

Politechnika Łódzka

ZESZYTY NAUKOWE Nr 1151

PAWEŁ OLEJNIK

METODY NUMERYCZNE
ROZWIĄZYWANIA, ANALIZY I KONTROLI
NIECIĄGŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

ŁÓDŹ 2013

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

ZESZYTY NAUKOWE Nr 1151

ROZPRAWY NAUKOWE, Z. 444

PAWEŁ OLEJNIK

METODY NUMERYCZNE
ROZWIĄZYWANIA, ANALIZY I KONTROLI
NIECIĄGŁYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

ŁÓDŹ 2013

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
SCIENTIFIC BULLETIN
OF THE LODZ UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
BULLETIN SCIENTIFIQUE
DE L'UNIVERSITÉ POLYTECHNIQUE DE LODZ
НАУЧНЫЕ ЗАПИСКИ
ЛОДЗИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
WISSENSCHAFTLICHE HEFTE
DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT IN LODZ

Redaktor Naukowy Wydziału: **prof. dr hab. inż. Tomasz Kapitaniak**

Recenzenci: **prof. dr hab. inż. Zbigniew Koruba**
prof. dr hab. inż. Krzysztof Marynowski

© Copyright by Politechnika Łódzka 2013

Adres Redakcji – Адрес Редакции – Editor's Office
Adresse de Redaction – Schriftleitungsadresse:

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223
tel./fax 42-684-07-93
e-mail: zamowienia@info.p.lodz.pl
www.wydawnictwa.p.lodz.pl

ISSN 0137-4834

Nakład 140 egz. Ark. druk. 8,0. Papier offset. 80 g, 70 x 100
Druk ukończono w kwietniu 2013 r.
Wykonano w Drukarni Quick-Druk, 90-562 Łódź, ul. Łąkowa 11

Spis treści

Streszczenie	5
Wykaz ważniejszych oznaczeń	7
1. Wprowadzenie i przegląd literatury	9
1.1. Funkcje nieciągłe w modelowaniu układów z tarcie	10
1.2. Przegląd literatury z zakresu symulacji numerycznych nieciągłych układów dynamicznych	11
1.3. Teza, cel i zakres pracy	15
2. Metody całkowania równań różniczkowych opisujących układy nieciągłe	16
2.1. Aproksymacja funkcji skokowej i metody przybliżone	18
2.1.1. Ciągła aproksymacja funkcji skokowej	19
2.1.2. Metoda przybliżona rozwiązywania nieciągłych równań różniczkowych	20
2.1.3. Uogólnienie metody aproksymacji	23
2.1.4. Symulacja numeryczna	26
2.2. Osobliwości punktów stycznych, rozwiązania w strefach poślizgu i utwierdzenia	31
2.2.1. Granica nieciągłości i funkcja przełączeń	33
2.2.2. Dokładne wyznaczenie strefy utwierdzenia za pomocą metody Hénona	34
2.3. Układy dynamiczne z opóźnieniem i nieciągłością parametrów fizycznych	40
2.3.1. Opis matematyczny układu biomechanicznego klatki piersiowej człowieka	41
2.3.2. Rozszerzona reprezentacja w przestrzeni stanu	42
2.3.3. Modelowanie stanowej nieciągłości parametrów układu dynamicznego	47
3. Analiza dynamiczna nieciągłych układów dynamicznych	52
3.1. Bifurkacje rozwiązań	53
3.1.1. Symulacja numeryczna	55
3.1.2. Bifurkacje w nieciągłych układach o dwóch stopniach swobody	61
3.1.3. Przykładowe rozwiązanie analityczne	62
3.2. Liczbowe oszacowanie charakteru trajektorii czasowych	69
3.2.1. Metoda obliczania wykładników Lapunowa dyskretnego ciągu liczbowego	70
3.2.2. Symulacja numeryczna	71
4. Sterowanie w nieliniowych układach dynamicznych	75
4.1. Regulacja nadążna prędkości obrotowej silnika prądu stałego	75
4.1.1. Momenty sił tarcia	78
4.1.2. Algorytm sterowania	79
4.1.3. Estymacja parametrów układu regulacji	80

4.1.4.	Regulacja prędkości obrotowej silnika sterowanego sygnałem napięciowym	81
4.1.5.	Symulacja numeryczna	83
4.2.	Aktywna regulacja odkształcenia klatki piersiowej	87
4.2.1.	Opis matematyczny	88
4.2.2.	Zagadnienie optymalizacji liniowo-kwadratowej	89
4.2.3.	Symulacja numeryczna	95
5.	Podsumowanie	100
	Wydruki pozostałych procedur numerycznych	102
	Literatura	108
	Summary	113
	Charakterystyka zawodowa autora	116

Streszczenie

Praca przedstawia opis metod matematycznych i procedur numerycznych służących do rozwiązywania zagadnień modelowania i sterowania nieciągłych układów dynamicznych. Uzyskanie pożądanej dokładności rozwiązania równań różniczkowych modelujących stan układu dynamicznego z tarciem, niejednoznacznością parametrów lub opóźnieniem czasowym wymaga stosowania metod dedykowanych. Rozwiązywanie i analiza układów nieciągłych związana z poprawą wydajności metod numerycznych odkrywa istniejący zakres trudności, wyodrębniając interesujące oszacowania i wyprośadzenia matematyczne opisane w tej monografii. Pozwala to na lepsze zrozumienie i dokładniejsze przybliżenie procesów fizycznych zachodzących w rzeczywistych układach drgających.

Podstawowy mechanizm pojawiania się nieciągłości jest związany z przejściem rozwiązania przez granicę rozdziału obszarów określonych w przestrzeni stanu przez różniące się równania różniczkowe. Chwila czasowa przejścia, np. od utwierdzenia do poślizgu w układach z tarciem suchym może być wyznaczona nieprecyzyjnie. Jest to wynikiem pominięcia w procedurze numerycznej punktów szczególnych, a w modelowaniu numerycznym skutkuje narastaniem niedokładności odwzorowania ważnych cech fizycznych obiektu rzeczywistego. Metoda aproksymacji równań różniczkowych przez inkluzje różniczkowe i zmodyfikowana metoda Hénona opracowana w tej monografii zwiększają dokładność obliczeń numerycznych podczas symulacji układów nieciągłych o dynamice uwarunkowanej występowaniem granic rozdziału w przestrzeni stanu.

Nowoczesne metody projektowania i techniki optymalizacyjne współlistnieją z modelowaniem numerycznym i symulacjami komputerowymi. Stosując takie narzędzia, uzyskuje się istotne informacje dotyczące, np. wartości krytycznych, dynamiki zmian stanu, spodziewanego zużycia projektowanego lub badanego obiektu rzeczywistego. Na podstawie opisu matematycznego układu klatki piersiowej człowieka reprezentowanej przez uproszczony model mechaniczny, pokazano wpływ opóźnień czasowych na odpowiedź obiektu wielowymiarowego poddanego uderzeniu sprężystemu. Rozwiązanie numeryczne równań różniczkowych z opóźnieniem przedstawionym w rozszerzonej reprezentacji układu liniowego pięciu połączonych podukładów o parametrach zmiennych w czasie wpływa na dokładność symulacji numerycznych.

W przypadku modelowania zmian parametrów N -połączonych podukładów, rozwiązano problem modelowania nieciągłości wyrażonych za pomocą charakterystyk przełączających. Odnosząc się do przypadku nieciągłości wywołanych tarciem suchym, pokazano, że skokowa zmiana parametrów determinowana własnościami reologicznymi jest jakościowo inną, obok wymuszeń zewnętrznych, formą zaburzenia wpływającego bezpośrednio na

wewnętrzny stan układu. Modelowanie stanowej nieciągłości parametrów wybranego układu dynamicznego oparto na zapisie macierzowym, definiując zbiór macierzy wzmocnień wyczerpujących wszystkie wartości parametrów zależnych od czasu.

W zakresie analizy dynamicznej przedstawionej w tej monografii opisano liczbowe oszacowanie charakteru trajektorii czasowych za pomocą wykładników Lapunowa. Wykorzystano również teorię bifurkacji, będącą silnie rozwijaną gałęzią dynamiki o szerokim spektrum rozważań analitycznych i optymalizacyjnych dotyczących schematów numerycznych. W tej części pracy przedstawiono metody analityczne i numeryczne umożliwiające poznanie schematów bifurkacji oraz wyznaczenie dyskretnych diagramów bifurkacji granicy rozdziału w przestrzeni stanu i rozwiązań numerycznych nieciągłego układu dynamicznego z tarcie suchym. Teoria Filipowa stosowana do analizy układów tego typu wsparta zmodyfikowaną metodą całkowania numerycznego Hénona pozwoliła na wykonanie numerycznej estymacji bifurkacji rozwiązań utwierdzenie-poślizg, jakie obserwuje się w kawałkami-ciągłym układzie dynamicznym o jednym stopniu swobody z wymuszeniem harmonicznym. Na potrzeby rozwiązania numerycznego wprowadzono oscylującą granicę nieciągłości, opisano ją funkcją zależną od prędkości podstawy i uzależniono od postaci wymuszenia zewnętrznego.

W części monografii dotyczącej sterowania nieliniowych układów dynamicznych przedstawiono metody numerycznego modelowania i regulacji prędkości obrotowej silnika prądu stałego. Pewien model silnika posłużył jako przykład obiektu poddanego działaniu sił oporu występujących w łożyskowaniu ślizgowym wirnika i pochodzących od sił tarcia Coulomba, tarcia związanego z krzywą eksponencjalną charakterystyki tarcia kinetycznego pojawiającą się na skutek efektu Striebecka, tarcia wiskotycznego i tarcia zależnego od położenia kąтового wirnika. Poddano rozwiązaniu zadanie sterowania tym obiektem, polegające na zaprojektowaniu kompensatora umożliwiającego zmianę prędkości obrotowej wzdłuż zadanej trajektorii czasowej.

Schematy aktywnej kontroli można adoptować do optymalizacji układów mechanicznych lub biomechanicznych o wielu stopniach swobody. Biorąc to pod uwagę, zaprojektowano i opisano metodykę opartą na zastosowaniu siły sterującej zmniejszającej względną deformację modelu mechanicznego klatki piersiowej człowieka wywołaną uderzeniem sprężystym. Widoczną redukcję przemieszczeń względnych wewnątrz klatki piersiowej otrzymano, rozwiązując zagadnienie optymalizacji liniowo-kwadratowej wskaźnika wydajności.

Praca została wzbogacona o kod procedur numerycznych, napisanych w języku programowania *Python*, weryfikujących prowadzone eksperymenty numeryczne, których wyniki przedstawiono na wykresach czasowych i parametrycznych.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

A	amplituda funkcji wymuszającej;
$\mathbf{A}$	macierz stanu wewnętrznego;
$\Delta \mathbf{A}$	macierz niejednoznaczności stanu wewnętrznego;
a_i, b_i	parametry kształtu doświadczalnej charakterystyki tarcia kinetycznego;
B	stała tłumienia w ruchu obrotowym;
$\mathbf{B}$	macierz wejść sterujących;
$\Delta \mathbf{B}$	macierz niejednoznaczności wejść sterujących;
$\mathbf{C}$	macierz wyjść;
$\mathbf{D}$	macierz transmisyjna;
c	stała tłumienia;
c_m	stała momentu;
c_b	stała SEM obwodu elektrycznego twornika;
δ	szybkość zmian współczynnika tarcia kinetycznego;
φ	położenie kątowne wirnika;
$\dot{\varphi}$	prędkość kątowna wirnika;
h	krok całkowania;
J_m	masowy moment bezwładności wirnika;
$J(t_0, t_k)$	funkcja kosztu;
k	stała sprężystości;
$\mathbf{K}_x$	macierz Riccatiego;
L_a	indukcyjność całego obwodu twornika;
λ_i	widmo wykładników Lapunowa;
m	masa skupiona w punkcie;
μ_0	współczynnik tarcia statycznego;
$\mu_k(v)$	funkcja zmian kinetycznego współczynnika tarcia;
N	siła nacisku normalnego do powierzchni przylegania;
ω	częstość kołowa funkcji wymuszającej;
$\mathbf{Q}$	macierz jakości;
$\mathbf{R}$	macierz reakcji;
ψ_m	prąd uzwojenia wirnika;
R_a	rezystancja uzwojenia twornika;
Σ	granica rozdziału;
Σ_u	strefa utwierdzenia na granicy rozdziału;
Σ_c	strefa przecięcia na granicy rozdziału;
σ	funkcja przełączeń;
t	czas;
T	siła tarcia;
$T_i(v)$	funkcje zmian siły tarcia;

$T_{\min}$	minimalna wartość siły tarcia kinetycznego;
$T_{\pm}(v)$	charakterystyki tarcia dla dodatniej i ujemnej prędkości ruchu względnego;
T_s	siła tarcia statycznego;
T_{sm}	maksymalna wartość siły tarcia statycznego;
T_v	współczynnik tarcia wiskotycznego;
$u_b(t)$	funkcja ograniczającą z góry momenty sił tarcia związane z efektami nieliniowymi;
$\bar{u}$	wektor wejść sterujących;
v	prędkość ruchu względnego pomiędzy powierzchniami przylegania;
v_f	napięcie sterujące;
$v_{\min}, v_{\max}$	minimalna i maksymalna wartość prędkość względnej v ;
v_p	prędkość ruchu podstawy;
W	siła reakcji;
$x_{1,0}$	punkty styczne na granicy rozdziału;
$\bar{x}$	wektor stanu;
$\xi_{i,j}$	współczynniki macierzy Riccatiego;
$\bar{y}$	wektor wyjść;
$\hat{}$	oznaczenie parametru estymowanego;

1. Wprowadzenie i przegląd literatury

Rozwój nowoczesnych technik inżynierskich rozszerzył zasięg stosowania metod numerycznych. Potwierdzeniem tej tezy jest chociażby silny wzrost mocy obliczeniowych sekwencyjnych urządzeń cyfrowych, tzw. procesorów, wykonujących coraz więcej operacji podstawowych przetwarzających dane pobierane z szybkiej pamięci operacyjnej komputera. Wzrost liczby operacji matematycznych (stanów logicznych) wykonywanych przez procesor w jednostce czasu uzyskuje się, zwiększając szybkość przetwarzania rozkazów do niego kierowanych, stosując większą (sięgającą setek milionów) liczbę tranzystorów z których jest on zbudowany lub dodając następne rdzenie i procesory pomocnicze. Obecnie, przenosi się obciążenie podstawowych jednostek procesorowych umiejscowionych w slotach płyt głównych komputerów na karty graficzne wyposażone w procesory strumieniowe składające się z kilkuset rdzeni i pozwalające na wykonanie kilku teraflopów operacji zmiennoprzecinkowych podwójnej precyzji na sekundę. Spektrum zastosowań tak wydajnych układów procesorowych jest dość szerokie i obejmuje: modelowanie zagadnień fizycznych w symulatorach treningowych i grach komputerowych, przyspieszanie obliczeń numerycznych prowadzonych we wszystkich dziedzinach nauk przyrodniczych i inżynierskich (np. technikach pomiarowych), kryptografię, konwersję i przetwarzanie obrazów, sztuczną inteligencję, wizualizację rzeczywistości wirtualnej i inne.

Równoległą ścieżkę postępu wyznacza rozwój metod komputerowych i matematycznych technik optymalizacyjnych wykorzystywanych w procedurach numerycznych. Rzeczywiste układy fizyczne spotykane w mechanice i mechatronice znajdują swój przybliżony odpowiednik w symulacjach numerycznych prowadzonych ze skończoną dokładnością obliczeń matematycznych. Okazuje się, że dużą trudnością jest umiejętne przełożenie rejestrowanych sygnałów fizycznych na poprawny model matematyczny, a następnie jego zapisanie przy użyciu kodu numerycznego.

Wykonanie kodu numerycznego na maszynie cyfrowej powinno prowadzić do otrzymania serii danych odpowiadających mierzonym sygnałom niosącym informacje o bieżącym lub przeszłym stanie badanego układu rzeczywistego. Pomocne w tym zakresie są matematyczne metody identyfikacji parametrów, optymalizacji odpowiedzi przejściowych i ustalonych, a także metody aproksymacyjne dedykowane rozwiązywaniu wymienionych problemów.

Trudności związane z symulacjami numerycznymi drgań układów deterministycznych mogą być powodowane różnymi niedogodnościami: nieciągłością charakterystyk elementów podatnych i tłumiących, niejednoznacznością parametrów wynikającą, np. z histerezy, nasycenia i stref martwych, zjawiskami tarcia i uderzenia, opóźnieniami czasowymi, występowaniem sta-

nów przełączających mono- i bistabilnych. W tej monografii autor rozszerza spektrum wykorzystywanych metod matematycznych i numerycznych technik obliczeniowych. Uwzględniają one niektóre spośród wymienionych wyżej zjawisk, poprawiają dokładność rozwiązań, umożliwiają sterowanie i analizę dynamiczną nieciągłych układów drgających.

1.1. Funkcje nieciągłe w modelowaniu układów z tarciem

Funkcje nieliniowe występują w równaniach różniczkowych modelujących efekty nieliniowe, np. tarcie suche. Model tarcia suchego przedstawia funkcję zmian współczynnika tarcia lub siły tarcia od prędkości ruchu względnego powierzchni tworzących kontakt cierny. Wśród zastosowań opisanych w pracy [11] można wyróżnić:

a) teoretyczny model tarcia dany wzorem

$$T_1(v) = \begin{cases} T_{\pm}(v) = \operatorname{sgn}(v)\mu_k(v)N, & v \neq 0 \\ T_s \in \{-\mu_0 N, \mu_0 N\}, & v = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

w którym funkcje sgn i μ_k zależne od prędkości ruchu względnego v są postaci:

$$\operatorname{sgn}(v) = \begin{cases} 1, & v > 0, \\ -1, & v < 0, \\ 0, & v = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\mu_k(v) = \frac{\mu_0}{1 + \delta|v|}; \quad (1.3)$$

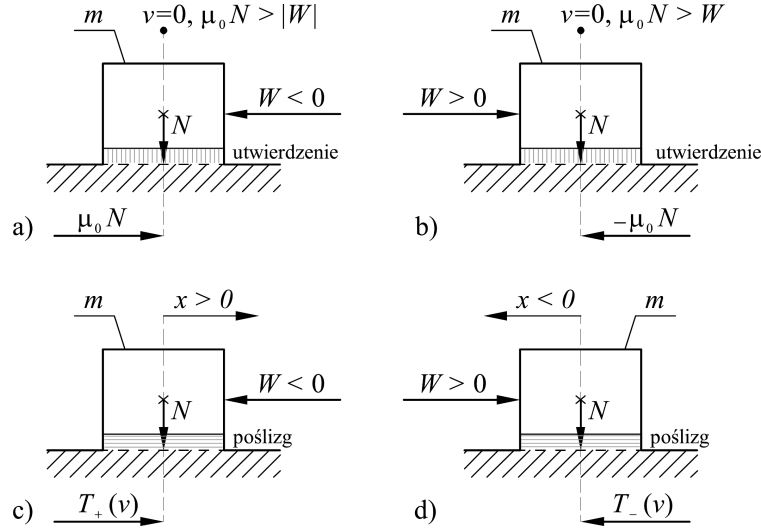
b) doświadczalny model tarcia dany wzorem

$$T_2(v) = \begin{cases} \frac{T_+(v)}{T_{sm}} = 1 - |v| \frac{T_s - T_{\min}}{T_{sm}v_{\max}}, & v > 0, \\ \frac{T_-(v)}{T_{sm}} = -1 + \frac{a_1}{T_{sm}} e^{-\frac{|v|-v_{\min}}{b_1}} + \frac{a_2}{T_{sm}} e^{-\frac{|v|-v_{\min}}{b_2}}, & v < 0, \\ \frac{T_s}{T_{sm}} \in \left\{ -1 + \frac{a_1}{T_{sm}} e^{\frac{v_{\min}}{b_1}} + \frac{a_2}{T_{sm}} e^{\frac{v_{\min}}{b_2}}, 1 \right\}, & v = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Charakterystykę $T_2(v)$ wyznaczono na stanowisku laboratoryjnym przeznaczonym do pomiaru sił tarcia statycznego i kinetycznego pomiędzy powierzchniami przylegania pary cierniej stal-poliester [56].

Zapis w postaci wzorów (1.3) lub (1.4) stanowi przykład funkcji wielowartościowej (w przypadku $v = 0$ nawiasy klamrowe oznaczają zbiór liczb),

zmieniającej się w sposób skokowy przy ciągłej zmianie argumentu. W efekcie, rozwiązania numeryczne równań różniczkowych opisujących dynamikę układów nieciągłych są trudniejsze do wyznaczenia. Należy zwrócić uwagę na wartości funkcji $T_1(v)$ i $T_2(v)$ dla względnej prędkości ruchu $v = 0$.



Rysunek 1.1. Rozkład sił działających na masę m w czasie tarcia statycznego (a, b) i kinetycznego (c, d). Stan utwierdzenia powierzchni przylegania zaznaczono obszarem kreskowanym pionowo, stan poślizgu obszarem kreskowanym poziomo

Jak pokazano na rysunku 1.1, w stanie utwierdzenia powierzchni przylegania siła tarcia statycznego $\mu_0 N$ jest skierowana przeciwnie do siły W , działającej w płaszczyźnie równoległej do tej powierzchni. Zależnie od znaku wartości siły W , masa znajdująca się w stanie utwierdzenia przejdzie w stan poślizgu, którego charakterystyka tarcia kinetycznego przebiega wzdłuż gałęzi $T_+(v)$ lub $T_-(v)$.

Na podstawie powyższego przykładu można zauważyć, że uzyskanie požądanej dokładności rozwiązania równań różniczkowych modelujących ruch układu dynamicznego z tarcie suchym wymaga zastosowania pewnych przybliżeń lub metod dedykowanych. Rozszerzenie tego zagadnienia przedstawiono w dalszej części pracy.

1.2. Przegląd literatury z zakresu symulacji numerycznych nieciągłych układów dynamicznych

W tym podrozdziale wykonano przegląd wybranych metod numerycznych dotyczących modelowania nieciągłych układów dynamicznych. Rozszerzenie tych zagadnień zostało zamieszczone we wprowadzeniach do kolejnych rozdziałów tej monografii.

Kilka efektywnych metod numerycznych służących do rozwiązywania zagadnień mechaniki połączeń kontaktowych z tarcieniem zawarto w pracy [75]. Zastosowano tutaj metodę bezpośredniego podstawienia do nałożenia warunków więzów kontaktowych na zwartą postać równań elementów skończonych, co pozwoliło na zredukowanie liczby równań różniczkowych pełnego układu dynamicznego. Rozwijając tę metodę, wyprowadzono algorytm oparty na pewnych próbach warunków kontaktowych, który pozwolił na wyodrębnienie dwóch rodzajów nieliniowości determinujących metodologię rozwiązania numerycznego. Dodatkowo, w metodzie modyfikacji sekwencji zmian znaku wprowadzono całkowanie analityczne w celu określenia stanów podatnych rozpatrywanych w każdej iteracji całkowania numerycznego. Zwiększyło to znacząco szybkość i dokładność procedury obliczeniowej.

Model wymuszanego wahadła matematycznego z tłumieniem wiskotycznym i tarcieniem Coulomba rozważono w pracy [49]. Istnienie lokalnego rozwiązania analitycznego dobrze postawionego problemu matematycznego zostało udowodnione, dając podstawy do wyprowadzenia adaptowanego schematu numerycznego. Uwagę skupiono na zbadaniu silnie nieliniowych zachowań nieciągłych pojawiających się w dynamice analizowanego wahadła, symulując ją przy zachowaniu bardzo małego kroku całkowania. Zbadano globalne zachowanie wahadła z tarcieniem suchym dla przypadków drgań swobodnych i wymuszenia okresowego, wyciągając wniosek, że drgania chaotyczne pojawiają się przy niedużych siłach tarcia odpowiadającym małym wartościom współczynnika tarcia kinetycznego. Numeryczne obliczenie wykładników Lapunowa połączono z obliczeniem funkcji Melnikova ograniczającej znormalizowaną siłę tarcia Coulomba.

Praca [29] podejmuje analizę technik rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych z nieciągłościami powodowanymi siłami tarcia suchego i zmiennym w czasie kierunkiem prędkości ruchu względnego. Problem rozpatrzono na gruncie analizy zachowania dynamicznego pewnej struktury izolowanej od strony podstawy z uwzględnieniem efektów typu utwierdzenie-poślizg. Wyprowadzono zależności matematyczne, w których bezpośrednio zastosowanie funkcji sgn jest przyczyną znaczących niedokładności rozwiązań numerycznych. Stosując linearyzację pewnej składowej funkcji opisującej siłę tarcia, wykonano aproksymację tej niekorzystnej funkcji, proponując w efekcie algorytm numeryczny służący do symulacji dynamiki struktur izolowanych od strony podstawy.

Metody przybliżone lub określone zasady uproszczeń używane w numerycznych rozwiązaniach nieciągłych układów dynamicznych mają różne postaci i zależą od wymiaru układu, złożoności i dokładności modelowania. Jedną z takich metod opiera się na numerycznym obliczaniu map Poincaré na podstawie układu równań różniczkowych pierwszego rzędu [39]. Całko-

wanie numeryczne do chwili pojawienia się w tym modelu stabilnego stanu równowagowego, prowadzi do rozwiązania dokładnego dowolnego układu nieciągłego z tarcie suchym charakteryzującego się dwoma typami przejść dynamicznych w strefie kontaktu, tzn. od utwierdzenia do poślizgu i od poślizgu do utwierdzenia.

W pracy [69] rozpatrzono rozwiązania nieciągłych równań różniczkowych zwyczajnych, modelujących dynamikę drgań z tarcie suchym. Do znalezienia stabilnych i niestabilnych oscylacji okresowych w ruchu typu utwierdzenie-poślizg zastosowano dedykowany algorytm numeryczny przeznaczony do badania modeli elementów skończonych, zawierających lokalne nieciągłości wywołane zjawiskami nieliniowymi, takimi jak: przełączanie, nasycenie, strefy martwe. Przy modelowaniu tego typu nieliniowości wykorzystano aproksymację funkcji sgn funkcją $\arctan$. Ponadto, stosując wybrane metody rozwiązywania sztywnych układów równań różniczkowych zwyczajnych, estymowano rozwiązania okresowe modelu matematycznego autonomicznych układów dynamicznych o dwóch stopniach swobody.

Numeryczne aspekty kontynuacji względnych orbit okresowych rozpatrzono w pracy [73]. Przedstawia ona metodę całkowania numerycznego względnych orbit okresowych wywodzących się z orbit bifurkacyjnych łamiących symetrię przestrzeni stanu. Przy uogólnieniu proponowanego podejścia, wyprowadzono algorytm śledzący oparty na algorytmie prób wielokrotnych znajdującym swoje podstawy w metodzie kontynuacji stycznej z jawną parametryzacją wtórną. Podobny, wydajny algorytm śledzący omijający punkty krytyczne rozwiązania opisano w pracy [27].

Układ pojedynczego oscylatora z nachyleniem i dynamicznym modelem tarcia suchego poddano analizie w pracy [25]. Założono, że w ruchu (masy suwaka) ze stałą prędkością względną istnieje przesunięcie fazy poślizgu pomiędzy dwoma kolejnymi fazami utwierdzenia. Ponowny wybór początkowej chwili czasowej τ^* na początku fazy poślizgu wymaga wprowadzenia stanu przejściowego określonego funkcją wymuszającą, zdefiniowaną dla poślizgów zachodzących w obu wyróżnionych kierunkach ruchu suwaka. Czas trwania fazy poślizgu można wyznaczyć, rozwiązując od chwili τ^* równanie różniczkowe pierwszego rzędu na przesunięcia w tych kierunkach, gdzie całkowite przesunięcie w czasie poślizgu na jeden okres wymuszenia harmonicznego jest sumą algebraiczną poślizgów cząstkowych tworzących pojedynczy okres ruchu oscylacyjnego. Z tego powodu, każdą pełną fazę poślizgu wyznacza pojawienie się następującego po niej utwierdzenia jednocześnie bez potrzeby uwzględniania zmiany znaku prędkości ruchu względnego. Jeśli prędkość zmienia znak przed przejściem połączenia w stan utwierdzenia, to rozwiązanie w strefie poślizgu musi być całkowane dwuetapowo zależnie od kierunku działania siły tarcia suchego. Zaobserwowano, że stabilny ruch typu

utwierdzenie-poślizg istnieje wtedy, gdy bezwzględna wartość siły sprężystości jest mniejsza od granicznej siły tarcia działającej na końcu ostatniej fazy poślizgu. W innym przypadku masa oscyluje w obrębie ciągłej strefy poślizgu. Opisana metoda ulega zmianie przy braku utwierdzenia, dlatego próby jej uogólnienia na szerszą klasę układów nieciągłych napotykają na duże trudności.

Praca [67] przedstawia pewne aplikacje równań różniczkowych z warunkami więzów. Skupiono się tutaj na aspektach jakościowych geometrycznej teorii układów niegładkich. Wykonano szczegółowy przegląd interakcji pomiędzy procesem normalizacji niegładkich pól wektorowych a zagadnieniami perturbacji osobliwych.

Niejednoznaczności stanów dynamicznych w układach z tarcie suchym i układach z uderzeniami utrudniają analizę prowadzoną za pomocą standardowych metod asymptotycznych rozwijanych w obszarze teorii układów ciągłych. W pracy [33] podjęto analizę transformacji układów nieciągłych do specjalnych postaci równań różniczkowych. Sformułowano i udowodniono twierdzenia uśredniające te równania, a jako przykład modelowy ilustrujący proponowaną transformację, wykorzystano przesunięcia wywołane drganiami samowzbudnymi.

Technikę doboru kroku całkowania i metody ekstrapolacyjne poprawiające schemat krokowy Moreau, dotyczący numerycznego całkowania niegładkich układów mechanicznych opisano w pracy [66]. Idea skuteczności schematu doboru opiera się na transformacji układu inkluzji różniczkowych do układu równań różniczkowych zwyczajnych rozwiązywanych metodą iteracyjną. Chwile czasowe, w których struktura układu mechanicznego ulega zmianie, potraktowano jako punkty przełączające. Podano sposób na lokalizację i rekombinację punktów przełączeń, dobierając odpowiednio minimalny krok całkowania numerycznego. Poprawę schematu całkowania numerycznego układów niegładkich określonych w stanach przełączających uzyskano, stosując procedurę z automatycznym doбором kroku całkowania, stanowiącą podstawę procedur całkujących używanych w metodach ekstrapolacyjnych. Ostatecznie, algorytm hybrydowy będący połączeniem procedury z automatycznym doбором kroku całkowania i schematu ekstrapolacyjnego został opisany i sprawdzony w kilku przykładach obliczeniowych.

Pewną klasę zagadnień kontaktowych z tarcie i elastostatyką rozpatrzono w pracy [3]. Podsumowano aproksymacje wykonywane za pomocą metod elementów skończonych i metod iteracyjnych. Na podstawie metody nieliniowego przełączania kierunku poddano analizie i rozwiązano przykładowe zagadnienie kontaktu mechanicznego typu Winklera ze szczególnymi warunkami brzegowymi.

Trójwymiarowe dyskretne zagadnienie kontaktowe z tarciem Coulomba i rozwiązanie zależne od współczynnika tarcia rozpatrzono w pracy [53]. Formułując ten problem, zastosowano podejście bazujące na punktach stałych, w których istnienie przynajmniej jednego rozwiązania dyskretnego jest gwarantowane dla każdej ciągłej i ograniczonej nieujemnej funkcji współczynnika tarcia. Ta jednoznaczność jest dobrze zdefiniowana przy dostatecznie małych wartościach tej funkcji i wystarczająco małym module ciągłości Lipschitz’a, jak również została potwierdzona kilkoma eksperymentami numerycznymi.

Wybrane i opisane aktualne publikacje czasopism międzynarodowych przekonują, że poprawa wydajności metod numerycznych związana z rozwiązywaniem i analizą układów nieciągłych odkrywa istniejący zakres trudności, ale też wyodrębnia interesujące oszacowania i wyprowadzenia matematyczne.

1.3. Teza, cel i zakres pracy

Tematyka zagadnień numerycznych i matematycznych podejmowanych w tej monografii, a także sposobów ich rozwiązywania, stanowi potwierdzenie następującej tezy.

Symulacje numeryczne dynamiki nieciągłych układów drgających wymagają opracowania specjalnych metod numerycznych, uwzględniających punkty szczególne i granice rozdziału przestrzeni rozwiązań ciągłych, w których rozwiązania wyznacza się przy użyciu standardowych metod całkowania.

Celem pracy jest opracowanie metod matematycznych i numerycznych procedur obliczeniowych pozwalających na rozwiązanie problemów związanych z występowaniem nieciągłych zmian stanu lub parametrów wybranych układów drgających. Pozwoli to na lepsze zrozumienie i dokładniejsze przybliżenie rzeczywistych zjawisk fizycznych, takich jak: tarcie, uderzenie sprężyste, opóźnienie czasowe, niejednoznaczność parametrów układów dynamicznych.

Zakres pracy obejmuje opis matematyczny i modelowanie układów z tarciem i uderzeniami, niektóre metody całkowania równań różniczkowych opisujących nieciągłe układy dynamiczne, ich analizę i sterowanie, a także identyfikację parametrów zmiennych w czasie.

2. Metody całkowania równań różniczkowych opisujących układy nieciągłe

Wartości szczególne w równaniach różniczkowych i algebraicznych, osobliwości punktów stycznych, opóźnienia czasowe i nieciągłość parametrów fizycznych to niektóre spośród problemów, warunkujących postać specjalnych metod całkowania numerycznego.

W tym rozdziale opisano opracowaną metodę aproksymacji równań różniczkowych i modyfikację metody Hénona poprawiającą dokładność modelowania podstawowego mechanizmu pojawiania się nieciągłości, opartego na przejściach rozwiązania przez granicę rozdziału obszarów przestrzeni stanu określonych różnymi równaniami różniczkowymi.

Wpływ opóźnień czasowych na amplitudę różnicy wybranych zmiennych stanu jest znaczący, co pokazano w podrozdziale 2.3 na podstawie obserwacji rozwiązań numerycznych modelu swobodnego układu mechanicznego klatki piersiowej, poddanej działaniu uderzenia sprężystego. Ponadto, w modelu matematycznym nie uwzględniającym opóźnień czasowych, pokazano rozwiązania numeryczne z możliwie najmniejszym opóźnieniem czasowym pomiędzy sąsiednimi masami badanego obiektu, równym długości pojedynczego kroku całkowania.

Zdefiniowane w podrozdziale 1.1 postaci nieciągłości można zobrazować, wykreślając funkcje $T_1(v)$ i $T_2(v)$ dane kolejno wzorami (1.1) i (1.4) dla przybliżonej postaci parametrycznej. W tym celu wyprowadza się uproszczone charakterystyki tarcia:

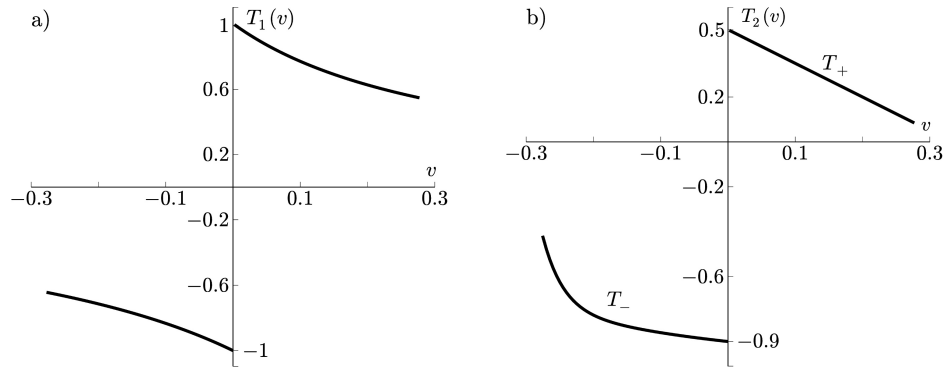
$$T_1(v) = \begin{cases} T_{\pm}(v) = \operatorname{sgn}(v) \frac{1}{1 + c|v|}, & v \neq 0, \\ T_s \in \{-1, 1\}, & v = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$T_2(v) = \begin{cases} T_+(v) = 0.5(1 - cv), & v > 0, \\ T_-(v) = -1 + 0.1c \left(e^{-c(11v+3)} + e^{-cv-1} \right), & v < 0, \\ T_s \in \{-1 + 0.1ce^{-3c} + e^{-1}, 0.5\}, & v = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Charakterystyki tarcia (2.1) i (2.2) są funkcjami prędkości ruchu względnego v i parametru kształtu c .

Na rysunku 2.1*b* gałęzie T_+ i T_- funkcji $T_2(v)$ nie są symetryczne względem osi odciętych. Wynika to z tego, że badany układ doświadczalny wykazywał właściwości hamujące przy $v < 0$ (w stosunku do przeciwniej prędkości ruchu $v > 0$), powodując prawie dwukrotne zwiększenie siły nacisku działającej w kierunku prostopadłym do powierzchni przylegania.

Na podstawie wykresu z rysunku 2.1*a* widać, że wartość siły tarcia statycznego T_s może być liczbą rzeczywistą z przedziału $[-1, 1]$. Jeśli siła



Rysunek 2.1. Wykresy funkcji teoretycznego modelu tarcia (a) danego wzorem (2.1) i doświadczalnego (b) danego wzorem (2.2) dla parametru kształtu $c = 3$.

Wykresy wygenerowano za pomocą procedury z wydruku 1

nacisku N będzie stała, to wspomniany przedział zredukuje się do dwóch wartości granicznych zawartych w zbiorze liczb $\{-1, 1\}$.

Wydruk 1. Obliczenie funkcji $T_i(v)$ z rysunku 2.1.

```

1  from math import exp
2  from numpy.ndarray.functions import reshape
3  import biblioteka_graficzna as bib
4  from numpy import zeros
5  h = .005; n = 56; m = 2; c = 3.
6  Vp = [h*i for i in range(n)]; Vm = [-h*i for i in range(n)]
7  Tpa = [1./(1+3*abs(v)) for v in Vp]
8  Tpb = [.5-c/2.*v for v in Vp]
9  Tma = [-1./(1+2*abs(v)) for v in Vm]
10 Tmb = [-1+c/10.*(exp(-11*c*v-3*c)+exp(-c*v-1)) for v in Vm]
11 T1 = zeros((n,m),float); T2 = zeros((n,m),float)
12 V = zeros((n,m),float)
13 T1 = reshape([Tpa[i], Tma[i]] for i in range(n)),(n,2))
14 T2 = reshape([Tpb[i], Tmb[i]] for i in range(n)),(n,2))
15 V = reshape([Vp[i], Vm[i]] for i in range(n)),(n,2))
16 bib.plot(V,T1,[' ',''],m); bib.plot(V,T2,['T+','$','T-','$'],m)

```

Sygnał ciągły w czasie można zobrazować za pomocą zmiennej amplitudy sygnału analogowego, która może przyjmować każdą wartość z ciągłego przedziału ograniczonego zakresem zmienności. Można ją obliczyć w każdej chwili czasowej ze wzoru matematycznego opisującego rozważany sygnał. Inaczej jest, gdy obliczenia wykonuje się w programie numerycznym wykonywanym na maszynie cyfrowej. Dla przykładu, dyskretyzacja napięciowego sygnału analogowego pochodzącego z pomiaru ze stałym czasem próbkowania prowadzi do otrzymania serii pomiarowej w przyjętym przedziale czasu

obserwacji. Innym sposobem generowania wartości liczbowych na maszynie cyfrowej jest obliczenie ich na podstawie wzoru matematycznego.

Jeśli zbiorem argumentów funkcji danej wzorem (2.1), przy $c = 3$, jest ciąg liczb $v_i = \{-0.2, -0.07, 0.03, 0.1\}$, to z dokładnością do 0.01 zbiór wartości tej funkcji jest następujący $T_{1i} = \{-0.62, -0.82, 0.92, 0.77\}$. Chwila czasowa przejścia w stan utwierdzenia jest w tym przypadku wyznaczona nieprecyzyjnie. Wynikiem tego jest narastanie niedokładności odwzorowania numerycznego istotnych cech fizycznych obiektu rzeczywistego.

W układach samowzbudnych z tarciem suchym sekwencji przejść utwierdzenie-poślizg i poślizg-utwierdzenie na powierzchni kontaktu towarzyszą skokowe zmiany przyspieszenia. Jest to efekt szybkich zmian prędkości ruchu względnego, która oscyluje pomiędzy wartością zerową i maksymalną. Obszerny przegląd literatury z tego zakresu zawarto w pracy [11]. Wspomniany wcześniej charakter występowania niedokładności związanej z wyznaczeniem zerowej wartości prędkości względnej prowadzi do błędnego obliczenia współrzędnych początku i końca strefy utwierdzenia. Poprawne modelowanie numeryczne układów z tarciem wymaga zatem dużej dokładności obliczeń, małego kroku całkowania, a niekiedy wyprowadzania modeli całkowych. Zostało to pokazane w pracy [46], gdzie na przykładzie modelowania wypadkowych sił tarcia suchego oraz oporu toczenia w przypadku skończonego i płaskiego obszaru kontaktu ciernego wykonano przybliżenie modelu całkowego sił tarcia, opartego na aproksymacji Padégo oraz jej modyfikacjach i uogólnieniach.

2.1. Aproksymacja funkcji skokowej i metody przybliżone

Prowadzenie obliczeń numerycznych polegające na modelowaniu nieliniowych układów dynamicznych z tarciem wymaga zdefiniowania pewnych wartości szczególnych. Niech jedną z nich będzie wartość $v_0 = 0$, występująca podczas modelowania tarcia suchego za pomocą funkcji $T_2(v)$ danej wzorem (2.2). Punkty rozwiązania numerycznego są dane w postaci liczb rzeczywistych w reprezentacji zmiennoprzecinkowej pojedynczej lub podwójnej precyzji, dlatego zerowa wartość prędkości ruchu względnego byłaby trudna do osiągnięcia.

Jedną z metod przybliżania wartości szczególnych dla potrzeb obliczeń numerycznych bazuje na zdefiniowaniu przedziału p , stanowiącego zakres dla oszacowania wartości szczególnej v_0 [11]. Przykładowo, niech funkcja $T_2(v)$ będzie dana różnymi wzorami w trzech przedziałach zmienności jej argumentu. Jeśli w wyniku całkowania numerycznego, prędkość ruchu względnego v zawiera się (w pewnym kroku czasowym) w przedziale $I = [-0.001, 0.001]$, to wartość szczególna v_0 jest osiągnięta i można przełączyć się pomiędzy gałęziami $T_+(v)$ i $T_-(v)$ funkcji $T_2(v)$ lub przyjąć, że powierzchnie

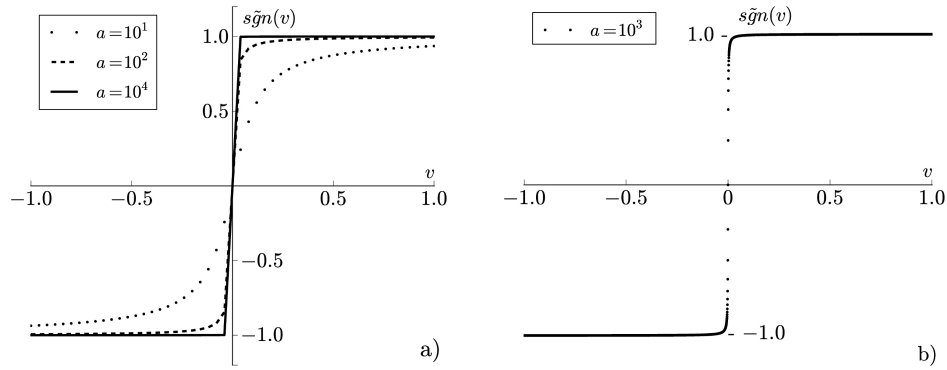
kontaktu ciernego ulegają utwierdzeniu, a siła tarcia jest równa sile tarcia statycznego, tj. $T_2(v) = T_s$. Poprawne szacowanie wartości $v \in I$ jest trudne, ponieważ granice przedziału I zależą od kroku całkowania i związanej z nim minimalnej różnicy pomiędzy kolejnymi wartościami v . Niewłaściwe oszacowanie granic przedziału I prowadzi do znaczących niedokładności, gdyż zbyt duży przedział I przyspiesza przejście w stan utwierdzenia, zwiększając rozmiar strefy utwierdzenia, natomiast przyjęcie zbyt małego przedziału może zupełnie pominąć istniejący stan utwierdzenia. Drugi z podanych scenariuszy prowadzi do zbyt częstych przejść przez strefę zerowej prędkości. Tego rodzaju zachowania dynamiczne obserwowane w układach z tarcie suchym modelowane na gruncie teorii Filipowa opisano w następnym rozdziale.

