

STUDIA MATHEMATICA

REDAKTOROWIE

STEFAN BANACH

HUGO STEINHAUS

TOM VIII.

LWÓW 1939

TREŚĆ TOMU VIII.

	Str.
J. Marcinkiewicz: Sur les séries orthogonales	1
W. Nikliborc: Über das allgemeine Dreikörperproblem. Erste Mitteilung	28
P. Gillis: Sur les problèmes réguliers du calcul des variations de la forme $I[\delta] = \int_{\tilde{D}_n} F(p_i) d(x^i) = \text{minimum}$	68
J. Marcinkiewicz: Sur les multiplicateurs des séries de Fourier	78
W. Nikliborc: Über das allgemeine Dreikörperproblem. Zweite Mitteilung.	92
S. Kaczmarz et A. Turowicz: Sur l'irrationalité des intégrales indéfinies	129
A. Wintner: On normal inertia	135
W. Orlicz: Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (VI)	141
A. E. Taylor: A Note on Unconditional Convergence . . .	148
M. Eidelheit: Über lineare Gleichungen in separablen Räumen (II)	154
M. Kac: Reconnaissance de priorité	170

Sur les séries orthogonales

par

J. MARCINKIEWICZ (Wilno).

Ce Mémoire contient quatre chapitres ayant pour objet des problèmes différents. Dans tout ce qui suit, nous désignerons par $\{\varphi_r(t)\}$ un système orthogonal et normé dans l'intervalle $(0,1)$. Pour simplifier les énoncés nous allons introduire quelques notations.

On dit que le système $\{\varphi_r(t)\}$ jouit de la propriété (c) si la convergence presque partout de la série

$$(0.1) \quad \sum_r a_r \varphi_r(t) \quad ^1)$$

entraîne

$$(0.2) \quad a_r = o(1).$$

En remplaçant dans cette définition la convergence de la série (0.1) par sa convergence absolue p. p. et la condition (0.2) par

$$(0.3) \quad \sum_r |a_r| < \infty,$$

on obtient la définition de la propriété (d).

Ces notations sont dues à M. W. ORLICZ ²⁾.

Lorsque la condition

¹⁾ Le signe $\sum$ désigne $\sum_{r=1}^{\infty}$.

²⁾ W. Orlicz, Zur Theorie der Orthogonalreihen, Bull. Ac. Pol. (1927) p. 81—115; comparer aussi: S. Kaczmarz et H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, Monografie Matematyczne, Warszawa-Lwów, 1935; spéc. p. 152—154.

$$(0.4) \quad \sum_r a_r^2 < \infty$$

est nécessaire et suffisante pour la convergence presque partout de la série (0.1), nous dirons que le système $\{\varphi_r(t)\}$ admet la propriété (H). En y remplaçant la convergence p. p. de la série (0.1) par sa convergence partout et (0.4) par

$$(0.5) \quad \sum_r |a_r| < \infty,$$

nous obtenons la définition d'une propriété que nous appellerons (K).

Si la condition (0.5) est seulement nécessaire pour la convergence partout de la série (0.1), nous dirons que le système $\{\varphi_r(t)\}$ jouit de la propriété (k).

Enfin, la série (0.1) sera dite de classe m_p ($1 \leq p < \infty$) s'il existe une fonction $f(t) \in L^p$ pour laquelle

$$(0.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f(t) - \sum_{r=1}^n a_r \varphi_r(t)|^p dt = 0,$$

et de classe m'_q ($q \geq 2$) (respectivement m_c) s'il existe une fonction $f \in L^q$ (respectivement continue) telle que

$$(0.7) \quad \begin{aligned} a_r &= \int_0^1 f(t) \varphi_r(t) dt \quad (r = 1, 2, 3, \dots), \\ \int_0^1 f^2 dt &= \sum_r a_r^2. \end{aligned}$$

Le premier Chapitre contient le

Théorème 1. *Les propriétés (c) et (d) sont équivalentes à l'inégalité*

$$(0.8) \quad \liminf_{r \rightarrow \infty} \int_0^1 |\varphi_r(t)| dt > 0.$$

Le premier théorème du deuxième Chapitre est le

Théorème 2. *Les fonctions φ_r étant bornées, il existe une suite partielle $\psi_r = \varphi_{n_r}$ telle que chaque série*

$$(0.9) \quad \sum_r a_r \psi_r(t)$$

de classe m'_q ($q \geq 2$) soit aussi de classe m_q et converge presque partout; de plus, en désignant par $S^*(t)$ le maximum des sommes partielles de la série (0.9), on a

$$(0.10) \quad \int_0^1 |S^*(t)|^q dt \leq A_q \int_0^1 |f(t)|^q dt \quad ^3).$$

Sous les mêmes hypothèses on a le

Théorème 3. Si la série (0.9) est de classe m_q ($q \geq 2$), (les fonctions $\psi_\nu = \varphi_{n_\nu}$ étant choisies convenablement) la série

$$\sum_\nu \varepsilon_\nu a_\nu \psi_\nu \quad (\varepsilon_\nu = \pm 1, \nu = 1, 2, \dots)$$

est de même classe quelle que soit la suite $\{\varepsilon_\nu\}$.

En supposant le système uniformément borné, on a le

Théorème 4. Les fonctions $\varphi_\nu(t)$ étant uniformément bornées, on peut choisir la suite partielle $\psi_\nu = \varphi_{n_\nu}$ de sorte que toute série (0.9) de classe m'_q soit aussi de classe m_q pour chaque q fini et qu'on ait (la définition de S^* étant la même qu'auparavant)

$$(0.11) \quad \int_0^1 |S^*|^q dt \leq A_q \int_0^1 |f|^q dt \leq A'_q \left(\sum_\nu a_\nu^2 \right)^{q/2}.$$

La première partie de cette proposition est connue, elle est due à M. BANACH ⁴⁾.

Le dernier théorème du deuxième Chapitre est le

Théorème 5. Les fonctions $\varphi_\nu(t)$ étant continues, on peut choisir la suite partielle $\psi_\nu = \varphi_{n_\nu}$ de sorte que toute série (0.9) de classe m'_c soit uniformément convergente.

Le Chapitre III contient le

Théorème 6. Pour que le système $\{\varphi_n(t)\}$ contienne une suite partielle $\psi_\nu = \varphi_{n_\nu}$ jouissant de la propriété (H), il faut et il suffit que l'on ait

$$(0.12) \quad \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^1 |\varphi_\nu| dt > 0.$$

³⁾ A, A', A_q, A'_q etc. désignent des constantes différentes dans les différents contextes.

⁴⁾ S. B a n a c h, Sur les séries lacunaires, Bull. Acad. Pol. (1933) p. 149–154.

Le théorème fondamental du Chapitre IV est le

Théorème 7. *L'inégalité (0.12) étant vérifiée et les fonctions $\varphi_i(t)$ continues, le système contient une suite partielle $\psi_r = \varphi_{n_r}$ jouissant de la propriété (k).*

Il est évident que chaque système uniformément borné satisfait à l'inégalité (0.12), d'où le

Théorème 8. *Chaque système $\{\varphi_i\}$ de fonctions uniformément bornées et continues contient une suite partielle jouissant de la propriété (K).*

La proposition suivante complète le résultat du théorème 7:

Théorème 9. *Les hypothèses du théorème 7 étant vérifiées, on peut choisir la suite partielle $\psi_r = \varphi_{n_r}$ de sorte que pour toute suite $\{a_r\}$ telle que*

$$a_r = o(1), \quad \sum_r |a_r| = \infty$$

et chaque nombre s il existe un point x dans lequel la série (0.9) converge vers s .

En joignant les théorèmes 5 et 7 on obtient le

Théorème 10. *Sous les hypothèses du théorème 7 il existe une suite partielle $\psi_r = \varphi_{n_r}$ telle que toute série (0.9) de classe m'_c satisfait à la condition (0.5).*

Chapitre I.

1. Les propriétés (c) et (d) étant équivalentes il suffit de démontrer le théorème 1 pour la propriété (c). La démonstration est basée sur un lemme important dû à R. PALEY et M. A. ZYGMUND ⁵⁾.

Lemme 1. *En posant*

$$(1.1) \quad \int_a^b |f| dx \geq (b-a) A B, \quad \int_a^b f^2 dx \leq (b-a) B^2,$$

$$(1.2) \quad E = E_x \left(\frac{A}{4} B \leq |f(x)| \leq \frac{4}{A} B \right),$$

⁵⁾ R. Paley and A. Zygmund, On some series of functions III, Proc. Cambridge Phil. Soc. (1932) p. 190—205.

on a l'inégalité

$$(1.3) \quad |E| \geq \frac{J^2}{8} (b-a).$$

Nous allons reproduire la démonstration. Posons

$$E_1 = E(|f(x)| < \lambda B), \quad E_2 = E(\lambda B \leq f(x) \leq \mu B), \\ E_3 = E(|f| > \mu B), \quad (0 < \lambda < \mu).$$

D'après (1.1) on obtient

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_{E_1} + \int_{E_2} + \int_{E_3} \geq J B (b-a).$$

Or

$$\mu^2 B^2 E_3 \leq \int_{E_3} f^2 dx \leq B^2 (b-a),$$

d'où

$$|E_3| \leq \mu^{-2} (b-a).$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz, on trouve en vertu de la dernière formule

$$\int_{E_3} |f| dx \leq B \mu^{-1} (b-a).$$

D'autre part, d'une façon évidente

$$\int_{E_1} |f| dx \leq \lambda B (b-a),$$

on obtient donc

$$|E_2| \mu B \geq \int_{E_2} |f| dx \geq B (J - \lambda - \mu^{-1}) (b-a).$$

En y posant $\lambda = \mu^{-1} = \frac{J}{4}$, on arrive à la formule (1.3).

2. L'inégalité (0.8) équivaut à l'existence d'un nombre positif J satisfaisant aux inégalités

$$(1.4) \quad \int_0^1 |\varphi_v(t)| dt \geq J \quad (v=1, 2, \dots).$$

En appliquant le lemme 1 avec $B=1$ on obtient

$$(1.5) \quad |E_r| = \left| E \left(\frac{A}{4} \leq |\varphi_r(x)| \leq \frac{4}{A} \right) \right| \geq \frac{A^2}{8}.$$

D'autre part, la série (0.1) étant presque partout convergente, il existe un ensemble E , $|E| > 1 - A^2/16$ dans lequel la suite $\{a_r \varphi_r(t)\}$ tend uniformément vers zéro, donc aussi

$$|a_r| \int_E |\varphi_r| dt \rightarrow 0.$$

D'après (1.5) on obtient

$$|a_r| \int_E |\varphi_r| dt \geq |a_r| \int_{E \cdot E_r} |\varphi_r| dt \geq |a_r| \frac{A^2}{16} \cdot \frac{A}{4}.$$

Il en résulte que $a_r \rightarrow 0$.

La suffisance de la condition (0.8) se trouve ainsi établie, la nécessité est banale. En effet, si l'hypothèse (0.8) tombe en défaut, on peut choisir la suite $\{n_r\}$ de sorte que l'on ait

$$\sum_r \int_0^1 |\varphi_{n_r}| dt < \infty.$$

La série

$$\sum_r \varphi_{n_r}(t)$$

converge alors presque partout sans que la suite de ses coefficients tende vers zéro.

Remarque. M. ORLICZ a bien voulu m'informer que le théorème 1 lui était connu depuis longtemps. Notamment, on peut démontrer ce théorème directement, sans employer le lemme 1, de la manière suivante:

La nécessité de la condition (0.8) étant évidente, il s'agit seulement de démontrer qu'elle est suffisante. Or, l'inégalité de Schwarz donne pour tout ensemble E

$$\int_E |\varphi_n(t)| dt \leq |E|^{1/2},$$

par conséquent, si l'on choisit l'ensemble E de sorte que la suite $\{a_r \varphi_r(t)\}$ y tende uniformément vers zéro et que l'on ait

$$\int_E |\varphi_r(t)| dt \geq A/2,$$

on aura $a_r \rightarrow 0$.

Chapitre II.

1. Nous désignons par $\{\omega_r(t)\}$ le système orthogonal de M. WALSH. Les résultats suivants sont dûs à R. PALEY ⁶⁾.

Lemme 2. Toute série

$$(2.1) \quad \sum_r a_r \omega_r(t)$$

constituant le développement d'une fonction $f \in L^p$ ($p > 1$) est de classe m_p .

Lemme 3. La série (2.1) étant de classe m_p ($p > 1$) et $\{\lambda_r\}$ désignant une suite croissante de nombres naturels soumis aux inégalités

$$\lambda_{r+1}/\lambda_r \geq q > 1 \quad (r = 1, 2, \dots),$$

toute série

$$(2.2) \quad \sum_r \varepsilon_r \sum_{k=\lambda_r}^{\lambda_{r+1}-1} a_k \omega_k(t) \quad (\varepsilon_r = \pm 1),$$

est aussi de classe m_p .

Lemme 4. Si la série (2.1) est de classe m_p ($p > 1$), alors en posant

$$S^*(\lambda, t) = \sup_r \sum_{k=1}^{\lambda_r} a_k \omega_k(t), \quad f = \sum_r a_r \omega_r(t),$$

on a

$$(2.3) \quad \int_0^1 |S^*(\lambda, t)|^p dt \leq A_{p,q} \int_0^1 |f|^p dt.$$

2. Soit

$$(2.4) \quad \varphi_r(t) = \sum_i a_{r,i} \omega_i(t), \quad |\varphi_r| \leq M_r.$$

Il est évident que

$$(2.5) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} a_{r,i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Il en résulte, d'après le lemme 2, qu'on peut choisir deux suites $\{n_r\}$ et $\{m_r\}$ de manière à satisfaire aux inégalités

⁶⁾ R. Paley, A remarkable system of orthogonal functions, Proc. Lond. Math. Soc. 34 (1932) p. 241—279.

$$(2.6) \quad \psi_\nu = \varphi_{n_\nu} = \sum_{m_\nu}^{m_{\nu+1}-1} a_{n_\nu, i} \omega_i(t) + h_\nu(t) \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

$$(2.7) \quad \int_0^1 |h_\nu|^r dt \leq 2^{-\nu r},$$

$$(2.8) \quad m_{\nu+1}/m_\nu \geq q > 1.$$

Quelle que soit la suite $\{a_\nu\}$, $a_\nu = o(1)$, la série

$$\sum_\nu |a_\nu h_\nu|$$

converge presque partout et sa somme h appartient à L^q pour chaque q fini; cela résulte immédiatement de (2.7) en vertu de l'inégalité de Minkowski. Or, si la série (0.9) est de classe m'_q ($q \geq 2$), la série

$$\sum_\nu a_\nu \left(\sum_{i=m_\nu}^{m_{\nu+1}-1} a_{n_\nu, i} \omega_i(t) \right)$$

l'est aussi, donc, d'après le lemme 2, cette dernière série est de classe m_q et le théorème 2 résulte du lemme 4. On déduit de même le théorème 3 du lemme 3. Le théorème 4 résulte du théorème 2 et du

Lemme 5. *Le système $\{\varphi_\nu\}$ étant uniformément borné, on peut choisir la suite partielle $\psi_\nu = \varphi_{n_\nu}$ de sorte que l'on ait*

$$\int_0^1 |f|^q dt \leq A_q \left(\sum_\nu a_\nu^2 \right)^{q/2},$$

où

$$f = \sum_\nu a_\nu \psi_\nu, \quad \int_0^1 f^2 dt = \sum_\nu a_\nu^2.$$

Ce théorème est dû à M. BANACH; on pourrait l'obtenir en utilisant le système orthogonal de M. WALSH, d'après les résultats de PALEY, mais nous n'insisterons pas sur ce point.

3. Supposons les fonctions $\varphi_\nu(t)$ continues et posons

$$A_{p,q} = (p/q, p+1/q);$$

il est facile de définir les suites $\{n_\nu\}$ et $\{m_\nu\}$ de façon que l'on ait

$$(2.9) \quad \max_{x \in J_{i, m_\nu}} \left| \int_{J_{i, m_\nu}} \{ \varphi_{n_\nu}(t) - \varphi_{n_\nu}(x) \} dt \right| \leq 2^{-\nu} m_\nu^{-1} \quad (i=0, 1, \dots, m_\nu; \nu=1, 2, \dots, \nu),$$

$$(2.10) \quad \max_i \left| \int_{J_{i, m_\mu}} \varphi_{n_{\nu+1}}(t) dt \right| \leq 2^{-\nu} m_\nu^{-1} \quad (\nu=1, 2, \dots; \mu=1, 2, \dots, \nu).$$

4. Supposons qu'une série

$$(2.11) \quad \sum_r a_r \psi_r,$$

où les ψ_r sont les fonctions définies dans le paragraphe précédent, soit de classe m'_c .

Nous allons démontrer qu'elle converge uniformément. En effet, soit

$$x \in J_{i, m_k}.$$

La série (2.11) étant de classe m'_c , on a

$$\int_{J_{i, m_k}} f(t) dt = \int_{J_{i, m_k}} \sum_{r=1}^k a_r \psi_r(t) dt + \sum_{r=k+1}^{\infty} a_r \int_{J_{i, m_k}} \psi_r(t) dt,$$

et cette formule donne, d'après les inégalités (2.9) et (2.10),

$$\left| \int_{J_{i, m_k}} \{ f(t) - \sum_{r=1}^k a_r \psi_r(x) \} dt \right| \leq \sum_{r=1}^k |a_r| \cdot 2^{-k} m_k^{-1} + m_k^{-1} \sum_{r=k+1}^{\infty} |a_r| \cdot 2^{-k} = o(m_k^{-1})$$

uniformément en x . Cela démontre le théorème 5.

Chapitre III.

1. La démonstration du théorème 6 est longue, elle est basée sur un certain nombre de lemmes dont le plus importants sont les lemmes 6 et 11.

Lemme 6. Pour chaque nombre $A > 2$ on peut choisir une suite partielle $\psi_i = \varphi_{n_i}$ et un ensemble P , de sorte que l'on ait

$$(3.1) \quad |P| > 1 - 2A^{-1}$$

et, pour chaque couple de points $a, b \in P$,

$$(3.2) \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} \int_a^b |\varphi_r|^2 dt \leq A(b-a).$$

Démonstration. Désignons par M_1 l'ensemble des segments $\mathcal{A}$ pour lesquels

$$(3.3) \quad \limsup_{v \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{A}} \varphi_v^2 dt \geq A |\mathcal{A}|.$$

Supposons l'ensemble M_1 non vide et choisissons un segment $\mathcal{A}_1$ quelconque de l'ensemble M_1 tel que

$$(3.4) \quad |\mathcal{A}_1| > \frac{1}{2} \sup_{\mathcal{A} \in M_1} |\mathcal{A}|.$$

D'après l'inégalité (3.3) on obtient

$$1 \geq \limsup_{v \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{A}_1} \varphi_v^2 dt \geq A |\mathcal{A}_1|,$$

donc

$$|\mathcal{A}_1| \leq A^{-1}.$$

Désignons maintenant par $\mathcal{A}_1^*$ le segment concentrique à $\mathcal{A}_1$ de longueur $2|\mathcal{A}_1|$. Ce segment satisfait évidemment à l'inégalité

$$(3.5) \quad |\mathcal{A}_1^*| > \sup_{\mathcal{A} \in M_1} |\mathcal{A}|.$$

Choisissons la suite $\{\varphi_{n_v}\}$ de sorte que l'on ait

$$(3.6) \quad \liminf_{v \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{A}_1} \varphi_{n_v}^2 dt \geq A |\mathcal{A}_1|,$$

et désignons cette suite par $\{\varphi_{1,v}\}$.

Considérons maintenant l'ensemble M_2 des segments $\mathcal{A}$ dis-joints avec $\mathcal{A}_1^*$ pour lesquels

$$\limsup_{v \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{A}} \varphi_{1,v}^2 dt \geq A |\mathcal{A}|.$$

En supposant M_2 non vide, nous pouvons choisir un segment $\mathcal{A}_2$ et une suite partielle $\{\varphi_{2,v}\}$ de la suite $\{\varphi_{1,v}\}$ de manière à satisfaire aux inégalités

$$(3.7) \quad |\mathcal{A}_2| > \frac{1}{2} \sup_{\mathcal{A} \in M_2} |\mathcal{A}|,$$

$$(3.8) \quad \liminf_{v \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{A}_2} \varphi_{2,v}^2 dt \geq A |\mathcal{A}_2|.$$

On voit facilement que

$$|\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2| \leq A^{-1}.$$

Désignons maintenant par $\mathcal{A}_2^*$ le segment concentrique à $\mathcal{A}_2$ de longueur $2|\mathcal{A}_2|$. On aura

$$|\mathcal{A}_2^*| > \text{b. sup}_{\mathcal{A} \in M_2} |\mathcal{A}|.$$

En procédant de même nous définirons les ensembles $M_3, M_4, \dots, M_k$, les segments $\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \dots, \mathcal{A}_k$ et $\mathcal{A}_3^*, \mathcal{A}_4^*, \dots, \mathcal{A}_k^*$ et les suites $\{\varphi_{3,v}\}, \{\varphi_{4,v}\}, \dots, \{\varphi_{k,v}\}$.

Considérons l'ensemble M_{k+1} des segments $\mathcal{A}$ disjoints avec les segments $\mathcal{A}_1^*, \mathcal{A}_2^*, \dots, \mathcal{A}_k^*$, pour lesquels

$$\limsup_{v \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{A}} \varphi_{k,v}^2 dt \geq A |\mathcal{A}|.$$

En supposant cet ensemble non vide nous pouvons choisir un segment $\mathcal{A}_{k+1}$ et une suite partielle $\{\varphi_{k+1,v}\}$ de la suite $\{\varphi_{k,v}\}$ de manière à satisfaire aux inégalités

$$|\mathcal{A}_{k+1}| > \frac{1}{2} \text{b. sup}_{\mathcal{A} \in M_{k+1}} |\mathcal{A}|,$$

$$\liminf_{v \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{A}_{k+1}} \varphi_{k+1,v}^2 dt > A |\mathcal{A}_{k+1}|.$$

Deux cas sont à distinguer: ou bien un des ensembles M_v est vide, ou bien tous les ensembles M_v sont non vides.

Dans le premier cas nous poserons

$$\psi_v = \varphi_{k,v}, \quad P = (0,1) - \sum_1^k \mathcal{A}_v^*,$$

où k désigne le plus petit indice pour lequel l'ensemble M_{k+1} est vide. On a d'une façon évidente

$$\left| \sum_1^k \mathcal{A}_v^* \right| \leq 2 \sum_1^k |\mathcal{A}_v| \leq 2A^{-1},$$

et la condition (3.1) se trouve vérifiée. Pour prouver que l'inégalité (3.2) est aussi satisfaite, supposons que $a, b \in P$ et que l'on ait

$$\limsup_{v \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_v^2 dt \geq A(b-a).$$

Cette hypothèse entraîne nécessairement (comme M_{k+1} est vide) que l'intervalle (a, b) admet des points intérieurs communs avec un des segments $J_1^*, J_2^*, \dots, J_k^*$.

Supposons que J_n^* soit le premier de ces segments pour lequel $(a, b) J_n^* > 0$. Aucun des points intérieurs de J_n^* n'appartenant à P , il s'ensuit que l'intervalle (a, b) contient le segment J_n^* tout entier, ce qui donne

$$(3.9) \quad b - a \geq |J_n^*| > b. \sup_{J \in M_n} |J|.$$

D'autre part, l'intervalle (a, b) étant disjoint avec les segments $J_1^*, J_2^*, \dots, J_{n-1}^*$, on a, d'après la supposition faite, $(a, b) \in M_n$, c'est-à-dire

$$b - a \leq b. \sup_{J \in M_n} |J|,$$

mais cela contredit l'inégalité (3.9).

Si aucun des ensembles M_r n'est vide, nous poserons

$$\psi_r = q_{r,1}, \quad P = (0,1) - \sum J_r^*.$$

On a pour chaque n

$$1 > \limsup_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{J_i} \psi_m^2 dt \geq A \sum_{i=1}^n |J_i|,$$

donc

$$\sum_{i=1}^n |J_i| \leq A^{-1}.$$

En y posant $n = \infty$ on obtient

$$\sum_i |J_i| \leq A^{-1},$$

donc aussi

$$|\sum_i J_i^*| \leq \sum_i |J_i^*| \leq 2 \sum_i |J_i| \leq 2A^{-1},$$

et la condition (3.1) se trouve encore vérifiée. Il nous reste à démontrer pour chaque couple de nombres $a, b \in P$ l'inégalité

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_r^2 dt \leq A(b-a).$$

Supposons l'inégalité contraire. Dans ce cas il est aisé de voir que l'intervalle (a, b) contient des points intérieurs d'un des segments $\mathcal{A}_n^*$. Supposons que $\mathcal{A}_n^*$ soit le premier pour lequel on ait $|\mathcal{A}_n^*(a, b)| > 0$, a, b appartenant à P ; il en résulte $(a, b) \supset \mathcal{A}_n^*$, c'est-à-dire $|\mathcal{A}_n^*| \leq b - a$. D'autre part $(a, b) \in M_n$, donc

$$b - a \leq \sup_{\mathcal{A} \in M_k} |\mathcal{A}|,$$

contrairement à l'inégalité précédente.

Le lemme est donc entièrement établi.

2. Lemme 7. Soit

$$\int_0^1 |\varphi_r| dt \geq 2\omega > 0 \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Il existe alors une suite partielle $\psi_r = \varphi_{n_r}$ et un ensemble P de mesure positive tel que, pour chaque couple a, b de nombres appartenant à P , on ait

$$(3.10) \quad \liminf_{r \rightarrow \infty} \int_a^b |\psi_r| dt \geq \omega(b - a).$$

Démonstration. La démonstration est tout à fait analogue à celle du lemme précédent. Désignons par M_1 l'ensemble des segments $\mathcal{A}$ pour lesquels

$$(3.11) \quad \liminf_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{A}} |\varphi_r| dt \leq \omega |\mathcal{A}|.$$

Choisissons ensuite (en supposant M_1 non vide) un segment $\mathcal{A}_1$ et une suite $\varphi_{1,r} = \varphi_{n_r}$ de manière à satisfaire aux inégalités

$$(1 + \varepsilon) |\mathcal{A}_1| > \mathbf{b. sup}_{\mathcal{A} \in M_1} |\mathcal{A}|,$$

$$\limsup \int_{\mathcal{A}_1} |\varphi_{1,r}| dt \leq \omega |\mathcal{A}_1|,$$

où ε désigne un nombre positif que nous préciserons plus loin. Désignons encore par $\mathcal{A}_1^*$ le segment concentrique à $\mathcal{A}_1$ de longueur $(1 + \varepsilon) |\mathcal{A}_1|$.

Supposons $M_1, M_2, \dots, M_n, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n, \mathcal{A}_1^*, \mathcal{A}_2^*, \dots, \mathcal{A}_n^*$ et les suites $\{\varphi_{1,r}\}, \{\varphi_{2,r}\}, \dots, \{\varphi_{n,r}\}$ définies.

Considérons l'ensemble M_{n+1} des segments $\mathcal{A}$ disjoints avec les segments $\mathcal{A}_1^*, \mathcal{A}_2^*, \dots, \mathcal{A}_n^*$ et satisfaisant à l'inégalité

$$\liminf_{v \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{A}} |\varphi_{n,v}| dt \leq \omega |\mathcal{A}|.$$

En supposant M_{n+1} non vide nous pouvons choisir un segment $\mathcal{A}_{n+1}$ et une suite partielle $\{\varphi_{n+1,v}\}$ de la suite $\{\varphi_{n,v}\}$ de manière à satisfaire aux inégalités

$$(1 + \varepsilon) |\mathcal{A}_{n+1}| > \text{b. sup}_{\mathcal{A} \in M_{n+1}} |\mathcal{A}|, \quad \limsup_{v \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{A}_{n+1}} |\varphi_{n+1,v}| dt \leq \omega |\mathcal{A}_{n+1}|.$$

Nous désignerons par $\mathcal{A}_{n+1}^*$ le segment concentrique au segment $\mathcal{A}_{n+1}$ de longueur $(1 + \varepsilon) |\mathcal{A}_{n+1}|$.

Deux cas peuvent se présenter: ou bien il y a seulement un nombre fini d'ensembles M_v non vides ou bien il en existe un nombre infini.

Nous nous occuperons seulement du deuxième cas, en laissant aux lecteurs le premier.

Posons

$$\psi_v = \varphi_{v,v}; \quad P = (0,1) - \sum_v \mathcal{A}_v^*.$$

Pour chaque n on a

$$\limsup_{v \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{\mathcal{A}_k} |\psi_v| dt \leq \omega \sum_{k=1}^n |\mathcal{A}_k| \leq \omega.$$

Il en résulte que

$$\liminf_{v \rightarrow \infty} \int_{C \sum_{k=1}^n \mathcal{A}_k} |\psi_v| dt \geq \omega.$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz on en obtient

$$|C \sum_{k=1}^n \mathcal{A}_k| \geq \omega^2;$$

en y posant $n = \infty$ on en tire

$$|C \sum_v \mathcal{A}_v| \geq \omega^2,$$

c'est-à-dire

$$|\sum_v \mathcal{A}_v| \leq 1 - \omega^2,$$

donc

$$\left| \sum_v A_v^* \right| \leq \sum_v |A_v^*| = (1 + \varepsilon) \sum_v |A_v| \leq (1 + \varepsilon)(1 - \omega^2).$$

Pour ε suffisamment petit il en résulte que

$$\left| \sum_v A_v^* \right| < 1,$$

ou bien

$$\left| C \sum_v A_v^* \right| > 0.$$

La démonstration de l'inégalité (3.10) est la même que celle de l'inégalité (3.2) du lemme précédent et nous ne croyons pas nécessaire de la reproduire.

3. En joignant les lemmes 6 et 7 on obtient le

Lemme 8. *Sous l'hypothèse (0.12) il existe une suite partielle $\psi_v = \varphi_{n_v}$ et un ensemble P , $|P| > 0$, tel que, a, b étant des points arbitraires de P , on ait*

$$(3.12) \quad \limsup_{v \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_v^2 dt \leq A^2(b-a),$$

$$(3.13) \quad \liminf_{v \rightarrow \infty} \int_a^b |\psi_v| dt \geq \omega(b-a),$$

où A et ω désignent deux constantes positives.

4. Lemme 9. *Si la série*

$$\sum_v a_v \psi_v$$

est convergente dans un sous-ensemble positif de P (les fonctions ψ_v et l'ensemble P étant les mêmes que dans le lemme 8), la suite $\{a_v\}$ tend vers zéro.

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 1 et nous allons indiquer seulement son idée directrice. Il existe un ensemble positif contenu dans P dans lequel la suite $\{a_v \psi_v\}$ tend uniformément vers zéro; en désignant cet ensemble par R on aura

$$(3.14) \quad |a_v| \cdot \int_R |\psi_v| dt \rightarrow 0.$$

Nous pouvons aussi admettre que R est contenu dans un intervalle (a, b) , $a, b \in P$ et que l'on a

$$|(a, b) \cdot R| \geq \left(1 - \frac{\omega^2}{16 A^2}\right) (b - a).$$

Posons

$$E_r = E_x \{x \in (a, b) \mid \frac{\omega}{4} \leq |\psi_r| \leq \frac{4}{\omega} A^2\}.$$

En appliquant le lemme 1 avec $A = \omega/A$ et $B = A$ on démontre l'inégalité

$$|E_r| \geq (b - a) \frac{\omega^2}{8 A^2}.$$

Il suffit maintenant de procéder comme dans la démonstration du théorème 1 pour obtenir

$$\int_{\dot{R}} |\psi_r| dt \geq \int_{RE_r} |\psi_r| dt \geq (b - a) \frac{\omega^2}{16 A^2} \cdot \frac{\omega}{4} = (b - a) \left(\frac{\omega}{4 A}\right)^3 A.$$

En comparant ce résultat avec (3.14) on déduit le lemme.

En passant, nous avons obtenu la proposition suivante:

R étant un sous-ensemble positif quelconque de P on a

$$(3.15) \quad \liminf_{r \rightarrow \infty} \int_{\dot{R}} |\psi_r| dt > 0.$$

5. Lemme 10. *Il existe une suite de fonctions $g_1, g_2, \dots, g_r, \dots$ satisfaisant aux conditions (3.12), (3.13) et (3.15) (non nécessairement avec les mêmes constantes), telles que pour chaque v l'intervalle $(0,1)$ se décompose en un nombre fini de segments dans lesquels la fonction g_v reste constante, et satisfaisant encore à l'hypothèse suivante:*

Si la série

$$\sum_r a_r \psi_r$$

converge presque partout, il en est de même de la série

$$\sum_r a_r g_r.$$

Pour le prouver il suffit de choisir des fonctions $g_1, g_2, \dots, g_r, \dots$ de la forme demandée de sorte que l'on ait

$$\sum_r \left\{ \int_0^1 (\psi_r - g_r)^2 dt \right\}^{1/2} < \infty.$$

En effet, cette inégalité entraîne (3.12), (3.13) et (3.15); d'autre part, si $a_r = o(1)$, on a

$$\sum_r \int_0^1 |a_r (\psi_r - g_r)| dt < \infty.$$

Il en résulte que la série

$$\sum_r |a_r (\psi_r - g_r)|$$

converge presque partout. Remarquons encore que pour chaque fonction $f \in L^2$

$$(3.16) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^1 f g_r dt = 0.$$

6. Nous appellerons les suites $\{\lambda_r(t)\}$ et $\{\mu_r(t)\}$ équivalentes dans un ensemble E , lorsque la convergence presque partout de la série

$$\sum_r a_r \lambda_r(t),$$

où $a_r = o(1)$, entraîne presque partout celle de la série

$$\sum_r a_r \mu_r(t),$$

et réciproquement.

Lemme 11. La suite $\{g_r\}$ définie dans le paragraphe précédent contient une suite partielle $\{g_{n_r}\}$ équivalente dans P à une autre suite $\{h_r\}$ jouissant de la propriété suivante: les fonctions

$$l_{\mu, r} = h_{\mu} h_r \quad (2 \leq \mu < r)$$

forment un système orthogonal et normé dans P .

Démonstration. Soient

$$a = b.\inf P, \quad b = b.\sup P.$$

Nous pouvons admettre que $a, b \in P$.

Choisissons (cela est possible d'après (3.16)) un n_1 assez grand pour que l'on ait

$$\left| \int_P g_{n_1} dt \right| \leq 2^{-1} |P|,$$

$$\int_a^b g_{n_1}^2 dt \leq 2A^2(b-a).$$

Posons pour $t \in P$

$$h_1(t) = g_{r_1} - |P|^{-1} \int_P g_{r_1} dt.$$

En tenant compte de la forme de la fonction g_{n_1} on voit qu'il existe un système fini de segments $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_{r_1}$ tels que la fonction h_1 soit constante dans chaque ensemble $P\mathcal{A}_i$; de plus, la fonction h_1 n'étant définie que dans P , nous pouvons admettre que $|P\mathcal{A}_i| > 0$ ($1 \leq i \leq r_1$).

En supposant les fonctions $h_1, h_2, \dots, h_k$ et les segments $\mathcal{A}_{r_1, r_2, \dots, r_k}$ définis, nous allons définir la fonction h_{k+1} et les segments

$$\mathcal{A}_{r_1, r_2, \dots, r_{k+1}} \quad (1 \leq r_i \leq r_i; i = 1, 2, \dots, k+1).$$

Considérons un segment arbitraire $\mathcal{A}_{r_1, r_2, r_3, \dots, r_k} = \mathcal{A}$. En appliquant un théorème bien connu de VITALI nous pouvons choisir un système fini de segments disjoints $\mathcal{A}^{(i)} = \mathcal{A}_{r_1, \dots, r_k}^{(i)}$, avec des extrémités appartenant à P , et satisfaisant aux inégalités

$$(3.17) \quad |\mathcal{A}^{(i)} P| \geq 1/2 |\mathcal{A}^{(i)}|,$$

$$(3.18) \quad |P(\mathcal{A} - \sum \mathcal{A}^{(i)})| \leq |\mathcal{A} P|^2 \cdot 2^{-(k+1)},$$

$$(3.19) \quad \max |\mathcal{A}^{(i)} P| \leq 2^{-(k+1)} |\mathcal{A} P|^2.$$

Maintenant, nous pouvons choisir un $n_{k+1} > n_k$ de manière à satisfaire aux inégalités

$$(3.20) \quad \left| \int_{P\mathcal{A}_{r_1, r_2, \dots, r_k}^{(i)}} g_{n_{k+1}} dt \right| \leq 2^{-(k+1)} |P\mathcal{A}_{r_1, r_2, \dots, r_k}| \quad (1 \leq r_s \leq r_s, s = 1, 2, \dots, k),$$

$$(3.21) \quad \int_{\mathcal{A}_{r_1, r_2, \dots, r_k}^{(i)}} g_{n_{k+1}}^2 dt \leq 2A^2 |\mathcal{A}_{r_1, r_2, \dots, r_k}^{(i)}| \quad (1 \leq r_s \leq r_s, s = 1, 2, \dots, k).$$

Désignons par h_{k+1}^* la fonction égale à $g_{n_{k+1}}$ dans les ensembles $P_{J_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(i)}}$ et s'annulant aux autres points de P . Posons pour

$$t \in P_{J_{i_1, i_2, \dots, i_k}} \quad h'_{k+1} = h_{k+1}^* - |P_{J_{i_1, i_2, \dots, i_k}}|^{-1} \int_{P_{J_{i_1, i_2, \dots, i_k}}} h_{k+1}^* dt.$$

En vertu de (3.21) et (3.18) on obtient

$$\begin{aligned} \int_{P_{J_{i_1, i_2, \dots, i_k}}} h_{k+1}'^2 dt &\leq \int_{P_{J_{i_1, i_2, \dots, i_k}}} h_{k+1}^{*2} dt \\ &= \sum_{P_{J_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(i)}}} \int g_{n_{k+1}}^2 dt \leq 2A^2 \sum |J_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(i)}| \leq 4A^2 |P_{J_{i_1, i_2, \dots, i_k}}| \end{aligned}$$

Considérons la fonction $A_\varepsilon(t)$ égale à $\varepsilon |J_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(2)} P|$ dans $P_{J_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(1)}}$, à $-\varepsilon |J_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(1)} P|$ dans $P_{J_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{(2)}}$ et s'annulant aux autres points de $P_{J_{i_1, i_2, \dots, i_k}}$. Il est évident que l'intégrale

$$\int_{P_{J_{i_1, i_2, \dots, i_k}}} h_{k+1}' + A_\varepsilon(t)^2 dt$$

ne surpasse pas $4A^2 |P_{J_{i_1, i_2, \dots, i_k}}|$ pour $\varepsilon = 0$ et tend vers l'infini avec ε . Il en résulte qu'il existe un ε' pour lequel elle est égale à $4A^2 |P_{J_{i_1, i_2, \dots, i_k}}|$. Nous poserons

$$\begin{aligned} A_{k+1}(t) &= A_\varepsilon(t), \quad t \in P_{J_{i_1, i_2, \dots, i_k}}, \\ h_{k+1} &= h'_{k+1} + A_{k+1}. \end{aligned}$$

La fonction h_{k+1} étant ainsi définie, il nous reste à définir les segments $J_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}}$. Nous les choisissons de sorte que la fonction h_{k+1} soit constante dans chaque ensemble $P_{J_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}}}$, et que l'on ait

$$\begin{aligned} J_{i_1, i_2, \dots, i_k} \supset J_{i_1, i_2, \dots, i_k, i} \quad (1 \leq i \leq r_{k+1}), \quad |P_{J_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}}}| > 0, \\ (3.22) \quad |P(J_{i_1, i_2, \dots, i_k} - \sum_{i=1}^{r_{k+1}} J_{i_1, i_2, \dots, i_k, i})| = 0. \end{aligned}$$

Les fonctions h_i ainsi définies jouissent des propriétés suivantes:

a) la fonction h_k est constante dans chaque ensemble

$$P_{\mathcal{A}_{i_1, i_2, \dots, i_p}} \quad (p \geq k),$$

$$\text{b) } \int_{P_{\mathcal{A}_{i_1, i_2, \dots, i_k}}} h_p dt = 0 \quad (p > k),$$

$$\text{c) } \int_{P_{\mathcal{A}_{i_1, i_2, \dots, i_k}}} h_p^2 dt = 4 A^2 |P_{\mathcal{A}_{i_1, i_2, \dots, i_k}}| \quad (p > k, p \geq 2),$$

$$\text{d) } \int_P |h_i - g_{n_i}| dt \leq B 2^{-i/2}.$$

Il suffit de démontrer la propriété d). Considérons un segment $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{i_1, \dots, i_{k-1}}$ quelconque, en désignant par $\mathcal{A}^{(i)}$ les segments $\mathcal{A}_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}^{(i)}$. On a

$$\int_{P_{\mathcal{A}}} |g_{n_k} - h_k^*| dt = \int_{P(\mathcal{A} - \sum \mathcal{A}^{(i)})} |g_{n_k}| dt \leq 2 |P(\mathcal{A} - \sum \mathcal{A}^{(i)})|^{1/2},$$

donc d'après (3.18)

$$\int_{P_{\mathcal{A}}} |g_{n_k} - h_k^*| dt \leq |P_{\mathcal{A}}|^{1/2} 2^{-k/2}.$$

En faisant la somme pour tous les $\mathcal{A}$ on obtient

$$(3.23) \quad \int_P |g_{n_k} - h_k^*| dt \leq 2^{-k/2};$$

d'autre part, d'après (3.20),

$$(3.24) \quad \int_P |h_k^* - h_k'| dt \leq 2^{-k}.$$

Considérons enfin un segment $\mathcal{A}_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}$. On a

$$\int_{P_{\mathcal{A}_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}}^{(1)}} \mathcal{A}_k^2 dt + \int_{P_{\mathcal{A}_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}}^{(1)}} \mathcal{A}_k^2 dt \leq 4 A^2,$$

¹⁾ Nous supposons que $\int_0^2 g_r^2 dt \leq 2$.

d'où, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\int_{P_{J_{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}}}} |A_k| dt \leq 2A |(\mathcal{A}_{v_1, \dots, v_{k-1}}^{(1)} + \mathcal{A}_{v_1, \dots, v_{k-1}}^{(2)})P|^{1/2}.$$

En tenant compte de l'inégalité (3.19) on en obtient

$$(3.25) \quad \int_{P_{J_{v_1, \dots, v_{k-1}}}} |A_k| dt \leq 2A \cdot 2 |\mathcal{A}_{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}}P| 2^{-k/2}.$$

Les formules (3.23), (3.24) et (3.25) donnent l'inégalité d). Il en résulte que les suites $\{h_v\}$ et $\{g_{n_v}\}$ sont équivalentes dans l'ensemble P .

Posons maintenant

$$l_{\mu, v} = h_\mu h_v \quad (2 \leq \mu < v).$$

On a

$$\int_P l_{\mu, v}^2 dt = \sum_{P_{J_{v_1, v_2, \dots, v_\mu}}} \int h_\mu^2 h_v^2 dt \quad (2 \leq \mu < v).$$

Or, la fonction h_μ est constante dans chaque ensemble $P_{J_{v_1, v_2, \dots, v_\mu}}$; en désignant ses valeurs par $\alpha_{v_1, v_2, \dots, v_\mu}$ on en obtient, d'après l'égalité c),

$$\begin{aligned} \int_P l_{\mu, v}^2 dt &= \sum 4A^2 |P_{J_{v_1, v_2, \dots, v_\mu}}| \cdot \alpha_{v_1, v_2, \dots, v_\mu}^2 \\ (3.26) \quad &= 4A^2 \int_P g_\mu^2 = 4A^2 \sum_{J_{v_1, \dots, v_{\mu-1}}} \int g_\mu^2 dt \\ &= 4A^2 \cdot 4A^2 \sum |\mathcal{A}_{v_1, \dots, v_{\mu-1}}P| = (4A^2)^2 |P|. \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_P l_{\mu, v} l_{\mu', v'} dt \quad (\mu, v) \neq (\mu', v');$$

deux cas sont possibles: ou bien $v \neq v'$, ou bien $v = v'$.

