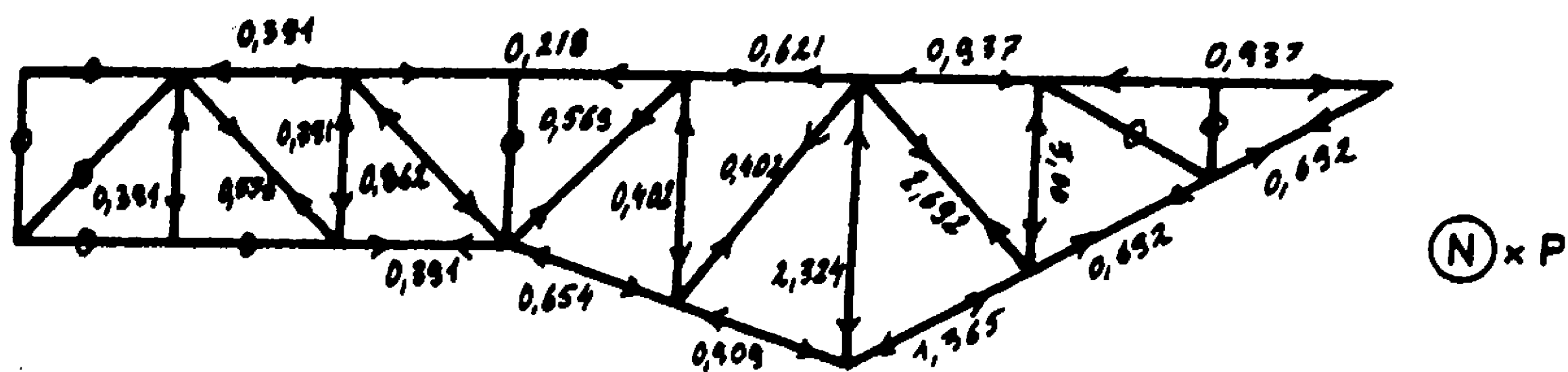
Rys. 14.44



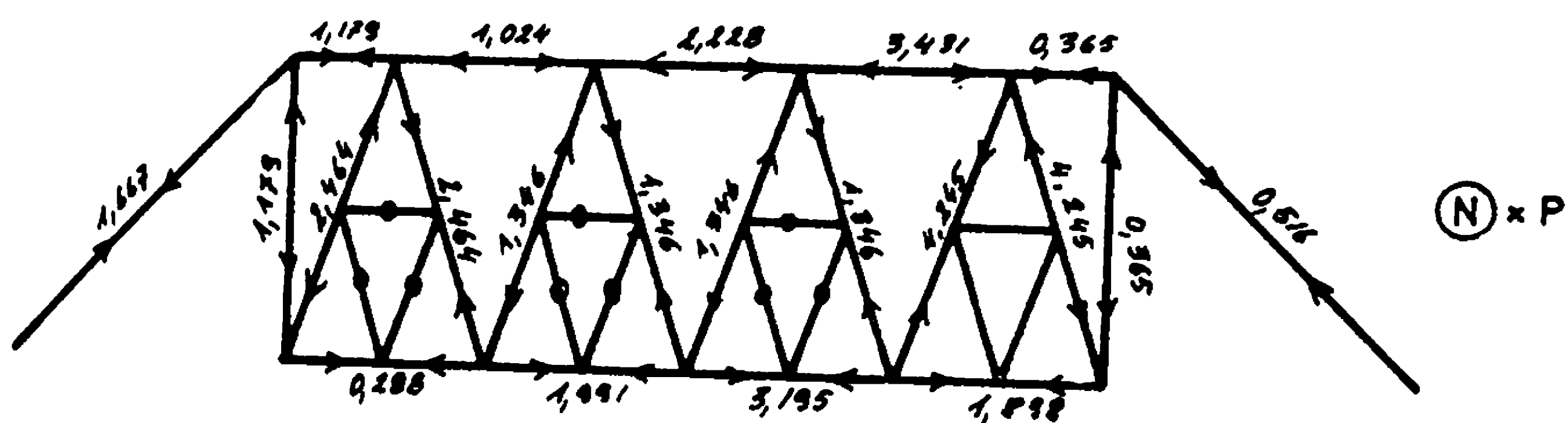
Rys. 14.45



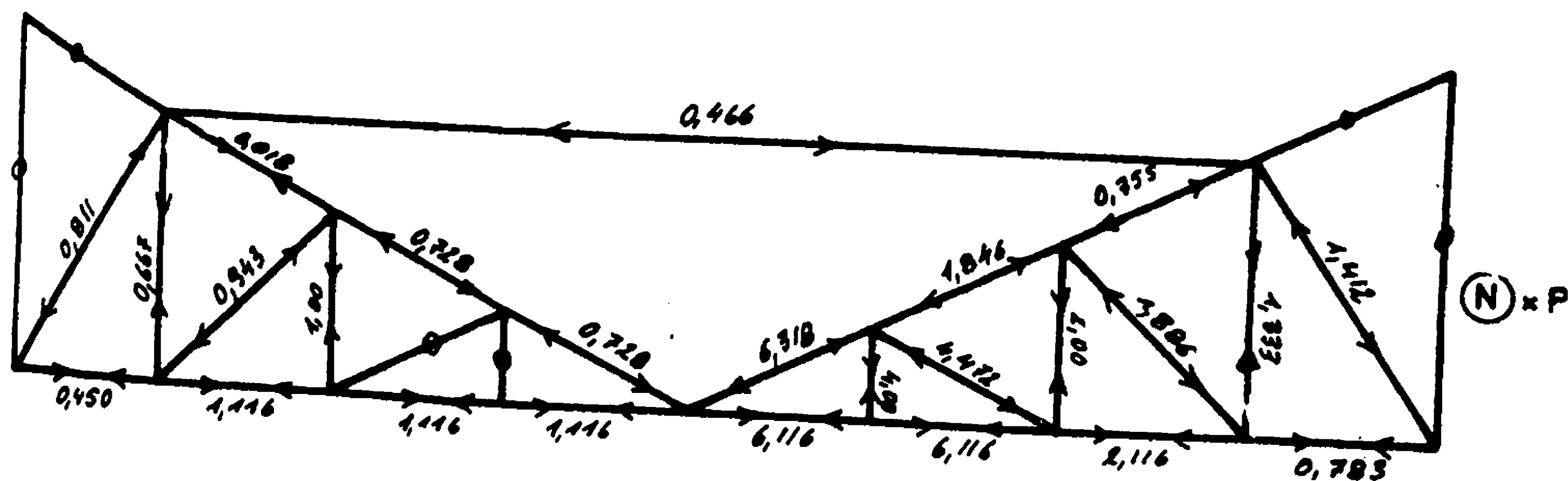
Rys. 14.46



Rys. 14.47



Rys. 14.48



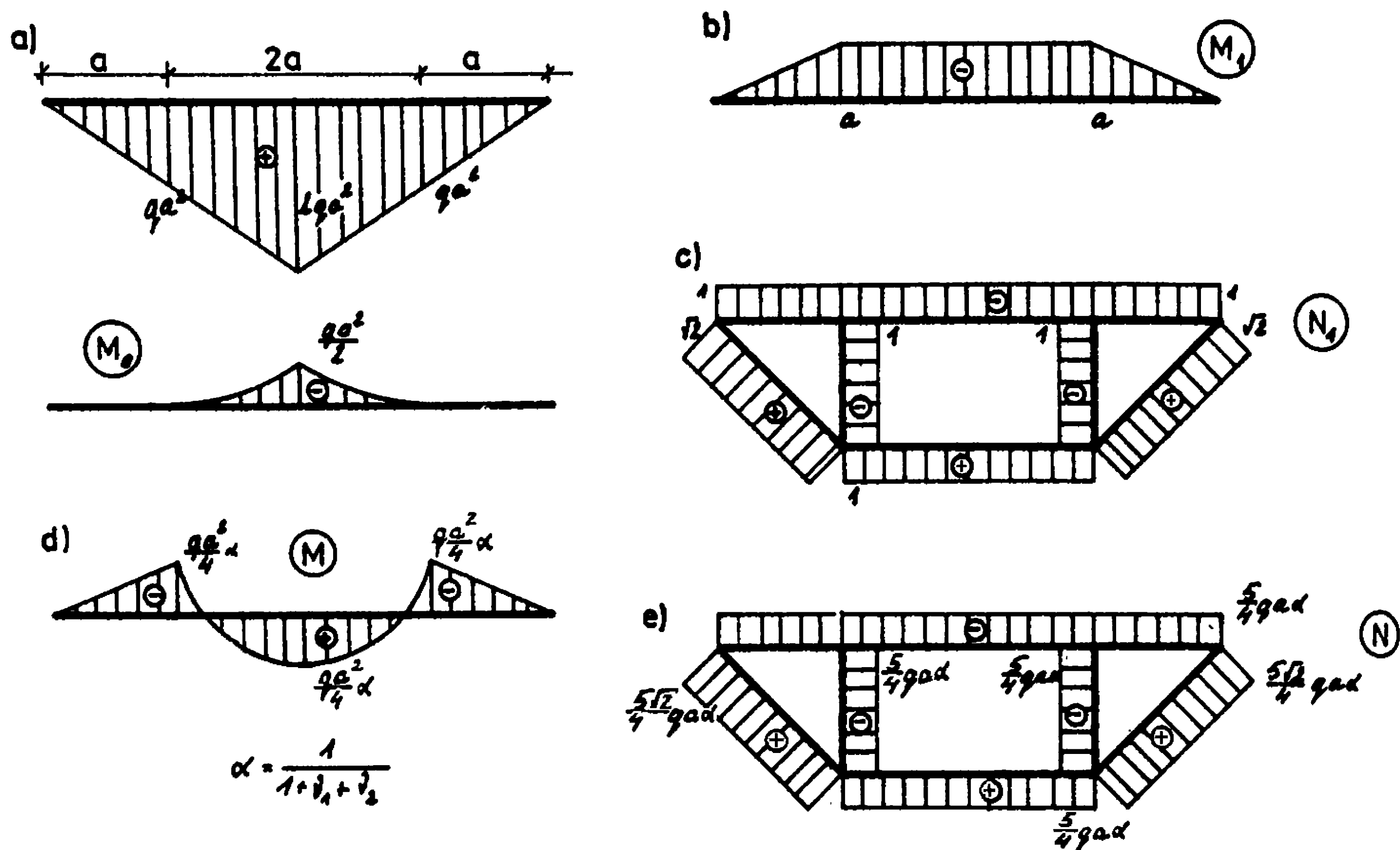
Rys. 14.49

Zadanie 10.2

Odpowiedź do rysunku 10.2a: wykresy momentów zginających i sił normalnych w stanie "zerowym" i od stanu $x_1 = 1$ przedstawiono na rysunku 14.50a, b, c

$$\delta_{11} = \frac{8a^3}{3EJ} (1 + \gamma_1 + \gamma_2),$$

$$\gamma_1 = \frac{3}{2a^2} \frac{J}{A_b}, \quad \gamma_2 = \frac{3(1 + \sqrt{2})}{2a^2} \frac{J}{A_p}.$$