2.1.1. Ciągła aproksymacja funkcji skokowej

Wyprowadzając matematyczny model tarcia suchego, wykorzystuje się funkcję sgn daną wzorem (1.1). Na potrzeby rozwiązań analitycznych, skokowy charakter tej funkcji można aproksymować wzorem

$$\text{sgn}(v) \approx \widetilde{\text{sgn}}(v) = \frac{2}{\pi} \arctan(av), \quad (2.3)$$

w którym a jest dużą liczbą. Wykresy kolejnych aproksymacji danych wzorem (2.3) dla kilku wartości parametru a zilustrowano na rysunku 2.2.



Rysunek 2.2. Przybliżenie funkcji $\text{sgn}(v)$ dla kilku wartości parametru dopasowania a oraz ciągu liczb $v_i = ih$, $i = 1 \dots n$: a) $h = 0.04$, $n = 51$, b) $h = 0.0005$, $n = 4001$.

Serie punktów obliczono za pomocą procedur z wydruków 2 i 3

Wydruk 2. Obliczenie funkcji $\widetilde{\text{sgn}}(v)$ z rysunku 2.2a.

```
1 from math import pi, atan
2 import biblioteka_graficzna as bib
3 from numpy import zeros
4 h = 0.04; n = 51; m = 3; a = [1e1, 1e2, 1e4]
```

```

5 V = [-1+h*i for i in range(n)]
6 T = zeros((m,n),float)
7 for i in range(m):
8     T[i] = [2./pi*atan(a[i]*v) for v in V]
9 bib.plot(V,T,['a=10^1$', 'a=10^2$', 'a=10^4$'],m)

```

Wydruk 3. Obliczenie funkcji $\widehat{\text{sgn}}(v)$ z rysunku 2.2b.

```

1 from math import pi,atan
2 import biblioteka_graficzna as bib
3 h = 0.0005; n = 4001; a = 1e3
4 V = [-1+h*i for i in range(n)]
5 T = [2./pi*atan(a*v) for v in V]
6 bib.plot(V,T, 'a=10^3$',1)

```

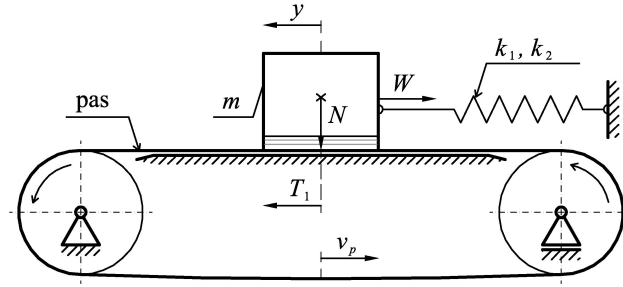
Aproksymacja (2.3) znajduje także zastosowanie w obliczeniach numerycznych [9, 11] przy modelowaniu krótkotrwałych stanów utwierdzenia. Na rysunku 2.2b pokazano, że odpowiednio dobrany parametr a i krok całkowania h pozwalają na rozmieszczenie wymaganej ilości punktów (przy prędkości v bliskiej zeru) na odcinku przebiegu funkcji pomiędzy wartościami -1.0 a 1.0 . W konsekwencji, jest możliwe numeryczne modelowanie siły tarcia statycznego w stanie utwierdzenia. W tym miejscu należy zaznaczyć, że ten sposób modelowania zjawiska tarcia suchego jest związany z analizą prowadzoną za pomocą modeli dynamicznych. Jest to inne podejście według którego tarcie, jako zjawisko zmienne w czasie należy opisywać równaniami różniczkowymi. Przegląd literatury i niektórych modeli tarcia z tego zakresu zawarto w pracy [11].

2.1.2. Metoda przybliżona rozwiązywania nieciągłych równań różniczkowych

Rozpatrzmy układ dynamiczny o jednym stopniu swobody pokazany na rysunku 2.3. Ciało sztywne o masie m jest połączone elementem sprężystym o parametrach k_1 i k_2 z nieruchomą ścianą i wykonuje drgania samowzbudne z prędkością $\dot{y}$ pod wpływem siły tarcia, występującej na powierzchni kontaktu (przylegania) pomiędzy tą masą a ruchomą podstawą. Przyjmuje się, że podstawa zachowuje kształt w strefie przylegania, tzn. nie odkształca się podczas ruchu ze stałą prędkością v_p pod wpływem siły nacisku N (ten stan zapewnia umieszczone od jego wewnętrznej strony sztywno zamocowane podparcie). Siłę reakcji nieliniowego elementu sprężystego na zmianę położenia y masy m oznaczono jako W , natomiast siłę tarcia suchego na powierzchni przylegania jako T_1 .

Równanie równowagi sił działających na masę m jest postaci

$$m\ddot{y} + W(y) = T_1(v). \quad (2.4)$$



Rysunek 2.3. Schemat ideowy badanego układu mechanicznego o jednym stopniu swobody z tarcieniem suchym

Podstawiając w równaniu (2.4) siłę tarcia $T_1(v)$ daną wzorem (2.1), prędkość ruchu masy m względem prędkości ruchu podstawy $v = \dot{y} - v_p$ oraz siłę reakcji elementu sprężystego $W(y) = -k_1 y + k_2 y^3$, otrzymuje się nieliniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu w postaci parametrycznej

$$m\ddot{y} - k_1 y + k_2 y^3 - \text{sgn}(\dot{y} - v_p) \frac{\mu_0}{1 + \delta|\dot{y} - v_p|} = 0. \quad (2.5)$$

Równanie (2.5) opisuje dynamikę drgań samowzbudnych z tarcieniem suchym pomiędzy masą m a podstawą, poruszającą się ze stałą prędkością.

W celu rozpatrzenia przykładowego rozwiązania przybliżonego przyjęto następujące wartości parametrów: $m = k_1 = k_2 = \delta = v_p = 1$, $\mu_0 = 0.5$. Na tej podstawie równanie (2.5) przyjmuje postać bezparametrową

$$\ddot{y} - y + y^3 + \text{sgn}(1 - \dot{y}) \frac{0.5}{1 + |\dot{y} - 1|} = 0. \quad (2.6)$$

Wykonując podstawienie $\dot{y} = 1 - w$, otrzymuje się układ dwóch równań różniczkowych

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 1 - w, \\ \dot{w} &= y^3 - y - \text{sgn}(w) \frac{0.5}{1 + |w|}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

W kolejnym kroku aproksymuje się równania (2.7), otrzymując

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 1 - w, \\ \dot{w} &= y^3 - y - f_\varepsilon(w), \end{aligned} \quad (2.8)$$

gdzie dla małej liczby $\varepsilon > 0$, funkcja $f_\varepsilon : R \rightarrow R$ jest dana wzorem

$$f_\varepsilon(w) := \begin{cases} \text{sgn}(w) \frac{0.5}{1 + |w|}, & |w| \geq \varepsilon, \\ \frac{0.5w}{(1 + \varepsilon)\varepsilon}, & |w| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (2.9)$$

Funkcja f_ε jest pewnym przybliżeniem odwzorowania wielowartościowego danego w postaci

$$\text{Sgn} := \begin{cases} \text{sgn}(w), & w \neq 0, \\ [-1, 1], & w = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

W efekcie, na podstawie ogólnej teorii równań różniczkowych [26] układ (2.8) jest aproksymacją nieciągłej inkluzji różniczkowej

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 1 - w, \\ \dot{w} - y^3 + y &\in -\text{Sgn}(w) \frac{0.5}{1 + |w|}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Zgodnie z definicją wprowadzoną we wzorze (2.9), rozpatruje się dynamikę zmian stanu w . Wartością szczególną funkcji $w(t)$, dla pewnego $t = t_0$, jest $w_0 = 0$. Z tego względu, analizę należy prowadzić w dwóch przedziałach, odpowiednio w lewo- i prawostronnie domkniętych, tj. $w \geq \varepsilon$ i $|w| \leq \varepsilon$. W pierwszym przedziale, układ równań (2.8) zapisuje się, jak następuje

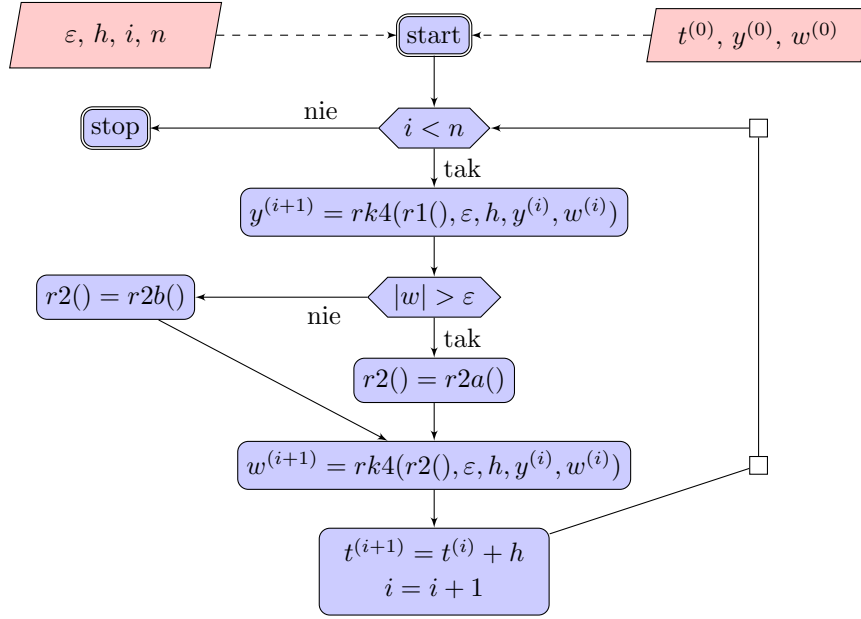
$$\begin{aligned} \dot{y} &= 1 - w, \\ \dot{w} &= y^3 - y - \frac{0.5}{1 + w}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

gdzie przy $w > 0$ uzyskuje się postać daną wzorem (2.7). W drugim przedziale (przy $|w| \leq \varepsilon$), podstawia się $w = \varepsilon z$, gdzie z jest pewną zmienną zależną od czasu, spełniającą warunek $|z(t)| \geq 1$. Na tej podstawie układ równań (2.8) jest dany w postaci

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 1 - \varepsilon z, \\ \varepsilon \dot{z} &= y^3 - y - \frac{0.5}{1 + \varepsilon z}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Wykorzystując nieciągły układ dynamiczny z tarciem suchym dany równaniem (2.5), wyprowadzono metodę aproksymacji, którą na podstawie równań (2.12) i (2.13) można zastosować do wyznaczenia rozwiązania okresowego $p(t)$ w strefie poślizgu. Schemat blokowy procedury całkowania numerycznego prowadzącej do obliczenia tego rozwiązania przedstawia diagram z rysunku 2.4.

Stosując opisaną metodę, nie ma potrzeby dokładnego określenia przejścia przez wartość zerowej prędkości $w(t) = 0$, jak również nie jest konieczne definiowanie przedziału $I(\delta)$ o środku w punkcie ε . Jak widać na rysunku 2.4, o wyborze odpowiedniego równania opisującego dynamikę układu w strefach poślizgu (równanie (2.12)) i utwierdzenia (równanie (2.13)) decyduje znak wartości $w(t) - \varepsilon$. Zatem, w celu obliczenia rozwiązania całkuje się równanie



Rysunek 2.4. Schemat procedury numerycznej całkowania z zastosowaniem metody aproksymacji

(2.12), jeśli $w(t) > \varepsilon$, bądź równanie (2.13), jeśli $w(t) \leq \varepsilon$. Oczywiście, wierzniejsze odwzorowanie strefy utwierdzenia następuje poprzez zmniejszenie kroku całkowania h i parametru ε . Jak pokazują wyniki eksperymentów numerycznych, wymaganą dokładność opracowanego algorytmu uzyskuje się spełniając warunek $h \leq \varepsilon$. Uogólnienie opisanej aproksymacji przedstawiono w kolejnym podrozdziale.

2.1.3. Uogólnienie metody aproksymacji

Wyprowadzenie równań dynamiki w postaci aproksymacji ciągłej danej wzorami (2.12)-(2.13) można uogólnić, stosując dalej opisaną metodę wyznaczania rozwiązań okresowych i odwzorowań Poincaré płaskich układów nieciągłych.

Definiuje się następujący układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned}
 \dot{w} &= h_+(w, y) & \text{dla } w > 0, \\
 \dot{y} &= g_+(w, y) \\
 \dot{w} &= h_-(w, y) & \text{dla } w < 0, \\
 \dot{y} &= g_-(w, y)
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

w którym $h_{\pm} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i $g_{\pm} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ są gładkimi funkcjami.

(Z1) Istnieje rozwiązanie $p(t) = (p_1(t), p_2(t))$ równań (2.14), określone na przedziale obustronnie domkniętym $[0, T]$ takie, że $p_1(t) > 0$ przy $t \in (0, T)$ i $p_1(0) = p_1(T) = 0$. Dodatkowo, $h_+(0, p_2(0)) = 0$, $h_+(0, y) < 0$ przy $y \in (p_2(0), p_2(T))$ i $h_-(0, y) > 0$, jeśli $y \in [p_2(0), p_2(T)]$.

Stosując teorię układów typu Filipowa [34, 50], równania różniczkowe pierwszego rzędu (2.14), przy $w = 0$ i $y \in [p_2(0), p_2(T)]$ przekształca się jak następuje

$$\dot{y} = H(y) := \frac{g_+(0, y) - g_-(0, y)}{2} V(y) + \frac{g_+(0, y) + g_-(0, y)}{2}, \quad (2.15)$$

gdzie

$$V(y) = \frac{h_+(0, y) + h_-(0, y)}{h_-(0, y) - h_+(0, y)}.$$

Ponadto, są prawdziwe następujące zależności:

$$\begin{aligned} h_+(0, y) - h_-(0, y) &< 0, \\ V(y) &> 1, \quad \forall y \in [p_2(0), p_2(T)], \\ V(y) &< 1, \quad \forall y \in (p_2(0), p_2(T)), \\ V(p_2(0)) &= 1. \end{aligned} \quad (2.16)$$

(Z2) $H(y)(p_2(T) - p_2(0)) < 0$ dla dowolnego $y \in [p_2(0), p_2(T)]$.

Na podstawie założenia (Z2), rozwiązanie $y_0(t)$ równania (2.15) przy warunku początkowym $y_0(0) = p_2(T)$ przechodzi przez punkt $p_2(0)$ w czasie $T_0 > 0$. Założenia (Z1)-(Z2) wyznaczają warunki na rozwiązanie okresowe $p_0(t)$ równań (2.14) w strefie poślizgu, tj.

$$p_0(t) := \begin{cases} p(t) & \text{przy } t \in [0, T], \\ (0, y_0(t - T)) & \text{przy } t \in [T, T + T_0]. \end{cases}$$

W celu wyznaczenia odwzorowania Poincaré przyjmuje się małe $\varepsilon > 0$ oraz ciągłą aproksymację równania (2.14) daną równaniami

$$\begin{aligned} \dot{w} &= h_+(w, y) \\ \dot{y} &= g_+(w, y) \end{aligned} \quad \text{jeśli } w > \varepsilon, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{w} &= h_-(w, y) \\ \dot{y} &= g_-(w, y) \end{aligned} \quad \text{jeśli } w < -\varepsilon,$$

ale jeśli $|w| \leq \varepsilon$, to

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \frac{h_+(\varepsilon, y) - h_-(-\varepsilon, y)}{2\varepsilon} w + \frac{h_+(\varepsilon, y) + h_-(-\varepsilon, y)}{2}, \\ \dot{y} &= \frac{g_+(\varepsilon, y) - g_-(-\varepsilon, y)}{2\varepsilon} w + \frac{g_+(\varepsilon, y) + g_-(-\varepsilon, y)}{2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Kładąc $w = \varepsilon z$, gdzie $|z| \leq 1$, równanie (2.18) przepisuje się w postaci

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{z} &= \frac{h_+(\varepsilon, y) - h_-(-\varepsilon, y)}{2} z + \frac{h_+(\varepsilon, y) + h_-(-\varepsilon, y)}{2}, \\ \dot{y} &= \frac{g_+(\varepsilon, y) - g_-(-\varepsilon, y)}{2} z + \frac{g_+(\varepsilon, y) + g_-(-\varepsilon, y)}{2}.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Wyprowadzenie odwzorowania Poincaré P_ε równań (2.17)-(2.18) wzdłuż rozwiązania $p_0(t)$ przebiega według poniższego schematu.

Niech $B_\delta(p_2(0)) = [p_2(0) - \delta, p_2(0) + \delta]$ dla małej $\delta > 0$. Wybiera się rozwiązanie $(w(t), y(t))$ równania (2.17) mające początek w punkcie (ε, y) , $y \in B_\delta(p_2(0))$. Wybrane rozwiązanie trafia na linię $w = \varepsilon$ blisko $p(T)$ w punkcie $(\varepsilon, y(\tilde{t}))$, dlatego dla małej $\delta_1 > 0$ można zapisać następujące odwzorowanie

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(y) &:= y(\tilde{t}), \\ \Phi_\varepsilon : B_\delta(p_2(0)) &\rightarrow B_{\delta_1}(p_2(T)).\end{aligned}$$

W kolejnym kroku należy przyjąć, że $(z(t), y(t))$ mające początek w punkcie $(1, y)$ jest rozwiązaniem równań (2.19), gdzie $y \in B_{\delta_1}(p_2(T))$. Na podstawie równania (2.16) oraz twierdzenia Tichonowa [70], rozwiązanie $(z(t), y(t))$ trafia na linię $z = 1$ w czasie $\tilde{t}$ blisko punktu $(1, p_2(0))$. Ponadto, zapisuje się następujące zależności

$$\begin{aligned}1 &= w(\tilde{t}) = V(y(\tilde{t})) + O(\varepsilon), \\ y(\tilde{t}) &= \bar{y}(\tilde{t}) + O(\varepsilon),\end{aligned}\quad (2.20)$$

w których $\bar{y}(t)$ jest rozwiązaniem równania (2.15) przy warunku początkowym $\bar{y}(0) = y$. Jeżeli rozwiązanie y jest blisko $p_2(T)$, to zgodnie z założeniem (Z2) i równaniem (2.20), $z(t)$ przecina linię $z = 1$ w czasie $\tilde{t}$ (dlatego $\tilde{t}$ jest lokalnie jednoznacznie określone). Należy przy tym zauważyć, że przy spełnieniu nierówności (2.16) i równań (2.20), $\bar{y}(\tilde{t})$ jest oddalone od punktu $p_2(0)$ o małości rzędu $O(\varepsilon)$. W konsekwencji, wprowadza się następujące definicje

$$\begin{aligned}\Psi_\varepsilon(y) &:= y(\tilde{t}), \\ \Psi_\varepsilon : B_{\delta_1}(p_2(T)) &\rightarrow \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Poszukiwane odwzorowanie Poincaré jest postaci

$$P_\varepsilon(y) := \Psi_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(y)), \quad y \in B_\delta(p_2(0)).$$

Na podstawie powyższych założeń $\Psi_\varepsilon(y) = p_2(0) + O(\varepsilon)$, dlatego

$$\begin{aligned}P_\varepsilon(y) &= p_2(0) + O(\varepsilon), \\ P'_\varepsilon(y) &= O(\varepsilon).\end{aligned}\quad (2.21)$$

Odwzorowanie $P_\varepsilon : B_{\delta_1}(p_2(T)) \rightarrow B_{\delta_1}(p_2(T))$ ma zatem stały punkt $y_\varepsilon \in B_{\delta_1}(p_2(T))$ w postaci $y_\varepsilon = p_2(T) + O(\varepsilon)$, który na podstawie równania (2.21) silnie przyciąga rozwiązanie y . Odwzorowanie Poincaré $P_0(y) = p_2(T)$ w równaniu (2.21) jest odwzorowaniem wzdłuż rozwiązania okresowego $p_0(t)$ równania (2.14) i oznacza to, że rozwiązanie $p_0(t)$ jest asymptotycznie stabilne.

Podsumowując, przy założeniach (Z1)-(Z2) okresowe rozwiązanie $p(t)$ układu aproksymowanego (2.17)-(2.18) jest szybko zbieżne do rozwiązania stabilnego $p_0(t)$. Opracowaną metodę aproksymacji [6] można stosować do znajdowania przybliżonych rozwiązań okresowych nieciągłych płaskich układów dynamicznych.

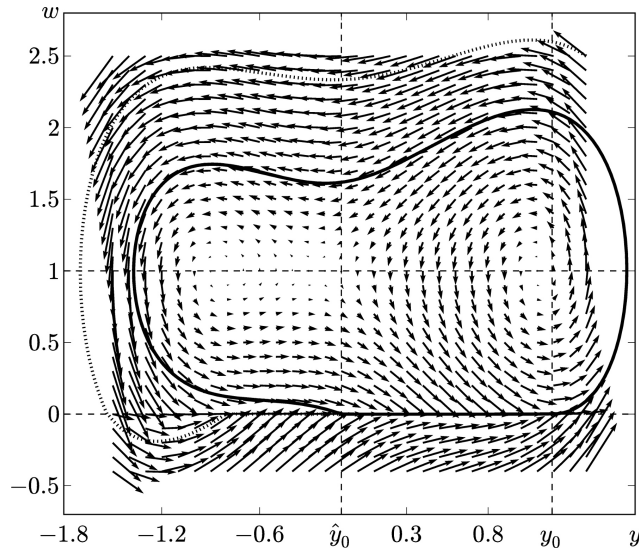
2.1.4. Symulacja numeryczna

Przy użyciu procedury z wydruku 4 obliczono serię czasową punktów stabilnego rozwiązania $p_0(t)$ i pole wektorowe układu dynamicznego danego równaniami (2.16) w pobliżu tego rozwiązania. Na rysunku 2.5 widać, że w punktach leżących na płaszczyźnie fazowej $L(y, w)$ i mających współrzędną $w > 0$, linia $l(y, w_0)$ dla wartości szczególnej $w_0 = 0$ przyciąga rozwiązanie $p_0(t)$, jeśli $y < y_0$ i odpycha, jeśli $y > y_0$. Jest to jednocześnie widoczny punkt styczny zapoczątkowujący rozwiązanie w fazie poślizgu.

Wydruk 4. Wyznaczenie pola wektorowego z rysunku 2.5.

```

1  from numpy import float, absolute, zeros
2  import biblioteka_graficzna as bib
3  from pylab import *
4  y0 = -1.5; w0 = -0.4; yn = y0; wn = w0
5  e = 1e-3; N = 2; h = 0.005; EPSy = 30; EPSw = 30; s = 0.1
6  y,w = meshgrid(arange(yn,1.5,s),arange(wn,2.6,s)) #wsp. pocz.
7  yw = zeros((N,2),float)
8  U = zeros((EPSy,EPSw),float) #wsp. końców
9  V = zeros((EPSy,EPSw),float)
10 for k in range(EPSy):
11     for j in range(EPSw):
12         if k == EPSy-1 and j == EPSw-1:
13             N = 1e4 #liczba punktów rozwiązania p(t)
14             yw = zeros((N,2),float)
15             yw[0,:] = y[k,j],w[k,j]
16             yn,wn = yw[0,:]
17             for i in range(N-1):
18                 #funkcje r1, r2a, r2b zdefiniowano na wydruku 14
19                 yn = rk4(r1,h,yn,wn,e)
20                 r2 = (lambda x: absolute(x)>e and r2a or r2b)(wn)
21                 wn = rk4(r2,h,wn,yn,e)
22                 yw[i+1,:] = yn,wn
23                 U[k,j] = yw[1,0]-yw[0,0]; V[k,j] = yw[1,1]-yw[0,1]
24 bib.plotw(yw,y,w,U,V,'$y$','$w$')
```



Rysunek 2.5. Pole wektorowe układu dynamicznego opisanego równaniami (2.16) w pobliżu stabilnego rozwiązania okresowego $p_0(t)$ - linia ciągła. Przy warunkach początkowych $y_1(0) = 1.4$, $w_1(0) = 2.5$. Rozwiązanie $p_1(t)$ jest przyciągane do rozwiązania $p_0(t)$ zaznaczonego linią przerywaną

Współrzedną y_0 punktu stałego na linii $l(y, w_0)$ wyznacza się z równania $y_0^3 - y_0 = 0.5$ na podstawie wzoru (2.12), dostając pierwiastek rzeczywisty $y_0 \approx 1.1915$. Rozwiązanie numeryczne pokazane na rysunku 2.6a układu dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu danych wzorem (2.7), przy warunkach początkowych $y(0) = y_0$, $w(0) = w_0$ powinno przeciąć linię $l(y, w_0)$ w czasie $t_0 \approx 6.7390$, któremu odpowiada $\hat{y}_0 \approx -0.1001 \in (-y_0, y_0)$. Do obliczenia tego rozwiązania zastosowano procedurę z wydruku 6.

W celu porównania rozwiązań numerycznych wykonywanych w *Matlabie* metodą standardową z wyprowadzoną metodą aproksymacji należy przeprowadzić dwie symulacje całkowania równań (2.7) i (2.12)-(2.13). Odpowiedni kod numeryczny zawarto na wydrukach 5 i 6.

Wydruk 5. Procedura numeryczna w *Matlabie* obliczająca rozwiązanie numeryczne układu równań (2.7).

```

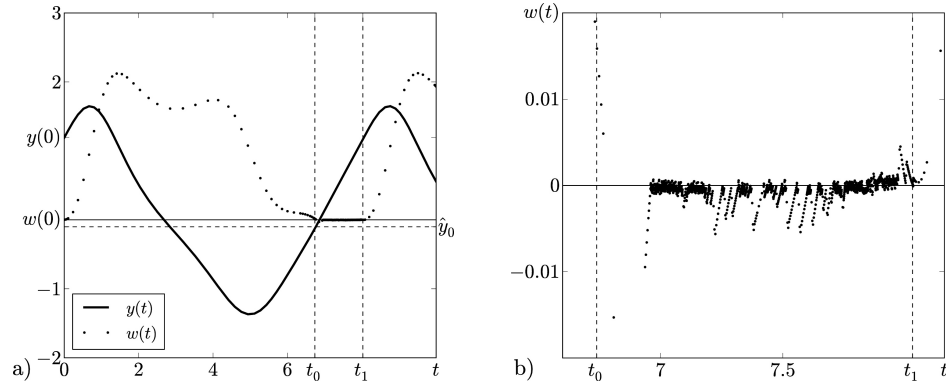
1 function dv = system(t,v)
2     dv = zeros(2,1); sgn = 0;
3     if v(2)<0
4         sgn = -1;
5     end
6     if v(2)>0
7         sgn = 1;
8     end
9     dv(1) = 1-v(2);

```

```

10     dv(2) = v(1)^3 - v(1) - 0.5/(1+abs(v(2)))*sgn;
11     %
12     [t,v] = ode45('system',[0 10],[1.1915 0]);
13     plik = fopen('dane.bin','w');
14     i = 0;
15     s = size(v(:,1));
16     for i=1:s(1)
17         fwrite(plik,[t(i),v(i,:)'],'float'); % zapisz rozw.
18     end
19     fclose(plik);

```

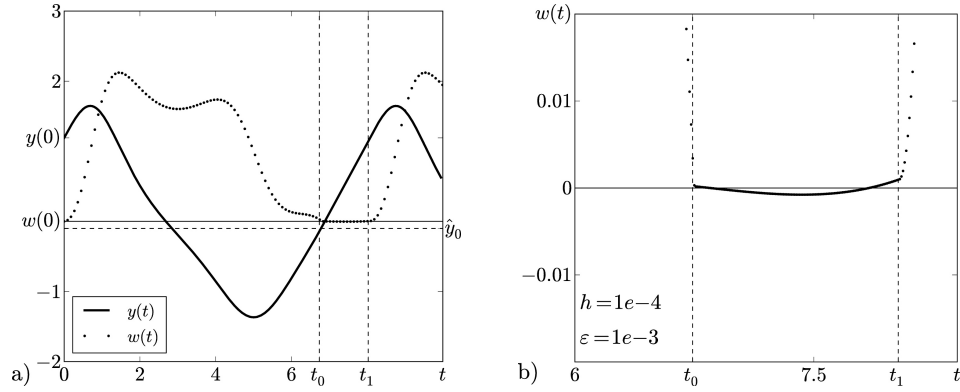


Rysunek 2.6. Wykresy czasowe rozwiązania numerycznego równań (2.7) z wykorzystaniem funkcji 'ode45' *Matlab*a z tolerancją 10^{-4} (wg procedury z wydruku 5): a) wykresy czasowe $y(t)$ i $w(t)$ na przedziale $t \in [0, 10]$; b) powiększenie fragmentu wykresu $w(t)$ na przedziale $t \in [t_0, t_1]$

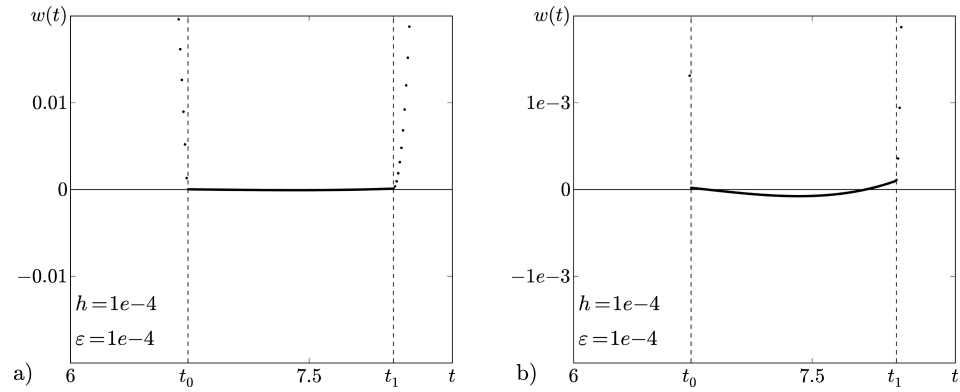
Ilustracja tych rozwiązań jest bardzo istotna, ponieważ pokazuje niedokładności występujące podczas bezpośredniego stosowania standardowej procedury całkowania numerycznego dostępnej w *Matlabie*.

Na rysunku 2.6b widać w pobliżu linii $w(t) = 0$, na przedziale $t \in [0, 10]$, znaczący rozrzut punktów trajektorii czasowej $w(t)$. Punkty tego rozwiązania wyznaczają strefę utwierdzenia i powinny być umiejscowione dokładnie na tej linii w czasie $t \in [t_0, t_1]$, gdzie $t_1 \approx 8.030$ jest chwilą czasową przejścia w stan poślizgu. Podczas badania układów z tarcie suchym czas trwania stanu utwierdzenia powinien być bardzo precyzyjnie wyznaczony. W tym przypadku, nie jest możliwe precyzyjne odczytanie (z dokładnością do kroku całkowania) chwil czasowych przejścia w stan utwierdzenia, a następnie w stan poślizgu. Nie pozwala to na stosowanie tej metody np. przy wyznaczaniu diagramów bifurkacji parametrów układów nieciągłych tego rodzaju. Podobną postać niejednoznaczności strefy utwierdzenia opisano i zilustrowano w pracy [10].

Wynik obliczeń numerycznych widoczny na wykresach z rysunku 2.7 potwierdza dobrą dokładność odwzorowania (wyznaczenia) strefy utwierdzenia otrzymanej przy użyciu proponowanej metody aproksymacji. Porównując fragmenty trajektorii czasowych $w(t)$ pokazane na rysunkach 2.6b i 2.7b, widać dużą różnicę w dokładności odwzorowania strefy utwierdzenia. Występuje ona przy stosowaniu standardowej metody rozwiązywania nieciągłych równań różniczkowych (2.7) (wg procedury z wydruku 5) i proponowanej metody rozwiązywania równań przybliżonych (2.12)-(2.13) zapisanej w kodzie numerycznym procedury 6.



Rysunek 2.7. Wykresy czasowe rozwiązania numerycznego $(y(t), w(t))$ równań (2.12)-(2.13) przy $h = 10^{-4}$ i $\varepsilon = 10^{-3}$: a) $t \in [0, 10]$, b) powiększenie strefy utwierdzenia na przedziale $t \in [t_0, t_1]$



Rysunek 2.8. Wpływ parametru dopasowania ε na dokładność aproksymacji strefy utwierdzenia: a) na przedziale $w(t) \in [-2, 2] \cdot 10^{-2}$, b) w powiększeniu na przedziale $w(t) \in [-2, 2] \cdot 10^{-3}$

Wydruk 6. Procedura numeryczna rozwiązująca układ równań (2.12)-(2.13) przy użyciu proponowanej metody aproksymacji. Uzupełnieniem są funkcje z wydruku 14 (Dodatek).

```

1  from numpy import float , absolute , zeros
2  e = 5e-3 #epsilon
3  h = 1e-4; N = int(tk/h) #krok czasowy; liczba iteracji
4  tk = 10 #czas końcowy
5  t = zeros(N, float) #wektor czasu
6  y, w = 1.1915, .0
7  yw = zeros((N,2), float)
8  yw[0,:] = y, w
9  for i in range(N-1):
10     y = rk4(rownl, h, y, w, e) #przesunięcie
11     r2 = (lambda x: absolute(x)>e and r2a or r2b)(w)
12     w = rk4(r2, h, w, y, e) #prędkość
13     t[i+1] = t[i]+h
14     yw[i+1,:] = y, w #rozwiązanie

```

Rozrzut punktów strefy utwierdzenia widocznej na rysunku 2.6b można zmniejszyć, przyjmując mniejszą tolerancję rozwiązania wbudowanej procedury *Matlaba* 'ode45' (ze zmiennym krokiem całkowania), jednak nie zlikwiduje to nieregularnego rozkładu punktów wokół wartości w_0 . Inny sposób polega na zdefiniowaniu przedziału I omówionego punkcie 2.1. W takim przypadku można przyjąć, że jeśli $w(t) \in I = [-0.01, 0.01]$ w pewnej chwili czasowej t_0 , to dochodzi do utwierdzenia powierzchni styku i $w(t) = 0$. Istnieje jednak duże ryzyko związane z tym, że początek strefy utwierdzenia będzie wyznaczony niepoprawnie.

Jakościowo lepszym wynikiem jest rozwiązanie przybliżone pokazane na rysunku 2.7b, ponieważ strefa utwierdzenia wyznaczona na podstawie rozwiązania równań przybliżonych (2.12)-(2.13) ma charakter gładki. Punkty przegięcia widoczne w pobliżu pionowych linii przerywanych leżą bliżej wartości dokładnych, wyznaczając początek i koniec odpowiadającej im strefy utwierdzenia. Dokładność poprawia się, zmniejszając wartość parametru dopasowania ε . Wybierając $\varepsilon = 10^{-4}$ przy zachowaniu tego samego kroku całkowania, uzyskuje się wysoką dokładność odwzorowania strefy utwierdzenia i poślizgu, co pokazano na rysunku 2.8a i w powiększeniu na rysunku b.

Podsumowując, dla nieciągłego układu dynamicznego (2.7) wyznaczono aproksymację stabilnego rozwiązania okresowego $p_0(t)$ mającego początek w punkcie (y_0, w_0) . Wszystkie rozwiązania rozpoczynające się w pobliżu $p_0(t)$ (jak np. $p_1(t)$ widoczne na rysunku 2.5) zbiegają do tego rozwiązania w skończonym przedziale czasu. Oczekuje się, że aproksymacja (2.8) też ma rozwiązanie okresowe silnie przyciągane do $p_0(t)$. Tego rodzaju zachowanie przedstawiono w pracy [12] na przykładzie rozwiązań numerycznych układu autonomicznego o dwóch stopniach swobody z tarcie.

2.2. Osobliwości punktów stycznych, rozwiązania w strefach poślizgu i utwierdzenia

Analizie jest poddany następujący układ dynamiczny zapisany w postaci ogólnej [47]

$$\dot{x} = \begin{cases} f^{(1)}(x), & x \in S_1, \\ f^{(2)}(x), & x \in S_2, \end{cases} \quad (2.22)$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, natomiast

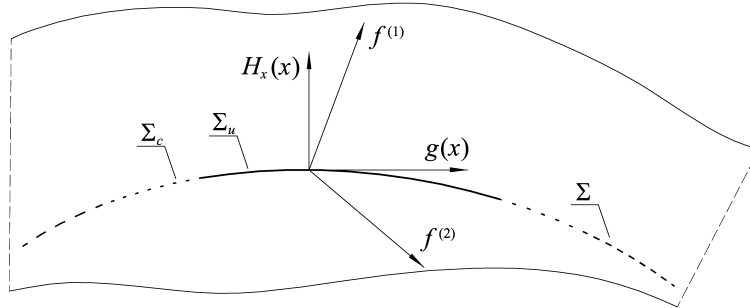
$$\begin{aligned} S_1 &= \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) < 0\}, \\ S_2 &= \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) > 0\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Funkcja H jest gładka i ma w kierunku x gradient $H_x(x) = \frac{\partial H(x)}{\partial x}$ na granicy nieciągłości danej zbiorem

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) = 0\}, \quad (2.24)$$

przy czym $f^{(j)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($j = 1, 2$) są funkcjami gładkimi.

Rozwiązanie ogólne równania (2.22) znajduje się przez sklejenie rozwiązań ze zbioru utwierdzeń należących do Σ z rozwiązaniami standardowymi znajdującymi się w zbiorach poślizgu S_j ($j = 1, 2$). W szczególności rozwiązanie należące do zbioru utwierdzeń można oszacować przy użyciu metody Filippowa, której ideę pokazano na rysunku 2.9.



Rysunek 2.9. Graficzna interpretacja kombinacji wypukłej dwóch wektorów

Niech zatem

$$\sigma(x) = \langle H_x(x), f^{(1)}(x) \rangle \langle H_x(x), f^{(2)}(x) \rangle \quad (2.25)$$

będzie definicją funkcji przełączeń, w której $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$. Zbiór przecięcia $\Sigma_c \subset \Sigma$ jest zdefiniowany następująco

$$\Sigma_c = \{x \in \Sigma : \sigma(x) > 0\}. \quad (2.26)$$

Zbiór utwierdzeń Σ_u stanowi więc dopełnienie zbioru Σ_c w Σ , co pozwala na sformułowanie kolejnego warunku na istnienie drugiego obszaru należącego do Σ , określonego w postaci

$$\Sigma_u = \{x \in \Sigma : \sigma(x) \leq 0\}. \quad (2.27)$$

W ogólności, orbita równania (2.22) przecina Σ w punktach $x \in \Sigma_c$, podczas gdy ślizga się po powierzchni Σ w każdym punkcie $x \in \Sigma_u$.

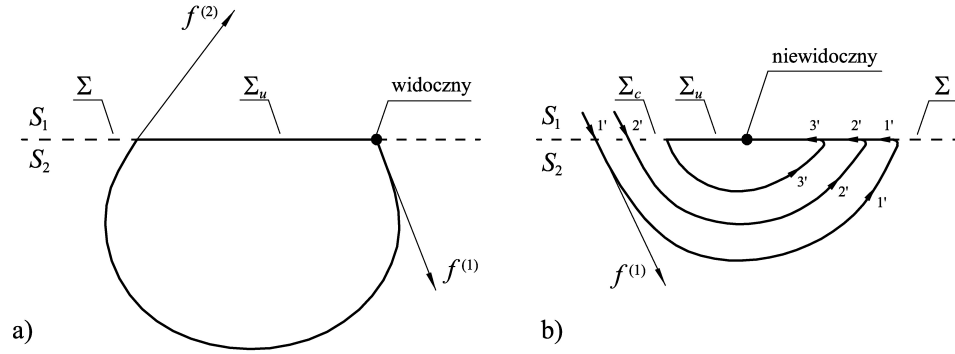
Metoda Filippowa [34] bazuje na tzw. kombinacji wypukłej $g(x)$ dwóch wektorów $f^{(j)}$, zaczepionych w każdym nieosobliwym punkcie utwierdzenia $x \in \Sigma_u$. Wyraża ją poniższy wzór

$$g(x) = \lambda f^{(1)}(x) + (1 - \lambda) f^{(2)}(x), \quad (2.28)$$

w którym

$$\lambda = \frac{\langle H_x(x), f^{(2)}(x) \rangle}{\langle H_x(x), f^{(2)}(x) - f^{(1)}(x) \rangle}. \quad (2.29)$$

Nieosobliwość punktów utwierdzenia będzie spełniona tylko wtedy, gdy mianownik wyrażenia (2.29) będzie różny od zera.



Rysunek 2.10. Punkty styczne w strefie utwierdzenia: a) widoczny, b) niewidoczny

Zbiór punktów utwierdzenia można wyznaczyć, rozwiązując gładki układ dynamiczny równań różniczkowych w $(n - 1)$ -wymiarowej dziedzinie zbioru Σ_u , tj.

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in \Sigma_u. \quad (2.30)$$

Jeżeli jeden z wektorów $f^{(j)}$ znika, to punkt osobliwy równania (2.28) jest nazywany granicznym punktem równowagi. Innymi słowy, obszar graniczny zbioru utwierdzeń jest złożeniem wszystkich punktów utwierdzeń, granicznych punktów równowagi i punktów stycznych, w których jeden z wektorów

$f^{(j)}$ jest styczny do Σ , a drugi jest niezerowy. Wobec powyższego wprowadza się następującą definicję punktów stycznych

$$\langle H_x(x_{1,0}), f^{(j)} \rangle = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.31)$$

Analizując trajektorię rozwiązania, wyróżnia się pewne właściwości dotyczące tzw. widoczności punktów stycznych. Mianowicie, punkt styczny $x_{1,0}$ jest *widoczny*, jeżeli orbita $\dot{x} = f^{(1)}(x)$ startująca z tego punktu zbiega do S_1 w dostatecznie krótkim czasie $|t| \neq 0$. Punkt styczny jest *niewidoczny*, jeżeli wspomniana orbita zbiega do obszaru S_2 . Definicję tych punktów ilustruje rysunek 2.10.

2.2.1. Granica nieciągłości i funkcja przełączeń

Rozpatruje się ponownie obiekt dynamiczny drugiego rzędu dany równaniem (2.6), sprowadzonym do układu dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1^3 - \operatorname{sgn}(x_2 - v_p) \mu_k(x_2 - v_p), \end{cases} \quad (2.32)$$

gdzie μ_k jest współczynnikiem tarcia danym wzorem (1.3).