Dans le premier cas nous pouvons admettre que $v < v'$ et $\mu' < v$. On a

$$\int_P l_{\mu, v} l_{\mu', v'} dt = \sum_{P_{J_{v_1, v_2, \dots, v_v}}} \int h_\mu h_v h_{\mu'} h_{v'}.$$

Or, le produit $h_\mu h_\nu h_{\mu'}$ est constant dans chaque ensemble $PA_{r_1, \dots, r_\nu}$; il en résulte d'après b) que chaque terme de la somme dans la dernière égalité s'annule.

Considérons maintenant le cas où $\nu = \nu'$. Supposons que $\mu < \mu'$. On a évidemment

$$\int_P l_{\mu, \nu} l_{\mu', \nu} dt = \sum_{PA_{r_1, \dots, r_{\mu'}}} \int h_\mu h_{\mu'} h_\nu^2 dt.$$

Le produit $h_\mu h_{\mu'}$ reste constant dans les ensembles $PA_{r_1, r_2, \dots, r_{\mu'}}$; en désignant ses valeurs par $\alpha_{r_1, r_2, \dots, r_{\mu'}}$ on obtient d'après c)

$$\int_P l_{\mu, \nu} l_{\mu', \nu} dt = 4A^2 \sum \alpha_{r_1, r_2, \dots, r_{\mu'}} |PA_{r_1, r_2, \dots, r_{\mu'}}| = 4A^2 \int_P h_\mu h_{\mu'} dt = 0.$$

Il est évident que la suite

$$\left\{ \frac{h_r}{2A} \right\} \quad (\nu \geq 2)$$

vérifie les thèses du lemme. En tenant compte de l'inégalité d) on conclut que cette suite vérifie aussi l'inégalité (3.15).

7. Lemme 12. Si la série

$$\sum_r a_r h_r$$

converge dans un ensemble de mesure positive contenu dans P (les fonctions h_r et l'ensemble P étant les mêmes que dans le lemme précédent), on a

$$\sum_r a_r^2 < \infty.$$

En effet, supposons que la dite série converge dans un sous-ensemble positif de P . Nous pouvons alors trouver un ensemble $R \subset P$ dans lequel la convergence est uniforme. On a (la constante M étant choisie convenablement)

$$\begin{aligned} (3.27) \quad M^2 &\geq \int_R \left(\sum_{r=1}^n a_r h_r \right)^2 dt \\ &\geq \sum_{r=1}^n a_r^2 \int_R h_r^2 dt - 2 \sum_{2 \leq r < s} |a_r a_s| \int_R h_r h_s dt = A_n - B_n. \end{aligned}$$

Supposons que

$$\sum_{r=1}^n a_r^2 \rightarrow \infty.$$

En tenant compte de la formule (3.15) on voit que pour un n assez grand

$$(3.28) \quad \int_R h_n^2 dt \geq \alpha > 0, \text{ donc } A_n \geq \frac{\alpha}{2} \sum_{r=1}^n a_r^2.$$

D'autre part, en appliquant les inégalités de Schwarz et de Bessel on obtient

$$(3.29) \quad B_n = o\left(\sum_{r=1}^n a_r^2\right).$$

Les inégalités (3.28) et (3.29) s'opposent à l'inégalité (3.27). Le lemme se trouve ainsi démontré. Le raisonnement de ce paragraphe est bien connu, il est dû à M. ZYGMUND ⁸⁾.

8. Maintenant, nous pouvons démontrer le théorème 6. En effet, d'après les lemmes 8, 9, 10 et 11, nous pouvons choisir une suite $\{\varphi_{n_r}\}$ telle que la convergence presque partout de la série

$$\sum_r a_r \varphi_{n_r}$$

entraîne

$$a_r = o(1)$$

et par cela la convergence presque partout dans P de la série

$$\sum_r a_r h_r,$$

où les fonctions h_r sont définies dans le lemme 11. Il en résulte, d'après le lemme 12, que

$$\sum_v a_v^2 < \infty.$$

D'autre part, d'après un théorème connu ⁹⁾, chaque système orthogonal et normé $\{\varphi_r\}$ contient une suite partielle $\{\varphi_{n_r}\}$ telle que chaque série

⁸⁾ A. Zygmund, On the convergence of lacunary trigonometrical series, Fund. Math. 16 (1930) p. 89—107.

⁹⁾ J. Marcinkiewicz, Sur la convergence des séries orthogonales, Studia Math. 6 (1936) p. 39—45. Ajouté pendant la correction des épreuves (1. 3. 1938): Cette partie du théorème se trouve aussi démontrée dans le travail récent de M. Menchoff, Sur la convergence et la sommation des séries de fonctions orthogonales, Bull. Soc. Math. de France 64 (1936) p. 1—24.

$$\sum_v a_v \varphi_{n_v}$$

converge presque partout dès que

$$\sum_v a_v^2 < \infty.$$

Le théorème est donc entièrement établi.

Chapitre IV.

1. Lemme 13. *Les conditions du théorème 7 étant vérifiées, nous pouvons choisir une suite $\psi_v = \varphi_{n_v}$ jouissant de la propriété suivante: pour chaque suite $\{\varepsilon_v\}$, $\varepsilon_v = \pm 1$, il y a un point x tel que*

$$(4.1) \quad \varepsilon_v = \text{sign } \psi_v(x), \quad 0 < C \leq |\psi_v(x)| \leq D,$$

où C et D désignent deux constantes absolues.

Démonstration. En vertu du lemme 8 nous pouvons supposer que les fonctions φ_v vérifient dans un ensemble P , $|P| > 0$, les conditions (3.12) et (3.13). Posons

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{16A} \right)^2$$

et choisissons deux points $a, b \in P$ de sorte que

$$(4.2) \quad |(a, b)P| > (1 - \lambda)(b - a).$$

Soit n_1 un nombre naturel satisfaisant aux conditions

$$(4.3) \quad \left| \int_a^b \varphi_{n_1} dt \right| \leq \frac{1}{4} \omega (b - a), \quad \int_a^b |\varphi_{n_1}| dt \geq \frac{3}{4} \omega (b - a),$$

$$\int_a^b \varphi_{n_1}^2 dt \leq 2A^2(b - a).$$

Posons pour tout v

$$(4.4) \quad E_v^+ = E_x(\varphi_v(x) > 0), \quad E_v^{-1} = E_x(\varphi_v(x) < 0)$$

$$\bar{E}_v^+ = E_x\left(\frac{\omega}{16} < \varphi_v(x) < \frac{16A^2}{\omega}\right), \quad \bar{E}_v^- = E_x\left(\frac{\omega}{16} < -\varphi_v(x) < \frac{16A^2}{\omega}\right).$$

D'après les inégalités (4.3) on conclut facilement que

$$\int_{(a, b) E_{n_1}^+} q_{n_1} dt \geq \frac{1}{4} \omega (b-a), \quad - \int_{(a, b) E_{n_1}^-} q_{n_1} dt \geq \frac{1}{4} \omega (b-a).$$

En appliquant le lemme 1 on en tire

$$|(a, b) \bar{E}_{n_1}^+| \geq 2\lambda(b-a), \quad |(a, b) \bar{E}_{n_1}^-| \geq 2\lambda(b-a).$$

En comparant ces inégalités avec (4.2) on obtient

$$|(a, b) \bar{E}_{n_1}^+ P| > 0, \quad |(a, b) \bar{E}_{n_1}^- P| > 0.$$

Il est maintenant évident qu'on peut choisir deux segments $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_{-1}$ avec les extrémités appartenant à P de manière à satisfaire aux inégalités

$$|\mathcal{A}_1 P| > (1-\lambda)|\mathcal{A}_1|, \quad |\mathcal{A}_{-1} P| > (1-\lambda)|\mathcal{A}_{-1}|,$$

$$\frac{\omega}{16} < q_{n_1}(x) < \frac{16A^2}{\omega} \text{ pour } x \in \mathcal{A}_1,$$

$$\frac{\omega}{16} < -q_{n_1}(x) < \frac{16A^2}{\omega} \text{ pour } x \in \mathcal{A}_{-1}.$$

Nous poserons $\psi_1 = q_{n_1}$.

En répétant cet argument on définit une suite $\{\psi_v\}$ de fonctions et les segments $\mathcal{A}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_v}$ ($\varepsilon_k = \pm 1$, $v = 1, 2, \dots$) de sorte que l'on ait

$$\mathcal{A}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_v} \supset \mathcal{A}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{v+1}},$$

$$(4.5) \quad \frac{\omega}{16} < \psi_v(x) < \frac{16A^2}{\omega} \text{ pour } x \in \mathcal{A}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{v+1}},$$

$$\frac{\omega}{16} < -\psi_v(x) < \frac{16A^2}{\omega} \text{ pour } x \in \mathcal{A}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{v-1}}.$$

Nous allons démontrer que la suite $\{\psi_v\}$ vérifie la thèse du lemme.

En effet, soit $\{\varepsilon_v\}$ ($\varepsilon_v = \pm 1$) une suite quelconque. Posons

$$x = \prod_v \mathcal{A}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_v}.$$

Les inégalités (4.5) donnent le lemme avec $C = \omega/16$ et $D = 16A^2/\omega$.

2. Le théorème 7 résulte immédiatement du lemme précédent. Supposons la série

$$\sum_r a_r \psi_r(t)$$

partout convergente et posons

$$x = \prod_r \mathcal{A} \operatorname{sign} a_1 \operatorname{sign} a_2 \dots \operatorname{sign} a_r.$$

En tenant compte des inégalités (4.5) on en conclut que

$$\sum_r |a_r| < \infty.$$

3. Soient $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r, \dots$ et $\mathcal{A}_{i_1, i_2, \dots, i_r, \dots}$ les fonctions et les segments définis dans le lemme 13. Désignons par $C_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r}$ le centre du segment $\mathcal{A}_{i_1, i_2, \dots, i_r}$. En modifiant un peu l'argument du lemme 13 nous pouvons admettre que

$$(4.6) \quad \max_{x \in \mathcal{A}_{i_1, i_2, \dots, i_k}} |\psi_r(C_{i_1, i_2, \dots, i_k}) - \psi_r(x)| \leq 2^{-k}.$$

4. Nous allons démontrer le théorème 9 en supposant que les fonctions ψ_r soient définies dans le lemme 13 de manière à satisfaire (4.6).

Nous nous bornerons au cas où s est fini et positif. Posons $\varepsilon_r = \operatorname{sign} a_r$. Désignons par λ_1 le premier indice pour lequel

$$d_1 = \sum_{r=1}^{\lambda_1} a_r \psi_r(C_{i_1, i_2, \dots, i_{\lambda_1}}) \geq s.$$

Soit encore $\eta_r = \varepsilon_r$ ($1 \leq r \leq \lambda_1$).

Les nombres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots < \lambda_k$ et η_r ($\eta_r = \pm 1, 1 \leq r \leq \lambda_k$) étant supposés définis, considérons l'expression

$$d_k = \sum_{r=1}^{\lambda_k} a_r \psi_r(C_{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\lambda_k}}).$$

Si $d_k \geq s$, nous désignerons par λ_{k+1} le premier indice $> \lambda_k$ pour lequel

$$d_k + \sum_{r=\lambda_k+1}^{\lambda_{k+1}} a_r \psi_r(C_{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\lambda_k}, -\varepsilon_{\lambda_k+1}, -\varepsilon_{\lambda_k+2}, \dots, -\varepsilon_{\lambda_{k+1}}}) < s;$$

si, au contraire, $d_k < s$, nous désignerons par λ_{k+1} le premier indice $> \lambda_k$ pour lequel

$$d_k + \sum_{r=\lambda_k+1}^{\lambda_{k+1}} a_r \psi_r(C_{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{\lambda_k}, \varepsilon_{\lambda_k+1}, \dots, \varepsilon_{\lambda_{k+1}}}) \geq s.$$

Soit

$$\eta_i = \pm \varepsilon_i \quad (\lambda_k < i \leq \lambda_{k+1}),$$

où l'on prend le signe supérieur pour $d_k < s$ et inférieur dans le cas contraire. La suite $\{\eta_i\}$ se trouve ainsi entièrement définie.

Posons

$$x = \prod_p J_{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_p}.$$

Nous allons démontrer que la série

$$\sum_r a_r \psi_r(x)$$

converge vers s .

Nous prouverons d'abord que $d_k \rightarrow s$. En effet, on a tantôt $d_{k-1} \geq s$, tantôt l'inégalité opposée. Supposons par exemple que $d_{k-1} \geq s$. En tenant compte de la définition des nombres λ_k on obtient

$$\begin{aligned} d_{k-1} + \sum_{r=\lambda_{k-1}+1}^{\lambda_k-1} a_r \psi_r(C_{\lambda_k}) &< s, \\ d_{k-1} + \sum_{r=\lambda_{k-1}+1}^{\lambda_k-1} a_r \psi_r(C_{\lambda_{k-1}}) &\geq s \end{aligned} \quad (C_n = C_{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n}).$$

D'autre part, les inégalités (4.6) donnent

$$d_{k-1} = \sum_{r=1}^{\lambda_{k-1}} a_r \psi_r(C_{\lambda_k}) + o(1), \quad \sum_{r=\lambda_{k-1}+1}^{\lambda_k-1} a_r \psi_r(C_{\lambda_{k-1}}) = \sum_{r=\lambda_{k-1}+1}^{\lambda_k-1} a_r \psi_r(C_{\lambda_k}) + o(1),$$

d'où l'on conclut que $d_k \rightarrow s$.

D'après (4.6) on a pour $\lambda_k \leq n \leq \lambda_{k+1}$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n a_r \psi_r(x) - \sum_{r=1}^n a_r \psi_r(C_n) &= o(1), \\ \sum_{r=1}^n a_r \psi_r(C_n) &= d_k + \sum_{r=\lambda_k+1}^n a_r \psi_r(C_n) + o(1). \end{aligned}$$

Or, comme

$$\left| \sum_{r=\lambda_k+1}^n a_r \psi_r(C_n) \right| \leq |s - d_k| + \max_{r=\lambda_k+1}^n D |a_r|,$$

le théorème se trouve démontré.

(Reçu par la Rédaction le 15. 12. 1936).

Über das allgemeine Dreikörperproblem

von

W. NIKLIBORC (Warszawa).

Erste Mitteilung.

Diskussion einer Ungleichung.

Einleitung.

In dieser Arbeit wird das allgemeinste Dreikörperproblem betrachtet, d. h. es werden über die Größe der Massen keine einschränkenden Voraussetzungen gemacht. Es wird sich außerdem als vorteilhaft erweisen (was eigentlich erst in den weiteren Mitteilungen deutlicher zu Tage treten wird), die Untersuchung nicht auf das klassische Newtonsche Gravitationsgesetz zu beschränken, sondern vielmehr allgemeine, nur von den gegenseitigen Abständen der Massen abhängige Kräfte zugrunde zu legen. Wir werden uns nämlich in den weiteren Teilen dieser Arbeitsreihe überzeugen, daß viele verschiedene Formeln und Rechnungen sich übersichtlicher gestalten, wenn man die Bewegungsgleichungen der materiellen Punkte in der allgemeineren, als es in der Himmelsmechanik üblich ist, Form (1), als Ausgangspunkt der Untersuchungen wählt. Andererseits, da sehr viele Sätze der Himmelsmechanik unabhängig von der Natur der wirkenden Kräfte gelten, ist es naheliegend, diejenigen besonders hervorzuheben, die nur im klassischen Newtonschen Falle richtig bleiben. Namentlich ist die Frage besonders interessant, ob der Umstand, daß der Ausdruck $1/r$ der Laplace'schen Differentialgleichung genügt, irgendwelche besondere Konsequenzen zur Folge hat.

Als erstes in unseren Untersuchungen vorkommendes Problem, wird das Problem der Reduktion des Differentialsystems (1)

auf die sechste Ordnung betrachtet. Doch wird diese Aufgabe erst in der dritten Mitteilung gelöst, wo auch Literaturangaben über diesen Gegenstand zusammengestellt werden. Wir werden dort ein reduziertes Differentialsystem sechster Ordnung aufstellen, das verhältnismäßig einfach ist, und sich für weitere Untersuchungen besonders eignet.

In dieser ersten Mitteilung, die als vorbereitende für die weiteren zu betrachten ist, wird eine Ungleichheit bewiesen, die an sich sehr interessant und von hoher Bedeutung zu sein scheint. Es ist dies die Ungleichung (83) und die mit ihr verbundene Gleichung (84), die als ein Seitenstück des im restringierten Dreikörperproblem vorkommenden Jacobischen Integrals aufzufassen ist. Die Gleichung (84) erscheint nämlich nach Sicherstellung der Ungleichung (83) als ein Analogon zu der im restringierten Problem vorkommenden Gleichung der Fläche von der relativen Nullgeschwindigkeit.

Auf Grund von (83) werden im sechsdimensionalen Raum der Koordinaten $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ der relativen Bewegung der Massen m_1 und m_2 (relativ in bezug auf m_0) gewisse Bereiche definiert, in welchen das von diesen Koordinaten gebildete Zahlensystem $(x_1, \dots, z_2)$ stets verbleiben muß.

Abgesehen von dem Umstand, daß die Ungleichung (83) eine ganze Reihe der bei dem restringierten Dreikörperproblem durchgeführten Untersuchungen mindestens theoretisch zu übertragen gestattet (wir sagen theoretisch, denn in der Praxis wird dies wohl mit großen Rechnungsschwierigkeiten verbunden sein, da der relative Raum sechsdimensional und der Grad der Gleichung (84) selbst in den einfachsten Fällen sehr hoch ist), führt sie zu vielen interessanten Konsequenzen. So wird z. B. im letzten Kapitel bewiesen, daß, falls es zu einem Zusammenstoß der zwei Massen kommt, dieser sich notwendig in der Laplace'schen invariablen Ebene ereignen muß. Auch der Sundmansche Satz, der besagt, daß im Falle eines gleichzeitigen Zusammenstoßes aller drei Massen alle drei Flächenkonstanten verschwinden müssen, erweist sich als eine unmittelbare Folgerung aus der Ungleichung (83). Freilich stimmen unsere Voraussetzungen mit den Sundmanschen nicht vollkommen überein.

Eine ausführliche Diskussion der Hyperfläche (84) soll einer späteren Abhandlung vorbehalten bleiben.

Sowohl in dieser, als in den weiteren Mitteilungen, wird man mit vielen ziemlich umständlichen aber ganz elementaren algebraischen Rechnungen zu tun haben. Daß es uns gelungen ist diese zu erledigen, verdanken wir vor allem einer besonders geeigneten Wahl des *Koordinatensystems*. In den uns bekannten Untersuchungen, die auf die sg. Laplace'sche invariable Ebene Bezug nehmen, wird das Koordinatensystem fast immer so gewählt, dass die xy -Ebene zur invariablen Ebene wird. Betrachtet man diese Wahl näher, so sieht man sofort die ersten Nachteile derselben, die in der unsymmetrischen Rolle der z -Koordinaten der Massen ihre Quelle haben. Dies führt zu sehr unsymmetrischen und unübersichtlichen Rechnungen und so ist es vielleicht zu erklären, daß man aus der Reduktion des Dreikörperproblems auf ein Differentialsystem sechster Ordnung bisher sehr wenig Nutzen (von der berühmten Lagrange'schen Arbeit abgesehen) gezogen hat. Diese Erwägung hat uns dazu geführt, das Koordinatensystem so zu wählen, daß zur invariablen Ebene die durch die Gleichung

$$x + y + z = 0$$

erklärte Ebene wird. Diese Wahl, die offenbar auf ∞^1 Arten für jede Bewegung getroffen werden kann, führt zu ganz besonders symmetrischen Rechnungen und Formeln.

Als ein zweiter Hauptpunkt der Arbeit kann die Einführung der *fundamentalen Ebene* der relativen Bewegung betrachtet werden. Untersucht man nämlich, wie es in der Himmelsmechanik üblich ist, die relative Bewegung der Massen m_1 und m_2 inbezug auf ein Koordinatensystem, welches den Ursprung in m_0 hat, und dessen Achsen zu den alten (absoluten) parallel sind, so erscheint es als plausibel diejenige Ebene einzuführen, die den Punkt m_0 enthält und stets zu der Laplace'schen invariablen Ebene parallel bleibt. Dies ist nun die Ebene, die wir weiter als fundamentale Ebene der relativen Bewegung bezeichnen, und die in unseren Untersuchungen die wichtigste Rolle spielen wird. Wie wir sehen werden, und zwar schon in dieser ersten Mitteilung, erweist sich die Einführung der Distanzen δ_1 und δ_2 der Massen m_1 und m_2 von der Fundamentalebene als besonders natürlich und vorteilhaft.

Und nun einige Worte über die angewandte Methode. Legt man die Differentialgleichungen (9) der relativen Bewegung zu-

grunde, so besitzen diese bekanntlich noch 4 elementare Integrale und zwar 3 Flächenintegrale und ein Energieintegral. Nun betrachten wir diese vier Gleichungen als ein algebraisches simultanes System mit den Unbekannten

$$x'_1, \dots, z'_2,$$

und suchen die allgemeine Lösung desselben zu finden. Dies erfolgt natürlich auf die naheliegende Weise, daß man zunächst die allgemeine Lösung* des durch die drei Flächenintegrale gebildeten linearen Systems bestimmt. Dadurch erscheinen die Geschwindigkeitskomponenten als lineare Funktionen dreier beliebiger Größen σ_1, σ_2, τ . Diese Größen sind noch durch eine Gleichung zweiten Grades verbunden, die man durch die Substitution der für die Geschwindigkeitskomponenten erhaltenen Ausdrücke in die Energiegleichung erhält. Freilich ist diese transformierte Energiegleichung zunächst sehr kompliziert, und so muß man, bevor man an die Parametrisierung derselben schreitet, vor allem diese durch geeignete Parametertransformationen zu vereinfachen versuchen. Dies wird zum großen Teile schon in dieser Mitteilung geleistet und so gelangt man zu den Formeln (78) für die Geschwindigkeitskomponenten. Dieselben erscheinen hier als Funktionen von drei Parametern σ_1, σ_2, τ , welche durch die erheblich einfachere Gleichung (74) verbunden sind. Soll nun dabei die Bewegung reell sein, so kann, wie sich leicht zeigen läßt, die a. a. O. eingeführte Grösse $C - W$ nicht negativ sein, was eben die den Zweck dieser Mitteilung bildende Ungleichung (83) ergibt.

In der zweiten Mitteilung wird die Transformation der Energiegleichung weiter verfolgt, wodurch man zu einer Darstellung der Geschwindigkeitskomponenten durch zwei willkürliche Größen gelangt. Die entsprechenden Formeln erweisen sich für viele Untersuchungen als besonders geeignet.

Diese Formeln werden uns dann in der dritten Mitteilung die Reduktion des Problems auf ein Differentialsystem sechster Ordnung, mit einem Schlage durchzuführen erlauben.

Will man nach dem was oben gesagt wurde, die von uns angewandte Methode kurz charakterisieren, so kann man sie als Parametrisierungsmethode bezeichnen. Es werden nämlich die 3 Flächenintegrale und das Energieintegral durch sechs Formeln

Wir haben hier nur die drei ersten Gleichungen aufgeschrieben. Die sechs übrigen bekommt man durch zyklische Vertauschung der Buchstaben ξ_k, η_k, ζ_k . Die Funktion $\varphi(u)$ bestimmt natürlich das Wirkungsgesetz. Ist insbesondere

$$(2) \quad \varphi(u) = -\frac{f}{u^3},$$

wo f die (Gauß'sche) Gravitationskonstante bedeutet, so hat man mit dem klassischen Gravitationsgesetz zu tun.

Wir setzen

$$(3) \quad \Phi(u) = \int u \varphi(u) du,$$

$$(4) \quad U = m_0 m_1 \Phi(r_{01}) + m_1 m_2 \Phi(r_{12}) + m_2 m_0 \Phi(r_{20})$$

und treffen die folgende Verabredung:

Konvergiert das Integral

$$\int_a^\infty u \varphi(u) du,$$

wo $a > 0$ und sonst beliebig ist, so wird unter $\Phi(u)$ diejenige durch (3) erklärte Funktion verstanden, welche im Unendlichen verschwindet. Ist dagegen dieses Integral divergent, so wird unter $\Phi(u)$ irgendwelche durch (3) erklärte, aber ein für allemal gewählte Funktion verstanden.

2. Die 10 bekannten Integrale. Invariable Ebene. Die Gleichungen (1) besitzen bekanntlich 10 elementare Integrale und zwar:

a) die 6 Schwerpunktsintegrale, die der besonderen Wahl des Koordinatensystems zufolge folgendermaßen dargestellt werden können:

$$\sum_{k=0}^2 m_k \xi_k = \sum_{k=0}^2 m_k \eta_k = \sum_{k=0}^2 m_k \zeta_k = 0,$$

b) die drei Flächenintegrale

$$(5) \quad \sum_{k=0}^2 m_k (\eta_k \zeta'_k - \zeta_k \eta'_k) = a, \quad \sum_{k=0}^2 m_k (\zeta_k \xi'_k - \xi_k \zeta'_k) = b, \\ \sum_{k=0}^2 m_k (\xi_k \eta'_k - \eta_k \xi'_k) = c,$$

c) das Energieintegral

$$(6) \quad \sum_{k=0}^2 m_k (\xi_k'^2 + \eta_k'^2 + \zeta_k'^2) = 2(U + h).$$

Dabei bedeuten a, b, c, h beliebige Konstanten. Aus (6) folgt noch

$$(7) \quad U + h \geq 0.$$

Die Konstanten a, b, c kann man als Komponenten eines Vektors (sg. resultierendes Moment der Bewegungsgröße) auffassen. Darunter ist folgendes zu verstehen: Die Koordinatentransformation läßt die Form der Differentialgleichungen (1) invariant. Dabei transformieren sich die Flächenintegrale (5) in die analogen Integrale der transformierten Differentialgleichungen, mit gewissen neuen Konstanten a', b', c' , die sich nach den Formeln für die Transformation der Komponenten eines Vektors durch a, b, c ausdrücken lassen.

Ist $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, so bezeichnet man die durch die Gleichung

$$a\xi + b\eta + c\zeta = 0$$

eindeutig erklärte Ebene als die *Laplace'sche invariable Ebene* der Bewegung.

3. Differentialgleichungen der relativen Bewegung. Bekanntlich wird im Dreikörperproblem vor allem die relative Bewegung untersucht. Zu diesem Zwecke betrachten wir ein neues Koordinatensystem, dessen Ursprung sich in m_0 befindet, und welches sich mit m_0 derart bewegt, dass die neuen Achsen stets zu den ursprünglichen parallel und gleichgerichtet sind. Bezeichnet man mit (x_k, y_k, z_k) die neuen Koordinaten der Masse m_k ($k = 1, 2$), und setzt noch zur Abkürzung

$$(8) \quad r_k = r_{0k} = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} \quad (k = 1, 2),$$

so nehmen die Differentialgleichungen der relativen Bewegung der Punkte m_1 und m_2 folgende Gestalt an:

$$(9) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= [(m_0 + m_1) \varphi(r_1) + m_2 \varphi(r_{12})] x_1 + m_2 [\varphi(r_2) - \varphi(r_{12})] x_2, \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= [(m_0 + m_2) \varphi(r_2) + m_1 \varphi(r_{12})] x_2 + m_1 [\varphi(r_1) - \varphi(r_{12})] x_1 \\ &\quad \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

Weitere nicht aufgeschriebene Gleichungen folgen durch zyklische Vertauschung der Buchstaben x_k, y_k, z_k . Die Gleichungen (9) sind in jedem Lehrbuch der Himmelsmechanik zu finden, wobei sie freilich meistens für den Spezialfall (2) angegeben werden ¹⁾.

Wir werden gelegentlich die Masse m_0 als „Sonne“, die Massen m_1 und m_2 als „Planeten“ bezeichnen.

4. Integrale der relativen Bewegung. Die Gleichungen (9) besitzen 4 bekannte Integrale ²⁾ und zwar:

a) die drei Flächenintegrale

$$(10) \quad \sum_{k=1}^2 m_k (y_k z'_k - z_k y'_k) - \frac{1}{M} \left[\left(\sum_{k=1}^2 m_k y_k \right) \left(\sum_{k=1}^2 m_k z'_k \right) - \left(\sum_{k=1}^2 m_k z_k \right) \left(\sum_{k=1}^2 m_k y'_k \right) \right] = a,$$

.

von denen hier nur eines aufgeschrieben wurde, und die zwei weiteren durch zyklische Vertauschung der Buchstaben x_k, y_k, z_k und a, b, c zu ermitteln sind,

b) das Energieintegral

$$m_1(m_0 + m_2)(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) - 2m_1 m_2(x_1' x_2' + y_1' y_2' + z_1' z_2') + m_2(m_0 + m_1)(x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2) = 2M(U + h).$$

Ist $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, so stellt die Gleichung

$$ax + by + cz = 0$$

¹⁾ S. z. B. Tisserand, *Traité de Mécanique Céleste* I, p. 72, Formeln (g).

²⁾ Vgl. Tisserand, l. c., p. 73, Formeln (d'). Es ist zu beachten, dass die dort eingeführten Konstanten a', b', c', h' , bei unserer Wahl des Koordinatenursprungs des „absoluten“ Systems, den früheren Konstanten a, b, c, h einfach gleich sind.

eine Ebene dar, der in dieser Arbeit eine prinzipielle Bedeutung zukommt. Zum Unterschiede von der Laplace'schen Ebene, werden wir sie als *fundamentale Ebene* der relativen Bewegung der Planeten m_1 und m_2 (auch kürzer Fundamentalebene) bezeichnen.

Die Gleichung dieser Ebene in absoluten Koordinaten lautet:

$$a(\xi - \xi_0) + b(\eta - \eta_0) + c(\zeta - \zeta_0) = 0;$$

da sich die Grössen ξ_0, η_0, ζ_0 im allgemeinen mit der Zeit ändern, so ändert auch die Fundamentalebene ihre Lage in bezug auf das absolute Koordinatensystem, jedoch so, daß sie der Laplace'schen invariablen Ebene stets parallel bleibt.

5. Die Wahl des Koordinatensystems. Da die Konstanten a, b, c als Komponenten eines Vektors aufgefaßt werden können, so schließen wir daraus folgendes:

Sind a', b', c' drei beliebige andere der Bedingung

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

genügende Zahlen, so kann man das Koordinatenachsenkreuz einer derartigen Drehung unterziehen, daß in diesem neuen System unserer Bewegung eben diese vorgeschriebenen Konstanten a', b', c' als Flächenkonstanten entsprechen. Und zwar, wie leicht festzustellen ist, gibt es ∞^1 derartige Drehungen. Hieraus folgt insbesondere, daß man die drei der zu betrachtenden Bewegung entsprechenden Flächenkonstanten stets als untereinander gleich voraussetzen darf. Wir bezeichnen ihren gemeinsamen Wert mit $a/\sqrt{3}$ ($a \geq 0$, sonst beliebig). Dies kommt darauf hinaus, daß zur Fundamentalebene der relativen Bewegung die Ebene

$$(11) \quad x + y + z = 0$$

gewählt wird, und daß das resultierende Moment der Bewegungsgröße gleich a gesetzt wird.

Diese Wahl des Koordinatensystems wird sich später als außerordentlich vorteilhaft erweisen, indem alle drei Koordinaten in den späteren Formeln symmetrisch auftreten werden, was uns die ohnehin umfangreichen Rechnungen vielfach erleichtern wird.

Die Flächenintegrale (10) lauten jetzt:

$$m_1 \{ [m_2 z_2 - (m_0 + m_2) z_1] y'_1 - [m_2 y_2 - (m_0 + m_2) y_1] z'_1 \} \\ + m_2 \{ [m_1 z_1 - (m_0 + m_1) z_2] y'_2 - [m_1 y_1 - (m_0 + m_1) y_2] z'_2 \} = \frac{a}{\sqrt{3}} M,$$

6. Bezeichnungen. Wir setzen zur Abkürzung

$$(12) \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{m_0 M}} [m_2 x_2 - (m_0 + m_2) x_1], & \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{m_0 M}} [m_1 x_1 - (m_0 + m_1) x_2], \\ \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{m_0 M}} [m_2 y_2 - (m_0 + m_2) y_1], & \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{m_0 M}} [m_1 y_1 - (m_0 + m_1) y_2], \\ \nu_1 = \frac{1}{\sqrt{m_0 M}} [m_2 z_2 - (m_0 + m_2) z_1], & \nu_2 = \frac{1}{\sqrt{m_0 M}} [m_1 z_1 - (m_0 + m_1) z_2], \end{cases}$$

$$(13) \quad u_k = \sqrt{\frac{m_0}{M}} \cdot x'_k, \quad v_k = \sqrt{\frac{m_0}{M}} \cdot y'_k, \quad w_k = \sqrt{\frac{m_0}{M}} \cdot z'_k \quad (k=1,2),$$

$$(14) \quad W = 2 m_0 (U + h).$$

Die Flächenintegrale und das Energieintegral nehmen jetzt folgende Gestalt an:

$$(15) \quad \begin{cases} m_1 (\nu_1 v_1 - \mu_1 w_1) + m_2 (\nu_2 v_2 - \mu_2 w_2) = \frac{a}{\sqrt{3}} \\ m_1 (\lambda_1 w_1 - \nu_1 u_1) + m_2 (\lambda_2 w_2 - \nu_2 u_2) = \frac{a}{\sqrt{3}} \\ m_1 (\mu_1 u_1 - \lambda_1 v_1) + m_2 (\mu_2 u_2 - \lambda_2 v_2) = \frac{a}{\sqrt{3}}, \end{cases}$$

$$(16) \quad m_1 (m_0 + m_2) (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - 2 m_1 m_2 (u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2) \\ + m_2 (m_0 + m_1) (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) - W = 0.$$

II. Bezeichnungen. Identitäten, Hilfssätze.

7. Die Größen $\alpha, \beta, \gamma, A, F$. Wir werden zunächst eine ganze Reihe verschiedener Größen einführen, wobei auch gewisse Identitäten zwischen ihnen aufgestellt werden. Die elementaren Beweise dieser Identitäten werden fortgelassen.

Wir betrachten die Minoren der Matrix

$$(17) \quad \begin{array}{c} \lambda_1, \mu_1, \nu_1 \\ \lambda_2, \mu_2, \nu_2, \end{array}$$

die durch die Größen (12) gebildet ist, und setzen

$$(18) \quad \alpha = \mu_1 \nu_2 - \nu_1 \mu_2, \quad \beta = \nu_1 \lambda_2 - \lambda_1 \nu_2, \quad \gamma = \lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2.$$

Aus (12) und (18) folgt dann

$$\alpha = y_1 z_2 - z_1 y_2, \quad \beta = z_1 x_2 - x_1 z_2, \quad \gamma = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

Wie leicht festzustellen ist, verschwinden alle drei Größen α, β, γ zugleich dann und nur dann, wenn alle drei Punkte $(0, 0, 0)$, (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) auf einer Geraden liegen. Wir werden diesen Sonderfall stets ausschließen.

Wir setzen weiter

$$(19) \quad A = \alpha + \beta + \gamma;$$

es ist offenbar

$$(19,1) \quad A = \begin{vmatrix} \lambda_1, \mu_1, \nu_1 \\ \lambda_2, \mu_2, \nu_2 \\ 1, 1, 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1, y_1, z_1 \\ x_2, y_2, z_2 \\ 1, 1, 1 \end{vmatrix}.$$

Betrachtet man das durch die Punkte (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , $(1, 1, 1)$ und $(0, 0, 0)$ bestimmte Tetraeder, so ist dessen Volumen, bei entsprechender Verabredung über das Vorzeichen, gleich

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1, y_1, z_1, 1 \\ x_2, y_2, z_2, 1 \\ 1, 1, 1, 1 \\ 0, 0, 0, 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} A.$$

Demnach verschwindet die Größe A dann und nur dann, wenn unsere drei Massen mit dem Punkte $(1, 1, 1)$ zugleich in einer Ebene liegen, oder, was dasselbe ist, wenn alle drei Massen in einer zu der Fundamentalebene orthogonalen Ebene liegen.

Als weitere Größe führen wir den Ausdruck

$$(20) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 4F^2 \quad (F \geq 0)$$

ein. Offenbar ist F dem Flächeninhalt des durch die drei Massen bestimmten Dreiecks gleich.

8. Die Größen $\delta_1, \delta_2, A_1, A_2, P$. Wir bezeichnen mit δ_1 und δ_2 die Abstände der Planeten m_1 und m_2 von der Fundamentalebene, wobei wir verabreden, daß diese Größen im Halbraume

$$x + y + z > 0$$

als positiv zu rechnen sind. Es ist demnach

$$(21) \quad \delta_k = \frac{1}{\sqrt{3}} (x_k + y_k + z_k) \quad (k=1, 2).$$

Wir setzen weiter

$$(22) \quad A_k = \lambda_k + \mu_k + \nu_k \quad (k=1, 2).$$

Aus (12), (21) und (22) folgt unmittelbar

$$(23) \quad \begin{cases} (m_0 + m_1) A_1 + m_2 A_2 = -\delta_1 \sqrt{3 m_0 M}, \\ m_1 A_1 + (m_0 + m_2) A_2 = -\delta_2 \sqrt{3 m_0 M}, \end{cases}$$

oder auch

$$(24) \quad \begin{cases} A_1 = [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1] \sqrt{\frac{3}{m_0 M}}, \\ A_2 = [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2] \sqrt{\frac{3}{m_0 M}} \end{cases}$$

Wir führen noch die in der Folge oft zu begegnende Größe

$$(25) \quad P = \frac{1}{3} [m_1 (m_0 + m_1) A_1^2 + 2 m_1 m_2 A_1 A_2 + m_2 (m_0 + m_2) A_2^2]$$

ein.

Hieraus folgt zunächst die nützliche Formel

$$P = - (m_1 \delta_1 A_1 + m_2 \delta_2 A_2) \sqrt{\frac{m_0 M}{3}}$$

und dann

$$(26) \quad P = m_1 (m_0 + m_2) \delta_1^2 - 2 m_1 m_2 \delta_1 \delta_2 + m_2 (m_0 + m_1) \delta_2^2.$$

Nach (25) und (26) ist die Größe P eine binäre quadratische Form der Variablen δ_1 und δ_2 bzw. $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$. Augenscheinlich ist diese Form positiv-definit und verschwindet dann und nur dann, wenn beide Planeten m_1 und m_2 gleichzeitig in der Fundamentalebene liegen.

9. Die Größen E_{ik} . Wir setzen

$$(27) \quad \begin{cases} E_{11} = \lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 \\ E_{12} = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2 \\ E_{22} = \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2. \end{cases}$$

Aus (27), (12) und (8) folgt unmittelbar

$$(28) \quad \begin{cases} E_{11} = \frac{1}{m_0 M} [m_0(m_0 + m_2)r_1^2 - m_0 m_2 r_2^2 + m_2(m_0 + m_2)r_{12}^2] \\ E_{12} = \frac{1}{m_0 M} [m_0(\frac{M}{2} - m_1)r_1^2 + m_0(\frac{M}{2} - m_2)r_2^2 - (\frac{m_0 M}{2} + m_1 m_2)r_{12}^2] \\ E_{22} = \frac{1}{m_0 M} [-m_0 m_1 r_1^2 + m_0(m_0 + m_1)r_2^2 + m_1(m_0 + m_1)r_{12}^2]. \end{cases}$$

Die Formeln (28) liefern dann

$$(29) \quad E_{11}E_{22} - E_{12}^2 = 4F^2 = r_1^2 r_2^2 - \frac{1}{4}(r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2)^2,$$

wo F die durch (20) erklärte Größe bedeutet.

10. Einige Identitäten zwischen den Größen λ , μ_i , ν_i , $\mathcal{A}_i$, A , E_{ik} , α , β , γ . Es gelten folgende Formeln:

$$(30) \quad \begin{cases} (\nu_1 - \mu_1)E_{22} - (\nu_2 - \mu_2)E_{12} = -\mathcal{A}_2 \alpha + \lambda_2 A, \\ (\lambda_1 - \nu_1)E_{22} - (\lambda_2 - \nu_2)E_{12} = -\mathcal{A}_2 \beta + \mu_2 A, \\ (\mu_1 - \lambda_1)E_{22} - (\mu_2 - \lambda_2)E_{12} = -\mathcal{A}_2 \gamma + \nu_2 A, \end{cases}$$

$$(30 \text{ bis}) \quad \begin{cases} (\nu_2 - \mu_2)E_{11} - (\nu_1 - \mu_1)E_{12} = \mathcal{A}_1 \alpha - \lambda_1 A, \\ (\lambda_2 - \nu_2)E_{11} - (\lambda_1 - \nu_1)E_{12} = \mathcal{A}_1 \beta - \mu_1 A, \\ (\mu_2 - \lambda_2)E_{11} - (\mu_1 - \lambda_1)E_{12} = \mathcal{A}_1 \gamma - \nu_1 A, \end{cases}$$

$$(31) \quad \begin{cases} \lambda_1(\gamma - \beta) + \mu_1(\alpha - \gamma) + \nu_1(\beta - \alpha) = E_{11}\mathcal{A}_2 - E_{12}\mathcal{A}_1, \\ \lambda_2(\gamma - \beta) + \mu_2(\alpha - \gamma) + \nu_2(\beta - \alpha) = E_{12}\mathcal{A}_2 - E_{22}\mathcal{A}_1 \end{cases}$$

$$(32) \quad \begin{cases} (\lambda_2 E_{11} - \lambda_1 E_{12})(\beta - \gamma) + (\mu_2 E_{11} - \mu_1 E_{12})(\gamma - \alpha) \\ \quad + (\nu_2 E_{11} - \nu_1 E_{12})(\alpha - \beta) = 4F^2 \cdot A_1, \\ (\lambda_1 E_{22} - \lambda_2 E_{12})(\gamma - \beta) + (\mu_1 E_{22} - \mu_2 E_{12})(\alpha - \gamma) \\ \quad + (\nu_1 E_{22} - \nu_2 E_{12})(\beta - \alpha) = 4F^2 \cdot A_2, \end{cases}$$

$$(33) \quad \begin{cases} \lambda_2 A_1 - \lambda_1 A_2 = \beta - \gamma, \\ \mu_2 A_1 - \mu_1 A_2 = \gamma - \alpha, \\ \nu_2 A_1 - \nu_1 A_2 = \alpha - \beta. \end{cases}$$

11. Die Größen S_{ik} , S_i und J . Weitere Identitäten.

Als weitere Größen werden folgende Ausdrücke eingeführt:

$$(34) \quad \begin{cases} m_1 r_1^2 - (2m_0 + m_1) r_2^2 - m_1 r_{12}^2 = S_{11}, \\ (m_0 - m_1) r_1^2 + (m_0 + m_1) r_2^2 - (m_0 + m_1) r_{12}^2 = S_{12}, \\ (m_0 + m_2) r_1^2 + (m_0 - m_2) r_2^2 - (m_0 + m_2) r_{12}^2 = S_{21}, \\ -(2m_0 + m_2) r_1^2 + m_2 r_2^2 - m_2 r_{12}^2 = S_{22}, \end{cases}$$

$$(35) \quad \begin{cases} S_1 = S_{11} \delta_1 + S_{12} \delta_2, \\ S_2 = S_{21} \delta_1 + S_{22} \delta_2. \end{cases}$$

Es ist dann

$$(36) \quad \begin{cases} (m_0 + m_1) S_{11} + m_1 S_{12} + 2m_0 M E_{22} = 0, \\ m_2 S_{11} + (m_0 + m_2) S_{12} - 2m_0 M E_{12} = 0, \\ m_2 S_{21} + (m_0 + m_2) S_{22} + 2m_0 M E_{11} = 0, \\ (m_0 + m_1) S_{21} + m_1 S_{22} - 2m_0 M E_{12} = 0, \end{cases}$$

und umgekehrt

$$(37) \quad \begin{cases} m_1 E_{12} + (m_0 + m_2) E_{22} = -\frac{1}{2} S_{11}, \\ (m_0 + m_1) E_{12} + m_2 E_{22} = \frac{1}{2} S_{12}, \\ m_1 E_{11} + (m_0 + m_2) E_{12} = \frac{1}{2} S_{21}, \\ (m_0 + m_1) E_{11} + m_2 E_{12} = -\frac{1}{2} S_{22}. \end{cases}$$

Es gelten die Formeln

$$(38) \quad \begin{cases} E_{11} S_{11}^2 - E_{22} S_{21}^2 = 16 F^2 \cdot [(m_0 + m_2)^2 E_{22} - m_1^2 E_{11}], \\ S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21} = 16 m_0 M F^2, \\ E_{22} S_{22}^2 - E_{11} S_{12}^2 = 16 F^2 [(m_0 + m_1)^2 E_{11} - m_2^2 E_{22}], \end{cases}$$

$$(39) \quad \begin{cases} E_{22} A_1 - E_{12} A_2 = \frac{1}{2} S_1 \cdot \sqrt{\frac{3}{m_0 M}}, \\ E_{11} A_2 - E_{12} A_1 = \frac{1}{2} S_2 \cdot \sqrt{\frac{3}{m_0 M}}. \end{cases}$$

Als besonders wichtig wird sich die Größe

$$(40) \quad J = m_0 m_1 r_1^2 + m_0 m_2 r_2^2 + m_1 m_2 r_{12}^2$$

erweisen. Wir werden sie als die *Lagrange — Jacobi'sche Funktion* bezeichnen. Wie man sofort sieht, ist

$$(41) \quad \begin{aligned} J &= m_1 (m_0 + m_1) E_{11} + 2 m_1 m_2 E_{12} + m_2 (m_0 + m_2) E_{22} \\ &= -\frac{1}{2} (m_1 S_{22} + m_2 S_{11}). \end{aligned}$$

12. Die Größe $\mathcal{A}$. Auch der Ausdruck

$$(41)_1 \quad \mathcal{A}^2 = r_2^2 \delta_1^2 - (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) \delta_1 \delta_2 + r_1^2 \delta_2^2 \quad (\mathcal{A} \geq 0)$$

wird eine sehr wichtige Rolle spielen. Wie leicht festzustellen, ist $\mathcal{A}^2$ im Falle $F > 0$ eine positiv-definite quadratische Form der Größen δ_1 und δ_2 . Liegen demnach alle drei Massen m_0, m_1, m_2 nicht gleichzeitig auf einer Geraden, so verschwindet $\mathcal{A}^2$ dann und nur dann, wenn die beiden Planeten sich in der Fundamentalebene befinden.