Rys. 14.50a-e

Współczynnik γ_1 uwzględnia wpływ sił normalnych w belce na przemieszczenie δ_{11} , a γ_2 wpływ sił normalnych w prętach kratowych na przemieszczenie δ_{11}

$$\delta_{10} = - \frac{10qa^4}{3EJ},$$

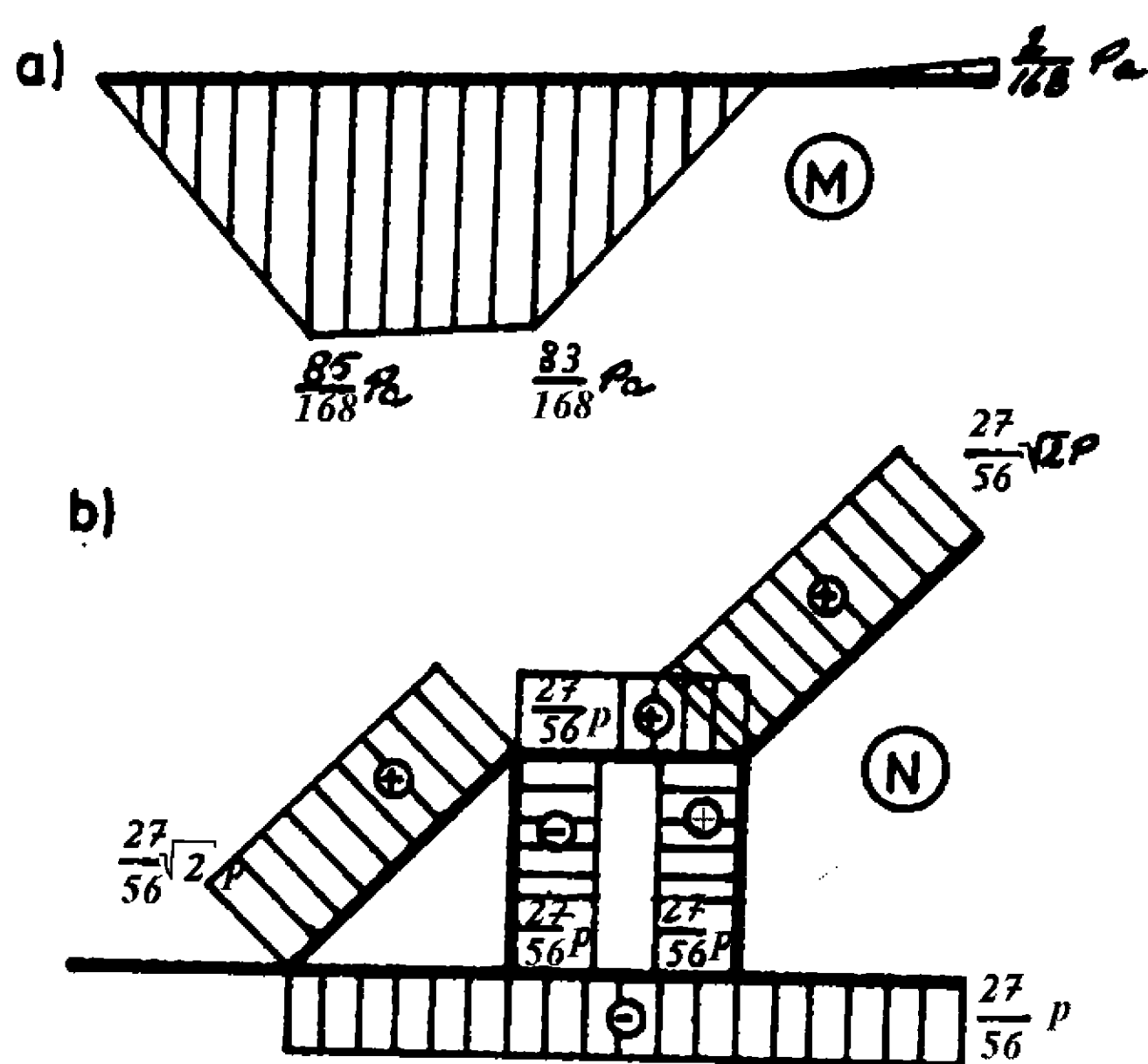
$$x_1 = \frac{5qa}{4} \cdot \frac{1}{1 + \gamma_1 + \gamma_2}.$$

Ostateczne wykresy M i N przedstawiono na rysunkach 14.50d,e. Odpowiedzi do rysunku 10.2b przedstawiono na rysunkach 14.51a-b. Nadliczbowe x_1 przyjęto w przecie 1-2

$$x_1 = \frac{27P}{56} \cdot \frac{1}{1 + \gamma_1 + \gamma_2}.$$

$$\gamma_1 = \frac{81}{7a^2} \cdot \frac{J}{A_b},$$

$$\gamma_2 = \frac{27}{7} \cdot \frac{3 + 4\sqrt{2}}{a^2} \cdot \frac{J}{A_p}$$



Rys. 14.51a-b

. Przy sporządzaniu wykresów M i N przyjęto $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Zadanie 11.4

Odpowiedź do rysunku 11.4a:

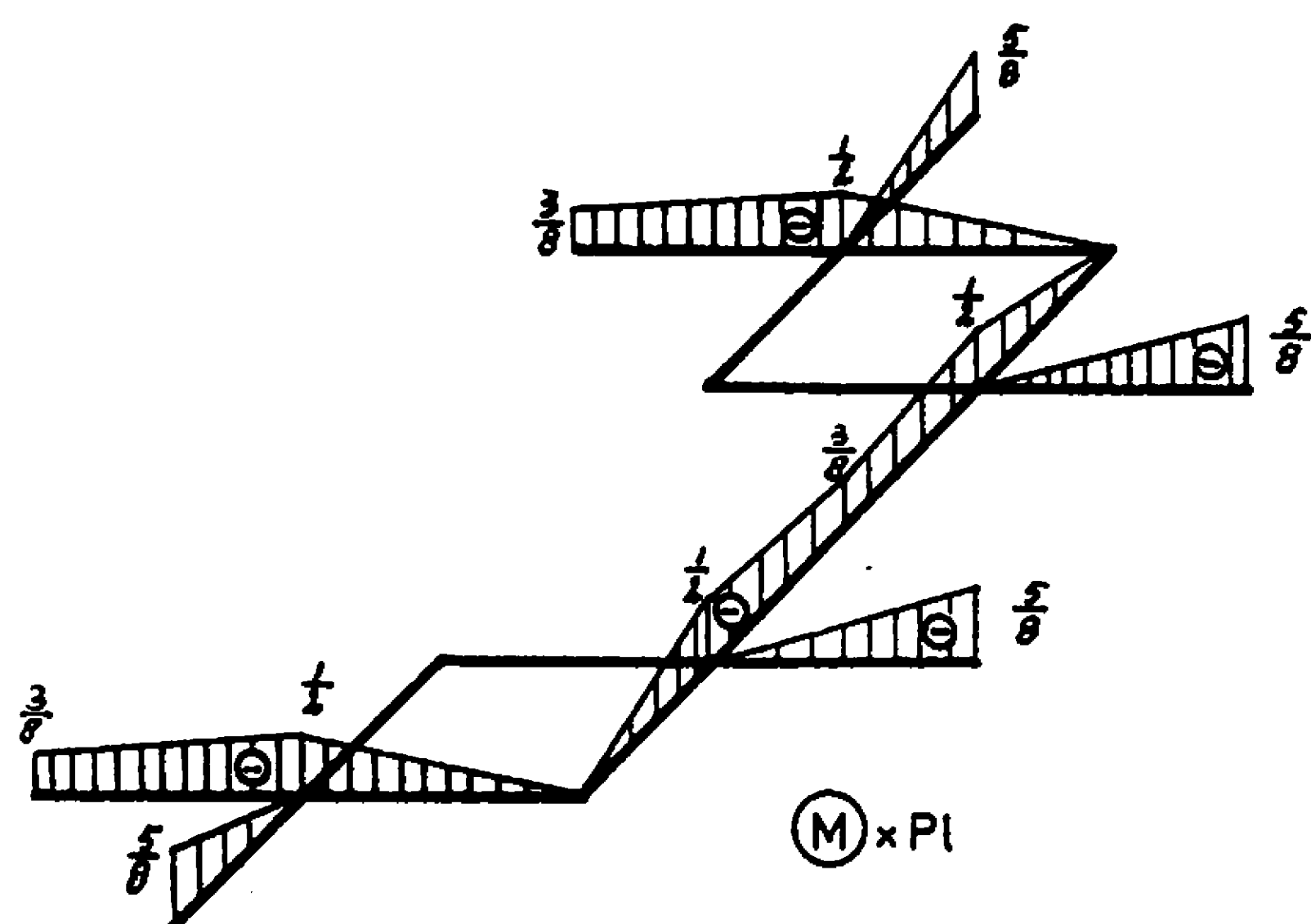
$$\delta_1 = \frac{31}{16} \cdot \varphi_A \quad [\text{m}].$$

Odpowiedź do rysunku 11.4b:

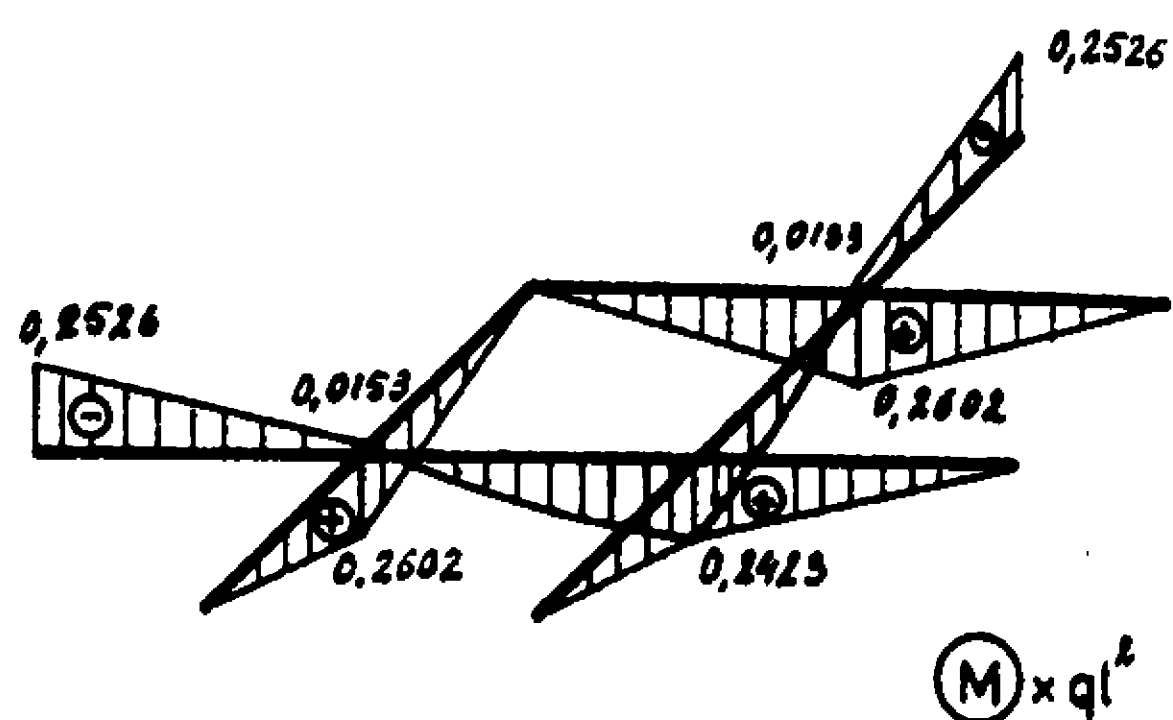
$$\delta_1 = \frac{20,2148 \text{ Pa}}{EA} \quad [\text{m}].$$

Zadanie 12.4

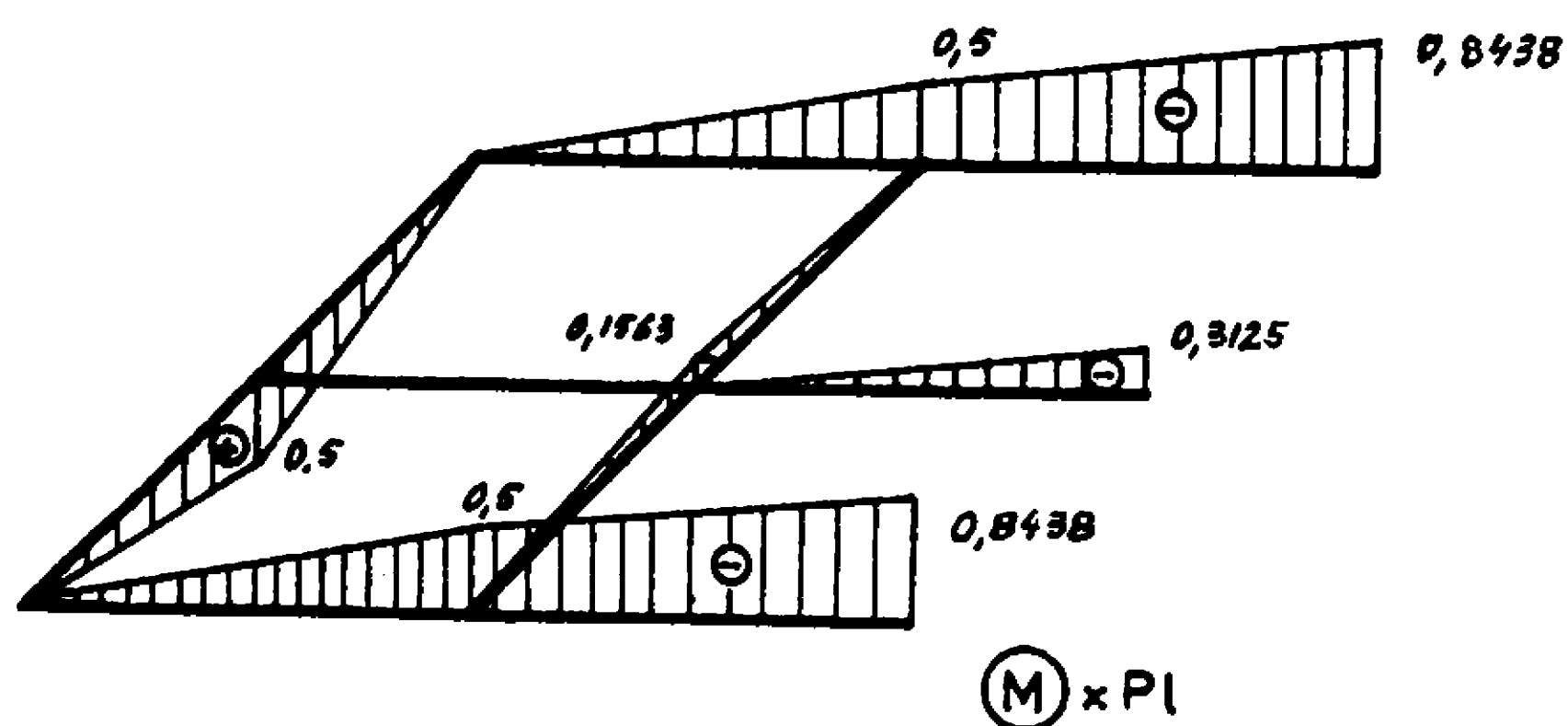
Odpowiedzi do rysunków 12.30a-j są przedstawione na rysunkach 14.52-14.61.