Zapisując równanie (2.32) w postaci (2.22) i uwzględniając zależność na współczynnik tarcia kinetycznego, otrzymuje się

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} x_2, -x_1^3 + x_1 + \frac{\mu_0}{v_p - x_2 + 1} \\ x_2, -x_1^3 + x_1 + \frac{\mu_0}{v_p - x_2 - 1} \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

gdzie: $x = [x_1, x_2]^T$, $f = [f^{(1)}, f^{(2)}]^T$.

Zerowa wartość prędkości względnej definiuje granicę nieciągłości Σ rozdzielającą obszary (w tym przypadku płaszczyzny) S_1 i S_2 , tj.

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) = x_2 - v_p = 0\}, \quad (2.34)$$

gdzie w odniesieniu do wcześniejszych założeń $H_x(x) = [0, 1]^T$, a także

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) = x_2 - v_p < 0\}, \\ S_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) = x_2 - v_p > 0\}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Funkcja przełączeń $\sigma(x)$ określona zgodnie z metodą Filippowa wzorem (2.29) jest postaci

$$\sigma(x) = f_2^{(1)}(x) f_2^{(2)}(x). \quad (2.36)$$

Funkcje $f_2^{(1)}$ i $f_2^{(2)}$ to odpowiednio drugie składowe wektorów $f^{(1)}$ i $f^{(2)}$.

Jeśli przyjąć, że $x_v = [x_1, x_2 = v_p]^T$, to funkcja (2.36) na granicy rozdziału jest postaci

$$\begin{aligned}\sigma(x_v) &= (x_1(x_1^2 - 1) - \mu_0)(x_1(x_1^2 - 1) + \mu_0) = \\ &= x_1^2(x_1^2 - 1)^2 - \mu_0^2.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Jeżeli istnieje pochodna D_σ funkcji $\sigma(x_v)$ w kierunku x_1 , to jest możliwe znalezienie punktów szczególnych tej funkcji z wykorzystaniem następujących warunków:

$$\begin{aligned}D_{\sigma,0} &= \frac{d\sigma(x_{v,0})}{dx_1} = 0, \\ \sigma(x_{v,0}) &= 0.\end{aligned}\quad (2.38)$$

Obliczając powyższe, zapisuje się równanie charakterystyczne w postaci

$$D_{\sigma,0} = 2x_{1,0}(x_{1,0}^2 - 1)(3x_{1,0}^2 - 1) = 0, \quad (2.39)$$

na podstawie którego zbiór pierwiastków (punktów stycznych) przy warunkach (2.38) jest następujący

$$x_{1,0}^{(k)} = \left\{ 0, \pm 1, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \quad \text{przy } k = 1 \dots 5. \quad (2.40)$$

Podstawiając kolejno wartości ze zbioru (2.40) do równania (2.37), a następnie rozwiązując każde z nich ze względu na μ_0 , otrzymuje się zbiór wartości granicznych parametru kształtu charakterystyki tarcia

$$\mu_0^{(k)} = \left\{ 0, \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} \right\}, \quad \text{przy } k = 1 \dots 3. \quad (2.41)$$

Warto zauważyć, że przy $\mu_0 = \mu_0^{(1)}$ strefa utwierdzenia Σ_u nie istnieje, a na granicy nieciągłości Σ pozostają tylko trzy punkty styczne $x_{1,0}^{(1,2,3)}$. Przy $\mu_0 = \mu_0^{(2,3)}$ strefa utwierdzenia Σ_u jest ciągła i istnieje pomiędzy granicznymi punktami stycznymi $x_{1,0}^{(6,7)} = \pm 2/\sqrt{3}$. W zakres tej strefy wchodzi również punkty styczne $x_{1,0}^{(4,5)}$ umiejscowione pomiędzy granicznymi punktami stycznymi, dlatego na granicy nieciągłości Σ znajdują się 4 punkty styczne. Bifurkacje strefy utwierdzenia zostaną opisane w kolejnym rozdziale.

2.2.2. Dokładne wyznaczenie strefy utwierdzenia za pomocą metody Hénona

Algorytm Hénona wyprowadzony w pracy [39] stosuje się przy wyznaczaniu punktów mapy Poincaré, ale po odpowiedniej modyfikacji uwzględniającej teorię Filippowa może być przydatny do numerycznego obliczenia

trajektorii rozwiązania w układach nieciągłych z tarciem [9]. Pod uwagę należy też wziąć zależności analityczne na granicę nieciągłości, punkty styczne i funkcję przełączeń wyprowadzone w punkcie 2.2.1.

Dokładne obliczenie trajektorii rozwiązania numerycznego nieciągłego układu dynamicznego z tarciem danego równaniami (2.40) może przebiegać zgodnie ze schematem przedstawionym na rysunkach 2.11 i 2.12.

Rozpoczyna się symulację od zadania parametrów układu dynamicznego i warunków początkowych $x_1^{(0)} = x_1(t_0)$ i $x_2^{(0)} = x_2(t_0)$, a następnie w każdej iteracji sprawdza, czy rozwiązanie zawiera się: a) w jednej ze stref utwierdzenia $\Sigma_u^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$; b) w jednym z obszarów poślizgu S_1 lub S_2 , w których równania różniczkowe (2.33) opisujące układ ciągły całkuje się w sposób standardowy, np. przy użyciu metody Rungego-Kuty czwartego rzędu.

Jeżeli w kroku $i + 1$, podczas fazy poślizgu, $H(x) > 0$ lub $H(x) < 0$, to odpowiednio dla $j = 1$ lub $j = 2$ powtarza się tę iterację, całkując równania różniczkowe (2.33) przekształcone do postaci

$$\dot{X}_1 = F_1(X_1) = \left[\frac{x_2}{f_2^{(j)}}, \frac{1}{f_2^{(j)}} \right], \quad (2.42)$$

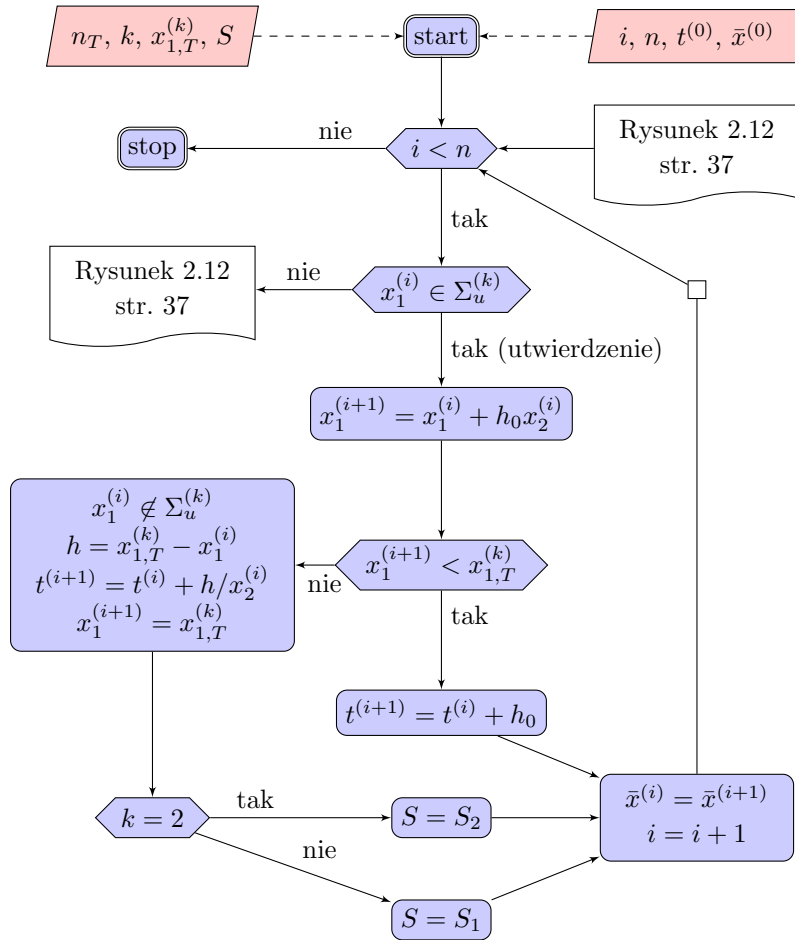
w której: $X_1 = [x_1, \tau]^T$, τ jest czasem upływającym w chwilowym układzie dynamicznym, natomiast x_2 jest zmienną niezależną. W tej iteracji przy $H(x) > 0$ lub $H(x) < 0$, krok całkowania jest odpowiednio $h_1 = v_p - x_2^{(i)}$ lub $h_1 = x_2^{(i)} - v_p$, natomiast prędkość ruchu masy m wynosi $x_2^{(i+1)} = v_p$. Tym sposobem znajduje się przejście pomiędzy fazą poślizgu i utwierdzenia, co umożliwia kontynuację rozwiązania układu (2.33) w strefie utwierdzenia.

Jeżeli w kroku $i + 1$, podczas fazy utwierdzenia, $x_1^{(i+1)} > x_{1,0}^{(k)}$, gdzie $x_{1,0}^{(k)}$ jest k -tym widocznym punktem stycznym, to powtarza się obliczenia w tej iteracji, całkując równania różniczkowe (2.33) opisujące dynamikę układu w fazie utwierdzenia przekształcone do postaci

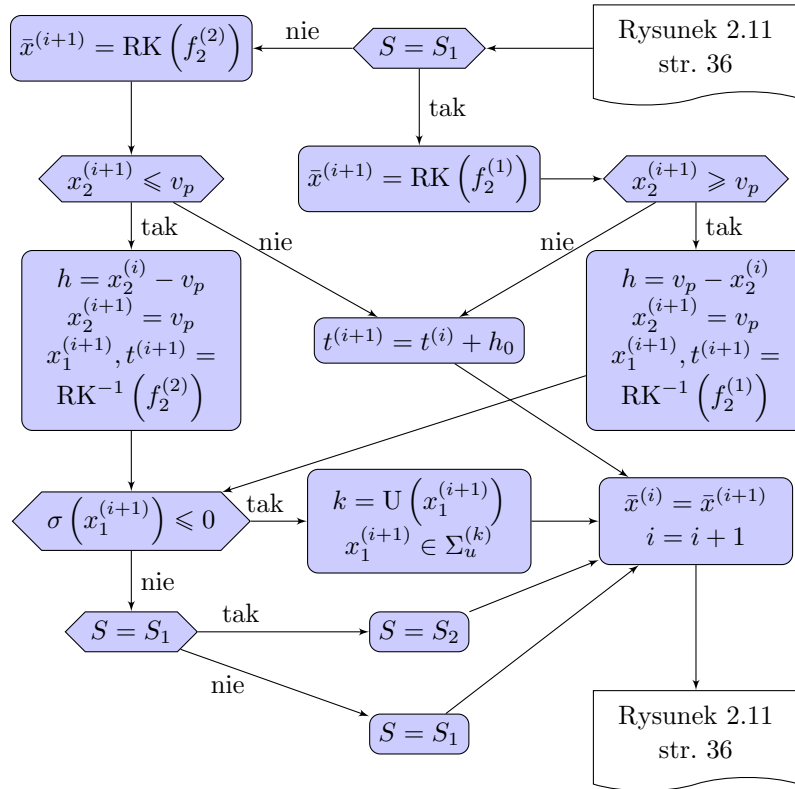
$$\dot{X}_2 = F_2(X_2) = \left[\frac{1}{f_2^{(i)}}, 0 \right], \quad (2.43)$$

w której: $X_2 = [\tau, x_2]^T$, τ jest czasem upływającym w chwilowym układzie dynamicznym, x_1 jest zmienną niezależną, natomiast $h_2 = x_{1,0}^{(k)} - x_1^{(i+1)}$ w k -tym widocznym punkcie stycznym jest chwilowym krokiem całkowania. Zostało zatem znalezione przejście pomiędzy fazą utwierdzenia i fazą poślizgu, co umożliwia kontynuację rozwiązania numerycznego układu (2.33).

Wymienione schematy przejścia warunkują miejsca pojawiania się punktów szczególnych, tzn. punktów przecięcia w obszarze rozdziału Σ_c oraz punktów wejścia/wyjścia trajektorii rozwiązania do/z obszaru Σ_u . Jeżeli



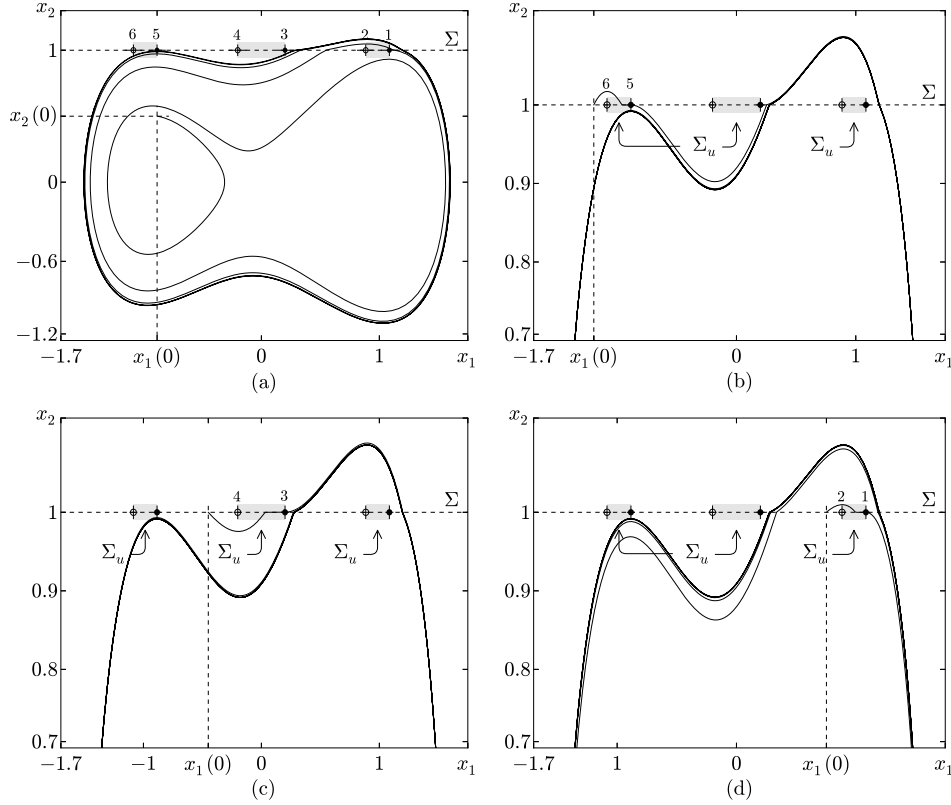
Rysunek 2.11. Schemat procedury numerycznej dokładnego całkowania z wykrywaniem granic nieciągłości



Rysunek 2.12. Kontynuacja diagramu z rysunku 2.11

punkt rozwiązania leżący na granicy rozdziálu obszarów poślizgu S_1 i S_2 zawiera się w obszarze $\Sigma_c \subset \Sigma$, to na płaszczyźnie fazowej (x_1, x_2) pokazanej na rysunku 2.13a, obserwuje się w pobliżu trzeciego punktu stycznego charakterystyczne dla układów z tarcie zakrzywienie trajektorii fazowej.

Opisana powyżej metodyka obliczeń opiera się na wykryciu punktów szczególnych występujących na trajektoriach rozwiązań układów nieciągłych. Uzupełnieniem do diagramów z rysunków 2.11-2.12 i wspomnianej metodyki jest algorytm numeryczny załączony na wydruku 7.



Rysunek 2.13. Widoczne (1, 3, 5) i niewidoczne (2, 4, 6) punkty styczne w strefach utwierdzenia zaznaczonych kolorem szarym. Linia ciągła na rysunkach *a-d* przedstawia rozwiązanie układu dynamicznego (2.33) dla różnych warunków początkowych

Wydruk 7. Całkowanie z dokładnym wykrywaniem granic nieciągłości (rysunek 2.13b). Procedurę uzupełniają funkcje z wydruku 15 (Dodatek).

```

1 x0, h, N, a, b, T, UIW, po_slizgu = inicjuj_obl()
2 x, xn = x0, x0; a1, a1_ = a+1, a-1
3 b2 = b**2; k = miejsce_fazy_poslizgu(x[1], T)
4 i, ikrok = 0, 0; x_r = zeros((2, int(N/krok)+1), float)

```

```

5  while i <= N:
6      if UIW == 1:
7          xn[1] = x[1] + h0 * x[2]
8          if xn[1] <= T[k]: xn[0] = x[0] + h0
9          else:
10             h = T[k] - x[1]
11             xn[0] = x[0] + h/x[2]
12             xn[1] = T[k]
13             UIW = 0
14             if k >> 2 : #wejście do obszaru S1 lub S2
15                 po_slizgu = -1
16             else: po_slizgu = 1
17     else:
18         if po_slizgu == -1 :
19             xn = RKF(f1, x, a1, b, h0, h2, h6)
20             if xn[2] > a :
21                 h = a - x[2]
22                 xn = RKInv(f1, x, a1, b, h)
23                 xn[2] = a
24                 if sigma(xn[1]**2, b2) <= 0 :
25                     k = miejsce_fazy_poslizgu(xn[1], T)
26                     UIW = 1
27                 else: po_slizgu = 1 #wejście do S2
28             else: xn[0] = x[0] + h0
29         else:
30             xn = RKF(f2, x, a1_, b, h0, h2, h6)
31             if xn[2] < a:
32                 h = x[2] - a
33                 xn = RKInv(f2, x, a1_, b, h)
34                 xn[2] = a
35                 if sigma(xn[1]**2, b2) <= 0 :
36                     k = miejsce_fazy_poslizgu(xn[1], T)
37                     UIW = 1
38                 else: po_slizgu = -1 #wejście do S1
39             else: xn[0] = x[0] + h0
40     x = xn
41     if i == krok * ikrok :
42         x_r[0][ikrok], x_r[1][ikrok] = x[1], x[2]
43         ikrok += 1
44     i += 1
45 return x_r

```

Na rysunkach 2.13*a-d* przedstawiono przykładowe rozwiązanie okresowe w układzie dynamicznym z tarciem, w którym nie występują utwierdzenia, a nieciągłość w postaci zakrzywienia tego rozwiązania jest widoczna w czasie przejścia trajektorii fazowej przez granicę nieciągłości $\Sigma_c \subset \Sigma$. Aby zobrazować przebieg trajektorii fazowej w pobliżu punktów stycznych wybrano różne warunki początkowe. Ponadto, przyjęto współczynnik tarcia statycznego $\mu_0 = 1/(3\sqrt{3})$ i prędkość ruchu podstawy $v_p = 1$. Punkty

styczne $x_{1,0}^{(k)}$ dla wybranych parametrów układu, określone z miejsc zerowych funkcji przełączeń $\sigma(x)$ danej wzorem (2.36) są dane, jak następuje

$$x_{1,0}^{(k)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left\{ \cos(c), \cos(2c), \sin(0.5c), -\sin(0.5c), \right. \\ \left. -\cos(2c), -\cos(c) \right\}, \quad c = \frac{\pi}{9}, \quad k = 1 \dots 6. \quad (2.44)$$

2.3. Układy dynamiczne z opóźnieniem i nieciągłością parametrów fizycznych

Nowoczesne metody projektowania i techniki optymalizacyjne współlistnieją z modelowaniem numerycznym i symulacjami komputerowymi. Na etapie wykorzystania takich narzędzi uzyskuje się istotne informacje dotyczące np. wartości krytycznych, istotnych cech lub spodziewanej dynamiki zmian stanu i zużycia przyszłego obiektu rzeczywistego. Modelowanie i symulacje numeryczne prowadzi się zazwyczaj w trakcie całego procesu projektowania, wykonania i testowania układu mechanicznego lub mechatronicznego. Większość symulacji komputerowych wykonywanych w zakresie biomechaniki ruchu i ochrony człowieka lub zwierząt przed niekorzystnym oddziaływaniem od strony otoczenia [55], obejmuje metody elementów skończonych [71] i klasyczną mechanikę ciała sztywnego [5].

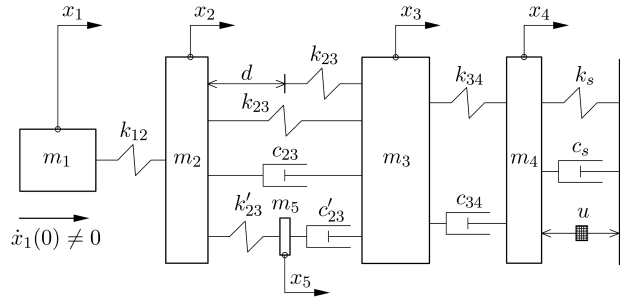
Symulacje komputerowe dynamiki odkształceń i rozkładu naprężeń części maszyn lub organów i kości istot żywych prowadzi się szczegółowo z wykorzystaniem metod elementów skończonych implementowanych w oprogramowaniu komputerowym wspomagającym proces modelowania. Symulacja numeryczna opisana w tym rozdziale obejmuje optymalizację liniowo-kwadratową i klasyczną mechanikę ciała sztywnego, którą zastosowano do wyprowadzenia równań dynamiki badanego modelu klatki piersiowej. Takie podejście ma charakter bardziej ogólny. Wśród jego zalet, szczególnie w odniesieniu do modeli organów ludzkich, można wymienić: mniejszą złożoność opisu matematycznego, krótszy czas symulacji numerycznych, możliwości sprawdzenia rozwiązań w szerszym spektrum wartości parametrów. Niewątpliwie, wadami takiego uproszczenia są m.in. konieczność skupienia mas w jednym punkcie, zmniejszenie liczby parametrów układu, brak uwzględnienia niejednorodności i pełnej reologii żywych tkanek.

Zastosowania metod numerycznych w symulacji dynamiki układów biomechanicznych znajdują naukowe potwierdzenie w badaniach wypadków komunikacyjnych [2]. Niektóre spośród nich dotyczą losowych zdarzeń w ruchu ulicznym ze szczególnym uwzględnieniem uderzeń w klatkę piersiową człowieka przebywającego w pojeździe uczestniczącym w kolizji drogowej [62]. Miękkie tkanki wewnętrznych organów ciała człowieka poddanego działaniu dużej siły o charakterze impulsowym ulegają znacznym naprężeniom

ściskającym lub rozciągającym. Analiza dynamiki odkształceń i przesunięć organów wewnętrznych wymaga często zastosowania złożonych modeli biomechanicznych. Trudności spowodowane są nierównomiernym rozkładem gęstości materiału chrząstek i kości człowieka, stopnia elastyczności ścięgien oraz innych parametrów fizycznych zależnych od ciężaru jego ciała, wieku lub przebytych chorób [37].

2.3.1. Opis matematyczny układu biomechanicznego klatki piersiowej człowieka

Na rysunku 2.14 pokazano uproszczony model biomechaniczny klatki piersiowej człowieka.



Rysunek 2.14. Model biomechaniczny klatki piersiowej poddanej uderzeniu sprężystemu. Od lewej strony: m_1 – masa impaktora, m_2 – masa przedniej strony klatki piersiowej, m_3 – masa tylnej części klatki piersiowej, m_4 – masa oparcia, m_5 – masa organów wewnętrznych (tkanek tworzących połączenie reologiczne)

Wychodząc z zasady równowagi sił działających na każdą z mas przyjętego układu dynamicznego, zapisuje się 5 równań różniczkowych drugiego rzędu, a następnie opis matematyczny uproszczonego modelu biomechanicznego formułuje w postaci 10 równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\dot{x}_{11} = x_{12}, \quad (2.45a)$$

$$\dot{x}_{12} = \frac{1}{m_1} (-k_{12}(x_{11} - x_{21})), \quad (2.45b)$$

$$\dot{x}_{21} = x_{22}, \quad (2.45c)$$

$$\dot{x}_{22} = \frac{1}{m_2} (k_{12}(x_{11} - x_{21}) - k_{23}(x_{21} - x_{31}) - k'_{23}(x_{21} - x_{51}) - c_{23}(x_{22} - x_{32})), \quad (2.45d)$$

$$\dot{x}_{31} = x_{32}, \quad (2.45e)$$

$$\dot{x}_{32} = \frac{1}{m_3} (k_{23}(x_{21} - x_{31}) - k_{34}(x_{31} - x_{41}) + c_{23}(x_{22} - x_{32}) - c'_{23}(x_{32} - x_{52}) - c_{34}(x_{32} - x_{42})), \quad (2.45f)$$

$$\dot{x}_{41} = x_{42}, \quad (2.45g)$$

$$\dot{x}_{42} = \frac{1}{m_4} (k_{34}(x_{31} - x_{41}) - k_s x_{41} + c_{34}(x_{32} - x_{42}) - c_s x_{42}), \quad (2.45h)$$

$$\dot{x}_{51} = x_{52}, \quad (2.45i)$$

$$\dot{x}_{52} = \frac{1}{m_5} (-k'_{23}(x_{51} - x_{21}) + c_{23}(x_{32} - x_{52})), \quad (2.45j)$$

gdzie: $m_1 \dots m_5$ oznaczają kolejno masę impaktora, masy składowe klatki piersiowej i masę podparcia, $\bar{k} = [k_{12}, k_{23}, k'_{23}, k_{34}, k_s]$, $\bar{c} = [c_{23}, c'_{23}, c_{34}, c_s]$ są odpowiednio wektorami parametrów sztywności i tłumienia, x_{i1} , x_{i2} (przy $i = 1 \dots 5$) są odpowiednio wektorami przemieszczeń i prędkości. Masa m_5 jest mała, a połączenie elementu sprężystego k'_{23} i tłumiącego c'_{23} , przy $m_5 = 0$ wyodrębnia reologiczny fragment tego układu, odzwierciedlający zachowanie organów wewnętrznych.

Badany układ charakteryzują następujące własności reologiczne:

- (R1) szeregowo połączenie elementów sprężystego i tłumiącego za pośrednictwem masy m_5 , jeśli $m_5 = 0$;
- (R2) współczynnik sztywności k_{23} zależny od względnego położenia $x_r = x_2 - x_3$ mierzonego na wysokości mostka klatki piersiowej pomiędzy przednią (o masie m_2) i tylną (o masie m_3) stroną tułowia, tzn. podwaja się jego wartość $k_{23} = 2k_{23}$, jeśli $x_r \geq d$;
- (R3) współczynnik tłumienia c_{23} zależny od znaku względnej prędkości zmian położenia $v_r = x_6 - x_7$ pomiędzy przednią i tylną stroną tułowia, tzn. podwaja się jego wartość $c_{23} = 2c_{23}$, jeśli $v_r < 0$.

Na podstawie tych własności, sztywność i tłumienie pomiędzy wyróżnionymi masami zmieniają się w sposób skokowy, zależnie od efektów ściskania lub rozciągania klatki piersiowej spowodowanych sprężystym uderzeniem masy m_1 . Zmiany parametrów k_{23} i c_{23} stanowią inną postać nieciągłości. Podobnie jak w przypadku tarcia suchego, prowadzi ona do przełączeń pomiędzy równaniami różniczkowymi obowiązującymi w różnych stanach dynamicznych determinowanych własnościami (R2)-(R3). Z tego względu, poddając taki układ dynamiczny optymalizacji stanów dynamicznych (np. minimalizacji odległości $x_2 - x_3$), należy opracować nietypowy algorytm sterowania, który opisano w punkcie 4.2.2.

2.3.2. Rozszerzona reprezentacja w przestrzeni stanu

Względne położenia mas w układach fizycznych o wielu stopniach swobody charakteryzują się opóźnieniem czasowym [20]. Zapisanie równań różniczkowych modelujących wielowymiarowe układy dynamiczne z opóźnieniem i nieciągłością parametrów fizycznych opiera się na podstawowej reprezentacji tych układów w przestrzeni stanu, uzupełnionej o dodatkowe macierze niepewności uwzględniające zmienne w czasie parametry układu i współ-

czynniki wektora sygnałów sterujących. Rozszerzona reprezentacja układu liniowego N -połączonych podukładów, których parametry mogą zmieniać się w czasie w sposób nieciągły, przedstawia się następująco

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_i(t)}{dt} = & (\mathbf{A}_i + \Delta\mathbf{A}_{ii}(t))\bar{x}_i(t) + \sum_{j \neq i}^N (\mathbf{A}_{ij} + \Delta\mathbf{A}_{ij}(t))\bar{x}_j(t - \tau_j) + \\ & + (\mathbf{B}_i + \Delta\mathbf{B}_i(t))\bar{u}_i(t), \end{aligned} \quad (2.46a)$$

$$\bar{y}_i(t) = \mathbf{C}_i\bar{x}_i(t) + \mathbf{D}_i\bar{u}_i(t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.46b)$$

We wzorach (2.46) wykorzystano następujące oznaczenia: $\bar{x}_i(t) \in R^{n_i}$, $\bar{u}_i(t) \in R^{m_i}$ i $y_i(t) \in R^{l_i}$, oznaczają kolejno wektory stanu, wejść sterujących i wyjść – odpowiedzi układu. Układ dynamiczny (2.46) N -połączonych podukładów jest opisany za pomocą macierzy niezależnych od czasu: stanu wewnętrznego $\mathbf{A}_i^{n_i \times n_i}$, wejść sterujących $\mathbf{B}_i^{n_i \times m_i}$, wyjść $\mathbf{C}_i^{l_i \times n_i}$ i macierzy transmisyjnej $\mathbf{D}_i^{l_i \times m_i}$. Parametr τ_j stanowi opóźnienie czasowe j -ego podukładu w odniesieniu do czasu upływającego w rozpatrywanej przestrzeni stanu. W dalszych rozważaniach zakłada się, że wejścia sterujące nie wpływają bezpośrednio na sygnały wyjściowe układu, dlatego macierz transmisyjna $\mathbf{D}_i^{l_i \times m_i}$ jest równa 0. Celem rozwiązania zagadnienia uwzględniającego nieciągłość w czasie parametrów przyjętego układu dynamicznego, wprowadza się w równaniach (2.46) macierze parametrów jawnie zależnych od czasu, tj. $\Delta\mathbf{A}_{ii}^{n_i \times n_i}(t)$, $\Delta\mathbf{A}_{ji}^{n_i \times n_i}(t)$ i $\Delta\mathbf{B}_i^{n_i \times m_i}(t)$, które definiują kolejno niejednoznaczności stanu i wejść sterujących. Macierze niejednoznaczności uwzględniają zmiany parametrów zachodzące na podstawie znanej funkcji czasu lub uzależnione od aktualnego wewnętrznego stanu dynamicznego. Macierze $\Delta\mathbf{A}_{ji}^{n_i \times n_i}(t)$ reprezentują istniejące realizacje połączeń pomiędzy podukładami. Opisywaną zależność stanową parametrów sztywności i tłumienia uwzględnia się w opisie matematycznym zdefiniowanego powyżej układu biomechanicznego, co prowadzi do rozwinięcia równań (2.46), danych następującym układem

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{11}(t) \\ \dot{x}_{12}(t) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_{12}}{m_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_{12}}{m_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21}(t - \tau_2) \\ x_{22}(t - \tau_2) \end{bmatrix}, \quad (2.47a) \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_{21}(t) \\ \dot{x}_{22}(t) \end{bmatrix} = & \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_{12} - \hat{k}_{23} - k'_{23}}{m_2} & \frac{-\hat{c}_{23}}{m_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-k_{23}(t)}{m_2} & \frac{-c_{23}(t)}{m_2} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\hat{k}_{12}}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(t - \tau_1) \\ x_{12}(t - \tau_1) \end{bmatrix} + \\ & + \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\hat{k}_{23}}{m_2} & \frac{\hat{c}_{23}}{m_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_{23}(t)}{m_2} & \frac{c_{23}(t)}{m_2} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{31}(t - \tau_3) \\ x_{32}(t - \tau_3) \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k'_{23}}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{51}(t - \tau_5) \\ x_{52}(t - \tau_5) \end{bmatrix}, \quad (2.47b)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{31}(t) \\ \dot{x}_{32}(t) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-\hat{k}_{23}-k_{34}}{m_3} & \frac{-\hat{c}_{23}-c'_{23}-c_{34}}{m_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-k_{23}(t)}{m_3} & \frac{-c_{23}(t)}{m_3} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{31}(t) \\ x_{32}(t) \end{bmatrix} + \\ + \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\hat{k}_{23}}{m_3} & \frac{\hat{c}_{23}}{m_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_{23}(t)}{m_3} & \frac{c_{23}(t)}{m_3} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{21}(t - \tau_2) \\ x_{22}(t - \tau_2) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_{34}}{m_3} & \frac{c_{34}}{m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{41}(t - \tau_4) \\ x_{42}(t - \tau_4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{c'_{23}}{m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{51}(t - \tau_5) \\ x_{52}(t - \tau_5) \end{bmatrix}, \quad (2.47c)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{41}(t) \\ \dot{x}_{42}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_{34}-k_s}{m_4} & \frac{-c_{34}-c_s}{m_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{41}(t) \\ x_{42}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_{34}}{m_4} & \frac{c_{34}}{m_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{31}(t - \tau_3) \\ x_{32}(t - \tau_3) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{m_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{41}(t) \\ u_{42}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.47d)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{51}(t) \\ \dot{x}_{52}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k'_{23}}{m_5} & \frac{-c'_{23}}{m_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{51}(t) \\ x_{52}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k'_{23}}{m_5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21}(t - \tau_2) \\ x_{22}(t - \tau_2) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{c'_{23}}{m_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{31}(t - \tau_3) \\ x_{32}(t - \tau_3) \end{bmatrix}, \quad (2.47e)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{N1}(t) \\ x_{12}(t) & \dots & x_{N2}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.47f)$$

w którym $x_{21}(t) - x_{31}(t)$ jest przesunięciem względnym mas m_2 i m_3 . W równaniu (2.47a) wszystkie macierze niejednoznaczności $\Delta A_{1j} = 0$, przy $j = 1 \dots N$. Macierze istniejących realizacji połączeń $A_{13} = A_{14} = A_{15} = 0$ są też zerowe, ponieważ nie ma fizycznego połączenia pomiędzy masą m_1 a masami m_j , przy $j = 3 \dots N$. Podobnie w równaniu (2.47b): $\Delta A_{21} = \Delta A_{24} = \Delta A_{25} = 0$, $A_{24} = 0$; w równaniu (2.47c): $\Delta A_{31} = \Delta A_{34} = \Delta A_{35} = 0$, $A_{31} = 0$; w równaniu (2.47d): $\Delta A_{3j} = 0$ przy $j = 1 \dots N$, $A_{41} = A_{42} = A_{45} = 0$, $B_4 \neq 0$, ale $B_i = 0$ (przy $i = 1, 2, 3, 5$), ponieważ siła sterująca działa na masę m_4 ; w równaniu (2.47e): $\Delta A_{5j} = 0$, przy $j = 1 \dots N$, a także $A_{51} = A_{54} = 0$.

Wydruk 8. Procedura numeryczna rozwiązująca układ równań (2.47).

Uzupełnieniem są funkcje z wydruku 17 (Dodatek).

```
1 from stale import *
2 from funkcje import *
3 from my_plotting_lib.before_plot import before_plot
```

```

4  from my-plotting-lib.plot-predkosc import plot-predkosc
5  from my-plotting-lib.plot import plot-przesuniecie

7  System = [f0, f1, f2, f3, f4]
8  for i in range(1, Niter):
9      for j in range(Nsub):
10         sX = [.0, .5*k[i, j, 0][:], .5*k[i, j, 1][:], k[i, j, 2][:]]
11         sK = [.0, .5*dk[i, :, 0][:], .5*dk[i, :, 1][:], dk[i, :, 2][:]]
12         for q in range(4):
13             k[i, j, q] = h0*System[j](A, dA, B, X[i-1, j]+sX[q], \
14                 dX[i-1]+sK[q], U[i-1, j], V, P)
15         X[i, j] = X[i-1, j]+.16666*(k[i, j, 0][:]+ \
16             2*(k[i, j, 1][:]+k[i, j, 2][:]+k[i, j, 3][:]))
17     for j in range(Nsub):
18         if i > H[j]:
19             dX[i, j] = X[i-H[j], j] #opóznienie
20             dk[i, j] = k[i-H[j], j]
21         k23_[i], c23_[i] = f23(X[i, 1], X[i, 2], l, k23, c23)
22         if k23_[i]!=k23_[i-1] or c23_[i]!=c23_[i-1]:
23             dA=uncer(dA, k23_[i], c23_[i]) #zmiana mac. niepew. dA
24     before_plot(26)
25     plot-przesuniecie(0, 4, Niter, h0, X, 1) #przes. względne mas
26     plot-predkosc(1, 4, Niter-1200, h0, X, 2) #predkości względne mas

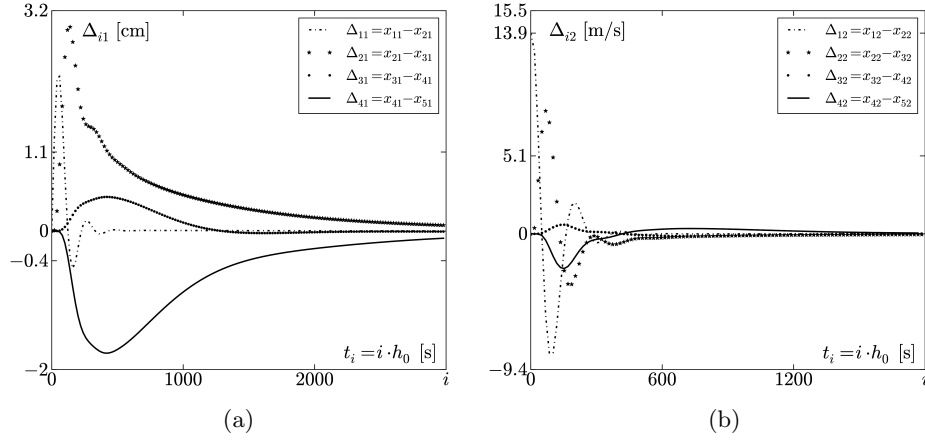
```

Rysunki 2.15 i 2.16 przedstawiają trajektorie czasowe różnic względnych Δ_i pomiędzy zmiennymi stanu badanego układu dynamicznego. Na rysunku 2.16 zobrazowano wpływ opóźnień czasowych każdej ze zmiennych stanu na względne różnice przesunięcia (rysunek a) i prędkości (rysunek b) pomiędzy masami m_2 i m_3 , będącymi odpowiednikami przedniej i tylnej ściany klatki piersiowej.

Jak pokazano na rysunku 2.16, przy opóźnieniach czasowych $\bar{\tau}_k = \{0, 10, 20, 30, 40\} \cdot h_0$ (przy $k = 1 \dots 5$, $h_0 = 0.00005$), przyjętych dla każdej z mas w odniesieniu do zerowego opóźnienia masy impaktora widać, że trajektorie rozwiązań w układzie bez opóźnienia (linia punktowa) i z opóźnieniem (linia ciągła) znacząco odbiegają od siebie. Ta obserwacja wskazuje na konieczność uwzględnienia opóźnień czasowych w układach wielowymiarowych.

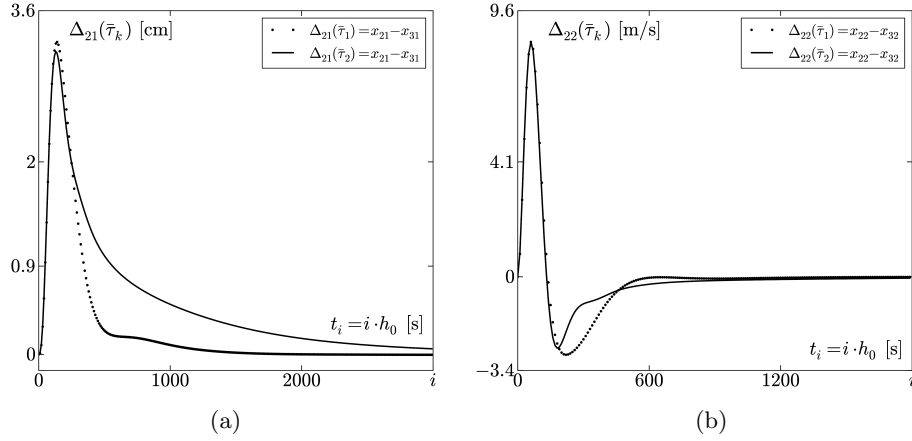
Z praktycznego punktu widzenia jest to również uzasadnione, ponieważ jeśli wyobrazić sobie uderzenie rzeczywiste, to w chwili kontaktu impaktora z przednią ścianą klatki piersiowej jej tylna część, a tym bardziej podparcie, doznają przesunięcia z pewnym opóźnieniem zależnym od parametrów biofizycznych układu i szybkości rozchodzenia się w nim fali uderzeniowej.

Rozwiązanie numeryczne równań różniczkowych z opóźnieniem przedstawionym w rozszerzonej reprezentacji układu liniowego pięciu połączonych podukładów o parametrach zmiennych w czasie istotnie podwyższa dokładność symulacji tego złożonego zjawiska fizycznego. Przykładowo, w procedurze numerycznej nie uwzględniającej opóźnień czasowych pomiędzy po-



Rysunek 2.15. Trajektorie czasowe różnic względnych Δ_i pomiędzy zmiennymi stanu badanego układu dynamicznego. Parametry układu: $m_1 = 1.6$, $m_2 = 0.45$, $m_3 = 27.21$, $m_4 = 10$, $m_5 = 0.1$ [kg], $d = 0.0381$ [m], $\bar{k} = [281, 26.3, 13.2, 50, 10] \cdot 10^3$ [N/m], $\bar{c} = [0.52, 0.18, 0.11, 1] \cdot 10^3$ [Ns/m]. Przyjęto zerowe warunki początkowe wszystkich zmiennych stanu z wyjątkiem prędkości impaktora $x_{12} = 13.9$ [m/s].

Indeksem i oznaczono liczbę iteracji procedury całkowania numerycznego



Rysunek 2.16. Wpływ opóźnienia czasowego $\bar{\tau}$ każdej ze zmiennych stanu na względne różnice przesunięcia (rysunek a) i prędkości (rysunek b) mas m_2 i m_3

łączonymi podukładami dynamicznymi, stany x_{21} i x_{22} opisujące dynamikę drugiego podukładu są aktualizowane już w pierwszej iteracji. Licząc od drugiego podukładu (przedniej ściany klatki piersiowej) przejmującego uderzenie, podukład reprezentujący podparcie uwzględni pojawienie się wymuszenia już w czwartej iteracji, tj. w kroku, w którym zmienne stanu x_{41} i x_{42} podukładu reprezentującego tylną ścianę klatki piersiowej przyjmą wartości niezerowe. Dlatego można wnioskować, że jawne pominięcie opóźnień

czasowych w opisie matematycznym i w konsekwencji w procedurze numerycznej powoduje przyjęcie a priori możliwie najkrótszego czasu opóźnienia zmiennych opisujących stan dynamiczny obiektów inercyjnych.

2.3.3. Modelowanie stanowej nieciągłości parametrów układu dynamicznego

W przypadku modelowania zmian parametrów N -połączonych podukładów dynamicznych napotyka się na problem nieciągłości o charakterze przełączającym. W odniesieniu do przypadku nieciągłości wywołanych tarcie suchym można powiedzieć, że skokowa zmiana parametrów jest jakościowo inną, obok wymuszeń zewnętrznych, formą zaburzenia wpływającego bezpośrednio na wewnętrzny stan układu.