Die Größe $\mathcal{A}^2$ steht übrigens im nahen Zusammenhange mit A^2 und F^2 . Aus (19,1) folgt nämlich mit Rücksicht auf (29), (21) und (8)

$$(42) \quad A^2 = 3(4F^2 - \mathcal{A}^2),$$

aus welcher Formel man die wichtige Tatsache, daß die Größe A sich durch die Größen $r_1, r_2, r_{12}, \delta_1, \delta_2$ ausdrücken läßt, ablesen kann.

Die Anwendung der Lagrange'schen Identität auf die Matrix

$$\begin{array}{c} \alpha, \beta, \gamma \\ 1, 1, 1 \end{array}$$

liefert in Verbindung mit (42) die wichtige Formel

$$(43) \quad (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 = 3 A^2.$$

Wir erwähnen noch folgende, für das Weitere nützliche, Identitäten:

$$(44) \quad \begin{cases} S_1^2 - 4m_0 M A^2 E_{22} + \frac{16}{3} m_0 M F^2 A_2^2 = 0, \\ S_1 S_2 + 4m_0 M A^2 E_{12} - \frac{16}{3} m_0 M F^2 A_1 A_2 = 0, \\ S_2^2 - 4m_0 M A^2 E_{11} + \frac{16}{3} m_0 M F^2 A_1^2 = 0. \end{cases}$$

13. Die Größen l, l_1, l_2 . Identitäten. Wir setzen endlich

$$(45) \quad l = m_0 M E_{11} E_{22} + 4m_1 m_2 F^2,$$

$$(46) \quad \begin{cases} l_1 = m_0 M E_{12} E_{22} - 4m_1 (m_0 + m_1) F^2, \\ l_2 = m_0 M E_{11} E_{12} - 4m_2 (m_0 + m_2) F^2. \end{cases}$$

Liegen die drei Massen nicht gleichzeitig auf einer Geraden, so ist offenbar

$$l > 0.$$

Man verifiziert leicht folgende Identitäten:

$$(47) \quad m_2 (m_0 + m_1) E_{11} S_{11}^2 - 2m_1 m_2 E_{12} S_{11} S_{22} + m_1 (m_0 + m_2) E_{22} S_{22}^2 = 4 J l$$

$$(48) \quad \begin{cases} [m_0 M E_{12} E_{22} + 4m_1 (m_0 + m_1) F^2] J \\ + [m_1 (m_0 + m_1) E_{11} - m_2 (m_0 + m_2) E_{22}] l_1 = m_1 l S_{12}, \\ [m_0 M E_{11} E_{12} + 4m_2 (m_0 + m_2) F^2] J \\ + [m_2 (m_0 + m_2) E_{22} - m_1 (m_0 + m_1) E_{11}] l_2 = m_2 l S_{21}. \end{cases}$$

14. Das erste Gleichungssystem. Wir setzen voraus, daß die Matrix (17) vom Range zwei ist, und betrachten das Gleichungssystem

$$(49) \quad \begin{cases} \lambda_1 f_1 + \mu_1 f_2 + \nu_1 f_3 = d_1, \\ \lambda_2 f_1 + \mu_2 f_2 + \nu_2 f_3 = d_2, \end{cases}$$

wo f_1, f_2, f_3 Unbekannte und d_1, d_2 gegebene Größen bedeuten. Die Gleichungen (49) besitzen offenbar ∞^1 Lösungen und wir werden für die allgemeine Lösung die Formeln

$$(50) \quad \begin{cases} f_1 = \frac{1}{4F^2} [(E_{22}\lambda_1 - E_{12}\lambda_2)d_1 + (E_{11}\lambda_2 - E_{12}\lambda_1)d_2] + \alpha\tau, \\ f_2 = \frac{1}{4F^2} [(E_{22}\mu_1 - E_{12}\mu_2)d_1 + (E_{11}\mu_2 - E_{12}\mu_1)d_2] + \beta\tau, \\ f_3 = \frac{1}{4F^2} [(E_{22}\nu_1 - E_{12}\nu_2)d_1 + (E_{11}\nu_2 - E_{12}\nu_1)d_2] + \gamma\tau \end{cases}$$

benutzen. Dabei bedeutet τ einen Parameter, der beliebige Werte annehmen kann.

Obwohl wir die Formeln (50) in keinem uns bekannten Lehrbuche finden, erheben wir bei der Einfachheit des Gegenstandes keinen Anspruch auf Priorität.

15. Das zweite Gleichungssystem. Es seien

$$\begin{matrix} \lambda, \mu, \nu \\ A, B, C \end{matrix}$$

beliebige, den Bedingungen

$$\begin{aligned} \lambda + \mu + \nu &\neq 0, \\ A\lambda + B\mu + C\nu &= 0, \end{aligned}$$

genügende Zahlen.

Die Gleichungen

$$(51) \quad \begin{cases} \nu v - \mu w = A, \\ \lambda w - \nu u = B, \\ \mu u - \lambda v = C, \end{cases}$$

wo mit u, v, w die Unbekannten bezeichnet wurden, besitzen in diesem Falle ∞^1 Lösungen. Für die allgemeine Lösung von (51) werden die Formeln

$$(52) \quad \begin{cases} u = \frac{C-B}{\lambda+\mu+\nu} + \sigma\lambda, \\ v = \frac{A-C}{\lambda+\mu+\nu} + \sigma\mu, \\ w = \frac{B-A}{\lambda+\mu+\nu} + \sigma\nu \end{cases}$$

benutzt. Dabei bedeutet σ einen Parameter, der beliebige Werte annehmen kann.

Auch die Formeln (52) sind vielleicht neu.

III. Lösung des linearen Problems. Transformation der Energiegleichung.

16. Lösung des linearen Systems. Wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, beruht die von uns angewandte Methode auf der Bestimmung der allgemeinen Lösung des simultanen algebraischen Systems (15) und (16), in welchem die Größen u_k, v_k, w_k als Unbekannte aufzufassen sind. Dieser Aufgabe, welche in dieser ersten Mitteilung nur teilweise gelöst wird, ist dieses Kapitel gewidmet.

Wir beginnen mit der Auflösung des linearen Systems (15). Dabei wird vorausgesetzt, daß die Matrix (17) vom Range zwei ist. Wie man leicht einsieht, ist dann die Matrix der Koeffizienten der Gleichungen (15) vom Range drei, so daß die allgemeine Lösung von drei Parametern stetig abhängen wird.

Wir setzen zunächst voraus, daß

$$(53) \quad A_1 A_2 \neq 0$$

gilt. Wir werden uns am Ende dieses Kapitels von dieser Voraussetzung befreien.

Nun schreiben wir die Gleichungen (15) in der nachstehenden Form:

$$(54) \quad \begin{cases} m_1(\nu_1 v_1 - \mu_1 w_1) - \frac{a}{2\sqrt{3}} = -m_2(\nu_2 v_2 - \mu_2 w_2) + \frac{a}{2\sqrt{3}} = f_1, \\ m_1(\lambda_1 w_1 - \nu_1 u_1) - \frac{a}{2\sqrt{3}} = -m_2(\lambda_2 w_2 - \nu_2 u_2) + \frac{a}{2\sqrt{3}} = f_2, \\ m_1(\mu_1 u_1 - \lambda_1 v_1) - \frac{a}{2\sqrt{3}} = -m_2(\mu_2 u_2 - \lambda_2 v_2) + \frac{a}{2\sqrt{3}} = f_3. \end{cases}$$

Genügen die sechs Größen

$$u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$$

den Gleichungen (15), so genügen sie auch den folgenden sechs Gleichungen:

$$\begin{cases} m_1(v_1 v_1 - \mu_1 w_1) = \frac{a}{2\sqrt{3}} + f_1, & m_2(v_2 v_2 - \mu_2 w_2) = \frac{a}{2\sqrt{3}} - f_1, \\ m_1(\lambda_1 w_1 - \nu_1 u_1) = \frac{a}{2\sqrt{3}} + f_2, & m_2(\lambda_2 w_2 - \nu_2 u_2) = \frac{a}{2\sqrt{3}} - f_2, \\ m_1(\mu_1 u_1 - \lambda_1 v_1) = \frac{a}{2\sqrt{3}} + f_3, & m_2(\mu_2 u_2 - \lambda_2 v_2) = \frac{a}{2\sqrt{3}} - f_3, \end{cases}$$

wo f_1, f_2, f_3 entsprechende Werte besitzen.

Umgekehrt: bedeuten f_1, f_2, f_3 derartige Zahlen, daß die Gleichungen (55) widerspruchslos sind, so ist jede Lösung von (55) zugleich eine Lösung von (54), also auch von (15).

• Wir können also die allgemeine Lösung von (15) auf folgende Weise bekommen:

Man bestimmt die allgemeine Lösung von (55), unter der Voraussetzung, daß die f_k beliebige Größen bedeuten, wobei natürlich dem Umstand, daß die Gleichungen (55) widerspruchslos sein sollen, Rechnung getragen werden muss.

Nun ist aber unter der Voraussetzung (53) für die Lösbarkeit von (55) notwendig und hinreichend, daß

$$(56) \quad \begin{cases} \lambda_1 f_1 + \mu_1 f_2 + \nu_1 f_3 = -\frac{a A_1}{2\sqrt{3}}, \\ \lambda_2 f_1 + \mu_2 f_2 + \nu_2 f_3 = \frac{a A_2}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

gilt. Ist diese Bedingung erfüllt, so bekommt man, unter Anwendung der Resultate von N° 15 und der Formeln (52), für die allgemeine Lösung von (55) die Formeln

$$(57) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{f_3 - f_2}{m_1 A_1} + \sigma_1 \lambda_1, & u_2 = -\frac{f_3 - f_2}{m_2 A_2} + \sigma_2 \lambda_2, \\ v_1 = \frac{f_1 - f_3}{m_1 A_1} + \sigma_1 \mu_1, & v_2 = -\frac{f_1 - f_3}{m_2 A_2} + \sigma_2 \mu_2, \\ w_1 = \frac{f_2 - f_1}{m_1 A_1} + \sigma_1 \nu_1, & w_2 = -\frac{f_2 - f_1}{m_2 A_2} + \sigma_2 \nu_2. \end{cases}$$

Dabei bedeuten $\sigma_1, \sigma_2, f_1, f_2, f_3$ willkürliche Parameter, von welchen die f_k durch die Gleichungen (16) gebunden sind. Nun können aber diese f_k durch einen einzigen Parameter τ ersetzt werden. Zu diesem Zwecke genügt es die Formeln (56) als Gleichungen mit den Unbekannten f_k aufzufassen und die Resultate von N° 14 und die Formeln (50) anzuwenden. Wir finden

$$(58) \quad \begin{cases} f_1 = \frac{a}{8F^2\sqrt{3}} [(E_{11}\lambda_2 - E_{12}\lambda_1)A_2 - (E_{22}\lambda_1 - E_{12}\lambda_2)A_1] + \alpha\tau, \\ f_2 = \frac{a}{8F^2\sqrt{3}} [(E_{11}\mu_2 - E_{12}\mu_1)A_2 - (E_{22}\mu_1 - E_{12}\mu_2)A_1] + \beta\tau, \\ f_3 = \frac{a}{8F^2\sqrt{3}} [(E_{11}\nu_2 - E_{12}\nu_1)A_2 - (E_{22}\nu_1 - E_{12}\nu_2)A_1] + \gamma\tau. \end{cases}$$

Aus (57), (58), (30) und (30 bis) folgen jetzt unmittelbar die gewünschten Formeln für die allgemeine Lösung der Gleichungen (15):

$$(59) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{a}{8m_1F^2A_1\sqrt{3}} [2A_1A_2\alpha - (\lambda_1A_2 + \lambda_2A_1)A] + \frac{\gamma-\beta}{m_1A_1}\tau + \sigma_1\lambda_1, \\ u_2 = -\frac{a}{8m_2F^2A_2\sqrt{3}} [2A_1A_2\alpha - (\lambda_1A_2 + \lambda_2A_1)A] - \frac{\gamma-\beta}{m_2A_2}\tau + \sigma_2\lambda_2. \end{cases}$$

Entsprechende Formeln für v_1, v_2, w_1, w_2 bekommt man durch zyklische Vertauschung der Buchstaben λ_i, μ_i, ν_i und α, β, γ .

Setzt man noch in (59)

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{aAA_2}{8m_1F^2A_1\sqrt{3}} + \sigma'_1, \\ \sigma_2 = -\frac{aAA_1}{8m_2F^2A_2\sqrt{3}} + \sigma'_2 \\ \tau = \tau'\sqrt{m_1m_2} \end{cases}$$

(erste Parametertransformation), und unterdrückt man nachträglich die Akzente bei σ'_1, σ'_2 und τ' , so bekommt man für die allgemeine Lösung der Gleichungen (15) die Formeln:

$$(60) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{a}{8m_1F^2\sqrt{3}} (2A_2\alpha - \lambda_2A) + \frac{\gamma-\beta}{A_1}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\tau + \lambda_1\sigma_1, \\ u_2 = -\frac{a}{8m_2F^2\sqrt{3}} (2A_1\alpha - \lambda_1A) - \frac{\gamma-\beta}{A_2}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\tau + \lambda_2\sigma_2. \end{cases}$$

17. Transformation der Energiegleichung. Setzt man die Werte (60) in die Energiegleichung (16) ein, so bekommt man eine Gleichung zweiten Grades

$$(61) \quad F(\sigma_1, \sigma_2, \tau) = C_{11}\sigma_1^2 + 2C_{12}\sigma_1\sigma_2 + C_{22}\sigma_2^2 + 2C_{13}\sigma_1\tau + 2C_{23}\sigma_2\tau + C_{33}\tau^2 + 2C_{14}\sigma_1 + 2C_{24}\sigma_2 + 2C_{34}\tau + C_{44} - W = 0,$$

die eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, daß die Formeln (60) die allgemeine Lösung des simultanen Systems (15) und (16) bilden.

Es ist

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{11} = m_1(m_0 + m_2)E_{11}, \quad C_{12} = -m_1m_2E_{11}, \quad C_{22} = m_2(m_0 + m_1)E_{22}, \\ C_{13} = -\frac{3}{2} \frac{S_2\delta_2}{A_1A_2} \sqrt{m_1m_2}, \quad C_{23} = -\frac{3}{2} \frac{S_1\delta_1}{A_1A_2} \sqrt{m_1m_2}, \quad C_{33} = \frac{9P\Delta^2}{A_1^2A_2^2}, \\ C_{14} = -\frac{aAS_{21}}{16F^2\sqrt{3}}, \quad C_{24} = \frac{aAS_{12}}{16F^2\sqrt{3}}, \\ C_{34} = \frac{aA\sqrt{3}}{16F^2A_1A_2\sqrt{m_1m_2}} (m_1\delta_1S_2 - m_2\delta_2S_1), \\ C_{44} = \frac{a^2}{192m_1m_2F^4} (48F^2P + A^2J) \end{array} \right.$$

Bei der Berechnung der Größen C_{11} , C_{12} , C_{22} benutze man die Formeln (27), bei C_{13} und C_{23} die Formeln (23), (31) und (39), bei C_{33} die Formeln (25) und (43), bei C_{14} und C_{24} die Formeln (27) und (37), bei C_{34} die Formeln (31), (23) und (39), bei C_{44} die Formeln (20), (25), (27) und (41).

18. Zweite Parametertransformation. Wir werden jetzt die Energiegleichung (61) einer zweiten linearen Parametertransformation unterziehen, die das Verschwinden der Koeffizienten C_{13} , C_{23} , C_{14} , C_{24} zur Folge haben wird. Zu diesem Zwecke wird

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = a_1 + b_1\tau + \sigma'_1, \\ \sigma_2 = a_2 + b_2\tau + \sigma'_2 \end{array} \right.$$

gesetzt, wobei a_1 , a_2 , b_1 , b_2 entsprechende, von σ'_1 , σ'_2 , τ unabhängige, Größen bedeuten, die nachträglich bestimmt werden.

Vermöge (63) transformiert sich die Gleichung (61) in eine ähnliche Gleichung

$$(64) \quad F'(\sigma'_1, \sigma'_2, \tau) = C'_{11} \sigma'^2_1 + 2 C'_{12} \sigma'_1 \sigma'_2 + C'_{22} \sigma'^2_2 + 2 C'_{13} \sigma'_1 \tau + 2 C'_{23} \sigma'_2 \tau + C'_{23} \tau^2 + 2 C'_{14} \sigma'_1 + 2 C'_{24} \sigma'_2 + 2 C'_{34} \tau + C'_{44} - W = 0,$$

wo die C'_{ik} durch folgende Formeln gegeben sind:

$$\begin{aligned} C'_{11} &= C_{11}, & C'_{12} &= C_{12}, & C'_{13} &= C_{13}, \\ C'_{13} &= C_{11} b_1 + C_{12} b_2 + C_{13}, & C'_{23} &= C_{12} b_1 + C_{22} b_2 + C_{23}, \\ C'_{33} &= C_{11} b_1^2 + 2 C_{12} b_1 b_2 + C_{22} b_2^2 + 2 C_{13} b_1 + 2 C_{23} b_2 + C_{33}, \\ C'_{14} &= C_{11} a_1 + C_{12} a_2 + C_{14}, & C'_{24} &= C_{21} a_1 + C_{22} a_2 + C_{24}, \\ C'_{34} &= C_{11} a_1 b_1 + C_{12} (a_1 b_2 + a_2 b_1) + C_{22} a_2 b_2 + C_{13} a_1 + C_{23} a_2 + C_{14} b_1 + C_{24} b_2 + C_{34}, \\ C'_{44} &= C_{11} a_1^2 + 2 C_{12} a_1 a_2 + C_{22} a_2^2 + 2 C_{14} a_1 + 2 C_{24} a_2 + C_{44}. \end{aligned}$$

Werden die Konstanten a_1, a_2, b_1, b_2 insbesondere so gewählt, daß

$$(65) \quad \begin{cases} C_{11} a_1 + C_{12} a_2 + C_{14} = 0, \\ C_{21} a_1 + C_{22} a_2 + C_{24} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} C_{11} b_1 + C_{12} b_2 + C_{13} = 0, \\ C_{21} b_1 + C_{22} b_2 + C_{23} = 0 \end{cases}$$

gilt, so ergeben sich für die C'_{ik} folgende einfachere Ausdrücke:

$$(66) \quad \begin{cases} C'_{11} = C_{11}, & C'_{12} = C_{12}, & C'_{22} = C_{22}, & C'_{13} = C'_{23} = C'_{14} = C'_{24} = 0, \\ C'_{33} = C_{13} b_1 + C_{23} b_2 + C_{33}, & C'_{34} = C_{13} a_1 + C_{23} a_2 + C_{34}, \\ C'_{44} = C_{14} a_1 + C_{24} a_2 + C_{44}. \end{cases}$$

19. Berechnung der Koeffizienten C'_{ik} . Die Determinante der beiden linearen Gleichungssysteme (65) ist gleich

$$C_{11} C_{22} - C_{12}^2 = m_1 m_2 (m_0 + m_1) (m_0 + m_2) E_{11} E_{22} - m_1^2 m_2^2 E_{12}^2 = m_1 m_2 l$$

und ist demnach bei unseren Voraussetzungen gewiß von Null verschieden. Die Gleichungen (65) liefern nun in Verbindung mit den Formeln (62) folgende Werte für die Koeffizienten a_1, a_2 :

$$(67) \quad \begin{cases} a_1 = -\frac{a A}{16 m_1 l F^2 \sqrt{3}} [m_1 E_{12} S_{12} - (m_0 + m_1) E_{22} S_{21}], \\ a_2 = \frac{a A}{16 m_2 l F^2 \sqrt{3}} [m_2 E_{22} S_{21} - (m_0 + m_2) E_{11} S_{12}]. \end{cases}$$

Für die b_1, b_2 bekommt man zunächst die Formeln:

$$(67,1) \quad \begin{cases} b_1 = \frac{3 m_2}{2 \cdot I_1 \cdot I_2 l \sqrt{m_1 m_2}} [m_1 E_{12} S_1 \delta_1 + (m_0 + m_1) E_{22} S_2 \delta_2], \\ b_2 = \frac{3 m_1}{2 \cdot I_1 \cdot I_2 l \sqrt{m_1 m_2}} [m_2 E_{12} S_2 \delta_2 + (m_0 + m_2) E_{11} S_1 \delta_1]. \end{cases}$$

Nun ist aber auf Grund von (35), (36), (37)

$$\begin{aligned} m_1 E_{12} S_1 \delta_1 + (m_0 + m_1) E_{22} S_2 \delta_2 &: [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2] \\ &= E_{12} S_{11} \delta_1 - E_{22} S_{22} \delta_2, \\ m_2 E_{12} S_2 \delta_2 + (m_0 + m_2) E_{11} S_1 \delta_1 &: [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1] \\ &= E_{12} S_{22} \delta_2 - E_{11} S_{11} \delta_1. \end{aligned}$$

Aus (24) folgt dann unmittelbar

$$(67,2) \quad \begin{cases} b_1 = \frac{m_2 \sqrt{3 m_0 M}}{2 \cdot I_1 l \sqrt{m_1 m_2}} (E_{12} S_{11} \delta_1 - E_{22} S_{22} \delta_2), \\ b_2 = \frac{m_1 \sqrt{3 m_0 M}}{2 \cdot I_2 l \sqrt{m_1 m_2}} (E_{12} S_{22} \delta_2 - E_{11} S_{11} \delta_1). \end{cases}$$

Um die transformierte Energiegleichung zu bestimmen, müssen wir noch die Koeffizienten $C'_{33}, C'_{34}, C'_{44}$ berechnen.

Aus (66) folgt unter Berücksichtigung von (62) und (67,1)

$$\begin{aligned} C'_{33} = \frac{9}{4 l \cdot I_1^2 \cdot I_2^2} \{ &-m_1 S_1 \delta_1 [(m_0 + m_2) E_{11} S_1 \delta_1 + m_2 E_{12} S_2 \delta_2] \\ &- m_2 S_2 \delta_2 [m_1 E_{12} S_1 \delta_1 + (m_0 + m_1) E_{22} S_2 \delta_2] \} + \frac{9 P \cdot I^2}{I_1^2 \cdot I_2^2}. \end{aligned}$$

Die Formeln (38) liefern dann:

$$\begin{aligned}
C'_{33} &= -\frac{9}{4lA_1^2A_2^2} [m_1(m_0+m_2)E_{11}S_1^2\delta_1^2 + 2m_1m_2E_{12}S_1S_2\delta_1\delta_2 \\
&\quad + m_2(m_0+m_1)E_{22}S_2^2\delta_2^2] + \frac{9PA^2}{A_1^2A_2^2} \\
&= -\frac{9}{4lA_1^2A_2^2} \{4m_0MA^2[m_1(m_0+m_2)E_{11}E_{22}\delta_1^2 \\
&\quad - 2m_1m_2E_{12}^2\delta_1\delta_2 + m_2(m_0+m_1)E_{11}E_{22}\delta_2^2] \\
&\quad - \frac{16}{3}m_0MF^2[m_1(m_0+m_2)E_{11}A_2^2\delta_1^2 \\
&\quad - 2m_1m_2E_{12}A_1A_2\delta_1\delta_2 + m_2(m_0+m_1)E_{22}A_1^2\delta_2^2]\} + \frac{9PA^2}{A_1^2A_2^2} \\
&= -\frac{9m_0MA^2}{lA_1^2A_2^2} (PE_{11}E_{22} + 8m_1m_2F^2\delta_1\delta_2) + \frac{9PA^2}{A_1^2A_2^2} \\
&\quad + \frac{12m_0MF^2}{lA_1^2A_2^2} [m_1(m_0+m_2)E_{11}A_2^2\delta_1^2 - 2m_1m_2E_{12}A_1A_2\delta_1\delta_2 \\
&\quad + m_2(m_0+m_1)E_{22}A_1^2\delta_2^2].
\end{aligned}$$

Nach (45) ist weiter

$$\begin{aligned}
C'_{33} &= \frac{12F^2}{lA_1^2A_2^2} \{3m_1m_2PA^2 - 6m_0m_1m_2M\delta_1\delta_2A^2 \\
&\quad + m_1m_2[m_1(m_0+m_2)E_{11}A_2^2\delta_1^2 - 2m_1m_2E_{12}A_1A_2\delta_1\delta_2 \\
&\quad + m_2(m_0+m_1)E_{22}A_1^2\delta_2^2]\}.
\end{aligned}$$

Nach (24) ist die geschweifte Klammer eine homogene Form vierten Grades in bezug auf die Größen δ_1 und δ_2 . Eine längere elementare Rechnung ergibt

$$\begin{aligned}
C'_{33} &= \frac{36F^2J}{m_0MA_1^2A_2^2} \{m_1^2(m_0+m_2)^2\delta_1^4 \\
&\quad - 2m_1(m_0M + 2m_1m_2)(m_0+m_2)\delta_1^3\delta_2 \\
&\quad + (m_0^2M^2 + 6m_0m_1m_2M + m_1^2m_2^2)\delta_1^2\delta_2^2 \\
&\quad - 2m_2(m_0+m_1)(m_0M + 2m_1m_2)\delta_1\delta_2^3 + m_2^2(m_0+m_1)^2\delta_2^4\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{36 F^2 J}{m_0 M l A_1^2 A_2^2} [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2]^2 [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1]^2 \\
&= \frac{4 m_0 M F^2 J}{l}.
\end{aligned}$$

Nach (66), (62) und (67,1) ist

$$\begin{aligned}
C'_{34} &= \frac{a A \sqrt{3}}{32 F^2 l A_1 A_2 \sqrt{m_1 m_2}} \{m_2 \delta_2 S_2 [m_1 E_{12} S_{12} - (m_0 + m_1) E_{22} S_{21}] \\
&- m_1 \delta_1 S_1 [m_2 E_{12} S_{21} - (m_0 + m_2) E_{11} S_{12}] + 2 l (m_1 S_2 \delta_1 - m_2 S_1 \delta_2)\},
\end{aligned}$$

oder, mit Rücksicht auf die Formeln (35)

$$\begin{aligned}
\frac{32 F^2 l A_1 A_2 \sqrt{m_1 m_2}}{a A \sqrt{3}} \cdot C'_{34} &= \{-m_1 S_{11} [m_2 E_{12} S_{21} - (m_0 + m_2) E_{11} S_{12}] \\
&+ 2 m_1 l S_{21}\} \delta_1^2 + \{m_2 S_{21} [m_1 E_{12} S_{12} - (m_0 + m_1) E_{22} S_{21}] \\
&- m_1 S_{12} [m_2 E_{12} S_{21} - (m_0 + m_2) E_{11} S_{12}] + 2 l (m_1 S_{22} - m_2 S_{11})\} \delta_1 \delta_2 \\
&+ \{m_2 S_{22} [m_1 E_{12} S_{12} - (m_0 + m_1) E_{22} S_{21}] - 2 m_2 l S_{12}\} \delta_2^2.
\end{aligned}$$

Mit Benutzung der Gleichungen (24), (29), (37) und (45) erhält man hieraus

$$C'_{34} = \frac{a A m_0 M}{2 l \sqrt{3 m_1 m_2}} [m_2 (m_0 + m_2) E_{22} - m_1 (m_0 + m_1) E_{11}].$$

Aus (66), (62) und (67) folgt

$$\begin{aligned}
C'_{44} &= \frac{a^2 P}{4 m_1 m_2 F^2} + \frac{a^2 A^2}{768 m_1 m_2 l F^4} [-m_1 (m_0 + m_2) E_{11} S_{12}^2 \\
&+ 2 m_1 m_2 E_{12} S_{12} S_{21} - m_2 (m_0 + m_1) E_{22} S_{21}^2 + 4 J l].
\end{aligned}$$

Die Anwendung von (47) ergibt

$$\begin{aligned}
C'_{44} &= \frac{a^2 P}{4 m_1 m_2 F^2} + \frac{a^2 A^2}{768 m_1 m_2 l F^4} [m_2 (m_0 + m_1) (E_{11} S_1^2 - E_{22} S_{21}^2) \\
&- 2 m_1 m_2 E_{12} (S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21}) + m_1 (m_0 + m_2) (E_{22} S_{22}^2 - E_{11} S_{12}^2)].
\end{aligned}$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (38)

$$C'_{44} = \frac{a^2 P}{4 m_1 m_2 F^2} + \frac{a^2 A^2 m_0 M}{48 m_1 m_2 l F^2} [m_1 (m_0 + m_1) E_{11} - 2 m_1 m_2 E_{12} \\ + m_2 (m_0 + m_2) E_{22}].$$

20. Zusammenfassung der Ergebnisse nach der zweiten Parametertransformation. Indem wir die Substitution (63) auch in den Formeln (60) durchführen, gelangen wir zu einer neuen Darstellung der Lösung der Gleichungen (15) und (16). Wir stellen uns vor, daß wie diesen Schritt schon durchgeführt haben, und lassen dann die Akzente sowohl bei σ_1 und σ_2 wie auch bei C'_{ik} fort. Das Ergebnis lautet dann:

Die allgemeine Lösung der Gleichungen (15) und (16) drückt sich durch die Formeln

$$(68) \left\{ \begin{aligned} u_1 &= \left[\frac{a}{8 m_1 F^2 \sqrt{3}} (2 A_2 \alpha - \lambda_2 A) + \lambda_1 a_1 \right] + \left(\frac{\gamma - \beta}{A_1} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} + \lambda_1 b_1 \right) \tau + \lambda_1 \sigma_1, \\ u_2 &= \left[-\frac{a}{8 m_2 F^2 \sqrt{3}} (2 A_1 \alpha - \lambda_1 A) + \lambda_2 a_2 \right] + \left(-\frac{\gamma - \beta}{A_2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} + \lambda_2 b_2 \right) \tau + \lambda_2 \sigma_2 \end{aligned} \right.$$

aus. Die Parameter σ_1, σ_2, τ genügen der transformierten Energiegleichung

$$(69) \quad F(\sigma_1, \sigma_2, \tau) \\ = C_{11} \sigma_1^2 + 2 C_{12} \sigma_1 \sigma_2 + C_{22} \sigma_2^2 + C_{33} \tau^2 + 2 C_{34} \tau + C_{44} - W = 0.$$

Für die Koeffizienten C_{ik} gelten die Formeln

$$(70) \left\{ \begin{aligned} C_{11} &= m_1 (m_0 + m_2) E_{11}, & C_{12} &= -m_1 m_2 E_{12}, \\ C_{22} &= m_2 (m_0 + m_1) E_{22}, & C_{33} &= \frac{4 m_0 M F^2 J}{l}, \\ C_{34} &= \frac{a A m_0 M}{2 l \sqrt{3} m_1 m_2} [m_2 (m_0 + m_2) E_{22} - m_1 (m_0 + m_1) E_{11}], \\ C_{44} &= \frac{a^2 P}{4 m_1 m_2 F^2} + \frac{a^2 A^2 m_0 M}{48 m_1 m_2 F^2 l} [m_1 (m_0 + m_1) E_{11} \\ &\quad - 2 m_1 m_2 E_{12} + m_2 (m_0 + m_2) E_{22}]. \end{aligned} \right.$$

21. Dritte Parametertransformation. Um die Energiegleichung (69) noch weiter zu vereinfachen, wollen wir den Parameter τ mittels einer geeigneten Substitution

$$(71) \quad \tau = \tau_0 + \tau'$$

derart durch einen anderen τ' ersetzen, daß der Koeffizient von τ' in der neuen Energiegleichung verschwindet. Zu diesem Zwecke genügt es

$$(72) \quad \tau_0 = -\frac{C_{34}}{C_{33}}$$

zu setzen. Die transformierte Energiegleichung nimmt dann die folgende Gestalt an:

$$F'(\sigma_1, \sigma_2, \tau') \\ = C_{11}\sigma_1^2 + 2C_{12}\sigma_1\sigma_2 + C_{22}\sigma_2^2 + C_{33}\tau'^2 + (C_{34}\tau_0 + C_{44}) - W = 0.$$

Die Größe $C_{34}\tau_0 + C_{44}$ läßt sich leicht berechnen. Aus (70) und (72) folgt nämlich

$$C_{34}\tau_0 + C_{44} = \frac{C_{33}C_{44} - C_{34}^2}{C_{33}}$$

mit

$$C_{33}C_{44} - C_{34}^2 = \frac{a^2 m_0 M P J}{m_1 m_2 l} + \frac{a^2 A^2 m_0^2 M^2}{12 m_1 m_2 l} \{ [m_1(m_0 + m_1)E_{11} \\ - 2m_1 m_2 E_{12} + m_2(m_0 + m_2)E_{22}] \cdot J - [m_1(m_0 + m_1)E_{11} \\ - m_2(m_0 + m_2)E_{22}]^2 \} = \frac{a^2 m_0 M}{3 m_1 m_2 l} (3 P J + m_0 m_1 m_2 M A^2).$$

Hieraus folgt ohne weiteres

$$C_{34}\tau_0 + C_{44} = \frac{a^2}{12 m_1 m_2 F^2 J} (3 P J + m_0 m_1 m_2 M A^2).$$

Nach (42) ist dann

$$C_{34}\tau_0 + C_{44} - W \\ = \frac{a^2}{4 m_1 m_2 F^2 J} (P J - m_0 m_1 m_2 M A^2) + \frac{1}{J} (a^2 m_0 M - W J)$$

und wegen

$$PJ - m_0 m_1 m_2 M A^2 = m_1^2 E_{11} \delta_1^2 + 2 m_1 m_2 E_{12} \delta_1 \delta_2 + m_2^2 E_{22} \delta_2^2$$

ergibt sich schließlich

$$C_{34} \tau_0 + C_{44} - W = \frac{1}{J} (a^2 m_0 M - WJ) \\ + \frac{a^2 m_0 M}{4 m_1 m_2 F^2 J} (m_1^2 E_{11} \delta_1^2 + 2 m_1 m_2 E_{12} \delta_1 \delta_2 + m_2^2 E_{22} \delta_2^2).$$

22. Neue Formeln für die Geschwindigkeitskomponenten. Wir müssen jetzt die durch (71) angedeutete Parametertransformation auch in den Formeln (68) durchführen. Dadurch werden wir zu gewissen Ausdrücken für die Geschwindigkeitskomponenten gelangen, die für die zweite Abhandlung von grundlegender Bedeutung sein werden. Diesen Formeln zufolge erscheinen die Größen $u_1 \dots w_2$ als lineare Funktionen dreier Variablen, die durch eine quadratische Gleichung gebunden sind.

Indem wir diese Rechnung ausführen und nachträglich den Akzent bei τ' weglassen, bekommen wir das folgende Resultat:

Die allgemeine Lösung der Gleichungen (15) und (16) ist durch die Formeln

$$(73) \left\{ \begin{aligned} u_1 &= \left[\frac{a}{8 m_1 F^2 \sqrt{3}} (2 A_2 \alpha - \lambda_2 A) + \lambda_1 a_1 \right] \\ &\quad + \left(\frac{\gamma - \beta}{A_1} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} + \lambda_1 b_1 \right) \tau_0 + \left(\frac{\gamma - \beta}{A_1} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} + \lambda_1 b_1 \right) \tau + \lambda_1 \sigma_1, \\ u_2 &= \left[- \frac{a}{8 m_2 F^2 \sqrt{3}} (2 A_1 \alpha - \lambda_1 A) + \lambda_2 a_2 \right] \\ &\quad + \left(- \frac{\gamma - \beta}{A_2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} + \lambda_2 b_2 \right) \tau_0 + \left(- \frac{\gamma - \beta}{A_2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} + \lambda_2 b_2 \right) \tau + \lambda_2 \sigma_2 \end{aligned} \right.$$

dargestellt. Die Hilfsgrößen σ_1, σ_2, τ genügen der transformierten Energiegleichung

$$(74) \quad F(\sigma_1, \sigma_2, \tau) = C_{11} \sigma_1^2 + 2 C_{12} \sigma_1 \sigma_2 + C_{22} \sigma_2^2 + C_{33} \tau^2 + C - W = 0,$$

wobei für die Koeffizienten C_{ik} und $C - W$ folgende Formeln gelten:

$$(75) \quad \begin{cases} C_{11} = m_1(m_0 + m_2)E_{11}, & C_{12} = -m_1 m_2 E_{12}, \\ C_{22} = m_2(m_0 + m_1)E_{22}, & C_{33} = \frac{4m_0 M F^2 J}{l}, \\ C - W = \frac{a^2 m_0 M}{4m_1 m_2 F^2 J} (m_1^2 E_{11} \delta_1^2 + 2m_1 m_2 E_{12} \delta_1 \delta_2 + m_2^2 E_{22} \delta_2^2) \\ \quad + \frac{1}{J} (a^2 m_0 M - W J). \end{cases}$$

Indem wir noch zur Abkürzung

$$(76) \quad \begin{cases} \frac{a}{8m_1 F^2 \sqrt{3}} (2A_2 \alpha - \lambda_2 A) + \lambda_1 a_1 + \left(\frac{\gamma - \beta}{A_1} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} + \lambda_1 b_1 \right) \tau_0 = \overset{\circ}{u}_1 \\ -\frac{a}{8m_2 F^2 \sqrt{3}} (2A_1 \alpha - \lambda_1 A) + \lambda_2 a_2 + \left(-\frac{\gamma - \beta}{A_2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} + \lambda_2 b_2 \right) \tau_0 = \overset{\circ}{u}_2 \end{cases}$$

und

$$(77) \quad \begin{cases} \dot{\overset{\circ}{u}}_1 = \frac{\gamma - \beta}{A_1} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} + \lambda_1 b_1 \\ \dot{\overset{\circ}{u}}_2 = -\frac{\gamma - \beta}{A_2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} + \lambda_2 b_2 \end{cases}$$

setzen (und entsprechend auch für $\overset{\circ}{v}_k, \overset{\circ}{w}_k, \overset{\circ}{v}_k, \overset{\circ}{w}_k$, welche Formeln man durch zyklische Vertauschung der Buchstaben λ_k, μ_k, ν_k einerseits und der Buchstaben α, β, γ andererseits, bekommt), können wir die Formeln für die $u_1, \dots, w_2$ folgendermaßen schreiben:

$$(78) \quad \begin{cases} u_1 = \overset{\circ}{u}_1 + \dot{\overset{\circ}{u}}_1 \tau + \lambda_1 \sigma_1, \\ u_2 = \overset{\circ}{u}_2 + \dot{\overset{\circ}{u}}_2 \tau + \lambda_2 \sigma_2. \end{cases}$$

23. Berechnung der Größen $\overset{\circ}{u}_k$ und $\dot{\overset{\circ}{u}}_k$. Die Größen $\overset{\circ}{u}_k$ und $\dot{\overset{\circ}{u}}_k$ können leicht auf einfachere Gestalt gebracht werden.

Aus (77) und (67,2) folgt zunächst

$$\dot{\overset{\circ}{u}}_1 = \frac{1}{2A_1 l} [2(\gamma - \beta)l + \sqrt{3m_0 M} (E_{12} S_{11} \delta_1 - E_{22} S_{22} \delta_2) \lambda_1] \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}.$$

Nach (33) ist dann

$$\dot{u}_1 = \frac{1}{2A_1 l} \{ -2l\lambda_2 A_1 + \lambda_1 [2lA_2 + \sqrt{3m_0 M}(E_{12}S_{11}\delta_1 - E_{22}S_{22}\delta_2)] \} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}.$$

Benutzt man jetzt die Formeln (23), so bekommt man

$$2A_1 l \dot{u}_1 \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = -2l\lambda_2 A_1 + \{ [(m_0 + m_1)E_{12}S_{11} + m_1 E_{22}S_{22}] A_1 + [2l - m_2 E_{12}S_{11} + (m_0 + m_2)E_{22}S_{22}] A_2 + 2lA_2 \} \lambda_1.$$

Der Koeffizient von A_2 in der geschweiften Klammer der vorherigen Formel ist gleich Null, woraus

$$\dot{u}_1 = \frac{1}{2l} \{ -2l\lambda_2 + \lambda_1 [-(m_0 + m_1)E_{12}S_{11} + m_1 E_{22}S_{22}] \} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

folgt. Benutzt man jetzt die Formeln (37) und (46) und führt für $\dot{u}_2$ ähnliche Rechnungen durch, so bekommt man schließlich

$$(79) \quad \begin{cases} \dot{u}_1 = \frac{1}{l} (l_1 \lambda_1 - l \lambda_2) \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}, \\ \dot{u}_2 = \frac{1}{l} (l_2 \lambda_2 - l \lambda_1) \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}. \end{cases}$$

Um jetzt einen geeigneten Ausdruck für die $\ddot{u}_k$ zu finden, bemerken wir zunächst, daß nach (76), (77), (79), (72) und (70)

$$(80) \quad \begin{aligned} \ddot{u}_1 = & \frac{aA_2}{4m_1 F^2 \sqrt{3}} \alpha + \lambda_1 \left\{ a_1 - \frac{aA}{8m_1 l F^2 J \sqrt{3}} [m_2(m_0 + m_2)E_{22} \right. \\ & \left. - m_1(m_0 + m_1)E_{11}] l_1 \right\} + \lambda_2 \left\{ - \frac{aA}{8m_1 F^2 \sqrt{3}} \right. \\ & \left. + \frac{aA}{8m_1 F^2 J \sqrt{3}} [m_2(m_0 + m_2)E_{22} - m_1(m_0 + m_1)E_{11}] \right\} \end{aligned}$$

gilt. Der Koeffizient bei λ_1 in dieser Formel ist nach (67) gleich

$$- \frac{aA}{8m_1 l F^2 J \sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{2} J [m_1 E_{12} S_{12} - (m_0 + m_1) E_{22} S_{21}] \right. \\ \left. - l_1 [m_1 (m_0 + m_1) E_{11} - m_2 (m_0 + m_2) E_{22}] \right\},$$

oder, wegen (37), gleich

$$+ \frac{aA}{8m_1 l F^2 J \sqrt{3}} \left\{ [m_0 M E_{12} E_{22} + 4m_1 (m_0 + m_1) F^2] J \right. \\ \left. + [m_2 (m_0 + m_2) E_{22} - m_1 (m_0 + m_1) E_{11}] l_1 \right\}.$$

Hieraus folgt unter Benutzung der ersten Identität (48), daß dieser Koeffizient gleich

$$\frac{aA}{8F^2 J \sqrt{3}} S_{12}$$

ist.