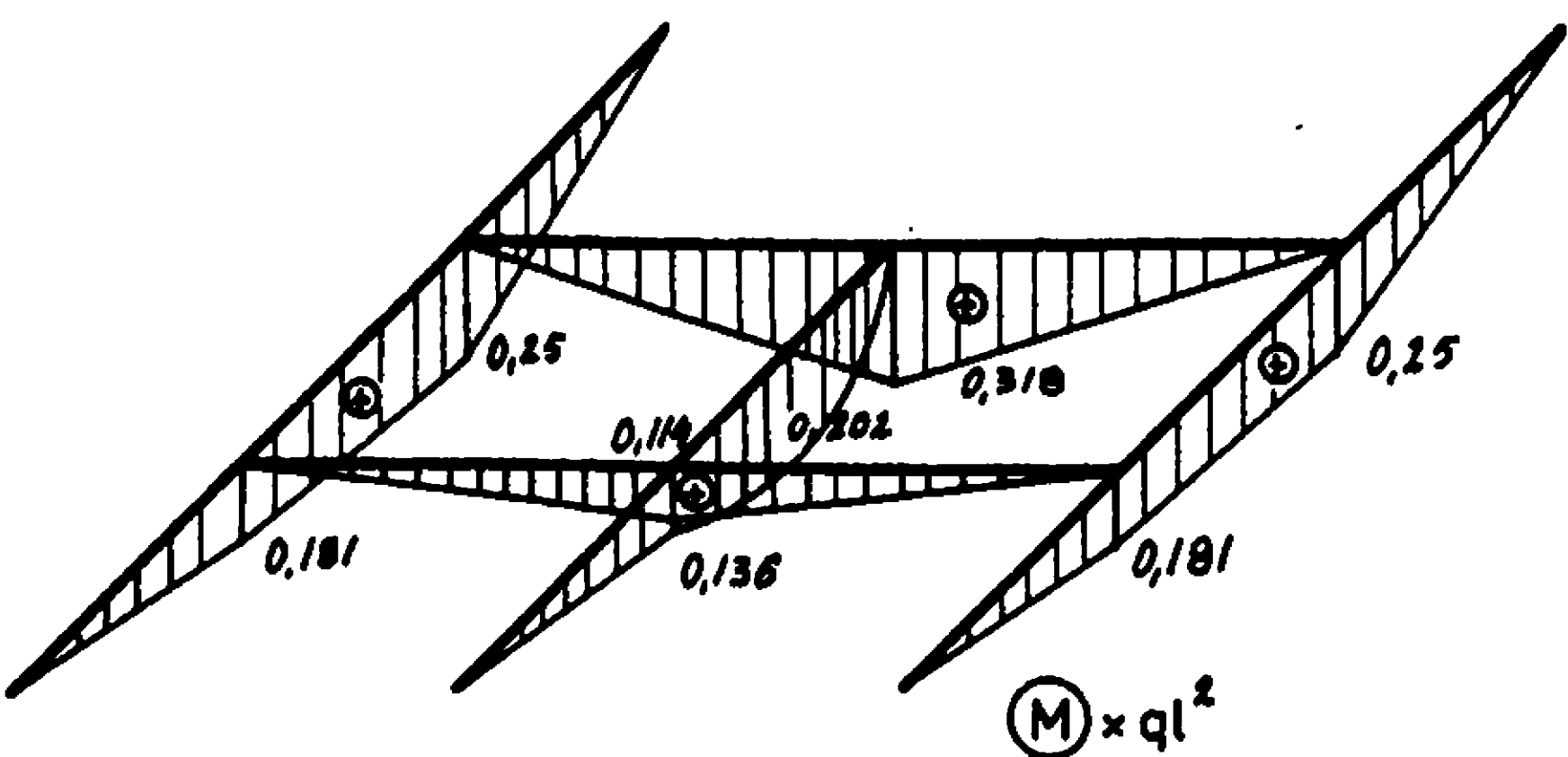
Rys. 14.52



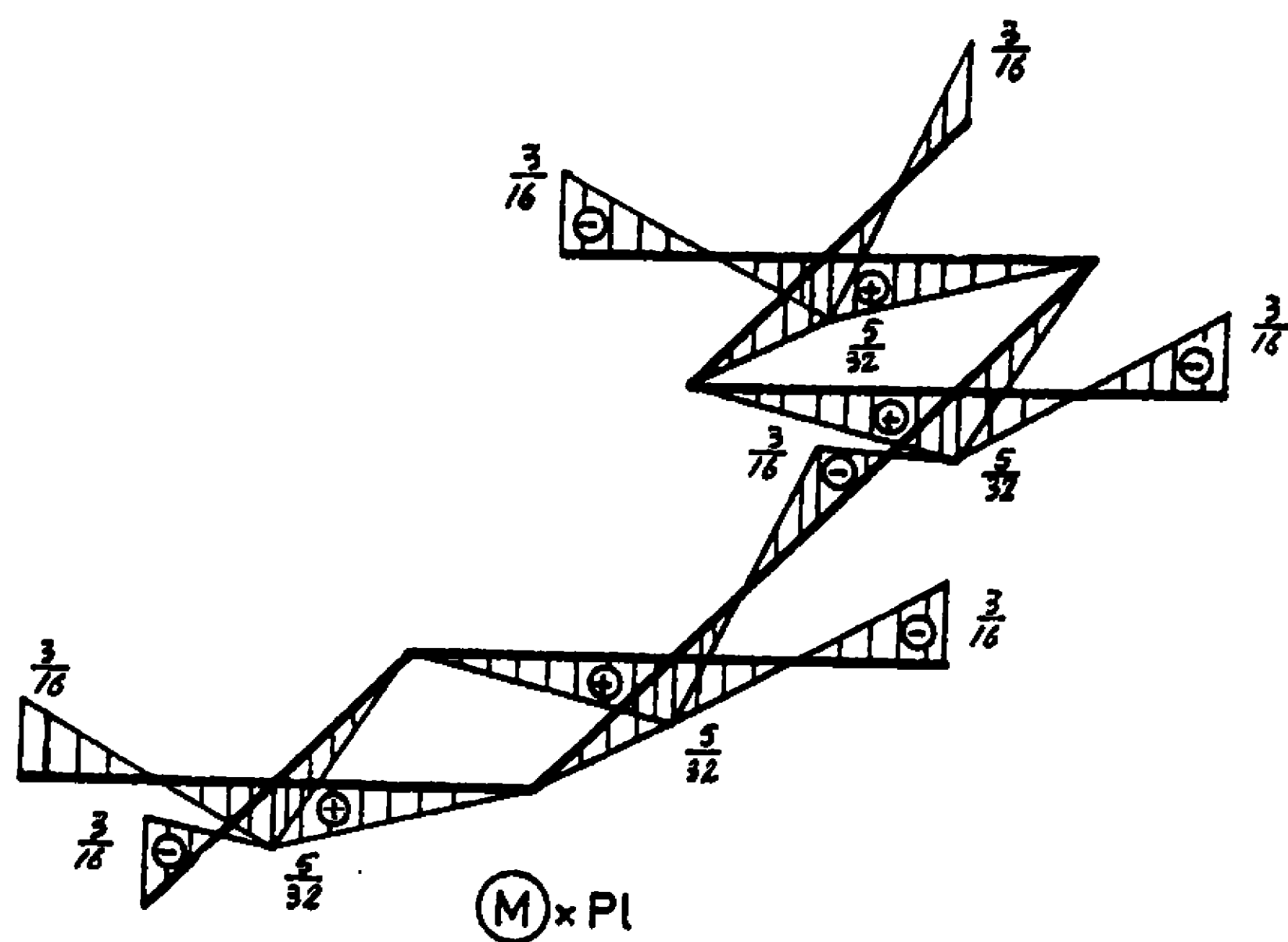
Rys. 14.53



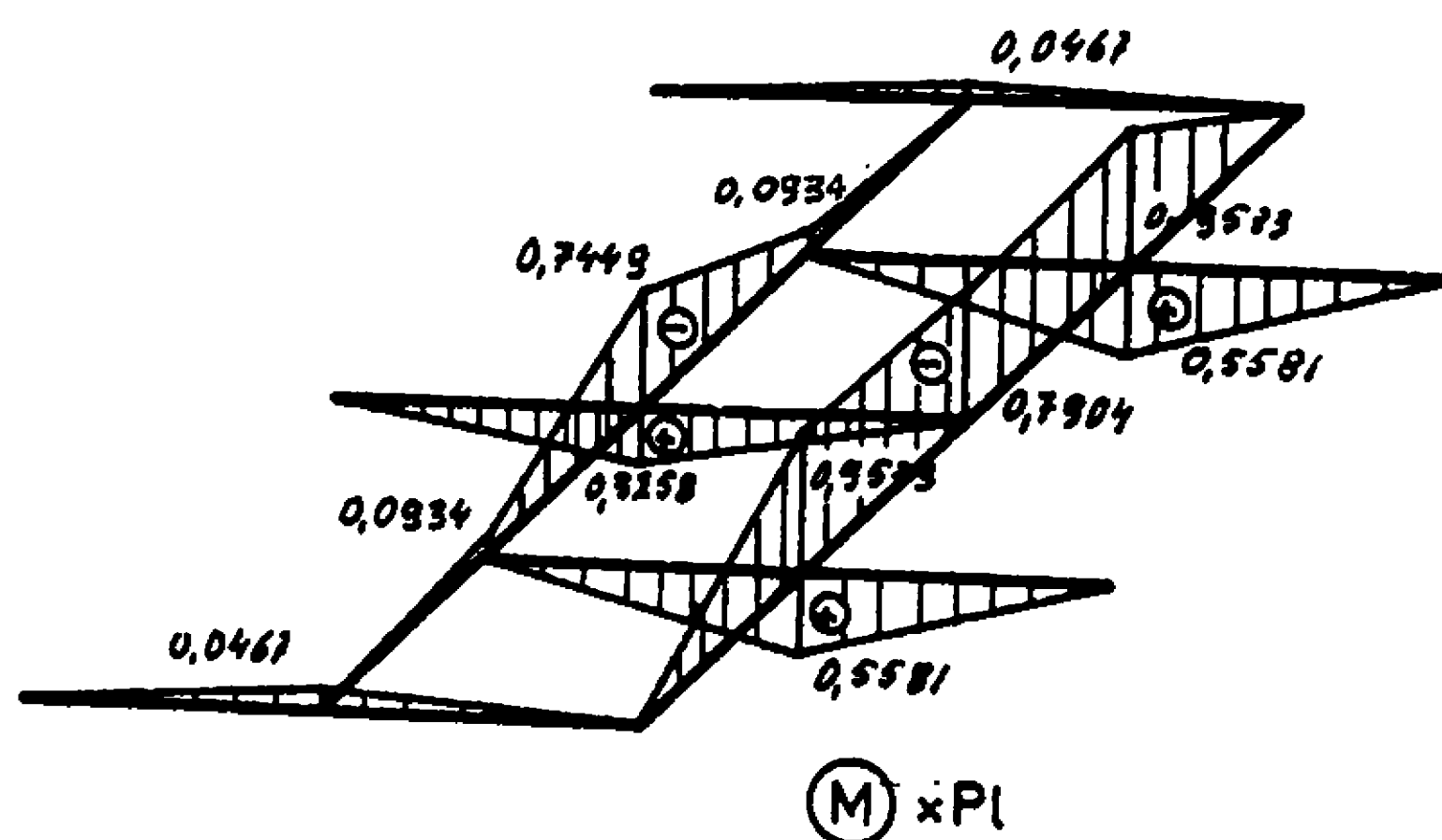
Rys. 14.54



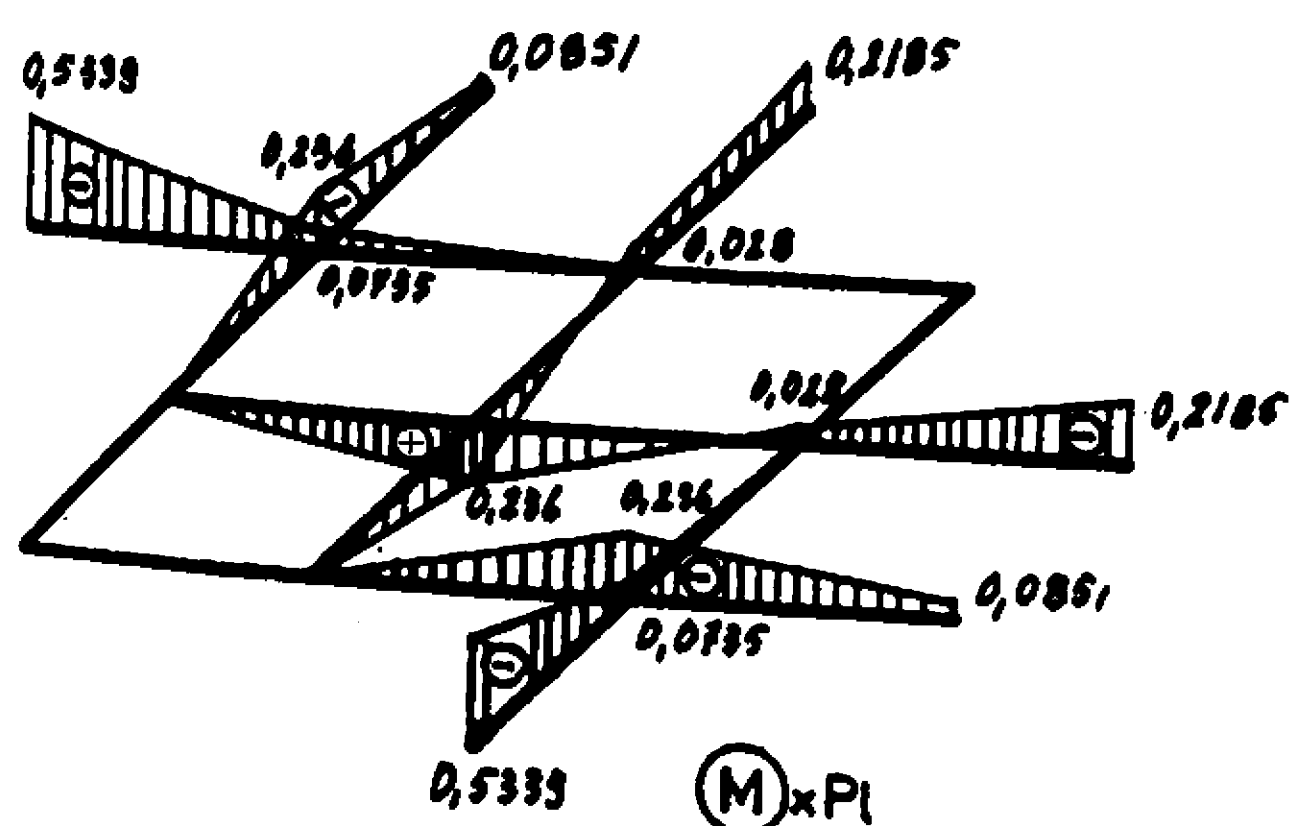
Rys. 14.55



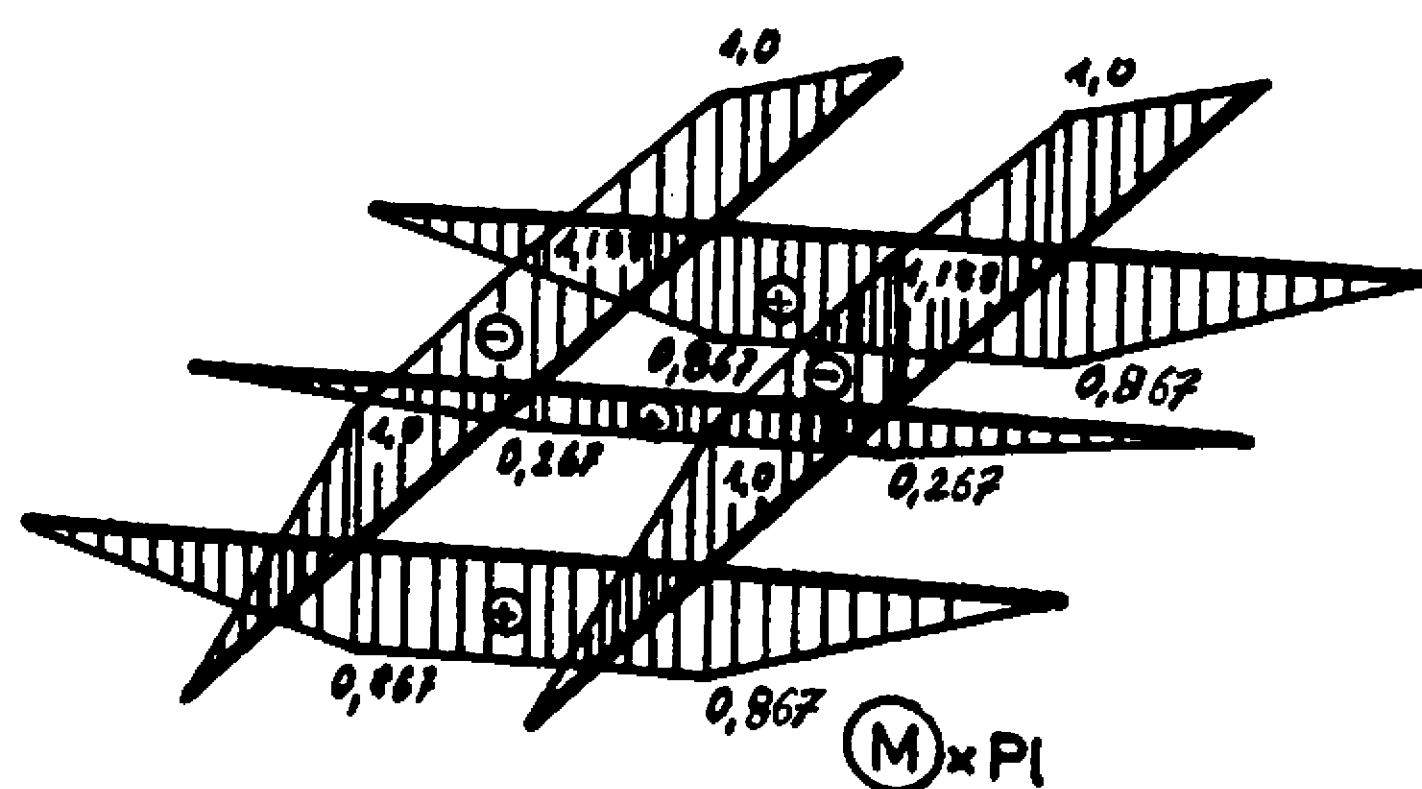
Rys. 14.56



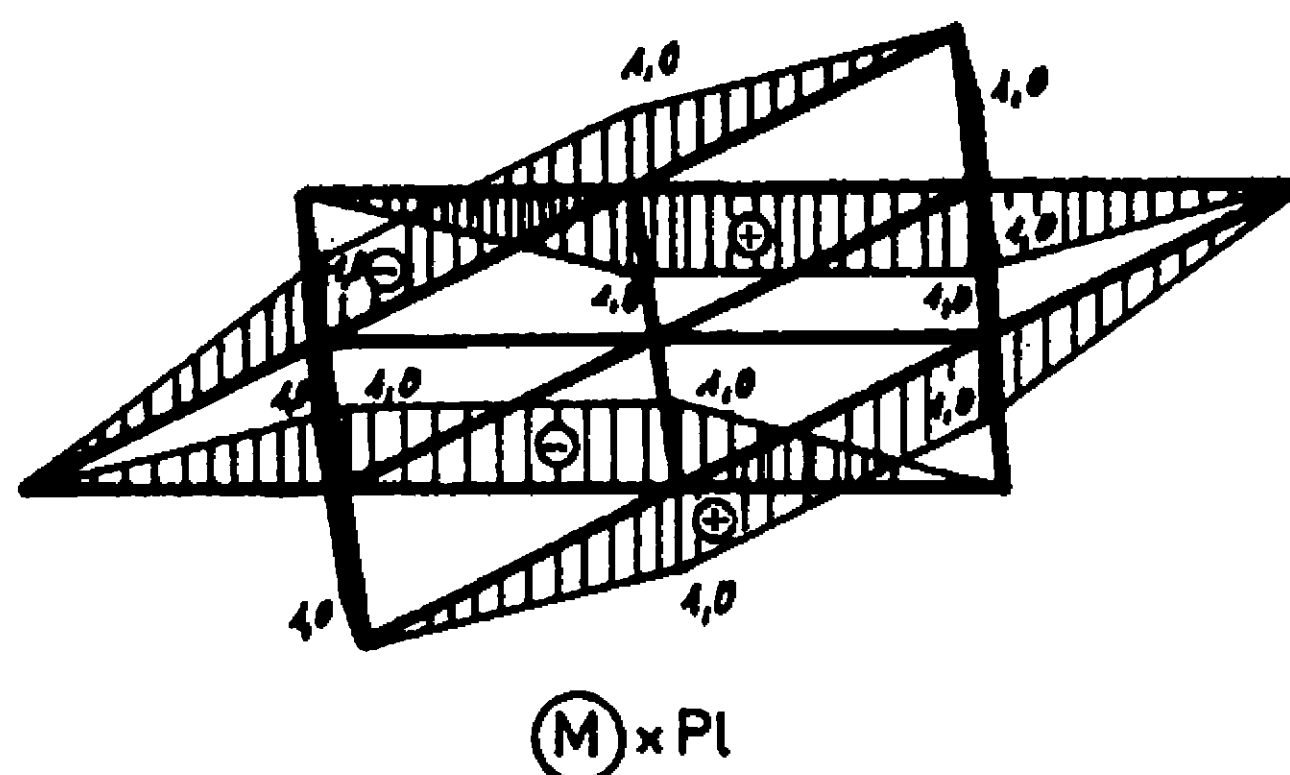
Rys. 14.57



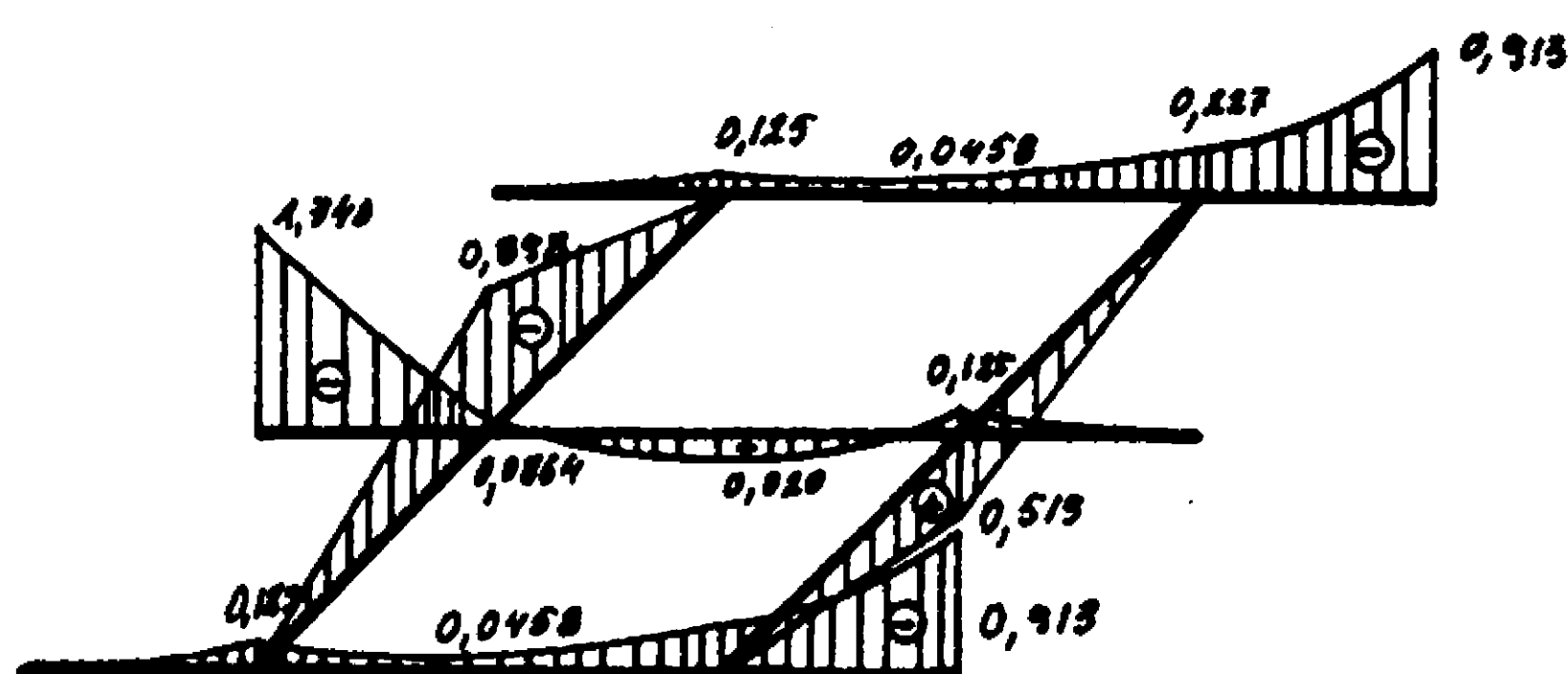
Rys. 14.58



Rys. 14.59



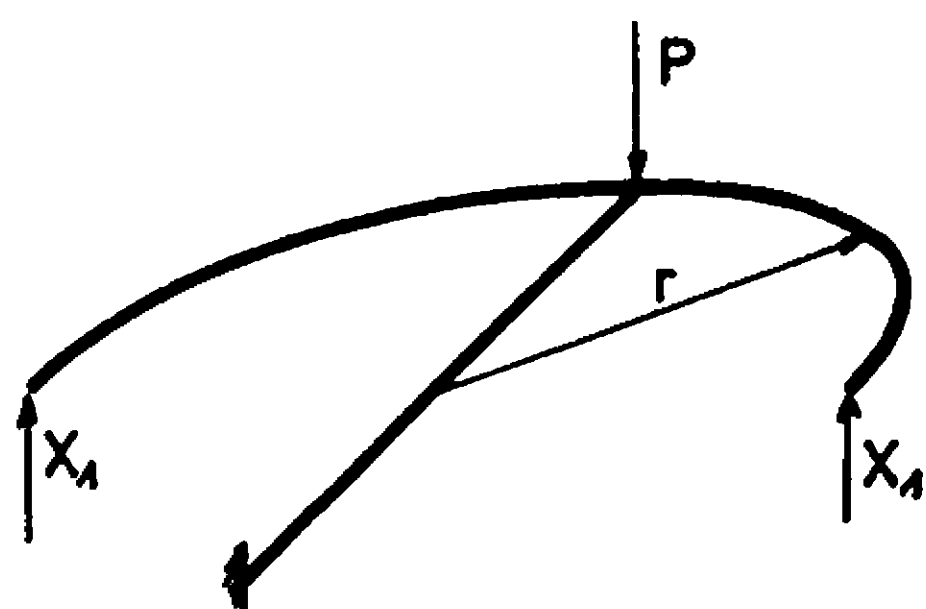