Modelując stanową nieciągłość parametrów wybranego podukładu dynamicznego, można zastosować zapis macierzowy. Istota tego podejścia polega na zdefiniowaniu zbioru macierzy wzmocnień wyczerpujących wszystkie wartości parametrów zależnych od czasu. Równania różniczkowe zawierające parametr, którego wartości zdefiniowano na zbiorze macierzy wzmocnień, przyjmują inną postać, zależną od stanu dynamicznego i warunków przy których następują przełączenia jego wartości. Jeśli warunek nie wymaga wielu obliczeń matematycznych, to od strony obliczeń numerycznych algorytm całkowania oparty na kodzie warunkowym szybko przełączy się na inną wartość parametru. Ten charakter nieciągłości w odniesieniu do opisanego w podrozdziale 2.2.2 procedury całkowania z dokładnym wykrywaniem granic nieciągłości będzie zatem łatwiejszy do zamodelowania.

Zdefiniowany problem odkrywa pewne cechy badanego układu fizycznego. Zaliczają się do nich niejednoznaczności położenia i prędkości zależne od czasu, będące szczególnym mechanizmem modelującym połączenia reologiczne występujące w części biomechanicznej tego układu.

Nieciągłość parametrów sztywności i tłumienia opisywana własnościami (R1)-(R3) badanego układu wymaga odpowiedniego zapisu matematycznego. W równaniach (2.47b) i (2.47c) można wyróżnić niejednoznaczności wspomnianych parametrów analizowanego układu dynamicznego wyrażone czterema macierzami $\Delta A_{ij}(t)$ zapisanymi w postaci zwartej

$$\Delta A_{ij}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\sigma(i,j)k_{23}(t)}{m_i} & \frac{\sigma(i,j)c_{23}(t)}{m_i} \end{bmatrix} = D_i F(t) E_{ij}, \quad (2.48a)$$

$$\sigma(i,j) = -\text{sgn}((-1)^{i+j}), \quad (2.48b)$$

gdzie $i, j = 2, 3$.

Rozmieszczenie wyrazów macierzy niejednoznaczności $\Delta A_{ij}(t)$ nie zmienia się (zmieniają się tylko jej wartości), a przy zachowaniu stałości macierzy D_i i E_{ij} parametrów badanego układu można to wykorzystać do zdefi-

niowania nieznanej macierzy przełączeń $F(t)$. Rozkład niezerowych wartości rzeczywistych tej macierzy wyznaczy kombinację parametrów niejednoznaczności (k_{23}, c_{23}) zależną od warunków (R2)-(R3). Rozkład DFE dany równaniem (2.48a) znajduje się przy założeniu, że macierz $F(t)$ spełnia warunek $F^T(t)F(t) \leq I$ przy $t \in R^+$, gdzie I jest macierzą jednostkową. Taka reprezentacja zbudowana na macierzach D_i i E_{ij} (zawierających stałe elementy), jest stosowana podczas rozwiązywania zagadnień dotyczących liniowych nierówności macierzowych z zakresu sterowania układów o wielu stopniach swobody z opóźnieniem.

Zależnie od znaku zmiennych $x_r(t)$ i $v_r(t)$, w równaniu (2.47b) są możliwe następujące postaci macierzy niejednoznaczności $\Delta A_{22}(t)$:

$$\Delta A_{22}(t) = \Delta A_{22}^{(k)} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{jeśli } s_1, \text{ to } k = 1, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-\bar{k}_{23}}{m_2} & 0 \end{bmatrix} & \text{jeśli } s_2, \text{ to } k = 2, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\bar{c}_{23}}{m_2} \end{bmatrix} & \text{jeśli } s_3, \text{ to } k = 3, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-\bar{k}_{23}}{m_2} & \frac{-\bar{c}_{23}}{m_2} \end{bmatrix} & \text{jeśli } s_4, \text{ to } k = 4. \end{cases} \quad (2.49)$$

Pozostałe macierze $\Delta A_{ij}(t)$ (przy $i, j = 2, 3$) definiuje się w podobny sposób. Ponadto, $s_k = \{x_r(t), v_r(t) : x_r(t) < d \wedge v_r(t) > 0; x_r(t) \geq d \wedge v_r(t) > 0; x_r(t) < d \wedge v_r(t) \leq 0; x_r(t) \geq d \wedge v_r(t) \leq 0\}$ reprezentuje własności reologiczne (R1)-(R3) badanego układu biomechanicznego. Warunki przełączeń s_i będą wybierać tylko jedną spośród k realizacji macierzy $\Delta A_{ij}^{(1...4)}$, zależnie od kombinacji zdefiniowanej parą $(x_r(t), v_r(t))$, warunkującą postać skokowej funkcji zmian macierzy niejednoznaczności $\Delta A_{ij}(t)$. Zgodnie z układem (2.46), te macierze dodają się do macierzy stanu pięciu połączonych podukładów o dwóch stopniach swobody, zmieniając postać równań różniczkowych. Odpowiednio dobrana macierz $F(t)$ pozwoli zależnie od warunków s_k na realizację przełączeń pomiędzy tymi równaniami.

Przykładowo, rozkład macierzy $\Delta A_{22}^{(3)}$ może przebiegać według następującego schematu.

Macierz $F(t)$ będzie zależeć od k -tego przypadku wyrażonego funkcją wielowartościową (2.49). Dlatego, spełniając warunek $F^T(t)F(t) \leq I$, przyjmuje się równość $F^{(3)T}F^{(3)} = \gamma I$, która zachodzi przy $\gamma \leq 1$, tj.

$$F^{(3)T}F^{(3)} = \begin{bmatrix} f_1 & f_3 \\ f_2 & f_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} f_1^2 + f_3^2 = \gamma, \\ f_2^2 + f_4^2 = \gamma, \\ f_1 f_2 + f_3 f_4 = 0. \end{cases} \quad (2.50)$$

W następnym kroku rozwija się równanie (2.48), zapisując

$$\Delta A_{22}^{(3)} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 e_1 + p_2 e_3 & p_1 e_2 + p_2 e_4 \\ p_3 e_1 + p_4 e_3 & p_3 e_2 + p_4 e_4 \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

gdzie: $p_1 = d_1 f_1 + d_2 f_3$, $p_2 = d_1 f_2 + d_2 f_4$, $p_3 = d_3 f_1 + d_4 f_3$, $p_4 = d_3 f_2 + d_4 f_4$. Porównując postaci macierzy $\Delta A_{22}^{(3)}$ dane równaniami (2.51) i (2.49), otrzymuje się

$$p_1 e_1 + p_2 e_3 = 0, \quad (2.52a)$$

$$p_1 e_2 + p_2 e_4 = 0, \quad (2.52b)$$

$$p_3 e_1 + p_4 e_3 = 0, \quad (2.52c)$$

$$p_3 e_2 + p_4 e_4 = \beta_4, \quad (2.52d)$$

gdzie β_4 jest niezerowym wyrazem macierzy $\Delta A_{22}^{(3)}$, a pozostałe wyrazy są równe 0. W celu zredukowania liczby równań w układzie (2.52) podstawia się e_1 z (2.52a) do (2.52c) oraz e_2 z (2.52b) do (2.52d), otrzymując, że $e_3 \pi = 0$, które będzie spełnione jeśli $e_3 = 0$ lub $\pi = 0$, przy uwzględnieniu $e_4 \pi = \beta_4$, (gdzie $\beta_4 \neq 0$ i $\pi = p_4 - p_3 p_2 / p_1$), natomiast π i e_4 muszą być różne od 0, stąd $e_3 = 0$. Przy takich założeniach $e_1 = 0$, a w konsekwencji równania (2.52a) i (2.52c) znikają. Dwa równania pozostałe w (2.52) przepisuje się poniżej

$$d_1 \phi_1 + d_2 \phi_2 = 0, \quad (2.53a)$$

$$d_3 \phi_1 + d_4 \phi_2 = \beta_4, \quad (2.53b)$$

gdzie:

$$\phi_1 = f_1 e_2 + f_2 e_4, \quad (2.54a)$$

$$\phi_2 = f_3 e_2 + f_4 e_4. \quad (2.54b)$$

Następnie, wyróżnia się dwa przypadki: a) jeśli $\phi_1 = 0$, to z (2.53b) $\phi_2 \neq 0$, wtedy by spełnić równanie (2.53a) $d_2 = 0$; b) jeśli $\phi_2 = 0$, to z równania (2.53b) $\phi_1 \neq 0$, wtedy by spełnić równanie (2.53a) $d_1 = 0$. Wybierając przypadek (a), $d_4 = \beta_4 / \phi_2$ przy $\phi_2 \neq 0$.

Na podstawie równań (2.53), $\phi_2 = \beta_4 d_1 / (d_1 d_4 - d_2 d_3)$. Przyjmując $d_3 = 0$, zależność $\phi_2 = \beta_4 / d_4$ będzie spełniona dopóki $d_4 \neq 0$ i $\phi_1 = d_2 = 0$ w równaniu (2.53a). Dlatego, niech $d_1 = 0$ będzie wybrane dowolnie.

Mając na uwadze powyższe, niech $f_3 = 0$ w równaniu (2.50), wtedy $f_1 = f_4 = \pm\gamma$ i $f_2 = 0$. Dalej wykorzystując równanie (2.53b), $d_4 f_4 e_4 = \beta_4$ przy $\phi_1 = 0$. Kładąc $d_4 = \delta_4 \neq 0$ otrzymuje się $e_4 = \pm\beta_4/\gamma$. Ostatecznie, aby spełnić warunek (2.54a), $e_2 = 0$ i rozkład (2.51) uzyskuje następującą postać

$$\Delta A_{22}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm\gamma & 0 \\ 0 & \pm\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pm\frac{\beta_4}{\gamma} \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

W podobny sposób wyznacza się rozkłady macierzy $\Delta A_{22}^{(2)}$ i $\Delta A_{22}^{(4)}$ (zob. równanie (2.49)):

$$\Delta A_{22}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \pm\gamma \\ \pm\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm\frac{\beta_1}{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.56a)$$

$$\Delta A_{22}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \pm\gamma \\ \pm\gamma & \pm\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm\frac{\beta_1}{\gamma} & 0 \\ 0 & \pm\frac{\beta_4}{\gamma} \end{bmatrix}. \quad (2.56b)$$

Stosując równanie (2.48), a także uogólniając równania (2.55) i (2.56) na każdą z czterech macierzy niejednoznaczności, zapisuje się poszukiwany rozkład DFE w następującej formie

$$\Delta A_{i,j}^{(k)} = D_i F^{(k)} E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_{4i} \end{bmatrix} F^{(k)} \begin{bmatrix} \frac{\sigma(i,j)\beta_1}{\gamma} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma(i,j)\beta_4}{\gamma} \end{bmatrix}, \quad k = 1 \dots 4, \quad (2.57)$$

gdzie: $i, j = 2, 3$, funkcja $\sigma(i, j)$ jest dana równaniem (2.48b), macierz $F(t)$ zależy od czasu i określa warunki przełączeń według poniższego schematu

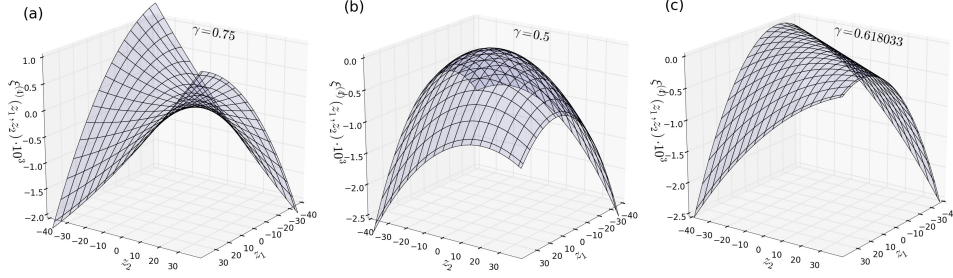
$$F^{(k)} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{jeśli } s_1, \text{ to } k = 1, \\ \begin{bmatrix} 0 & \pm\gamma \\ \pm\gamma & 0 \end{bmatrix} & \text{jeśli } s_2, \text{ to } k = 2, \\ \begin{bmatrix} \pm\gamma & 0 \\ 0 & \pm\gamma \end{bmatrix} & \text{jeśli } s_3, \text{ to } k = 3, \\ \begin{bmatrix} 0 & \pm\gamma \\ \pm\gamma & \pm\gamma \end{bmatrix} & \text{jeśli } s_4, \text{ to } k = 4. \end{cases} \quad (2.58)$$

Wyrażenie wielowartościowe (2.58) definiuje warunki przełączeń macierzy $\Delta A_{ij}(t)$, opisane w komentarzu do równania (2.49). Jak można było oczekiwać, przypadki macierzy $F(t)$ pokrywają się z czterema realizacjami macierzy niejednoznaczności, a macierze D_i i E_{ij} są stałe i zawierają parametry danego podukładu. Korzyścią tego rozkładu jest uzależnienie macierzy przełączeń tylko od jednej wartości stałej γ .

W celu sprawdzenia poprawności wyżej przytoczonych estymacji podstawia się parametry analizowanego układu i wyznacza wartość stałej γ : $\delta_{42} = 1/m_2$, $\delta_{43} = 1/m_3$, $\beta_1 = k_{23}$, $\beta_4 = c_{23}$, $\gamma \neq 0$. Przykładowo,

$$\Delta A_{2,2}^{(4)} = D_2 \bar{F}^{(4)} E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-k_{23}}{\gamma} & 0 \\ 0 & \frac{-c_{23}}{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-k_{23}}{m_2} & \frac{-c_{23}}{m_2} \end{bmatrix},$$

co pokrywa się z czwartym przypadkiem zapisanym w równaniu (2.49).



Rysunek 2.17. Kształt powierzchni $\xi^{(4)}(z_1, z_2)$ w funkcji parametru γ

Wracając do wcześniejszego założenia, należy zapewnić $F^{(k)T} F^{(k)} \leq I \iff \xi^{(k)} = F^{(k)T} F^{(k)} - I \leq 0$, przy $k = 1 \dots 4$. Symetryczna macierz $\xi^{(k)}$ ($n \times n$) o wyrazach rzeczywistych jest ujemnie półokreślona jeśli $z^T \xi^{(k)} z \leq 0$ dla każdego niezerowego wektora $z \in R^n$, przy czym z^T oznacza transpozycję macierzy z . Można sprawdzić, że $\xi^{(k)}$ jest symetryczna, a w szczególności: $\xi^{(1)} = 0$, $\xi^{(2)} = \xi^{(3)} = (\gamma^2 - 1)(z_1^2 + z_2^2)$, $\xi^{(4)} = \gamma^2(z_1^2 + 2z_1 z_2 + 2z_2^2) - z_1^2 - z_2^2$, wtedy przy $\xi^{(k)} \leq 0$ są spełnione następujące warunki $\{\gamma : -1 \leq \gamma \leq 1, |\gamma| \leq (z_1^2 + z_2^2)^{1/2} (z_1^2 + 2z_1 z_2 + 2z_2^2)^{-1/2}\}$. Widać, że tylko czwarty spośród tych warunków, tzn. $\xi^{(4)}$ jest wrażliwy na wybór stałej γ . W przypadku istnienia dwóch niezerowych wyrazów w dolnym wierszu macierzy E_{ij} wymagane jest rozwiązanie następującego problemu optymalizacyjnego:

maksymalizuj γ

przy ograniczeniach: $\xi^{(4)}(z_1, z_2) \leq 0, z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$.

Wartość $\gamma^* = 0.618033$ oszacowano numerycznie, obliczając wartości funkcji $\xi^{(4)}(z_1, z_2)$ w zadanych przedziałach zmian jej argumentów. Wykres powierzchniowy widoczny na rysunku 2.17c jest rozwiązaniem postawionego problemu optymalizacyjnego.

Opisana wyżej procedura umożliwia przekształcenie układu równań różniczkowych do postaci zawierającej wyróżnioną macierz przełączeń. Można ją stosować do przełączania się pomiędzy równaniami różniczkowymi opisującymi dynamikę układu znajdującego się w stanach wyznaczonych charakterem zmian jego parametrów.

3. Analiza dynamiczna nieciągłych układów dynamicznych

Teoria bifurkacji należy do silnie rozwijających się gałęzi dynamiki, stanowiąc jednocześnie pole dla szerokich rozważań analitycznych i schematów numerycznych. Najbardziej podstawowe zagadnienie tej teorii skupia się na badaniu jakościowych zmian zachowania przy nieznacznie zmieniających się parametrach układu wokół wartości krytycznych. Fundamentalnym schematem, bądź pewną wariacją procesu dynamicznego, jest jakościowe i nieoczekiwane przejście rozwiązania z orbity o okresie T na orbitę o okresie $2T$. Przykładowo, niegładkie aspekty podejścia czysto matematycznego wsparte odpowiednimi procedurami numerycznymi zawarto w pracy [28]. Podczas analizy konwertera mocy prądu stałego o dynamice nieliniowej (przełączającej), wspomniane wyżej podwojenie okresu oscylacji doprowadziło do utraty stabilności układu elektronicznego działającego w bliskim otoczeniu punktu pracy. Tego typu efekty są niepożądane i mogą być początkiem lawinowej sekwencji podwojeń oscylacji prowadzących do chaosu. Powyższy scenariusz można zatem przewidzieć w chwili zaistnienia pierwszych podwojeń okresu oscylacji i automatycznie powstrzymać jego dalszą propagację przez niewielką modyfikację wybranego parametru układu.

W celu zobrazowania pożytecznych, jak również szkodliwych efektów istnienia bifurkacji w układach dynamicznych, wykorzystuje się wiele interesujących technik analizy i obserwacji. Wśród nich na uwagę zasługuje widok (podgląd) stroboskopowy stosowany często przy badaniu stabilności przełączających (nieciągłych) układów elektronicznych i wyznaczaniu odwzorowań układów kawałkami-ciągłych (np. z tarcie suchym). W pracy [47] zamieszczono szczegółową analizę reguł pojawiania się różnych bifurkacji typu granicznego. Zawarto w nich kilka aplikacji doświadczalnych, jak również zaproponowano podstawy teoretyczne przydatne do wyjaśnienia przyczyn powstawania schematów bifurkacji w dwuwymiarowych odwzorowaniach układów kawałkami-ciągłych.

Obwody elektroniczne nie są jedynymi przykładami układów, w których efekty generowane podczas standardowego trybu pracy są powodem występowania nieoczekiwanych zachowań nieregularnych, a w tym zmian odpowiedzi dynamicznych wynikających z bifurkacji parametrów układu. Zupełnie odmienny charakter przełączeń można wyróżnić w innych, nieciągłych układach mechanicznych. Powstają one na zasadzie sekwencji kolejnych poślizgów i utwierdzeń ciała (masy) lub zespołu połączonych ciał (mas) drgających. Przykład analizy dynamicznej układu nieciągłego o dwóch stopniach swobody z tarcie można znaleźć w pracy [35]. Badany układ stanowią dwie połączone sprężystości masy drgające umieszczone na poruszającej się ze stałą prędkością podstawie. Kontakt cierny masy i podstawy opisany pewnym modelem tarcia istniejącego pomiędzy idealnymi powierzchniami jest

źródłem drgań samowzbudnych typu utwierdzenie-poślizg. Występowanie drgań tego rodzaju jest przyczyną pojawiania się w układzie różnorodnych bifurkacji rozwiązań w fazie utwierdzenia i poślizgu.

Analiza dynamiczna to również szereg metod analitycznych, których ta praca nie podejmuje, ale w kontekście obserwowanych w niej zachowań nieliniowych można wyróżnić następujące metody: małego parametru Poincaré, Kryłowa-Bogoljubowa i Galerkina [4, 44].

W tej części pracy zostanie przedstawiona metoda numeryczna umożliwiająca ocenę schematów bifurkacji oraz wyznaczenie dyskretnego diagramu bifurkacji rozwiązań nieciągłego układu dynamicznego o jednym stopniu swobody z wymuszeniem harmonicznym [14].

3.1. Bifurkacje rozwiązań

W tym rozdziale wykonana zostanie analiza dynamiczna nieciągłych układów dynamicznych pod względem bifurkacji rozwiązań i liczbowego oszacowania charakteru trajektorii czasowych, pokazująca złożoności dynamiki obiektów z tarcie suchym. Skupiając się na granicy rozdziału obszarów przestrzeni stanu, zostaną przedstawione bifurkacje wyraźnie widoczne w układzie z wymuszeniem harmonicznym. Uzupełnienie tej analizy stanowią estymacje widm wykładników Lapunowa, potwierdzające charakter trajektorii ruchu okresowego, quasi-okresowego i chaotycznego.

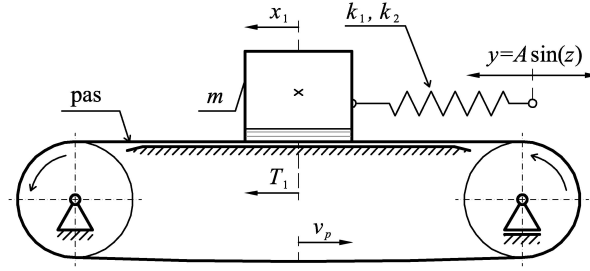
Jednowymiarowy układ modelowy składa się z masy m , która oscyluje na podstawie poruszającej się z prędkością v_p . Do masy m przyczepiono jeden koniec sprężyny o nieliniowej charakterystyce wyrażonej stałymi k_1 i k_2 . Położenie jej drugiego końca zmienia się w sposób harmoniczny i jest opisane funkcją $y = A \sin(\omega t)$ o stałej amplitudzie A i częstotliwości kołowej ω . Odległość $z = x_1 - y$ wynika z różnicy położenia x_1 masy m i drugiego końca sprężyny y . Powierzchnie przylegania masy m i podstawy tworzą suchy kontakt cierny, w którym siłę tarcia opisuje funkcja T_1 , zależna od parametru kształtu μ_0 i prędkości $x_2 - v_p$ ruchu względnego powierzchni tworzących wyróżniony kontakt cierny.

Zdefiniowany wyżej układ pokazano na rysunku 3.1, natomiast jego dynamikę opisują równania postaci

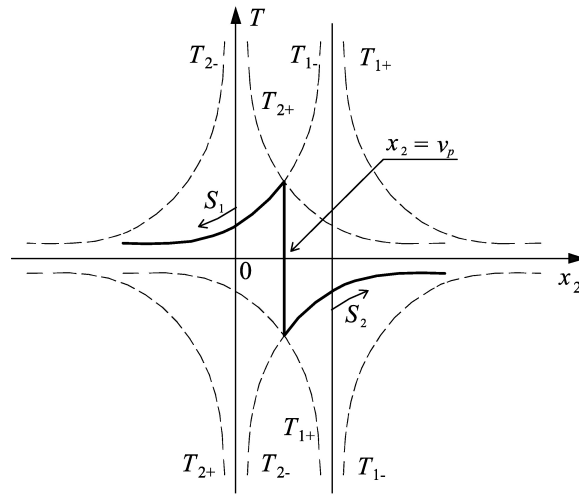
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-k_1(x_1 - y) + k_2(x_1 - y)^3 + T_1(v)), \end{cases} \quad (3.1)$$

gdzie: T_1 jest funkcją daną wzorem (3.2), opisującą przyjęty model tarcia suchego (patrz rysunek 3.2), $v = x_2 - v_p$ jest prędkością ruchu względnego,

$$T_1(v) = \operatorname{sgn}(v) \frac{\mu_0}{1 + |v|}. \quad (3.2)$$



Rysunek 3.1. Schemat ideowy układu z tarciem i wymuszeniem harmonicznym



Rysunek 3.2. Model tarcia o charakterystyce opadającej (linia pogrubiona)

Równanie (3.1) przekształcone do postaci (2.22) z uwzględnieniem pozostałych zależności na funkcję tarcia T_1 i wymuszenie $y = A \sin(\omega t)$, prowadzi do zapisania układu równań różniczkowych pierwszego rzędu z wymuszeniem harmonicznym

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} x_2, \frac{1}{m} \left(k_2 z^3 - k_1 z + \frac{\mu_0}{v_p - x_2 + 1} \right) \\ x_2, \frac{1}{m} \left(k_2 z^3 - k_1 z + \frac{\mu_0}{v_p - x_2 - 1} \right) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$y = A \sin(\omega t),$$

$$z = x_1 - y,$$

gdzie: $x = [x_1, x_2]^T$, $f = [f^{(1)}, f^{(2)}]^T$.

Granica nieciągłości Σ rozdzielająca dwa przyległe obszary S_1 i S_2 oraz funkcja przełączeń $\sigma(x)$ są dane wzorami (2.34)-(2.36).

3.1.1. Symulacja numeryczna

Jeśli przyjąć, że $z_v = [z, x_2 = v_p]^T$, to funkcję przełączeń (2.36) na granicy rozdziału Σ zapisuje się, jak następuje

$$\sigma(z_v) = \frac{1}{m^2} \left[\left(k_2 z^3 - k_1 z \right)^2 - \mu_0^2 \right]. \quad (3.4)$$

Jeśli istnieje pochodna funkcji $\sigma(z_v)$, to możliwe jest znalezienie punktów szczególnych tej funkcji z wykorzystaniem następujących warunków:

$$D_{v_0} = \frac{d\sigma(z_{v_0})}{dz} = \frac{2z_{v_0}}{m^2} (3k_2 z_{v_0}^2 - k_1)(k_2 z_{v_0}^2 - k_1) = 0, \quad \sigma(z_{v_0}) = 0, \quad (3.5)$$

skąd dostaje się następujący zbiór pierwiastków

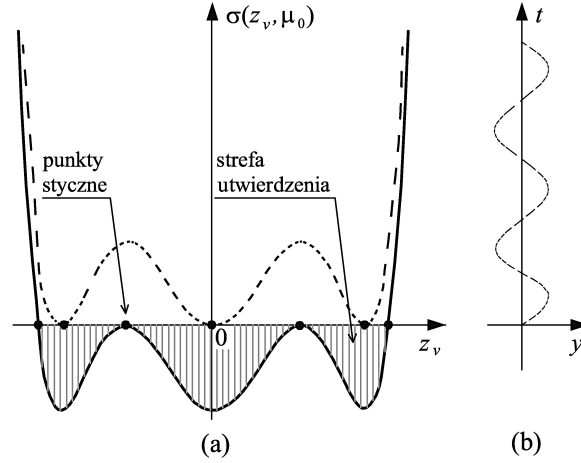
$$z_{v_0}^{(k)} = \left\{ 0, \pm \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, \pm \sqrt{\frac{k_1}{3k_2}} \right\}, \quad \text{przy } k = 1 \dots 5. \quad (3.6)$$

Podstawiając wartości $z_{v_0,i}$ dane zbiorem (3.6) do równania (3.4), a następnie rozwiązując to równanie ze względu na μ_0 , otrzymuje się zbiór wartości granicznych parametru kształtu charakterystyki tarcia

$$\mu_0^{(i)} = \left[0, \pm \frac{2k_1^{1.5}}{3\sqrt{3k_2}} \right], \quad \text{przy } i = 1 \dots 3. \quad (3.7)$$

Zbiór wartości (3.7) redukuje strefę utwierdzenia do punktów stycznych, w których funkcja przełączeń strefy utwierdzenia jest styczna do osi odciętych na wykresie zależności $\sigma(z_v, \mu_0)$ pokazanym na rysunku 3.3. Otrzymane definicje stanowią uogólnienie wzorów (2.40) i (2.41) zawierających parametry k_1 , k_2 i μ_0 . To potwierdza, że umiejscowienie strefy utwierdzenia zależy od parametrów układu dynamicznego. Małe bifurkacje ich wartości powodują przesunięcia stref utwierdzenia, które determinują stan dynamiczny rozważanych układów nieciągłych z tarcie. Analizę takich bifurkacji wykonano w pracy [56] na przykładzie układu samowzbudnego o dwóch stopniach swobody, modelującym (w pewnym przybliżeniu) hamulec bębnowy ze zmienną siłą nacisku i tarcie suchym istniejącym pomiędzy wewnętrzną powierzchnią bębna i powierzchnią okładzin klocków hamulcowych.

Górny wykres zaznaczony na rysunku 3.3 linią przerywaną, styczną do osi odciętych pokazuje, że przy takim dobrze parametru β strefa utwierdzenia praktycznie nie istnieje, ponieważ wartość funkcji $\sigma(z_v)$ jest większa lub równa zero. Pojawia się degeneracja powierzchni Σ_u do trzech punktów

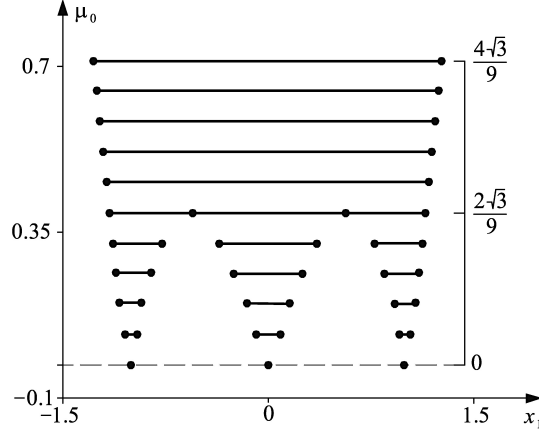


Rysunek 3.3. Punkty styczne (kropki) na przecięciu funkcji $\sigma(z_v, \mu_0)$ z osią z_v dla $\mu_0 = \mu_0^{(1)}$ (linia kreskowana) i $\mu_0 = \mu_0^{(2,3)}$ (linia ciągła) oraz wykres $y(t)$ przemieszczenia strefy utwierdzenia w czasie

stycznych. To oznacza, że nie jest możliwe utwierdzenie masy m na ruchomej podstawie, a rozwiązanie standardowe przechodzące z obszaru S_1 do obszaru S_2 i na odwrót dozna jedynie załamania na granicy nieciągłości w strefie ich rozdziału. Inna interpretacja wiąże się z drugim wykresem zaznaczonym linią ciągłą, która jest styczna do osi z_v . W tym przypadku, strefa utwierdzenia jest bardzo szeroka i rozciąga się od lewej do prawej gałęzi tego wykresu wspólnie dążących do nieskończoności w kierunku rosnących wartości $\sigma(z_v, \mu_0)$. Rozwiązanie będzie silnie przyciągane przez pole wektorowe skierowane w obu obszarach S_1 i S_2 w kierunku granicy nieciągłości strefy rozdziału Σ . Efektem tego będzie generacja zachowań typu utwierdzenie-poślizg z dużą tendencją do bifurkacji tych rozwiązań w zakresie parametru $\mu_0 < \mu_0^{(2,3)}$.

Warto zaznaczyć, że gdyby zmienna z była zmienną stanu, jak np. zmienna x_1 opisująca położenie masy m znalezione jako rozwiązanie układu równań dynamicznych (3.3), to strefa utwierdzenia (również podzielona na podstrefy dla przypadków $\mu_0 < \mu_0^{(2,3)}$ i $\mu_0 > \mu_0^{(1)}$) byłaby nieruchoma. Zostało to opisane w pracy [18] dla jednego i niezmiennego zestawu parametrów k_1, k_2, v, μ_0 . Złożoność tego zagadnienia wiąże się z bardziej skomplikowaną procedurą numeryczną. Powodem tego jest pojawienie się ruchomego (tutaj oscylującego), obszaru utwierdzenia zmieniającego swoje położenie w czasie. Jest ono zależne od punktu przyłożenia i rodzaju wymuszenia zewnętrznego. Na rysunku 3.3 wzdłuż osi czasu t narysowano funkcję sinusoidalną $y(t)$ symbolizującą oscylacje strefy utwierdzenia Σ_u .

W równaniu (2.36) zdefiniowano funkcję przełączeń $\sigma(x)$, która jest wynikiem iloczynu składowych $f_2^{(1)}$ i $f_2^{(2)}$. Można użyć te składowe do obliczenia współrzędnych punktów stycznych, należących odpowiednio do obszarów S_1 i S_2 (porównaj z równaniem (2.31)).



Rysunek 3.4. Wykres bifurkacji punktów stycznych w zakresie zmian parametru $\mu_0 \in \left[\mu_0^{(1)}, \frac{4\sqrt{3}}{9}\right]$

Jeśli cały zbiór punktów stycznych oznaczyć przez $x_{1,0}^{(k)} = x_{v_0}$, dla pewnej wartości parametru kształtu $\mu_0^{(i)}$ charakterystyki tarcia suchego i $y(t) = 0$, to na podstawie równania (2.31), dla przykładowego zestawu parametrów $m = 1$, $k_1 = k_2 = 1$, $v = 1$ oraz zmieniającej się w przedziale $\left[\mu_0^{(1)}, \frac{4\sqrt{3}}{9}\right]$ wartości parametru bifurkacji μ_0 , ścieżki bifurkacji punktów stycznych przebiegają w sposób przedstawiony na rysunku 3.4.

Jeśli zbiór punktów utwierdzenia spełnia zależność (2.30), to kombinacja wypukła dana równaniem (2.28) przyjmuje postać

$$g(x) = \lambda \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2^{(1)}(x) \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2^{(2)}(x) \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Funkcja σ dana wzorem (3.4) i wektory H_x , $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ wprowadzone w podrozdziale 2.2, stosuje się do zdefiniowania parametru λ (analogicznie jak w równaniu (2.29)), tzn.

$$\lambda = -\frac{(v_p - x_2 + 1)(x_1(x_1^2 - 1)(v_p - x_2 - 1) - \mu_0)}{2\mu_0}. \quad (3.9)$$

Podstawiając λ dane wzorem (3.9) do równania (3.8), otrzymuje się równanie różniczkowe opisujące rozwiązania należące do obszaru utwierdzenia Σ_u , jak poniżej

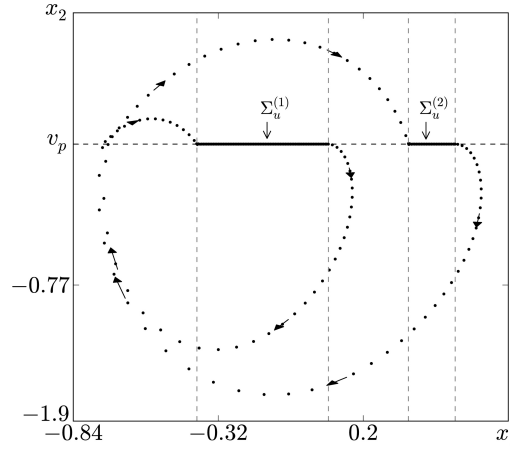
$$\dot{x} = g(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Masa m będzie oscylować wzdłuż osi $\pm x_2$ płaszczyzny fazowej (x_1, x_2) do chwili osiągnięcia jednego z punktów stycznych. Typowa trajektoria ruchu utwierdzenie-poślizg z podwojeniem okresu drgań obserwowana na płaszczyźnie fazowej (x_1, x_2) została pokazana na rysunku 3.5.

Wcześniej opisana metoda pozwala na oszacowanie punktów stycznych na podstawie znanej funkcji $\sigma(z_v, \mu_0)$. Przyjmując następujący zestaw parametrów: $m = 0.1$, $v_p = 0.4$, $\mu_0 = \frac{\sqrt{3}}{9}$, $k_1 = k_2 = 1$, $A = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\pi}{18}$, $\omega = 3\pi/2.4728$, wyznaczono dla analizowanego układu dynamicznego początkowy zbiór punktów stycznych

$$\begin{aligned} x_{1,0}^{(1\dots 6)} &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \left[\pm \cos \frac{\pi}{9}, \pm \cos \frac{2\pi}{9}, \pm \sin \frac{\pi}{18} \right] \approx \\ &\approx [\pm 1.0851, \pm 0.8846, \pm 0.2005]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Wartości ze zbioru (3.11) punktów stycznych są niezwykle użyteczne, gdyż umożliwiają dokładne obliczenie długości i czasu trwania faz utwierdzenia.



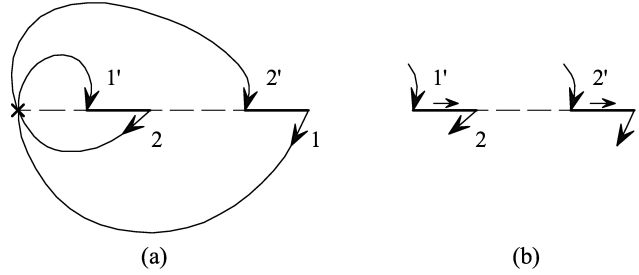
Rysunek 3.5. Trajektoria ruchu utwierdzenie-poślizg z podwojeniem okresu drgań i dwoma strefami utwierdzenia o długości $|\Sigma_u^{(1,2)}| = (0.469695, 0.166338)$. Następowanie punktów płaszczyzny fazowej jest zgodne z kierunkiem wyróżnionym strzałkami. Warunki początkowe $\bar{x}_0 = (x_{1,0}^{(3)}, v_p)$

Na rysunku 3.5 są widoczne dwie strefy utwierdzenia $\Sigma_u^{(1,2)}$, w których utwierdzenie trwa odpowiednio 1.1746 i 0.4161 [s]. Wyznaczają one fragmenty trajektorii ruchu masy m , która w czasie ich pojawienia się ulega utwierdzeniu na podstawie przesuwającej się ze stałą prędkością v_p . Zerwanie utwierdzenia i związany z nim początek fazy poślizgu następuje w widocznych punktach stycznych, których współrzędne zmieniają się w czasie według wzoru

$$\tilde{x}_{1,0}^{(k)}(t) = x_{1,0}^{(k)} + A \sin(\omega t), \quad k = 1 \dots 6. \quad (3.12)$$

Rozwiązania standardowe w postaci łuków widocznych na wybranym przecięciu trajektorii fazowej płaszczyzną (x_1, x_2) , przechodzą na zmianę przez obszary S_1 (górny łuk) i S_2 (dolny łuk). W lewej części 2-okresowej, zamkniętej trajektorii ruchu widać dwa punkty załamania wyróżniające granicę rozdziału Σ_c . Ze względu na stałe wymuszenie harmoniczne, powierzchnia $\Sigma_u \in \Sigma$ oscyluje w kierunku osi $\pm x_2$. W efekcie, funkcję zmian położenia punktów stycznych danych zbiorem (3.11) opisuje wzór (3.12).

Zaobserwowano bifurkację globalną strefy utwierdzenia z dwukrotnym przecięciem granicy rozdziału Σ . W sposób obrazowy bifurkację tego typu przedstawiono na rysunku 3.6. Podobną postać bifurkacji rozwiązań w funkcji jednego parametru opisano także w pracy [13], dotyczącej numerycznej analizy płaskich układów typu Filippowa.



Rysunek 3.6. Ilustracja schematu przełączania pomiędzy dwoma strefami utwierdzenia w ruchu utwierdzenie-poślizg pokazanym na rysunku 3.5 (rysunki a-b ilustrują przebieg kolejnych uproszczeń)

Teoria Filippowa układów nieciągłych umożliwiła wykonanie numerycznej analizy bifurkacji rozwiązań typu utwierdzenie-poślizg, obserwowanych w dynamice ruchu kawałkami-ciągłego układu o dwóch stopniach swobody z wymuszeniem harmonicznym. Pojawiła się oscylująca strefa utwierdzenia, której położenie zależy od prędkości podstawy i postaci wymuszenia zewnętrznego. Badany układ dynamiczny został podzielony na dwa podukłady, w których rozwiązania ciągle znaleziono w odpowiadających im

dwóm przyległym obszarom rozpatrywanej przestrzeni stanu. Rozwiązanie na oscylującej granicy nieciągłości znaleziono przy użyciu procedury numerycznej załączonej na wydruku 9, szacując położenie punktów nieciągłości z wysoką dokładnością.

Wydruk 9. Całkowanie z wykrywaniem granic oscylującej powierzchni utwierdzenia (rysunek 3.5). Procedurę uzupełniają funkcje z wydruku 16 (Dodatek).

```

1  x, xn = x0, x0
2  xso = excite(A, w, x[0])
3  xdifo = x[1]-xso
4  xdif = xdifo
5  a1 = a+1; a1_ = a-1; b2 = b**2; hs = h0
6  k = oscyl_faza_poslizgu(x0[1], T, xso)
7  i, ikrok, iplot, zapis, r = 0, 0, 0, 0, 4
8  while i <= N:
9      zapis = 0
10     if poslizg == 1:
11         xn[1] = x[1]+h0*x[2]
12         xn[0] = x[0]+h0
13         xs = excite(A, w, xn[0])
14         if xn[1] < T[k]+xs: hs = h0
15         else:
16             poslizg = 0
17             xn[1] = T[k]+xs
18             h = xn[1]-x[1]
19             xn[0] = x[0]+h/x[2]
20             print "utrata przycz. ut=", xn[0], ", x1=", xn[1]
21             xs = excite(A, w, xn[0])
22             hs = h
23             if k <> 2: po_slizgu = -1
24             else: po_slizgu = 1
25     else:
26         if po_slizgu == -1:
27             xn = RKF(f, x, K1, K2, m_, a1, b, h0, h2, h6, xso)
28             if xn[2] >= a:
29                 h = a-x[2]
30                 xn = RKInv(f, x, K1, K2, m_, a1, b, h, xso)
31                 xn[2] = a
32                 xs = excite(A, w, xn[0])
33                 hs = h
34                 s = -K1*(xn[1]-xs)+K2*(xn[1]-xs)**3
35                 if sigma(s, b2, m_) <= 0:
36                     k = oscyl_faza_poslizgu(xn[1], T, xs)
37                     poslizg = 1
38                 else: po_slizgu = 1
39             else:
40                 xn[0] = x[0]+h0
41                 xs = excite(A, w, xn[0])

```

```

42             hs = h0
43         else :
44             xn = RKF(f, x, K1, K2, m-, a1-, b, h0, h2, h6, xso)
45             if xn[2] <= a:
46                 h = x[2] - a
47                 xn = RKInv(f, x, K1, K2, m-, a1-, b, h, xso)
48                 xn[2] = a
49                 xs = excite(A, w, xn[0])
50                 hs = h
51                 s = -K1*(xn[1] - xs) + K2*(xn[1] - xs)**3
52                 if sigma(s, b2, m-) <= 0:
53                     k = oscyl_faza_poslizgu(xn[1], T, xs)
54                     poslizg = 1
55                 else: po_slizgu = -1
56             else :
57                 xn[0] = x[0] + h0
58                 xs = excite(A, w, xn[0])
59                 hs = h0
60         xdif = x[1] - xs
61         x = xn #rozwiqzanie
62         xso = xs
63         xdifo = xdif
64         i += 1

```

Sinusoidalna postać funkcji wymuszenia zewnętrznego końca sprężyny prowadzi do rozdzielenia strefy utwierdzenia, powodując pojawienie się ruchu 2-okresowego typu utwierdzenie-poślizg. Na przykład, przy właściwym doborze wymuszenia masa m uniknie utwierdzenia, pozostając w stanie poślizgu. Z drugiej strony, można tak dobrać wymuszenie, aby czas poślizgu masy m był krótki, a jej stan utwierdzenia utrzymywał się możliwie długo.

3.1.2. Bifurkacje w nieciągłych układach o dwóch stopniach swobody

W rozdziale 2.2.2 dotyczącym zastosowania metody Hénona pokazano, że można poradzić sobie z całkowaniem równań nieciągłych, poprzedzając to właściwymi wyprowadzeniami matematycznymi. Taką metodykę postępowania podjęto w pracy [7]. Na przykładzie równań różniczkowych pierwszego rzędu, opisujących dynamikę autonomicznego układu nieciągłego o dwóch stopniach swobody, opisano schemat bifurkacji rozwiązania homoklinicznego do rozwiązania ograniczonego.

Nieciągły układ dynamiczny charakteryzujący się nie jedną, ale dwoma granicami rozdziału na liniach $(x, \frac{1}{2})$ i $(x, 1)$ posłuży jako przykład do wyznaczenia bifurkacji rozwiązania homoklinicznego do rozwiązania ograniczonego równań różniczkowych pierwszego rzędu. Definiują one trzy rozdzielone obszary rozwiązań ciągłych i uwzględniają małe zaburzenie ε pola wektorowego rozpatrywanego układu dynamicznego.