Der Koeffizient von λ_2 in der Formel (80) ist gleich

$$\frac{aA}{8m_1 F^2 J \sqrt{3}} [-J + m_2 (m_0 + m_2) E_{22} - m_1 (m_0 + m_1) E_{11}] \\ = \frac{aA}{8F^2 J \sqrt{3}} S_{22}.$$

Führt man ähnliche Rechnungen für die Größe $\hat{u}_2$ durch, so bekommt man die Formeln:

$$(81) \quad \begin{cases} \hat{u}_1 = \frac{aA_2}{4m_1 F^2 \sqrt{3}} \alpha + \frac{aA}{8F^2 J \sqrt{3}} (S_{12} \lambda_1 + S_{22} \lambda_2), \\ \hat{u}_2 = -\frac{aA_1}{4m_2 F^2 \sqrt{3}} \alpha - \frac{aA}{8F^2 J \sqrt{3}} (S_{11} \lambda_1 + S_{21} \lambda_2). \end{cases}$$

24. Der Fall $A_1 A_2 = 0$. Wir wollen jetzt beweisen, daß das Formelsystem (78), (79), (81) und (74), (75) die allgemeine Lösung des simultanen algebraischen Systems (15) und (16) auch im Falle $A_1 A_2 = 0$ darstellt. Dagegen ist, wie schon öfters betont wurde, die Bedingung $F^2 > 0$ als eine wesentliche Voraussetzung zu betrachten.

Wir bemerken zunächst, daß die Matrix (17) auch in diesem Falle den Rang drei besitzt, daß also die allgemeine Lösung des linearen Systems (16) auch jetzt ∞^3 partikuläre Lösungen enthal-

ten wird. Ferner genügen die Größen (78) auch im Falle $A_1 A_2 = 0$ den Gleichungen (17) und (18), vorausgesetzt natürlich, daß die Gleichung (74) erfüllt ist. Davon überzeugt man sich am einfachsten durch die Substitution der Größen (78) in (15) und (16).

Es bleibt also noch zu beweisen, daß die Formeln (78) die allgemeine Lösung von (15) bilden. Dazu genügt es wieder zu zeigen, daß die Formeln

$$\begin{cases} u_1 = \overset{*}{u}_1 \tau + \overset{*}{\lambda}_1 \sigma_1, & u_2 = \overset{*}{u}_2 \tau + \overset{*}{\lambda}_2 \sigma_2, \\ v_1 = \overset{*}{v}_1 \tau + \overset{*}{\mu}_1 \sigma_1, & v_2 = \overset{*}{v}_2 \tau + \overset{*}{\mu}_2 \sigma_2, \\ w_1 = \overset{*}{w}_1 \tau + \overset{*}{\nu}_1 \sigma_1, & w_2 = \overset{*}{w}_2 \tau + \overset{*}{\nu}_2 \sigma_2 \end{cases}$$

die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\begin{cases} m_1 (\nu_1 v_1 - \mu_1 w_1) + m_2 (\nu_2 v_2 - \mu_2 w_2) = 0, \\ m_1 (\lambda_1 w_1 - \nu_1 u_1) + m_2 (\lambda_2 w_2 - \nu_2 u_2) = 0, \\ m_1 (\mu_1 u_1 - \lambda_1 v_1) + m_2 (\mu_2 u_2 - \lambda_2 v_2) = 0 \end{cases}$$

darstellen. Dies geschieht am einfachsten durch die Berechnung des Ranges der Matrix

$$\begin{vmatrix} \overset{*}{u}_1 & \overset{*}{v}_1 & \overset{*}{w}_1 & \overset{*}{u}_2 & \overset{*}{v}_2 & \overset{*}{w}_2 \\ \overset{*}{\lambda}_1 & \overset{*}{\mu}_1 & \overset{*}{\nu}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overset{*}{\lambda}_2 & \overset{*}{\mu}_2 & \overset{*}{\nu}_2 \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet man mit (i, j, k) die aus der i -ten, j -ten und k -ten Kolonne dieser Matrix gebildete dreireihige Determinante, so ist

$$(1, 2, 4)^2 + (1, 2, 5)^2 + (1, 2, 6)^2 = (\overset{*}{u}_1 \mu_1 - \overset{*}{v}_1 \nu_1)^2 \cdot E_{22}$$

$$(2, 3, 4)^2 + (2, 3, 5)^2 + (2, 3, 6)^2 = (\overset{*}{v}_1 \nu_1 - \overset{*}{w}_1 \mu_1)^2 \cdot E_{22}$$

$$(3, 1, 4)^2 + (3, 1, 5)^2 + (3, 1, 6)^2 = (\overset{*}{w}_1 \lambda_1 - \overset{*}{u}_1 \nu_1)^2 \cdot E_{22}.$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen überzeugt man sich sofort, daß die Quadratsumme der entsprechenden Determinanten gleich

$$(82) \quad [(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)(\dot{u}_1^2 + \dot{v}_1^2 + \dot{w}_1^2) - (u_1 \dot{u}_1 + v_1 \dot{v}_1 + w_1 \dot{w}_1)^2] E_{22}$$

ist. Nach (79) ist der Ausdruck (82) gleich

$$\begin{aligned} & \left| \frac{m_2}{m_1 l^2} (E_{11} l_1^2 - 2E_{12} l_1 l + E_{22} l^2) E_{11} - \frac{m_2}{m_1 l^2} (l_1 E_{11} - l E_{12})^2 \right| E_{22} \\ & = \frac{m_2}{m_1 l^2} (E_{11} E_{22} - E_{12}^2) l^2 E_{22} - \frac{4 m_2 F^2 E_{22}}{m_1}. \end{aligned}$$

Der erhaltene Ausdruck ist gewiß positiv und so stellen die Formeln (78) die allgemeine Lösung von (15) auch im Falle $A_1 A_2 = 0$ dar.

IV. Die Ungleichung $C - W < 0$.

25. Die fundamentale Ungleichung $C - W \leq 0$.
Aus (75) folgt unmittelbar

$$C_{11} C_{22} - C_{12}^2 = m_1 m_2 l > 0, \quad C_{33} > 0.$$

Demnach ist die quadratische Form

$$C_{11} \sigma_1^2 + 2 C_{12} \sigma_1 \sigma_2 + C_{22} \sigma_2^2 + C_{33} \tau^2$$

positiv-definit. Aus (74) folgt dann, daß, solange die Bewegung reell ist und solange sich die drei Massen m_0, m_1, m_2 nicht gleichzeitig auf einer Geraden befinden, die Ungleichung

$$(83) \quad C - W \leq 0$$

bestehen muß. Natürlich sind auch Zusammenstöße ausgeschlossen.

Die Gleichung

$$(84) \quad C - W = 0$$

stellt eine Hyperfläche (H) im sechsdimensionalen Raume der Variablen

$$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2,$$

dar. Die Hyperfläche (H) teilt diesen Raum in zwei oder mehrere Bereiche, in welchen stets

$$C - W < 0 \quad \text{oder} \quad C - W > 0$$

gilt. Bezeichnet man mit ($\mathfrak{B}$) die Gesamtheit derjenigen Punkte, für welche die Ungleichung $C - W \leq 0$ stattfindet, so gelangt

man zu der wichtigen Folgerung, daß die beiden Planeten m_1 und m_2 stets derartige Koordinaten besitzen müssen, daß der entsprechende Punkt des sechsdimensionalen Raumes der Menge $(\mathfrak{B})$ angehört.

Wir können also die Hyperfläche (H) als ein Gegenstück zu der im restringierten Dreikörperproblem betrachteten Fläche der relativen Nullgeschwindigkeit des unendlich kleinen Körpers auffassen. Somit stellt die Ungleichung (83) in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung der auf dem Jacobischen Integral basierten Ungleichung im restringierten Dreikörperproblem dar. Daher besteht, zumindest theoretisch, die Möglichkeit, gewisse, für das restringierte Dreikörperproblem sehr wichtige, Untersuchungen auf das allgemeine Problem zu übertragen. Auf eine nähere Diskussion der Hyperfläche (84) werden wir in einer späteren Arbeit zurückkommen.

Die Ungleichung (83) ist ziemlich kompliziert. Beachtet man, daß der Ausdruck

$$m_1^2 E_{11} \delta_1^2 + 2 m_1 m_2 E_{12} \delta_1 \delta_2 + m_2^2 E_{22} \delta_2^2$$

eine im Falle $F^2 > 0$ positiv-definite quadratische Form ist, so kann man (83) durch die folgende, etwas schärfer formulierte Ungleichung ersetzen:

$$(85) \quad \begin{aligned} 0 &\leq a^2 (m_1^2 E_{11} \delta_1^2 + 2 m_1 m_2 E_{12} \delta_1 \delta_2 + m_2^2 E_{22} \delta_2^2) \\ &< \frac{4 m_1 m_2 F^2}{m_0 M} (WJ - a^2 m_0 M). \end{aligned}$$

26. Der Zusammenstoß von zwei Körpern. In diesem Absatz setzen wir vor allem voraus, daß die durch (3) erklärte und für das Wirkungsgesetz maßgebende Funktion der Bedingung

$$(86) \quad \lim_{u \rightarrow 0} u^2 \Phi(u) = 0$$

genügt. Diese Bedingung ist im Falle des klassischen Gravitationsgesetzes offenbar erfüllt.

Wir bezeichnen ferner mit t_0 irgendeinen Zeitpunkt und setzen weiter voraus, daß es eine positive Zahl t' gibt, so daß für alle der Ungleichheit

$$t_0 - t' < t \leq t_0$$

genügende Zeitpunkte t , die drei Massen m_0, m_1, m_2 nicht gleichzeitig auf einer Geraden liegen.

Unter diesen Voraussetzungen wollen wir zwei Sätze über den Zusammenstoß von zwei (und nur zwei) Körpern beweisen.

1°. Der Zusammenstoß der Planeten m_1 und m_2 .
Es gilt der Satz:

Nähern sich für $t \rightarrow t_0$ und $t < t_0$ die beiden Massen m_1 und m_2 einem wohlbestimmten und von der Lage der Sonne verschiedenen Punkte, so liegt dieser in der Laplace'schen invariablen Ebene, falls noch $a \neq 0$ gilt.

Mit anderen Worten:

Unter gewissen allgemeinen Voraussetzungen ist der Zusammenstoß der zwei Planeten nur in der Laplace'schen invariablen Ebene möglich.

Beweis. Den Voraussetzungen unseres Satzes zufolge postulieren wir die Existenz der Grenzwerte von $r_1, r_2, r_{12}, \delta_1, \delta_2$ für $t \rightarrow t_0$ und $t < t_0$, wobei noch

$$(87) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow t_0-0} r_1 = \lim_{t \rightarrow t_0-0} r_2 = \overset{\circ}{r} \neq 0, \\ \lim_{t \rightarrow t_0-0} r_{12} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow t_0-0} \delta_1 = \lim_{t \rightarrow t_0-0} \delta_2 = \overset{\circ}{\delta} \end{array} \right.$$

sein soll.

Es ist dann zunächst

$$(88) \quad \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0-0} (m_1^2 E_{11} \delta_1^2 + 2 m_1 m_2 E_{12} \delta_1 \delta_2 + m_2^2 E_{22} \delta_2^2) \\ = \frac{m_0}{M} (m_1 + m_2)^2 \overset{\circ}{r}^2 \overset{\circ}{\delta}_1^2. \end{aligned}$$

Aus

$$F \leq \frac{1}{2} r_1 r_{12}$$

und (4), (14), (40) folgt weiter

$$(89) \quad \begin{aligned} F^2 (WJ - a^2 m_0 M) \leq \frac{1}{4} m_0 r_1^2 r_{12}^2 \{ 2 [m_0 m_1 \psi(r_1) + m_0 m_2 \psi(r_2) \\ + m_1 m_2 \psi(r_2) + h] [m_0 m_1 r_1^2 + m_0 m_2 r^2 + m_1 m_2 r_{12}^2] - a^2 M \}. \end{aligned}$$

Aus (87), (86) und (89) folgt also

$$(90) \quad \lim_{t \rightarrow t_0 - 0} F^2(WJ - a^2 m_0 M) = 0.$$

Aus (85), (88), (90) und $a \neq 0$ schließt man dann, daß $r^2 \delta^2 = 0$ gilt. Nun ist aber nach (87) $\dot{r} \neq 0$, so daß $\dot{\delta} = 0$ sein muß.

Wir sehen also zunächst, daß der Punkt, in welchem es zu einem Zusammenstoße der beiden Planeten kommt, notwendig in der fundamentalen Ebene der relativen Bewegung liegen muß. Nun aber stimmt diese Ebene im Augenblicke des Zusammenstoßes mit der Laplace'schen invariablen Ebene überein, und zwar aus folgendem Grunde:

Liegen alle drei Massen m_0, m_1, m_2 in der Fundamentalebene der relativen Bewegung, so trifft dasselbe auch für ihren Massenmittelpunkt zu. Da nun der Massenmittelpunkt zugleich in der invariablen Ebene liegt, und da die Fundamentalebene stets der invariablen Ebene parallel bleibt, so müssen die beiden Ebenen in diesem Zeitpunkte zusammenfallen.

Bemerkung 1. Es ist aus dem Beweise leicht ersichtlich, daß man für die Gültigkeit der Behauptung das Vorhandensein der Grenzwerte der Koordinaten der beiden materiellen Punkte m_1 und m_2 keineswegs zu postulieren braucht. Es genügt vielmehr vorauszusetzen, daß für $t \rightarrow t_0$ die Größen r_1 und r_2 zwischen endlichen und von Null verschiedenen Grenzen variieren, und daß $\lim_{t \rightarrow t_0} r_{12} = 0$ gilt. Wegen $|\delta_1| \leq r_1, |\delta_2| \leq r_2$ bleibt dann unserer Satz auch unter dieser allgemeineren Voraussetzung richtig.

Bemerkung 2. Der Zeitpunkt t_0 kann auch unendlich groß sein.

2°. Der Fall eines Planeten auf die Sonne.

Kommt es für $t \rightarrow t_0$ und $t < t_0$ zu einem Fall eines der Planeten auf die Sonne, also zu einem Zusammenstoße z. B. der Masse m_1 mit der Masse m_0 , und strebt inzwischen der zweite Planet m_2 einer wohlbestimmten Lage II zu, so liegt der Punkt II in der Laplace'schen invariablen Ebene.

Der Beweis ist dem vorstehenden ähnlich und soll dem Leser überlassen werden. Auch auf die naheliegenden Verallgemeinerungen wird hier verzichtet.

27. Die Ungleichung $JW - a^2 m_0 M \geq 0$. Gleichzeitiger Zusammenstoß der drei Massen. Ein Sundmanscher Satz. Wir wenden uns jetzt der bekannten Frage des gleichzeitigen Zusammenstoßes aller drei Massen zu. In dieser Richtung verdankt man SUNDMAN zwei elegante Sätze, die der berühmte Verfasser unter Zugrundelegung des Newtonschen Gravitationsgesetzes bewiesen hat.

Der erste Sundmansche Satz:

Kommt es in einem bestimmten Zeitpunkte zu einem Zusammenstoß aller drei materiellen Punkte, so streben diese entweder einer Konfiguration zu, die sich von der Konfiguration des gleichseitigen Dreieckes nur um unendliche Größen höherer Ordnung unterscheidet, oder aber streben sie Grenzlagen zu, welche auf einer Geraden sich befinden, jedoch derart, daß die Verhältnisse der gegenseitigen Abstände gegen endliche und von Null verschiedene Grenzwerte konvergieren.

Der zweite Sundmansche Satz:

Kommt es in einem bestimmten Zeitpunkte zu einem Zusammenstoß aller drei materiellen Punkte, so sind die der Bewegung entsprechenden Flächenkonstanten gleich Null.

Mit anderen Worten: sind die drei Flächenkonstanten nicht alle gleich Null, so ist der gleichzeitige Zusammenstoß aller drei Massen ausgeschlossen.

SUNDMAN hat seinem zweiten Satze eine noch genauere Fassung gegeben, auf die wir hier jedoch nicht einzugehen brauchen. Es sei noch bemerkt, daß, wie es SUNDMAN selbst in einer Fußnote seiner preisgekrönten Arbeit hervorhebt, der zweite Satz schon WEIERSTRASS bekannt gewesen sein sollte. WEIERSTRASS hat jedoch seinen Beweis nicht veröffentlicht.

Wir wollen jetzt den zweiten Sundmanschen Satz als Folgerung aus einer unseren Untersuchungen entspringenden Ungleichung beweisen. Dabei werden wir uns allerdings im Falle des Newtonschen Gravitationsgesetzes des ersten Sundmanschen Satzes bedienen müssen. Andererseits aber werden wir eine Klasse von Wirkungsgesetzen $\varphi(u)$ bestimmen, für welche der zweite Sundmansche Satz als eine unmittelbare Folgerung aus einer unserer Ungleichungen erscheint, ohne daß man sich dabei auf den ersten Satz zu stützen braucht.

Einfachheitshalber werden wir uns dabei auf die Funktionen

$$(91) \quad \varphi(u) = Cu^k$$

beschränken, wo C und k beliebige reelle Zahlen bedeuten. Den trivialen Fall $C = 0$ werden wir nicht berücksichtigen. Die Verallgemeinerung auf Funktionen $\varphi(u)$, die von allgemeinerer Natur sind, bietet keine Schwierigkeiten.

Aus (3) folgt

$$\psi(u) = \frac{1}{k+2} u^{k+2} + C' \quad \text{für } k \neq -2,$$

$$\psi(u) = \log u + C' \quad \text{für } k = -2.$$

Im Einklang mit N° 1 wählen wir für C' den Wert Null. Es ist dann

$$\psi(u) = 2m_0 \left\{ \frac{C}{k+2} (m_0 m_1 r_1^{k+2} + m_0 m_2 r_2^{k+2} + m_1 m_2 r_{12}^{k+2}) + h \right\}$$

für $k \neq -2$ und

$$\psi(u) = 2m_0 \{ C [m_0 m_1 \log r_1 + m_0 m_2 \log r_2 + m_1 m_2 \log r_{12}] + h \}$$

im Falle $k = -2$.

Die Ungleichheit (7) liefert dann

$$\frac{C}{k+2} (m_0 m_1 r_1^{k+2} + m_0 m_2 r_2^{k+2} + m_1 m_2 r_{12}^{k+2}) + h > 0$$

im ersten, und

$$C (m_0 m_1 \log r_1 + m_0 m_2 \log r_2 + m_1 m_2 \log r_{12}) + h > 0$$

im zweiten Falle.

Hieraus folgen zunächst notwendige Bedingungen für die Möglichkeit eines gleichzeitigen Zusammenstoßes aller drei Massen. Und zwar es muß

$$1^\circ \quad h > 0 \text{ im Falle } k+2 > 0,$$

$$2^\circ \quad C < 0 \text{ im Falle } k+2 \leq 0 \text{ sein.}$$

Wir sehen also, daß im Falle $k+2 \leq 0$ und $C > 0$ (Abstoßungskraft) es überhaupt zu einem gleichzeitigen Zusammenstoße aller Massen nicht kommen kann.

Und nun die Ungleichung, auf die wir uns stützen wollen. Sie folgt aus (85) und lautet:

$$JW - a^2 m_0 M \geq 0,$$

oder ausführlicher:

$$(92) \quad 2(U+h)J - a^2 M \geq 0.$$

Es ist also für die Gravitationsgesetze von der Gestalt (91)

1° im Falle $k+2 \neq 0$:

$$(93) \quad (m_0 m_1 r_1^2 + m_0 m_2 r_2^2 + m_1 m_2 r_{12}^2) \left[\frac{C}{k+2} (m_0 m_1 r_1^{k+2} + m_0 m_2 r_2^{k+2} + m_1 m_2 r_{12}^{k+2}) + h \right] \geq \frac{a^2 M}{2}$$

2° im Falle $k+2 = 0$:

$$(94) \quad (m_0 m_1 r_1^2 + m_0 m_2 r_2^2 + m_1 m_2 r_{12}^2) \left[C (m_0 m_1 \log r_1 + m_0 m_2 \log r_2 + m_1 m_2 \log r_{12}) + h \right] \geq \frac{a^2 M}{2}.$$

Wir setzen jetzt voraus, daß für $t \rightarrow t_0$ ($t < t_0$) alle drei Massen nicht gleichzeitig auf einer Geraden liegen und daß es für $t = t_0$ zu einem gleichzeitigen Zusammenstoße aller drei Massen kommt. Wir werden drei Fälle unterscheiden.

Fall 1. $k+2 > 0$. In diesem Falle ist, wie gesagt, $h > 0$. Weiter sieht man aus (93), daß die linke Seite dieser Ungleichung in diesem Falle gegen Null konvergiert. Hieraus folgt notwendig $a = 0$.

Nun aber stellt $a/\sqrt{3}$ den gemeinsamen Wert aller Flächenkonstanten dar, so daß also der zweite Sundmansche Satz tatsächlich gilt.

Fall 2. $-2 \geq k > -4$. Wir machen die zusätzliche Voraussetzung, daß sich zwei positive Konstanten α und β angeben lassen, so daß für $t \rightarrow t_0$ die Ungleichungen

$$\alpha < \frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{r_1}{r_{12}}, \quad \frac{r_2}{r_{12}} < \beta$$

stattfinden. Wie wir früher bemerkt haben, ist diese Bedingung im Falle des Newtonschen Gravitationsgesetzes ($k = -3$) nach dem ersten Sundmanschen Satze stets erfüllt. Es ist möglich, daß sich der Beweis des ersten Sundmanschen Satzes auf alle der Bedingung $k > -4$ genügende Exponenten übertragen läßt. Doch

haben wir diese Sache nicht näher geprüft. Andererseits sei hier ausdrücklich hervorgehoben, daß wir unter der Voraussetzung des Erfülltseins der angegebenen Bedingungen auch den unendlich fernen Zeitpunkt in Betracht zu ziehen imstande sind.

Ist die zusätzliche Bedingung erfüllt, so konvergieren sowohl

$$r_1^{k+4}, r_2^{k+4}, r_{12}^{k+4},$$

wie auch

$$r_1^2 r_2^{k+2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 r_2^{k+4}, \dots$$

gegen Null. Aus (93) bzw. (94) folgt dann wieder $a = 0$.

Fall 3. $k < -4$. Unsere Schlußweise kann nicht angewandt werden und die Frage, ob der Satz auch dann richtig bleibt, soll offen bleiben.

(Reçu par la Rédaction le 12. 2. 1938).

Sur les problèmes réguliers du calcul des variations de la forme

$$I[\delta] = \int_{D_n} F(p_i) d(x^i) = \text{minimum}$$

par

P. GILLIS (Bruxelles).

Introduction. Considérons un problème du calcul des variations du type

$$(1) \quad \begin{aligned} I[\delta] &= \int_{D_n} F(p_i) d(x^i) = \text{minimum} \\ (i &= 1, 2, \dots, n; p_i = \frac{\partial \delta(x^i)}{\partial x^i}; d(x^i) = dx^1 dx^2 \dots dx^n), \end{aligned}$$

où D_n représente un domaine à n dimensions de l'espace euclidien à n dimensions, dont nous désignons la frontière — multiplicité à $n - 1$ dimensions — par D_{n-1} , et F une fonction définie et continue, ainsi que ses dérivées partielles jusqu'au second ordre, pour tout système de valeurs réelles des p_i . Nous supposons le problème „régulier“, c'est-à-dire la forme quadratique

$$(2) \quad F_{p_i p_j} \xi^i \xi^j \quad \left(F_{p_i p_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j} \right)$$

définie positive.

Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'établir, sous certaines conditions imposées au domaine et aux données, un *théorème d'existence* pour (1). Ce théorème est l'extension, au cas

de n variables, de la proposition bien connue, démontrée par A. HAAR¹⁾, relative à l'intégrale double

$$\int_D F\left(\frac{\partial \delta}{\partial x}, \frac{\partial \delta}{\partial y}\right) dx dy.$$

Le principe de la méthode directe que nous utilisons est dû à M. T. RADÓ¹⁾. Avant d'aborder le théorème d'existence, nous démontrons deux lemmes. Le premier, relatif à la *semi-continuité* de l'intégrale, peut s'établir pour un problème „régulier“ tout à fait général. Le second est la généralisation d'une proposition démontrée, pour le cas de deux variables indépendantes, par M. T. RADÓ¹⁾.

Pour abréger l'écriture nous faisons usage des expressions suivantes. Nous disons que:

une fonction est de classe C^q , lorsque ses dérivées $q^{\text{ièmes}}$ sont continues,

une fonction est de classe L^q , lorsque ses dérivées $q^{\text{ièmes}}$ vérifient une condition de Lipschitz,

une fonction est de classe L^q_Δ , lorsque ses dérivées $q^{\text{ièmes}}$ vérifient une condition de Lipschitz à constante Δ .

En particulier, une fonction de classe C^0 sera continue, une fonction de classe L^0 , lipschitzienne.

1. Considérons le problème

$$(1) \quad I[\delta] = \int_{D_n} F(x^i; \delta^{\alpha}; \delta_i^{\alpha}; \dots; \delta_{i_1 \dots i_q}^{\alpha}) d(x) = \text{minimum},$$

$$\left(i, i_1, \dots, i_q = 1, 2, \dots, n; \alpha = 1, 2, \dots, m; \delta_{i_1 \dots i_q}^{\alpha} = \frac{\partial^q \delta^{\alpha}(x^i)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_q}} \right),$$

F étant une fonction, définie en tout point de D_n et pour tout système de valeurs réelles des $\delta^{\alpha}, \delta_i^{\alpha}, \dots, \delta_{i_1 \dots i_q}^{\alpha}$, supposée continue ainsi que ses dérivées partielles jusqu'au second ordre. Nous disons que le problème est „régulier“, lorsque la forme quadratique

¹⁾ (I) *Mathematische Annalen* 97 (1927) p. 124—158. Cf. aussi: A. Haar (II), *Abh. a. d. Math. Sem. der Hamburgischen Univ.* 8 (1930) p. 1—28; T. Radó, *Mathematische Annalen* 101 (1929) p. 620—632.

$$(2) \quad F_{\delta^{\alpha}\delta^{\beta}} \xi^{\alpha}\xi^{\beta} + F_{\delta^{\alpha}\delta_i^{\beta}} \xi^{\alpha}\xi_i^{\beta} + \dots + F_{\delta_{i_1\dots i_q}^{\alpha}\delta_{j_1\dots j_q}^{\beta}} \xi_{i_1\dots i_q}^{\alpha}\xi_{j_1\dots j_q}^{\beta}$$

est définie positive en tout point de D_n et pour tout système de valeurs réelles des δ^{α} , δ_i^{α} , ..., $\delta_{i_1\dots i_q}^{\alpha}$.

Lemme I. Soient m suites de fonctions

$$u^{\alpha,l}(x^i) \quad (\alpha=1,2,\dots,m; l=1,2,\dots),$$

de classe L^{q-1} , définies dans D_n et telles que les $u^{\alpha,1}$, $u^{\alpha,2}$, ... convergent uniformément, ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $q-1$, vers une fonction $u^{\alpha}(x^i)$, de classe L^{q-1} et ses dérivées jusqu'à l'ordre $q-1$, respectivement. La condition (2) étant remplie, nous avons

$$\begin{aligned} \liminf_{l \rightarrow \infty} \int_{D_n} F(x^i; u^{\alpha,l}; u_i^{\alpha,l}; \dots; u_{i_1\dots i_q}^{\alpha,l}) d(x^i) \\ \geq \int_{D_n} F(x^i; u^{\alpha}; u_i^{\alpha}; \dots; u_{i_1\dots i_q}^{\alpha}) d(x^i). \end{aligned}$$

La démonstration de ce théorème peut se faire comme dans le cas de deux variables indépendantes²⁾; on supposera d'abord les fonctions $u^{\alpha,l}(x^i)$ et $u^{\alpha}(x^i)$ de classe C^q , et on considérera ensuite le cas des fonctions de classe L^{q-1} .

Remarques. 1°) Etant données les valeurs des $\delta^{\alpha}(x^i)$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $q-1$ sur D_{n-1} , et la condition (2) étant remplie, tout système de m fonctions annulant la variation première de l'intégrale fournit un minimum absolu pour (1).

2°) Sous les mêmes conditions, le problème ne peut admettre plus d'une solution.

Ces propositions se démontrent aisément en observant que si $u^{\alpha}(x^i)$ et $v^{\alpha}(x^i)$ représentent deux systèmes de fonctions prenant sur D_{n-1} , ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $q-1$, respectivement les mêmes valeurs et si nous posons

$$f(\theta) = I[(1-\theta)u^{\alpha} + \theta v^{\alpha}] \quad (0 < \theta < 1),$$

²⁾ Cf. A. Haar, loc. cit. (I).

nous avons $\frac{d^2 f}{d\theta^2} > 0$ et par conséquent

$$f(\theta) > f(0) + \theta f'(0), \quad f(\theta) < (1 - \theta)f(0) + \theta f(1),$$

les différences $u^{\alpha} - v^{\alpha}$ et celles de leurs dérivées jusqu'à l'ordre q étant supposées non toutes nulles dans D_n . De la première inégalité résulte que, si le système de fonctions $\mathfrak{z}^{\alpha}(x^i)$ annule la variation première de l'intégrale (1) et si nous désignons par $\mathfrak{z}^{\alpha}(x^i)$ des fonctions de classe L^{q-1} , s'annulant ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $q-1$ sur D_{n-1} et non identiquement nulles dans D_n , l'on a

$$I[\mathfrak{z}^{\alpha}] < I[\mathfrak{z}^{\alpha} + \mathfrak{z}^{\alpha\alpha}].$$

De la seconde inégalité, on déduit immédiatement la propriété d'unicité.

2. Lemme II. Soit $\mathfrak{z}(x^i)$ une fonction continue dans un domaine D_n , supposé convexe. Désignons par Γ l'image, dans l'espace à $n+1$ dimensions $(x^i; \mathfrak{z})$, des valeurs prises par $\mathfrak{z}(x^i)$ sur D_{n-1} . Si la fonction satisfait aux conditions :

$\alpha)$ la pente de tout hyperplan ³⁾ contenant au moins $n+1$ points de Γ est inférieure à une constante finie, A ;

$\beta)$ $\mathfrak{z}(x^i) - (a^i x^i + a^0)$ est monotone, au sens de M. LEBESGUE, dans D_n , pour tout choix des constantes a^i, a^0 ;

$\gamma)$ $D_n^{h^i}$ étant le domaine se déduisant de D_n par une translation de vecteur de composantes h^i , $\mathfrak{z}(x^i) - \mathfrak{z}(x^i - h^i)$ est monotone ⁴⁾ dans le domaine partiel commun à D_n et $D_n^{h^i}$, quelles que soient les h^i ;

elle est de classe L^0_J .

Considérons, en effet, un point quelconque de Γ, P^0 , et $n-1$ suites déterminées de points distincts de Γ ,

$$P^{1.k}, P^{2.k}, \dots, P^{n-1.k} \quad (k=1, 2, \dots)$$

³⁾ Nous appelons pente de l'hyperplan d'équation $\mathfrak{z} = a^i x^i + a^0$, l'expression $\sqrt{(a^i)^2}$.

⁴⁾ Une fonction $f(x')$ est monotone, au sens de M. Lebesgue, dans un domaine D_n , lorsque la condition suivante est remplie: si sur la frontière d'un domaine partiel quelconque de D_n, d_n , on a $A \leq f(x^i) \leq B$ (A et B étant des constantes), ces inégalités valent dans tout le domaine d_n .

tendant simultanément vers P^0 ; les plans p^k , passant par $P^0, P^{1.k}, \dots, P^{n-1.k}$, tendront, lorsque $k \rightarrow \infty$, vers une position limite déterminée, p^0 . Observons que P^0 est le seul point commun à p^0 et Γ . Supposons, en effet, que le plan p^0 contienne un point T dont la projection sur l'hyperplan $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ se trouve dans D_n ou sur sa frontière. Désignons par $Q^0, Q^{1.k}, \dots, Q^{n-1.k}, S, q^0$ et q^k respectivement les projections de $P^0, P^{1.k}, \dots, P^{n-1.k}, T, p^0$ et p^k . Soit M le milieu du segment Q^0S . S appartenant à D_n ou D_{n-1} , M sera un point intérieur à D_n , en vertu de l'hypothèse sur la convexité du domaine. Abaissons de M la perpendiculaire sur q^k ; soit M^k le pied de cette perpendiculaire. Lorsque $k \rightarrow \infty$, $M^k \rightarrow M$. Donc pour k suffisamment grand, les points M^k seront intérieurs à D_n . Comme les points intérieurs à D_n de q^k convergent, pour $k \rightarrow \infty$, vers le point Q^0 et non vers un point tel que M , la propriété en résulte.

Si H désigne un hyperplan quelconque passant par p^0 et dont la pente est supérieure à $\mathcal{A}$, P^0 est le seul point commun à H et Γ . Car, si un tel point T existe, il ne peut se trouver dans p^0 . Nous pouvons considérer alors H comme la position limite des hyperplans H^k passant par $P^0, P^{1.k}, \dots, P^{n-1.k}, T$. En vertu de α), la pente des H^k est $\leq \mathcal{A}$; donc la pente de H sera $\leq \mathcal{A}$; d'où contradiction.

Démontrons, à présent, que si (X^i) et (Y^i) sont deux points quelconques de D_n , nous avons

$$(1) \quad |\delta(X^i) - \delta(Y^i)| \leq \mathcal{A}[(X^i - Y^i)^2]^{1/2} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Supposons d'abord un des points, (X^i) par exemple, sur D_{n-1} . Soit H l'hyperplan passant par $p(X^i)^{5)}$ et (Y^i) , et supposons que l'inégalité (1) ne soit pas remplie; dans ces conditions, la pente de H est supérieure à $\mathcal{A}$. Si nous faisons pivoter H autour de $p(X^i)$ de telle manière que la pente reste supérieure à $\mathcal{A}$, d'après ce qui précède, (X^i) sera le seul point commun à Γ et aux hyperplans ainsi obtenus. Supposons, pour fixer les idées, Γ situé en-dessous de H . Nous pouvons alors procéder de telle sorte, qu'après une rotation de H autour de $p(X^i)$, conservant à ce plan une pente supérieure à $\mathcal{A}$, le point (Y^i) soit situé au-dessus

⁵⁾ Nous désignons par $p(X^i)$ le plan, au point (X^i) , obtenu de la même manière que le plan p^0 , au point P^0 .

de ce plan. Par conséquent, si $\delta = a^i x^i + a^0$ est l'équation de H après rotation, la différence $\delta(x^i) - (a^i x^i + a^0)$ sera inférieure ou égale à zéro sur D_{n-1} et supérieure à zéro en (Y^i) , résultat en contradiction avec l'hypothèse β).

Si (X^i) et (Y^i) sont intérieurs à D_n , nous posons $X^i - Y^i = h^i$, et nous désignons par $D_n^{h^i}$ le transformé du domaine D_n par la translation de vecteur (h^i) . Puisque (Y^i) est intérieur au domaine D_n , $D_n^{h^i}$, en vertu de γ), nous savons que sur la frontière de D_n , $D_n^{h^i}$ existe un point (Z^i) , tel que

$$(2) \quad |\delta(Z^i) - \delta(Z^i - h^i)| \geq |\delta(Y^i) - \delta(Y^i - h^i)|.$$

(Z^i) étant sur la frontière de D_n , $D_n^{h^i}$, un au moins des points (Z^i) , $(Z^i - h^i)$ se trouve sur D_{n-1} . En vertu du premier cas considéré, nous pouvons écrire

$$(3) \quad |\delta(Z^i) - \delta(Z^i - h^i)| < I[(h^i)^2]^{1/2}.$$

De (2) et (3) résulte la propriété à démontrer.

3. Théorème. Soit l'intégrale

$$(1) \quad I[\delta] = \int_{D_n} F(p_i) d(x^i) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$\delta(x^i)$ étant une fonction de classe L^0 , F une fonction définie et continue, ainsi que ses dérivées partielles jusqu'au second ordre, pour tout système de valeurs réelles des p_i . Nous faisons les hypothèses suivantes:

a) la forme quadratique

$$(2) \quad F_{p_i p_j} \xi^i \xi^j$$

est définie positive;

b) le domaine D_n est convexe;

c) en désignant par Γ l'image, dans l'espace à $n+1$ dimensions $(x^i; \delta)$, des valeurs données, a priori, pour $\delta(x^i)$ sur D_{n-1} , nous supposons:

1°) qu'il existe au moins une fonction, $f(x^i)$, de classe L^0 dans D_n , passant par Γ ;

2°) que la pente de tout hyperplan contenant au moins $n+1$ points de Γ est inférieure à une constante I .

Dans ces conditions, il existe une fonction, $\mathfrak{z}(x^i)$, de classe $L^0_{\mathfrak{z}}$ dans D_n et prenant sur D_{n-1} les valeurs données, réalisant le minimum absolu de (1) relativement à l'ensemble des fonctions de classe L^0 dans D_n , passant par Γ .

En effet, soit N la constante de Lipschitz relative à la fonction $f(x^i)^6$; désignons par M un nombre supérieur ou égal à N et $\mathcal{A} + 1$. Considérons l'ensemble des fonctions de classe L^0_M

$$(E) \quad \{u(x^i)\}$$

passant par Γ . Comme leurs dérivées premières existent presque partout et sont, en valeur absolue, inférieures à M , l'ensemble des valeurs que prend l'intégrale (1) pour de telles fonctions admet une limite inférieure que nous désignerons par l . Si cette valeur l n'est pas atteinte pour une fonction de l'ensemble (E) , nous pouvons en extraire une suite $u^k(x^i)$ ($k = 1, 2, \dots$), telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_n} F \left(\frac{\partial u^k}{\partial x^i} \right) d(x^i) = l.$$

Nous pouvons choisir, en vertu du théorème d'Ascoli-Arzelà, la suite $u^k(x^i)$ de telle manière qu'elle converge uniformément vers une fonction limite, $\mathfrak{z}(x^i)$. La fonction $\mathfrak{z}(x^i)$ appartient à l'ensemble (E) , puisqu'elle est de classe L^0_M et passe par Γ . Il en résulte que

$$\int_{D_n} F(p_i) d(x^i) \geq l.$$

D'autre part, en vertu du lemme I, il vient

$$\int_{D_n} F(p_i) d(x^i) \leq l,$$

donc

$$\int_{D_n} F(p_i) d(x^i) = l.$$

La fonction $\mathfrak{z}(x^i)$ ainsi obtenue, fournit, par conséquent, le minimum absolu de (1) relativement à l'ensemble (E) . Nous nous

⁶⁾ C'est-à-dire, la plus petite constante telle qu'on ait $|f(P) - f(Q)| \leq N \cdot \overline{PQ}$, pour tout couple de points, P et Q , appartenant à D_n , $\overline{PQ}$ désignant leur distance.

proposons de montrer qu'elle fournit aussi le minimum absolu de (1) relativement à l'ensemble des fonctions de classe L^0 , passant par Γ , c'est-à-dire que

$$(3) \quad I[\bar{z}] < I[v],$$

pour toute fonction $v(x^i)$, de classe L^0 , non identique à $\bar{z}(x^i)$ dans D_n , et prenant sur D_{n-1} les valeurs données a priori.

La chose sera aisée lorsque nous aurons montré que la fonction $\bar{z}(x^i)$, que nous venons de construire, est de classe $L_{M^*}^0$, avec $M^* < M$. En effet, posons $\Phi(\theta) = I[\bar{z} + \theta(v - \bar{z})]$, ($0 \leq \theta \leq 1$); la fonction $\Phi(\theta)$ possède au point $\theta = 0$ un minimum relatif, puisque pour θ suffisamment petit, $\bar{z} + \theta(v - \bar{z})$ est de classe L_M .

Or, de (2) nous déduisons $\frac{d^2\Phi}{d\theta^2} > 0$. Il en résulte que le point $\theta = 0$ est un minimum absolu pour $\Phi(\theta)$; en particulier, nous avons $\Phi(0) < \Phi(1)$, c'est-à-dire (3).

Par conséquent, pour achever la démonstration du théorème, il nous suffira de montrer que $\bar{z}(x^i)$ est de classe L_M^0 , ou, en vertu du lemme II et des hypothèses faites ci-dessus, que cette fonction vérifie les conditions β) et γ) du § 2.

β) Prouver que $\bar{z}(x^i) - (a^i x^i + a^0)$ est monotone dans D_n , revient à montrer qu'un hyperplan quelconque, d'équation $\bar{z} = a^i x^i + a^0$, ne peut couper la surface $\bar{z} = \bar{z}(x^i)$ suivant un contour fermé dont la projection est dans D_n . Nous pouvons le démontrer comme suit. Supposons, en effet, qu'il existe un domaine partiel de D_n , δ_n , sur le contour duquel $\bar{z}(x^i) = a^i x^i + a^0$, et à l'intérieur duquel $\bar{z}(x^i) \neq a^i x^i + a^0$. Considérons la fonction

$$\varphi(x^i) = \begin{cases} \bar{z}(x^i), & \text{dans } D_n - \delta_n, \\ a^i x^i + a^0, & \text{dans } \delta_n. \end{cases}$$

$\varphi(x^i)$ satisfait évidemment aux conditions définies, et est de classe L_M^0 . En effet, l'inégalité

$$(4) \quad |\varphi(P) - \varphi(Q)| \leq M \cdot \overline{PQ},$$

est remplie lorsque P et Q appartiennent à $D_n - \delta_n$. Il en est de même lorsque P et Q appartiennent à la fermeture de δ_n , puisqu'alors

$$\frac{q(P) - q(Q)}{PQ} = \frac{q(P') - q(Q')}{P'Q'},$$

P' et Q' étant les points d'intersection (ou deux de ces points) de la droite passant par P et Q avec la frontière de δ_n . Enfin, si P appartient à $D_n - \delta_n$ et Q à δ_n , en désignant par R le point d'intersection (ou un de ces points) de la droite PQ avec la frontière de δ_n , nous pouvons écrire

$$|q(P) - q(R)| \leq M \cdot \overline{PR}, \quad |q(R) - q(Q)| \leq M \cdot \overline{RQ},$$

d'où, par addition, (4).

Nous avons

$$F(p_i) = F\left(\frac{\partial q}{\partial x^i}\right) + F_{p_i}\left(\frac{\partial q}{\partial x^i}\right) \cdot \left(p_i - \frac{\partial q}{\partial x^i}\right) + V,$$

où V représente une quantité positive, en vertu de l'hypothèse a). Comme

$$\int_{\delta_n} \left(p_i - \frac{\partial q}{\partial x^i}\right) F_{p_i}\left(\frac{\partial q}{\partial x^i}\right) d(x^i) = 0,$$

il en résulte

$$\int_{\delta_n} F(p_i) d(x^i) > \int_{\delta_n} F\left(\frac{\partial q}{\partial x^i}\right) d(x^i),$$

d'où contradiction.