Rys. 14.60



Rys. 14.61

Zadanie 13.4

Odpowiedź do rysunku 13.21e: układ podstawowy przyjęto jak na rysunku 14.62a.



Rys. 14.62a

Wykres momentów zginających i skręcających w stanie "zerowym" i w stanie $x_1 = 1$ przedstawiono na rysunku 14.62b.

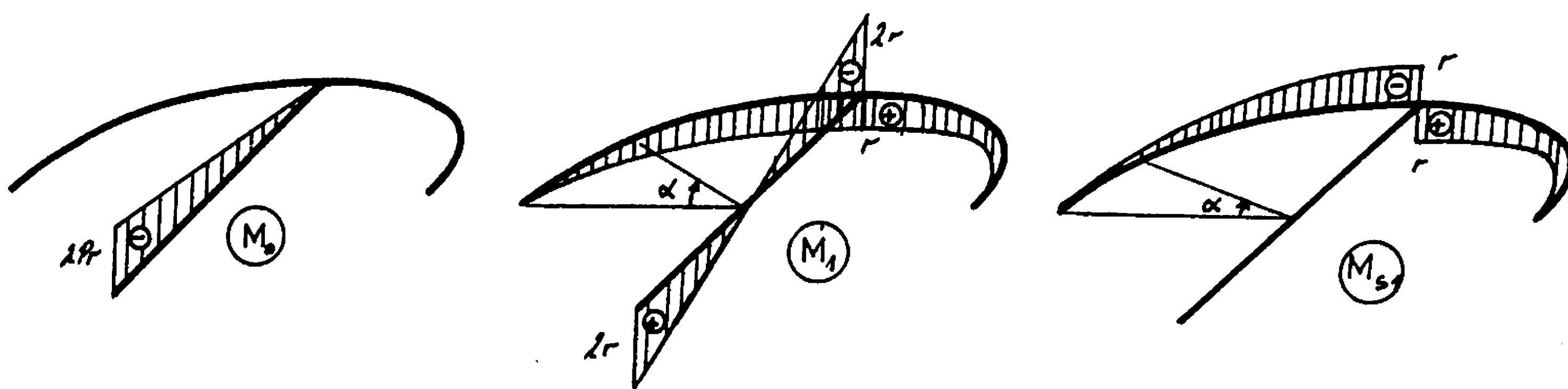
Równanie momentu zginającego i skręcającego na belce kołowej ma postać