Niech nieciągły układ dynamiczny o dwóch stopniach swobody będzie dany w postaci

$$\dot{z} = f_+(z) + \varepsilon g(z, t, \varepsilon), \quad y > 1, \quad (3.13)$$

$$\dot{z} = f_-(z) + \varepsilon g(z, t, \varepsilon), \quad \frac{1}{2} < y < 1, \quad (3.14)$$

$$\dot{z} = F(z) + \varepsilon g(z, t, \varepsilon), \quad y < \frac{1}{2}, \quad (3.15)$$

w której: $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f_{\pm}$, F , g są funkcjami gładkimi klasy C^3 , przy czym g jest funkcją okresową. Ponadto, przyjmuje się następujące założenia:

- (Z1) Istnieją dwa rozwiązania η_- , η_+ równania (3.14), zdefiniowane odpowiednio na przedziałach $[a_-, 0]$, $[0, a_+]$, takie że: $\eta_{\pm}(t) = (\tilde{x}_{\pm}(t), \tilde{y}_{\pm}(t))$ przy $\tilde{y}_{\pm}(0) = 1$, $\tilde{y}_{\pm}(a_{\pm}) = \frac{1}{2}$, $\tilde{x}_-(0) < \tilde{x}_+(0)$, $\tilde{x}_-(a_-) < \tilde{x}_+(a_+)$.
- (Z2) Niezaburzone pole wektorowe równań (3.13) i (3.14) ma następujące właściwości: $f_{\pm}(z) = (f_{\pm 1}(z), f_{\pm 2}(z))$ przy $f_{\pm 1}(x, 1) > 0$, $f_{\pm 2}(x, 1) < 0$ i $\tilde{x}_-(0) \geq x \geq \tilde{x}_+(0)$; $f_{-2}(x, 1) > 0$, $f_{-2}(\tilde{x}_+(0), 1) = 0$ oraz pochodna kierunkowa w punkcie $(\tilde{x}_+(0), 1)$ drugiej składowej pola wektorowego w obszarze $\frac{1}{2} < y < 1$ wynosi $\partial_x f_{-2}(\tilde{x}_+(0), 1) < 0$; $f_{-2}(\eta_-(a_-)) > 0$ i $f_{-2}(\eta_+(a_+)) < 0$.
- (Z3) Istnieją dwa rozwiązania $\tilde{\gamma}_-(t)$, $\tilde{\gamma}_+(t)$ równania (3.15) zdefiniowane odpowiednio na przedziałach $(-\infty, 0]$ i $[0, +\infty)$, takie że: $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \tilde{\gamma}_{\pm}(t) = 0$ i $\gamma_{\pm}(0) = \eta_{\pm}(a_{\pm})$. Ponadto, $F(z) = (F_1(z), F_2(z))$ przy $F_2(\tilde{\gamma}_-(0)) > 0$ i $F_2(\tilde{\gamma}_+(0)) < 0$.
- (Z4) W punkcie $z = 0$ składowa $F(z) = 0$, natomiast pochodna $dF(z)/dz$ w tym punkcie ma wartości własne leżące na osi rzeczywistej płaszczyzny zespolonej.

Na podstawie założeń (Z1)-(Z4) układ dynamiczny opisany równaniami (3.13)-(3.15) ma w strefie utwierdzenia (przy $\varepsilon = 0$) homokliniczne rozwiązanie $\tilde{\gamma}$ zbiegające do hiperbolicznego punktu stałego 0. W dalszej części zostanie opisany schemat bifurkacji pewnego rozwiązania $\tilde{\gamma}$ równań (3.13)-(3.15).

3.1.3. Przykładowe rozwiązanie analityczne

Na podstawie przykładowego rozwiązania analitycznego można prześledzić sposób wyprowadzania warunków, jakie powinny być spełnione, aby nastąpiło przejście (bifurkacja) homoklinicznego rozwiązania $\tilde{\gamma}$ do rozwiązania ograniczonego w dziedzinie $\mathbb{R}$, przy $\varepsilon \neq 0$.

Układ równań (3.13)-(3.15) jest dany jawnie w postaci

$$\dot{z} = f_+(z) = \begin{cases} y, \\ x - 3y, \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\dot{z} = f_-(z) = \begin{cases} y, \\ -x + 2y, \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\dot{z} = F(z) = \begin{cases} -2ay, \\ -\frac{1}{2a}x, \end{cases} \quad (3.18)$$

$$g(x, t, \varepsilon) = \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Wydruk 10. Rozwiązania η_+ i η_- równania (3.17) w *Maximie* przy warunkach początkowych $(\tilde{x}_+(0), \tilde{y}_+(0)) = (2, 1)$ i $(\tilde{x}_-(0), \tilde{y}_-(0)) = (-a, \frac{1}{2})$.

```
(%i1)  atvalue(xp(t),t=0,2);
(%o1)  2
(%i2)  atvalue(yp(t),t=0,1);
(%o2)  1
(%i3)  'diff(xp(t),t,1)=yp(t);
(%o3)   $\frac{d}{dt}x_+(t) = y_+(t)$ 
(%i4)  'diff(yp(t),t,1)=2*yp(t)-xp(t);
(%o4)   $\frac{d}{dt}y_+(t) = 2y_+(t) - x_+(t)$ 
(%i5)  desolve([%o3, %o4],[xp(t),yp(t)]);
(%o5)   $[x_+(t) = 2e^t - te^t, y_+(t) = e^t - te^t]$ 
(%i7)  subst(s, t, %o5);
(%o7)   $[x_+(s) = 2e^s - se^s, y_+(s) = e^s - se^s]$ 
(%i8)  ratsimp(%o7);
(%o8)   $[x_+(s) = (2-s)e^s, y_+(s) = (1-s)e^s]$ 

%% %  $\eta_-$ 
(%i9)  atvalue(x_(t),t=0,-a);
(%o9)  -a
(%i10) atvalue(y_(t),t=0,1/2);
(%o10)  $\frac{1}{2}$ 
(%i11) 'diff(x_(t),t,1)=y_(t);
(%o11)  $\frac{d}{dt}x_-(t) = y_-(t)$ 
(%i12) 'diff(y_(t),t,1)=2*y_(t)-x_(t);
(%o12)  $\frac{d}{dt}y_-(t) = 2y_-(t) - x_-(t)$ 
(%i13) desolve([%o11, %o12],[x_(t),y_(t)]);
(%o13)  $[x_-(t) = ate^t + \frac{te^t}{2} - ae^t, y_-(t) = ate^t + \frac{te^t}{2} + \frac{e^t}{2}]$ 
(%i14) subst(s-a_, t, %o13);
(%o14)  $[x_-(s-a_-) = a(s-a_-)e^{s-a_-} + \frac{(s-a_-)e^{s-a_-}}{2} - ae^{s-a_-}, y_-(s-a_-) =$ 
 $a(s-a_-)e^{s-a_-} + \frac{(s-a_-)e^{s-a_-}}{2} + \frac{e^{s-a_-}}{2}]$ 
```

Przy warunkach początkowych $\tilde{x}_+(0) = 2$ i $\tilde{y}_+(0) = 1$ wybranych zgodnie z założeniem (Z1) do równań (3.13)-(3.15), rozwiązanie η_+ równania (3.17)

otrzymane w *Maximie* z wykorzystaniem instrukcji zapisanych w procedurze 10 jest następujące

$$\tilde{x}_+(t) = \tilde{y}_+(0)te^t - \tilde{x}_+(0)te^t + \tilde{x}_+(0)e^t = te^t - 2te^t + 2e^t, \quad (3.20)$$

$$\tilde{y}_+(t) = \tilde{y}_+(0)te^t - \tilde{x}_+(0)te^t + \tilde{y}_+(0)e^t = te^t - 2te^t + e^t. \quad (3.21)$$

Do równań (3.20)-(3.21) podstawia się $t = s$, otrzymując

$$\eta_+(s) = \begin{cases} \tilde{x}_+(s) = e^s(2 - s), \\ \tilde{y}_+(s) = e^s(1 - s). \end{cases} \quad (3.22)$$

Następnie przy warunkach początkowych $\tilde{x}_-(0) = -a$ i $\tilde{y}_-(0) = \frac{1}{2}$, zapisuje się składowe rozwiązania η_- :

$$\tilde{x}_-(t) = \tilde{y}_-(0)te^t - \tilde{x}_-(0)te^t + \tilde{x}_-(0)e^t = \frac{1}{2}te^t + ate^t - ae^t, \quad (3.23)$$

$$\tilde{y}_-(t) = \tilde{y}_-(0)te^t - \tilde{x}_-(0)te^t + \tilde{y}_-(0)e^t = \frac{1}{2}te^t + ate^t + \frac{1}{2}e^t, \quad (3.24)$$

skąd ostatecznie po podstawieniu $t = s - a_-$:

$$\eta_-(s) = \begin{cases} \tilde{x}_-(s) = -ae^{s-a_-} + \left(\frac{1}{2} + a\right)e^{s-a_-}(s - a_-), \\ \tilde{y}_-(s) = \frac{1}{2}e^{s-a_-} + \left(\frac{1}{2} + a\right)e^{s-a_-}(s - a_-). \end{cases} \quad (3.25)$$

Wyznaczenie rozwiązania $\tilde{\gamma}$ przebiega w podobny sposób. Przy warunkach początkowych $(\tilde{x}_+(0), \tilde{y}_+(0)) = (a, \frac{1}{2})$ i $(\tilde{x}_-(0), \tilde{y}_-(0)) = (-a, \frac{1}{2})$, rozwiązania $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_+, \tilde{\gamma}_-)$ równań (3.18) otrzymane w *Maximie* z wykorzystaniem instrukcji zapisanych w procedurze 11 są następujące

$$\tilde{\gamma}_+(s) = \begin{cases} \tilde{x}_+(s) = ae^{-s}, \\ \tilde{y}_+(s) = \frac{e^{-s}}{2}, \end{cases} \quad \tilde{\gamma}_-(s) = \begin{cases} \tilde{x}_-(s) = -ae^s, \\ \tilde{y}_-(s) = \frac{e^s}{2}, \end{cases} \quad (3.26)$$

gdzie po scałkowaniu równań (3.18) względem czasu podstawiono $t = s$.

Wydruk 11. Rozwiązania $\tilde{\gamma}_+$ i $\tilde{\gamma}_-$ równania (3.18) przy warunkach początkowych $(\tilde{x}_+(0), \tilde{y}_+(0)) = (a, \frac{1}{2})$ i $(\tilde{x}_-(0), \tilde{y}_-(0)) = (-a, \frac{1}{2})$.

```
(%i1) atvalue(xp(t),t=0,a);
(%o1) a
(%i2) atvalue(yp(t),t=0,1/2);
(%o2) 1/2
(%i3) 'diff(xp(t),t,1)=-2*a*yp(t);
(%o3) d/dt xp(t) = -2a*yp(t)
```

```

(%i4) 'diff(yp(t),t,1)=-1/(2*a)*xp(t);
(%o4)  $\frac{d}{dt}yp(t) = -\frac{xp(t)}{2a}$ 
(%i5) desolve(['o3, %o4], [xp(t), yp(t)]);
(%o5)  $[xp(t) = ae^{-t}, yp(t) = \frac{e^{-t}}{2}]$ 
(%i6) subst(s, t, %o5);
(%o6)  $[xp(s) = ae^{-s}, yp(s) = \frac{e^{-s}}{2}]$ 

%% %  $\tilde{\gamma}_-$ 
(%i7) atvalue(x_(t),t=0,-a);
(%o7)  $-a$ 
(%i8) atvalue(y_(t),t=0,1/2);
(%o8)  $\frac{1}{2}$ 
(%i9) 'diff(x_(t),t,1)=-2*a*y_(t);
(%o9)  $\frac{d}{dt}x_-(t) = -2ay_-(t)$ 
(%i10) 'diff(y_(t),t,1)=-1/(2*a)*x_(t);
(%o10)  $\frac{d}{dt}y_-(t) = -\frac{x_-(t)}{2a}$ 
(%i11) desolve(['o9, %o10], [x_(t), y_(t)]);
(%o11)  $[x_-(t) = -ae^t, y_-(t) = \frac{e^t}{2}]$ 
(%i12) subst(s, t, %o11);
(%o12)  $[x_-(s) = -ae^s, y_-(s) = \frac{e^s}{2}]$ 

```

Bifurkacja rozwiązania homoklinicznego może pojawić się w odpowiednim układzie dynamicznym, charakteryzującym się szczególnymi parametrami. W celu wyznaczenia przybliżonej wartości a_- , należy wcześniej przyjąć pewną wartość parametru a równania (3.18).

Niech a_+ będzie rozwiązaniem dodatnim równania $\eta_{+2}(s) = \tilde{y}_-(0)$, które po podstawieniu $s = a_+$ pozwala zapisać

$$e^{a_+} (1 - a_+) = \frac{1}{2}. \quad (3.27)$$

Następnie przyjmuje się $a = \eta_{+1}(a_+)$, co prowadzi do oszacowania

$$a = e^{a_+} (2 - a_+) \approx 2.65554, \quad (3.28)$$

gdzie $a_+ \approx 0.768039$ jest dodatnim pierwiastkiem równania (3.27).

Wartość oszacowana na podstawie wzoru (3.28) przy założeniu, że a_- jest ujemnym pierwiastkiem równania algebraicznego $\eta_{-2}|_{s=0} = \tilde{y}_+(0)$, pozwala obliczyć

$$\frac{1}{2}e^{s-a_-} + \left(\frac{1}{2} + a\right)e^{s-a_-}(s - a_-) = 1,$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}e^{-a_-} - \left(\frac{1}{2} + a\right)e^{-a_-}a_- &= 1, \\ e^{a_-} + \left(\frac{1}{2} + a\right)a_- &= \frac{1}{2},\end{aligned}\quad (3.29)$$

skąd na podstawie równania (3.29), $a_- \approx -0.122043$ oraz

$$\eta_+(a_+) = \left(a, \frac{1}{2}\right). \quad (3.30)$$

Bifurkacja rozwiązania homoklinicznego $\tilde{\gamma}$ do rozwiązania ograniczonego w zbiorze $\mathbb{R}$ układu równań (3.13)-(3.15), przy $\varepsilon \neq 0$, następuje dla pewnych wartości parametru bifurkacji α . W celu obliczenia tych wartości wykorzystuje się wyprowadzone w pracy [7]:

a) liniowe wariacyjne zagadnienie początkowe

$$\begin{aligned}\dot{w} &= \frac{df_-(\eta_+(s))}{ds}w + g(\eta_+(s), s + \alpha, 0), \\ w(0) &= \left(-\frac{g_2(\eta_+(0), \alpha, 0)}{\partial_x f_{-2}(\eta_+(0))}, 0\right),\end{aligned}\quad (3.31)$$

b) równanie bifurkacji

$$\begin{aligned}\tilde{B}(\alpha, 0) &= \int_0^{+\infty} (g(\gamma_+(s), a_+ + s + \alpha, 0), \tilde{\mu}(s))ds + \\ &+ \dot{\tilde{\gamma}}_{+2}(0)\tilde{\psi}_+(\alpha, 0) = 0,\end{aligned}\quad (3.32)$$

w którym $(\cdot, \cdot)$ to iloczyn skalarny, a także

$$\tilde{\mu}(s) = \left(\dot{\tilde{\gamma}}_{+2}(s), -\dot{\tilde{\gamma}}_{+1}(s)\right), \quad (3.33)$$

$$\tilde{\psi}_+(\alpha, 0) = -f_{-1}(\eta_+(a_+))\frac{w_2(a_+)}{f_{-2}(\eta_+(a_+))} + w_1(a_+). \quad (3.34)$$

Na podstawie wzorów (3.17), (3.19) i (3.22), równanie (3.31) przepisuje się w postaci

$$\dot{w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} w + \cos(s + \alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w(0) = (\cos \alpha, 0). \quad (3.35)$$

Rozwiązanie $w = (w_1, w_2)$ układu (3.35) dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu, znalezione przy użyciu procedury z wydruku 12 wyrażają wzory

$$w_1(s, \alpha) = \frac{1}{2}((2 - s)e^s \cos \alpha + (1 - s)e^s \sin \alpha - \sin(\alpha + s)), \quad (3.36)$$

$$w_2(s, \alpha) = \frac{1}{2}((1 - s)e^s \cos \alpha - e^s s \sin \alpha - \cos(\alpha + s)). \quad (3.37)$$

Wydruk 12. Rozwiązanie $w = (w_1, w_2)$ układu równań (3.35) przy warunkach początkowych $w(0) = (\cos \alpha, 0)$.

```
(%i1) 'diff(w1(t),t,1)=w2(t);
(%o1)  $\frac{d}{dt}w_1(t) = w_2(t)$ 
(%i2) 'diff(w2(t),t,1)=-w1(t)+2*w2(t)+cos(t+a);
(%o2)  $\frac{d}{dt}w_2(t) = \cos(t+a) + 2w_2(t) - w_1(t)$ 
(%i3) assume(s>0);
(%o3)  $[s > 0]$ 
(%i4) laplace(%o1,t,s);
(%o4)  $s \text{laplace}(w_1(t),t,s) - w_1(0) = \text{laplace}(w_2(t),t,s)$ 
(%i5) laplace(%o2,t,s);
(%o5)  $s \text{laplace}(w_2(t),t,s) - w_2(0) = 2 \text{laplace}(w_2(t),t,s) - \text{laplace}(w_1(t),t,s)$ 
 $+ \frac{\cos(a)s - \sin(a)}{s^2 + 1}$ 
(%i6) atvalue(w1(t), t=0, cos(a));
(%o6)  $\cos(a)$ 
(%i7) atvalue(w2(t), t=0, 0);
(%o7)  $0$ 
(%i8) linsolve([%o4,%o5],[ 'laplace(w1(t),t,s), 'laplace(w2(t),t,s)]);
(%o8)  $[\text{laplace}(w_1(t),t,s) =$ 
 $\frac{w_1(0)s^3 + (w_2(0) - 2w_1(0))s^2 + (\cos(a) + w_1(0))s - \sin(a) + w_2(0) - 2w_1(0)}{s^4 - 2s^3 + 2s^2 - 2s + 1},$ 
 $\text{laplace}(w_2(t),t,s) =$ 
 $\frac{w_2(0)s^3 + (\cos(a) - w_1(0))s^2 + (w_2(0) - \sin(a))s - w_1(0)}{s^4 - 2s^3 + 2s^2 - 2s + 1}]$ 
(%i9) factored:=map(lambda([eq],factor(eq)), %);
(%o9)  $[\text{laplace}(w_1(t),t,s) =$ 
 $\frac{w_1(0)s^3 + (2w_1(0) - w_2(0))s^2 + (w_1(0) + \cos(a))s - \sin(a) + w_2(0) - 2w_1(0)}{(s-1)^2(s^2+1)},$ 
 $\text{laplace}(w_2(t),t,s) =$ 
 $\frac{w_2(0)s^3 + (\cos(a) - w_1(0))s^2 - (w_2(0) + \sin(a))s - w_1(0)}{(s-1)^2(s^2+1)}]$ 
(%i10) sol:=map(lambda([eq],ilt(eq,s,t)),factored);
(%o10)  $[w_1(t) = -\frac{\cos(a)\sin(t)}{2} - \frac{\sin(a)\cos(t)}{2} - \frac{\sin(a)te^t}{2} + \frac{\cos(a)te^t}{2} + w_2(0)te^t$ 
 $- w_1(0)te^t + \frac{(\sin(a) + 2w_1(0))e^t}{2}, w_2(t) = \frac{\sin(a)\sin(t)}{2} - \frac{\cos(a)\cos(t)}{2}$ 
 $- \frac{\sin(a)te^t}{2} + \frac{\cos(a)te^t}{2} + w_2(0)te^t - w_1(0)te^t + \frac{(\cos(a) + 2w_2(0))e^t}{2}]$ 
(%i11) w1(t):=-(cos(a)*sin(t))/2-(sin(a)*cos(t))/2-(sin(a)*t*e^t)/2
-(cos(a)*t*e^t)/2+((sin(a)+2*cos(a))*e^t)/2;
(%o11)  $w_1(t) := -\frac{\cos(a)\sin(t)}{2} - \frac{\sin(a)\cos(t)}{2} + \frac{-\sin(a)te^t}{2} + \frac{-\cos(a)te^t}{2}$ 
 $+ \frac{(\sin(a) + 2\cos(a))e^t}{2}$ 
(%i12) w2(t):=(sin(a)*sin(t))/2-(cos(a)*cos(t))/2-(sin(a)*t*e^t)/2
-(cos(a)*t*e^t)/2+(cos(a)*e^t)/2;
(%o12)  $w_2(t) := \frac{\sin(a)\sin(t)}{2} - \frac{\cos(a)\cos(t)}{2} + \frac{-\sin(a)te^t}{2} + \frac{-\cos(a)te^t}{2} + \frac{\cos(a)e^t}{2}$ 
```

```

(%i13) ratsimp(%o11);
(%o13) w1(t) := -0.5 (cos a sin t + sin a cos t + ((sin a + cos a)t - sin a - 2 cos a)e^t)
(%i14) trigreduce(%o13);
(%o14) w1(t) := -0.5 (sin(t + a) + sin(a)te^t + cos(a)te^t - sin(a)e^t - 2 cos(a)e^t)
(%i15) ratsimp(%o12);
(%o15) w2(t) := 0.5 (sin(a) sin(t) - cos(a) cos(t) + ((-sin(a) - cos(a))t + cos(a))e^t)
(%i16) trigreduce(%o15);
(%o16) w2(t) := 0.5 (-cos(t + a) - sin(a)te^t - cos(a)te^t + cos(a)e^t)

```

Drugi wyraz równania (3.32) oblicza się jak poniżej

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_{+2}(0)\tilde{\psi}_+(\alpha, 0) &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \frac{w_2(a_+, \alpha)}{1-a} + w_1(a_+, \alpha) \right) = \\
&= \left(\frac{w_2(a_+, \alpha)}{4(1-a)} - \frac{1}{2} w_1(a_+, \alpha) \right), \tag{3.38}
\end{aligned}$$

gdzie do wyznaczenia funkcji $w(a_+, \alpha)$, zależnych od parametru bifurkacji α , należy wykorzystać wzory (3.36) i (3.37).

Całkę oznaczoną występującą w równaniu (3.32) oblicza się, jak poniżej

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty (g(\gamma_+(s), a_+ + s + \alpha, 0), \tilde{\mu}(s)) ds = \\
&= - \int_0^\infty \cos(a_+ + s + \alpha) \dot{\gamma}_{+1}(s) ds = \\
&= a \int_0^\infty \cos(a_+ + s + \alpha) e^{-s} ds = \\
&= a \frac{1}{2} e^{-s} (-\cos(a_+ + \alpha + s) + \sin(a_+ + \alpha + s)) \Big|_{s=0}^{s=\infty} = \\
&= \frac{a}{2} (\cos(a_+ + \alpha) - \sin(a_+ + \alpha)). \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Podstawiając do wzorów (3.38) i (3.39) wartości liczbowe parametrów a i a_+ , wyprowadza się na podstawie (3.32) równanie bifurkacji dla rozpatrywanego przypadku

$$\begin{aligned}
\tilde{B}(\alpha) &= \frac{a}{2} (\cos(a_+ + \alpha) - \sin(a_+ + \alpha)) + \left(\frac{w_2(a_+, \alpha)}{4(1-a)} - \frac{1}{2} w_1(a_+, \alpha) \right) \approx \\
&\approx 0.032595 \cos \alpha - 1.877467 \sin \alpha + 0.072545 \sin \alpha + 0.016556 \cos \alpha + \\
&\quad - 0.490202 \cos \alpha + 0.054819 \sin \alpha \approx -0.441052 \cos \alpha - 1.7501 \sin \alpha. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Obliczenie funkcji $\tilde{B}(\alpha)$ i jej miejsc zerowych $\alpha_1 = 2.8947188$ i $\alpha_2 = 6.03631115$ w zakresie argumentu $\alpha \in [0, 2\pi]$ wykonano za pomocą instrukcji załączonych na wydruku 13.

Wydruk 13. Obliczenie miejsc zerowych funkcji $\tilde{B}(\alpha)$ danej wzorem (3.40).

```
(%i1) a:2.65554;
(%o1) 2.65554
(%i2) a_:0.768039;
(%o2) 0.768039
(%i3) w1(s,alpha):=0.5*((2-s)*%e^s*cos(alpha)+(1-s)*%e^s*sin(alpha)
-sin(alpha+s));
(%o3) w1(s,alpha):=0.5*((2-s)e^s cos alpha+(1-s)e^s sin alpha-sin(alpha+s))
(%i4) trigexpand(w1(a_,alpha));
(%o4) 0.5(1.960809101788127 cos alpha-0.21927433173668 sin alpha)
(%i5) w2(s,alpha):=0.5*((1-s)*%e^s*cos(alpha)-%e^s*s*sin(alpha)
-cos(alpha+s));
(%o5) w2(s,alpha):=0.5*((1-s)e^s cos alpha-e^s s sin alpha-cos(alpha+s))
(%i6) trigexpand(w2(a_,alpha));
(%o6) 0.5(-0.96080894612324 sin alpha-0.21927433173668 cos alpha)
(%i7) B3(s,a,alpha):=a/2*(cos(s+alpha)-sin(s+alpha))+(w2(s,alpha)
/(4*(1-a))-0.5*w1(s,alpha));
,
(%o7) B3(s,a,alpha):=a/2(cos(s+alpha)-sin(s+alpha))+((w2(s,alpha)
/(4(1-a))-0.5w1(s,alpha))
(%i8) B(alpha):=B3(a_,a,alpha);
(%o8) B(alpha):=B3(a_,a,alpha)
(%i9) float(expand(factor(trigexpand(B(alpha))))), numer;
(%o9) -1.750103835990161 sin alpha-0.44105163518765 cos alpha
(%i10) find_root((%o9), alpha, 2, 4);
(%o10) 2.89471884157411
(%i11) find_root((%o9), alpha, 5, 7);
(%o11) 6.036311495163903
```

Pokazano, że równanie bifurkacji dane wzorem (3.32) ma dwa dodatnie pierwiastki rzeczywiste, dlatego rozwiązanie homokliniczne $\tilde{\gamma}$ wyrażone za pomocą wzorów (3.26) bifurkuje do ograniczonego w $\mathbb{R}$, nieciągłego rozwiązania układu dynamicznego opisanego równaniami (3.16)-(3.19).

3.2. Liczbowe oszacowanie charakteru trajektorii czasowych

Okresowość sygnałów, a ściślej trajektorii czasowych zmian stanu układu dynamicznego można zaobserwować na podstawie charakterystyk pokazanych na rysunkach 2.5 lub 3.5. Składowymi drgań samowzbudnych w układach z tarcieniem suchym są fazy utwierdzenia o względnie dużym współczynniku tarcia statycznego i fazy poślizgu, w których dynamiczny współczynnik tarcia jest znacząco mniejszy. Dlatego układy tego rodzaju charakteryzują się stanem statycznym – niezmiennym z uwagi na brak poślizgu pomiędzy powierzchniami kontaktu, bądź różnorodnymi zachowaniami dynamicznymi w postaci ruchów okresowych, quasi-okresowych i chaotycznych [17, 19, 32].

Podstawową cechą chaotycznego układu fizycznego jest jego wrażliwość na warunki początkowe. Dokładniej, odległość mierzona pomiędzy trajek-

toriami fazowymi tych układów rośnie wykładniczo. W efekcie, z upływem czasu blisko położone wybrane punkty początkowe oddalają się od siebie. Konsekwencją wykładniczej rozbieżności sąsiednich punktów trajektorii fazowych jest tworzenie się atraktora chaotycznego. Wykładniki Lapunowa (nazwane od nazwiska rosyjskiego matematyka A.M. Lapunowa 1857-1918) są miarą wrażliwości układów dynamicznych na zmianę warunków początkowych. Tym samym, wyznaczony zbiór ich wartości jest pewnym liczbowym oszacowaniem charakteru trajektorii fazowej.

Chaos deterministyczny pojawia się w różnych dziedzinach nauki, tj. ekonomii, fizyce statystycznej, biologii i w ogólności, dynamice nieliniowej. W celu wykrycia chaosu oblicza się wykładniki Lapunowa [31, 60], entropię Kołmogorowa [22] lub wymiar korelacji [36].

Obliczanie wykładników Lapunowa jest jednym z podstawowych zagadnień dotyczących jakościowej analizy nieliniowych układów dynamicznych. Teoria Oseledeca [60], numeryczne algorytmy Benettina [21], Kim i Choe [42] dotyczą metod obliczania widma wykładników Lapunowa ciągłych układów dynamicznych. Jeśli równania różniczkowe nie są znane lub zawierają nieciągłe wyrazy, to stosuje się metody bazujące na rekonstrukcji atraktora z ciągu liczbowego [63, 72].

3.2.1. Metoda obliczania wykładników Lapunowa dyskretnego ciągu liczbowego

Dynamikę rzeczywistych układów fizycznych można ocenić wzrokowo lub na podstawie sygnałów pomiarowych zapisanych w pamięci komputera w postaci ciągu liczbowego zmierzonych wartości. Pomiar rzeczywistego stanu układu dynamicznego (przesunięcia, prędkości w ruchu liniowym lub obrotowym, temperatury, napięcia, itp.) odbywa się z pewnym czasem próbkowania, prowadząc do dyskretyzacji ciągłych sygnałów wielkości fizycznych. Na dokładność kolejnych wartości zmiennych dynamicznych mają wpływ m.in.: metodyka wykonywania pomiaru, dokładności czujników pomiarowych, zakłócenia, algorytm filtrowania, różniczkowanie sygnału dyskretnego. Z tego względu, ciągi liczbowe wartości stanowią przybliżenie trajektorii czasowych zmiennych stanu obserwowanego układu. Oszacowanie charakteru n -wymiarowej dyskretniej trajektorii czasowej wymaga obliczenia przynajmniej maksymalnego [42] lub n wykładników Lapunowa [72]. Matematyczne podstawy obliczania pełnego widma wykładników Lapunowa na podstawie dyskretniej trajektorii czasowej n -wymiarowego chaotycznego układu dynamicznego opracowali Sano i Sawada. Ich metodę opublikowaną w pracy [63], wykorzystano w tej monografii do numerycznego obliczenia widma wykładników Lapunowa trajektorii 4-wymiarowej danej w postaci

ciągu liczbowego wartości zmiennych stanu wybranego układu z tarcie suchym [16].

Niech $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n_i}$ będzie wektorem stanu pewnego n_i -wymiarowego dyskretnego układu dynamicznego oraz $\bar{x}_j$ ($j = 1 \dots n_j$) oznacza wektor kolejno wybieranych punktów badanej trajektorii. Przyjmując małą kulę o promieniu ε i środku w punkcie wyznaczonym wektorem $\bar{x}_j$, znajduje się zbiór n_k punktów należących do tej kuli. Promień kuli musi być jednak na tyle duży, aby $n_k > n_i$. Odległość od n_k punktów tego zbioru do jej środka wynosi $\bar{y}_k = \bar{x}_k - \bar{x}_j$, przy $k = 1 \dots n_k$. Po upływie czasu $\tau = d\Delta t$ (d jest małą liczbą całkowitą, Δt jest czasem próbkowania z jakim zapisano ciąg wartości punktów badanej trajektorii), punkt wyznaczony wektorem $\bar{x}_j$ przesunie się do $\bar{x}_{j+d}$, a sąsiednie punkty do $\bar{x}_{k+d}$. Skutkuje to również zmianą odległości $\bar{y}_{k+d} = \bar{x}_{k+d} - \bar{x}_{j+d}$. Jeśli promień ε jest wystarczająco mały, to wektory $\bar{y}_{k+d}$ i $\bar{y}_k$ są z dobrym przybliżeniem styczne względem siebie, tworząc przestrzeń styczną. Zależność $\bar{y}_{k+d} = A_j \bar{y}_k$ pomiędzy tymi wektorami jest liniowa, a najmniejsza kwadratowa estymacja macierzy $A_j \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ jest dana wzorem

$$A_j = \left(\sum_{k=1}^{n_k} \bar{y}_{k+d} \bar{y}_k^T \right) \left(\sum_{k=1}^{n_k} \bar{y}_k \bar{y}_k^T \right)^{-1}, \quad j = 1 \dots n_j. \quad (3.41)$$

Widmo wykładników Lapunowa oblicza się na podstawie zależności

$$\lambda_i = \lim_{n_j \rightarrow \infty} \frac{1}{n_j \tau} \sum_{j=1}^{n_j} \ln \|A_j \bar{e}_i^j\|, \quad i = 1 \dots n_i. \quad (3.42)$$

Cyklicznie po zakończeniu założonej liczby iteracji należy przeprowadzić ortogonalizację kierunków i normalizację długości wektorów łączących sąsiednie punkty trajektorii. Symbol $\bar{e}_i^j$ we wzorze (3.42) oznacza zbiór wektorów bazy zaczepionych w punkcie wyznaczonym wektorem $\bar{x}_j$, należącym do przestrzeni stycznej. W pierwszej iteracji algorytmu estymacji widma wykładników początkowy zbiór wektorów bazy jest dowolny. Przed obliczeniem kolejnych składników sumy występujących we wzorze (3.42), następuje normalizacja długości $A_j \bar{e}_i^j$ i ortogonalizacja kierunków wektorów bazy $\bar{e}_i^j$ za pomocą procedury Grama-Schmidta [74].

3.2.2. Symulacja numeryczna

Rozpatrzmy dyskretną trajektorię czasową rozwiązania numerycznego, nieciągłego układu dynamicznego o dwóch stopniach swobody z tarcie

suchym, którego równania różniczkowe mają postać

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \xi_1 (\xi_2(x_2 + x_4) - x_3 - T(v)), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \xi_3(-x_1 - \xi_2 x_2 - \xi_4 x_3 - \xi_5 x_4).\end{aligned}\tag{3.43}$$

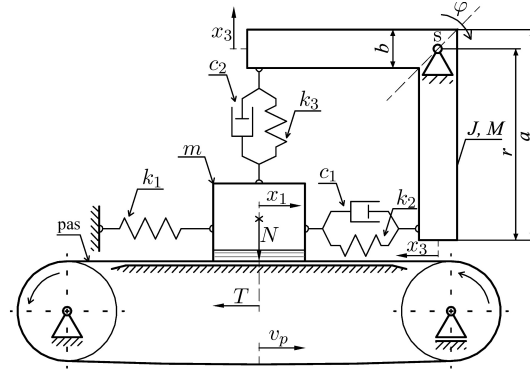
W równaniach (3.43) wprowadzono następujące oznaczenia:

- wektor stanu $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$;
- prędkość względnego przesunięcia powierzchniami kontaktu $v = x_2 - v_p$;
- prędkość podstawy v_p w ruchu typu utwierdzenie-poślizg;
- składnik związany ze zmienną siłą nacisku (pochodzącą od ruchu kątownika), prostopadłą do powierzchni kontaktu $y = 1 - \xi_6 x_3 - \xi_7 x_4$:

$$\begin{aligned}|T(v)| &\leq y\mu_0, & \text{przy } v = 0, \\ T(v) &= \text{sgn}(v)y\mu_k(v), & \text{przy } v \neq 0,\end{aligned}\tag{3.44}$$

gdzie $\mu_k(v)$ jest dane wzorem (1.3);

- stałe parametry układu: $\xi_1 = k_2/(\omega^2 m)$, $\xi_2 = c_1\omega/k_2$, $\xi_3 = k_2 r^2/(\omega^2 J)$, $\xi_4 = (k_2 + k_3)/k_2$, $\xi_5 = \omega(c_1 + c_2)/k_2$, $\xi_6 = \mu_0 k_3/k_2$, $\xi_7 = \omega c_2 \mu_0/k_2$, $\omega = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$, $J = m(a^2 + b^2)/3$.



Rysunek 3.7. Schemat ideowy samowzbudnego układu drgającego o dwóch stopniach swobody z tarciem i zmienną siłą nacisku normalnego w strefie kontaktu

Samowzbudny układ drgający z tarciem widoczny na rysunku 3.7 został szerzej rozpatrzony w pracy [12]. Masa m przemieszcza się na pasie w kierunku x_1 , a kątownik o masowym momencie bezwładności J wykonuje obroty w kierunku φ , wokół punktu podparcia s . Obie masy połączono elementami sprężystymi k_2, k_3 i tłumiącymi c_1, c_2 . Masa m została dodatkowo połączona z nieruchomą ścianą za pomocą elementu sprężystego k_1 . Przyjmuje się ponadto, że kąt obrotu kątownika jest mały, stąd przesunięcie jego

ramion po drodze łukowej można aproksymować liniowym przesunięciem na podstawie związku $\sin(\varphi) \approx \varphi \approx y/r$.

Tablica 1. Ciąg kilku początkowych i końcowych wartości 4-wymiarowej, dyskretnej trajektorii czasowej pokazanej na rysunku 3.8

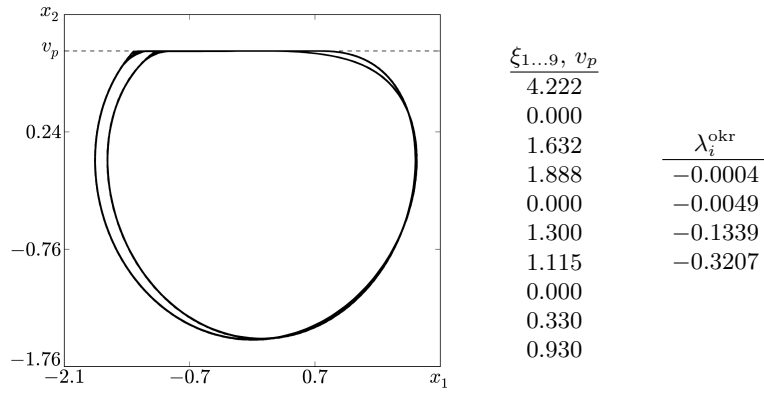
t	x_1	x_2	x_3	x_4
3000.0000000000	0.0684442752	0.9299711814	0.1579779794	1.3457709858
3000.2000000000	0.2544385115	0.9299711814	0.4229551170	1.2975619614
3000.4000000000	0.4404327478	0.9299711814	0.6745251397	1.2122174853
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
11999.6000000000	-1.496809724	-0.800241781	-1.366314733	-0.699049299
11999.8000000000	-1.633550814	-0.564165672	-1.492376826	-0.559517748

W tabeli 1 zamieszczono kilka pierwszych i ostatnich linii pliku, w którym zapisano ciąg wartości dyskretnej trajektorii czasowej. Widmo λ_i^{okr} wykładników Lapunowa pewnej trajektorii rozwiązania okresowego układu (3.43), danej w czasie $(3 - 12) \cdot 10^3$ w postaci ciągu 45001 wartości wektora stanu $\bar{x}$, obliczono za pomocą procedury numerycznej opisanej w pracy [74].

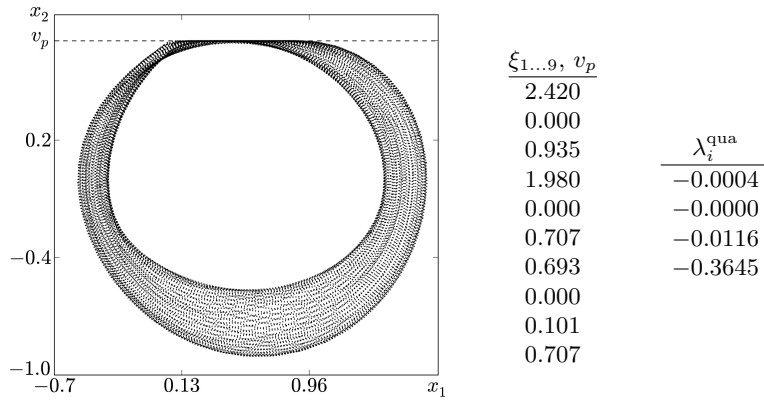
Obliczanie wykładników Lapunowa na podstawie ciągu liczbowego punktów uzyskanych z dyskretnej trajektorii czasowej należy poprzedzić jej odpowiednim przygotowaniem, tzn. obliczyć w dostatecznie długim przedziale czasu, stosując odpowiedni krok całkowania z pominięciem okresu ruchu przejściowego. Niejednokrotnie, poprawne rozwiązanie numeryczne analizowanego układu wymaga zastosowania metod bardzo dokładnych. Zaliczają się do nich metody bazujące na zmianie kroku całkowania w trakcie obliczeń. W zastosowaniach spotyka się metodę Dormanda-Prince’a, Rungego-Kutty czwartego rzędu lub zmodyfikowaną metodę Hénona opisaną w punkcie 2.2.2). Z drugiej strony, algorytm obliczający wykładniki Lapunowa z trajektorii czasowej wymaga obliczenia punktów przy stałym kroku całkowania numerycznego. Dokładne rozwiązanie zagadnienia, a następnie interpolowanie otrzymanych punktów celem znalezienia ich odpowiedników równomiernie rozłożonych w czasie, pozwoli na zastosowanie metody opisywanej w tym podrozdziale. Procedurę przygotowania ciągu liczbowego dyskretnej trajektorii czasowej i metodę interpolacji rozpatrzono w pracach [8, 16].

Poniżej zestawiono wyniki symulacji numerycznych prowadzących do estymacji widm λ_i wykładników Lapunowa kilku dyskretnych trajektorii czasowych rozważanego układu dynamicznego.

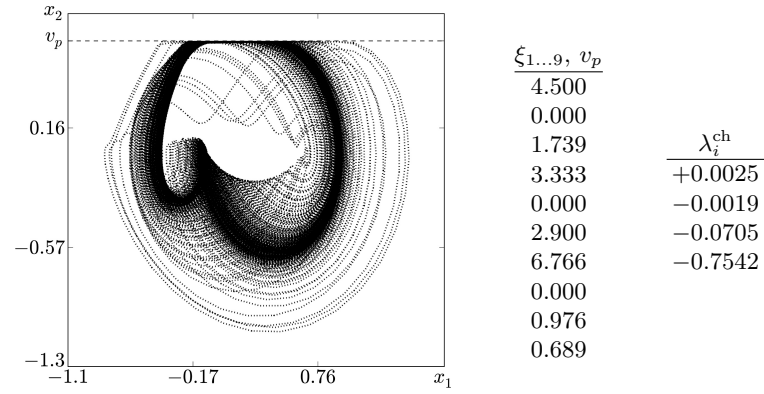
Widma $\lambda_i^{\text{okr}}, \lambda_i^{\text{qua}}, \lambda_i^{\text{ch}}$ wykładników Lapunowa trajektorii pokazanych odpowiednio na rysunkach 3.8-3.10 potwierdzają charakter obserwowanych trajektorii. Każde z nich zawiera przynajmniej jeden wykładnik o wartości bliskiej zeru. W przypadku trajektorii quasi-okresowej $\lambda_{\{1,2\}}^{\text{qua}} \approx 0$, a w przypadku chaotycznej $\lambda_1^{\text{ch}} > 0$.



Rysunek 3.8. Trajektoria 2-okresowa ($\bar{x}_0 = (0, -0.1, 0, -0.1)$)



Rysunek 3.9. Trajektoria quasi-okresowa ($\bar{x}_0 = (0, 0, 0, -0.1)$)



Rysunek 3.10. Trajektoria chaotyczna ($\bar{x}_0 = (0, -0.1, 0, -0.1)$)

4. Sterowanie w nieliniowych układach dynamicznych

W pierwszej części tego rozdziału zostaną przedstawione metody numerycznego modelowania i regulacji prędkości obrotowej silnika prądu stałego. W drugiej części zostanie wyprowadzony algorytm sterowania przełączającego, oparty na zastosowaniu siły wymuszającej zmniejszającej względną deformację modelu mechanicznego klatki piersiowej człowieka.