γ) Que la différence $\delta(x^i) - \delta(x^i - h^i)$ soit monotone dans la partie commune, que nous désignerons par δ_n , à D_n et $D_n^{h^i}$, ressort des remarques suivantes:

1°) Si $\delta(x^i)$ est une extrémale (D_n, L_M^0)⁷⁾ et si d_n désigne un domaine partiel quelconque de D_n , $\delta(x^i)$ est aussi une extrémale (d_n, L_M^0). Sinon, il existerait une fonction $\delta^*(x^i)$, de classe L_M^0 dans d_n , coïncidant avec $\delta(x^i)$ sur la frontière de d_n , et telle que $I[\delta^*] < I[\delta]$, les intégrales étant rapportées au domaine d_n . Il en résulterait que la fonction de classe L_M^0

$$q(x^i) = \begin{cases} \delta(x^i), & \text{dans } D_n - d_n, \\ \delta^*(x^i), & \text{dans } d_n, \end{cases}$$

⁷⁾ C'est-à-dire présente un minimum pour l'intégrale (1) rapportée au domaine D_n , relativement à l'ensemble des fonctions de classe L_M^0 .

fournirait pour l'intégrale (1) une valeur inférieure à celle prise pour $\mathfrak{z}(x^i)$, ce qui est impossible.

2°) Il est évident que, si $\mathfrak{z}(x^i)$ est une extrémale pour (1), $\mathfrak{z}(x^i) + \text{constante}$ jouit de la même propriété. De même, si $\mathfrak{z}(x^i)$ est une extrémale (D_n, L_M^0) , $\mathfrak{z}(x^i - h^i)$ est une extrémale $(D_n^{h^i}, L_M^0)$.

Par conséquent, si $\mathfrak{z}(x^i) - \mathfrak{z}(x - h^i)$ n'était pas monotone dans δ_n , il existerait un domaine partiel dans δ_n , tel que le long de la frontière on ait $A \leq \mathfrak{z}(x^i) - \mathfrak{z}(x^i - h^i) \leq B$, (A et B désignant des constantes), et, en un point intérieur, $\mathfrak{z}(x^i) - \mathfrak{z}(x^i - h^i) > B$, par exemple. Soit d_n l'ensemble des points de δ_n , tel que

$$(5) \quad \begin{aligned} & | \mathfrak{z}(x^i) - \mathfrak{z}(x^i - h^i) = B, \text{ sur la frontière de } d_n, \\ & | \mathfrak{z}(x^i) - \mathfrak{z}(x^i - h^i) > B, \text{ dans } d_n. \end{aligned}$$

Puisque d_n appartient à D_n et $D_n^{h^i}$, nous savons, en vertu des 1°) et 2°) que $\mathfrak{z}(x^i) - B$ et $\mathfrak{z}(x^i - h^i)$ sont des extrémales (d_n, L_M^0) . Étant égales sur la frontière de d_n , elles coïncident dans d_n ⁸⁾, résultat en contradiction avec la formule (5).

⁸⁾ En vertu de l'unicité de la solution: cf. § 1, remarque 2°).

(Reçu par la Rédaction le 14. 5. 1938).

Sur les multiplicateurs des séries de Fourier

par

J. MARCINKIEWICZ (Wilno).

1. On dit qu'une suite numérique $\{\lambda_r\}$ est un *multiplicateur* des classes L' et L^s , en symboles $\{\lambda_r\} \in (L', L^s)$, lorsque pour toute fonction $f \in L'$,

$$(1.1) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_r \cos vx + b_r \sin vx) = \sum_1^{\infty} A_r(x),$$

la série

$$(1.2) \quad g(x) = \sum_1^{\infty} \lambda_r A_r(x)$$

représente une fonction de classe L^s . Une définition analogue subsiste aussi pour les séries doubles. A savoir, on dit qu'une suite numérique $\{\lambda_{m,n}\}$ est un multiplicateur des classes L' et L^s , ou bien $\{\lambda_{m,n}\} \in (L', L^s)$, lorsque pour toute fonction $f \in L'$,

$$(1.3) \quad \begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \lambda_{m,n} A_{m,n}(x, y), \\ A_{m+1,n+1}(x, y) &= a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \cos mx \sin ny \\ &\quad + c_{m,n} \sin mx \cos ny + d_{m,n} \sin mx \sin ny, \end{aligned}$$

la série

$$(1.4) \quad g(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \lambda_{m,n} A_{m,n}(x, y)$$

représente une fonction de la classe L^s . Cette définition peut être encore généralisée aux séries de plusieurs variables. Le théorème central du présent travail est le

Théorème 2. Les inégalités

$$(1.5) \quad K_{\alpha, \beta} = \sum_{\mu=2^{\alpha}}^{\frac{\alpha+1}{2}-2} \sum_{\nu=2^{\beta}}^{\frac{\beta+1}{2}-2} |\lambda_{\mu, \nu} - \lambda_{\mu+1, \nu} - \lambda_{\mu, \nu+1} + \lambda_{\mu+1, \nu+1}| \\ + \sum_{\mu=2^{\alpha}}^{\frac{\alpha+1}{2}-2} |\lambda_{\mu, 2^{\beta+1}} - \lambda_{\mu+1, 2^{\beta+1}}| + \sum_{\nu=2^{\beta}}^{\frac{\beta+1}{2}-2} |\lambda_{2^{\alpha}, \nu} - \lambda_{2^{\alpha}, \nu+1}| + |\lambda_{2^{\alpha+1}-1, 2^{\beta+1}-1}| \leq M,$$

où $\alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots$ et M est indépendant de α et β , entraînent

$$(1.6) \quad \{\lambda_{\nu, \mu}\} \in \{L', L''\} \quad (r > 1).$$

Pour rendre la démonstration plus claire je démontre d'abord le théorème analogue pour les séries d'une variable. En appliquant le théorème 2 aux certaines séries particulières j'obtiens le théorème 3.

Enfin je donne quelques généralisations de ces théorèmes.

2. Théorème 1. Les inégalités

$$(2.1) \quad |\lambda_{\nu}| \leq M \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(2.2) \quad \sum_{\nu=2^{\alpha}}^{\frac{\alpha+1}{2}-2} |\lambda_{\nu} - \lambda_{\nu+1}| \leq M \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots)$$

entraînent

$$(2.3) \quad \{\lambda_{\nu}\} \in \{L', L''\}.$$

La démonstration de ce théorème est basée sur certains résultats dûs à J. LITTLEWOOD, R. PALEY et A. ZYGMUND.

Lemme 1. Soit

$$(2.4) \quad f(x) = \sum_0^{\infty} A_{\nu}(x), \quad \mathcal{A}_1(f, x) = \mathcal{A}_r(x) = \sum_{2^r}^{\frac{r+1}{2}-1} A_{\mu}(x).$$

On a

$$(2.5) \quad A_r \int_0^{2\pi} (\sum \mathcal{A}_{\nu}^2(x))^{r/2} dx \leq \int_0^{2\pi} |f|^r dx \leq B_r \int_0^{2\pi} (\sum \mathcal{A}_{\nu}^2(x))^{r/2} dx \quad (r > 1),$$

où A_r et B_r désignent des constantes positives²⁾.

¹⁾ Les lettres A_r, B_r, C_r , désignent des constantes différentes dans les différents contextes.

²⁾ Paley et Littlewood [2].

Lemme 2³). Soient $\{f_r\}$ une suite des fonctions définies dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ et $n = n(r)$ une suite arbitraire des nombres entiers positifs. En désignant par $S_{\alpha, \beta}$ la somme partielle d'ordre β de la fonction f_α , on a pour tout $r > 1$

$$(2.6) \quad \int_0^{2\pi} (\sum S_{r,n}^2)^{r/2} dx \leq A_r \int_0^{2\pi} (\sum f_r^2)^{r/2} dx.$$

Posons

$$(2.7) \quad J_r(\lambda, x) = \sum_{\mu=2^r}^{r+1} \lambda_\mu A_\mu(x).$$

Pour démontrer le théorème 1 il suffit d'après (2.4) et (2.5) d'établir l'inégalité

$$(2.8) \quad \int_0^{2\pi} (\sum J_r^2(\lambda, x))^{r/2} dx \leq A_r \int_0^{2\pi} (\sum J_r^2(x))^{r/2} dx$$

avec A_r indépendant de la fonction considérée f . Or, on a en appliquant la transformation d'Abel,

$$(2.9) \quad J_r(\lambda, x) = \sum_{\mu=2^r}^{r+1} r_{r,\mu}(x) (\lambda_\mu - \lambda_{\mu+1}) + J_r(x) \lambda_{2^{r-1}},$$

où

$$(2.10) \quad r_{r,\mu} = \sum_{2^r}^{\mu} A_i(x).$$

L'inégalité de Schwarz donne en vertu de (2.9), (2.1) et (2.2)

$$(2.11) \quad J_r^2(\lambda, x) \leq (2M) \sum_{\mu=2^r}^{r+1} |\lambda_\mu - \lambda_{\mu+1}| r_{r,\mu}^2 + |\lambda_{2^{r-1}}| J_r^2(x),$$

ce qui donne d'après (2.6)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\sum J_r^2(\lambda, x))^{r/2} dx &\leq (2M)^{r/2} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\nu} \sum_{\mu=2^\nu}^{r-1} |\lambda_\mu - \lambda_{\mu+1}| r_{r,\mu}^2 \right. \\ &\quad \left. + |\lambda_{2^{r-1}}| J_r^2(x) \right\}^{r/2} dx \end{aligned}$$

³) Zygmund [5] et [6].

$$\begin{aligned} &\leq (2M)^{r/2} A_r \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\nu=2^r}^{2^{r+1}} \sum_{\mu=2^r}^{2^{r+1}} (|\lambda_\mu - \lambda_{\mu+1}| A_r^2 + |\lambda_{2^r-1}| A_r^2) \right\}^{r/2} dx \\ &\leq (2M)^r A_r \int_0^{2\pi} (\sum A_r^2(x))^{r/2}. \end{aligned}$$

L'inégalité (2.8) est donc entièrement établie, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

3. La démonstration du théorème 2 est tout à fait analogue à celle du théorème 1. Il faut d'abord généraliser les lemmes 1 et 2 aux séries à deux variables. On voit d'abord que le lemme 2 s'étend aux séries doubles d'une façon immédiate, de sorte que l'on a le

Lemme 3. Soient $\{f_\nu(x, y)\}$ une suite des fonctions définies dans les rectangles $\{(0, 0), (2\pi, 2\pi)\}$ et $m = m(\nu)$, $n = n(\nu)$ deux suites de nombres entiers positifs. Désignons par $S_{\nu, \alpha, \beta}$ la somme partielle d'ordre α, β de la série de Fourier de la fonction f_ν . On a, pour tout $r > 1$,

$$(3.1) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sum S_{\nu, m, n}^2)^{r/2} dx dy \leq A_r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sum f_\nu^2)^{r/2} dx dy.$$

Pour presque tout x la fonction $f(x, y)$, considérée comme fonction de la variable y , est une fonction de la classe L^r . Posons

$$\begin{aligned} f_\nu(x, y) &= \sum_{i=0}^{\infty} (a_{\nu, i}(x) \cos iy + b_{\nu, i}(x) \sin iy), \\ S_{\nu, x, q}(y) &= \sum_{i=0}^q (a_{\nu, i}(x) \cos iy + b_{\nu, i}(x) \sin iy). \end{aligned}$$

On a d'après (2.6)

$$(3.2) \quad \int_0^{2\pi} (\sum S_{\nu, x, n}^2(y))^{r/2} dy \leq A_r \int_0^{2\pi} \{ \sum f_\nu^2(x, y) \}^{r/2} dy.$$

En intégrant la dernière inégalité par rapport à x , on trouve

$$(3.3) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sum S_{\nu, x, n}^2(y))^{r/2} dx dy \leq A_r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sum f_\nu^2)^{r/2}$$

D'autre part, la fonction $S_{v,x,n}(y)$, considérée comme une fonction de la variable x , est pour presque tout y une fonction de la classe L^r . On vérifie facilement⁴⁾ que la somme partielle d'ordre α de sa série de Fourier est égale à $S_{v',n}(x,y)$, ce qui donne d'après (2.6)

$$\int_0^{2\pi} (\sum S_{v,m,n}^2(x,y))^r dx \leq A_r \int_0^{2\pi} (\sum S_{v',n}^2(y))^{r/2} dx.$$

Il en résulte

$$(3.4) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sum S_{v,m,n}^2(x,y))^{r/2} dx dy \leq A_r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sum S_{v',n}^2(y))^{r/2} dx dy.$$

Les inégalités (3.3) et (3.4) donnent (3.1).

L'extension du lemme 1 au cas des séries à deux variables est aussi facile, bien que les calculs deviennent plus compliqués. Le lemme 1 est équivalent au

Lemme 4⁵⁾. Soient $\omega_v(\theta)$ les fonctions de Rademacher. La définition des $A_v(x)$ étant la même que dans (2.4), on a pour tout θ ($\theta \neq \nu/2^\mu$, ν, μ entiers)

$$(3.5) \quad A_r \int_0^{2\pi} |f(x)|^r dx \leq \int_0^{2\pi} |\sum \omega_v(\theta) A_v(x)|^r dx \leq B_r \int_0^{2\pi} |f(x)|^r dx.$$

Posons

$$\varrho(n) = p+1 \text{ si } 2^p \leq n < 2^{p+1}.$$

L'inégalité (3.5) peut être écrite sous la forme

$$(3.6) \quad A_r \int_0^{2\pi} |f|^r dx \leq \int_0^{2\pi} |\sum \omega_{\varrho(v)}(\theta) A_v(x)|^r dx \leq B_r \int_0^{2\pi} |f|^r dx.$$

Il en résulte pour toute fonction $f(x,y)$ et presque tout point x

$$A_r \int_0^{2\pi} |f(x,y)|^r dy \leq \int_0^{2\pi} |\sum \omega_{\varrho(m)} A_{m,n}(x,y)|^r dy \leq B_r \int_0^{2\pi} |f(x,y)|^r dy.$$

⁴⁾ Grâce à un théorème classique de M. Riesz, d'après lequel les sommes partielles d'une série de Fourier d'une fonction $f \in L^r$ ($r > 1$) convergent fortement vers f . Riesz [4].

⁵⁾ Littlewood et Paley [2].

En intégrant cette inégalité par rapport à x , on trouve

$$(3.7) \quad \begin{aligned} A_r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|^r dx dy &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sum \omega_{\varrho(m)}(\theta) A_{m,n}(x, y)|^r dx dy \\ &\leq B_r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|^r dx dy. \end{aligned}$$

En itérant l'inégalité (3.7) on obtient

$$(3.8) \quad \begin{aligned} A_r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|^r dx dy &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sum \omega_{\varrho(m)}(\theta) \omega_{\varrho(n)}(\theta') A_{m,n}(x, y)|^r dx dy \\ &\leq B_r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|^r dx dy. \end{aligned}$$

Le résultat démontré peut être formulé dans le

Lemme 5. Soit

$$(3.9) \quad \begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n}(x, y), \\ A_{\mu,\nu} &= \sum_{2^{\mu}}^{\mu+1} \sum_{2^{\nu}}^{\nu+1} A_{m,n}(x, y). \end{aligned}$$

On a $(\theta, \theta' \neq \nu/2^{\mu}, \nu$ et μ entiers arbitraires)

$$(3.10) \quad \begin{aligned} A_r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|^r dx dy &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sum \omega_{\mu}(\theta) \omega_{\nu}(\theta') A_{\mu,\nu}(x, y)|^r dx dy \\ &\leq B_r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|^r dx dy \end{aligned}$$

$$(3.11) \quad \begin{aligned} A_r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|^r dx dy &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sum A_{\mu,\nu}^2(x, y))^{r/2} dx dy \\ &\leq B_r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|^r dx dy. \end{aligned}$$

L'inégalité (3.10) est identique avec (3.8), et (3.11) est une conséquence immédiate de (3.10) et du

Lemme 6⁶⁾. On a pour toute suite $\{a_{m,n}\}$ et tout $r > 0$

$$(3.12) \quad A_r(\sum a_{m,n}^2)^{r/2} \leq \int_0^1 \int_0^1 |\sum a_{m,n} \omega_m(\theta) \omega_n(\theta')|^r d\theta d\theta' \leq B_r(\sum a_{m,n}^2)^{r/2}$$

Ce lemme est connu. C'est une généralisation de l'inégalité de K_{HINTCHINE}:

$$(3.13) \quad A_r(\sum a_m^2)^{r/2} \leq \int_0^1 |\sum a_m \omega_m(\theta)|^r d\theta \leq B_r(\sum a_m^2)^{r/2}.$$

Pour la commodité du lecteur je vais reproduire la démonstration de l'inégalité (3.12). Soit s entier positif. On a

$$\int_0^1 \int_0^1 |\sum a_{m,n} \omega_m(\theta) \omega_n(\theta')|^{2s} d\theta d\theta' = \sum \frac{(2s)!}{(2\alpha_1)!(2\alpha_2)!\dots(2\alpha_s)!} a_{m_1, n_1}^{2\alpha_1} a_{m_2, n_2}^{2\alpha_2} \dots a_{m_{2s}, n_{2s}}^{2\alpha_{2s}},$$

ce qui donne

$$(3.14) \quad \int_0^1 \int_0^1 |\sum a_{m,n} \omega_m(\theta) \omega_n(\theta')|^{2s} d\theta d\theta' \leq \frac{(2s)!}{s! 2^s} (\sum a_{m,n}^2)^s.$$

Soit maintenant $s - 2 \leq r < s$. L'inégalité de Hölder donne d'après (3.14)

$$(3.15) \quad \int_0^1 \int_0^1 |\sum a_{m,n} \omega_m(\theta) \omega_n(\theta')|^r d\theta d\theta' \leq A_r(\sum a_{m,n}^2)^{r/2}.$$

Les inégalités (3.14) et (3.15) démontrent la seconde partie de l'inégalité (3.12), lorsque $r \geq 2$. La première partie de cette inégalité pour $r > 2$, de même que la seconde partie pour $r < 2$, étant banales, il reste à démontrer la première partie pour $r < 2$. Remarquons d'abord que l'on d'après (3.14)

$$(3.16) \quad \int_0^1 \int_0^1 |\sum a_{m,n} \omega_m(\theta) \omega_n(\theta')|^4 d\theta d\theta' \leq 3 (\sum a_{m,n}^2)^2.$$

⁶⁾ Paley [3].

Soient $s^2 = \sum a_{m,n}^2$, $S = |\sum a_{m,n} \omega_m(\theta) \omega_n(\theta')|$ et A l'ensemble des points (θ, θ') tels que $|S(\theta, \theta')| > s/2$. On a d'une façon évidente

$$s^2 = \int_0^1 \int_0^1 S^2 d\theta d\theta' = \int_A + \int_{CA} \leq \frac{1}{4} s |CA| + \sqrt{|A|} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 S^4 d\theta d\theta' \right\}^{1/2}.$$

Il s'ensuit, d'après (3.16), $1 \leq 1/4 + 2\sqrt{|A|}$, ou bien $|A| > 1/7$. On en tire

$$\int_0^1 \int_0^1 |S|^r d\theta d\theta' \geq \left(\frac{1}{2}\right)^r \frac{1}{7} s^r \geq \frac{1}{28} s^r,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

4. Supposons les $\mathcal{A}_{\mu,r}(f)$ définis par les formules (3.9). Posons

$$(4.1) \quad g = \sum \lambda_{\mu,r} A_{\mu,r}(x, y)$$

$$(4.2) \quad \mathcal{A}_{\mu,r}(\lambda, x, y) = \mathcal{A}_{\mu,r}(g, x, y), \quad r_{\mu,v,p,q} = \sum_{2''}^p \sum_{2^r}^q A_{i,j}(x, y).$$

Pour démontrer le théorème 2, il suffit de prouver l'inégalité

$$(4.3) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sum \mathcal{A}_{\mu,v}^2(\lambda, x, y))^{r/2} dx dy \leq A_r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sum \mathcal{A}_{\mu,v}^2(x, y))^{r/2} dx dy.$$

En tenant compte de (4.1) et (4.2) on trouve

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}_{\mu,r}(\lambda, x, y) &= \sum_{2^\mu}^{\mu+1} \sum_{2^r}^{r+1} r_{i,j} [\lambda_{i,j} - \lambda_{i,j+1} - \lambda_{i+1,j} + \lambda_{i+1,j+1}] \\ &+ \sum_{2^r}^{r+1} r_{2^{\mu+1-1},j} (\lambda_{2^{\mu+1-1},j} - \lambda_{2^{\mu+1-1},j+1}) \\ &+ \sum_{2^\mu}^{\mu+1} r_{i,2^{v+1-1}} (\lambda_{i,2^{v+1-1}} - \lambda_{i+1,2^{v+1-1}}) + \mathcal{A}_{\mu,r} \lambda_{2^{\mu+1-1},2^{v+1-1}}. \end{aligned}$$

Il en vient, d'après l'inégalité de Schwarz et les formules (4.1) et (4.2),

$$(4.5) \quad \mathcal{A}_{\mu, \nu}^2(\lambda, x, y) \leq M \left\{ \sum \sum r_{i,j}^2 |\lambda_{i,j} - \lambda_{i,j+1} - \lambda_{i+1,j} + \lambda_{i+1,j+1}| \right. \\ \left. + \sum r_{2''+1-1,j}^2 |\lambda_{2''+1-1,j} - \lambda_{2''+2-1,j+1}| + \dots \right\},$$

où les limites de sommation sont les mêmes que dans la formule (4.4).

L'inégalité (4.5), appliquée aux termes de la somme

$$S = \sum \mathcal{A}_{\mu, \nu}^2(\lambda, x, y),$$

donne d'après (3.1)

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sum \mathcal{A}_{\mu, \nu}^2)^{r/2} dx dy \leq M_{\mu, \nu}^{r/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sum \mathcal{A}_{\mu, \nu}^2(x, y))^{r/2} dx dy.$$

Le théorème 2 se trouve ainsi entièrement établi.

5. Théorème. 3.¹⁾ On a les relations

$$(5.1) \quad \left\{ \frac{m^2}{m^2 + n^2} \right\} \in \{L^r, L^r\},$$

$$(5.2) \quad \left\{ \frac{n^2}{m^2 + n^2} \right\} \in \{L^r, L^r\} \quad (r \leq 1),$$

$$(5.3) \quad \left\{ \frac{mn}{m^2 + n^2} \right\} \in \{L^r, L^r\}.$$

Il suffit évidemment de démontrer que les suites en question vérifient les inégalités (1.5).

Considérons par exemple la suite $\lambda_{m,n} = \frac{mn}{m^2 + n^2}$; on trouve

$$(5.4) \quad |\lambda_{m,n} - \lambda_{m+1,n} - \lambda_{m,n+1} + \lambda_{m+1,n+1}| \leq 7/(m^2 + n^2),$$

$$(5.5) \quad |\lambda_{m,n} - \lambda_{m+1,n}| \leq 1/\sqrt{m^2 + n^2}; \quad |\lambda_{m,n} - \lambda_{m,n+1}| \leq 1/\sqrt{m^2 + n^2}.$$

Il en vient

$$K_{\mu, \nu}(\lambda) \leq \sum \frac{1}{m^2 + n^2} + \sum \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} + \sum \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} + \frac{mn}{m^2 + n^2},$$

où les limites de sommation sont les mêmes que dans la formule (4.4). On en obtient, en supposant $\mu \leq \nu$,

$$K_{\mu, \nu} \leq 9.$$

¹⁾ Le problème résolu par ce théorème a été posé par M. J. Schauder. Le cas $r = 2$ est banal.

La démonstration pour les suites $\left\{ \frac{m^2}{m^2 + n^2} \right\}$ et $\left\{ \frac{n^2}{m^2 + n^2} \right\}$ est tout à fait analogue.

6. Le théorème 2 peut être facilement généralisé aux séries d'un nombre quelconque des variables. Il faut d'abord généraliser les lemmes 3 et 5. La première généralisation ne présente aucune difficulté et la seconde peut être obtenue facilement par itération de l'inégalité (3.7) et par une généralisation convenable du lemme 6.

Je ne crois pas utile de reproduire les calculs ni de formuler explicitement la généralisation du théorème 2 au cas d'un nombre quelconque des variables et je ne donne que l'énoncé d'une généralisation du théorème 3:

Théorème 4.⁸⁾ On a pour tout $r > 1$

$$(6.1) \quad \left\{ \frac{m_i^2}{m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_s^2} \right\} \in \{L', L'\} \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

$$(6.2) \quad \left\{ \frac{m_i m_j}{m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_s^2} \right\} \in \{L', L'\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, s)$$

7. On peut généraliser les théorèmes 1 et 2 encore d'une autre manière. Ces généralisations sont étroitement liées avec le

Théorème 5. Soit $\{f_n\}$ une suite des fonctions définies dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. Posons $A_{n,r}(x) = A_r(f_n)$. On a

$$(7.1) \quad A_r \int_0^{2\pi} (\sum f_n^2)^{r/2} dx \leq \int_0^1 (\sum_{n,r} A_{n,r}^2)^{r/2} dx \leq B^r \int_0^{2\pi} (\sum f_n^2)^{r/2} dx.$$

Il sera plus commode de formuler d'abord un lemme:

Lemme 7.⁹⁾ Soit $U(f)$ une opération linéaire dont le domaine et contre-domaine est l'espace L' . On a pour toute suite $\{f_n\}$

$$(7.2) \quad \int_0^{2\pi} (\sum U^2(f_n))^{r/2} dx \leq A_r M^{r/2} \int_0^{2\pi} (\sum f_n^2)^{r/2} dx,$$

⁸⁾ Ce problème m'a été posé aussi par M. J. Schauder.

⁹⁾ Ce lemme est connu; voir Zygmund [6] et Zygmund et Marcinkiewicz [1].

où M désigne la norme de l'opération U . En effet, on a d'une façon évidente

$$U\{\sum \omega_r(\theta)f_r(x)\} = \sum \omega_r(\theta)U(f_r).$$

Il en vient

$$\int_0^{2\pi} |\sum \omega_r(\theta)U(f_r)|^r dx \leq M^{r/2} \int_0^{2\pi} |\sum \omega_r(\theta)f_r(x)|^r dx.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à θ et en appliquant l'inégalité de Khintchine on trouve (7.2).

Pour démontrer (7.1) je pose pour toute fonction $f(x)$

$$(7.3) \quad f(\theta, x) = \sum \omega_r(\theta)A_r(f, x).$$

D'après le lemme 4 on conclut facilement que, pour tout $f \in L^r$, $f(\theta, x)$ est une opération linéaire à domaine et contre-domaine L^r . En appliquant l'inégalité (7.2) on en conclut

$$(7.4) \quad \int_0^{2\pi} (\sum f_r^2(\theta, x))^{r/2} dx \leq A_r \int_0^{2\pi} (\sum f_r^2)^{r/2} dx,$$

ou bien, en tenant compte de l'inégalité de Khintchine,

$$(7.5) \quad \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\sum \omega_n(\theta')f_n(\theta, x)|^r d\theta' dx \leq A_r \int_0^{2\pi} |\sum f_n^2(x)| dx.$$

On en tire, d'après le lemme 6, le second terme de l'inégalité (7.1). D'autre part, $f(x)$ peut être considéré comme une opération sur la fonction $f(\theta, x)$, car on a d'une façon évidente $U(U(f)) = f$. On en tire d'après (7.2)

$$\int_0^{2\pi} (\sum f_r^2)^{r/2} dx \leq A_r \int_0^{2\pi} (\sum f_r^2(\theta, x))^{r/2} dx,$$

ou bien, d'après l'inégalité de Khintchine,

$$\int_0^{2\pi} (\sum f_r^2)^{r/2} dx \leq A_r \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\sum \omega_r(\theta')f_r(\theta, x)|^r dx d\theta'.$$

En intégrant la dernière inégalité par rapport à θ et θ' on trouve, d'après (2.12), la première partie de l'inégalité (7.1).

Nous avons formulé et démontré le théorème 5 pour les fonctions f réelles, mais ce théorème subsiste aussi pour les fonctions complexes de sorte que l'on le

Théorème 6. *Soit*

$$f_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_{n,r} e^{i r x} = \sum_{r=1}^{\infty} A_r^{(n)}(x);$$

$$A_{n,r} = \sum_{i=2^r}^{r+1 \over 2-1} A_i^{(n)}.$$

On a

$$(7.6) \quad A_r \int_0^{2\pi} (\sum |f_r|^2)^{r/2} dx = \int_0^{2\pi} (\sum |A_{n,r}|^2)^{r/2} dx \leq B_r \int_0^{2\pi} (\sum |f_r|^2)^{r/2} dx \quad (r < 1)$$

La démonstration est la même que dans le cas des fonctions réelles, car les lemmes 1,6 et 7¹⁰⁾ sont vrais aussi pour les fonctions complexes.

Comme une conséquence immédiate de ce théorème on trouve le

Théorème 7. *Soit*

$$(7.7) \quad f = \sum_0^{\infty} c_r e^{i r x} = \sum_1^{\infty} A_i(x); \quad A_r(f) = \sum_{2^r}^{r+1 \over 2-1} A_i(x)$$

$$A_v^{(i)} = A_i[e^{-2 i x} A_v(x)].$$

On a

$$(7.8) \quad A_r \int_0^{2\pi} |f|^r dx \leq \int_0^1 (\sum_{r,i} |A_v^{(i)}(x)|^2)^{r/2} dx \leq B_r \int_0^1 |f|^r dx.$$

Pour le prouver, il suffit, d'après le lemme 1, de démontrer l'inégalité suivante:

$$(7.9) \quad A_r \int_0^1 (\sum |A_v|^2)^{r/2} dx \leq \int_0^1 (\sum_{r,i} |A_v^{(i)}|^2)^{r/2} dx \leq B_r \int_0^1 (\sum |A_v|^2)^{r/2} dx.$$

Or, la dernière inégalité résulte immédiatement de (7.6) lorsqu'on y pose $f_v = A_v$.

¹⁰⁾ Pour le lemme 1 voir Littlewood et Paley [2]. Le lemme 6 pour les coefficients complexes est une conséquence immédiate de (3.12) dans le cas où les $\sigma_{m,n}$ sont réels.

L'inégalité (7.8) peut être écrite, d'après l'inégalité de Khintchine, sous la forme

$$(7.10) \quad A_r \int_0^{2\pi} |f|^r dx \leq \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left| \sum \omega_{\varrho(v)}(\theta) c_v e^{i v x} \right|^r dx d\theta \leq B_r \int_0^{2\pi} |f|^r dx,$$

où $\varrho(v)$ est une fonction n'admettant que des valeurs entières, constante pour les indices appartenant à un groupe quelconque $\mathcal{A}_v^{(i)}$ et différente pour les différents groupes $\mathcal{A}_v^{(i)}$. D'après un théorème classique de M. RIESZ¹¹⁾ on conclut de l'inégalité (7.10), pour toute fonction réelle définie dans l'intervalle $(0, 2\pi)$,

$$(7.11) \quad A_r \int_0^1 |f|^r dx \leq \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \sum \omega_{\varrho(v)}(\theta) A_v(x) \right|^r dx d\theta \leq B_r \int_0^{2\pi} |f|^r dx.$$

En appliquant l'inégalité de Khintchine on en obtient le

Théorème 8. *Soit*

$$f(x) = \sum A_v(x); \quad \mathcal{A}_v = \sum_{2^{r+1}}^{2^r-1} A_{v'}(x)$$

$$\mathcal{A}_v^{(i)} = \sum_{2^{r+2^i}}^{2^r+2^{i+1}-1} A_{v'}(x).$$

On a¹⁾

$$(7.12) \quad A_r \int_0^{2\pi} |f(x)|^r dx \leq \int_0^{2\pi} \left(\sum |\mathcal{A}_v^{(i)}|^2 \right)^{r/2} dx \leq B_r \int_0^{2\pi} |f(x)|^r dx \quad (r > 1)$$

Ce théorème donne par la méthode utilisée à la démonstration du théorème 1 le

Théorème 9. *Soit $\{\lambda_r\}$ une suite numérique vérifiant les conditions*

$$(7.13) \quad |\lambda_r| \leq M,$$

$$(7.14) \quad \sum_{2^{r+2^i}}^{2^r+2^{i+1}-1} |\lambda_n - \lambda_{n+1}| \leq M.$$

On a

$$(7.14) \quad \{\lambda_n\} \in \{L', L''\} \quad (r > 1).$$

¹¹⁾ M. Riesz [4].

Il est aussi clair que l'on peut généraliser dans cette direction le théorème 2. On pourrait aussi itérer cette généralisation en divisant les intervalles $(2' + 2^i, 2' + 2^{i+1} - 1)$ en sous-intervalles de la forme $(2' + 2^i + 2^j, 2' + 2^i + 2^{j+1} - 1)$, $(j \leq i \leq \nu)$. L'idée directrice de toutes ces généralisations est tout à fait claire et les calculs peuvent être laissés au lecteur.

Bibliographie.

J. MARCINKIEWICZ et A. ZYGMUND, [1], Quelques remarques sur les opérations linéaires. A paraître dans les *Fund. Math.* 32.

J. LITTLEWOOD et R. PALEY, [2], Theorems on Fourier series and power series: (I) *Journal Lond. Math. Soc.* 6 (1931) p. 230–233; (II) *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) 42 (1937) p. 52–89.

R. PALEY, [3], A remarkable series of orthogonal functions (I), *Proc. Lond. Math. Soc.* 2 34 (1931) p. 241–264.

M. RIESZ, [4], Sur les fonctions conjuguées, *Math. Zeitschr.* 27 (1927) p. 218–244.

A. ZYGMUND, [5], On a theorem of Paley, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* Vol. 34 part 2 (1938) p. 125–133.

A. ZYGMUND, [6], On the convergence and summability of power series on the circle of convergence (I), *Fund. Math.* 30 (1938) p. 171–196.

(Reçu par la Rédaction le 28. 5. 1938).

Über das allgemeine Dreikörperproblem

von

W. NIKLIBORC (Warszawa).

Zweite Mitteilung.

Grundlegende Formeln für die Geschwindigkeitskomponenten.

Einleitung.

Diese zweite Mitteilung über das Dreikörperproblem stellt die unmittelbare Fortsetzung der von uns in der ersten Mitteilung publizierten Untersuchungen dar. Um Wiederholungen zu vermeiden, wollen wir hier in aller Kürze an die erste Mitteilung anschließen.

Wir betrachten also das allgemeinste Dreikörperproblem, d. h. es werden weder über die Größe der Massen, noch über die Natur der gegenseitigen Wirkungskräfte einschränkende Voraussetzungen gemacht. Die Wirkungskräfte sollen nur von den Abständen der Massen abhängen. Indem wir uns dann der Frage der relativen Bewegung zuwenden, legen wir die Differentialgleichungen (4) zugrunde (die Numeration der Formeln bezieht sich auf die zweite Mitteilung). Diese besitzen dann vier elementare Integrale und zwar drei Flächenintegrale und ein Energieintegral. Nach entsprechender Wahl des Koordinatensystems, die in der ersten Arbeit ausführlich besprochen wurde, und nach der Einführung gewisser Abkürzungen lassen sich die erwähnten Integrale auf die Gestalt (10) und (11) bringen.

Nun haben wir das von den Gleichungen (10) und (11) gebildete System als ein simultanes algebraisches System inbezug auf die Größen

$$u_1, \dots, w_2$$

betrachtet und stellten uns die Aufgabe, die allgemeine Lösung desselben zu bestimmen. Ein großer Teil dieser Aufgabe wurde in der ersten Mitteilung erledigt und so gelangten wir zu den Formeln (59), die die Größen $u_1, \dots, w_2$ als lineare Funktionen dreier Variablen σ_1, σ_2, τ darstellen, die ihrerseits der transformierten Energiegleichung (60) genügen.

In dieser Mitteilung wird zunächst die Transformation der Gleichung (60) weiter verfolgt, indem man den Koeffizienten C_{12} durch eine geeignete lineare Substitution wegzuschaffen versucht. Dabei wird, wie immer, der Symmetrie der Rechnungen die größte Aufmerksamkeit zugewendet, wenn auch diese vorläufig verwickelter sich gestalten mögen. Es stellt sich dann immer heraus, daß man zu Formeln gelangt, die aus einer Formel durch bloße zyklische Vertauschung der Buchstaben und der Indizes entstehen.

Nach der Durchführung der Rechnungen bekommt man für die Geschwindigkeitskomponenten die Formeln (69), wobei die Hilfsvariablen σ_1, σ_2, τ der Gleichung (77) genügen, und nun kann man zu der Darstellung der Größen u_k, v_k, w_k durch zwei willkürliche Parameter mühelos übergehen. Diese Darstellung wird durch das Formelsystem (69), (70) und (81) geliefert.

Von nun ab erschien es weiter notwendig, die Gestalt der gewonnenen Lösung zu vereinfachen, um erstens die verschiedenen Irrationalitäten zu beseitigen und zweitens um die künstlichen Parameter θ_1 und θ_2 durch einer einfacheren Deutung fähige Größen zu ersetzen. Als diese neuen Parameter, und das ist der dritte springende Punkt dieser Arbeitenreihe, wurden die Komponenten der Geschwindigkeiten in der zu der Laplace'schen invariablen Ebene normalen Richtung gewählt. Diese Größen werden künftig als *Normalgeschwindigkeiten* bezeichnet. Freilich zieht dieser Übergang zu neuen Größen eine wesentliche Einschränkung nach sich. Es muß nämlich von diesem Moment an vorausgesetzt werden, daß nicht alle drei Massen zugleich in der invariablen Ebene liegen, wozu noch die schon früher notwendige Voraussetzung, daß die drei Massen nicht gleichzeitig auf einer Geraden liegen sollen, hinzuzufügen ist.

Indem dann noch mehrere recht umfangreiche, wenn auch ganz elementare Rechnungen durchgeführt werden, gelangt man zu dem Formelsystem (68), (69), (70), (106), (110), (111) und (112), das die allgemeine Lösung des algebraischen Systems (10)

und (11) in der gewünschten und für die Folge nützlichen Form darstellt. Diesen Formeln zufolge erscheinen die x_k, y_k, z_k als Funktionen der Normalgeschwindigkeiten, der die augenblickliche geometrische Konfiguration bestimmenden Größen und endlich der Integrationskonstanten. Eine entsprechende Wahl des Koordinatensystems ist selbstverständlich eine notwendige Vorbedingung für die Richtigkeit der gefundenen Ausdrücke.

Obwohl die gewonnenen Formeln recht umständlich sind, so muß doch hervorgehoben werden, daß diese Kompliziertheit durchaus in der Natur der Sache liegt. Die Formeln gelten nämlich ohne irgendwelche wesentliche Vereinfachung auch dann, wenn keine Wirkungskräfte vorhanden sind, d. h. wenn man es mit geradliniger und gleichförmiger Bewegung zu tun hat. In dem letztgenannten Falle ist bloß Φ als eine Konstante aufzufassen, während sie sonst eine vorgegebene Funktion der Entfernungen bedeutet.

In den darauffolgenden Mitteilungen werden die gefundenen Formeln auf verschiedene mit dem Dreikörperproblem verknüpfte Fragen angewandt, und zwar vor allem (dritte Mitteilung) auf die Frage der Reduktion der Differentialgleichungen auf die sechste Ordnung.

I. Bezeichnungen. Identitäten. Hilfssätze.

1. Differentialgleichungen der relativen Bewegung. Wir bezeichnen mit t die Zeit und betrachten drei vollkommen beliebige Massen m_0, m_1 und m_2 . Es sei $\varphi(u)$ die für die gegenseitige Wirkung zweier Massen charakteristische Funktion. Wir bezeichnen mit x_1, y_1, z_1 , bzw. mit x_2, y_2, z_2 die Koordinaten der Punkte m_1 und m_2 in bezug auf ein Achsenkreuz, dessen Ursprung sich in m_0 befindet, und das sich mit m_0 derart bewegt, daß die neuen Achsen stets mit denjenigen eines Galileischen Koordinatensystems parallel und gleichgerichtet sind.

Setzt man noch

$$(1) \quad \begin{cases} r_k = + \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} \\ r_{1,2} = + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \end{cases} \quad (k=1, 2),$$

so lauten die Differentialgleichungen der relativen Bewegung¹⁾ der Punkte m_1 und m_2 wie folgt:

¹⁾ Vgl. die erste Mitteilung (weiter zitiert als Mitt. I).

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = [(m_0 + m_1) \varphi(r_1) + m_2 \varphi(r_{12})] x_1 + m_2 [\varphi(r_2) - \varphi(r_{12})] x_2, \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} = [(m_0 + m_2) \varphi(r_2) + m_1 \varphi(r_{12})] x_2 + m_1 [\varphi(r_1) - \varphi(r_{12})] x_1, \\ \dots \end{cases}$$

Weitere Gleichungen bekommt man durch zyklische Vertauschung der Buchstaben.

Die Gleichungen (2) besitzen bekanntlich vier elementare Integrale und zwar drei Flächenintegrale und ein Energieintegral. Indem wir zur Fundamentalebene der relativen Bewegung die

$$x + y + z = 0$$

Ebene wählen²⁾, und sukzessive die Größen

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{m_0 M}} [m_2 x_2 - (m_0 + m_2) x_1], \\ \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{m_0 M}} [m_2 y_2 - (m_0 + m_2) y_1], \\ \nu_1 = \frac{1}{\sqrt{m_0 M}} [m_2 z_2 - (m_0 + m_2) z_1], \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{m_0 M}} [m_1 x_1 - (m_0 + m_1) x_2], \\ \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{m_0 M}} [m_1 y_1 - (m_0 + m_1) y_2], \\ \nu_2 = \frac{1}{\sqrt{m_0 M}} [m_1 z_1 - (m_0 + m_1) z_2], \end{cases}$$

$$(4) \quad u_k = \sqrt{\frac{m_0}{M}} x'_k, \quad v_k = \sqrt{\frac{m_0}{M}} y'_k, \quad w_k = \sqrt{\frac{m_0}{M}} z'_k, \quad (k=1,2)$$

$$(5) \quad M = m_0 + m_1 + m_2,$$

$$(6) \quad \Phi(u) = \int u \varphi(u) du,$$

$$(7) \quad U = m_0 m_1 \Phi(r_1) + m_0 m_2 \Phi(r_2) + m_1 m_2 \Phi(r_{12}),$$

²⁾ Mitt. I.

$$(8) \quad V = 2(U + h),$$

$$(9) \quad W = m_0 V$$

eingeführen, können wir die erwähnten Integrale auf die folgende Gestalt bringen:

$$(10) \quad \begin{cases} m_1(\nu_1 v_1 - \mu_1 w_1) + m_2(\nu_2 v_2 - \mu_2 w_2) = \frac{a}{\sqrt{3}}, \\ m_1(\lambda_1 w_1 - \nu_1 u_1) + m_2(\lambda_2 w_2 - \nu_2 u_2) = \frac{a}{\sqrt{3}}, \\ m_1(\mu_1 u_1 - \lambda_1 v_1) + m_2(\mu_2 u_2 - \lambda_2 v_2) = \frac{a}{\sqrt{3}}, \end{cases}$$

$$(11) \quad m_1(m_0 + m_2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - 2m_1 m_2(u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2) \\ + m_2(m_0 + m_1)(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) - W = 0.$$

Dabei bedeuten a und h zwei Konstanten, die sonst beliebig sind. Es ist zu beachten, daß, wenn der Ursprung des Galileischen Systems sich im Massenmittelpunkte des Systems befindet, stets

$$(11) \quad U + h \geq 0$$

gilt.