$$M_1 = r \sin \alpha ; \quad M_{s1} = r(\cos \alpha - 1),$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

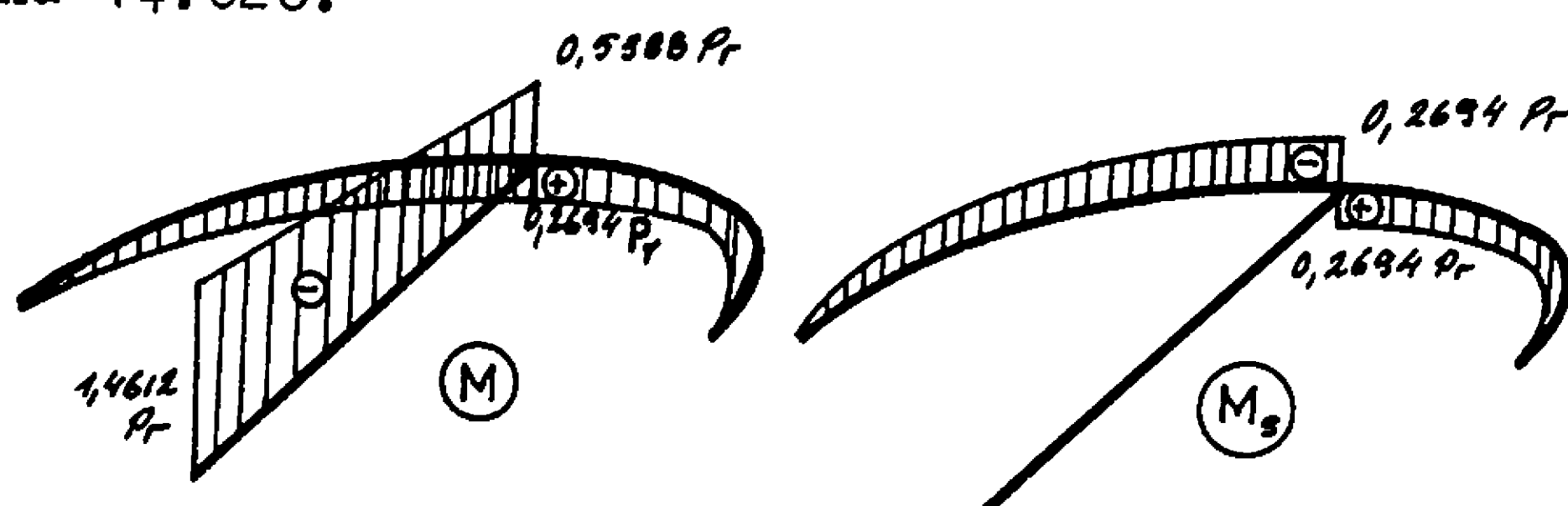
$$\delta_{11} = \frac{r^3}{3EJ} (6\pi - 4), \quad \delta_{10} = - \frac{4Pr^3}{3EJ},$$

$$X_1 = - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{4P}{6\pi - 4} = 0,2694 P.$$



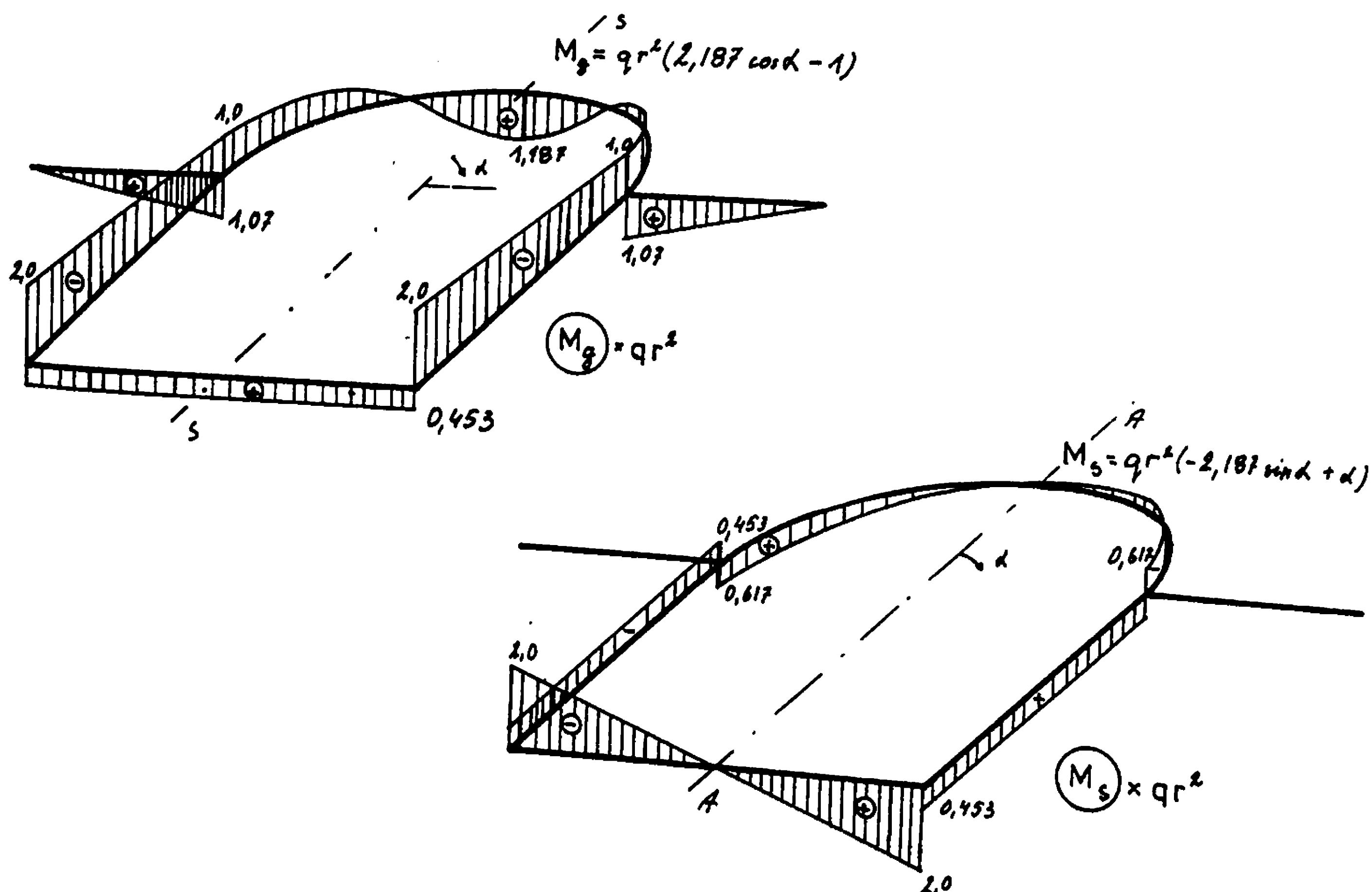
Rys. 14.62b

Ostateczny wykres momentu zginającego i skręcającego przedstawiono na rysunku 14.62c.