4.1. Regulacja nadążna prędkości obrotowej silnika prądu stałego

Dynamika ruchu obrotowego z małymi prędkościami jest silnie związana z drganiami generowanymi w ruchu utwierdzenie-poślizg, pojawiającymi się podczas zmiany kierunku obrotów spowodowanej realizacją zadanej funkcji pozycjonowania.

Nieliniowe drgania typu utwierdzenie-poślizg powstają podczas względnego ruchu przylegających powierzchni par ciernych. Postać drgań może zależeć od tarcia wiskotycznego, tarcia Coulomba, efektu Stribecka związanego z krzywą eksponencjalną i innych czynników o charakterze nieciągłym. Takie efekty towarzyszą dynamice ruchu wielu układów mechanicznych, wśród których można wymienić: układy pozycjonujące – serwomechanizmy, obrotowe enkodery analogowo-cyfrowe i silniki prądu stałego, których prędkość obrotowa wirnika w łożyskach ślizgowych oscyluje w pobliżu zera.

Kompensację wymienionych wyżej, kilku efektów nieliniowych można przeprowadzić za pomocą znanej metody polegającej na wprowadzeniu funkcji powierzchni utwierdzenia [51]. Zmniejszenie dynamicznego uchybu regulacji uzyskuje się poprzez zastosowanie właściwego kompensatora ciągłego, opartego na prawie sterowania nadążnego wyrażonego za pomocą równań dynamiki i parametrów obiektu regulacji.

Analizę kompensacji adaptacyjnej zjawisk nieliniowych wywołanych tarciem suchym wykonano w pracy [41]. Opisano w niej efekt Stribeck, histerezę charakterystyki tarcia, cykle graniczne w ruchu utwierdzenie-poślizg, narastającą siłę tarcia statycznego i poprzedzające poślizg, przesunięcia względne powierzchni trących. Następnie zaproponowano nowy algorytm sterowania umożliwiający kompensację wymienionych efektów. W pracy [40] do opisu matematycznego złożonych zjawisk nieliniowych, kompensacji tarcia wiskotycznego i redukcji wpływu efektów Dahla i Stribeck, zastosowano model tarcia dynamicznego Lund-Grenoble'a. Wykorzystując metodę Lapunowa, wyprowadzono ciągły kompensator dynamiczny. W porównaniu do typowego regulatora PID nie uwzględniającego bezpośredniej kompensacji efektów nieliniowych uzyskano szybszą, dokładniejszą i bardziej odporną regulację prędkości ruchu prostoliniowego matrycy pozycjonującej. Na podstawie eksperymentu numerycznego przeprowadzonego w pracy [65]

udowodniono, że standardowa metoda sterowania silnikiem poprzez zmianę prędkości obrotowej, wykorzystująca zamkniętą pętlę sprzężenia zwrotnego nie daje oczekiwanych rezultatów, jeśli w ruchu obrotowym występują sekwencje utwierdzeń i poślizgów. Pokazano, że regulator o działaniu proporcjonalno-różniczkującym nie zapewnia optymalnej wydajności układu sterowania z powodu narastającego uchybu regulacji nadążnej. Uchyb można częściowo zredukować, zmniejszając wartość stałej wzmocnienia proporcjonalnego. To prowadzi do wyraźnych oscylacji prędkości obrotowej, i w efekcie niedokładności odwzorowania zadanej funkcji pozycjonowania. Wysoką dokładność pozycjonowania uzyskano, stosując gładki regulator adaptacyjny, kompensujący efekty nieliniowe wywołane tarciem suchym. Regulator zaprojektowano przy użyciu metody bazującej na zdefiniowaniu funkcji powierzchni utwierdzenia.

Sterowanie mechanizmem manipulatora z połączeniem ciernym przy małych zmianach prędkości ruchu względnego par ciernych wykonano w pracy [1]. Teoretyczna i doświadczalna analiza porównawcza liniowych (PD, PID) i nieliniowych (gładkich ciągłych, kawałkami-liniowych) algorytmów kompensacji wykazała wyższość technik opartych na kompensatorach nieliniowych. Sterowanie położeniem ramienia manipulatora o dwóch stopniach swobody z stosowaniem kompensatorów liniowych okazało się mniej wydajne, a w szczególnych warunkach nieodporne na skokowe zmiany obciążenia. Zaobserwowano przy tym, że jest łatwiej zapewnić stabilność układu sterowania opartego na kompensatorze opisanym gładką funkcją nieliniową.

W pracy [38] podjęto zagadnienie aktywnego sterowania oscylatora z tarciem typu utwierdzenie-poślizg wymuszanego ruchem podstawy. Oscylator w postaci masy połączonej elementem sprężystym z obudową umieszczono w układzie z zamkniętą pętlą sterowania, utworzoną kolejno przez akcelerometryczny czujnik drgań, filtr częstotliwości, przesuwnik fazowy, wzmacniacz i wzбудnik oddziałujący na drgającą masę. W układzie sterowania z ujemnym sprzężeniem zwrotnym skompensowano drgania niestabilne zachowując małą wrażliwość na uchyb regulacji wywołany przesunięciem fazowym i wzmocnieniem sygnałów sterujących. Oscylator o podobnej budowie z wymuszeniem harmonicznym poddano sterowaniu w zamkniętym układzie sterowania z opóźnieniem i opisano w pracy [52]. Stosując metodę Lapunowa, zaprojektowano ciągły kompensator, natomiast wprowadzając opóźnienie w pętli sprzężenia zwrotnego zagwarantowano ograniczoność wektora stanu nieciągłego układu dynamicznego z tarciem suchym. Ponadto, konstruując funkcję Lapunowa-Krasowskiego, wyprowadzono warunek dostateczny stabilności badanego układu.

Sieci neuronowe pozwalają aproksymować funkcje nieliniowe, dlatego ich zastosowanie do estymacji zjawisk nieliniowych wywołanych tarciem suchym

jest uzasadnione. Teoria i praktyka takich zastosowań jest dobrze ugruntowana [43, 61]. Na przykład, w pracy [61] przeprowadzono sterowanie liniowego silnika prądu stałego w dyskretnej przestrzeni stanu przy użyciu uczącego się regulatora wyprzedzającego. W dyskretnej przestrzeni stanu rozwiązano także problem iteracyjnej regulacji nadążnej, bazującej na algorytmie uczącym sieć neuronową i sterującym trajektorią położenia wielowymiarowych układów dynamicznych z tarciem Coulomba i ograniczeniami nałożonymi na sygnały wejściowe, statyczne i dynamiczne współczynniki tarcia suchego [30]. Jako model doświadczalny wybrano dwuczłonowe ramię robota planarnego, które włączono do układu sterowania zawierającego uczącą się sieć neuronową. Efektem sterowania było uzyskanie trajektorii czasowych ruchu obrotowego obu elementów, którym podczas pozycjonowania towarzyszyło malenie uchybu regulacji nadążnej. Ciekawą technikę projektowania regulatora opartego na uczącej się sieci neuronowej opisano w pracy [54]. Proponowany regulator wykorzystujący transformację falkową spełnił zadanie kompensacji tarcia wiskotycznego, wpływającego niekorzystnie na dynamikę liniowego serwomechanizmu z silnikiem synchronicznym.

Numeryczna kompensacja efektów ciernych występujących w układach rzeczywistych umożliwia obserwację i estymację przybliżonych charakterystyk tarcia [10]. Model eksperymentalny przedstawiony w pracy [56] składa się z silnika prądu stałego, napędzającego pas transmisyjny (ruchoma podstawa), z którym drgające ciało sztywne o pewnej masie tworzy kontakt cierny. W tym układzie można zaobserwować zmiany prędkości obrotowej silnika spowodowane efektami nieliniowymi i dynamicznie zmieniającym się wymuszeniem zewnętrznym, które pochodzi od siły tarcia suchego i związanych z nią drgań typu utwierdzenie-poślizg występujących na powierzchni kontaktu pomiędzy masą drgającą a pasem transmisyjnym. Na przykład, bifurkacje rozwiązań nieciągłych zawierających fazy utwierdzenia i poślizgu można wyznaczyć przy ustalonej lub zmieniającej się w określony sposób prędkości ruchu podstawy [13]. W tym celu należy zastosować regulację stłowartościową lub nadążną prędkości obrotowej silnika, wprowadzającego podstawę (jedną z powierzchni kontaktu ciernego) w ruch drgający.

Zamierzone sterowanie czasem trwania i długością stref utwierdzenia wymaga, aby prędkość lub położenie podstawy zmieniały się zgodnie z zadaną funkcją, np. prostokątną, trójkątną, sinusoidalną. Z uwagi na występowanie efektów nieliniowych wywołanych tarciem suchym, o których napisano we wstępie do rozdziału 4, zadawanie pożądaných funkcji zmian położenia bądź prędkości ruchu wymaga zastosowania odpornej regulacji nadążnej, gwarantującej sterowanie optymalne i malejący uchyb regulacji. Na podstawie jednej z metod sterowania położeniem manipulatorów, opisanej w pracy [51], wyprowadzony zostanie algorytm regulacji prędkości obrotowej silnika prądu

stałego. Metoda opiera się na wprowadzeniu funkcji powierzchni utwierdzenia, równaniach różniczkowych pierwszego rzędu na estymację parametrów układu sterowania i definicji funkcji ograniczającej z góry siły tarcia związane z efektami nieliniowymi, tj. efektem Stribeck'a i tarciem zależnym od położenia kąowego wirnika. Ostatni podukład umieszczony na torze głównym układu regulacji nadążnej redukuje oscylacje i wygładza charakterystykę czasową prędkości obrotowej.

Rozważania teoretyczne i symulacje numeryczne prezentowane w tym podrozdziale dotyczą kompensacji efektów nieliniowych występujących na powierzchni kontaktu pomiędzy wałem wirnika i łożyskiem ślizgowym. Przy małych prędkościach ruchu względnego pomiędzy powierzchniami kontaktu, zjawiska nieliniowe wywołane tarciem suchym mają duży wpływ na dokładność pozycjonowania wirnika. Tarcie i związane z jego występowaniem konsekwencje dla układów dynamicznych opisano w pracy [11].

4.1.1. Momenty sił tarcia

Trudności w modelowaniu i kompensacji efektów nieliniowych występujących na powierzchni kontaktu pomiędzy wałem wirnika i łożyskiem ślizgowym pojawiają się w efekcie: tarcia Coulomba, wyrażonego maksymalnym momentem siły tarcia statycznego w strefach poślizgu $T_{sm} \operatorname{sgn} \dot{\varphi}(t)$ i utwierdzenia $T_{sm}(1 - \operatorname{sgn} |\dot{\varphi}(t)|)$; tarcia związanego z krzywą eksponencjalną, pojawiającą się na skutek efektu Stribeck'a $T_{Stm}(1 - \exp(-T_0|\dot{\varphi}(t)|) \operatorname{sgn} \dot{\varphi}(t))$; tarcia wiskotycznego $T_{vm}\dot{\varphi}(t)$; tarcia zależnego od położenia kąowego $T_{1m} \sin(T_2\varphi(t) + T_3) \operatorname{sgn} |\dot{\varphi}(t)|$, którego definicję podano w pracy [64]. Poszczególne zmienne i parametry oznaczają: $\operatorname{sgn} \dot{\varphi}$ – znak wartości prędkości kąto-
wej; φ – położenie kąto-
we; T_{sm} – maksymalny moment siły tarcia statycznego; T_{Stm}, T_0 – parametry krzywej eksponencjalnej; T_{vm} – współczynnik tarcia wiskotycznego; T_{1m}, T_2, T_3 – pozostałe parametry. W części mechanicznej równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu, opisujące dynamikę ruchu obrotowego silnika prądu stałego zapisuje się w postaci

$$\begin{aligned} J_m \ddot{\varphi}(t) + \left(\frac{c_b c_m}{R_a} + T_{vm} \right) \dot{\varphi}(t) - T_{Stm} \left(1 - e^{-T_0|\dot{\varphi}(t)|} \right) \operatorname{sgn} \dot{\varphi}(t) + \\ + T_{1m} \sin(T_2\varphi(t) + T_3) \operatorname{sgn} |\dot{\varphi}(t)| + T_{sm} (1 - \operatorname{sgn} |\dot{\varphi}(t)| + \\ + \operatorname{sgn} \dot{\varphi}(t)) = c_m \psi_m(t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

przy czym do pozostałych parametrów modelu zalicza się rezystancję R_a i prąd ψ_m uzwojenia wirnika, masowy moment bezwładności wirnika J_m , stałą momentu c_m i stałą SEM obwodu elektrycznego twornika c_b . Dzieląc równanie (4.1) przez c_m , otrzymuje się

$$J \ddot{\varphi}(t) + B \dot{\varphi}(t) + \tau(t) = \psi(t), \quad (4.2)$$

gdzie: $\tau(t) = T_v \dot{\varphi}(t) - T_{St} (1 - \exp(-T_0 |\dot{\varphi}(t)|)) \operatorname{sgn} \dot{\varphi}(t) + T_1 \sin(T_2 \varphi(t) + T_3) \operatorname{sgn} |\dot{\varphi}(t)| + T_s (1 - \operatorname{sgn} |\dot{\varphi}(t)| + \operatorname{sgn} \dot{\varphi}(t))$ oznacza przeskalowany moment siły tarcia, parametry $J, B, T_v, T_s, T_1, T_{St}$ są równe odpowiednio $J_m/c_m, c_b/R_a, T_{vm}/c_m, T_{sm}/c_m, T_{1m}/c_m, T_{Stm}/c_m$.

Analizowany układ dynamiczny charakteryzuje się parametrami, których wartości są znane w przybliżeniu. Algorytm regulacji nadążnej powinien umożliwiać ich estymację, jak również kompensować niedokładności opisu matematycznego.

4.1.2. Algorytm sterowania

Zadanie kontroli polega na zaprojektowaniu kompensatora adaptacyjnego umożliwiającego zmianę prędkości obrotowej silnika zgodnie z zadaną funkcją $\varphi_d(t)$. Wykorzystana zostanie metoda opisana w pracy [64], oparta na wprowadzeniu funkcji powierzchni utwierdzenia.

Niech uchyb regulacji e i funkcja pomocnicza ε będą postaci

$$e(t) = \varphi(t) - \varphi_d(t), \quad \varepsilon(t) = \dot{\varphi}(t) - \lambda e(t), \quad (4.3)$$

gdzie: φ i $\dot{\varphi}$ oznaczają odpowiednio położenie i prędkość kątową wirnika, $\lambda > 0$ jest wartością stałą, indeks d wyróżnia pożądane charakterystyki odpowiedzi układu regulacji. Zależność na tzw. funkcję powierzchni utwierdzenia jest następująca

$$r(t) = \dot{\varphi}(t) - \varepsilon(t) = 0. \quad (4.4)$$

Przekształcając równanie (4.2) z wykorzystaniem definicji funkcji powierzchni utwierdzenia $r(t)$, zapisuje się następujące prawo sterowania

$$\begin{aligned} \psi(t) = \hat{J} \dot{\varepsilon}(t) + \hat{D} \varepsilon(t) - \hat{T}_{St} (1 - e^{-\hat{T}_0 |\dot{\varphi}(t)|}) \operatorname{sgn} \dot{\varphi}(t) + \\ \hat{T}_s \operatorname{sgn} \dot{\varphi}(t) + \hat{T}_s (1 - \operatorname{sgn} |\dot{\varphi}(t)|) u_s(t) - u_b(t), \end{aligned} \quad (4.5)$$

gdzie: $u_b(t)$ oznacza funkcję ograniczającą z góry momenty sił tarcia związane z efektem Stribeck'a i tarcie zależnym od położenia kąowego wirnika, $u_s(t) = 1 - \operatorname{sgn} |r(t)|$ jest funkcją określoną podczas utwierdzenia przy $r(t) = 0$ i związaną z definicją funkcji powierzchni utwierdzenia wprowadzoną we wzorze (4.4), $\hat{D} = \hat{B} + \hat{T}_v$, symbol $\hat{\cdot}$ wyróżnia parametr estymowany.

Funkcję $\psi(t)$ daną wzorem (4.5) podstawia się do równania (4.1) w celu kompensacji liniowych sił tarcia Coulomba i tarcia wiskotycznego [65]. Tym sposobem jednak nie można skompensować nieliniowych sił związanych z tarcie zależnym od położenia kąowego wirnika i efektem Stribeck'a. W tym celu, wyprowadza się kompensator estymujący parametr $\hat{\rho}$ funkcji $u_b(t)$,

ograniczającej z góry wartości siły tarcia związanej z efektami nieliniowymi [51]

$$u_b(t) = k_D r(t) + \hat{\rho} k_T \tanh(r(t)(a + bt)), \quad (4.6)$$

We wzorze (4.6) stałe a, b, k_D, k_T są dodatnie, przy czym $k_T > 1$. Jeśli parametr $\hat{\rho}$ jest poszukiwaną estymacją, to we wzorze na prawo sterowania (4.5) wartość $u_b(t)|_{r(t)=\lambda e}$ spełnia rolę wzmocnienia proporcjonalnego, gwarantującego odporną kompensację sił nieliniowych. Prawo sterowania (4.5) zapewnia, że moment siły związany z kompensacją efektów nieliniowych będzie większy od maksymalnej wartości momentu sił tarcia statycznego.

4.1.3. Estymacja parametrów układu regulacji

Na podstawie metody przedstawionej w pracy [64], estymacje $\hat{J}$, $\hat{D}$ i $\hat{T}_s$ parametrów modelu dynamicznego oblicza się w każdej iteracji całkowania równań różniczkowych pierwszego rzędu danych w postaci

$$\dot{\hat{J}}(t) = -\delta_1 \varepsilon(t) r(t), \quad (4.7)$$

$$\dot{\hat{D}}(t) = -\delta_2 \varepsilon(t) r(t), \quad (4.8)$$

$$\dot{\hat{T}}_s(t) = \begin{cases} -\delta_3 \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}(t)) r(t), & \text{przy poślizgu,} \\ \delta_3 (1 - \operatorname{sgn}|\dot{\varphi}(t)|) |r(t)|, & \text{przy utwierdzeniu,} \end{cases} \quad (4.9)$$

gdzie: $\delta_{1...3} > 0$, $r(t) = \dot{\varphi}(t) - \varepsilon(t)$.

Wstawiając $\psi(t)$ dane wzorem (4.5) do równania (4.2) z uwzględnieniem $\varepsilon(t) = \dot{\varphi}(t) - r(t)$, $\dot{\varepsilon} = \ddot{\varphi}(t) - \dot{r}(t)$ oraz różnic $\tilde{T}_{St} = \hat{T}_{St} - T_{St}$, $\tilde{T}_0 = \hat{T}_0 - T_0$ pomiędzy estymacjami a wartościami prawdziwymi odpowiednich parametrów otrzymuje się

$$J\dot{r}(t) + Dr(t) = \hat{J}\dot{\varepsilon}(t) + \hat{D}\varepsilon(t) + \hat{T}_s \operatorname{sgn} \dot{\varphi}(t) + \omega(t) - u_b(t), \quad (4.10)$$

$$\omega(t) = \left(\hat{T}_{St} e^{-\hat{T}_0 |\dot{\varphi}(t)|} - T_{St} e^{-\hat{T}_0 |\dot{\varphi}(t)|} e^{-\tilde{T}_0 |\dot{\varphi}(t)|} - \tilde{T}_{St} - T_p \right) \operatorname{sgn} \dot{\varphi}(t). \quad (4.11)$$

Rozwijając $\exp(\tilde{T}_0 |\dot{\varphi}(t)|) = 1 + \tilde{T}_0 |\dot{\varphi}(t)| + \tilde{T}_0^2 |\dot{\varphi}(t)|^2 / 2 + \tilde{R}$ w szereg Taylora wokół $|\dot{\varphi}(t)| = 0$, a następnie biorąc pierwsze trzy wyrazy tego rozwinięcia, gdzie reszta $\tilde{R} \leq \exp(\tilde{T}_0 |\dot{\varphi}(t)|) \tilde{T}_0^3 |\dot{\varphi}(t)|^3 / 6$, równanie (4.11) przyjmuje postać

$$\omega(t) = \left[\hat{T}_{St} e^{-\hat{T}_0 |\dot{\varphi}(t)|} - T_{St} e^{-\hat{T}_0 |\dot{\varphi}(t)|} \left(1 + \tilde{T}_0 |\dot{\varphi}(t)| + \tilde{T}_0 \frac{|\dot{\varphi}(t)|^2}{2} + \tilde{T}_0^3 \frac{|\dot{\varphi}(t)|^3}{6} e^{\tilde{T}_0 |\dot{\varphi}(t)|} \right) - \tilde{T}_{St} - T_p \right] \operatorname{sgn} \dot{\varphi}(t) = \rho \operatorname{sgn} \dot{\varphi}(t), \quad (4.12)$$

w której: $\rho = -\gamma_1 + \gamma_2 \exp(-\hat{T}_0|\dot{\varphi}(t)|) - \gamma_3|\dot{\varphi}(t)| \exp(-\hat{T}_0|\dot{\varphi}(t)|) - \gamma_4|\dot{\varphi}(t)|^2 \exp(-\hat{T}_0|\dot{\varphi}(t)|)$, $\gamma_1 = \max_{|\dot{\varphi}(t)| \in [0, \infty]} \{|\dot{\varphi}(t)|^3 \exp(-\hat{T}_0|\dot{\varphi}(t)|) \hat{T}_0^3 T_{St}/6\} + \hat{T}_{St} + T_p$, $\gamma_2 = \hat{T}_{St}$, $\gamma_3 = \hat{T}_0 T_{St}$, $\gamma_4 = \hat{T}_0^2 T_{St}/2$. Stałe $\gamma_{1...4}$ są zależne od estymacji lub ich odchyień od wartości prawdziwych.

Do wyznaczenia pozostaje estymacja parametru ρ funkcji $u_b(t)$ danej wzorem (4.6). Kompensując w równaniu (4.11) wyrazy nieliniowe niezależne od $r(t)$, $\dot{r}(t)$, $\varepsilon(t)$ i $\dot{\varepsilon}(t)$, różnica $\omega(t) - \hat{\rho}(t)\omega_r(t) \rightarrow \infty$, gdzie $\omega_r(t) = k_T \tanh((a + bt)r(t))$ przyjmie wartość największą [24]. Stąd, jeśli $\rho \operatorname{sgn} \dot{\varphi}(t) \rightarrow \hat{\rho}_T \tanh((a + bt)r(t))$ i $u_b(t)$ jest funkcją ograniczającą z góry $\omega(t)$, to

$$\hat{\rho}(t) = -\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 e^{-\hat{T}_0|\dot{\varphi}(t)|} - \hat{\gamma}_3|\dot{\varphi}(t)| e^{-\hat{T}_0|\dot{\varphi}(t)|} - \hat{\gamma}_4|\dot{\varphi}(t)|^2 e^{-\hat{T}_0|\dot{\varphi}(t)|} \quad (4.13)$$

jest poszukiwaną estymacją parametru ρ . Estymację $\hat{\rho}(t)$ oblicza się w podobny sposób, jak przy szacowaniu parametrów równania (4.10), całkując następujący układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\gamma}}_1(t) &= \delta_4 |r(t)|, \\ \dot{\hat{\gamma}}_2(t) &= -\delta_5 |r(t)| e^{-\hat{T}_0|\dot{\varphi}(t)|}, \\ \dot{\hat{\gamma}}_3(t) &= -\delta_6 |r(t)| |\dot{\varphi}(t)| e^{-\hat{T}_0|\dot{\varphi}(t)|}, \\ \dot{\hat{\gamma}}_4(t) &= -\delta_7 |r(t)| |\dot{\varphi}(t)|^2 e^{-\hat{T}_0|\dot{\varphi}(t)|}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

w którym $\delta_{4...7} > 0$.

4.1.4. Regulacja prędkości obrotowej silnika sterowanego sygnałem napięciowym

W rzeczywistych aplikacjach silnik prądu stałego jest sterowany za pomocą sygnału napięciowego o stałej wartości lub zmieniającego się w czasie zgodnie z zadaną funkcją realizującą wymagany program. Modelując taki układ mechatroniczny należy rozszerzyć opis matematyczny wprowadzony w punkcie 4.1 o równanie dynamiki części elektrycznej [59]. Zestaw równań różniczkowych przyjmuje wtedy następującą postać uzupełnioną

$$J\ddot{\varphi}_f(t) + B\dot{\varphi}_f(t) + \tau_f(t) = \psi_f(t), \quad (4.15)$$

$$L_a\dot{\psi}_f(t) + R_a\psi_f(t) + c_b\dot{\varphi}_f(t) = v_f(t), \quad (4.16)$$

w której: indeks f wyróżnia zmienne stanu trójwymiarowego układu dynamicznego (uzupełnionego), modelującego silnik prądu stałego, L_a jest indukcyjnością całego obwodu twornika, $v_f(t)$ jest funkcją zmian w czasie sygnału napięciowego, wymaganego do realizacji zadania regulacji stałowartościowej lub nadążnej położenia kąтового lub prędkości obrotowej silnika.

Proponuje się następującą metodę regulacji prędkości obrotowej silnika sterowanego sygnałem napięciowym.

Regulacja napięcia w pełnym modelu elektromechanicznym badanego obiektu regulacji wymaga uwzględnienia równania (4.15). Wzajemna zależność stanów dynamicznych wyrażonych za pomocą zmiennych φ_f , ψ i ich pochodnych względem czasu, wprowadza zakłócenia do regulacji opracowanej dla uproszczonego modelu dynamicznego, opartego tylko na części mechanicznej. Jeśli opisana w punkcie 4.1.2 regulacja prędkości obrotowej za pomocą sygnału prądowego $\psi(t)$ jest prawidłowa i optymalna, to najlepszym sposobem na rozwiązanie zadania regulacji przy napięciowym sygnale sterującym jest kompensacja wpływu dynamiki opisanej równaniem (4.16). W tym celu, do równania (4.16) należy podstawić $v_f(t)$ obliczone z uwzględnieniem $\psi(t)$, wyrażającym prawo sterowania (4.5). Jest ono funkcją napięcia sterującego $v_f(t)$, które kompensuje wpływ zakłóceń regulacji nadążnej trójwymiarowego układu mechatronicznego (4.15), jak następuje

$$v_f(t) = L_a \dot{\psi}(t) + R_a \psi(t) + c_b \dot{\varphi}(t) + d(t). \quad (4.17)$$

Wzór (4.17) stosuje się przy założeniu, że $\psi(t)$ gwarantuje odporną regulację nadążną w uproszczonym modelu dynamicznym, opisanym równaniem (4.2). Dynamiczną rozbieżność zmiennymi stanu układów (4.16) i (4.17) skompensuje pewna funkcja $d(t)$ – człon proporcjonalno-różniczkujący.

Podstawienie zależności na v_f danej wzorem (4.17) do równania (4.16) prowadzi do wyrugowania wyrazów zależnych od czasu. Dla przykładu, inne niedokładności związane z błędami pomiaru zmiennych stanu lub błędami obliczeń numerycznych kompensuje człon dynamiczny $d(t)$. Jak zaobserwowano, pominięcie tego członu prowadzi do oscylacji prędkości obrotowej wokół zera i niestabilności odpowiedzi ustalonej. Dążąc do zwiększenia efektywności proponowanego algorytmu sterowania, wprowadza się dwuwymiarowy regulator proporcjonalno-różniczkujący i zamkniętą pętlę sterowania z ujemnym sprzężeniem zwrotnym od wyjścia obiektu regulacji. Stosując w równaniu (4.17) poniższą definicję regulatora

$$d(t) = k_1(\varphi_d(t) - \varphi_f(t)) + k_2(\dot{\varphi}_d(t) - \dot{\varphi}_f(t)), \quad (4.18)$$

otrzymuje się przy uwzględnieniu zależności (4.16) równanie równowagi dynamicznej w części elektrycznej obiektu regulacji, jak następuje

$$\begin{aligned} L_a (\dot{\psi}_f(t) - \dot{\psi}(t)) + R_a (\psi_f(t) - \psi(t)) + c_b (\dot{\varphi}_f(t) - \dot{\varphi}(t)) = \\ = k_1 (\varphi_d(t) - \varphi_f(t)) + k_2 (\dot{\varphi}_d(t) - \dot{\varphi}_f(t)). \end{aligned} \quad (4.19)$$

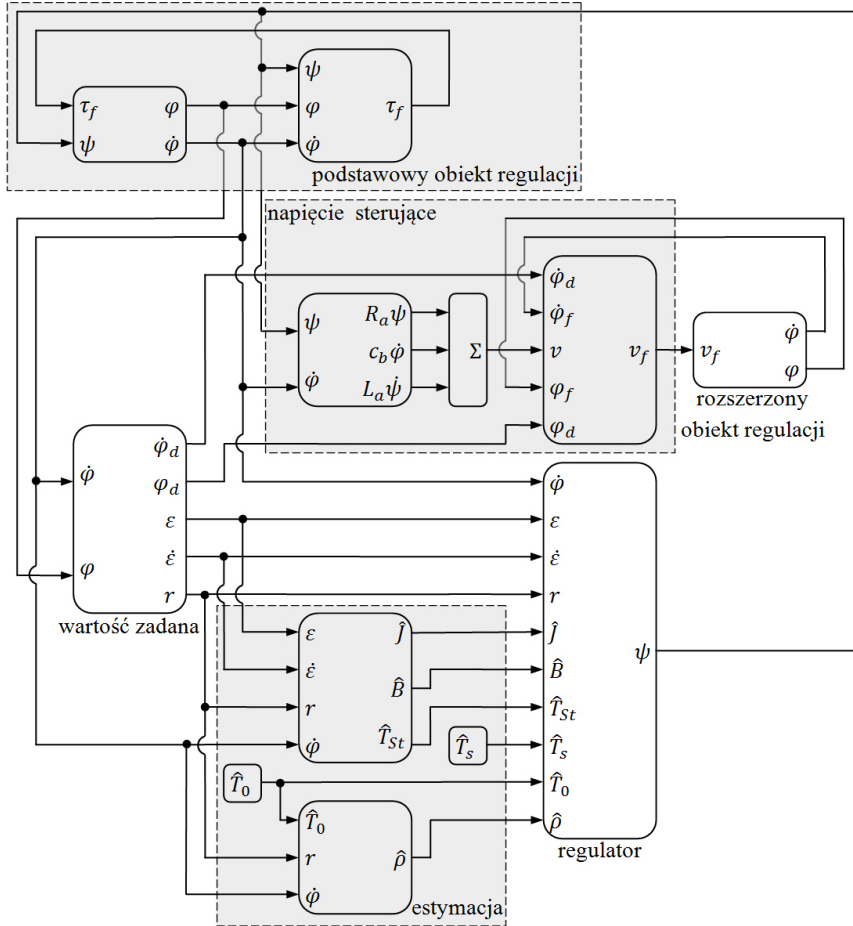
Równowagę dynamiczną można uzyskać kompensując równanie (4.16), ale należy przy tym spełnić następujące warunki: a) poprawnie dobrane parametry k_1 i k_2 układu regulacji powinny zapewniać równość obu stron

równania (4.19); b) nowe rozwiązanie $\psi_f(t)$ należy podstawiać w każdym kolejnym kroku całkowania do równania (4.15). Przy spełnieniu wymienionych warunków, rozwiązanie $\varphi_f(t)$ równania (4.15) będzie podążać za rozwiązaniem optymalnym $\varphi(t)$ równania (4.2). Podczas regulacji nadążnej zapamiętuje się bieżącą wartość $v_f(t)$, aby następnie wprowadzić ją na wejście napięciowe sterujące (zależnie od pożądanej funkcji zmian wartości zadanej) prędkością obrotową lub położeniem kątowym wirnika.

4.1.5. Symulacja numeryczna

Wydańność dwuetapowej regulacji nadążnej, mierzoną dokładnością odwzorowania zadanej funkcji zmian prędkości obrotowej można sprawdzić wykonując symulację numeryczną. Model dynamiczny obiektu regulacji opisują parametry elektromechaniczne wybranego silnika prądu stałego o symbolu PZTK 60-46 J. Zadanie sterowania polega na przeprowadzeniu regulacji nadążnej prędkości obrotowej silnika zgodnie z zadaną funkcją okresową (zaznaczoną na rysunku 4.2 linią przerywaną) zmian wartości zadanej $\varphi_d(t)$. Amplituda zadanej prędkości kątowej zwiększa się w czasie 0.2 [s] liniowo od 0 do 0.2 [rad/s], następnie w czasie 0.2 – 0.8 [s] utrzymuje wartość maksymalną, po czym maleje w czasie 0.2 [s] do zera. Podczas następnej sekundy cykl zmian amplitudy funkcji $\dot{\varphi}_d(t)$ powtarza się dla wartości ujemnych. Regulację nadążną prędkości kątowej wirnika wykonano w czasie 6 [s] obejmując trzy opisane wyżej okresy funkcji $\dot{\varphi}_d(t)$. Przyjęto następujące dane:

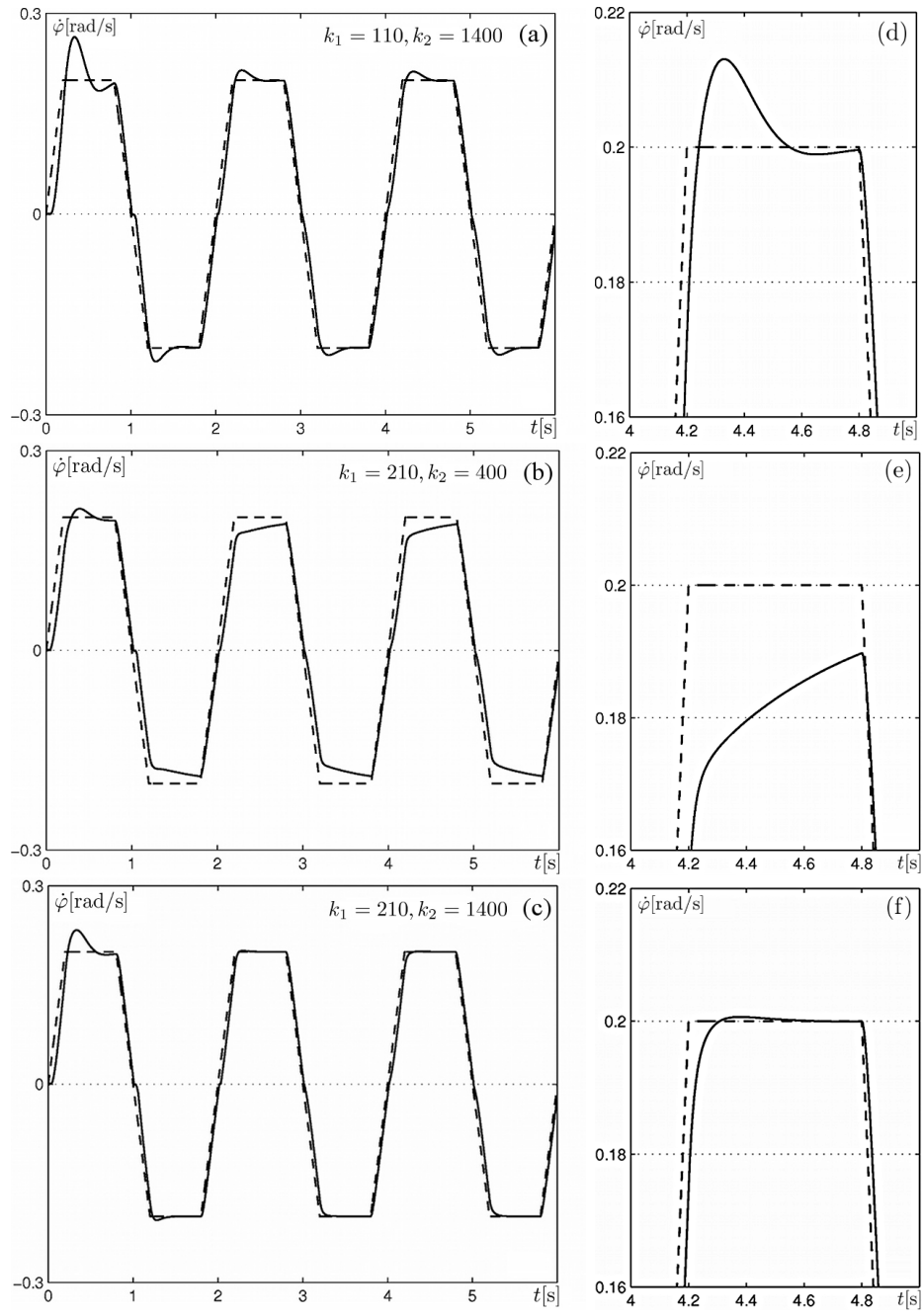
- stała momentu $c_m = 0.5$ [N · m/A];
- stała SEM obwodu twornika $c_b = 0.011$ [V/obr/min];
- rezystancja uzwojenia wirnika $R = 1.1$ [Ω];
- moment bezwładności wirnika $J_m = 2$ [kg · m²];
- indukcyjność obwodu twornika $L_a = 10^{-3}$ [H];
- współczynnik tarcia wiskotycznego $T_v = 8$ [N · m · s/rad];
- maksymalny moment tarcia statycznego $T_{sm} = 1.5$ [N · m];
- maksymalny moment tarcia statycznego związany z efektem Stribeck $T_{Stm} = 0.5$ [N · m];
- moment tarcia zależny od położenia $T_{1m} = 0.35$ [N · m];
- stała krzywej Stribeck $T_0 = 10$;
- stałe tarcia zależnego od położenia: $T_2 = 1$, $T_3 = 0.5$;
- współczynniki regulatora: $k_1 = 0.21 \cdot 10^3$, $k_2 = 1.40 \cdot 10^3$;
- stałe prawa sterowania $\delta_i = 9 \cdot i$, $i = 1 \dots 7$;
- początkowe wartości estymacji parametrów przy składnikach liniowych: $\hat{J}^{(0)} = 1$, $\hat{D}^{(0)} = 1$, $\hat{T}_s^{(0)} = 0.2$, $\hat{T}_{St}^{(0)} = 1$, $\hat{T}_0^{(0)} = 1$;
- początkowa wartość estymacji parametru przy składnikach nieliniowych: $\hat{\rho}^{(0)} = 0$;
- początkowe wartości zmiennych stanu: $\varphi^{(0)} = \dot{\varphi}^{(0)} = 0$, $\psi_f^{(0)} = 0$.



Rysunek 4.1. Schemat blokowy układu regulacji adaptacyjnej

Dokładne wartości niektórych parametrów nie są znane na początku symulacji i przyjmują wartości początkowe odpowiednich estymacji. Dodatkowo, nieciągły charakter sił tarcia znacząco wpływa na dynamikę układu regulacji.

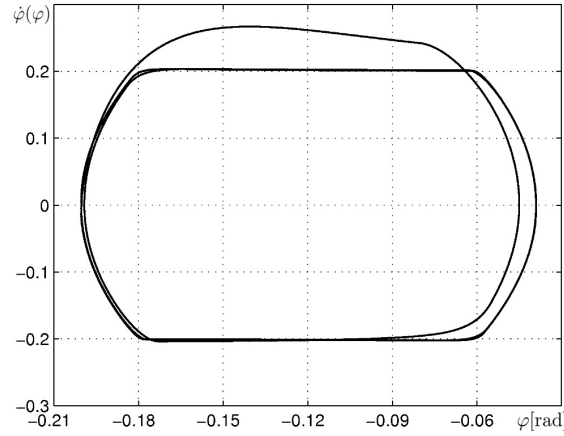
Na rysunku 4.2 widać, że przy pierwszym skoku amplitudy prędkości obrotowej do wartości zadanej 0.2 [rad/s], przebieg odpowiedzi obiektu regulacji wyraźnie odbiega od linii przerywanej. Występowanie takiego stanu przejściowego jest spowodowane niewłaściwymi wartościami estymowanych parametrów układu regulacji. Estymacje tych parametrów są w tym czasie na etapie zbieżności do wartości granicznych i konsekwencją tego jest chwilowy, duży uchyb dynamiczny. Na początku drugiego okresu, po czasie 2 [s] obie prezentowane trajektorie przebiegają bliżej siebie, potwierdzając skuteczność algorytmu sterowania. Po kolejnym okresie, przy prędkości



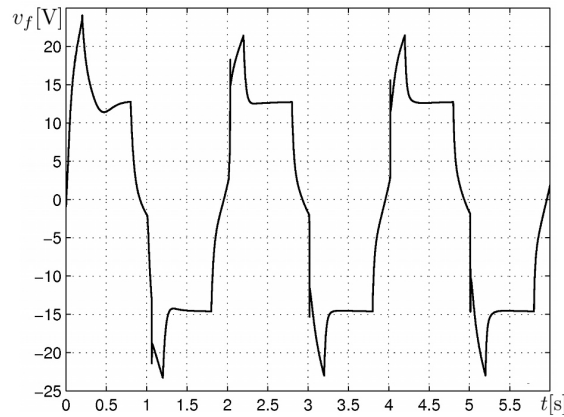
Rysunek 4.2. Zadana trajektoria prędkości kątowej $\dot{\varphi}_d(t)$ (linia przerywana) i odpowiadające jej odpowiedzi wyjściowe $\dot{\varphi}(t)$ (linia ciągła) obiektu regulacji

± 0.2 [rad/s] odpowiedź o charakterze skokowym modelowanego układu regulacji jest dobrze tłumiona i dopasowuje się gładko do krawędzi pożądanej trajektorii. Wykresy na rysunkach 4.2*d-f* wyraźnie pokazują różnice pomiędzy rozwiązaniami uzyskanymi dla trzech zestawów parametrów k_1 i k_2 .

Rysunek 4.2*f* pokazuje najdokładniejszą spośród zarejestrowanych odpowiedzi czasowych modelowanego układu.



Rysunek 4.3. Przecięcie trajektorii fazowej odpowiedzi dynamicznej zaprojektowanego układu regulacji płaszczyzną $(\varphi, \dot{\varphi})$



Rysunek 4.4. Zmiany sygnału napięciowego $v_f(t)$ na wejściu do obiektu regulacji

Przecięcie trajektorii fazowej pokazanej na rysunku 4.3 przedstawia inny widok odpowiedzi czasowej układu regulacji. W celu uzyskania krzywej zamkniętej (ograniczonej w kierunku osi prędkości kątowej liniami poziomymi $\dot{\varphi}(\varphi) = \pm 0.2$), funkcja zmian sygnału napięciowego $v_f(t)$ na wejściu do obiektu regulacji powinna być zbliżona do trajektorii czasowej pokazanej

na rysunku 4.4. Amplituda napięciowego sygnału sterującego wprowadzonego na wejście do obiektu regulacji zmienia się w sposób impulsowy przy zmianach kierunku ruchu obrotowego w chwilach czasowych $t = 1, 2, \dots$ [s].

Po wykonaniu wielu prób eksperymentalnych, przyjęto metodą prób i błędów przybliżone wartości parametrów k_1 i k_2 , wykorzystane w drugiej części algorytmu sterowania. Można prowadzić dalsze optymalizacje lub opracować inny sposób ich doboru, ponieważ wyraźnie wpływają one na dopasowanie odpowiedzi czasowej układu regulacji do lokalnych zmian wartości zadanej o charakterze skokowym.