2. Bezeichnungen. Wir haben in der ersten Mitteilung eine ganze Reihe verschiedener Größen eingeführt, die hier zusammengestellt werden sollen, wobei noch gewisse andere, in dieser Mitteilung wichtige Rolle spielende Ausdrücke hinzugefügt werden. Es sind dies die Größen

$$(13) \quad \alpha = y_1 z_2 - z_1 y_2, \quad \beta = z_1 x_2 - x_1 z_2, \quad \gamma = x_1 y_2 - y_1 x_2,$$

$$(14) \quad A = \alpha + \beta + \gamma,$$

$$(15) \quad \begin{cases} \delta_1 = \frac{x_1 + y_1 + z_1}{\sqrt{3}}, \\ \delta_2 = \frac{x_2 + y_2 + z_2}{\sqrt{3}}, \end{cases}$$

$$(16) \quad \begin{cases} A_1 = \lambda_1 + \mu_1 + \nu_1, \\ A_2 = \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2, \end{cases}$$

$$(17) \quad P = m_1(m_0 + m_2)\delta_1^2 - 2m_1 m_2 \delta_1 \delta_2 + m_2(m_0 + m_1)\delta_2^2,$$

$$(18) \quad \begin{cases} E_{11} = \frac{1}{m_0 M} [m_0 (m_0 + m_2) r_1^2 - m_0 m_2 r_2^2 + m_2 (m_0 + m_2) r_{12}^2], \\ E_{12} = \frac{1}{m_0 M} [m_0 (\frac{M}{2} - m_1) r_1^2 + m_0 (\frac{M}{2} - m_2) r_2^2 - (\frac{m_0 M}{2} + m_1 m_2) r_{12}^2], \\ E_{22} = \frac{1}{m_0 M} [m_0 m_1 r_1^2 + m_0 (m_0 + m_1) r_2^2 + m_1 (m_0 + m_1) r_{12}^2], \end{cases}$$

$$(19) \quad 4 F^2 = E_{11} E_{22} - E_{12}^2,$$

$$(20) \quad \begin{cases} Q_1 = r_2^2 \delta_1 - \frac{1}{2} (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) \delta_2, \\ Q_2 = r_1^2 \delta_2 - \frac{1}{2} (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) \delta_1, \end{cases}$$

$$(21) \quad \mathcal{A}^2 = r_2^2 \delta_1^2 - (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) \delta_1 \delta_2 + r_1^2 \delta_2^2,$$

$$(22) \quad J = m_0 m_1 r_1^2 + m_0 m_2 r_2^2 + m_1 m_2 r_{12}^2,$$

$$(23) \quad \begin{cases} S_{11} = m_1 r_1^2 - (2 m_0 + m_1) r_2^2 - m_1 r_{12}^2, \\ S_{12} = (m_0 - m_1) r_1^2 + (m_0 + m_1) r_2^2 - (m_0 + m_1) r_{12}^2, \\ S_{21} = (m_0 + m_2) r_1^2 + (m_0 - m_2) r_2^2 - (m_0 + m_2) r_{12}^2, \\ S_{22} = -(2 m_0 + m_2) r_1^2 + m_2 r_2^2 - m_2 r_{12}^2, \end{cases}$$

$$(24) \quad \begin{cases} S_1 = S_{11} \delta_1 + S_{12} \delta_2, \\ S_2 = S_{21} \delta_1 + S_{22} \delta_2, \end{cases}$$

$$(25) \quad l = m_0 M E_{11} E_{22} + 4 m_1 m_2 F^2,$$

$$(26) \quad \begin{cases} l_1 = m_0 M E_{12} E_{22} - 4 m_1 (m_0 + m_1) F^2, \\ l_2 = m_0 M E_{11} E_{12} - 4 m_2 (m_0 + m_2) F^2, \end{cases}$$

$$(27) \quad \theta = m_1^2 E_{11} \delta_1^2 + 2 m_1 m_2 E_{12} \delta_1 \delta_2 + m_2^2 E_{22} \delta_2^2,$$

$$(28) \quad H = m_1^2 E_{11} \delta_1'^2 + 2 m_1 m_2 E_{12} \delta_1' \delta_2' + m_2^2 E_{22} \delta_2'^2.$$

In der letzten Formel bedeuten δ_1' und δ_2' die nach der Zeit genommenen ersten Ableitungen der Abstände δ_1 und δ_2 von der Fundamentalebene der relativen Bewegung.

Liegen die drei Massen m_0 , m_1 und m_2 nicht gleichzeitig auf einer Geraden, was, wie in der ersten Mitteilung, auch hier für das Nachstehende vorausgesetzt wird, so ist stets $F > 0$, $l > 0$ und A^2 ist eine positiv-definite quadratische Form der Größen δ_1 und δ_2 . Dasselbe gilt für die Größen P und θ . Demnach verschwindet jede der Größen A^2 , P , θ dann und nur dann, wenn die beiden Planeten in der Fundamentalebene gleichzeitig liegen. Übrigens ist auch H eine positiv-definite quadratische Form der Größen δ'_1 , δ'_2 .

3. Identitäten. Zwischen den eingeführten Größen besteht eine ganze Menge verschiedener Identitäten, von welchen hier die wichtigsten und für die Folge nützlichen zusammengestellt werden. Nur einige von ihnen sind in der ersten Mitteilung zu finden. Die elementaren Beweise werden natürlich fortgelassen.

Es gelten folgende Formeln:

$$(29) \quad 4F^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = r_1^2 r_2^2 - \frac{1}{4} (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2).$$

(Dabei bedeutet F den Flächeninhalt des durch m_0 , m_1 , m_2 gebildeten Dreiecks);

$$(30) \quad A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$(31) \quad A^2 = 3(4F^2 - A^2) = 3\{4F^2 - [r_2^2 \delta_1^2 - (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) \delta_1 \delta_2 + r_1^2 \delta_2^2]\},$$

$$(32) \quad \begin{cases} \delta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3m_0 M}} [(m_0 + m_1) A_1 + m_2 A_2], \\ \delta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3m_0 M}} [m_1 A_1 + (m_0 + m_2) A_2], \end{cases}$$

$$(33) \quad \begin{cases} A_1 = [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1] \sqrt{\frac{3}{m_0 M}}, \\ A_2 = [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2] \sqrt{\frac{3}{m_0 M}}, \end{cases}$$

$$(34) \quad \begin{aligned} J &= m_1(m_0 + m_1) E_{11} + 2m_1 m_2 E_{12} + m_2(m_0 + m_2) E_{22} \\ &= -\frac{1}{2} (m_1 S_{22} + m_2 S_{11}). \end{aligned}$$

$$(35) \quad J^2 = Q_1 \delta_1 + Q_2 \delta_2,$$

$$(36) \quad \begin{cases} Q_1 r_1^2 + \frac{1}{2} Q_2 (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) = 4 \delta_1 F^2, \\ Q_2 r_2^2 + \frac{1}{2} Q_1 (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) = 4 \delta_2 F^2, \end{cases}$$

$$(37) \quad \begin{cases} (m_0 + m_1) Q_1 + m_1 Q_2 = -\frac{S_1}{2}, \\ m_2 Q_1 + (m_0 + m_2) Q_2 = -\frac{S_2}{2}, \end{cases}$$

$$(38) \quad \begin{cases} S_{11} = -2 [m_1 E_{12} + (m_0 + m_2) E_{22}], \\ S_{12} = 2 [(m_0 + m_1) E_{12} + m_2 E_{22}], \\ S_{21} = 2 [m_1 E_{11} + (m_0 + m_2) E_{12}], \\ S_{22} = -2 [(m_0 + m_1) E_{11} + m_2 E_{12}], \end{cases}$$

$$(39) \quad \begin{cases} E_{11} S_{11} + E_{12} S_{21} = -8 (m_0 + m_2) F^2, \\ E_{12} S_{12} + E_{22} S_{22} = -8 (m_0 + m_1) F^2, \\ E_{11} S_{12} + E_{12} S_{22} = 8 m_2 F^2, \\ E_{12} S_{11} + E_{22} S_{21} = 8 m_1 F^2, \end{cases}$$

$$(40) \quad \begin{cases} m_1 S_{22} - (m_0 + m_2) S_{12} = -m_0 M (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2), \\ m_2 S_{12} - (m_0 + m_1) S_{22} = 2 m_0 M r_1^2, \\ m_2 S_{11} - (m_0 + m_1) S_{12} = -m_0 M (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2), \\ m_1 S_{12} - (m_0 + m_2) S_{11} = 2 m_0 M r_2^2, \end{cases}$$

$$(41) \quad \begin{cases} m_2 r_2^2 + m_1 E_{11} = \frac{m_0 + m_2}{m_0 M} J, \\ -(r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) + 2 E_{12} = -\frac{2}{m_0 M} J, \\ m_1 r_1^2 + m_2 E_{22} = \frac{m_0 + m_1}{m_0 M} J, \end{cases}$$

$$(42) \quad m_1 m_2 J^2 + \theta = \frac{JP}{m_0 M},$$

$$(43) \quad \begin{cases} m_1 l + (m_0 + m_2) l_1 = -\frac{1}{2} m_0 M S_{11} E_{12}, \\ (m_0 + m_1) l + m_2 l_1 = -\frac{1}{2} m_1 M S_{22} E_{22}, \\ m_2 l + (m_0 + m_1) l_2 = -\frac{1}{2} m_0 M S_{22} E_{12}, \\ (m_0 + m_2) l + m_1 l_2 = -\frac{1}{2} m_0 M S_{11} E_{11}, \end{cases}$$

$$(44) \quad \begin{cases} m_2 S_{11} E_{12} - (m_0 + m_2) S_{22} E_{22} = 2l, \\ m_1 S_{22} E_{12} - (m_0 + m_1) S_{11} E_{11} = 2l, \end{cases}$$

$$(45) \quad \begin{cases} m_0 m_2 M S_{11}^2 E_{12}^2 + 16(m_0 + m_1)(m_0 + m_2)^2 F^2 J E_{22} \\ \quad = 4 m_0 M (m_2 r_2^2 E_{22} + 4 m_1 F^2) l, \\ m_0 m_1 M S_{22}^2 E_{12}^2 + 16(m_0 + m_1)^2 (m_0 + m_2) F^2 J E_{11} \\ \quad = 4 m_0 M (m_1 r_1^2 E_{11} + 4 m_2 F^2) l, \end{cases}$$

$$(46) \quad \begin{cases} m_0 M S_{11}^2 E_{11} + 16 m_1 (m_0 + m_2) F^2 J = 4 m_0 M r_2^2 l, \\ m_0 M S_{11} S_{22} E_{12} + 16(m_0 + m_1)(m_0 + m_2) F^2 J = 2 m_0 M (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) l, \\ m_0 M S_{22}^2 E_{22} + 16 m_2 (m_0 + m_1) F^2 J = 4 m_0 M r_1^2 l, \end{cases}$$

$$(47) \quad \begin{cases} m_0 M S_{11} S_{22} E_{11} E_{22} + 16 m_1 m_2 E_{12} F^2 J = 4 (E_{12} J + m_1 m_2 E_{11} E_{22}) l, \\ m_0 M S_{11} S_{22} (E_{11} E_{22} + E_{12}^2) + 16(m_0 M + 2 m_1 m_2) E_{12} F^2 J \\ \quad = 4 m_0 M [(r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) E_{12} + 4 F^2] l, \end{cases}$$

$$(48) \quad (m_1 E_{11} \delta_1 + m_2 E_{12} \delta_2) S_1 + (m_1 E_{12} \delta_1 + m_2 E_{22} \delta_2) S_2 = -8 F^2 P.$$

4. Ein algebraisches Gleichungssystem. Wir betrachten die Gleichungen

$$(49) \quad \begin{cases} b_{11} \xi + b_{12} \eta + b_{13} \zeta = f_1, \\ b_{21} \xi + b_{22} \eta + b_{23} \zeta = f_2, \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \end{cases}$$

wo ξ , η , ζ die Unbekannten und die b_{ik} und f_i gegebene Größen bedeuten. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Matrix

$$\begin{matrix} b_{11}, & b_{12}, & b_{13} \\ b_{21}, & b_{22}, & b_{23} \end{matrix}$$

von Range zwei ist.

Es sei der Reihe nach

$$(50) \quad \begin{cases} B_1 = b_{12} b_{23} - b_{13} b_{22}, \\ B_2 = b_{13} b_{21} - b_{11} b_{23}, \\ B_3 = b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}, \end{cases}$$

$$(51) \quad \begin{cases} e_{11} = b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{13}^2, \\ e_{12} = b_{11} b_{21} + b_{12} b_{22} + b_{13} b_{23}, \\ e_{22} = b_{21}^2 + b_{22}^2 + b_{23}^2, \end{cases}$$

$$(52) \quad S^2 = e_{11} e_{22} - e_{12}^2,$$

$$(53) \quad \varrho = S^2 - (e_{11} f_2^2 - 2 e_{12} f_1 f_2 + e_{22} f_1^2).$$

Ist $\varrho \geq 0$, so besitzen die Gleichungen (49) zwei reelle Lösungen (eventuell eine Doppellösung), welche durch die Formeln

$$(54) \quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{S^2} [f_1 (e_{22} b_{11} - e_{12} b_{21}) + f_2 (e_{11} b_{21} - e_{12} b_{11}) + \varepsilon B_1 \sqrt{\varrho}], \\ \eta = \frac{1}{S^2} [f_1 (e_{22} b_{12} - e_{12} b_{22}) + f_2 (e_{11} b_{22} - e_{12} b_{12}) + \varepsilon B_2 \sqrt{\varrho}], \\ \zeta = \frac{1}{S^2} [f_1 (e_{22} b_{13} - e_{12} b_{23}) + f_2 (e_{11} b_{23} - e_{12} b_{13}) + \varepsilon B_3 \sqrt{\varrho}] \end{cases}$$

geliefert werden. Dabei ist $\varepsilon = \pm 1$.

5. Transformation einer binären quadratischen Form. Wir betrachten eine binäre quadratische Form

$$(55) \quad \psi(\sigma_1, \sigma_2) = C_{11} \sigma_1^2 + 2 C_{12} \sigma_1 \sigma_2 + C_{22} \sigma_2^2.$$

Sämtliche Größen werden als reell und die ganze Form als positiv-definit vorausgesetzt.

Es gibt bekanntlich unendlich viele lineare, homogene, nicht notwendig orthogonale, Transformationen

$$\begin{cases} \sigma_1 = k_{11} \sigma'_1 + k_{12} \sigma'_2, \\ \sigma_2 = k_{21} \sigma'_1 + k_{22} \sigma'_2, \end{cases}$$

welche die Form (55) in die Einheitsform

$$\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2$$

überführen.

Eine derartige, für unsere Zwecke besonders geeignete Transformation lautet:

$$(56) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \left\{ \frac{\sigma'_1}{\sqrt{C_{11}C_{22} + C_{12}}} + \frac{\sigma'_2}{\sqrt{C_{11}C_{22} - C_{12}}} \right\} \sqrt[4]{\frac{C_{22}}{4C_{11}}} \\ \sigma_2 = \left\{ \frac{\sigma'_1}{\sqrt{C_{11}C_{22} + C_{12}}} - \frac{\sigma'_2}{\sqrt{C_{11}C_{22} - C_{12}}} \right\} \sqrt[4]{\frac{C_{11}}{4C_{22}}} \end{cases}$$

Offenbar ist diese Transformation nicht ausgeartet.

II. Grundlegende Formeln für die Geschwindigkeitskomponenten.

6. Anschluß an die erste Mitteilung. Das in der ersten Mitteilung zunächst in Angriff genommene Problem war von rein algebraischer Natur. Das von den Formeln (10) und (11) gebildete Gleichungssystem kann zunächst als ein algebraisches simultanes System mit den Unbekannten

$$x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2$$

aufgefaßt werden, und es besteht die Aufgabe, die allgemeine Lösung desselben zu finden. Diese Frage wurde in der ersten Mitteilung nur teilweise gelöst, indem zunächst die allgemeine Lösung des linearen Systems (10) bestimmt wurde. Die Größen x'_k, y'_k, z'_k erscheinen dann als lineare *Funktionen* der drei willkürlichen Größen σ_1, σ_2, τ . Sollen die erhaltenen Ausdrücke zugleich auch die Gleichung (11) befriedigen, so müssen die Größen σ_1, σ_2, τ einer quadratischen Gleichung (wir nannten sie die transformierte Energiegleichung) genügen, die man durch Substitution der erhaltenen Formeln für x'_k, y'_k, z'_k in (11) bekommt. Indem wir dann die erhaltenen Formeln gewissen weiteren Parametertransformationen, die auf die Vereinfachung der Energiegleichung abzielten, unterzogen haben, gelangten wir zu folgenden Ergebnissen:

Es sei

$$(57) \quad \begin{cases} \overset{\circ}{u}_1 = \frac{a A_2 \alpha}{4 m_1 F^2 \sqrt{3}} + \frac{a A}{8 F^2 J \sqrt{3}} (S_{12} \lambda_1 + S_{22} \lambda_2), \\ \overset{\circ}{u}_2 = -\frac{a A_1 \alpha}{4 m_2 F^2 \sqrt{3}} - \frac{a A}{8 F^2 J \sqrt{3}} (S_{11} \lambda_1 + S_{21} \lambda_2), \end{cases}$$

$$(58) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{l_1 \dot{\lambda}_1 - l \dot{\lambda}_2}{l} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}, \\ \dot{x}_2 = \frac{l_2 \dot{\lambda}_2 - l \dot{\lambda}_1}{l} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}. \end{cases}$$

Die allgemeine Lösung des simultanen Systems (10) und (11) lautet dann

$$(59) \quad \begin{cases} u_1 = \overset{\circ}{u}_1 + \overset{x}{u}_1 \tau + \dot{\lambda}_1 \sigma_1 \\ u_2 = \overset{\circ}{u}_2 + \overset{x}{u}_2 \tau + \dot{\lambda}_2 \sigma_2. \end{cases}$$

Natürlich gelten ähnliche Formeln für die v_k , w_k , die aus (57), (58), (59) durch zyklische Vertauschung der Buchstaben $\dot{\lambda}_k$, μ_k , ν_k und α , β , γ zu bestimmen sind.

Die Variablen σ_1 , σ_2 , τ müssen dabei der (transformierten) Energiegleichung

$$(60) \quad C_{11} \sigma_1^2 + 2 C_{12} \sigma_1 \sigma_2 + C_{22} \sigma_2^2 + C_{33} \tau^2 + C - W = 0$$

genügen. Für die Koeffizienten C_{ik} und C derselben gelten folgende Formeln:

$$(61) \quad \begin{cases} C_{11} = m_1 (m_0 + m_2) E_{11}, & C_{12} = -m_1 m_2 E_{12}, \\ C_{22} = m_2 (m_0 + m_1) E_{22}, & C_{33} = \frac{4 m_0 M F^2 J}{l}, \\ C - W = \frac{a^2 m_0 M}{4 m_1 m_2 F^2 J} + \frac{1}{J} (a^2 m_0 M - W J). \end{cases}$$

Wie in der ersten Mitteilung näher auseinandergesetzt wurde, ist stets, solange die Bewegung regulär und reell ist,

$$(62) \quad C - W \leq 0.$$

Übrigens ist noch $C_{11} C_{22} - C_{12}^2 = m_1 m_2 l > 0$ und $C_{33} > 0$.

7. Formeln für die Geschwindigkeitskomponenten. Aus (4) und (59) folgt zunächst

$$(63) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \overset{\circ}{u}_1 \sqrt{\frac{M}{m_0}} + \overset{x}{u}_1 \tau \sqrt{\frac{M}{m_0}} + \dot{\lambda}_1 \sqrt{\frac{M}{m_0}} \sigma_1, \\ \dot{x}_2 = \overset{\circ}{u}_2 \sqrt{\frac{M}{m_0}} + \overset{x}{u}_2 \tau \sqrt{\frac{M}{m_0}} + \dot{\lambda}_2 \sqrt{\frac{M}{m_0}} \sigma_2. \end{cases}$$

Nun ist aber nach (3) und (40)

$$(64) \quad \begin{cases} S_{12} \lambda_1 + S_{22} \lambda_2 = \sqrt{m_0 M} [-(r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) x_1 + 2 r_1^2 x_2], \\ S_{11} \lambda_1 + S_{21} \lambda_2 = \sqrt{m_0 M} [-(2 r_2^2 x_1 - (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) x_2)]. \end{cases}$$

Aus (57) und (64) folgt dann

$$(65) \quad \begin{cases} \ddot{u}_1 = \frac{a A_2 \alpha}{4 m_1 F^2 \sqrt{3}} + \frac{a A \sqrt{m_0 M}}{8 F^2 J \sqrt{3}} [-(r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) x_1 + 2 r_1^2 x_2], \\ \ddot{u}_2 = -\frac{a A_4 \alpha}{4 m_2 F^2 \sqrt{3}} - \frac{a A \sqrt{m_0 M}}{8 F^2 J \sqrt{3}} [2 r_2^2 x_1 - (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) x_2]. \end{cases}$$

Nach (3) und (34) ist ähnlich

$$(66) \quad \begin{cases} l_1 \lambda_1 - l \lambda_2 = \frac{1}{2} \sqrt{m_0 M} (S_{11} E_{12} x_1 - S_{22} E_{22} x_2), \\ l_2 \lambda_2 - l \lambda_2 = \frac{1}{2} \sqrt{m_0 M} (S_{22} E_{12} x_2 - S_{11} E_{11} x_1), \end{cases}$$

was in Verbindung mit (58) die Ausdrücke

$$(67) \quad \begin{cases} \ddot{u}_1 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{m_0 m_2 M}{m_1}} (S_{11} E_{12} x_1 - S_{22} E_{22} x_2) \\ \ddot{u}_2 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{m_0 m_1 M}{m_2}} (-S_{11} E_{12} x_1 + S_{22} E_{22} x_2) \end{cases}$$

liefert.

Aus (63), (65), (67), und (13) gelangt man zu dem wichtigen Ergebnis, daß für die Geschwindigkeitskomponenten x'_k, y'_k, z'_k die folgenden Formeln gelten:

$$(68) \quad \begin{cases} x'_1 = a_{10} (y_1 z_2 - z_1 y_2) + a_{11} x_1 + a_{12} x_2, \\ y'_1 = a_{10} (z_1 x_2 - x_1 z_2) + a_{11} y_1 + a_{12} y_2, \\ z'_1 = a_{10} (x_1 y_2 - y_1 x_2) + a_{11} z_1 + a_{12} z_2, \end{cases}$$

$$(69) \quad \begin{cases} x'_2 = a_{20} (y_1 z_2 - z_1 y_2) + a_{21} x_1 + a_{22} x_2, \\ y'_2 = a_{20} (z_1 x_2 - x_1 z_2) + a_{21} y_1 + a_{22} y_2, \\ z'_2 = a_{20} (x_1 y_2 - y_1 x_2) + a_{21} z_1 + a_{22} z_2. \end{cases}$$

Für die Koeffizienten a_{ik} gelten folgende Formeln:

$$(70) \quad \begin{cases} a_{10} = \frac{a}{4 m_0 m_1 F^2} [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2], \\ a_{20} = -\frac{a}{4 m_0 m_2 F^2} [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_2], \end{cases}$$

$$(71) \quad \begin{cases} a_{11} = -\frac{a A M}{8 F^2 J \sqrt{3}} (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) + \frac{M}{2 l} S_{11} E_{12} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \tau - \frac{m_0 + m_2}{m_0} \sigma_1, \\ a_{12} = \frac{a A M}{4 F^2 J \sqrt{3}} r_1^2 - \frac{M}{2 l} S_{22} E_{22} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \tau + \frac{m_2}{m_0} \sigma_1, \\ a_{21} = -\frac{a A M}{4 F^2 J \sqrt{3}} r_2^2 - \frac{M}{2 l} S_{11} E_{11} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \tau + \frac{m_1}{m_0} \sigma_2, \\ a_{22} = \frac{a A M}{8 F^2 J \sqrt{3}} (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) + \frac{M}{2 l} S_{22} E_{12} \tau - \frac{m_0 + m_1}{m_0} \sigma_2. \end{cases}$$

Die Formeln (68) und (69) stellen die gewünschte allgemeine Lösung der Gleichungen (10) und (11) dar. Diese Gestalt der Ausdrücke für die Geschwindigkeitskomponenten wird schon keine weitere Änderung erfahren, und das alles, was in diesem Kapitel unten folgt, wird auf eine zweckmäßige Darstellung der Koeffizienten a_{ik} abzielen. Weitere Auseinandersetzungen über die Bedeutung der Formeln (68) und (69) findet man am Ende dieses Kapitels.

8. Eine weitere Transformation der Energiegleichung. Die Koeffizienten a_{ik} ($k > 0$) hängen u. a. von den Größen σ_1, σ_2, τ ab, welche ihrerseits der Gleichung (60) genügen. Hieraus sieht man sofort, daß man die drei Parameter σ_1, σ_2, τ durch zwei andere θ_1 und θ_2 ersetzen kann, die dann schon vollkommen beliebige Werte annehmen können. Doch bevor wir das machen werden, wollen wir noch eine Parametertransformation ausführen, die eine weitere Vereinfachung der Gleichung (60) bezweckt. Hierzu werden die Resultate von N° 5 herangezogen, wodurch der Ausdruck

$$(72) \quad C_{11} \sigma_1^2 + 2 C_{12} \sigma_1 \sigma_2 + C_{22} \sigma_2^2$$

der linkerseits der Gleichung (60) vorkommt, in eine Quadratsumme transformiert wird.

Zu diesem Zwecke wird der Reihe nach

$$(73) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt[4]{\frac{C_{22}}{4 C_{11}}} = \sqrt[4]{\frac{m_2(m_0 + m_1) E_{22}}{4 m_1(m_0 + m_2) E_{11}}}, \\ \omega_2 &= \sqrt[4]{\frac{C_{11}}{4 C_{22}}} = \sqrt[4]{\frac{m_1(m_0 + m_2) E_{11}}{4 m_2(m_0 + m_1) E_{22}}}, \\ I &= \sqrt{m_1 m_2(m_0 M + m_1 m_2) E_{11} E_{22}}, \\ k_1 &= \frac{M}{\sqrt{I - m_1 m_2 E_{12}}}, \quad k_2 = \frac{M}{\sqrt{I + m_1 m_2 E_{22}}}, \\ (74) \quad &\begin{cases} \sigma_1 = \omega_1 (k_1 \sigma'_1 + k_2 \sigma'_2), \\ \sigma_2 = \omega_2 (k_1 \sigma'_2 - k_2 \sigma'_1) \end{cases} \end{aligned} \right.$$

gesetzt.

Bemerkt man jetzt, daß nach (25)

$$(I - m_1 m_2 E_{12})(I + m_1 m_2 E_{12}) = m_1 m_2 l$$

gilt, so sieht man sofort, daß bei der früher gemachten Voraussetzung $F > 0$, die Transformation (74) gewiß zulässig ist. Für die Größen ω_i und k_i gelten übrigens die folgenden einfachen Formeln:

$$(75) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_1 \omega_2 &= \frac{1}{2}, \quad k_1^2 + k_2^2 = \frac{2 M^2 l}{m_1 m_2}, \quad k_1^2 - k_2^2 = \frac{2 M^2 E_{12}}{l}, \\ \omega_1^2 (k_1^2 + k_2^2) &= \frac{(m_0 + m_1) M^2 E_{22}}{m_1 l}, \\ \omega_2^2 (k_1^2 + k_2^2) &= \frac{(m_0 + m_2) M^2 E_{11}}{m_2 l}, \\ \omega_1 \omega_2 (k_1^2 - k_2^2) &= \frac{M^2 E_{22}}{l}, \quad \omega_1 \omega_2 k_1 k_2 = \frac{M^2}{2 \sqrt{m_1 m_2 l}} \end{aligned} \right.$$

Den Ergebnissen von N° 5 zufolge wird der Ausdruck (72) durch die Transformation (74) auf die Gestalt

$$M^2 (\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2)$$

gebracht.

Wir führen jetzt die Parametertransformation (74) auch in den Formeln für die Geschwindigkeitskomponenten durch. Da-

bei bleibt natürlich die allgemeine Gestalt der Ausdrücke (68) und (69) ungeändert. Die Formeln (70) gelten offenbar weiter, während die Formeln (71) die folgende Gestalt annehmen:

$$(76) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{11} &= -\frac{a A M}{8 F^2 J \sqrt{3}} (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) + \frac{M}{2l} S_{11} E_{12} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \tau \\ &\quad - \frac{m_0 + m_2}{m_0} \omega_1 (k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2), \\ a_{12} &= -\frac{a A M}{4 F^2 J \sqrt{3}} r_1^2 - \frac{M}{2l} S_{22} E_{22} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \tau + \frac{m_2}{m_0} \omega_1 (k_1 \sigma_1 + k_2 \sigma_2), \\ a_{21} &= -\frac{a A M}{4 F^2 J \sqrt{3}} r_2^2 - \frac{M}{2l} S_{11} E_{11} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \tau + \frac{m_1}{m_0} \omega_2 (k_1 \sigma_1 - k_2 \sigma_2), \\ a_{22} &= -\frac{a A M}{8 F^2 J \sqrt{3}} (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) + \frac{M}{2l} S_{22} E_{12} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \tau \\ &\quad - \frac{m_0 + m_1}{m_0} \omega_2 (k_1 \sigma_1 - k_2 \sigma_2). \end{aligned} \right.$$

Dabei haben wir nach der Substitution der Ausdrücke (74) in den Formeln (68) und (69) wieder anstatt σ'_1 und σ'_2 kurzweg σ_1 und σ_2 geschrieben.

Die gegenwärtigen Größen σ_1 , σ_2 und τ sind weiter nicht unabhängig, sondern genügen der transformierten Energiegleichung:

$$(77) \quad M^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + C_{33} \tau^2 + (C - W) = 0.$$

Die Werte für C_{33} und $C - W$ sind den Formeln (61) zu entnehmen.

Auf Grund der bisherigen Überlegungen bekommen wir das folgende Resultat:

Ist $F > 0$, so liefern die Formeln (68) und (69) in Verbindung mit (4) die allgemeine Lösung des simultanen algebraischen Systems (10) und (11). Für die Koeffizienten a_{ik} gelten die Formeln (70) und (76). Die willkürlichen Größen σ_1 , σ_2 , τ sind durch die quadratische Gleichung (77) gebunden, wobei C_{33} und $C - W$ durch die Formeln (61) erklärt sind.

9. Darstellung der Geschwindigkeitskomponenten durch zwei Parameter. Nachdem wir die Energiegleichung (11) auf die kanonische Gestalt (77) gebracht haben, können wir nunmehr den letzten Schritt ausführen, indem wir die drei durch (77) verbundene Größen σ_1 , σ_2 und τ durch zwei schon vollkommen freie Parameter θ_1 und θ_2 ersetzen.

Wir führen zunächst eine neue Größe Ω

$$(78) \quad \Omega^2 = JV - a^2 M - \frac{a^2 M \theta}{4 m_1 m_2 F^2} \quad \Omega > 0,$$

ein. Aus (61) und (9) folgt dann unter Berücksichtigung von (62), daß, solange die Bewegung reell ist und die drei Massen nicht gleichzeitig auf einer Geraden liegen, gewiß

$$\Omega^2 \geq 0$$

gilt.

Aus (61) und (78) folgt dann unmittelbar

$$(79) \quad \begin{cases} W - C = \frac{m_0}{J} \Omega^2, \\ \frac{W - C}{C_{33}} = \frac{l}{4 M F^2 J^2} \Omega^2. \end{cases}$$

Wir können also das „Ellipsoid“ (77) durch folgende parametrische Gleichungen darstellen:

$$(80) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{\Omega}{M} \sqrt{\frac{m_0}{J}} \cos \theta_1 \cos \theta_2, \\ \sigma_2 = \frac{\Omega}{M} \sqrt{\frac{m_0}{J}} \cos \theta_1 \sin \theta_2, \\ \tau = \frac{\Omega}{2 F J} \sqrt{\frac{l}{M}} \sin \theta_1. \end{cases}$$

Tragen wir die Werte (80) für σ_1 , σ_2 und τ in die Formeln (76) ein, so liefern die Gleichungen (68) und (69) die allgemeine Lösung von (10) und (11), die von zwei vollkommen willkürlichen Größen θ_1 und θ_2 abhängt.

Auf diese Weise bekommen wir den folgenden

Satz: Ist $F > 0$, so besitzen die Gleichungen (10) und (11), als ein algebraisches System betrachtet, ∞^2 Lösungen. Diese werden

durch die Formeln (4), (68) und (69) geliefert. Die Koeffizienten a_{10} und a_{20} sind durch die Gleichungen (70) erklärt, während für die a_{ik} ($k > 0$) folgende Ausdrücke gelten:

$$(81) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{11} &= -\frac{a A M}{8 F^2 J \sqrt{3}} (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) + \frac{\Omega}{4 F J} S_{11} E_{12} \sqrt{\frac{m_2 M}{m_1 l}} \sin \theta_1 \\ &\quad - \frac{\Omega}{M \sqrt{m_0 J}} (m_0 + m_2) \omega_1 (k_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - k_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2), \\ a_{12} &= \frac{a A M}{4 F^2 J \sqrt{3}} r_1^2 - \frac{\Omega}{4 F J} S_{22} E_{22} \sqrt{\frac{m_2 M}{m_1 l}} \sin \theta_1 \\ &\quad + \frac{\Omega}{M \sqrt{m_0 J}} m_2 \omega_1 (k_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + k_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2), \\ a_{21} &= -\frac{a A M}{4 F^2 J \sqrt{3}} r_2^2 - \frac{\Omega}{4 F J} S_{11} E_{11} \sqrt{\frac{m_1 M}{m_2 l}} \sin \theta_1 \\ &\quad + \frac{\Omega}{M \sqrt{m_0 J}} m_1 \omega_2 (k_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - k_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2), \\ a_{22} &= -\frac{a A M}{8 F^2 J \sqrt{3}} (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) + \frac{\Omega}{4 F J} S_{22} E_{12} \sqrt{\frac{m_1 M}{m_2 l}} \sin \theta_1 \\ &\quad - \frac{\Omega}{M \sqrt{m_0 J}} (m_0 + m_1) \omega_2 (k_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - k_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2). \end{aligned} \right.$$

Die Parameter θ_1 und θ_2 können vollkommen beliebige Werte annehmen.

10. Normalgeschwindigkeiten. Orientierendes über den weiteren Gedankengang. Obwohl wir schon die allgemeine Lösung des simultanen Systems (10) und (11) bestimmt haben, so ist doch das erhaltene Formelsystem (4), (68), (69), (70) und (81) für weitere Untersuchungen noch nicht geeignet und zwar aus zweifachem Grunde. Erstens sind die in den Größen ω_i und k_i vorkommenden Irrationalitäten äußerst kompliziert, und zweitens kommt den Größen θ_1 und θ_2 keine ausgeprägte geometrische oder mechanische Deutung zu. Wir werden demnach die Parameter θ_1 und θ_2 durch zwei andere derart zu ersetzen versuchen, daß diesen Übeln abgeholfen wird.

Zu diesem Zwecke wenden wir uns den fundamentalen Formeln (68) und (69) zu. Die Addition der Gleichungen (68) und

ähnlich der Gleichungen (69) ergibt in Verbindung mit (15) und (14)

$$(82) \quad \begin{cases} \delta'_1 = a_{10}A + a_{11}\delta_1 + a_{12}\delta_2, \\ \delta'_2 = a_{20}A + a_{21}\delta_1 + a_{22}\delta_2. \end{cases}$$

Dabei bedeuten δ'_1 und δ'_2 die nach der Zeit berechneten ersten Ableitungen der Größen δ_1 und δ_2 . Nun stellt aber die Größe δ_i nach entsprechender Vorzeichenverabredung die Distanz des materiellen Punktes m_i von der fundamentalen Ebene der relativen Bewegung dar. Hieraus folgt die einfache mechanische Bedeutung der Größe δ'_i . Es stellt nämlich δ'_i diejenige Komponente der Geschwindigkeit der Masse m_i dar, die in der zur Fundamentalebene normalen Richtung berechnet ist. Wir werden deshalb für die Größen

$$\delta'_1 \text{ und } \delta'_2$$

den Ausdruck *Normalgeschwindigkeiten* benutzen. Die Größe δ'_i stellt die Geschwindigkeit dar, mit welcher sich der materielle Punkt m_i von der Fundamentalebene entfernt.

Unser weiterer Gedankengang ist plausibel. Die rechten Seiten der Formeln (82) enthalten nach (81) die Größen θ_1 und θ_2 und man wird auf die Idee geführt, die Formeln (82) als Gleichungen für θ_1 und θ_2 aufzufassen, und sie in bezug auf θ_1 und θ_2 aufzulösen. Dadurch werden θ_1 und θ_2 u. a. durch die Normalgeschwindigkeiten δ'_1 und δ'_2 dargestellt:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_1(\delta'_1, \delta'_2, \dots), \\ \theta_2 &= \theta_2(\delta'_1, \delta'_2, \dots). \end{aligned}$$

Indem man diese Ausdrücke für θ_1 und θ_2 in die Formeln (81) einsetzt, bekommt man die Größen a_{ik} als Funktionen der Normalgeschwindigkeiten δ'_1 und δ'_2 . Die Formeln (68) und (69) werden dann, in Verbindung mit den für die a_{ik} erhaltenen Ausdrücken, die Geschwindigkeitskomponenten x'_k, y'_k, z'_k in der Abhängigkeit von den Größen δ'_k darstellen. Dadurch werden wir zu einer neuen Darstellung der allgemeinen Lösung des simultanen algebraischen Systems (10) und (11) gelangen. Diese wird wieder von zwei willkürlichen Größen abhängen, und zwar von den Normalgeschwindigkeiten δ'_1 und δ'_2 . Abgesehen davon wird sich eine erhebliche Vereinfachung der Formeln (81)

herausstellen. Auf diese Weise werden wir zu den grundlegenden Formeln für die relativen Geschwindigkeitskomponenten gelangen, die das Hauptresultat dieser Mitteilung bilden. In den darauf folgenden Arbeiten werden wir sehen, daß diese Formeln mit Erfolg auf verschiedene Fragen auf dem Gebiete des Dreikörperproblem sich anwenden lassen.

Wir wenden uns also der Durchführung unserer einfachen Überlegungen zu, wobei freilich mehrere Rechnungen von ganz elementarer aber ziemlich komplizierter Natur zu überwinden sind.

11. Lösung der Gleichungen (82). Den Formeln (70), (81) und (15) zufolge, lauten die Gleichungen (82) explizite folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_1' = & \frac{a A}{4 m_0 m_1 F^2 \sqrt{3}} [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2] \\ & + \frac{a A M}{8 F^2 J \sqrt{3}} [2 r_1^2 \delta_2 - (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) \delta_1] \\ & + \frac{\Omega}{4 F J} (S_{11} E_{12} \delta_1 - S_{22} E_{22} \delta_2) \sqrt{\frac{m_2 M}{m_1 l}} \sin \theta_1 \\ & + \frac{\Omega \omega_1}{M \sqrt{m_0 J}} [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1] (k_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + k_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ \dot{\delta}_2' = & - \frac{a A}{4 m_0 m_2 F^2 \sqrt{3}} [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1] \\ & - \frac{a A M}{8 F^2 J \sqrt{3}} [2 r_2^2 \delta_1 - (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) \delta_1] \\ & + \frac{\Omega}{4 F J} (S_{22} E_{12} \delta_2 - S_{11} E_{11} \delta_1) \sqrt{\frac{m_1 M}{m_2 l}} \sin \theta_1 \\ & + \frac{\Omega \omega_2}{M \sqrt{m_0 J}} [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2] (k_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - k_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2). \end{aligned}$$

Nun ist aber unter Anwendung von (41)

$$\frac{a A}{4 m_0 m_1 F^2 \sqrt{3}} [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2] + \frac{a A M}{8 F^2 J \sqrt{3}} [2 r_1^2 \delta_2 - (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) \delta_1]$$

$$= \frac{a A}{8 m_0 m_1 F^2 J \sqrt{3}} \{ [2 m_1 J - m_0 m_1 M (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2)] \delta_1 + [-2 (m_0 + m_1) J + 2 m_0 m_1 M r_1^2] \delta_2 \} = - \frac{a A M}{4 m_1 F^2 J \sqrt{3}} (m_1 E_{12} \delta_1 + m_2 E_{22} \delta_2)$$

und eine analoge Formel ergibt sich für den ähnlichen Ausdruck in der zweiten Gleichung. Demnach kann man die Gleichungen (82) auf die folgende Gestalt bringen:

$$(83) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta'_1 + \frac{a A M}{4 m_1 F^2 J \sqrt{3}} (m_1 E_{12} \delta_1 + m_2 E_{22} \delta_2) \\ = \frac{\Omega}{4 F J} (S_{11} E_{12} \delta_1 - S_{22} E_{22} \delta_2) \sqrt{\frac{m_2 M}{m_1 l}} \sin \theta_1 \\ + \frac{\Omega \omega_1}{M \sqrt{m_0 J}} [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1] (k_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + k_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2), \\ \delta'_2 - \frac{a A M}{4 m_2 F^2 J \sqrt{3}} (m_1 E_{11} \delta_1 + m_2 E_{12} \delta_2) \\ = \frac{\Omega}{4 F J} (-S_{11} E_{11} \delta_1 + S_{22} E_{12} \delta_2) \sqrt{\frac{m_1 M}{m_2 l}} \sin \theta_1 \\ + \frac{\Omega \omega_2}{M \sqrt{m_0 J}} [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2] (k_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - k_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2). \end{aligned} \right.$$

Bei der Lösung der Gleichungen (83) wird es sich als vorteilhaft erweisen, die Identität

$$(84) \quad \sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 = 1$$

heranzuziehen, wodurch der Anschluß an die Ergebnisse von N° 4 gewonnen wird.

Indem man der Reihe nach

$$(85) \quad \left\{ \begin{aligned} b_{11} &= \frac{\Omega}{4 F J} (S_{11} E_{12} \delta_1 - S_{22} E_{22} \delta_2) \sqrt{\frac{m_2 M}{m_1 l}}, \\ b_{21} &= \frac{\Omega}{4 F J} (-S_{11} E_{12} \delta_1 + S_{22} E_{22} \delta_2) \sqrt{\frac{m_1 M}{m_2 l}}, \\ b_{12} &= \frac{\Omega \omega_1 k_1}{M \sqrt{m_0 J}} [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1], \end{aligned} \right.$$

$$(85) \quad \begin{cases} b_{22} = \frac{\Omega \omega_2 k_1}{M \sqrt{m_0 J}} [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2], \\ b_{13} = \frac{\Omega \omega_1 k_2}{M \sqrt{m_0 J}} [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1], \\ b_{23} = -\frac{\Omega \omega_2 k_2}{M \sqrt{m_0 J}} [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2] \end{cases}$$

$$(86) \quad \begin{cases} f_1^{\circ} = \frac{a A M}{4 m_1 F^2 J \sqrt{3}} (m_1 E_{12} \delta_1 + m_2 E_{22} \delta_2), \\ f_2^{\circ} = -\frac{a A M}{4 m_2 F^2 J \sqrt{3}} (m_1 E_{11} \delta_1 + m_2 E_{12} \delta_2), \end{cases}$$

$$(87) \quad f_1 = \delta_1' + f_1^{\circ}, \quad f_2 = \delta_2' + f_2^{\circ},$$

$$(88) \quad \sin \theta_1 = \xi, \quad \cos \theta_1 \cos \theta_2 = \eta, \quad \cos \theta_1 \sin \theta_2 = \zeta$$

setzt, sieht man sofort, daß die Gleichungen (83) und (84) ein System von der in N° 4 untersuchten Gestalt (49) bilden. Wir werden also die a. a. O. erwähnten Formeln anwenden können, unter der Bedingung natürlich, daß die Matrix der Größen b_{ik} vom Range zwei ist. Dies wird, wie wir uns weiter überzeugen werden, stets dann und nur dann der Fall sein, wenn die beiden Punkte m_1 und m_2 nicht gleichzeitig in der Fundamentalebene liegen.

Demnach machen wir jetzt die für das Folgende notwendigen Voraussetzungen:

1° alle drei materiellen Punkte m_0, m_1, m_2 sollen nicht gleichzeitig in einer Geraden liegen,

2° es ist

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 > 0,$$

d. h. die Planeten m_1 und m_2 liegen nicht beide in der Fundamentalebene,

3° es ist $\Omega > 0$.

Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so ist stets

$$F > 0, \quad A > 0, \quad P > 0, \quad \theta > 0.$$

Wir könnten jetzt ohne weiteres die Formeln (49) anwenden, wonach mit Rücksicht auf (88) die Größen θ_2 und θ_2' durch δ_1' und δ_2' ausgedrückt werden würden. Es wird sich aber als bequemer

erweisen darauf zu verzichten, vielmehr die Formeln (49) unmittelbar in die Ausdrücke (81) einzusetzen und die verschiedenen Koeffizienten erst dann auszuwerten.