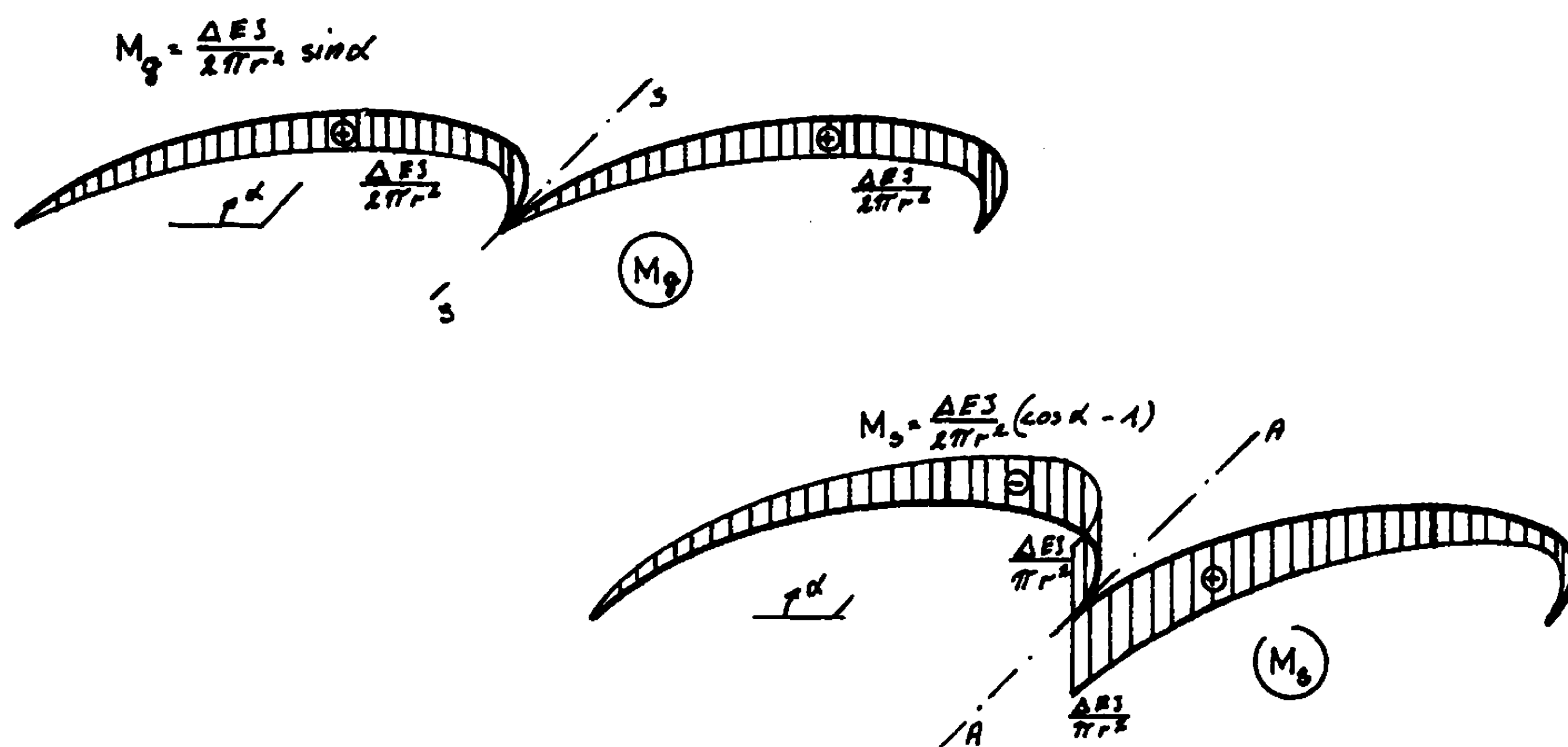


Rys. 14.62c

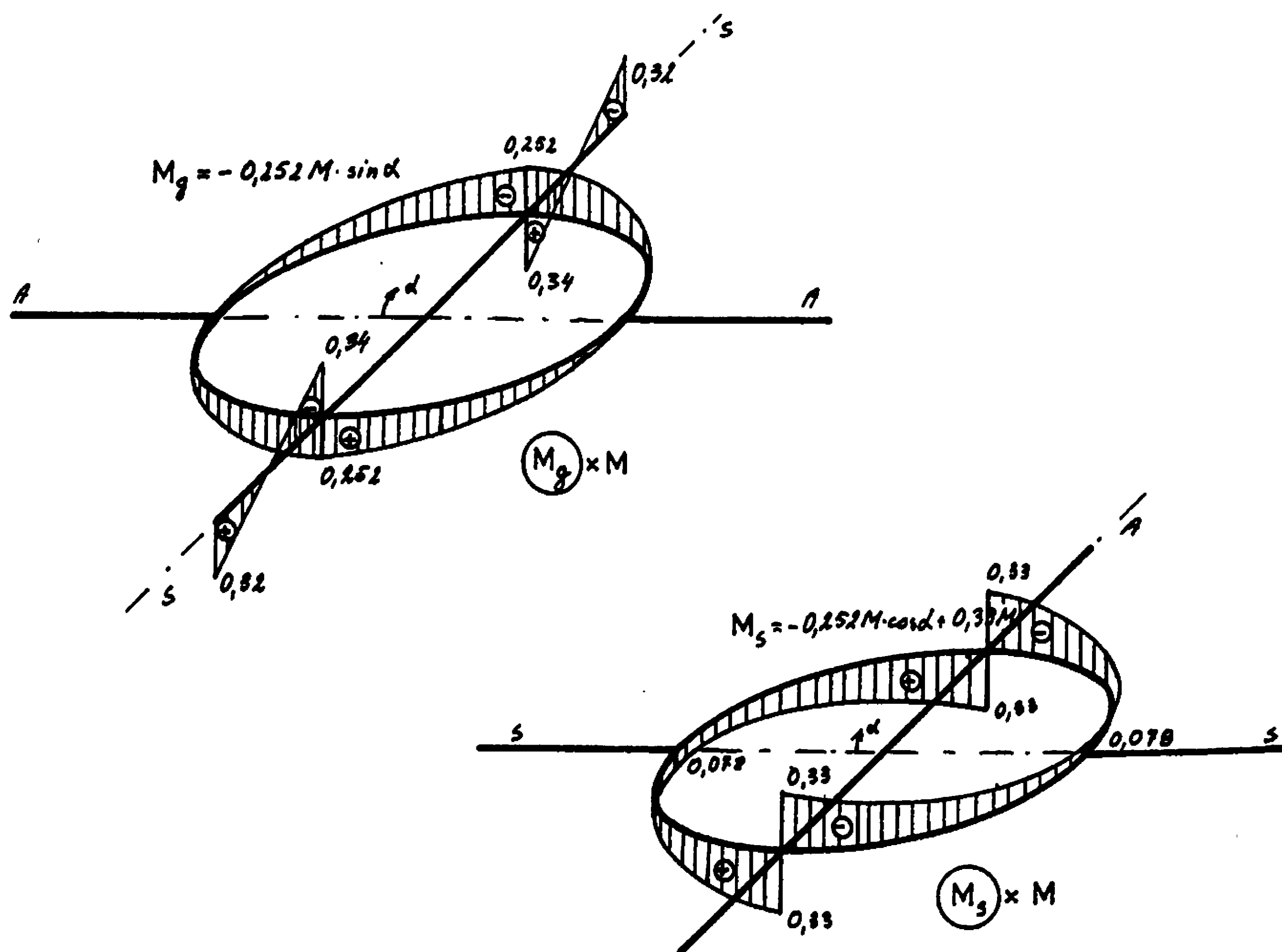
Odpowiedzi do rysunków 13.21i-k są przedstawione na rysunkach 14.63-14.65.



Rys. 14.63



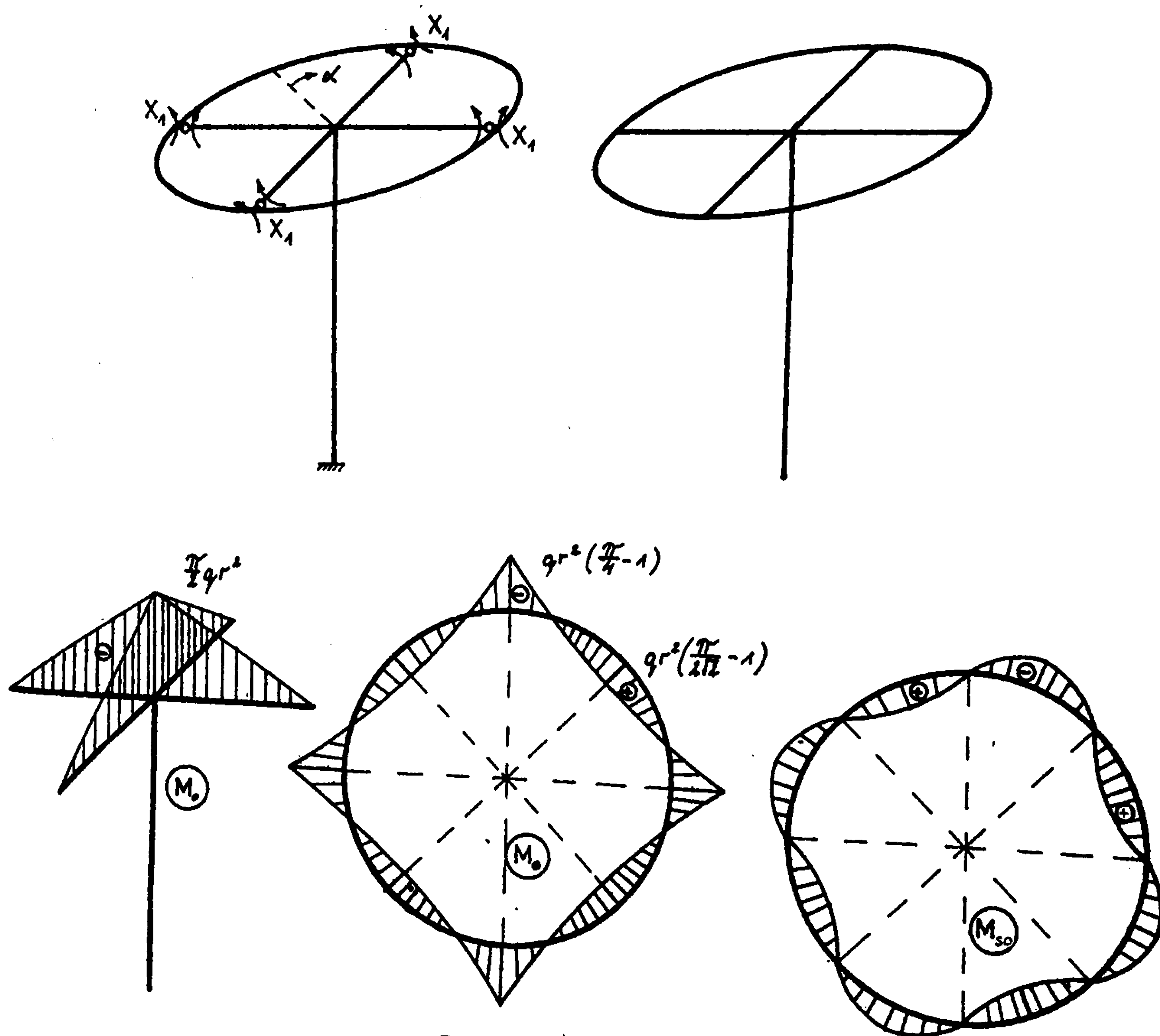
Rys. 14.64



Rys. 14.65

Ódpowiedź do rysunku 13.21.1:

Układ posiada cztery osie symetrii. Wykorzystując osie symetrii otrzymamy tylko jedną nadliczbową x_1 . Nadliczbową x_1 pokazano na rysunku 14.66a. Wykres momentów zginających i skręcających od obciążenia zewnętrznego jest widoczny na rysunku 14.66b.