Zastosowany algorytm sterowania dobrze sprawdza się w badanym układzie dynamicznym, a przy tym zapewnia odporną regulację nadążną. Może być stosowany do rozwiązywania innych zadań z zakresu kształtowania odpowiedzi czasowych układów nieciągłych o wielu stopniach swobody. Wykorzystując metodę opartą na wprowadzeniu powierzchni utwierdzenia, zaproponowano drugi etap optymalizacji opisany w punkcie 4.1.4. Prowadząc eksperyment numeryczny, przeprowadzono symulację odpornej regulacji nadążnej nieliniowego układu dynamicznego, zapewniając kompensację efektów nieliniowych związanych z tarciem suchym. Zagwarantowanie stabilności zamkniętej pętli układu regulacji wymaga estymacji funkcji $u_b(t)$ ograniczającej z góry momenty sił tarcia związane z niektórymi efektami nieliniowymi.

4.2. Aktywna regulacja odkształcenia klatki piersiowej

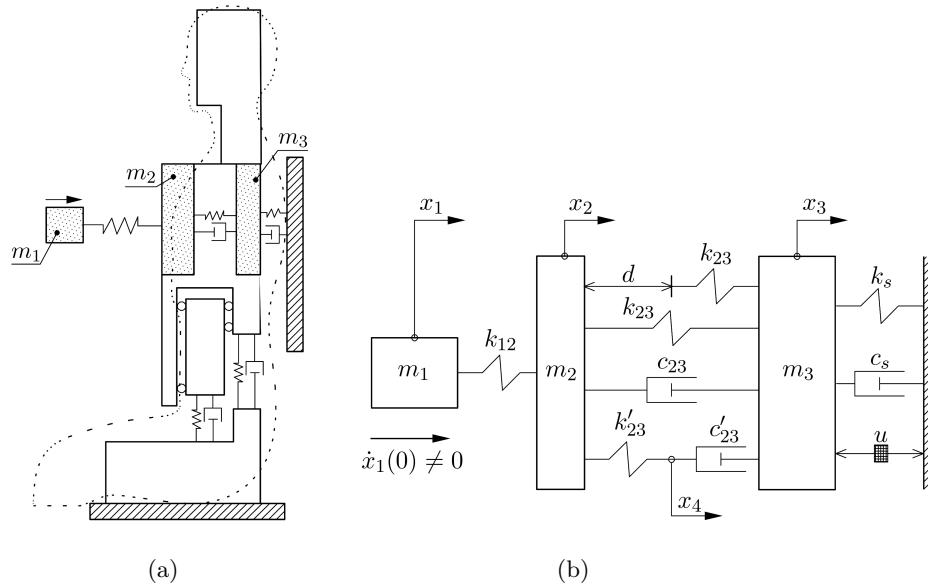
Metody aktywnej regulacji można adoptować do optymalizacji układów mechanicznych lub biomechanicznych o wielu stopniach swobody wymuszanych w sposób impulsowy. Sterowanie odpowiedzią dynamiczną struktur tego typu zyskuje szersze znaczenie w kontekście rozwoju technik optymalizacyjnych i metod komputerowych. Są one rozwijane i testowane na komputerach wyposażonych w szybkie, wielordzeniowe i wielowątkowe procesory współpracujące z wydajnymi układami graficznymi i wysokoczęstotliwościowymi pamięciami, pozwalającymi na dynamiczne alokowanie liczb i tablic wielowymiarowych.

W tym rozdziale opisano metodykę opartą na zastosowaniu siły sterującej, zmniejszającej względną deformację modelu mechanicznego klatki piersiowej człowieka wywołaną uderzeniem sprężystym pochodzącym od siły zewnętrznej. Wirtualny wzbudnik działający siłą sterującą, zmniejszającą odkształcenie analizowanego układu dynamicznego o trzech stopniach swobody, umieszczono pomiędzy masą reprezentującą plecy człowieka a nieruchomym sztywnym oparciem. Zmniejszenie przemieszczeń wewnątrz klatki piersiowej oszacowano rozwiązując zagadnienie optymalizacji liniowo-kwadratowej wskaźnika wydajności. Rozwiązanie dynamiki badanego układu,

równania Rccatiego i minimalizację funkcji celu $J(t_0, t_k)$ wykonano za pomocą procedur numerycznych napisanych w języku *Python*. Ponadto, oszacowano parametry regulacji kształtujące charakterystykę odpowiedzi optymalnej modelu klatki piersiowej z dołączonym wzbudnikiem, zaproponowano technikę obliczania funkcji celu w układzie nieciągłym na podstawie pewnej estymacji wektora wzmocnienia proporcjonalnego, zamieszczono wykresy odpowiedzi czasowych układu swobodnego i jego odpowiednika z włączoną siłą sterującą, jak też inne wykresy porównawcze.

4.2.1. Opis matematyczny

Rysunek 4.5a przedstawia uproszczony model biomechaniczny tułowia człowieka w pozycji wyprostowanej, gdzie w stosunku do przypadku z rysunku 2.14, podparcie w postaci masy m_4 zostało utwierdzone. Wzbudnik umieszczony pomiędzy tylną ścianą klatki piersiowej a tym podparciem generuje siłę sterującą u . Masy oznaczone przez m_1 , m_2 i m_3 wraz z połączeniami elastycznymi pomiędzy nimi wyróżniają rozważany model klatki piersiowej pokazanej na rysunku 4.5b.



Rysunek 4.5. Uproszczony model biomechaniczny tułowia człowieka w pozycji wyprostowanej (a) i rozważany model klatki piersiowej (b) z masą m_1 uderzającą od jej przedniej strony

Wychodząc z zasady równowagi sił w przyjętym układzie dynamicznym, zapisuje się trzy równania różniczkowe drugiego i jedno równanie pierwszego rzędu, opisujące zmiany położenia x_4 . W kolejnym kroku można przejść do

modelu matematycznego wyrażonego za pomocą 7 równań różniczkowych pierwszego rzędu, jak następuje

$$\dot{x}_i = x_{i+4}, \quad \text{przy } i = 1, 2, 3, \quad (4.20)$$

$$\dot{x}_4 = x_7 + \frac{\bar{k}_{23}}{\bar{c}_{23}}(x_2 - x_4), \quad (4.21)$$

$$\dot{x}_5 = \frac{1}{m_1}(k_{12}(x_2 - x_1)), \quad (4.22)$$

$$\dot{x}_6 = \frac{1}{m_2}(k_{12}(x_1 - x_2) - k_{23}(x_2 - x_3) - \bar{k}_{23}(x_2 - x_4) + \\ - c_{23}(x_6 - x_7)), \quad (4.23)$$

$$\dot{x}_7 = \frac{1}{m_3}(k_{23}x_2 - (k_{23} + k_s)x_3 + c_{23}x_6 - (c_{23} + \bar{c}_{23})x_7 + \\ - c_s x_7 + \bar{c}_{23}x_8 - u), \quad (4.24)$$

gdzie: $m_1 \dots m_3$ oznaczają masy wyróżnionych podukładów, $\bar{k} = [k_{12}, k_{23}, k'_{23}, k_s]$, $\bar{c} = [c_{23}, c'_{23}, c_s]$ są odpowiednio wektorami parametrów sztywności i tłumienia, $\bar{x}_d = [x_1 \dots x_4]^T$, $\bar{x}_v = [x_5 \dots x_7]^T$ są odpowiednio wektorami przemieszczeń i prędkości. Należy zaznaczyć, że zmiany położenia x_4 , określonego w miejscu połączenia elementu sprężystego k'_{23} i tłumiącego c'_{23} są opisane za pomocą jednego równania różniczkowego pierwszego rzędu, dlatego model dynamiczny obiektu sterowania określa 7-wymiarowy wektor stanu $\bar{x} = [\bar{x}_d, \bar{x}_v]^T$.

Badany układ charakteryzują własności reologiczne (R1)-(R3) opisane w punkcie 2.3.1. Nieciągłość parametrów sztywności i tłumienia połączeń wewnątrz klatki piersiowej, jak też zależność tych parametrów od czasu wymaga opracowania nietypowego układu sterowania.

4.2.2. Zagadnienie optymalizacji liniowo-kwadratowej

Wyprowadzenie modelu dynamicznego wiąże się często z zaawansowanym opisem matematycznym i optymalizacją uwzględniającą pasywne lub aktywne sterowanie położeniem tych części ciała, które są najbardziej narażone na uszkodzenie.

Ten rozdział zawiera opis metody optymalizacji liniowo-kwadratowej. Zastosowanie tej metody doprowadziło do zmniejszenia odkształcenia klatki piersiowej człowieka poddanej uderzeniu sprężystemu masy równej 1.6 [kg]. Wybrana metoda optymalizacyjna jest dobrze poznana i opisana [2, 68], ale z uwagi na niektóre parametry mechaniczne (tutaj zależne od czasu) badanego układu dynamicznego, zmodyfikowano ją w zakresie szacowania wartości wektora wzmocnień proporcjonalnych zamkniętej pętli sterowania. Inną zaletą tej metody optymalizacji jest jej odporność na niedokładność oszacowania macierzy współczynników wagowych funkcji celu, nazywanej

niekiedy funkcjonalem kosztu. Ponadto, jeśli układ sterowania należy do pewnej klasy układów opisanych w pracach [23, 45], to wspomniana odporność jest zagwarantowana. Warto zaznaczyć, że w istniejącej literaturze nie znaleziono publikacji podejmującej problematykę optymalizacji liniowo-kwadratowej stanu układu mas połączonych elastycznie za pomocą łączników reologicznych. Modelowanie dynamiczne klatki piersiowej człowieka poddanej uderzeniu sprężystemu lekkiej masy, rozpatrzono w postaci elastycznie połączonych brył sztywnych o masach skupionych w punktach. Takie podejście stanowi duże uproszczenie układu rzeczywistego, ale jest użyteczne w aspekcie projektowania i testowania struktur regulatorów aktywnych.

Strategię sterowania oparto na modyfikacji standardowej metody optymalizacji liniowo-kwadratowej funkcji celu dla układu sterowania z ujemnym sprzężeniem zwrotnym. Macierz współczynników wzmocnienia proporcjonalnego obliczono na podstawie numerycznego rozwiązania równania Riccatiego. Modyfikacja uwzględnia kompensację zachowań dynamicznych o charakterze nieciągłym, wywołanych skokowymi zmianami parametrów c_{23} i k_{23} , które modelują własności organów wewnętrznych klatki piersiowej poddanej ściskaniu lub rozciąganiu.

Szczególne przypadki opisywanej w dalszej części strategii sterowania rozpatrzono w pracach [15, 57, 58]. Reprezentacja modelowanego układu dynamicznego w przestrzeni zmiennych stanu przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= \mathbf{A}\bar{x} + \mathbf{B}\bar{u} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\bar{k}_{23}}{\bar{c}_{23}} & 0 & \frac{-\bar{k}_{23}}{\bar{c}_{23}} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_{12}}{m_1} & \frac{k_{12}}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_{12}}{m_2} & \frac{-a_{62}}{m_2} & \frac{k_{23}}{m_2} & \frac{\bar{k}_{23}}{m_2} & 0 & \frac{-c_{23}}{m_2} & \frac{c_{23}}{m_2} \\ 0 & \frac{-a_{72}}{m_3} & \frac{-a_{73}}{m_3} & \frac{-k_{23}}{m_3} & 0 & \frac{c_{23}}{m_3} & \frac{-a_{77}}{m_3} \end{bmatrix} \bar{x} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{m_3} \end{bmatrix}^T \bar{u}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\bar{y} = \mathbf{C}\bar{x} + \mathbf{D}\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}, \quad (4.26)$$

$$\bar{x}(t_0) = [0, 0, 0, 0, x_5(0) \neq 0, 0], \quad (4.27)$$

w której: $\bar{x} = [x_1 \dots x_7]^T$ jest wektorem stanu, $\bar{u} = u$ jest wektorem wejścia sterującego, macierze reprezentacji to: $\mathbf{A}$ – macierz stanu układu, $\mathbf{B}$ – macierz sygnałów sterujących (wejściowych), $\mathbf{C}$ – macierz sygnałów wyjściowych, $\mathbf{D}$ – macierz transmisyjna, $a_{62} = k_{12} + a_{72}$, $a_{72} = k_{23} + \bar{k}_{23}$,

$a_{73} = k_{23} + k_s$, $a_{77} = c_{23} + c_s$ są współczynnikami stałymi. Niezerowa prędkość początkowa $x_5(0)$ impaktora (masy uderzającej, związanej sprężystością k_{12} z modelem dynamicznym) stanowi wymuszenie zewnętrzne.

Zadanie sterowania polega na znalezieniu funkcji sterującej $u(t)$, która w skończonym czasie $t \in [t_0; t_k]$ i przy określonej postaci macierzy wagowych minimalizuje funkcję celu daną zależnością

$$\begin{aligned} J(t_0, t_k) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{u}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{u}(t) \end{bmatrix} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_7 \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & q_7 & \\ & & & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_7 \\ u \end{bmatrix} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} \left(\sum_{i=1}^{n=7} (q_i x_i^2(t)) + r u^2(t) \right) dt, \end{aligned} \quad (4.28)$$

w której macierz jakości $\mathbf{Q}$, mająca niezerowe elementy tylko na głównej przekątnej i macierz reakcji $\mathbf{R} = r$, zredukowana do stałej wartości skalarnej są macierzami wagowymi metody optymalizacji liniowo-kwadratowej. Numeryczne obliczenie całki J można wykonać za pomocą procedury całkowania metodą trapezów. Należy zauważyć, że $\bar{x}$ jest wektorem stanu w układzie sterowania, natomiast parametry k_s i c_s w równaniu (4.24) zastępuje funkcja sterująca $u(t)$. Można to przybliżyć w taki sposób, że własności sprężysto-tłumiące pomiędzy nieruchomym oparciem a tylną stroną klatki piersiowej (plecami), zastępuje się elementem aktywnym zdolnym do wygenerowania szybkiej, kontrolowanej reakcji w odpowiedzi na uderzenie sprężyste w klatkę piersiową od jej przedniej strony.

Na podstawie ogólnej teorii sterowania [48], regulator gwarantujący minimum funkcji kosztu J danej równaniem (4.28) wyraża wzór

$$u(t) = -r\mathbf{B}^T \mathbf{K}_x \bar{x}_f(t). \quad (4.29)$$

Równanie (4.29) zawiera oznaczenie macierzy Riccatiego $\mathbf{K}_x$ o wymiarze (7×7) . Macierz $\mathbf{K}_x$ jest symetryczna względem głównej przekątnej, dlatego uzyskuje się 28 nieznanymi elementów tej macierzy, tj. $\xi_{21} = \xi_{12}$, $\xi_{31} = \xi_{13}$, itd. Można zauważyć, że poszukiwana siła sterująca u jest proporcjonalna do rozwiązania $\bar{x}_f$ układu swobodnego. Estymację elementów macierzy $\mathbf{K}_x$, a tym samym estymację siły sterującej u wyznacza się, stosując zbieżną procedurę numerycznego całkowania 28 równań różniczkowych pierwszego rzędu, zapisanych w postaci macierzowej

$$\left(\dot{\mathbf{K}}_x + \mathbf{K}_x \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{K}_x - \mathbf{K}_x \mathbf{B} r^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}_x + \mathbf{Q} \right) \bar{x}_f(t) = 0. \quad (4.30)$$

Rozwinięcie postaci macierzowej (4.30) prowadzi do otrzymania układu równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu, jak następuje

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_{11} &= (2k_{12}(\xi_{15}e_7 - \xi_{16}e_6) + \xi_{17}^2e_1)/e_5 - q_1, \\
\dot{\xi}_{12} &= (c'_{23}k_{12}(\xi_{25}e_7 - \xi_{26}e_6) + \xi_{27}\xi_{17}e_9 - e_4(\xi_{14}e_{10} + \xi_{15}c'_{23}e_8))/(c'_{23}e_5) + \\
&\quad - (\xi_{16}e_{11}e_{14} + \xi_{17}e_9e_{13})/(c'_{23}e_5), \\
\dot{\xi}_{13} &= (k_{12}(\xi_{35}e_7 - \xi_{36}e_6) - m_1m_3r(\xi_{16}k_{23}(t)m_3 - \xi_{17}m_2e_{15}))/e_5 + \\
&\quad + (\xi_{37}\xi_{17}e_1)/e_5, \\
\dot{\xi}_{14} &= \xi_{45}k_{12}e_7m_1(\xi_{46}k_{12}e_3 + \xi_{47}\xi_{17}m_2)/e_5 + \\
&\quad - (m_1k'_{23}e_4(\xi_{14}e_2 + c'_{23}(\xi_{16}m_3 - \xi_{17}m_2)))/(c'_{23}e_5), \\
\dot{\xi}_{15} &= (\xi_{55}k_{12}e_7 - \xi_{56}k_{12}e_6 + \xi_{57}\xi_{17}e_1)/e_5 - \xi_{11}, \\
\dot{\xi}_{16} &= (\xi_{56}k_{12}e_7 - m_1(\xi_{66}k_{12}e_3 + \xi_{67}\xi_{17}m_2))/e_5 - \xi_{16}c_{23}(t)e_4m_1m_3/e_5 + \\
&\quad - \xi_{17}c_{23}(t)e_4m_1m_2/e_5 - \xi_{12}, \\
\dot{\xi}_{17} &= (\xi_{57}k_{12}e_7 - m_1(\xi_{67}k_{12}e_3 + \xi_{77}\xi_{17}m_2))/e_5 + \\
&\quad + m_1e_4(\xi_{14}e_2 + \xi_{16}c_{23}(t)m_3 - \xi_{17}m_2e_{12}))/e_5 - \xi_{13}, \\
\dot{\xi}_{22} &= -(2\xi_{25}k_{12}e_7 - m_1(2\xi_{26}e_3e_{14} + m_2\xi_{27}^2 - 2\xi_{27}e_4e_{13}))/e_5 + \\
&\quad - 2m_1\xi_{24}k'_{23}e_3/(c'_{23}e_5) - q_1, \\
\dot{\xi}_{23} &= \xi_{26}k_{23}(t)e_6/e_5 + (\xi_{27}e_9(\xi_{37} - e_4e_{15}) + e_4(\xi_{34}e_{10} + \xi_{35}c'_{23}e_8))/(c'_{23}e_5) + \\
&\quad - e_4(\xi_{36}e_{11}e_{14} - \xi_{37}e_9e_{13})/(c'_{23}e_5), \\
\dot{\xi}_{24} &= -(\xi_{26}c'_{23}k'_{23}e_6 - \xi_{27}e_9(\xi_{47} + k'_{23}e_4) + e_4(\xi_{44}e_{10} + \xi_{45}c'_{23}e_8))/(c'_{23}e_5) + \\
&\quad - m_1e_4(\xi_{46}m_3e_{14} - \xi_{47}m_2e_{13})/e_5 + \xi_{24}k'_{23}e_2/(c'_{23}e_5), \\
\dot{\xi}_{25} &= -(\xi_{45}e_{10} + \xi_{55}c'_{23}e_8 - \xi_{56}e_{11}e_{14} + \xi_{57}e_9e_{13})/(c'_{23}m_1m_2m_3) + \\
&\quad - \xi_{12} + \xi_{27}\xi_{57}/e_3, \\
\dot{\xi}_{26} &= \xi_{26}e_6c_{23}(t)/e_5 + (\xi_{27}e_9(\xi_{67} - c_{23}(t)e_4) - e_4\xi_{46}e_{10})/(c'_{23}e_5) + \\
&\quad - e_4(\xi_{56}e_8 - m_1(\xi_{66}m_3e_{14} - \xi_{67}m_2e_{13} - \xi_{22}e_2))/e_5, \\
\dot{\xi}_{27} &= -\xi_{26}e_6c_{23}(t)/e_5 - (\xi_{27}e_9(\xi_{77} + e_4e_{12}) + e_4\xi_{47}e_{10})/(c'_{23}e_5) + \\
&\quad + e_4(\xi_{57}e_8 - m_1(\xi_{67}m_3e_{14} - \xi_{77}m_2e_{13} - e_2(\xi_{23} + \xi_{24}))) / e_5, \\
\dot{\xi}_{33} &= -(2\xi_{36}k_{23}(t)e_3 - \xi_{37}m_2(\xi_{37} + 2e_4e_{15}))/e_7 - q_2, \\
\dot{\xi}_{34} &= \xi_{34}k'_{23}/c'_{23} - (\xi_{36}k'_{23}e_3 - \xi_{37}m_2(\xi_{47} + k'_{23}e_4) + e_4\xi_{46}k_{23}(t)m_3)/e_7 + \\
&\quad - e_4\xi_{47}m_2e_{15}/e_7, \\
\dot{\xi}_{35} &= \xi_{37}\xi_{57}/e_3 - (\xi_{56}k_{23}(t)m_3 - \xi_{57}m_2e_{15})/e_2 - \xi_{13}, \\
\dot{\xi}_{36} &= (\xi_{36}c_{23}(t)e_3 + \xi_{37}m_2(\xi_{67} - c_{23}(t)e_4))/e_7 - e_4\xi_{66}k_{23}(t)m_3/e_7 + \\
&\quad - e_4m_2(\xi_{67}e_{15} - \xi_{23}m_3)/e_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_{37} &= -\xi_{33} - \xi_{34} - (\xi_{36}c_{23}(t)e_3 - \xi_{37}m_2(\xi_{77} + e_4e_{12}))/e_7 + \\
&\quad - e_4(\xi_{67}k_{23}(t)m_3 - \xi_{77}m_2e_{15})/e_7, \\
\dot{\xi}_{44} &= (2\xi_{44}k'_{23}e_7 - c'_{23}(2\xi_{46}k'_{23}e_3 - \xi_{47}m_2(\xi_{47} + 2k'_{23}e_4)))/(c'_{23}e_7) - q_3, \\
\dot{\xi}_{45} &= \xi_{45}k'_{23}/c'_{23} + \xi_{47}\xi_{57}m_2/e_7 - e_4(\xi_{56}k'_{23}m_3 - m_2(\xi_{57}k'_{23} - \xi_{14}m_3))/e_7, \\
\dot{\xi}_{46} &= \xi_{46}e_3c_{23}(t)/e_7 + k'_{23}m_2/(c'_{23}e_7) + \xi_{47}m_2(\xi_{67} - c_{23}(t)e_4)/e_7 + \\
&\quad - e_4(\xi_{66}k'_{23}m_3 - m_2(\xi_{67}k'_{23} - \xi_{24}m_3))/e_7, \\
\dot{\xi}_{47} &= -\xi_{34} - \xi_{44} - (\xi_{46}c_{23}(t)e_3 + \xi_{47}m_2(\xi_{77} + e_4e_{12}))/e_7 + \\
&\quad + e_4\xi_{47}m_2k'_{23}m_3/(c'_{23}e_7) - k'_{23}e_4(\xi_{67}m_3 - \xi_{77}m_2)/e_7, \\
\dot{\xi}_{55} &= \xi_{57}^2/e_3 - 2\xi_{15} - q_4, \\
\dot{\xi}_{56} &= -\xi_{25} - (\xi_{56}c_{23}(t)e_3 + m_2(\xi_{57}(\xi_{67} - c_{23}(t)e_4) - \xi_{16}e_3))/e_7, \\
\dot{\xi}_{57} &= -\xi_{35} - \xi_{45} - (\xi_{56}c_{23}(t)e_3 - m_2(\xi_{57}(\xi_{77} + e_4e_{12}) - \xi_{17}e_3))/e_7, \\
\dot{\xi}_{66} &= -2\xi_{26} + (2\xi_{66}c_{23}(t)e_3 + \xi_{67}m_2(\xi_{67} - 2c_{23}(t)e_4))/e_7 - q_5, \\
\dot{\xi}_{67} &= -\xi_{27} - \xi_{36} - \xi_{46} - \xi_{66}c_{23}(t)e_3/e_7 + \\
&\quad + (\xi_{67}(\xi_{77}m_2 + e_4(m_2(c_{23}(t) + c_s) + m_3)) - \xi_{77}c_{23}(t)e_2r)/e_7, \\
\dot{\xi}_{77} &= -2(\xi_{37} + \xi_{47}) - (2\xi_{67}c_{23}(t)e_3 - \xi_{77}m_2(\xi_{77} + 2e_4e_{12}))/e_7 - q_6,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

gdzie: $e_1 = m_1m_2$, $e_2 = m_2m_3$, $e_3 = m_3^2r$, $e_4 = m_3r$, $e_5 = e_1m_3^2r$, $e_6 = m_1m_3^2r$, $e_7 = m_2m_3^2r$, $e_8 = k_{12}e_2$, $e_9 = c'_{23}e_1$, $e_{10} = k'_{23}e_1m_3$, $e_{11} = c'_{23}m_1m_3$, $e_{12} = c_{23}(t) + c_s$, $e_{13} = k_{23}(t) + k'_{23}$, $e_{14} = k_{12} + e_{13}$, $e_{15} = k_{23}(t) + k_s$. Rozwiązując układ (4.31) przy zerowych warunkach początkowych, oblicza się w czasie pozwalającym na ustalenie wartości granicznych wszystkie współczynniki ξ_{ij} ($i, j = 1 \dots 7$) macierzy $\mathbf{K}_x$.

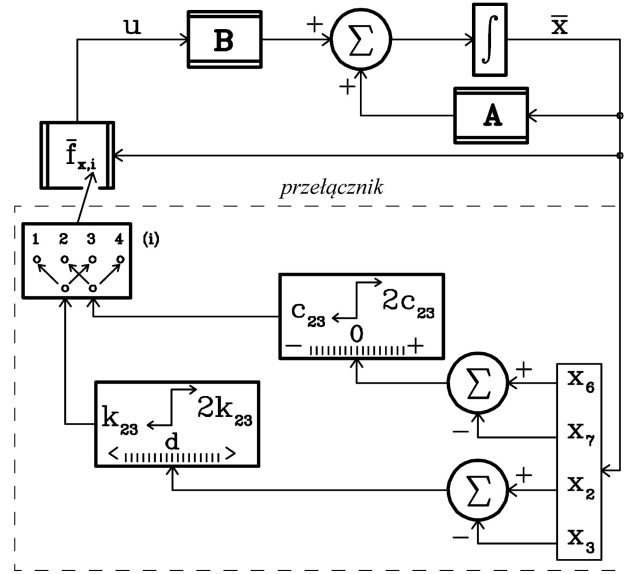
W kolejnym kroku równanie (4.29) można wykorzystać do obliczenia sygnału sterującego

$$u(t) = \bar{f}_x \cdot \bar{x}_f(t) = \frac{\bar{\xi}_7}{rm_3} \cdot \bar{x}_f(t) = \frac{1}{rm_3} \sum_{i=1}^7 \xi_{i,7} x_{f,i}, \tag{4.32}$$

gdzie $\bar{f}_x = -r\mathbf{B}^T\mathbf{K}_x$ jest wzmocnieniem proporcjonalnym ujemnej pętli sprzężenia zwrotnego.

W tym przypadku, wprowadzona modyfikacja dotycząca wyżej opisanej metody opiera się na następującym spostrzeżeniu. Z uwagi na reologiczny charakter połączeń występujących pomiędzy masami badanego układu dynamicznego, wartości wektora wzmocnień $\bar{f}_x$ powinny przełączać się pomiędzy czterema zbiorami w sposób przedstawiony na schemacie 4.6.

Schemat blokowy przyjętego układu sterowania ze wzmocnieniem proporcjonalnym od pełnego wektora stanu pokazano na rysunku 4.6. Oblicze-



Rysunek 4.6. Schemat blokowy standardowej metody optymalizacji liniowo-kwadratowej odpowiedzi ciągłych układów sterowania z dodatkowym układem przełączającym i -ty wektor wzmocnienia $\bar{f}_x$, umieszczony na linii sprzężenia zwrotnego

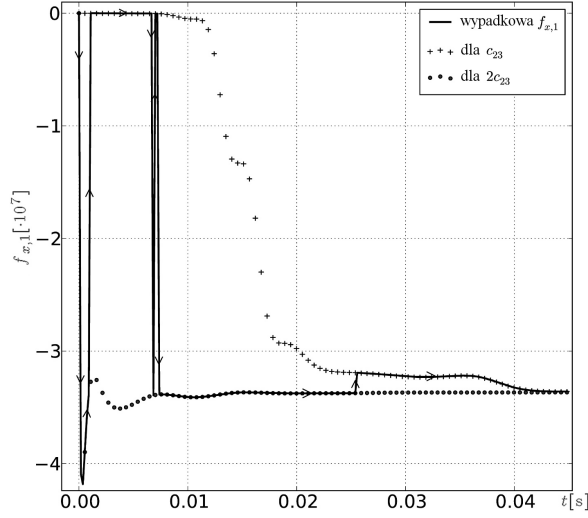
nie wektora sterowania u jest poprzedzone wyborem odpowiedniej składowej i wektora $\bar{f}_{x,i}$. Z kolei ten wybór jest uwarunkowany aktualną różnicą położenia x_r i znakiem prędkości względnej v_r . Z powodu dwóch dwustanowych bloków przełączających, są możliwe 4 kombinacje parametrów opisujących własności reologiczne badanego układu biomechanicznego, tj. $[k_{23}, c_{23}]$, $[k_{23}, 2c_{23}]$, $[2k_{23}, c_{23}]$ i $[2k_{23}, 2c_{23}]$.

Przyjęte w następnym podrozdziale parametry układu i prędkość początkowa impaktora powodują, że zawsze w trakcie symulacji $x_r > d$. Dlatego równanie macierzowe Riccatiego związane ze sterowanym układem dynamicznym jest rozwiązywane tylko 2 razy (w tym przypadku, pomija się ostatnie dwie z czterech kombinacji przełączeń). Zasada przełączeń przebiega według następującego schematu. Jeżeli w pewnym kroku podczas całkowania numerycznego równań różniczkowych układu dynamicznego z dodatkowym sterowaniem u , wartość prędkości względnej v_r zmienia znak, to pierwszy składnik wektora tłumienia $\bar{c}$ przełącza się pomiędzy wartościami c_{23} i $2c_{23}$, wprowadzając nieciągłą zmianę wzmocnienia proporcjonalnego. Poprawności przyjętej metodyki weryfikuje eksperyment numeryczny opisany w kolejnym punkcie.

4.2.3. Symulacja numeryczna

W modelu numerycznym badanego układu (swobodnego i poddanego sterowaniu) przyjęto następujący zestaw parametrów: $m_1 = 1.6$, $m_2 = 0.45$, $m_3 = 27$ [kg], $k_{12} = 281$, $k_{23} = 26.3$, $\bar{k}_{23} = 13.2$, $k_s = 10 \cdot 10^3$ [N/m], $c_{23} = 1.23$, $\bar{c}_{23} = 0.18$, $c_s = 0.11 \cdot 10^3$ [Ns/m], $d = 3.8$ [cm] i warunków początkowych: $\bar{x}_f(t_0) = [0, 0, 0, 0, 13.9, 0, 0, 0]$, $t_0 = 0$.

Pierwszy eksperyment polega na sprawdzeniu charakteru przełączeń wektora $\bar{f}_x$. Na rysunku 4.7 pokazano początkowe 250 iteracji (w czasie $t_k = 0.045$ [s]) pierwszego elementu wektora $\bar{f}_x$. Widoczne są zmiany o charakterze przełączającym, zachodzące pomiędzy dwoma wykresami punktowymi.



Rysunek 4.7. Wykres czasowy zmian pierwszego elementu wektora wzmocnienia. Liniami punktowymi zaznaczono charakterystyki czasowe wzmocnienia $f_{x,1}$, odpowiadające dwóm wartościom parametru tłumienia c_{23} i $2c_{23}$

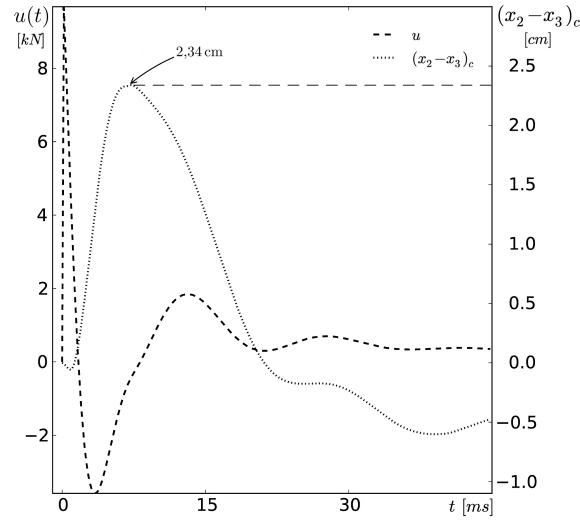
Na podstawie wyników uzyskanych z przeprowadzonych obliczeń numerycznych, 60. iteracja procedury optymalizacyjnej (w czasie 0.0108 [s]) daje minimalną wartość $J_{\min}$ funkcji kosztu. Na charakterystyce czasowej zmian wektora wzmocnienia (zaznaczonej na rysunku 4.7 linią ciągłą), odpowiada ona pierwszemu elementowi wektora wzmocnienia $\bar{f}_{x,1} = -3.40e7$. W tabeli 2 zawarto składowe tego wektora. Są one zależne od znaku prędkości względnej v_r . W kolejnej symulacji numerycznej wykonywanej z krokiem $h = 1.8e - 4$, optymalna wartość $\bar{f}_{x,1}$ gwarantuje minimum funkcji kosztu $J_{\min} = 1.39e7$ (por. z rysunkiem 4.9).

Ze względu na krótki czas ustalania się odpowiedzi impulsowej, prawo sterowania powinno być realizowane przez szybki mechanizm (wzbudnik)

Tablica 2. Składowe wektora wzmocnienia $f_{x,i}$, przy $i = 1 \dots 7$ w iteracji $j = 60$ rozwiązania numerycznego w zamkniętym układzie sterowania

$j = 60$	$i = 1 \dots 7$
przy $c_1 = c_{23}$ $\bar{f}_{x,i} =$	$[-3.40e7, 3.66e7, -3.89e6, 1.34e6, -2.81e3, 1.57e5, -1.53e5]$
przy $c_1 = 2c_{23}$ $\bar{f}_{x,i} =$	$[-8.35e6, 9.30e6, 6.40e5, -3.12e5, 8.28e3, 4.40e3, -1.28e4]$

generujący siłę o charakterystyce $u(t)$. Tę zależność przedstawiono na rysunku 4.8 wraz z odpowiadającą jej zmianą odkształcenia względnego x_c .

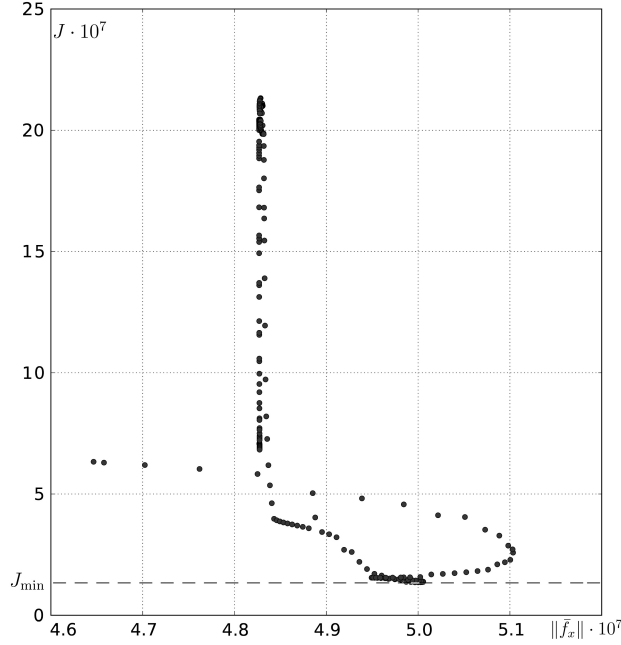


Rysunek 4.8. Charakterystyka czasowa $u(t)$ i odpowiadające jej odkształcenie względne $x_c = (x_2 - x_3)_c$ klatki piersiowej. Końcowy czas obserwacji został ustalony na $t_k = 40$ [ms]

Wartość maksymalną 2.34 [cm] na wykresie funkcji $x_c(t)$ poprzedza narastanie amplitudy siły sterującej $u(t)$, której wartość zmienia się w zakresie od -4 do 10 [kN]. W praktyce, ten czas mógłby być dłuższy, np. ze względu na opóźnienie mechanizmu wymuszającego i masy klatki piersiowej wymuszonej siłą impulsową. Eksperyment numeryczny potwierdził, że testowana metoda może być stosowana do wyznaczenia czasowej charakterystyki odpowiedzi elementu wykonawczego, umieszczonego pomiędzy oparciem a tylną ścianą klatki piersiowej.

Na rysunku 4.9 pokazano za pomocą punktów zbiór 246 wartości funkcji

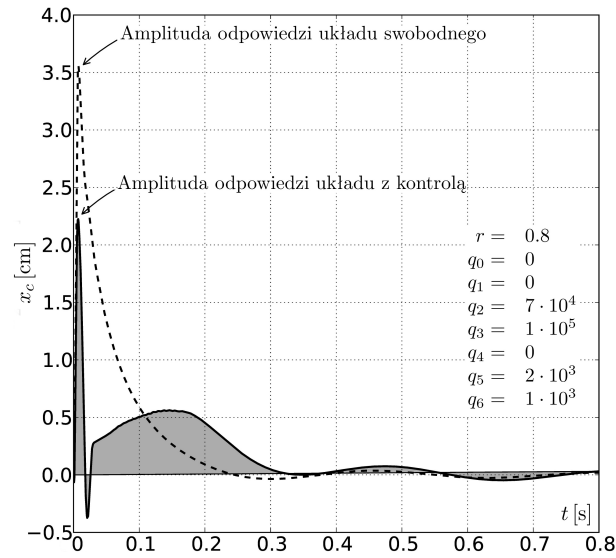
celu, spośród których, jej minimalną wartość osiągnięto przy $J_{\min} = 1.39e7$. To potwierdza, że odpowiadające temu minimum wzmocnienie gwarantuje optymalną, ale nie minimalną amplitudę odpowiedzi x_r układu sterowania (zob. rysunek 4.11). Procedurę optymalizacji liniowo-kwadratowej funkcji celu należy poprzedzić doбором właściwych wartości elementów macierzy jakości $\mathbf{Q}$ i współczynnika reakcji r .



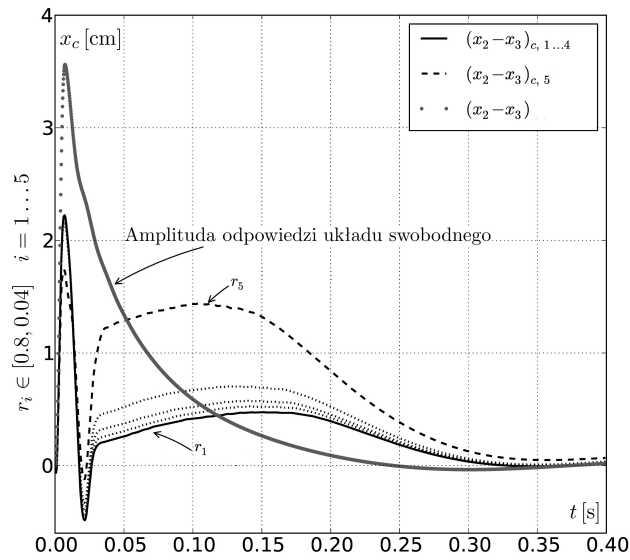
Rysunek 4.9. Zależność wskaźnika wydajności J (przy $t_k = 0.3$) od i -tej iteracji ($i \in [5 : 250]$) długości wektora wzmocnienia $\|f_x\|[i] = \sqrt{\sum_{k=1}^7 f_{x,(k)}^2[i]}$

Zapewniając dostatecznie mały krok całkowania numerycznego (ten sam przy obliczaniu rozwiązania równań różniczkowych układu sterowania i elementów macierzy Riccatiego), całkowity czas obliczeń 246 pętli symulacji rozwiązania wyniósł około 130 minut. Obliczenia wykonano na komputerze wyposażonym w procesor AMD Phenom II X4 Quad Core i 4GB pamięci RAM DDR3. Efektem realizacji sterowania prowadzonego w badanym układzie dynamicznym przy zachowaniu minimalnej wartości wskaźnika wydajności $J_{\min}$, jest rozwiązanie pokazane na rysunku 4.10. Najmniejsza amplituda charakterystyki $x_c(t)$ posłużyła za kryterium doboru niezerowych elementów macierzy $\mathbf{Q}$ i współczynnika r , stanowiących zestaw poszukiwanych parametrów procedury optymalizacji liniowo-kwadratowej.

Porównując wykresy widoczne na rysunku 4.11, można założyć, że algorytm regulacji wciąż ma pewien zapas na optymalizację funkcji kosztu.



Rysunek 4.10. Względne przemieszczenie $x_c = x_2 - x_3$ mas m_2 i m_3 układu swobodnego (linia kreskowana) i poddanego sterowaniu (linia ciągła) z optymalną charakterystyką wektora wzmocnienia proporcjonalnego



Rysunek 4.11. Niewłaściwy dobór współczynnika reakcji r pokazuje, że najbardziej optymalną odpowiedź badanego układu biomechanicznego z regulacją aktywną uzyskano przy $r = 0.8$

Zmniejszając współczynnik r , obserwuje się na charakterystyce $x_c(t)$ mniejszą wartość szczytową. Wynikiem tego jest też mniejsza odległość pomiędzy przednią i tylną ścianą klatki piersiowej, ale wzmocnieniu ulega drugi mod, mający porównywalną amplitudę równą w przybliżeniu 1.5 [cm]. W tym przypadku układ sterowany nie odpowiada w sposób optymalny, ale najmniejsza różnica położenia x_c wynosi 1.75 [cm]. To stanowi blisko 50% redukcję w porównaniu do odpowiedzi układu swobodnego.

Przedstawiona metoda budowy układu sterowania może być stosowana do optymalizacji odpowiedzi układów dynamicznych opisanych parametrami zmiennymi w czasie. Wymagane jest jednak uwzględnienie dodatkowych procedur odpowiedzialnych za przełączanie pętli sprzężenia zwrotnego pomiędzy parametrami odpowiednimi dla aktualnego stanu dynamicznego.

Podsumowując, rozwiązano numerycznie liniowy nieciągły układ biomechaniczny, a także opisano i zastosowano użyteczną strategię sterowania. W zależności od stawianych wymagań, jest możliwa optymalizacja odpowiedzi badanego obiektu regulacji lub znaczące zmniejszenie jej amplitudy. Myśląc o praktycznej implementacji opisanej strategii sterowania układu dynamicznego wymuszanego uderzeniem sprężystym, konieczne byłoby zaprojektowanie mechanizmu – wzbudnika, charakteryzującego się szybką reakcją, powodującą np. przesunięcie podparcia od tylnej strony klatki piersiowej.

5. Podsumowanie

Na podstawie przedstawionych rozważań pokazano, że uzyskanie pożądanej dokładności symulacji numerycznych wiernie odwzorowujących dynamikę obiektów rzeczywistych, wymaga stosowania pewnych przybliżeń, rozwiązań optymalizacyjnych i ukierunkowanych metod matematycznych. Prowadzenie symulacji numerycznych wiąże umiejętności programistyczne i obliczeniowe programisty-mechatronika z jego pojmowaniem istoty modelowanych zjawisk fizycznych. Spośród nich wybrano i szczegółowo zbadano zjawisko tarcia suchego. Zaproponowano metody przybliżone i algorytmy sterowania poprawiające szybkość i dokładność rozwiązań numerycznych. Wyjaśniono mechanizmy pojawiania się nieciągłości w układach mechanicznych o jednym, dwóch i wielu stopniach swobody. Wyprowadzono metody matematyczne, za pomocą których zapisano kod oryginalnych procedur generujących wyniki symulacji numerycznych.