Wir beginnen die ganze Rechnung mit der Bestimmung der in der N° 4 eingeführten Größen e_{ik} , B_i , S und R .

12. Die Berechnung der Größen e_{ik} , S^2 , B_i . Aus (51) und (85) folgt

$$e_{11} = \frac{m_2 M \Omega^2}{16 m_1 l F^2 J^2} (S_{11} E_{12} \delta_1 - S_{22} E_{22} \delta_2)^2 + \frac{\Omega^2 \omega_1^2}{m_0 M^2 J} (k_1^2 + k_2^2) [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1]^2$$

Nach (75) ist dann

$$e_{11} = \frac{\Omega^2}{16 m_0 m_1 l F^2 J} \{ m_0 m_2 M (S_{11} E_{12} \delta_1 - S_{22} E_{22} \delta_2)^2 + 16 (m_0 + m_1) E_{22} F^2 J [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1]^2 \}.$$

Der rechterseits in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck ist von der Gestalt

$$c_{11} \delta_1^2 + 2 c_{12} \delta_1 \delta_2 + c_{22} \delta_2^2$$

mit

$$\begin{aligned} c_{11} &= m_0 m_2 M S_{11}^2 E_{12}^2 + 16 (m_0 + m_1) (m_0 + m_2)^2 E_{22} F^2 J, \\ c_{12} &= -m_2 E_{22} [m_0 M S_{11} S_{22} E_{12} + 16 (m_0 M + m_1 m_2) F^2 J], \\ c_{22} &= m_2 E_{22} [m_0 M S_{22}^2 E_{22} + 16 m_2 (m_0 + m_1) F^2 J]. \end{aligned}$$

Die Anwendung der geeigneten Identitäten (45) und (46) liefert dann

$$\begin{aligned} c_{11} &= 4 m_0 M (m_2 r_2^2 E_{22} + 4 m_1 F^2) l, \\ c_{12} &= -2 m_0 m_2 M E_{22} (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) l, \\ c_{22} &= 4 m_0 m_2 M E_{22} r_1^2 l. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\begin{aligned} &c_{11} \delta_1^2 + 2 c_{12} \delta_1 \delta_2 + c_{22} \delta_2^2 \\ &= 4 m_0 M l \{ m_2 E_{22} [r_2^2 \delta_1^2 - (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) \delta_1 \delta_2 + r_1^2 \delta_2^2] + 4 m_1 F^2 \delta_1^2 \}. \end{aligned}$$

Nach (21) ist dann (nach ähnlichen Rechnungen für e_{12} und e_{22})

$$(89) \quad \begin{cases} e_{11} = \frac{M \Omega^2}{4 m_1 F^2 J^2} (m_2 E_{22} \mathcal{A}^2 + 4 m_1 F^2 \delta_1^2), \\ e_{12} = -\frac{M \Omega^2}{4 F^2 J^2} (E_{12} \mathcal{A}^2 - 4 F^2 \delta_1 \delta_2), \\ e_{22} = \frac{M \Omega^2}{4 m_2 F^2 J^2} (m_1 E_{11} \mathcal{A}^2 + 4 m_2 F^2 \delta_2^2). \end{cases}$$

Es ist weiter nach (52)

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{M^2 \Omega^4}{16 m_1 m_2 F^4 J^4} [(m_1 E_{11} \mathcal{A}^2 + 4 m_2 F^2 \delta_2^2) (m_2 E_{22} \mathcal{A}^2 + 4 m_1 F^2 \delta_1^2) \\ &\quad - m_1 m_2 (-E_{12} \mathcal{A}^2 + 4 F^2 \delta_1 \delta_2)^2] \\ &= \frac{M^2 \Omega^4 \mathcal{A}^2}{4 m_1 m_2 F^4 J^4} [m_1 m_2 \mathcal{A}^2 + (m_1^2 E_{11} \delta_1^2 + 2 m_1 m_2 E_{12} \delta_1 \delta_2 + m_2^2 \delta_2^2)]. \end{aligned}$$

Die sukzessive Anwendung von (27) und (42) liefert dann leicht

$$(90) \quad S^2 = \frac{M P \Omega^4 \mathcal{A}^2}{4 m_0 m_1 m_2 F^2 J^3}.$$

Hieraus sieht man, daß tatsächlich, wenn die beiden Planeten nicht gleichzeitig in der Fundamentalebene liegen und wenn $\Omega > 0$, die Matrix der Größen (85) vom Range zwei ist.

Es ist endlich nach (50) und (85):

$$(91) \quad \begin{cases} B_1 = -\frac{\Omega^2}{m_0 J \sqrt{m_1 m_2} l} [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2] [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1], \\ B_2 = \frac{\Omega^2 k_2}{4 F J \sqrt{m_0 m_1 m_2} M l J} \{m_1 \omega_1 (-S_{11} E_{11} \delta_1 + S_{22} E_{12} \delta_2) [m_2 \delta_2 \\ - (m_0 + m_2) \delta_1] + m_2 \omega_2 (S_{11} E_{12} \delta_1 - S_{22} E_{22} \delta_2) [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2]\}, \\ B_3 = \frac{\Omega^2 k_1}{4 F J \sqrt{m_0 m_1 m_2} M l J} \{m_2 \omega_2 (S_{11} E_{12} \delta_1 - S_{22} E_{22} \delta_2) [m_1 \delta_1 \\ - (m_0 + m_1) \delta_2] - m_1 \omega_1 (-S_{11} E_{11} \delta_1 + S_{22} E_{12} \delta_2) [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1]\}. \end{cases}$$

13. Die Berechnung der Größe ϱ . Aus (87) folgt zunächst

$$(92) \left\{ \begin{aligned} e_{11} f_2^2 - 2 e_{12} f_1 f_2 + e_{22} f_1^2 &= [(e_{11} f_2 - e_{12} f_1) f_2 - (e_{12} f_2 - e_{22} f_1) f_1] \\ &+ 2 [(e_{11} f_2 - e_{12} f_1) \delta_2' + (e_{12} f_1 - e_{12} f_2) \delta_1'] + (e_{11} \delta_2^{12} - 2 e_{12} \delta_1' \delta_2' + e_{22} \delta_1^{12}). \end{aligned} \right.$$

Aus (89) und (86) folgt nun

$$\begin{aligned} & e_{11} f_2 - e_{12} f_1 \\ &= \frac{a A M^2 \Omega^2}{16 m_1 m_2 F^4 J^3 \sqrt{3}} \left\{ - (m_2 E_{22} \mathcal{A}^2 + 4 m_1 F^2 \delta_1^2) (m_1 E_{11} \delta_1 + m_2 E_{12} \delta_2) \right. \\ & \quad \left. + m_2 (E_{12} \mathcal{A}^2 - 4 F^2 \delta_1 \delta_2) (m_1 E_{12} \delta_1 + m_2 E_{22} \delta_2) \right\} \\ &= \frac{a A M^2 \Omega^2}{16 m_1 m_2 F^4 J^3 \sqrt{3}} (-4 m_1 m_2 \delta_1 F^4 \mathcal{A}^2 - 4 \delta_1 F^2 \theta). \end{aligned}$$

Die Anwendung von (42) und die Durchführung einer ähnlichen Rechnung für die Größe $e_{22} f_1 - e_{12} f_2$ liefern dann

$$(93) \left\{ \begin{aligned} e_{11} f_2 - e_{12} f_1 &= - \frac{a A M P \Omega^2 \delta_1}{4 m_0 m_1 m_2 F^2 J^2 \sqrt{3}}, \\ e_{22} f_1 - e_{12} f_2 &= \frac{a A M P \Omega^2 \delta_2}{4 m_0 m_1 m_2 F^2 J^2 \sqrt{3}}. \end{aligned} \right.$$

Aus (86), (91), (89) und (28) folgt unmittelbar

$$(94) \left\{ \begin{aligned} e_{11} f_2^2 - 2 e_{12} f_1 f_2 + e_{22} f_1^2 &= \frac{a^2 A^2 M^2 P \Omega^2 \theta}{48 m_0 m_1^2 m_2^2 F^4 J^3}, \\ (e_{11} f_2 - e_{12} f_1) \delta_2' + (e_{22} f_1 - e_{12} f_2) \delta_1' &= \frac{a A M P \Omega^2}{48 m_0 m_1 m_2 F^2 J^2 \sqrt{3}} (\delta_2 \delta_1' - \delta_1 \delta_2'), \\ e_{11} \delta_2^{12} - 2 e_{12} \delta_1' \delta_2' + e_{22} \delta_1^{12} &= \frac{M \Omega^2}{4 m_1 m_2 F^2 J^2} [H \mathcal{A}^2 + 4 m_1 m_2 F^2 (\delta_1 \delta_2' - \delta_2 \delta_1')^2]. \end{aligned} \right.$$

Den Formeln (90) und (94) zufolge ist weiter

$$S^2 - (e_{11} \overset{\circ}{f}_2^2 - 2 e_{12} \overset{\circ}{f}_1 \overset{\circ}{f}_2 + e_{22} \overset{\circ}{f}_1^2) \\ = \frac{M P \Omega^2}{4 m_0 m_1^2 m_2^2 F^4 J^3} (12 m_1 m_2 F^2 J^2 \Omega^2 - a^2 A^2 M \theta).$$

Bezeichnet man den in der letzten Klammer stehenden Ausdruck kurz mit $(^*)$, so ist nach (78)

$$(^*) = 12 m_1 m_2 F^2 J V J^2 - 12 a^2 m_1 m_2 M F^2 J^2 - a^2 M \theta (3 J^2 + A^2).$$

Wegen (31) ist dann weiter

$$(^*) = 12 m_1 m_2 F^2 J J^2 - 12 a^2 M F^2 (m_1 m_2 J^2 + \theta),$$

woraus schließlich unter Anwendung von (42)

$$(95) \quad (^*) = \frac{12 F^2 J}{m_0} (m_0 m_1 m_2 V J^2 - a^2 P)$$

folgt.

Die Formeln (53), (92), (94) und (95) ergeben dann den Ausdruck für die Größe ϱ . Es ist nämlich

$$(96) \quad \varrho = \frac{M \Omega^2}{4 m_0^2 m_1^2 m_2^2 F^2 J^2} R$$

mit

$$(97) \quad R = (m_0 m_1 m_2 V J^2 - a^2 P) P + \frac{2}{\sqrt{3}} a A m_0 m_1 m_2 P (\delta_1 \delta_2' - \delta_2 \delta_1') \\ - m_0^2 m_1 m_2 [H J^2 + 4 m_1 m_2 F^2 (\delta_1 \delta_2' - \delta_2 \delta_1')^2].$$

14 Lösung der Gleichungen (83) und (84). Setzt man jetzt vorübergehend

$$(98) \quad \frac{M \Omega^2}{4 m_0^2 m_1^2 m_2^2 F^2 J^2} = \Omega_1^2,$$

so ist

$$(99) \quad \varrho = \Omega_1^2 R.$$

Wendet man die Formeln (54) auf das Gleichungssystem (83) und (84) an, so bekommt man unter Beachtung von (85), (86), (87), (88)

$$(100) \quad \begin{cases} \sin \theta_1 = \varrho_{10} + \varrho_{11} \delta'_1 + \varrho_{12} \delta'_2 + \varrho_{13} \sqrt{R}, \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 = \varrho_{20} + \varrho_{21} \delta'_1 + \varrho_{22} \delta'_2 + \varrho_{23} \sqrt{R}, \\ \cos \theta_1 \sin \theta_2 = \varrho_{30} + \varrho_{31} \delta'_1 + \varrho_{32} \delta'_2 + \varrho_{33} \sqrt{R}, \end{cases}$$

wobei folgende abkürzende Bezeichnungen angewandt wurden:

$$(101) \quad \begin{cases} \varrho_{11} = \frac{1}{S^2} (e_{22} b_{11} - e_{12} b_{21}), & \varrho_{12} = \frac{1}{S^2} (e_{11} b_{21} - e_{12} b_{11}), \\ \varrho_{21} = \frac{1}{S^2} (e_{22} b_{12} - e_{12} b_{22}), & \varrho_{22} = \frac{1}{S^2} (e_{11} b_{22} - e_{12} b_{12}), \\ \varrho_{31} = \frac{1}{S^2} (e_{22} b_{13} - e_{12} b_{23}), & \varrho_{23} = \frac{1}{S^2} (e_{11} b_{23} - e_{12} b_{13}), \end{cases}$$

$$(102) \quad \varrho_{13} = \frac{\varepsilon \Omega_1 B_1}{S^2}, \quad \varrho_{23} = \frac{\varepsilon \Omega_1 B_2}{S^2}, \quad \varrho_{33} = \frac{\varepsilon \Omega_1 B_3}{S^2},$$

$$(103) \quad \begin{cases} \varrho_{10} = \varrho_{11} \overset{\circ}{f}_1 + \varrho_{12} \overset{\circ}{f}_2, \\ \varrho_{20} = \varrho_{21} \overset{\circ}{f}_1 + \varrho_{22} \overset{\circ}{f}_2, \\ \varrho_{30} = \varrho_{31} \overset{\circ}{f}_1 + \varrho_{32} \overset{\circ}{f}_2. \end{cases}$$

Setzt man die Formeln (100) in die Gleichungen (81) ein, so bekommt man die gewünschte Darstellung der Größen a_{ik} , also auch der Geschwindigkeitskomponenten x'_k , y'_k , z'_k mittels der Normalgeschwindigkeiten δ'_1 und δ'_2 . Alles weitere reduziert sich also auf die Auswertung der Größen a_{ik} nach der Substitution (100) in den Gleichungen (81).

15. Die Formeln für die a_{ik} . Die Formeln für die a_{ik} ($k > 0$) lassen sich nach (81) zunächst folgendermaßen darstellen:

$$(104) \quad a_{ik} = \mathfrak{g}_{ik}^{(0)} + \mathfrak{g}_{ik}^{(1)} \sin \theta_1 + \mathfrak{g}_{ik}^{(2)} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \mathfrak{g}_{ik}^{(3)} \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

($i, k = 1, 2$). Dabei erhält man die folgende Tafel der Koeffizienten $\mathfrak{g}_{ik}^{(j)}$:

$$\begin{aligned}
 (105) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \mathfrak{g}_{11}^{(0)} &= -\frac{a A M}{8 F^2 J \sqrt{3}} (r_1^2 + r_2^2 + r_{12}^2), & \mathfrak{g}_{11}^{(1)} &= \frac{S_{11} E_{11} \Omega}{4 F J} \sqrt{\frac{m_2 M}{m_1 l}}, \\
 \mathfrak{g}_{12}^{(0)} &= \frac{a A M}{4 F^2 J \sqrt{3}} r_1^2, & \mathfrak{g}_{12}^{(1)} &= -\frac{S_{22} E_{22} \Omega}{4 F J} \sqrt{\frac{m_2 M}{m_1 l}}, \\
 \mathfrak{g}_{21}^{(0)} &= -\frac{a A M}{4 F^2 J \sqrt{3}} r_2^2, & \mathfrak{g}_{21}^{(1)} &= -\frac{S_{11} E_{11} \Omega}{4 F J} \sqrt{\frac{m_1 M}{m_2 l}}, \\
 \mathfrak{g}_{22}^{(0)} &= \frac{a A M}{8 F^2 J \sqrt{3}} (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2), & \mathfrak{g}_{22}^{(1)} &= \frac{S_{22} E_{12} \Omega}{4 F J} \sqrt{\frac{m_1 M}{m_2 l}}, \\
 \mathfrak{g}_{11}^{(2)} &= -\frac{(m_0 + m_2) \omega_1 k_1 \Omega}{M \sqrt{m_0} J}, & \mathfrak{g}_{11}^{(3)} &= -\frac{(m_0 + m_2) \omega_1 k_2 \Omega}{M \sqrt{m_0} J}, \\
 \mathfrak{g}_{12}^{(2)} &= \frac{m_2 \omega_1 k_1 \Omega}{M \sqrt{m_0} J}, & \mathfrak{g}_{12}^{(3)} &= \frac{m_2 \omega_1 k_2 \Omega}{M \sqrt{m_0} J}, \\
 \mathfrak{g}_{21}^{(2)} &= \frac{m_1 \omega_2 k_1 \Omega}{M \sqrt{m_0} J}, & \mathfrak{g}_{21}^{(3)} &= -\frac{m_1 \omega_2 k_2 \Omega}{M \sqrt{m_0} J}, \\
 \mathfrak{g}_{22}^{(2)} &= -\frac{(m_0 + m_1) \omega_2 k_1}{M \sqrt{m_0} J}, & \mathfrak{g}_{22}^{(3)} &= \frac{(m_0 + m_1) \omega_2 k_2}{M \sqrt{m_0} J}.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Aus (104) und (100) folgt, daß nach der Ausführung der oben besprochenen Substitution die Koeffizienten a_{ik} die folgende Gestalt annehmen:

$$(106) \quad a_{ik} = l_{ik}^{(0)} + l_{ik}^{(1)} \delta'_1 + l_{ik}^{(2)} \delta'_2 + l_{ik}^{(3)} \sqrt{R} \quad (i, k = 1, 2)$$

mit

$$\begin{aligned}
 (107) \quad \left\{ \begin{aligned}
 l_{ik}^{(0)} &= \mathfrak{g}_{ik}^{(0)} + \mathfrak{g}_{ik}^{(1)} \varrho_{10} + \mathfrak{g}_{ik}^{(2)} \varrho_{20} + \mathfrak{g}_{ik}^{(3)} \varrho_{30} & (i, k = 1, 2), \\
 l_{ik}^{(j)} &= \mathfrak{g}_{ik}^{(1)} \varrho_{1j} + \mathfrak{g}_{ik}^{(2)} \varrho_{2j} + \mathfrak{g}_{ik}^{(3)} \varrho_{3j} & (j = 1, 2, 3).
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Aus (101), (102), (103) und (107) folgt dann weiter

$$(108) \quad \left\{ \begin{aligned}
 l_{ik}^{(1)} &= \frac{1}{S^2} [e_{22} (\mathfrak{g}_{ik}^{(1)} b_{11} + \mathfrak{g}_{ik}^{(2)} b_{12} + \mathfrak{g}_{ik}^{(3)} b_{13}) \\
 &\quad - e_{12} (\mathfrak{g}_{ik}^{(1)} b_{21} + \mathfrak{g}_{ik}^{(2)} b_{22} + \mathfrak{g}_{ik}^{(3)} b_{23})],
 \end{aligned} \right.$$

$$108) \quad \begin{cases} l_{ik}^{(2)} = \frac{1}{S^2} [e_{11} (\mathfrak{y}_{ik}^{(1)} b_{21} + \mathfrak{y}_{ik}^{(2)} b_{22} + \mathfrak{y}_{ik}^{(3)} b_{23}) \\ \quad - e_{12} (\mathfrak{y}_{ik}^{(1)} b_{11} + \mathfrak{y}_{ik}^{(2)} b_{12} + \mathfrak{y}_{ik}^{(3)} b_{13})] \quad (i, k = 1, 2), \\ l_{ik}^{(0)} = \mathfrak{y}_{ik}^{(0)} + l_{ik}^{(1)} f_1 + l_{ik}^{(2)} f_2, \\ l_{ik}^{(3)} = \frac{\varepsilon \Omega_1}{S^2} (\mathfrak{y}_{ik}^{(1)} B_1 + \mathfrak{y}_{ik}^{(2)} B_2 + \mathfrak{y}_{ik}^{(3)} B_3). \end{cases}$$

16. Die Größen $\mathfrak{y}_{ik}^{(1)} b_{j1} + \mathfrak{y}_{ik}^{(2)} b_{j2} + \mathfrak{y}_{ik}^{(3)} b_{j3}$. Bei der Berechnung der Größen $l_{ik}^{(0)}$ beginnen wir mit den Ausdrücken

$$\mathfrak{y}_{ik}^{(1)} b_{j1} + \mathfrak{y}_{ik}^{(2)} b_{j2} + \mathfrak{y}_{ik}^{(3)} b_{j3}.$$

Es ist z. B. nach (105) und (85):

$$\begin{aligned} (*) &= \mathfrak{y}_{11}^{(1)} b_{11} + \mathfrak{y}_{11}^{(2)} b_{12} + \mathfrak{y}_{11}^{(3)} b_{13} \\ &= \frac{m_2 M \Omega^2}{16 m_1 l F^2 J^2} S_{11} E_{12} (S_{11} E_{12} \delta_1 - S_{22} E_{22} \delta_2) \\ &\quad - \frac{(m_0 + m_2) \omega_1^2 (k_1^2 + k_2^2) \Omega^2}{m_0 M^2 J} [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1]. \end{aligned}$$

Wegen (75) ist dann

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{\Omega^2}{16 m_0 m_1 l F^2 J^2} \{ [m_0 m_1 M S_{11}^2 E_{12}^2 + 16 (m_0 + m_1) (m_0 + m_2)^2 E_{22} F^2 J] \delta_1 \\ &= [m_0 M S_{11} S_{22} E_{12} + 16 (m_0 + m_1) (m_0 + m_2) F^2 J] m_2 E_{22} \delta_2 \}. \end{aligned}$$

Die Anwendung der Identitäten (45) und (46) (bzw. (47) bei den anderen Größen dieser Gestalt) liefert ohne weiteres

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{M \Omega^2}{8 m_1 F^2 J^2} \{ 2 (m_2 r_2^2 E_{22} + 4 m_1 F^2) \delta_1 - m_2 (r_1^2 + r_2^2 - r_{21}^2) E_{22} \delta_2 \} \\ &= \frac{M \Omega^2}{4 m_1 F^2 J^2} \{ m_2 E_{22} [r_2^2 \delta_1 - \frac{1}{2} (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) \delta_2] + 4 m_1 F^2 \delta_1 \} \\ &= \frac{M \Omega^2}{4 m_1 F^2 J^2} (m_2 E_{22} Q_1 + 4 m_1 F^2 \delta_1). \end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise mit ähnlichen Ausdrücken verfahren, gelangt man zu den nachstehenden Formeln:

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{J}_{11}^{(1)} b_{11} + \mathfrak{J}_{11}^{(2)} b_{12} + \mathfrak{J}_{11}^{(3)} b_{13} = \frac{M \Omega^2}{4 m_1 F^2 J^2} (m_2 E_{22} Q_1 + 4 m_1 F^2 \delta_1), \\
 & \mathfrak{J}_{12}^{(1)} b_{11} + \mathfrak{J}_{12}^{(2)} b_{12} + \mathfrak{J}_{12}^{(3)} b_{13} = \frac{m_2 M E_{22} Q_2 \Omega^2}{4 m_1 F^2 J^2}, \\
 & \mathfrak{J}_{21}^{(1)} b_{11} + \mathfrak{J}_{21}^{(2)} b_{12} + \mathfrak{J}_{21}^{(3)} b_{13} \\
 & \quad = \frac{\Omega^2}{4 m_0 F^2 J^2} [-m_0 M r_2^2 E_{12} \delta_1 + (E_{12} J + m_0 M E_{11} E_{22}) \delta_2], \\
 & \mathfrak{J}_{22}^{(1)} b_{11} + \mathfrak{J}_{22}^{(2)} b_{12} + \mathfrak{J}_{22}^{(3)} b_{13} = -\frac{M E_{12} Q_2 \Omega^2}{4 F^2 J^2}, \\
 & \mathfrak{J}_{11}^{(1)} b_{21} + \mathfrak{J}_{11}^{(2)} b_{22} + \mathfrak{J}_{11}^{(3)} b_{23} = -\frac{M E_{12} Q_1 \Omega^2}{4 F^2 J^2}, \\
 & \mathfrak{J}_{12}^{(1)} b_{21} + \mathfrak{J}_{12}^{(2)} b_{22} + \mathfrak{J}_{12}^{(3)} b_{23} \\
 & \quad = \frac{\Omega^2}{4 m_0 F^2 J^2} [-m_0 M r_1^2 E_{12} \delta_2 + (E_{12} J + m_0 M E_{11} E_{22}) \delta_1], \\
 & \mathfrak{J}_{21}^{(1)} b_{21} + \mathfrak{J}_{21}^{(2)} b_{22} + \mathfrak{J}_{21}^{(3)} b_{23} = \frac{m_1 M E_{11} Q_1 \Omega^2}{4 m_2 F^2 J^2}, \\
 & \mathfrak{J}_{22}^{(1)} b_{21} + \mathfrak{J}_{22}^{(2)} b_{22} + \mathfrak{J}_{22}^{(3)} b_{23} = \frac{M \Omega^2}{4 m_2 F^2 J^3} (m_1 E_{11} Q_2 + 4 m_2 F^2 \delta_2).
 \end{aligned}
 \tag{109}$$

17. Die Koeffizienten $l_{ik}^{(1)}$ und $l_{ik}^{(2)}$. Es ist z. B. nach (108), (89), (90) und (109)

$$\begin{aligned}
 l_{11}^{(1)} &= \frac{m_0 M}{4 F^2 J P J^2} [(m_1 E_{11} J^2 + 4 m_2 F^2 \delta_2^2) (m_2 E_{22} Q_1 + 4 m_1 F^2 \delta_2) \\
 & \quad - m_1 m_2 E_{12} Q_1 (E_{12} J^2 - 4 F^2 \delta_1 \delta_2)] \\
 &= \frac{m_0 M}{J P J^2} [m_1 m_2 J^2 Q_1 + m_1^2 E_{11} J^2 \delta_1^2 + m_2^2 E_{22} Q_1 \delta_2^2 \\
 & \quad + 4 m_1 m_2 F^2 \delta_1 \delta_2^2 + m_1 m_2 E_{12} Q_1 \delta_1 \delta_2].
 \end{aligned}$$

Aus der Definition der Größen Q_1 und $\mathcal{A}^2$ sieht man, daß der rechterseits stehende Klammerausdruck eine homogene Form dritten Grades inbezug auf die Größen δ_1 und δ_2 ist. Berechnet man die Koeffizienten dieser Form, so erweisen sich diese unter Benutzung von (41) sämtlich durch die Größe J teilbar und man findet zunächst

$$l_{11}^{(1)} = \frac{1}{P\mathcal{A}^2} \{ m_1(m_0 + m_2) r_2^2 \delta_1^3 - m_1 [m_2 r_2^2 + (m_0 + m_2)(r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2)] \delta_1^2 \delta_2 + [m_1(m_0 + m_2) r_1^2 + m_2(m_0 + m_1) r_2^2 + \frac{1}{2} m_1 m_2 (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2)] \delta_1 \delta_2^2 - \frac{1}{2} m_2 (m_0 + m_1) (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) \delta_2^3 \},$$

und dann

$$l_{11}^{(1)} = \frac{1}{P\mathcal{A}^2} \{ m_1(m_0 + m_2) \mathcal{A}^2 \delta_1 - m_2 Q_1 \delta_2 [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2] \}.$$

Auf ähnliche Weise können auch die übrigen Koeffizienten $l_{ik}^{(j)}$ berechnet werden und man gelangt so zu dem folgenden Formelsystem:

$$(110) \quad \left\{ \begin{aligned} l_{11}^{(1)} &= \frac{1}{P\mathcal{A}^2} \{ m_1(m_0 + m_2) \mathcal{A}^2 \delta_1 - m_2 Q_1 \delta_2 [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2] \}, \\ l_{12}^{(1)} &= - \frac{m_2}{P\mathcal{A}^2} \{ m_1 \mathcal{A}^2 \delta_1 + Q_2 \delta_2 [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2] \}, \\ l_{21}^{(1)} &= - \frac{m_1 \delta_2^2 S_2}{2P\mathcal{A}^2}, \\ l_{22}^{(1)} &= \frac{m_1 \delta_1 \delta_2 S_2}{2P\mathcal{A}^2}, \\ l_{11}^{(2)} &= \frac{m_2 \delta_1 \delta_2 S_1}{2P\mathcal{A}^2}, \\ l_{12}^{(2)} &= - \frac{m_2 \delta_1^2 S_1}{2P\mathcal{A}^2}, \\ l_{21}^{(2)} &= - \frac{m_1}{P\mathcal{A}^2} \{ m_2 \mathcal{A}^2 \delta_2 + Q_1 \delta_1 [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1] \}, \\ l_{22}^{(2)} &= \frac{1}{P\mathcal{A}^2} \{ m_2(m_0 + m_1) \mathcal{A}^2 \delta_2 - m_1 Q_2 \delta_1 [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1] \}. \end{aligned} \right.$$

18. Die Koeffizienten $l_{ik}^{(0)}$. Die Formeln (108), (105), (86) und (110) liefern zunächst

$$\begin{aligned} \frac{8 m_1 F^2 J P \mathcal{A}^2 \sqrt{3}}{a A M} l_{11}^{(0)} = & - m_1 (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) P \mathcal{A}^2 \\ & + 2 \{ m_1 (m_0 + m_2) \mathcal{A}^2 \delta_1 - m_2 Q_1 \delta_2 [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2] \} (m_1 E_{12} \delta_1 \\ & + m_2 E_{22} \delta_2) - m_1 \delta_1 \delta_2 S_1 (m_1 E_{11} \delta_1 + m_2 E_{12} \delta_2). \end{aligned}$$

Nach (17) und (35) ist dann

$$\begin{aligned} \frac{8 m_1 F^2 J P \mathcal{A}^2 \sqrt{3}}{a A M} l_{11}^{(0)} = & - m_1 (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) P \mathcal{A}^2 \\ & + 2 \{ Q_1 [m_1 (m_0 + m_2) \delta_1^2 - m_1 m_2 \delta_1 \delta_2 + m_2 (m_0 + m_1) \delta_2^2] \\ & + m_1 (m_0 + m_2) \delta_1 \delta_2 Q_2 \} (m_1 E_{12} \delta_1 + m_2 E_{22} \delta_2) \\ & - m_1 \delta_1 \delta_2 S_1 (m_1 E_{11} \delta_1 + m_2 E_{12} \delta_2) \\ = & - m_1 (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) P \mathcal{A}^2 + 2 P Q_1 (m_1 E_{12} \delta_1 + m_2 E_{22} \delta_2) \\ & + m_1 \delta_1 \delta_2 \{ 2 [m_2 Q_1 + (m_0 + m_2) Q_2] (m_1 E_{12} \delta_1 + m_2 E_{22} \delta_2) \\ & - S_1 (m_1 E_{11} \delta_1 + m_2 E_{12} \delta_2) \}. \end{aligned}$$

Wegen (37) ist weiter

$$\begin{aligned} \frac{8 m_1 F^2 J P \mathcal{A}^2 \sqrt{3}}{a A M} l_{11}^{(0)} = & P [-m_1 (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) (Q_1 \delta_1 + Q_2 \delta_2) \\ & + 2 Q_1 (m_1 E_{12} \delta_1 + m_2 E_{22} \delta_2)] - m_1 \delta_1 \delta_2 [(m_1 E_{11} \delta_1 + m_2 E_{12} \delta_2) S_1 \\ & + (m_1 E_{12} \delta_1 + m_2 E_{22} \delta_2) S_2]. \end{aligned}$$

Die Identität (48) liefert nun weiter

$$\begin{aligned} \frac{8 m_1 F^2 J \mathcal{A}^2 \sqrt{3}}{a A M} l_{11}^{(0)} = & Q_1 [-m_1 \delta_1 (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) \\ & + 2 (m_1 E_{12} + m_2 E_{22} \delta_2)] - m_1 Q_2 \delta_2 (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) + 8 m_1 \delta_1 \delta_2 F^2. \end{aligned}$$

Benutzt man jetzt die Formeln (36), so bekommt man

$$\begin{aligned} -m_1 Q_2 \delta_2 (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) + 8 m_1 \delta_1 \delta_2 F^2 = & -2 m_1 \delta_2 (4 F^2 \delta_1 - Q_1 r^2) \\ & + 8 m_1 F^2 \delta_1 \delta_2 = 2 m_1 Q_1 r_1^2 \delta_2, \end{aligned}$$

woraus

$$\frac{8 m_1 F^2 J A^2 \sqrt{3}}{a A M} l_{11}^{(0)} = Q_1 [-m_1 (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) \delta_1 + 2 (m_1 E_{12} \delta_1 + m_2 E_{22} \delta_2) + 2 m_1 r_1^2 \delta_2]$$

folgt. Es ist also

$$l_{11}^{(0)} = \frac{a A M Q_1}{8 m_1 F^2 J A^2 \sqrt{3}} \{ m_1 \delta_1 [- (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) + 2 E_{12}] + 2 \delta_2 (m_2 E_{22} + m_1 r_1^2) \}.$$

Aus (41) folgt dann schließlich

$$l_{11}^{(0)} = - \frac{a A Q_1}{4 m_0 m_1 F^2 A^2 \sqrt{3}} [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2].$$

Berechnet man auf ähnliche Weise die übrigen Koeffizienten $l_{ik}^{(0)}$, so bekommt man

$$(111) \quad \begin{cases} l_{11}^{(0)} = - \frac{a A Q_1}{4 m_0 m_1 F^2 A^2 \sqrt{3}} [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2], \\ l_{12}^{(0)} = - \frac{a A Q_2}{4 m_0 m_1 F^2 A^2 \sqrt{3}} [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2], \\ l_{21}^{(0)} = \frac{a A Q_1}{4 m_0 m_2 F^2 A^2 \sqrt{3}} [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1], \\ l_{22}^{(0)} = \frac{a A Q_2}{4 m_0 m_2 F^2 A^2 \sqrt{3}} [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1]. \end{cases}$$

19. Die Koeffizienten $l_{ik}^{(3)}$. Es bleibt uns noch übrig die Größen $l_{ik}^{(3)}$ zu berechnen. Nach (107), (102) und (105) ist

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon S^2}{\Omega_1} l_{11}^{(3)} &= - \frac{\Omega^3 \sqrt{M}}{4 m_0 m_1 F j^2 l} S_{11} E_{12} [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2] [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1] \\ &- \frac{m_2 (m_0 + m_2) \omega_1 \omega_2 k_1 k_2 \Omega^3}{2 m_0 M F j^2 \sqrt{m_1 m_2 M l}} (S_{11} E_{12} \delta_1 - S_{22} E_{22} \delta_2) [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2]. \end{aligned}$$

Die Formeln (75) liefern dann

$$\frac{\varepsilon S^2}{\Omega_1} l_{11}^{(3)} = - \frac{\varepsilon \Omega^3 \sqrt{M}}{4 m_0 m_1 F^2 J l} \delta_2 [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2] [m_2 S_{11} E_{12} - (m_0 - m_2) S_{22} E_{22}].$$

Wegen (44) ist also

$$l_{11}^{(3)} = - \frac{\varepsilon \Omega^3 \Omega_1 \sqrt{M}}{2 m_0 m_1 F J^2 S^2} \delta_2 [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2].$$

Aus (98) und (90) folgt schließlich

$$l_{11}^{(3)} = - \frac{\varepsilon}{m_0 m_1 P A^2} \delta_2 [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2].$$

Auf ähnliche Weise berechnet man die übrigen Koeffizienten $l_{ik}^{(3)}$. Es gelten die Formeln

$$(112) \quad \begin{cases} l_{11}^{(3)} = - \frac{\varepsilon}{m_0 m_1 P A^2} \delta_2 [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2], \\ l_{12}^{(3)} = \frac{\varepsilon}{m_0 m_1 P A^2} \delta_1 [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2], \\ l_{21}^{(3)} = \frac{\varepsilon}{m_0 m_2 P A^2} \delta_2 [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1], \\ l_{22}^{(3)} = - \frac{\varepsilon}{m_0 m_2 P A^2} \delta_1 [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1]. \end{cases}$$

10. Zusammenfassung der Endergebnisse. Abschließende Bemerkungen. Unser Endergebniss kann folgendermaßen zusammengefaßt werden: Wir betrachten irgendeine bestimmte relative Bewegung der Massen m_1 und m_2 in bezug auf die Masse m_0 , die dann durch das Differentialgleichungssystem (2) geregelt wird. Wir wählen das Koordinatensystem derart, daß zur Fundamentalebene der relativen Bewegung die durch die Gleichung

$$x + y + z = 0$$

erklärte Ebene wird. Dieser Wahl des Koordinatensystems zufolge sind alle drei Flächenkonstanten einander gleich, und wir haben ihren gemeinsamen Wert mit $a/\sqrt{3}$ bezeichnet.

Wir setzen weiter voraus, daß in dem in Betracht kommenden Zeitintervall die ganze Bewegung regulär vor sich geht, d. h. die Größen r_1 , r_2 , r_{12} endlich und von Null verschieden bleiben, daß weiter die drei Massen in keinem Augenblick auf einer Geraden oder in der Fundamentalebene der relativen Bewegung gleichzeitig liegen.

Unter diesen Umständen gelten für die Geschwindigkeitskomponenten x'_k , y'_k , z'_k der Massen m_k ($k=1, 2$) die Formeln (68), (69), (70), (106), (110), (111) und (112). Diese Formeln stellen eine Zerlegung jeder der Geschwindigkeiten in drei Vektoren dar. Sind die oben angegebenen Bedingungen erfüllt, so liegen diese Vektoren nicht gleichzeitig in einer Ebene.

Aus (68) und (69) ist nämlich ersichtlich, daß die Geschwindigkeit (x'_k , y'_k , z'_k) als Summe von Vektoren darstellbar ist, die als Richtungskoeffizienten entsprechend die Größen

$$\begin{array}{lll} y_1 z_2 - z_1 y_2, & z_1 x_2 - x_1 z_2, & x_1 y_2 - y_1 x_2, \\ x_1, & y_1, & z_1, \\ x_2, & y_2, & z_2, \end{array}$$

haben. Demnach stellen die Formeln (68) und (69) die Zerlegung der Geschwindigkeiten in den folgenden drei Richtungen dar:

- 1) in der zur Fundamentalebene senkrechten Richtung,
- 2) in der Richtung Sonne-Planet m_1
- 3) „ „ „ Sonne-Planet m_2 .

Die Koeffizienten dieser Zerlegung sind durch (70), (106), (110), (111) und (112) gegeben.

Eine derartige Zerlegung kann ja a priori sofort angegeben werden. Es war aber durchaus nicht vorauszusehen, daß die Koeffizienten a_{ik} sich lediglich durch die Größen

$$r_1, r_2, r_{12}, \delta_1, \delta'_1, \delta'_2$$

ausdrücken lassen, daß sie insbesondere von den Koordinaten x_k , y_k , z_k explicite nicht abhängen, und — was sehr wichtig ist — von den Radialgeschwindigkeiten

$$\frac{dr_1}{dt}, \quad \frac{dr_2}{dt}, \quad \frac{dr_{12}}{dt}$$

vollständig unabhängig sind. Die letztgenannte Tatsache ist, wie wir später nachweisen werden, von außerordentlicher Bedeutung; sie wird uns die Reduktion der Differentialgleichungen (2) auf die sechste Ordnung in wenigen Zeilen ermöglichen.

Zum Schluß erscheint es uns nützlich, die Formeln für die x'_k , y'_k , z'_k einmal in ihrem vollen Umfange anzugeben. Sie lauten:

$$\begin{aligned}
 (113) \quad x'_1 = & \frac{a}{4m_0m_1F^2} [m_1\delta_1 - (m_0 + m_1)\delta_2] (y_1z_2 - z_1y_2) \\
 & + \left\{ -\frac{aAQ_1}{4m_0m_1F^2\mathcal{A}^2\sqrt{3}} [m_1\delta_1 - (m_0 + m_1)\delta_2] \right. \\
 & + \frac{\delta_1'}{P\mathcal{A}^2} \left[m_1(m_0 + m_2)\delta_1\mathcal{A}^2 - m_2Q_1\delta_2[m_1\delta_1 - (m_0 + m_1)\delta_2] \right] \\
 & + \frac{m_2S_2\delta_1\delta_2'\delta_2'}{2P\mathcal{A}^2} - \frac{\varepsilon\delta_2\sqrt{R}}{m_0m_1P\mathcal{A}^2} [m_1\delta_1 - (m_0 + m_1)\delta_2] \Big\} x_1 \\
 & + \left\{ -\frac{aAQ_2}{4m_0m_1F^2\mathcal{A}^2\sqrt{3}} [m_1\delta_1 - (m_0 + m_1)\delta_2] \right. \\
 & - \frac{m_2\delta_1'}{P\mathcal{A}^2} \left[m_1\delta_1\mathcal{A}^2 + Q_2\delta_2[m_1\delta_1 - (m_0 + m_1)\delta_2] \right] \\
 & - \frac{m_2S_1\delta_1^2\delta_2'}{2P\mathcal{A}^2} + \frac{\varepsilon\delta_1\sqrt{R}}{m_0m_1P\mathcal{A}^2} [m_1\delta_1 - (m_0 + m_1)\delta_2] \Big\} x_2, \\
 x'_2 = & -\frac{aA}{4m_0m_2F^2} [m_1\delta_1 - (m_0 + m_1)\delta_2] (y_1z_2 - z_1y_2) \\
 & + \left\{ \frac{aAQ_1}{4m_0m_2F^2\mathcal{A}^2\sqrt{3}} [m_2\delta_2 - (m_0 + m_2)\delta_1] - \frac{m_1S_2\delta_2^2\delta_1'}{2P\mathcal{A}^2} \right. \\
 & - \frac{m_1\delta_2'}{P\mathcal{A}^2} \left[m_2\delta_2\mathcal{A}^2 + Q_1\delta_1[m_2\delta_2 - (m_0 + m_2)\delta_1] \right] \\
 & + \frac{\varepsilon\delta_2\sqrt{R}}{m_0m_2P\mathcal{A}^2} [m_2\delta_2 - (m_0 + m_2)\delta_1] \Big\} x_1
 \end{aligned}$$

$$(113) \left\{ \begin{aligned} & + \left[\frac{a A Q_2}{4 m_0 m_2 F^2 J^2 \sqrt{3}} [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1] + \frac{m_1 S_2 \delta_1 \delta_2 S_1}{2 P J^2} \right. \\ & \left. + \frac{\delta_2'}{P J^2} \left[m_2 (m_0 + m_1) \delta_2 J^2 - m_1 Q_2 \delta_1 [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1] \right] \right. \\ & \left. \left. - \frac{\varepsilon \delta_1 \sqrt{R}}{m_0 m_2 P J^2} [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1] \right] x_2. \right. \end{aligned} \right.$$

Die Formeln für y'_k und z'_k ergeben sich durch zyklische Vertauschung der Buchstaben.

Bezüglich Realitätsfragen und Vorzeichendiskussionen sei auf eine spätere Mitteilung verwiesen.

(Reçu par la Rédaction le 18. 6. 1938).

Sur l'irrationalité des intégrales indéfinies

par

S. KACZMARZ et A. TUROWICZ (Lwów).

MM. S. MAZUR et S. ULAM ont posé le problème suivant:

$f_1(x), \dots, f_n(x)$ étant un ensemble de n fonctions d'une variable réelle, continues dans un intervalle $\langle a, b \rangle$, et (Z) l'ensemble des fonctions de la forme $R(f_1(x), \dots, f_n(x))$, où R désigne une fonction rationnelle arbitraire de n variables, existe-t-il dans l'ensemble (Z) une fonction sommable dans $\langle a, b \rangle$, dont l'intégrale indéfinie n'appartient pas à (Z) ?

Le théorème énoncé ci-dessous présente une solution positive d'un problème plus général, puisque la suite finie de fonctions $f_i(x)$ y est remplacée par une suite infinie.

Soit

$$(1) \quad f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

une suite infinie de fonctions réelles d'une variable réelle que nous supposons finies et sommables dans un intervalle $\langle a, b \rangle$, $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$.

Nous envisagerons l'ensemble (Z) des fonctions

$$(2) \quad g(x) = R(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)),$$

où $R(y_1, \dots, y_k)$ est une fonction rationnelle arbitraire (à coefficients réels) de k variables, k étant un entier positif quelconque; certaines variables peuvent ne pas figurer dans l'expression de R . Une fonction $g(x)$ de l'ensemble (Z) est définie pour toutes les valeurs de x de l'intervalle $\langle a, b \rangle$, qui n'annulent pas le dénominateur de la fonction R correspondante.