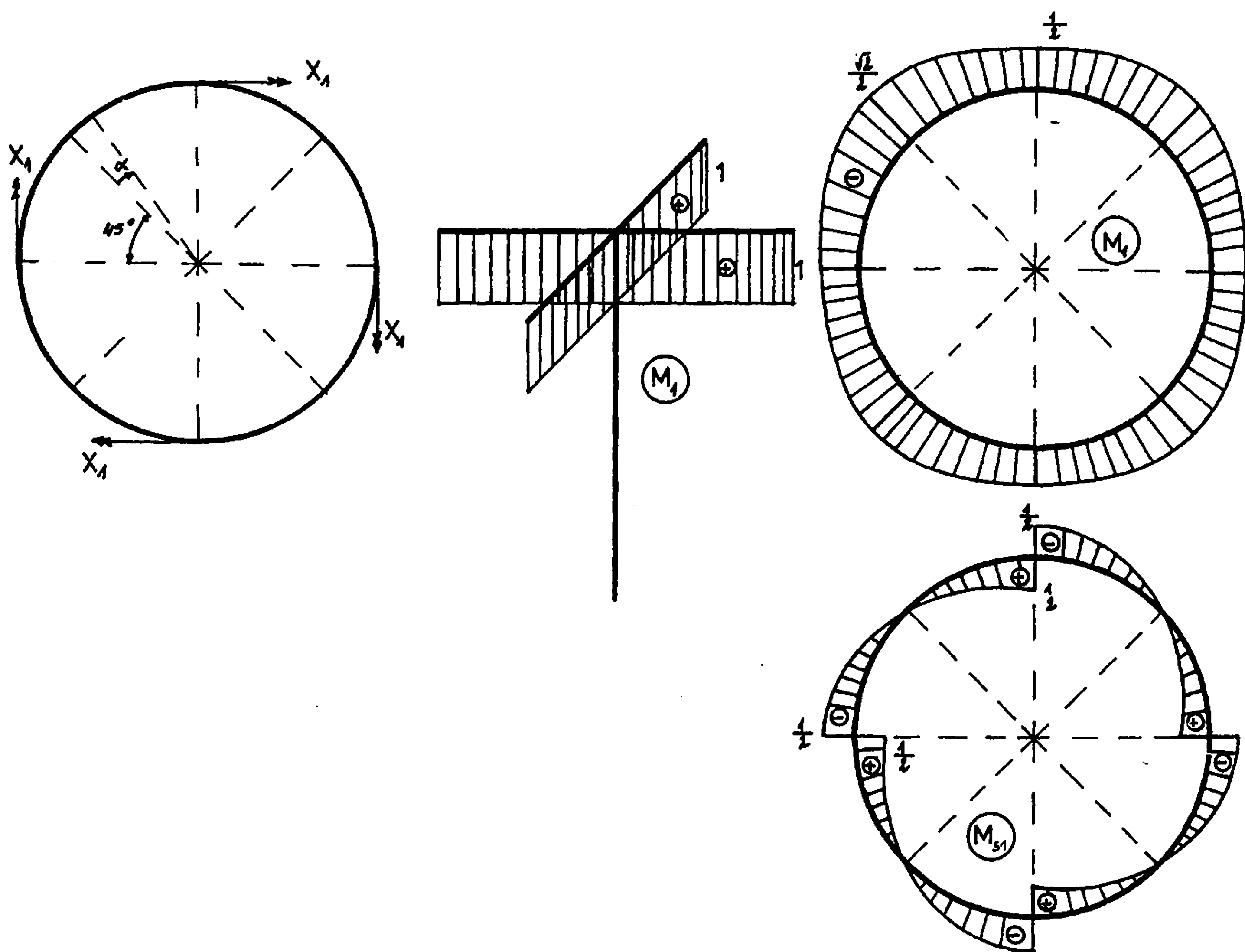
Rys. 14.66a-b

Równanie momentu zginającego i skręcającego od obciążenia zewnętrznego na przęcie kołowym ma postać:

$$M_0 = qr^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \cos \alpha - 1 \right),$$

$$M_{so} = qr^2 \cdot \left(\alpha - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sin \alpha \right),$$

stan $x_1 = 1$ (rys. 14.66c),



Rys. 14.66c

$$M_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \alpha, \quad M_{s1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \alpha,$$

$$\delta_{11} = \frac{7,1415 \cdot r}{EJ}, \quad \delta_{10} = -\frac{3,0655 \cdot qr^2}{EJ},$$

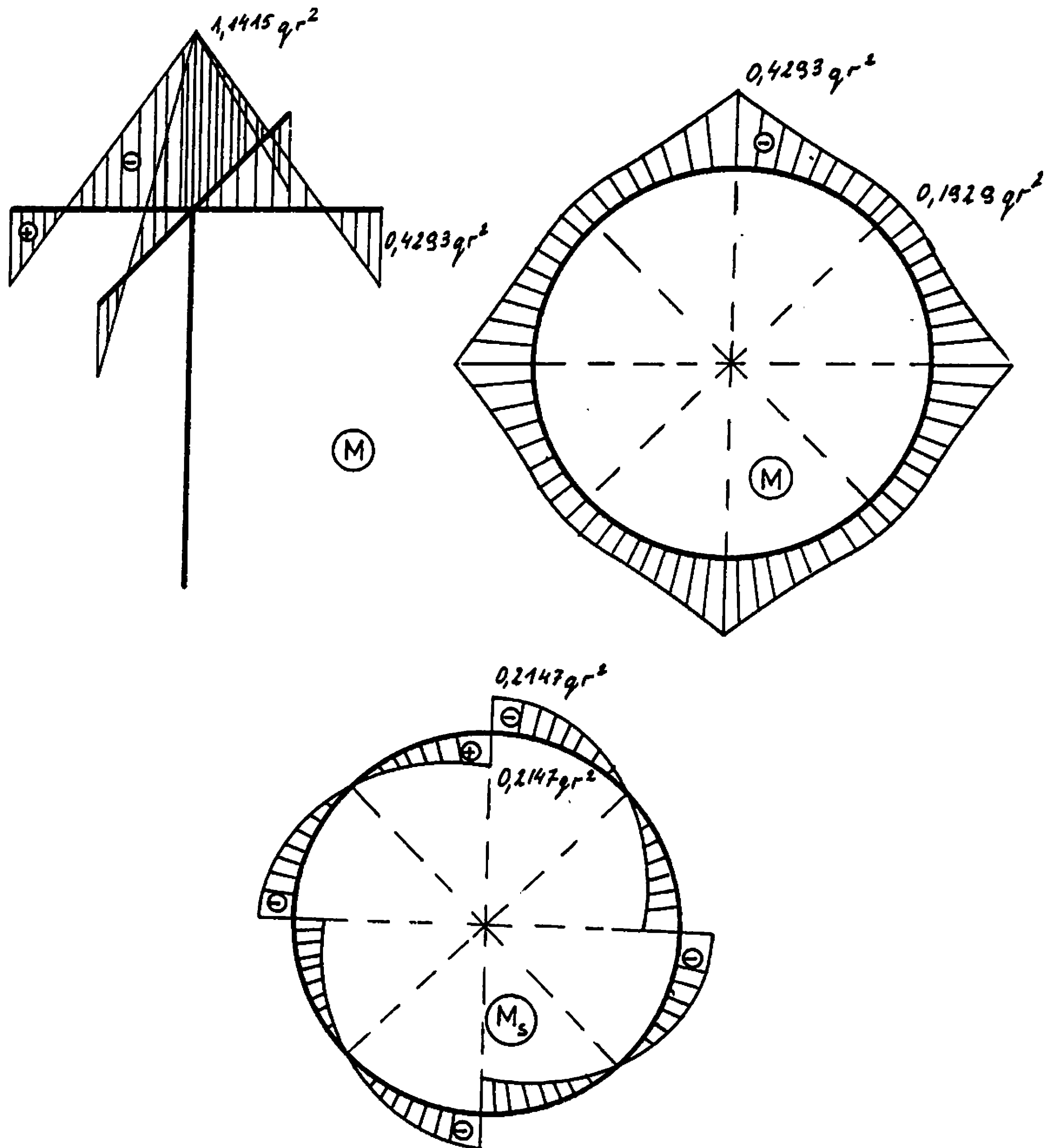
$$x_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = 0,4293 \cdot qr^2.$$

Ostateczne siły na przecie kołowym mają postać:

$$M = qr^2 \cdot (0,8071 \cdot \cos \alpha - 1),$$

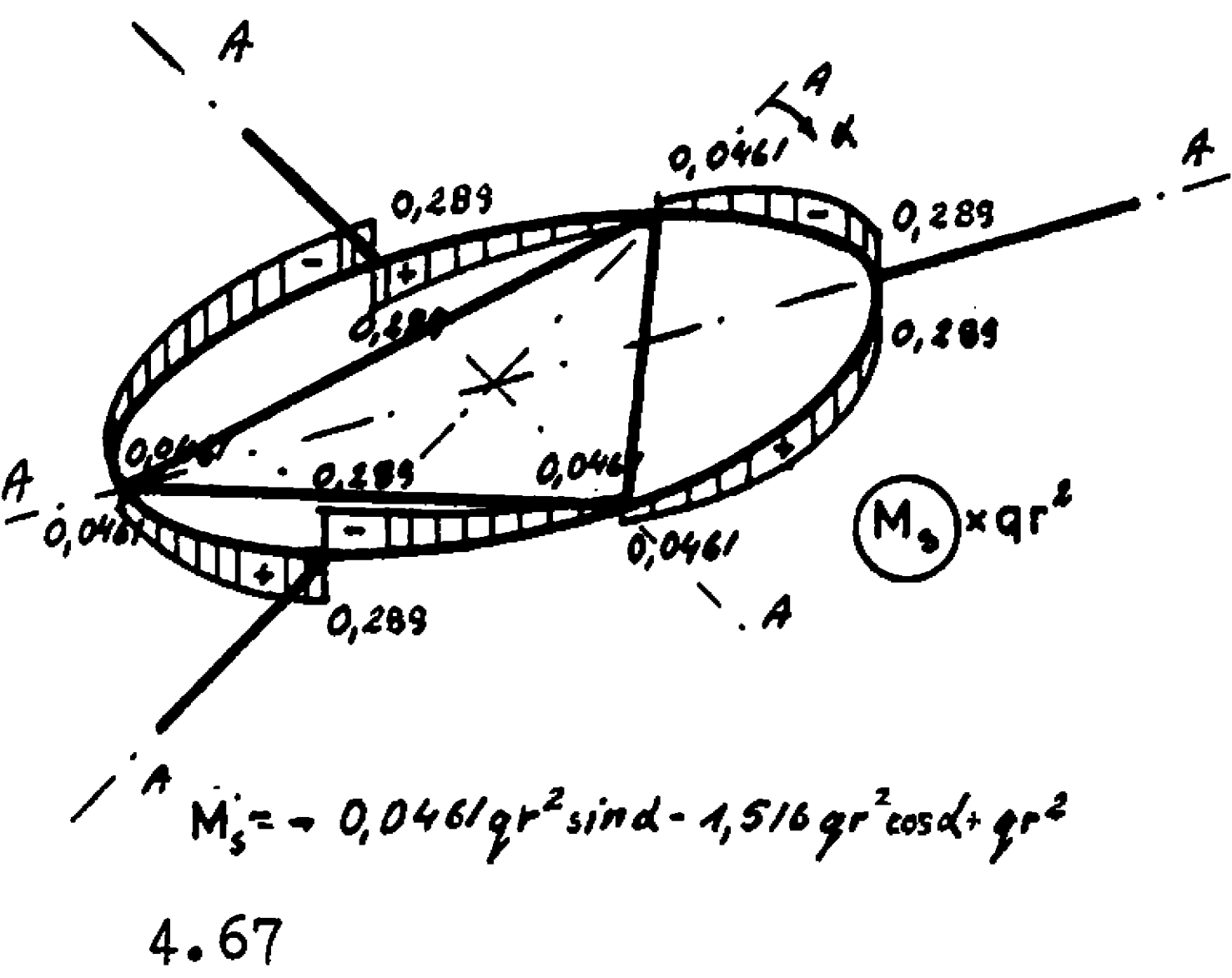
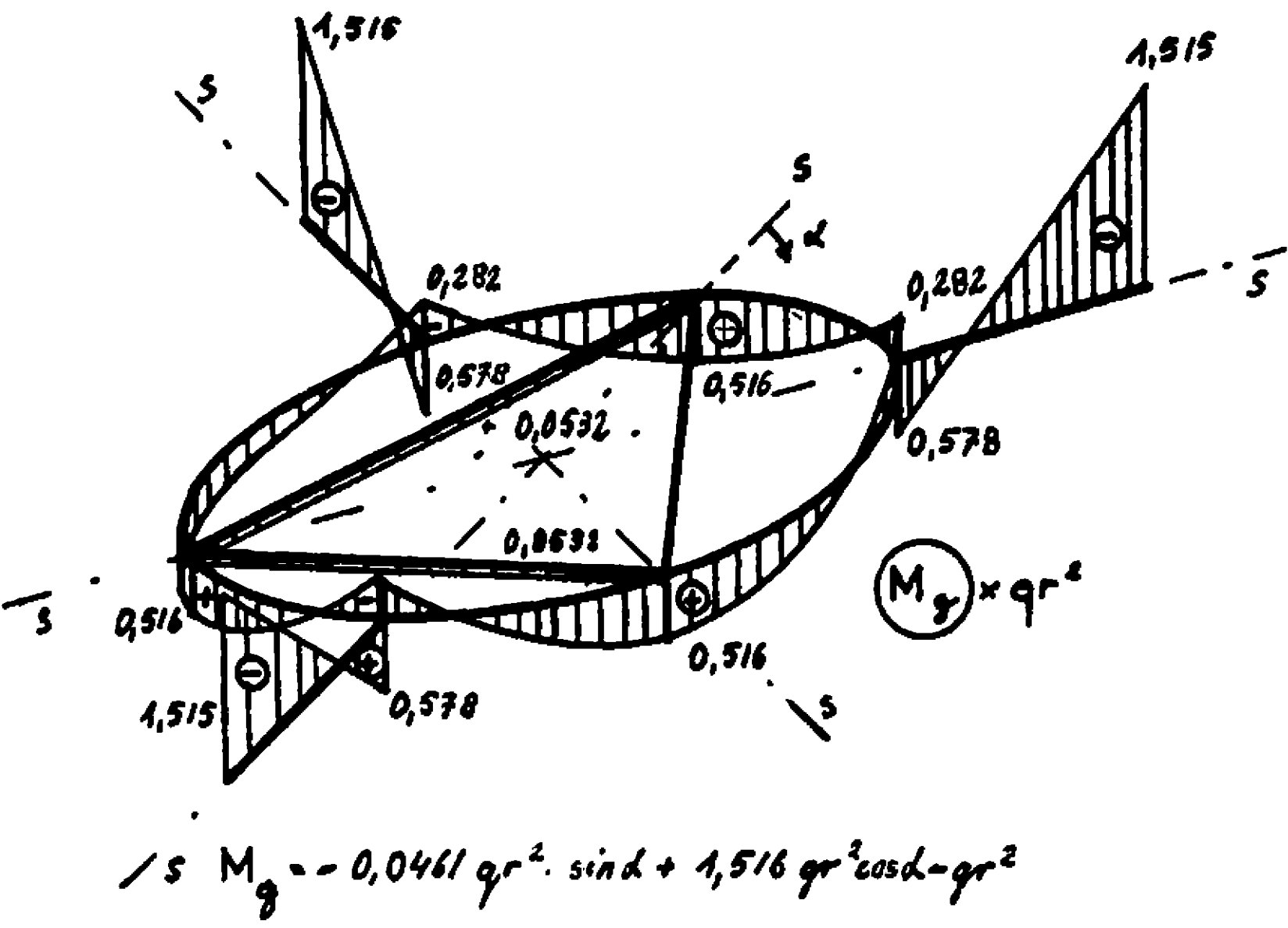
$$M_s = qr^2 \cdot (\alpha - 0,8071 \cdot \sin \alpha).$$