Metoda aproksymacji równań różniczkowych i zmodyfikowana metoda Hénona poprawiła dokładność modelowania podstawowego mechanizmu pojawiania się nieciągłości, opartego na przejściach rozwiązania przez granicę rozdziału obszarów przestrzeni stanu określonych różnymi równaniami różniczkowymi.

Analiza dynamiczna nieciągłych układów dynamicznych pod względem bifurkacji rozwiązań i liczbowego oszacowania charakteru trajektorii czasowych, miała na celu pokazanie złożoności dynamiki obiektów z tarcie suchym. Skupiając się na strefie rozdziału obszarów przestrzeni stanu, pokazano jej bifurkacje, które są wyraźnie widoczne w układzie z wymuszeniem harmonicznym. Widma wykładników Lapunowa potwierdziły charakter estymowanych trajektorii ruchu okresowego, quasi-okresowego i chaotycznego.

Układy biomechaniczne można przybliżać w pewnym zakresie układami mechanicznymi. Należy przy tym rozpoznać zjawiska biologiczne charakterystyczne dla badanego układu i przełożyć je właściwie na elementy i połączenia mechaniczne. Próbę takiego przejścia pokazano na przykładzie ideowego modelu klatki piersiowej człowieka poddanej uderzeniu sprężystemu od przedniej strony.

Z obserwacji rozwiązań numerycznych swobodnego układu mechanicznego klatki piersiowej, poddanego działaniu uderzenia sprężystego można wyciągnąć interesujące wnioski. Wpływ opóźnień czasowych na amplitudę różnicy wybranych zmiennych stanu jest znaczący. Jeśli model matematyczny nie uwzględnia opóźnień czasowych, to otrzymuje się rozwiązanie numeryczne z możliwie najmniejszym opóźnieniem czasowym przemieszczeń sąsiednich mas badanego modelu. Jest ono równe długości pojedynczego kroku całkowania. Jeśli badany układ charakteryzuje się małą inercyjnością, to błąd symulacji numerycznej nie będzie duży. Wadą takiego założenia

jest, że model matematyczny nie pozwoli w razie potrzeby na zadanie innych wartości opóźnień czasowych. Jak pokazują symulacje, przy większych opóźnieniach czasowych odchyłka od trajektorii rozwiązania układu dynamicznego z opóźnieniem czasowym równym długości pojedynczego kroku całkowania jest wyraźna.

Na przykładzie podobnego układu mechanicznego klatki piersiowej zbadano wpływ nieciągłości wywołanych skokową zmianą parametrów równań różniczkowych. Ten mechanizm determinowany własnościami reologicznymi doprowadził do powstania modelu stanowej nieciągłości parametrów sztywności i tłumienia, a także wpłynął na postać układu sterowania. W tym przypadku zaadoptowano schemat sterowania aktywnego, polegający na liniowo-kwadratowej minimalizacji wskaźnika wydajności obiektu regulacji, włączonego w zamkniętą pętlę sterowania proporcjonalnego. Celem sterowania była redukcja względnej odległości pomiędzy położeniami wybranych mas obiektu regulacji. W rezultacie uzyskano wyraźną redukcję tej odległości, pokazując odpowiedzi układu swobodnego i sterowanego na wykresach czasowych. Ponadto, oszacowano parametry regulacji kształtujące charakterystykę odpowiedzi optymalnej badanego obiektu z dołączonym wzbudnikiem. Następnie, na podstawie estymacji wektora wzmocnień proporcjonalnych, zaproponowano technikę obliczania funkcji celu w układzie nieciągłym.

Symulacja dynamiki ruchu obrotowego silnika prądu stałego w zakresie małych prędkości obrotowych angażuje rozwinięty zapis matematyczny charakterystyki tarcia suchego. Zadanie sterowania tym obiektem rozwiązano, wprowadzając regulator o działaniu proporcjonalno-różniczkującym i funkcję powierzchni utwierdzenia, stosowaną w nowoczesnej teorii sterowania układów nieciągłych. Zaproponowano dwuetapową regulację nadążną, użyteczną przy realizacji zadań pozycjonowania silnika prądu stałego. Odpowiedź czasowa tego układu okazała się szybko zbieżna do zadanej trajektorii zmian prędkości kątowej, weryfikując odporność proponowanej strategii sterowania.

Wydruki pozostałych procedur numerycznych

Wydruk 14. Definicje funkcji użytych w procedurze 6 na stronie 30.

```
1 def rown1(y,w,e):
2     return -w+1.
3 def r2a(w,y,e): # w>e
4     return y**3-y-.5/(1+w)
5 def r2b(w,y,e): # w<=e
6     return y**3-y-.5/(1+e)*w/e
7 def rk4(f,h,x,nzal,e):
8     k1 = h*f(x,nzal,e)
9     k2 = h*f(x+.4*k1,nzal,e)
10    k3 = h*f(x+.2969776*k1+.15875966*k2,nzal,e)
11    k4 = h*f(x+.21810038*k1-3.0509647*k2+3.83286432*k3,nzal,e)
12    x += .17476028*k1-.55148053*k2+1.20553547*k3+.17118478*k4
13    return x
```

Wydruk 15. Definicje funkcji użytych w procedurze 7 na stronie 38.

```
1 def sigma(x, b) :
2     return x * (x - 1) ** 2 - b

4 def f1(x, a1_, b):
5     return -x[1] ** 3 + x[1] + b / (a1_ - x[2])

7 def f2(x, a1, b):
8     return -x[1] ** 3 + x[1] + b / (a1 - x[2])

10 def RKF(f, x, a, b, h, h2, h6):
11     xn = x
12     kx1 = xn[2]
13     kv1 = f(xn, a, b)
14     xn[1] = x[1] + h2 * kx1;    xn[2] = x[2] + h2 * kv1
15     kx2 = xn[2]
16     kv2 = f(xn, a, b)
17     xn[1] = x[1] + h2 * kx2;    xn[2] = x[2] + h2 * kv2
18     kx3 = xn[2]
19     kv3 = f(xn, a, b)
20     xn[1] = x[1] + h * kx3;    xn[2] = x[2] + h * kv3
21     kx4 = xn[2]
22     kv4 = f(xn, a, b)
23     x[1] = x[1] + h6 * (kx1 + 2 * (kx2 + kx3) + kx4)
24     x[2] = x[2] + h6 * (kv1 + 2 * (kv2 + kv3) + kv4)
25     return x

27 def RKInv(f, x, a, b, h):
28     h2 = h * 0.5; h6 = h * 0.166666
29     xn = x; kv1 = 1 / f(xn, a, b)
30     kx1 = xn[2] * kv1
```

```

31     xn[1] = x[1] + h2 * kx1;    xn[2] = x[2] + h2
32     kv2 = 1 / f(xn, a , b)
33     kx2 = xn[2] * kv2;    xn[1] = x[1] + h2 * kx2
34     kv3 = 1 / f(xn, a , b)
35     kx3 = xn[2] * kv3;    xn[1] = x[1] + h * kx3
36     xn[2] = x[2] + h
37     kv4 = 1 / f(xn, a, b);    kx4 = xn[2] * kv4
38     x[1] = x[1] + h6 * (kx1 + 2 * (kx2 + kx3) + kx4)
39     x[0] = x[0] + h6 * (kv1 + 2 * (kv2 + kv3) + kv4)
40     return x

42 def  miejsce_fazy_poslizgu(x, T) :
43     k = -1
44     if x<= T[0]:
45         if x<= T[2]:
46             if x<= T[4]:
47                 if x>= T[5]: k=4
48             elif x>= T[3]: k=2
49         elif x>= T[1]: k=0
50     return k

52 def  inicjuj_obl():
53     x0 = zeros(3, float)
54     h = 1e-4;    N = 160000
55     a = 1.0          # prędkość ruchu podstawy
56     b = sqrt(3)/9    # parametr modelu tarcia
57     c = 2*sqrt(3)/3  # zmienna pomocnicza
58     # punkty styczne z kontrolnej funkcji przełączeń
59     T = [c*cos(pi/9), c*cos(2*pi/9), c*sin(pi/18),
60          -c*sin(pi/18), -c*cos(2*pi/9), -c*cos(pi/9)]
61     x0[0] = 0.0      # początkowe: czas
62     x0[1] = T[5]-0.11 #                położenie
63     x0[2] = a        #                prędkość
64     # jeśli x0[2] = a i x0[1] jest pomiędzy T[0] i T[1] lub
65     # T[2] i T[3] lub T[4] and T[5] to
66     # UIW = 1, przeciwnie 0
67     UIW = 0
68     # jeśli x0[2] < a to po_slizgu = -1, jeśli x0[2] > a
69     # wtedy po_slizgu = 1
70     # jeśli x0[1] jest pomiędzy T[2] i T[3] to po_slizgu = 1
71     # przeciwnie -1
72     po_slizgu = -1
73     return x0, h, N, a, b, T, UIW, po_slizgu

```

Wydruk 16. Definicje funkcji użytych w procedurze 9 na stronie 60.

```

1  from numpy import float , zeros , sqrt , sin , cos , pi

3  def  data():
4      x0 = zeros(3, float)
5      krok, r, marg = 150, 1, 20

```

```

6      N0, N, h = 60e4, 63.3e4, 1e-4
7      m, a, K1, K2 = 0.1, 0.4, 1, 1
8      m_ = 1/m
9      b = sqrt(3)/9
10     A, w = 4*sqrt(3)/3*sin(pi/18), 3*pi/2/1.2364
11     c = 2*sqrt(3)/3
12     T = [c*cos(pi/9), c*cos(2*pi/9), c*sin(pi/18),
13          -c*sin(pi/18), -c*cos(2*pi/9), -c*cos(pi/9)]
14     x0 = [0, T[3], a]
15     poslizg, po_slizgu = 0, 0
16     if x0[2] == a:
17         for i in range(0, 4, 2):
18             if x0[1] >= T[i+1] and x0[1] <= T[i]:
19                 poslizg = 1
20         else:
21             if x0[2] < a: po_slizgu = -1
22             else: po_slizgu = 1

24     return x0, T, N0, N, h, K1, K2, m_, a, b, A, w, poslizg,
25            po_slizgu, krok, r, marg

27 def excite(A, w, t):
28     return A*sin(w*t)

30 def f(x, K1, K2, m_, a, b, xs):
31     return m_*(-K1*(x[1]-xs)+K2*(x[1]-xs)**3+b/(a-x[2]))

33 def sigma(s, b2, m_):
34     return 1/m_*(s**2-b2)

36 def oscyl_faza_poslizgu(x, T, xs):
37     k = -1
38     if x <= T[0]+xs:
39         if x <= T[2]+xs:
40             if x <= T[4]+xs:
41                 if x >= T[5]+xs: k=4
42                 elif x >= T[3]+xs: k=2
43                 elif x >= T[1]+xs: k=0
44     return k

46 def RKF(f, x, K1, K2, m_, a, b, h, h2, h6, xs):
47     # porównaj z procedurą na Wydruku \ref{P7b}
48     return x

50 def RKInv(f, x, K1, K2, m_, a, b, h, xs):
51     # porównaj z procedurą na Wydruku \ref{P7b}
52     return x

```

Wydruk 17. Biblioteki *stale.py* i *funkcje.py* w uzupełnieniu do wydruku 8 zamieszczonego na stronie 44.

```

1  #stale.py

3  N = 10          # wymiar układu / liczba równań 1 rzędu
4  Nsub = 5        # liczba układów połączonych
5  Nord = 2        # rząd równań różniczkowych
6  m1 = 1.6        # masy: uderzająca
7  m2 = 0.45       # przedniej części klatki
8  m3 = 27.21      # tylnej
9  m4 = 10.0       # podparcia
10 m5 = 0.1        # połączenie reologiczne tłumika i sprężyny
11 # stale pomocnicze
12 m1_1=1./m1; m2_1=1./m2; m3_1=1./m3; m4_1=1./m4; m5_1=1./m5
13 l = .0381       # pozostałe parametry układu
14 k12=281e3; k23=26.3e3; k23p=13.2e3; c23=.52e3; c23p=.18e3
15 k34 = 50.0e3    # sprężystość pomiędzy torsem a oparciem
16 c34 = 1.1e2     # tłumienie - //-
17 ks = 1.0e4; cs = 1.0e3 # sprężystość i tłumienie oparcia
18 Niter = 3000; h0 = 5e-5 # liczba iteracji i krok czasowy
19 H = zeros(5)    # wektor przesunięcia w czasie
20 H = [0, 10, 20, 30, 40]
21 X = zeros((Niter,Nsub,Nord), float)
22 dX = copy.copy(X) # wektor X przesunięty o H, opóźnienie
23 X[0,0,1] = 13.9 #19.44 -> 70km/h, 13.9 -> 50km/h
24 A = zeros((Nsub,Nsub,Nord,Nord),float) # mac. stanu podukł.
25 dA = copy.copy(A) # mac. niepewności wsp. mac. A
26 B = zeros((Nsub,Nord), float) # mac. wektorów wejścia
27 B[3] = [.0, -m4_1] # u przyłożone tylko do masy m4
28 A[0,0] = [[.0, 1.0], [-k12*m1_1, .0]]
29 A[0,1] = [[.0, 0.0], [k12*m1_1, .0]]
30 A[1,1] = [[.0, 1.0], [-(k12+k23+k23p)*m2_1, -c23*m2_1]]
31 A[1,0] = [[.0, 0.0], [k12*m2_1, .0]]
32 A[1,2] = [[.0, 0.0], [k23*m2_1, c23*m2_1]]
33 A[1,4] = [[.0, 0.0], [k23p*m2_1, .0]]
34 A[2,2] = [[.0, 1.0], [-(k23+k34)*m3_1, -(c23+c23p+c34)*m3_1]]
35 A[2,1] = [[.0, 0.0], [k23*m3_1, c23*m3_1]]
36 A[2,3] = [[.0, 0.0], [k34*m3_1, c34*m3_1]]
37 A[2,4] = [[.0, 0.0], [.0, c23p*m3_1]]
38 A[3,3] = [[.0, 1.0], [-(k34+ks)*m4_1, -(c34+cs)*m4_1]]
39 A[3,2] = [[.0, 0.0], [k34*m4_1, c34*m4_1]]
40 A[4,4] = [[.0, 1.0], [-k23p*m5_1, -c23p*m5_1]]
41 A[4,1] = [[.0, 0.0], [k23p*m5_1, .0]]
42 A[4,2] = [[.0, 0.0], [.0, c23p*m5_1]]
43 k23_ = zeros(Niter, float)
44 c23_ = copy.copy(k23_)
45 k23_[0], c23_[0] = f23(X[0,1], X[0,2], 1, k23, c23)
46 dA[1,1] = [[.0, .0], [-k23_[0]*m2_1, -c23_[0]*m2_1]]
47 dA[1,2] = [[.0, .0], [k23_[0]*m2_1, c23_[0]*m2_1]]
48 dA[2,2] = [[.0, .0], [-k23_[0]*m3_1, -c23_[0]*m3_1]]

```

```

49 dA[2,1] = [[.0 , .0], [ k23_[0]*m3_1, c23_[0]*m3_1]]
50 V = []; P = []
51 for i in range(5):
52     V.append(Matrix(2,1))
53     P.append(Matrix())
54 k = zeros((Niter,5,4,2), float)
55 dk = copy.copy(k)

58 #funkcje.py

60 class Matrix:
61     def __init__(self, rz=2, kol=2): # domyślna mac. 2x2
62         self.rz = rz; self.kol = kol
63         if kol ==1: self.x=np.array(zeros(rz, float))
64         if kol !=1: self.x=np.array(zeros((rz,kol),float))

66     def __add__(self, Y):
67         """Dodawanie macierzy, + dodaje obiekty"""
68         self.__init__(self.rz, self.kol)
69         for i in range(self.rz):
70             for j in range(self.kol):
71                 self.x[i, j] = self.x[i][j] + Y[i][j]
72         return self.x

74     def add(self, A, B):
75         """Dodawanie macierzy"""
76         self.__init__(self.rz, self.kol)
77         for i in range(self.rz):
78             for j in range(self.kol):
79                 self.x[i, j] = A[i][j] + B[i][j]
80         return self.x

82     def mul(self, A, B):
83         """Mnozenie macierzy"""
84         self.__init__(self.rz, self.kol)
85         for i in range(size(A, 0)):
86             for j in range(size(A, 1)):
87                 self.x[i] += A[i][j] * B[j]
88         return self.x

90     def mulD(self, A, B):
91         """Mnozenie macierzy"""
92         self.__init__(self.rz, self.kol)
93         for i in range(size(A, 0)):
94             self.x[i] = A[i] * B[i]
95         return self.x

97     def transpose(self, A):
98         self.x = [A[0][0], A[1][0]]
99         return self.x

```

```

101 def f23(X1, X2, l, k23, c23):
102     return where((X1[0] - X2[0]) > l, k23, .0), \
103         where((X1[1] - X2[1]) < 0, c23, .0)
104     #dodaj k23 w dA1 i dA2 do k23 gdy x względna > l
105     #dodaj c23 w dA1 i dA2 do c23 gdy v względna < 0

107 def uncer(dA, k23, c23):
108     dA[1,1,1] = [-k23*c.m2_1, .0]; dA[1,2,1]=[k23*c.m2_1, .0]
109     dA[2,2,1] = [-k23*c.m3_1, -c23*c.m3_1]
110     dA[2,1,1] = [k23*c.m3_1, c23*c.m3_1]
111     return dA

113 def printx(X, Nsub):
114     for j in range(Nsub):
115         print "X[%d,%d]= " % {"i":i, "j":j}, X[i,j]

117 def f0(A, dA, B, X, dX, U, V, P):
118     V[0].mul(A[0,0], X) #X[0] wektor stanu 1-ego podukładu
119     V[1].mul(A[0,1], dX[1]) #dX jest wektorem X(t-h1)
120     return (V[0].x + V[1].x).reshape((1,2))

122 def f1(A, dA, B, X, dX, U, V, P):
123     P[0].add(A[1,1], dA[1,1]); P[1].add(A[1,2], dA[1,2])
124     V[0].mul(P[0].x, X); V[1].mul(P[1].x, dX[2])
125     V[2].mul(A[1,0], dX[0]); V[3].mul(A[1,4], dX[4])
126     return (V[0].x+V[1].x+V[2].x+V[3].x).reshape((1,2))

128 def f2(A, dA, B, X, dX, U, V, P):
129     P[0].add(A[2,2], dA[2,2]); P[1].add(A[2,1], dA[2,1])
130     V[0].mul(P[0].x, X); V[1].mul(P[1].x, dX[1])
131     V[2].mul(A[2,3], dX[3]); V[3].mul(A[2,4], dX[4])
132     return (V[0].x+V[1].x+V[2].x+V[3].x).reshape((1,2))

134 def f3(A, dA, B, X, dX, U, V, P):
135     V[0].mul(A[3,3], X); V[1].mul(A[3,2], dX[2])
136     V[2].mul1D(B[3], U)
137     return (V[0].x + V[1].x + V[2].x).reshape((1,2))

139 def f4(A, dA, B, X, dX, U, V, P):
140     V[0].mul(A[4,4], X); V[1].mul(A[4,1], dX[1])
141     V[2].mul(A[4,2], dX[2])
142     return (V[0].x + V[1].x + V[2].x).reshape((1,2))

```

Literatura

- [1] ADAMS J., PAYANDEH S. Methods for low-velocity friction compensation: Theory and experimental study. *J. Robotic Systems* 13, 6 (1996), 391–404.
- [2] ALAVINSAB A., MOHARAMI H., KHAJEPOUR A. Active control of structures using energy-based LQR method. *Computer-Aided Civ. and Infrastruct. Engineering* 21 (2006), 605–611.
- [3] ANGELOV T. A., LIOLIOS A. A. An iterative solution procedure for Winkler-type contact problems with friction. *Z. Angew. Math. Mech.* 84 (2004), 136–143.
- [4] AWREJCEWICZ J. *Dynamika Nieliniowa Maszyn*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, 1994.
- [5] AWREJCEWICZ J. *Mechanika Techniczna i Teoretyczna. Dynamika*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 2011.
- [6] AWREJCEWICZ J., FEČKAN M., OLEJNIK P. On continuous approximation of discontinuous systems. *Nonlinear Analysis* 62 (2005), 1317–1331.
- [7] AWREJCEWICZ J., FEČKAN M., OLEJNIK P. Bifurcations of planar sliding homoclinics. *Mathematical Problems in Engineering* 2006 (2006), 1–13.
- [8] AWREJCEWICZ J., OLEJNIK P. Modyfikacja trajektorii czasowej podczas obliczania wykładników Lapunowa. *XVII Ogólnopolska Konferencja Naukowo-Dydaktyczna Teorii Maszyn i Mechanizmów* (Wrocław – Łądek Zdrój, 18-20 wrzesień 2002), 35–40.
- [9] AWREJCEWICZ J., OLEJNIK P. Numerical analysis of self-excited by friction chaotic oscillations in two-degrees-of-freedom system using exact Hénon method. *Machine Dynamics Problems* 26, 4 (2002), 9–20.
- [10] AWREJCEWICZ J., OLEJNIK P. Stick-slip dynamics of a two degree-of-freedom system. *International Journal of Bifurcations and Chaos* 13, 4 (2003), 843–861.
- [11] AWREJCEWICZ J., OLEJNIK P. Analysis of dynamic systems with various friction laws. *Applied Mechanics Reviews – Transactions of ASME* 58, 6 (2005), 389–411.
- [12] AWREJCEWICZ J., OLEJNIK P. Friction pair modeling by 2-DOF system: numerical and experimental investigations. *International Journal of Bifurcations and Chaos* 15, 6 (2005), 1931–1944.
- [13] AWREJCEWICZ J., OLEJNIK P. Sliding solutions of a simple two degrees-of-freedom dynamical system with friction. *Proceedings of 5-th EU-ROMECH* (Eindhoven, The Netherlands, August 7-12 2005), vol. 01-196 of *Nonlinear Dynamics Conference ENOC*, 277–282.
- [14] AWREJCEWICZ J., OLEJNIK P. Bifurkacje rozwiązań wokół zmiennego obszaru stanu nieciągłości układu dynamicznego o jednym stopniu swobody z wymuszeniem harmonicznym. *I Kongres Mechaniki Polskiej* (Warszawa, 28-31 sierpień 2007), J. Kubik, W. Kurnik, W. Nowacki, Eds.
- [15] AWREJCEWICZ J., OLEJNIK P. On the performance index optimization of a rheological dynamical system via numerical active control. *IUTAM Symposium on Dynamics Modeling and Interaction Control in Virtual and Real Environments*, G. Stépán, L. Kovács, A. Tóth, Eds., IUTAM Bookseries. Springer, 2011, 185–195.

- [16] AWREJCEWICZ J., PYRYEV J., KUDRA G., OLEJNIK P. *Matematyczne i Numeryczne Metody Analizy Bifurkacji i Dynamiki Chaotycznej Układów Mechanicznych z Tarciami i Uderzeniami*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 2006.
- [17] AWREJCEWICZ J., SENDKOWSKI D. Stick-slip chaos detection in coupled oscillators with friction. *International Journal of Solids and Structures* 42, 22 (2005), 5669–5682.
- [18] BANERJEE S., RANJAN P., GREBOGI C. Bifurcations in two-dimensional piecewise smooth maps - theory and applications in switching circuits. *IEEE Trans. ISCAS-I* 47, 5 (2000), 633–643.
- [19] BATTELLI F., FEČKAN M. Bifurcation and chaos near sliding homoclinics. *Journal of Differential Equations* 248, 9 (2010), 2227–2262.
- [20] BELLEN A., ZENNARO M. *Numerical Methods for Delay Differential Equations*. Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 2003.
- [21] BENETTIN G., GALGANI L., GIORGILLI A., STRELCYN J. M. Lyapunov exponents for smooth dynamical systems and hamiltonian systems; a method for computing all of them. *Meccanica* 15 (1980), 9–30.
- [22] BENNETTIN G., FROESCHLE C., SCHEIDECKER J. P. Kolmogorov entropy of a dynamical system with increasing number of degrees of freedom. *Phys. Rev. A* 19 (1979), 2454–2460.
- [23] BERNUSSOU J., PERES P. L. D., GEROMEL J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Syst. Control Lett.* 13 (1989), 65–72.
- [24] CAI L., SONG G. Jointstick-slip friction compensation of robot manipulators by using smooth robust controllers. *J. Robotic Systems* 11, 6 (1994), 451–470.
- [25] CHATTERJEE S., SAHA A. On the theoretical basis of vibro-frictional actuation in microsystems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 221 (2007), 119–133.
- [26] DEIMLING K. *Multivalued Differential Equations*. Walter de Gruyter, 1992.
- [27] DEUFHARD P., FIEDLER B., KUNKEL P. Efficient numerical pathfollowing beyond critical points. *SIAM Journal of Numerical Analysis* 18 (1987), 949–987.
- [28] DI BERNARDO M., GAROFALO F., IANNELLI L., VASCA F. Bifurcations in piecewise-smooth feedback systems. *Int. J. Control* 75, 16-17 (2002), 1243–1259.
- [29] DIMOVA S., GEORGIEV V. Numerical algorithm for the dynamic analysis of base-isolated structures with dry friction. *Natural Hazards* 6 (1992), 71–86.
- [30] DRIESSEN B. J., SADEGH N. Convergence theory for multi-input discrete-time iterative learning control with Coulomb friction, continuous outputs, and input bounds. *Int. J. Adapt. Control Signal Process.* 18 (2004), 457–471.
- [31] ECKMAN J. P., RUELLE D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.* 57 (1985), 617–656.
- [32] FEENY B., MOON F. C. Chaos in a forced dry friction oscillator: experiment and numerical modelling. *J. Sound and Vibrations* 170, 3 (1994), 303–323.
- [33] FIDLIN A. On the asymptotic analysis of discontinuous systems. *Z. Angew. Math. Mech.* 82 (2001), 75–88.
- [34] FILIPPOV A. F. *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side*.

- Mathematics and Its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.
- [35] GALVANETTO U. Sliding bifurcations in the dynamics of mechanical systems with dry friction - remarks for engineers and applied scientists. *J. Sound and Vibrations* 276 (2004), 121–139.
 - [36] GRASSBERGER P., PROCACCIA I. Characterization of strange attractors. *Phys. Rev. Lett.* 50 (1983), 346–349.
 - [37] HARRIGAN T. P., HAMILTON J. J. Necessary and sufficient conditions for global stability and uniqueness in finite element simulations of adaptive bone. *International Journal of Solids and Structures* 31, 1 (1994), 97–107.
 - [38] HECKL M. A., ABRAHAMS I. D. Active control of friction-driven oscillations. *J. Sound and Vibrations* 193, 1 (1996), 417–426.
 - [39] HÉNON M. On the numerical computation of Poincaré maps. *Physica D* 5 (1982), 412–413.
 - [40] HIRSCHON R. M., MILLER G. Control of nonlinear systems with friction. *IEEE Trans. Control Syst. Technology* 7, 5 (1999), 588–595.
 - [41] HUANG S. N., TAN K. K., LEE T. H. Adaptive friction compensation using neural network approximations. *IEEE Trans. Syst., Man. Cybern. – Part C: Applications and Reviews* 30, 4 (2000), 551–557.
 - [42] KIM B. J., CHOE G. H. High precision numerical estimation of the largest Lyapunov exponent. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 15 (2010), 1378–1384.
 - [43] KIM Y. H., LEWIS F. L. Optimal design of cmac neural network controller for robot manipulators. *IEEE Trans. Syst., Man. Cybern. – Part C: Applications and Reviews* 30, 1 (2000), 22–31.
 - [44] KORUBA Z., OSIECKI J. *Elementy Mechaniki Zaawansowanej*. Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, 2007.
 - [45] KUBO T. Guaranteed lqr properties control of uncertain linear systems with time delay of retarded type. *Electrical Engineering in Japan* 152, 1 (2005), 43–49.
 - [46] KUDRA G. *Modelowanie Sił Tarcia Suchego w Dynamice Ciała Sztywnego w Przestrzeni*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 2012.
 - [47] KUZNETSOV Y. A., RINALDI S., GRAGNANI A. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems. *International Journal of Bifurcations and Chaos* 13, 8 (2003), 2157–2188.
 - [48] KWAKERNAAK H., RAPHAEL S. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, New York, 1972.
 - [49] LAMARQUE C.-H., BASTIEN J. Numerical study of a forced pendulum with friction. *Nonlinear Dynamics* 23 (2000), 335–352.
 - [50] LEINE R. I., VAN CAMPEN D. H., VAN DE VRANDE B. L. Bifurcations in nonlinear discontinuous systems. *Nonlinear Dynamics* 23 (2000), 105–164.
 - [51] LEWIS F. L., ABDALLAH C. T., DAWSON D. M. *Control of Robot Manipulators*. Macmillan Publishing Company, New York, 1993.
 - [52] LI Z., WANG Q., GAO H. Friction driven oscillator control by Lyapunov redesign based on delayed state feedback. *Acta Mech. Sin.* 25 (2009), 257–264.
 - [53] LIGURSKÝ T., HASLINGER J., CERA R. K. Approximation and numerical realization of 3D contact problems with Coulomb friction and a

- solution-dependent coefficient of friction. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 82 (2006), 1180–1206.
- [54] LIN C. L., HUANG H. T. Linear servo motor control using adaptive neural networks. *Proc. Instn. Mech. Engrs., Part I: J. Systems and Control Engineering* 216 (2002), 407–427.
 - [55] MROZOWSKI J., AWREJCEWICZ J. Changes in the gait characteristic caused by external load, ground slope and velocity variation. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 16, 11 (2011), 2313–2318.
 - [56] OLEJNIK P. *Analiza numeryczna i eksperymentalna drgań samowzbudnych regularnych i chaotycznych w układzie o dwóch stopniach swobody z tarciem*. Praca doktorska, Politechnika Łódzka, Katedra Automatyki i Biomechaniki, Łódź, 2002.
 - [57] OLEJNIK P., AWREJCEWICZ J. Reduction of deformation in a spring-mass realisation of human chest occurred after action of impact. *J. KONES Powertrain and Transport* 7, 1 (2010), 327–335.
 - [58] OLEJNIK P., AWREJCEWICZ J. One-dimensional discrete LQR control of compression of the human chest impulsively loaded by fast moving point mass. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 16, 5 (2011), 2225–2229.
 - [59] OLEJNIK P., AWREJCEWICZ J. Low-speed voltage-input tracking control of a DC-motor numerically modelled by a dynamical system with stick-slip friction. *Differential Equations and Dynamical Systems* 21, 1-2 (2013), 3–13.
 - [60] OSELEDEC V. I. A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.* 19 (1968), 197–231.
 - [61] OTTEN G., DE VRIES T. J. A., VAN AMERONGEN J., RANKERS A. M., GAAL E. W. Linear motor motion control using a learning feedforward controller. *IEEE/ASME Trans. Mechatr.* 2, 3 (1997), 179–187.
 - [62] PIETRABISSA R., QUAGLINI V., VILLA T. Experimental methods in testing of tissues and implants. *Meccanica* 37 (2002), 477–488.
 - [63] SANO M., SAWADA Y. Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series. *Phys. Rev. Lett.* 55, 10 (1985), 1082–1085.
 - [64] SLOTINE J. J. E., LI W. On the adaptive control of robot manipulators. *Int. J. Robot. Res.* 6, 3 (1987), 49–59.
 - [65] SONG G., CAI L., WANG Y., LONGMAN R. W. A sliding-mode based smooth adaptive robust controller for friction compensation. *Int. J. Robust Nonlinear Control* 8 (1998), 725–739.
 - [66] STUDER C., LEINE R. I., GLOCKER C. Step size adjustment and extrapolation for time-stepping schemes in non-smooth dynamics. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 76 (2008), 1747–1781.
 - [67] TEIXEIRA M. A., DA SILVA P. R. Regularization and singular perturbation techniques for non-smooth systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 241, 22 (2012), 1948–1955.
 - [68] UCHIDA K., SHIMEMURA E., KUBO T., ABE N. The linear quadratic optimal control approach to feedback control design for systems with delay. *Automatica* 24 (1988), 773–780.
 - [69] VAN DE VRANDE B. L., VAN CAMPEN D. H., DE KRAKER A. An appro-

- ximate analysis of dry-friction-induced stick-slip vibrations by a smoothing procedure. *Nonlinear Dynamics* 19 (1999), 157–169.
- [70] VASILEVA A. B., BUTZOV V. F. *Asymptotic Expansion of Solutions of Singularly Perturbed Equations*. Nauka, Moscow, 1973.
 - [71] WATANABE I. Development of practical and simplified human whole body fem model. *JSAE Rev.* 22 (2001), 189–194.
 - [72] WOLF A., SWIFT J. B., SWINNEY H. L., VASTANO J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D* 16 (1985), 285–317.
 - [73] WULFF C., SCHEBESH A. Numerical continuation of hamiltonian relative periodic orbits. *Journal of Nonlinear Science* 18 (2008), 343–390.
 - [74] WYK M. A., STEEB W. H. *Chaos in Electronics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1997.
 - [75] XUCHENG W., LIANGMING C., ZHANGZHI C. Effective numerical methods for elasto-plastic contact problems with friction. *Acta Mechanica Sinica* 6 (1990), 349–356.

Numerical Methods of Solution, Analysis and Control of Discontinuous Dynamical Systems

Summary

This monograph describes some mathematical methods and numerical procedures for finding solutions to the problems devoted to modeling and control of discontinuous dynamical systems. The desired accuracy of the solution of differential equations modeling the dynamic state of a system with friction, ambiguity of parameters or a time delay requires to use some dedicated methods. Experiments aimed at improving the performance of numerical methods with respect to solution and analysis of discontinuous systems reveal the existing range of difficulty, extracting interesting mathematical estimations and mathematical derivations described in this monograph. This allows for a better understanding and more accurate approximation of the physical processes taking place in the real oscillating systems.

Analyzing the basic mechanism of the appearance of discontinuities, that is based on a solution crossing the boundary of regions defined by various differential equations in a state-space, the time of stick-slip transition such as in systems with dry friction could be determined imprecisely due to the omission of specific points in the numerical procedure. It causes escalation of inaccuracies in numerical modeling of important physical features and behavior of the corresponding real object. A method of approximation of differential equations by differential inclusions and a modified Hénon method developed independently in this monograph increase the accuracy of numerical computations in simulation of discontinuous systems determined by dynamics conditioned by existence of state-space boundaries.

Modern design methods and optimization techniques coexist with numerical modeling and computer simulations. Using such tools, a relevant information about critical values, dynamics of the state changes and expected wear of the designed or investigated real object is obtained. Based on the mathematical description of human's chest represented by a simplified mechanical model, the influence of time delays on the amplitude of response of a few degrees-of-freedom dynamical system subjected to an elastic impact has been proved. An extended representation of linear differential equations with time delays, describing five interconnected subsystems with time-varying parameters has been proposed and then successfully used in numerical simulation. In the case of modeling of parameter changes of N -linked subsystems there has been solved a problem of discontinuities' modeling expressed using the switching characteristics. Referring to the case of discontinuities caused by dry friction, there is even shown that the step change of para-

meters determined by rheological properties takes the qualitatively different form of disturbance (next to the external excitation), which directly affects the internal system state. Modeling of state discontinuity of parameters of the selected dynamical system has been based on a matrix notation defining a set of gain matrices covering all the time-dependent parameters.

In the scope of dynamical analysis presented in this monograph, the numerical estimate of the nature of time trajectories by means of Lyapunov exponents is described. Moreover, bifurcation theory that is the strongly developing branch of dynamics of a wide range of analytical derivations and numerical optimization schemes has been used. This part of the work presents some analytical and numerical methods allowing to know bifurcation schemes, and even to determine discrete bifurcation diagrams of the separation boundary and numerical solutions of discontinuous dynamical system with dry friction. The Filippov's theory applied in the analysis of the considered system with a modified Hénon's method of numerical integration have allowed to perform a numerical estimation of bifurcations of the stick-slip solutions, that are observed in motion of a piecewise-continuous dynamical system with one degree-of-freedom and harmonic excitation. For the purpose of a numerical solution, an oscillating boundary of discontinuity has been described by a function of velocity of the moving base and one has made it dependent on the form of an external forcing.

In a part of the monograph devoted to the control of a nonlinear dynamical system, there are presented methods for the numerical modeling and speed control of a DC motor. The analyzed direct current engine was used as an exemplary object subjected to the forces of resistance occurring in the sliding bearings of its rotor and coming from the following phenomena: Coulomb friction, the friction associated with the exponential curve of kinetic friction characteristics appearing due to the Stribeck effect, viscous friction and the friction dependent on the angular position of the rotor. The problem of controlling the plant has been defined, namely, to design a compensation technique allowing to change the engine's rotational velocity along with the desired time trajectory. In the next step, the problem was solved by introducing a sliding surface function used in modern control theory of discontinuous systems. Performance of the proposed, two-stage follow-up control measured by precision of mapping of the desired function of changes of rotational velocity has been tested on the basis of exemplary parameters of a selected DC motor. There have been shown some time trajectories of the angular velocity, that follow the desired trajectory confirming robustness of the follow-up control realized in the numerical procedure.

Active control strategies are applied to optimize the mechanical or biomechanical systems of many degrees-of-freedom. With this in mind, a me-

thodology based on the use of one control force decreasing the relative deformation of a mechanical model of a human thorax caused by an elastic impact has been developed and described. Visible reduction in the relative displacement inside of the thorax was obtained by solving the problem of linear-quadratic optimization of a performance index. In addition, control parameters influencing the characteristics of the optimal response of the test plant have been adjusted. Based on a proportional gain vector's estimation, a technique of computation of the objective function in the controlled discontinuous system have been proposed.

The monograph has been supported with the numerical procedures verifying carried out numerical experiments of which results are drawn in the time and parametric histories.

Charakterystyka zawodowa autora

Paweł Olejnik ukończył studia na Wydziale Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej Politechniki Łódzkiej w 2000 roku, uzyskując dyplom magistra inżyniera o specjalności fizyka komputerowa. Po studiach podjął pracę jako asystent w Katedrze Automatyki i Biomechaniki na Wydziale Mechanicznym Politechniki Łódzkiej oraz został słuchaczem studium doktoranckiego *Mechanika*. W czasie studiów trzeciego stopnia rozszerzał umiejętności programistyczne zorientowane na rozwiązywanie zadań analizy dynamicznej i modelowania nieciągłych układów deterministycznych. Zakres pracy konstruktorskiej obejmował budowę stanowiska doświadczalnego przeznaczonego do wyznaczania charakterystyk tarcia kinetycznego w układzie z tarciem suchym o dwóch stopniach swobody i zmienną siłą nacisku w strefie kontaktu pary ciernej stal-poliester. Efektem była obrona pracy doktorskiej pt. *Analiza numeryczna i eksperymentalna drgań samowzbudnych regularnych i chaotycznych w układzie o dwóch stopniach swobody z tarciem*, pod kierunkiem prof. dr hab. inż. Jana Awrejcewicza. Praca była finansowana przez Komitet Badań Naukowych grantem promotorskim. 20 grudnia 2002 roku Rada Wydziału Mechanicznego Politechniki Łódzkiej nadała mu tytuł naukowy doktora nauk technicznych, wyróżniając przy tym walory poznawcze części eksperymentalnej rozprawy doktorskiej. Rezultaty badań opublikował w renomowanych czasopismach naukowych, a zdjęcie zbudowanego stanowiska zostało zamieszczone w roku 2005 na okładce wydania specjalnego czasopisma *International Journal of Bifurcation and Chaos* (wydanie 15, numer 6).

Na początku 2003 roku został zatrudniony na stanowisku adiunkta w Katedrze Automatyki i Biomechaniki pod kierunkiem prof. dr hab. inż. Jana Awrejcewicza. Obowiązki związane z pracą dydaktyczną i organizacyjną zyskały od tego momentu większego znaczenia. Autor prowadził wykłady, ćwiczenia i laboratoria z takich przedmiotów, jak: podstawy automatyki, teoria sterowania, podstawy mechatroniki, mechatronika techniczna, urządzenia i systemy mechatroniczne, modelowanie i symulacje komputerowe w mechatronice, metody komputerowe w mechatronice, języki programowania C++, Java, Matlab, niektóre z wymienionych przedmiotów w języku angielskim. Brał udział w opracowaniu programu nowego kierunku studiów *Mechatronika* na Wydziale Mechanicznym Politechniki Łódzkiej, a następnie został włączony w poczet członków Kierunkowego Komitetu Dydaktycznego tego kierunku. Jest członkiem Komitetu Organizacyjnego odbywającej się w cyklu dwuletnim, międzynarodowej konferencji naukowej pt. *Dynamical Systems – Theory and Applications*, biorąc czynny udział w recenzowaniu i redagowaniu materiałów konferencyjnych. Efektem tego było współredagowanie od roku 2007 pięciu kolejnych wydań drukowanych,

w tym jednego wydania specjalnego pt. *Modeling and Control of Mechanical/Biomechanical Systems* wydane przez czasopismo naukowe *Theoretical and Applied Mechanics Letters*. Jako recenzent, autor opiniuje wnioski na finansowanie prac badawczych i rozwojowych składane do Narodowego Centrum Badań i Rozwoju, Polskiej Agencji Rozwoju Przedsiębiorczości i Departamentu Wdrażania *Programu Operacyjnego - Innowacyjna Gospodarka*.

Autor silnie angażuje się również w pracę naukową związaną z modelowaniem matematycznym i symulacją numeryczną dynamiki nieciągłych układów mechanicznych i mechatronicznych z tarciami i uderzeniami. Rozszerza swój obszar zainteresowań na zagadnienia sterowania numerycznego z zastosowaniem płyt programowalnych i poprawiania szybkości obliczeń numerycznych z wykorzystaniem kart graficznych wyposażonych w wydajne układy wieloprocesorowe. Efektem tego była budowa stanowiska doświadczalnego przeznaczonego do sterowania w czasie rzeczywistym poziomem cieczy w dwóch połączonych zbiornikach stanowiących dwuinercyjny obiekt regulacji automatycznej zasilany wodą z rezerwuaru tłoczoną przy użyciu pompy perystaltycznej. Opracował procedury numeryczne i matematyczne zwiększające dokładność rozwiązań numerycznych dynamiki układów nieciągłych z tarciami suchymi i modelowania uderzenia w klatkę piersiową człowieka. W roku 2010 otrzymał roczne stypendium Fundacji na rzecz Nauki Polskiej w ramach programu *Mistrz* na realizację projektu pt. *Aktywne metody numeryczno-eksperymentalne ochrony organów ludzkich przed drganiami i uderzeniami*. Ponadto, był jednym z realizatorów 5 projektów badawczych wykonywanych w Katedrze Automatyki i Biomechaniki w zakresie nauk podstawowych. W latach 2007, 2009 i 2012 otrzymał nagrody Rektora Politechniki Łódzkiej za osiągnięcia w działalności naukowej i organizacyjnej.

Wynikiem jego dotychczasowej pracy naukowej jest współautorstwo 14 publikacji w czasopismach naukowych (w tym 7 publikacji w czasopismach z tzw. listy filadelfijskiej), 1 monografii, 2 rozdziałów w książkach i 37 publikacji (włączając krótkie streszczenia) w materiałach konferencyjnych (w tym 27 w materiałach konferencji międzynarodowych). Autor wygłosił na konferencjach 18 krótkich referatów (w tym 12 na konferencjach o zasięgu międzynarodowym) i 1 wykład zaproszony pt. *An experimental friction force model and some useful numerical experiment*, na zaproszenie prof. Klausa Zimmermanna z Katedry Mechaniki Technicznej Politechniki w Ilmenau.