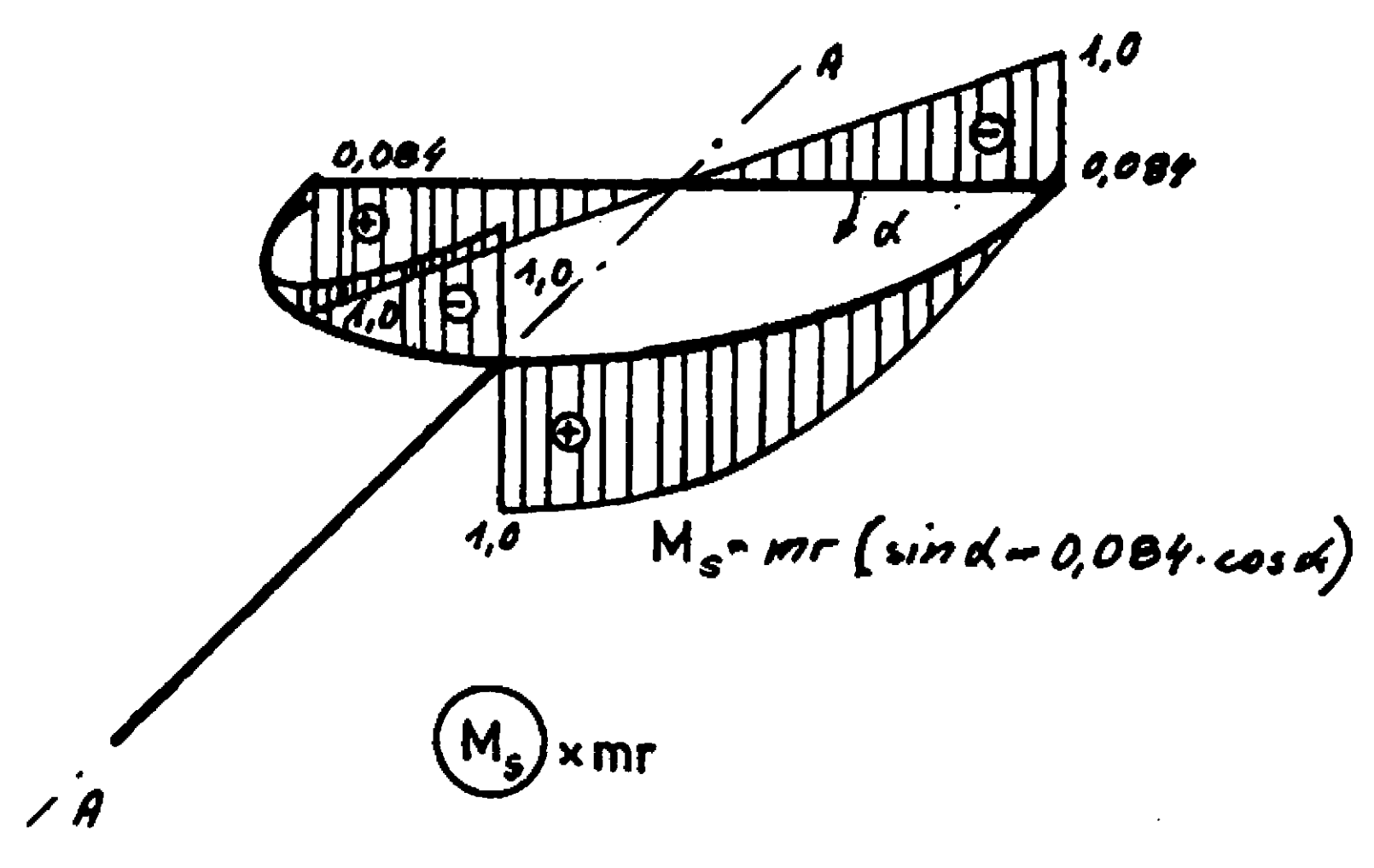
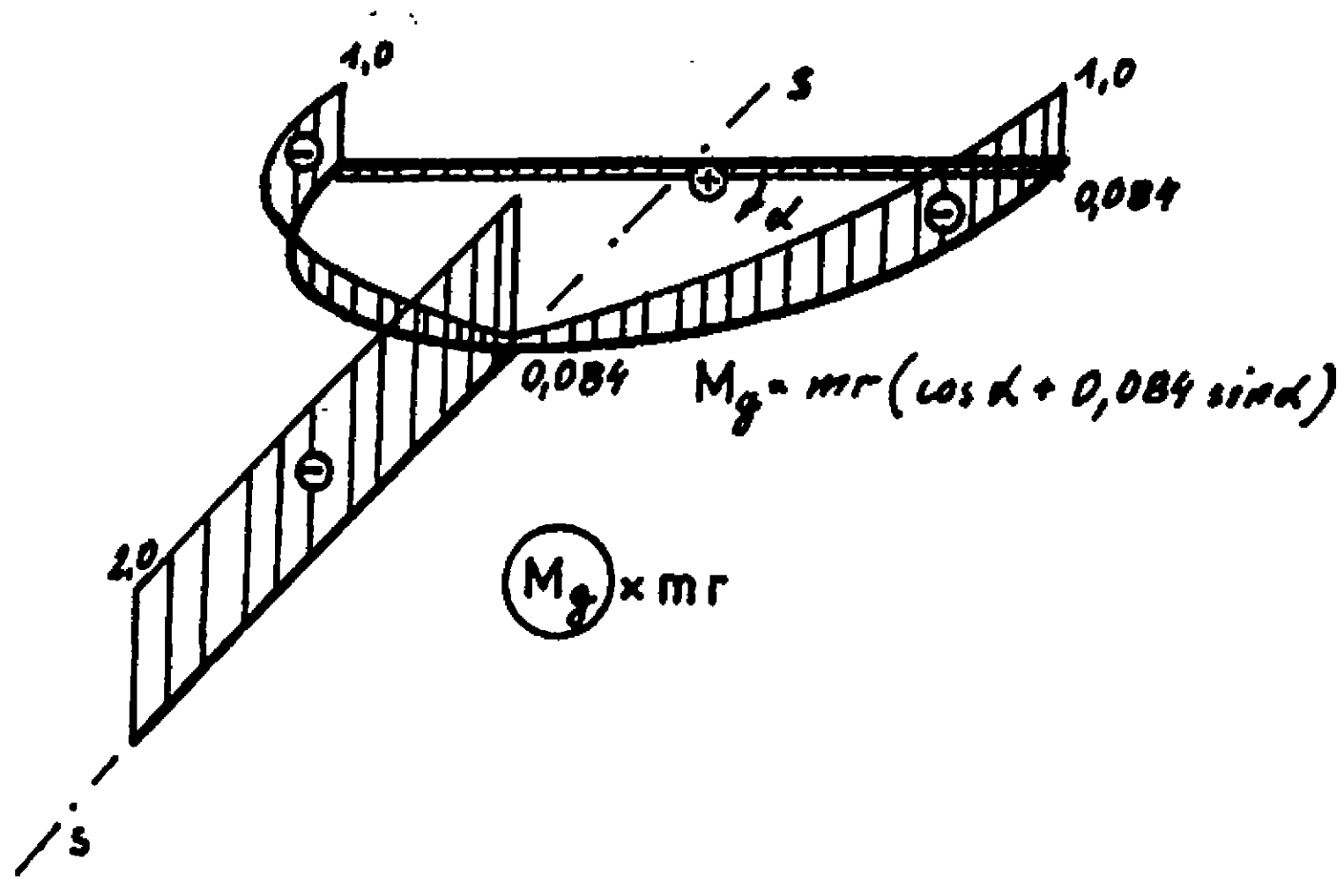
Ostateczny wykres momentów zginających i skręcających przedstawiono na rysunku 14.66d.



Rys. 14.66d

Odpowiedzi do rysunków 13.21m i 13.21h są przedstawione kolejno na rysunkach 14.67 i 14.68.





Rys. 14.68

LITERATURA

- [1] B r y ł a S., M a j z e l B.: Statyka budowli. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1955.
- [2] C y w i ń s k i Z.: Zbiór zadań z mechaniki budowli, część II. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Łódź-Warszawa-Poznań 1969.
- [3] G i e r s z e w s k i M.: Ramy - obliczenia statyczne. Budownictwo i Architektura, Warszawa 1955.
- [4] J a s t r z ę b s k i P., S o l e c k i R., S z y m k i e - w i c z J.: Kratownice - obliczenia statyczne. Arkady, Warszawa 1970.
- [5] K i r c h h o f f R.: Die Statik der Bauwerke, tom II. Verlag Wilhelm Ernst Sohn, Berlin 1942.
- [6] L i s o w s k i A.: Obliczenia ram przestrzennych, ramy proste i kątowne. Warszawa 1954.
- [7] N o w a c k i W.: Mechanika budowli, tom I. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1957.
- [8] N o w a c k i W.: Mechanika budowli, tom II. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1960.
- [9] Р у б и н о в и ч И. М.: Сборник задач по теории сооружений. Государственное издательство строительной литературы, Москва-Ленинград 1950.
- [10] R a k o w s k i G., S o l e c k i R.: Pręty zakrzywione, obliczenia statyczne. Arkady, Warszawa 1965.
- [11] S t u s s i F.: Vorlesungen über Baustatik. Verlag Birkhäuser, Basylea 1953.
- [12] W i e r z b i c k i W.: Zadania ze statyki belek prostych. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1959.
- [13] W i e r z b i c k i W.: Zadania z teorii ram, łuków i kratownic. Wydanie II, Warszawa 1950.
- [14] Ж е м о ч к и н Б. Н.: Расчет рам. Издательство литературы по строительству, Москва 1965.
- [15] B i e l e w i c z E., C h u d z i k i e w i c z A.: Statyka budowli, część II. Układy statycznie niewyznaczalne. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 1967.
- [16] D y ł a g Z., K r z e m i ń s k a - N i e m i e c E., F i l F.: Mechanika budowli, tom I i II. Państwowy Instytut Wydawniczy, Warszawa 1974.



1314/W/4