Théorème. Dans chaque intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$, tel que

$$(3) \quad a < \alpha < \beta < b,$$

il existe une fonction $g_0(x)$ appartenant à l'ensemble (Z) , telle que

1) $g_0(x)$ est finie et sommable dans $\langle \alpha, \beta \rangle$,

2) la fonction

$$(4) \quad F(x) = \int_{\alpha}^x g_0(t) dt$$

n'appartient pas à l'ensemble (Z) .

Remarque. Dans le cas où a et b ne sont pas à la fois infinis, on peut mettre $\alpha = a$, $\beta = b$.

Nous démontrerons d'abord deux lemmes.

Lemme I¹⁾. Soient

$$r_1(x_1, \dots, x_k), r_2(x_1, \dots, x_k), \dots, r_{k+1}(x_1, \dots, x_k)$$

$k+1$ fonctions rationnelles des k variables $x_1, \dots, x_k$. Il existe alors un polynôme $G(y_1, \dots, y_{k+1})$ des $k+1$ variables $y_1, \dots, y_{k+1}$, non identiquement nul, tel que la fonction rationnelle des variables $x_1, \dots, x_k$

$$G(r_1(x_1, \dots, x_k), r_2(x_1, \dots, x_k), \dots, r_{k+1}(x_1, \dots, x_k))$$

s'annule identiquement.

Démonstration. Mettons les fonctions r_i sous la forme

$$r_i(x_1, \dots, x_k) = \frac{h_i(x_1, \dots, x_k)}{h_{k+2}(x_1, \dots, x_k)} \quad (i=1, 2, \dots, k+1),$$

où $h_i(x_1, \dots, x_k)$ ($i=1, 2, \dots, k+2$) sont des polynômes des variables $x_1, \dots, x_k$. Soit m le plus grand des degrés des polynômes h_i . On peut supposer $m > 0$. Dans le cas $m = 0$ le lemme est évident.

Nous déterminerons un polynôme homogène non identiquement nul de $k+2$ variables

¹⁾ Ce lemme est presque évident, mais comme il ne se trouve pas dans les traités d'algèbre, nous en donnons une démonstration.

$$H(y_1, \dots, y_{k+2}) = \sum A_{j_1 j_2 \dots j_{k+2}} y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots y_{k+2}^{j_{k+2}} \quad (j_1 + j_2 + \dots + j_{k+2} = M)$$

du degré M , où M est un entier positif satisfaisant à l'inégalité

$$M > (2m)^k (k+1),$$

tel que le polynôme des variables $x_1, \dots, x_k$

$$H(h_1(x_1, \dots, x_k), \dots, h_{k+2}(x_1, \dots, x_k))$$

soit identiquement nul, c'est-à-dire

$$\sum A_{j_1 j_2 \dots j_{k+2}} h_1^{j_1} h_2^{j_2} \dots h_{k+2}^{j_{k+2}} \equiv 0.$$

Nous avons donc à résoudre un système d'équations linéaires.

Le nombre des inconnues $A_{j_1 j_2 \dots j_{k+2}}$ est $\binom{M+k+1}{k+1}$. Le degré (en $x_1, \dots, x_k$) de l'expression $h_1^{j_1} h_2^{j_2} \dots h_{k+2}^{j_{k+2}}$ ne surpasse pas $m_{j_1} + m_{j_2} + \dots + m_{j_{k+2}} = mM$, donc le nombre des équations ne surpasse pas $\binom{Mm+k}{k}$.

Mais

$$\begin{aligned} \binom{M+k+1}{k+1} &= \frac{(M+k+1)(M+k) \dots (M+1)}{(k+1)!} \\ &> \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} > \frac{M^k (2m)^k}{k!}, \\ \binom{Mm+k}{k} &= \frac{(Mm+k)(Mm+k-1) \dots (Mm+1)}{k!} \\ &< \frac{(Mm+Mm)^k}{k!} = \frac{M^k (2m)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Le nombre des inconnues étant plus grand que celui des équations, il existe un système de valeurs non toutes nulles des $A_{j_1 j_2 \dots j_{k+2}}$. L'existence du polynôme $H(y_1, \dots, y_{k+2})$ est ainsi établie. En posant $G(y_1, \dots, y_{k+1}) = H(y_1, \dots, y_{k+1}, 1)$ on obtient un polynôme jouissant de la propriété indiquée dans l'énoncé du lemme.

Lemme II. Supposons que l'identité

$$F(x) = Q(\log |x - c_1|, \log |x - c_2|, \dots, \log |x - c_n|) \equiv 0$$

soit vraie pour $\alpha \leq x \leq \beta$ ($\alpha < \beta$), $Q(y_1, \dots, y_n)$ étant un polynôme de n variables et $c_1, c_2, \dots, c_n$ étant des nombres extérieurs à l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Dans ces conditions le polynôme $Q(y_1, \dots, y_n)$ est identiquement nul.

Démonstration. Développons le polynôme Q suivant les puissances de $\log |x - c_1|$. On a

$$a_0 \log^p |x - c_1| + a_1 \log^{p-1} |x - c_1| + \dots + a_p = 0 \quad (p \geq 1),$$

où les a_i ($i = 0, 1, \dots, p$) sont des polynômes en

$$\log |x - c_2|, \dots, \log |x - c_n|.$$

Nous allons démontrer que

$$(5) \quad a_i (\log |x - c_2|, \log |x - c_3|, \dots, \log |x - c_n|) = 0$$

pour $\alpha \leq x \leq \beta$, $i = 0, 1, \dots, p$.

Admettons en effet que pour une valeur x_0 ($\alpha < x_0 < \beta$) on ait

$$|b_0| + |b_1| + \dots + |b_p| \neq 0,$$

où

$$b_i = a_i (\log |x_0 - c_2|, \dots, \log |x_0 - c_n|) \quad (i = 0, 1, \dots, p).$$

Alors $\log |x_0 - c_1|$ serait une racine de l'équation

$$(6) \quad b_r z^{p-r} + b_{r+1} z^{p-r-1} + \dots + b_p = 0 \quad \text{où } 0 \leq r \leq p-1, b_r \neq 0.$$

Remarquons d'abord que les nombres c_i se trouvant à l'extérieur de l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$, on peut remplacer l'expression $\log |x - c_i|$ soit par $\log (x - c_i)$, soit par $\log (c_i - x)$. Pour fixer les idées nous supposons que l'on a $x - c_i > 0$ dans l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$. Les fonctions $\log (x - c_i)$, considérées comme fonctions d'une variable complexe, sont holomorphes à l'intérieur d'un cercle $|x - x_0| \leq R$, où R est un nombre positif suffisamment petit; par conséquent, l'identité

$$(7) \quad Q(\log (x - c_1), \dots, \log (x - c_n)) = 0$$

est valide à l'intérieur de ce cercle, puisqu'elle est valide sur la partie du segment de l'axe réel $\langle \alpha, \beta \rangle$ intérieure au cercle $|x - x_0| \leq R$.

Traçons maintenant dans le plan de la variable complexe x une courbe simple fermée K passant par $x = x_0$, de telle manière que le point $x = c_1$ se trouve à l'intérieur, et les points $x = c_i$ ($i = 2, 3, \dots, n$) à l'extérieur du domaine limité par K . On peut prolonger analytiquement les fonctions $\log(x - c_i)$ et la relation (7) sera valide pour tous les points de K .

Si nous décrivons m fois la courbe K dans le sens positif, nous reviendrons avec les valeurs initiales pour $\log(x - c_i)$ ($i = 2, 3, \dots, n$), tandis que la valeur de $\log(x - c_1)$ augmentera de $2m\pi i$. Ainsi l'équation (6) aurait une infinité de racines de la forme $\log|x_0 - c_1| + 2m\pi i$, ce qui est absurde. On voit donc que les identités (5) sont vraies.

Il découle du raisonnement exposé que 1° dans le cas $n = 1$, le lemme est vrai, puisque les polynômes a_i sont alors des constantes, 2° si le lemme est vrai pour $n = q$, il est vrai pour $n = q + 1$.

Démonstration du théorème. Supposons que le théorème énoncé soit faux. Comme il y a des fonctions de (Z) finies et sommables dans tout intervalle contenu dans $\langle a, b \rangle$ (par exemple les fonctions $f_n(x)$), il existerait un intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$ satisfaisant à la condition (3), tel que pour chaque fonction $\varphi(x)$ de (Z) , finie et sommable dans $\langle \alpha, \beta \rangle$, l'intégrale indéfinie

$$\int_{\alpha}^x \varphi(t) dt$$

appartiendrait à l'ensemble (Z) .

Or, la fonction

$$\psi(x) = 1$$

appartient à (Z) , donc

$$(8) \quad x - \alpha = \int_{\alpha}^x dt = P(f_1(x), \dots, f_k(x)),$$

où P est une fonction rationnelle et k un entier positif convenablement choisi.

Par conséquent, c étant un nombre pris arbitrairement à l'extérieur de l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$, la fonction

$$h(x) = \frac{1}{x-c}$$

appartient à l'ensemble (Z) et est finie et sommable dans l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$, donc

$$\int_{\alpha}^x \frac{dt}{t-c} = \log|x-c| - \log|\alpha-c| - R_c(f_1(x), \dots, f_p(x))$$

dans l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$, où non seulement la fonction rationnelle R_c , mais aussi le nombre entier positif p dépend de la constante c . Soit (C) un ensemble non-dénombrable des nombres réels c choisis à l'extérieur de $\langle \alpha, \beta \rangle$. On a pour chaque élément c de cet ensemble

$$\log|x-c| \equiv V_c(f_1(x), \dots, f_{p_c}(x)) \quad (\alpha \leq x \leq \beta),$$

$V_c(y_1, \dots, y_{p_c})$ étant une fonction rationnelle.

Désignons par (C_i) ($i = 1, 2, \dots$) le sous-ensemble de (C) composé de tous les nombres c tels que $p_c \leq i$. Il existe un entier positif j tel que (C_j) est un ensemble infini; dans le cas contraire (C) serait dénombrable.

Soient $c_1, c_2, \dots, c_{j+1}$ $j+1$ éléments de l'ensemble (C_j) . On peut écrire

$$\log|x-c_k| = W_k(f_1(x), \dots, f_j(x)) \quad (\alpha \leq x \leq \beta, k = 1, 2, \dots, j+1),$$

où les $W_k(y_1, \dots, y_j)$ sont des fonctions rationnelles de j variables. En vertu du lemme I il existe un polynôme $Q(z_1, \dots, z_{j+1})$ de $j+1$ variables, du degré supérieur à 0, tel que

$$Q(W_1(f_1(x), \dots, f_j(x)), \dots, W_{j+1}(f_1(x), \dots, f_j(x))) = 0;$$

nous avons donc

$$Q(\log|x-c_1|, \dots, \log|x-c_{j+1}|) = 0.$$

Cette identité étant impossible en vertu du lemme II, le théorème énoncé est démontré.

(Reçu par la Rédaction le 1. 7. 1938).

On normal inertia

by

A. WINTNER (Baltimore)

The object of this note is to extend to the case of non-singular bounded normal matrices the inertia theorem, previously proved by the writer in the particular hermitian case.

Definitions. In what follows, all capitals $A, T, \dots$ will denote infinite matrices which are bounded in the sense of Hilbert and are non-singular, that is to say such as to have unique bounded reciprocal matrices $A^{-1}, T^{-1}, \dots$. Denoting by an asterisk the transition to the transposed matrix of the conjugate complex elements, the properties which define a hermitian H , a unitary U and a normal N are $H^* = H$, $U^* = U^{-1}$ and $N^*N = NN^*$ respectively. The definition of an N may be expressed in terms of either of the more particular types H, U . In fact, it is easily verified that an arbitrary A is an N if and only if $i(A - A^*)(A + A^*)$ is an H , and also if and only if A^*A^{-1} is a U .

Denoting by E the unit matrix and by λ any point in the complex plane, the spectrum of any A is defined as the set of those λ for which $\lambda E - A$ is not non-singular. The spectrum of A^{-1} consists of the reciprocal values of the numbers contained in the spectrum of A . The spectrum of any A is a set which is closed, bounded and not empty¹⁾. Conversely, any given set having these three properties is the spectrum of a suitable A , which may, as a fact, be chosen as an N . Furthermore, an N is a U or an H if and only if the spectrum lies on the boundary of the unit circle or on the real axis respectively. If an A is an H and only contains positive λ in its spectrum, then A is called positive definite and will be denoted by P .

¹⁾ A. Wintner, Math. Ztschr. 30 (1929), § 2.

Polar decomposition. The basis of the following considerations is a result ²⁾ which, apparently, can only be proved by means of the transcendental tool of HILBERT's spectral resolution, and states that for a given P there exists ³⁾ exactly one Q which is again a P and has the property that $QQ = Q^2$ is the given P ; and that this unique Q , which will be denoted by $P^{1/2}$, is commutable with every A which is commutable with $Q^2 = P$ itself.

Now, the unique existence of Q implies ⁴⁾ that there exists for every A exactly one P and exactly one U such that $A = PU$. This theorem, which holds with restriction to the real field also, is an extension to Hilbert's space of a fact well known in the kinematics of continua, the linear deformation defined by an arbitrary non-singular A being decomposed ⁵⁾ into a unique rotation U and a unique dilatation P . Correspondingly, the unique P and unique U may be called the polar components of A , and will be denoted by $|A|$ and $\exp i\{A\}$ respectively.

There also exist for every A a unique $\tilde{P}$ and a unique $\tilde{U}$ such that $A = \tilde{U}\tilde{P}$ (instead of $A = PU$). However, one then can write $A = (\tilde{U}\tilde{P}\tilde{U}^{-1})\tilde{U}$, so that, since $\tilde{U}\tilde{P}\tilde{U}^{-1}$ clearly is a P , the uniqueness of the decomposition $A = PU$ implies that $\tilde{U} = U$, while $\tilde{P} = U^{-1}PU$. It is also seen that $\tilde{P} = P$ if and only if $UP = PU$. Since $A = PU$, this condition is satisfied if and only if $AA^* = A^*A$. In other words, an arbitrary A is an N if and only if $|A|$ and $\exp i\{A\}$ are commutable, that is, if and only if in the unique polar decompositions PU , $\tilde{U}\tilde{P}$ of A one not only has $U = \tilde{U}$ but also $P = \tilde{P}$. This implies that an N is an H if and only if $U = \exp i\{N\}$ is an H . In fact, the product of two H is again an H if and only if the two given H are commutable.

Transformations. If A_1 and A_2 are equivalent, that is, if $A_1 = T^*A_2T$ for a suitable T , write $A_1 \sim A_2$. If A_1 and A_2 are similar, that is, if $A_1 = T^{-1}A_2T$ for a suitable T , write $A_1 \sim A_2$.

²⁾ Loc. cit. ¹⁾, § 7.

³⁾ It should be mentioned that what is „transcendental“ in this result is the uniqueness, and not the existence, of Q (Toeplitz). Cf. also F. J. Wecken, Math. Annalen 110 (1935).

⁴⁾ A. Wintner, Amer. Journ. of Math. 54 (1932).

⁵⁾ For finite matrices, the uniqueness of the polar decomposition has implicitly been proved by L. Autonne (1902). Cf. A. Wintner, Annali di Mat., ser. IV, 3 (1934) p. 108, footnote.

Finally, if A_1 and A_2 are unitarily equivalent, that is, if both conditions $A_1 = T^* A_2 T$, $A_1 = T^{-1} A_2 T$ may be satisfied by the same $T (= U)$, write $A_1 \cong A_2$. It is easily verified from the formal rules of HELLINGER and TOEPLITZ that any of these three notions is a class notion; that is, one has

$$(A_1 \cup A_2) \rightarrow (A_1 \parallel A_2), (A_1 \parallel A_2) \rightarrow (A_2 \parallel A_1), \\ (A_1 \parallel A_2 \text{ and } A_2 \parallel A_3) \rightarrow (A_1 \parallel A_3),$$

where $\parallel$ is any of the three signs $\cup$, $\sim$, $\cong$, and the arrow denotes implication.

If $A_1 \sim A_2$, then A_1 and A_2 have the same spectrum. If $A \cong B$, where B denotes any of the four letters N , U , H , P , then A also is a B . If $A \cup C$, where C denotes either of the letters H , P , then A also is a C . On the other hand, if $A \cup U$, then A need not be unitary (and not even normal). Actually, two unitary matrices cannot be equivalent unless they are unitarily equivalent. This fact, which will be needed later on, may be proved as follows:

Let V and U be unitary and $T^*UT = V$ for some T . Put $T = WP$, where W is unitary and P positive definite. Then $PW^*UWP = V$. This may be written in the form

$$P(W^*WU) = (VP^{-1}V^{-1})V.$$

But P and $VP^{-1}V^{-1}$ are positive definite; while W^*UW and V are unitary, since so are U , V , W . It follows, therefore, from the uniqueness of a polar decomposition that $W^*UW = V$; *q. e. d.*

The problem of equivalence. If $x, u, \dots$ denote points of the complex Hilbert space and $A(x, \bar{y})$ the bilinear form which belongs to a matrix A , the conjugate complex, cogredient linear substitutions $x = Tu$, $\bar{y} = \bar{T}\bar{v}$ transform $A(x, \bar{y})$ into a bilinear form in u and $\bar{v}$ which has the matrix T^*AT , since $A(x, \bar{y}) = y^*Ax$. If, in particular, A is an H and the Hilbert space is replaced by a vector space with a finite number of dimensions, the question as to the complete system of invariants of an A under the transformation group of equivalence is answered by the signature criterion of the classical inertia theorem of Jacobi-Sylvester. It was recently shown⁶⁾ that the same criterion holds in case of Hilbert's

⁶⁾ A. Wintner, Math. Ztschr. 37 (1933).

space also, although H may then have a continuous spectrum. This is not a contradiction, since the spectrum of an A is invariant under similarity, but not under equivalence, transformations of A . In other words, while the usual proofs of the Jacobi-Sylvester theorem break down in case of Hilbert's space, the theorem itself is valid in this case also.

There now arises the question as to the complete system of invariants of an A under the transformation group of equivalence, if A is not restricted to be an H . Apparently, this problem has never been attacked even in the case of finite matrices. It will, however, be shown that, also in case of Hilbert's space, the problem can completely be solved if the A are restricted to be normal. In fact, it will turn out that the problem of equivalence can then be reduced to the unitary equivalence of unitary matrices. Now, while, the latter problem depends on the structure of the spectra which are, in general, continuous, it is known⁷⁾ that the problem as to the complete system of the unitary invariants of a U may be reduced to the problem as to the complete system of unitary invariants of an H . But the latter problem has been solved by HELLINGER⁸⁾. Accordingly, the equivalence problem of the N is completely solved by the following theorem:

Two bounded non-singular normal matrices N_1, N_2 are equivalent if and only if their unitary polar components $\exp i\{N_1\}, \exp i\{N_2\}$ are unitarily equivalent.

The signature criterion⁹⁾ mentioned above, is a particular case of this theorem. In fact, if N_1 , hence also $N_2 (\cup N_1)$, is an H , then so are their unitary components (cf. above). Hence, the spectra of both unitary components lie on the boundary of the unit circle and also on the real axis. Consequently, the unitary components cannot have continuous spectra, and are unitarily equivalent if and only if they are unitarily equivalent to one and the same diagonal matrix, in which all diagonal elements are ± 1 .

It is similarly shown that the non-existence⁹⁾ of invariants of equivalency for real skew-symmetric A also is a corollary. In fact, the general theorem and its proof are valid in the real field also.

⁷⁾ Loc. cit. ¹⁾, § 8.

⁸⁾ E. Hellinger, Dissertation, Göttingen 1907.

⁹⁾ A. Wintner Proc. Edinburgh Math. Soc. 1937.

The known cases of a (real or complex) $H = H^*$ and a (real or complex) $S = iH$ present two essential simplifications. For in case of a general N , which may be real or complex,

(I) the problem of equivalence can only be solved by means of a Hellinger analysis of the continuous spectra (which never occur if $N = H$ or $N = S = iH$);

(II) it is no longer true that T^*NT is an N for every T .

Proof of the theorem. The theorem announced before states that

$$N_1 \cong N_2 \text{ if and only if } \exp i\{N_1\} \cong \exp i\{N_2\}.$$

But it was proved above that if U and V are unitary and $U \cong V$, then $U \cong V$. On the other hand, it is obvious that if $U \cong V$, then $U \cong V$. Consequently, the theorem to be proved is equivalent to the statement that

$$N_1 \cong N_2 \text{ if and only if } \exp i\{N_1\} \cong \exp i\{N_2\}.$$

Since the symbol $\cong$ has the class properties of consistency, symmetry and transitivity, it follows that the theorem to be proved is equivalent to the statement that

$$N_1 \cong \exp i\{N_1\} \text{ and } N_2 \cong \exp i\{N_2\}.$$

In other words, one has merely to show that $N \cong \exp i\{N\}$ for any N .

Now, the polar components $|N|$, $\exp i\{N\}$ of any N were seen to be commutable. Furthermore, it was pointed out that $P^{1/2}$ is, for any P , commutable with any A which is commutable with P . Placing $P = |N|$ and $A = \exp i\{N\}$, it follows that the polar decomposition $N = |N| \exp i\{N\}$ may be written as $N = |N|^{1/2} (\exp i\{N\}) |N|^{1/2}$. But $|N|^{1/2}$ is positive definite, hence hermitian. Thus, the condition $N = T^* (\exp i\{N\}) T$ for $N \cong \exp i\{N\}$ is satisfied by $T = |N|^{1/2}$.

Remark. On replacing the problem of equivalence, treated above, by the corresponding problem of similarity, one might expect that

$$N_1 \cong N_2 \text{ whenever } N_1 \sim N_2.$$

Actually, this is known to be true in the particular cases $N_1 = H_1$, $N_2 = H_2$ and $N_1 = U_1$, $N_2 = U_2$ only, in which cases it may be proved by above methods¹⁰⁾. In case of an arbitrary pair $N_k = P_k U_k$, where $k = 1, 2$, there arises a difficulty, although $P_k U_k = U_k P_k$ by assumption. In case of finite matrices, it follows, of course, by transformation to the diagonal form, that similar normal matrices are unitarily equivalent.

¹⁰⁾ Loc. cit. ⁴⁾.

(Reçu par la Rédaction le 26. 8. 1938).

Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (VI)

von

W. ORLICZ (Poznań).

Es sei $\{\varphi_i(x)\}$ ein in $\langle a, b \rangle$ definiertes Orthogonalsystem; wir bezeichnen mit (S) einen Funktionenraum und mit $\Omega(S)$ die Menge aller Zahlenfolgen, welche aus den Entwicklungskoeffizienten der Funktionen aus (S) bestehen. Suchen wir einfache charakteristische Bedingungen dafür anzugeben, daß eine Zahlenfolge der Menge $\Omega(S)$ angehöre, so stoßen wir, außer dem Sonderfalle $\Omega(L^2)$, auf große Schwierigkeiten. Anläßlich verschiedener Versuche dieses Problem anzugreifen, wurden gewisse singuläre Funktionen bzw. singuläre Orthogonalreihen betrachtet; sie liefern uns verschiedenartige Gegenbeispiele. In den folgenden Zeilen bringen wir einige ergänzende Bemerkungen zu früheren diesbezüglichen Untersuchungen¹⁾.

Sei $M[u]$ eine in $\langle 0, +\infty \rangle$ stetige, konvexe Funktion mit $M[u]u^{-1} \rightarrow 0$ für $u \rightarrow 0$, $M[u]u^{-1} \rightarrow +\infty$ für $u \rightarrow +\infty$, die nur für $u = 0$ gleich Null ist. Unter dem Raum (L^M) verstehen wir den Raum vom Typus (B) aller Funktionen $f(x)$, für welche das Integral

$\int_a^b M[k|f(x)|] dx$ für irgendeine Konstante $k > 0$ existiert. Im fol-

genden setzen wir immer voraus, daß die Funktion $M[u]$ außerdem noch der Bedingung

¹⁾ Siehe: W. Orlicz, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (I), (II), *Studia Math.* 1 (1929) p. 1–39, p. 241–255; (III) *Bull. Ac. Pol.* (1932) p. 229–238; (V) *Studia Math.* 6 (1936) p. 20–38. Diese Arbeiten zitieren wir im folgenden als Beiträge. Vgl. auch: S. Kaczmarz — H. Steinhaus: *Theorie der Orthogonalreihen*, Warszawa 1935.

$$(1) \quad M[2u] = O(M[u])$$

genügt.

Sei $\{p_i\}$, $p_i > 0$, eine feste Zahlenfolge; um eine gewisse Einsicht in die Struktur der Menge $\Omega(S)$ zu bekommen, können wir die Quotienten $|f_i|/p_i$, bzw. die Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} p_i |f_i|$ für gewisse $\{f_i\} \in \Omega(S)$ untersuchen. Die Betrachtung von Quotienten führt insbesondere zu den sog. Majoranten; unter einer *Majorante* für (S) verstehen wir hierbei eine Folge $\{p_i\}$, $p_i > 0$, mit der Eigenschaft, daß aus $|c_i| = O(p_i)$ immer $\{c_i\} \in \Omega(S)$ folgt.

Wir setzen voraus, daß (S) einen der Räume (L^α) , $\alpha > 1$, (L^M) , (L^∞) , bezeichnet und daß $\{\varphi_i(x)\}$ ein in (S) vollständiges, aus beschränkten Funktionen bestehendes OS ist. Damit $\{p_i\}$, $p_i > 0$, eine Majorante für (S) sei, ist notwendig und hinreichend, daß für jede Vorzeichenverteilung $\varepsilon_i = \pm 1$ die Folge $\{\varepsilon_i p_i\}$ der Menge $\Omega(S)$ angehöre.

Für alle Fälle, mit Ausnahme von $(S) = (L^M)$ findet man den Beweis dieses Satzes in „Beiträge (V)“. Für $(S) = (L^M)$ verläuft der Beweis analog wie für (L^α) ; es ist aber zu beachten, daß in (L^M) aus einer beschränkten Elementenfolge sich im allgemeinen keine schwachkonvergente Teilfolge herausgreifen läßt. Bei dem Beweise kommt man aber mit einer etwas schwächeren Eigenschaft aus²⁾.

Nehmen wir für (S) den Raum (L^1) oder den Raum (L^M) , wobei wir die einschränkende Voraussetzung (1) fallen lassen, so bleibt der obige Satz auch richtig, falls wir statt der Vollständigkeit des OS in (S) seine Abgeschlossenheit in (C) voraussetzen.

Daß ein analoger Satz auch für $(S) = (C)$ gilt, folgt sogleich aus dem Satze:

Das OS $\{\varphi_i(x)\}$ sei in (L^∞) vollständig und es sei $\varphi_i(x) \in (C)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$). Damit für eine beliebige Vorzeichenverteilung $\varepsilon_i = \pm 1$ die Folge $\{\varepsilon_i p_i\}$ der Menge $\Omega(C)$ angehöre, ist die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

²⁾ Vgl. W. Orlicz, Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B, Bull. Ac. Pol. (1932) p. 207–220; insb. p. 215, Satz 3.

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i |\varphi_i(x)|$$

in $\langle a, b \rangle$ notwendig und hinreichend.

Beweis. Hinreichend: evident. Notwendig: Es ist für eine beliebige Vorzeichenverteilung $\{\varepsilon_i p_i\} \in \Omega(L^\infty)$; somit gibt es eine positive Konstante K , so daß die Ungleichung

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i |\varphi_i(x)| \leq K$$

für jedes x besteht³⁾. Setzen wir jetzt voraus, daß die Reihe (2) nicht gleichmäßig konvergiert. Es gibt dann eine Zahl $\varepsilon > 0$, eine Zahlenfolge $\{x_n\}$, $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \in \langle a, b \rangle$ und zwei Indizesfolgen $\{q_n\}$, $\{r_n\}$, $q_n < r_n$, $r_n < q_{n+1}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$(4) \quad \sum_{i=q_n+1}^{r_n} p_i |\varphi_i(x_n)| > \varepsilon \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

$$(4') \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=q_n+1}^{r_n} p_i |\varphi_i(x_0)| \leq \varepsilon/8.$$

Wir definieren jetzt sukzessive mit Hilfe von (3), (4), (4'), zwei aus $\{q_n\}$ bzw. $\{r_n\}$ herausgegriffene Teilfolgen $\{q'_n\}$, $\{r'_n\}$, ferner eine Intervallfolge $\{\delta_n\}$ sowie eine Mengenfolge $\{E_n\}$, so daß die folgenden Beziehungen bestehen:

a) $\delta_m \cdot \delta_{m'} = 0$ für $m \neq m'$, $E_m \subset \delta_m$, x_0 außerhalb δ_m ;
 $|E_m| > 0$ ($m = 1, 2, 3, \dots$), $\delta_m \rightarrow 0$;

b) bezeichnet x'_m den Mittelpunkt des Intervalls δ_m , so ist $x'_m \rightarrow x_0$;

c) es ist

$$\sum_{i=q'_m+1}^{r'_m} p_i |\varphi_i(x'_m)| > \varepsilon \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\sum_{i=q'_m+1}^{r'_m} p_i \operatorname{sign} \varphi_i(x'_m) \varphi_i(x) > \varepsilon \quad \text{für } x \in \delta_m \quad (m = 1, 2, 3, \dots);$$

³⁾ Beiträge (V) p. 28, Satz 3.

$$d) \quad \sum_{n=1}^{m-1} \sum_{i=q'_n+1}^{r'_n} p_i |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| \leq \varepsilon/8 \quad \text{für } x \in \delta_m \quad (m=2, 3, 4, \dots);$$

$$e) \quad \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{i=q'_n+1}^{r'_n} p_i |\varphi_i(x)| \leq \varepsilon/4 \quad \text{für } x \in E_m.$$

Bezeichnen wir mit $\{\eta_i\}$ eine Zahlenfolge, wo η_i nur der Werte $+1, -1, 0$ fähig sind; nach (3) und aus unseren Voraussetzungen folgt, daß die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i p_i \varphi_i(x)$$

für jedes x gegen eine Funktion $g_\eta(x)$ konvergiert, die in $\langle a, b \rangle$ mit einer stetigen Funktion äquivalent ist. Wir erklären jetzt eine Zahlenfolge $\{\eta_i\}$ indem wir $\eta_i = (-1)^m \text{sign } \varphi_i(x'_m)$ für $q'_m < i \leq r'_m$, $m=2, 3, \dots$ und sonst $\eta_i = 0$ setzen. Aus der Ungleichung

$$\begin{aligned} g_\eta(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i p_i \varphi_i(x) \geq - \sum_{n=1}^{m-1} \sum_{i=q'_n+1}^{r'_n} p_i |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| \\ &+ \sum_{i=q'_m+1}^{r'_m} \eta_i p_i \varphi_i(x) - \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{i=q'_n+1}^{r'_n} p_i |\varphi_i(x)| - \sum_{n=1}^{m-1} \sum_{i=q'_n+1}^{r'_n} p_i |\varphi_i(x_0)| \end{aligned}$$

erhalten wir nach d), c), e), (4'), für ein gerades m und für $x \in E_m$

$$g_\eta(x) \geq -\frac{\varepsilon}{8} + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für ein ungerades m und $x \in E_m$ ergibt sich ganz analog

$$g_\eta(x) \leq -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach a), b) und dem vorstehenden ist ersichtlich keine mit $g_\eta(x)$ äquivalente Funktion im Punkte x_0 stetig; somit sind wir zu einem Widerspruch gelangt.

Wir betrachten jetzt die folgende Frage:

Wann existiert eine Funktion $f(x) \in (S)$, für welche

$$(5) \quad \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} |f_i|/p_i = +\infty ?$$

Durch Anwendung der bekannten notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Beschränktheit einer Folge linearer Funktionale (in den entsprechenden Räumen) auf die Folge

$$f_i p_i^{-1} = \int_a^b f(x) \psi_i(x) dx, \text{ wo } \psi_i(x) = q_i(x) p_i^{-1} \text{ ist, erhalten wir}$$

den Satz:

Damit eine Funktion $f(x) \in (S)$ existiere, für welche (5) stattfindet, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\text{a) Wenn } (S) = (L^\alpha), \alpha > 1: \lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b |q_i(x)|^{\alpha'} dx p_i^{-\alpha'} = +\infty$$

(α' bedeutet den zu α konjugierten Exponent);

$$\text{b) Wenn } (S) = (L^\infty) \text{ oder } (S) = (C): \lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b |q_i(x)| dx p_i^{-1} = +\infty;$$

$$\text{c) Wenn } (S) = (L^1): \lim_{i \rightarrow \infty} \sup |q_i(x)| p_i^{-1} = +\infty;$$

$$\text{d) Wenn } (S) = (L^M): \lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b M'[k|q_i(x)| p_i^{-1}] dx = +\infty$$

für jedes $k > 0$ ($M'[u]$ bedeutet die zu $M[u]$ komplementäre Funktion).

Im Zusammenhang mit dem Fall unter b) steht der folgende Satz:

Damit für jede nullkonvergente Zahlenfolge $\{p_i\}$, $p_i > 0$, eine stetige Funktion existiere, für welche (5) stattfindet, ist notwendig und hinreichend, daß

$$(6) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b q_i(x) dx > 0.$$

Hinreichend: Nehmen wir an, daß für jede stetige Funk-

tion $\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} |f_i|/p_i < +\infty$ d. h. $\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \psi_i(x) dx < +\infty$ ist, wo

$\psi_i(x) = q_i(x) p_i^{-1}$. Nach einem bekannten Satze von Herrn H. LEBESGUE gibt es eine Konstante $K > 0$, derart daß

$$\int_a^b |\psi_i(x)| dx = p_i^{-1} \int_a^b |\varphi_i(x)| dx < K,$$

was wegen (6) für eine nullkonvergente Zahlenfolge $\{p_i\}$ unmöglich ist.

Notwendig: Ist die Bedingung (6) nicht erfüllt, so setzen wir $p_i = \int_a^b |\varphi_i(x)| dx$; es ist klar daß für diese Folge die Beziehung (5) bei keiner stetigen Funktion bestehen kann.

Bemerkungen:

a) Ein Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$ weist, nach der Terminologie des Herrn KACZMARZ die Singularität k_∞ auf⁴⁾, wenn es eine beschränkte Funktion gibt, für welche $\lim_{i \rightarrow \infty} i|f_i| = +\infty$. Jedes gleichmäßig beschränkte Orthogonalsystem weist die Singularität k_∞ auf; diese Tatsache, die zuerst auf eine unnötig komplizierte Weise von Herrn KACZMARZ bewiesen wurde, ist ein einfaches Korollar unseres Satzes. Es genügt nämlich $p_i = \frac{1}{i}$ zu setzen und zu beachten, daß für jedes gleichmäßig beschränkte Orthogonalsystem die Bedingung (6) erfüllt ist.

b) Ebenso leicht kann man zeigen, daß jedes in (L^2) vollständige Orthogonalsystem die Singularität k_∞ aufweist. Denn andernfalls wäre (nach dem vorletzten Satze, b)) $i \int_a^b |\varphi_i(x)| dx \leq K$, also $\sum_{i=1}^{\infty} (\int_a^b |\varphi_i(x)| dx)^2 < +\infty$, was für ein in (L^2) vollständiges Orthogonalsystem unmöglich ist.

c) Betrachten wir für ein gleichmäßig beschränktes Orthogonalsystem eine stetige Funktion mit $\lim_{i \rightarrow \infty} i^q |h_i| = +\infty$, wo $q = \frac{p-2}{p}$, $p > 2$. Es ist $\sum_{i=1}^{\infty} i^{p-2} |h_i|^p = +\infty$ und dies zeigt, daß jedes solche Orthogonalsystem die Singularität k_p ($p > 2$) aufweist⁵⁾.

⁴⁾ S. Kaczmarz, Notes on orthogonal series (III), Studia Math. 6 (1936) p. 112–116.

⁵⁾ Vgl. das unter 1) angeführte Buch von S. Kaczmarz und H. Steinhaus, p. 238–239.

d) Sei $p_i > 0$, $p_i \rightarrow 0$; nach einer Bemerkung von Herrn LEBESGUE existiert eine stetige periodische Funktion $h(x)$, für welche die Ungleichung $|a_i| + |b_i| \geq p_i$ für unendlich viele Indizes besteht, wo a_i , b_i die Fourierkoeffizienten bedeuten. Nach dem letzten Satze ist es klar, daß für ein Orthogonalsystem dann und nur dann eine stetige Funktion $h(x)$ existiert, deren Koeffizienten der Ungleichung $|h_i| \geq p_i$ für unendlich viele Indizes genügen, wenn die Bedingung (6) erfüllt ist. Insbesondere gilt also für jedes gleichmäßig beschränkte Orthogonalsystem ein Analogon des erwähnten LEBESGUE'schen Satzes.

(Reçu par la Rédaction le 25. 9. 1938).

A Note on Unconditional Convergence

by

A. E. TAYLOR¹⁾ (Los Angeles).

A series

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

of elements x_i of a space E of type (B) is said to converge unconditionally if it converges no matter in what order the terms are arranged. Concerning such series W. ORLICZ has proved the following result²⁾:

If the space E is weakly complete a necessary and sufficient condition for the unconditional convergence of the series (1) is that the series

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)|$$

be convergent for each linear functional f in the conjugate space $\bar{E}$.

In this note we shall prove a similar theorem about series of elements of the conjugate space $\bar{E}$. We shall assume that the unit sphere: $\|x\| \leq 1$ of the space E is *weakly compact* — that is, given an infinite set $\{x_n\}$ with $\|x_n\| \leq 1$, it is possible to choose a subsequence $\{x_{n_i}\}$ and an element x_0 of E such that

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = f(x_0)$$

for all f in $\bar{E}$. (It then follows that all bounded sets in E are weakly compact). The spaces L^p , l^p ($p > 1$) have this property. The theorem to be proved is the following.

¹⁾ National Research Fellow at Princeton University (1937–38).

²⁾ W. Orlicz, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen, II, Studia Math. 1 (1929) p. 1–39, Theorem 2.

Theorem 1. Let E be a space of type (B) in which the unit sphere is weakly compact, and let

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{\infty} f_i$$

be a series of elements of the conjugate space E (also of type (B)). Then a necessary and sufficient condition that the series (3) be unconditionally convergent is that the series

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|$$

converge for each element x of E .

Remarks: It is easily proved that if the unit sphere of E is weakly compact E is weakly complete. The converse is not true, however; for example, L is weakly complete but its unit sphere is not weakly compact. It is also known that if the unit sphere of E is weakly compact then the space E has this same property³). Consequently we required more of the space E than would be required by the theorem of ORLICZ, if applied to the series (3). The condition imposed by our theorem on series (4) is less stringent than that given by ORLICZ, however, for in general not every element of the conjugate space E of E can be expressed in the form $f(x)$, where x is some element of E ⁴).

The proof of the theorem rests on the following proposition:

Lemma. Let E satisfy the condition of Theorem 1. Let the series (4) converge for each element x of E . Then the series converges uniformly for all elements x such that $\|x\| \leq 1$, and there exists a constant C , depending only on the $\{f_i\}$, such that

$$(5) \quad \sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)| \leq C \|x\|.$$

³) V. Gantmakher and V. Šmulian, Sur les espaces linéaires dont la sphère unitaire est faiblement compacte, Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S. 17 (1937) p. 91—94, Theorem 3.

⁴) If E is separable, however, our theorem is the same as that of Orlicz, for in this case every linear functional on E can be expressed in the form $f(x)$, where x is a suitably chosen element of E . (S. Banach, Opérations linéaires, p. 189—191).

Proof: Suppose the first assertion of the theorem were false. Then for some positive ε_0 there will exist a sequence of elements $\{x_v\}$, $\|x_v\| \leq 1$, and a sequence of integers $\{n_v\}$, $\lim_{v \rightarrow \infty} n_v = \infty$, such that

$$\sum_{i=n_v}^{\infty} |f_i(x_v)| \geq \varepsilon_0 \quad (v = 1, 2, \dots).$$

Since the unit sphere in E is weakly compact we may select a subsequence of $\{x_v\}$, say $\{y_v\}$, and an element y_0 of E such that $\lim_{v \rightarrow \infty} f(y_v) = f(y_0)$ for each f in $\bar{E}$. Therefore we may as well assume that

$$(6) \quad \sum_{i=n_v}^{\infty} |f_i(y_v)| \geq \varepsilon_0 \quad (v = 1, 2, \dots).$$

Now let $\{\xi_i\}$ be a sequence of numbers forming an element of the space (m) so that $|\xi_i| \leq M$ for some constant M . The series

$$f_{\xi}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f_i(x)$$

is then evidently convergent, and it is clear, by a well known theorem⁵⁾, that $f_{\xi}(x)$ is a linear functional defined on E . Hence $\lim_{v \rightarrow \infty} f_{\xi}(y_v) = f_{\xi}(y_0)$.

Consider next the matrix A of elements

$$A_{vi} = f_i(y_v).$$

We have

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_{vi} \xi_i = f_{\xi}(y_v) \quad (v = 1, 2, \dots).$$

Thus A orders to the element ξ of (m) a convergent sequence $\{f_{\xi}(y_v)\}$ — that is, an element of the space (c) . By a theorem of I. SCHUR⁶⁾ it follows that we must have, given any positive ε , an N , depending on ε , such that

$$\sum_{i=N}^{\infty} |A_{vi}| \leq \varepsilon \quad (v = 1, 2, \dots).$$

⁵⁾ BANACH, loc. cit. p. 80, Theorem 5.

⁶⁾ I. SCHUR, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, Journ. f. Math. 151 (1921) p. 82 and 88—90.

In other words,

$$\sum_{i=N}^{\infty} |f_i(y_\nu)| < \varepsilon \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

But this contradicts (6). The validity of the inequality (5) is easily deduced from what has just been established.

It is now easy to prove Theorem 1. As for the sufficiency of the condition, we define a functional f by the series

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x).$$

This is the f_ξ used in the proof of the lemma, for the special choice $\xi_i = 1$, and it is an element of $\bar{E}$. We assert that

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i,$$

the convergence being according to the norm in $\bar{E}$. For

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{i=1}^n f_i\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x)| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x) \right| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |f_i(x)| \right) \end{aligned}$$

and the expression on the right approaches zero as $n \rightarrow \infty$, by the lemma. Since the condition on series (4) is independent of the ordering of the f_i we conclude that (3) is unconditionally convergent.

The necessity of the condition is trivial in view of the equivalence of the concepts of absolute and unconditional convergence for numerical series.

As an application of the above results we shall prove a theorem concerning the nature of a linear transformation on E to (l) .

Theorem 2. *If E is a space of type (B) in which the unit sphere is weakly compact the most general linear transformation on E to (l) has the form $T(x) = \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, where $\xi_i = f_i(x)$, and $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ is an unconditionally convergent series of elements of $\bar{E}$.*

Conversely, every such series defines a linear transformation T . T is completely continuous.

Proof. If $T(x) = \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, and we define f_i by $\xi_i = f_i(x)$, it is clear that if T is linear, then since

$$\|\xi\| = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)| \leq \|T\| \|x\|,$$

the functionals f_i are also linear. By Theorem 1 they form an unconditionally convergent series.

Conversely, if, starting from the unconditionally convergent series (3), we define

$$T(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots)$$

then all that we need to do to prove that T is linear is to establish an inequality of the form

$$(7) \quad \left| \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \right| \leq C \|x\|$$

where C is some positive constant. That such an inequality must hold is a trivial consequence of Theorem 1 and the lemma.

Theorem 2 is a sharpening of a theorem of B. J. PETTIS⁷⁾. That T is completely continuous may be proved directly with the aid of the lemma, or by an argument involving the fact that if a sequence in (l) converges weakly it also converges according to the norm. Since both proofs are essentially contained in the paper of PETTIS (who makes use of the theorem of ORLICZ), we shall not give any details.

In conclusion we shall show that for the validity of the criterion in Theorem 1 it is not sufficient to assume that E is weakly complete. For let E be the space L of functions defined and integrable (Lebesgue) on $(0,1)$. L is weakly complete, as is well known. As the sequence $\{f_i\}$ we choose the functionals

$$f_i(x) = \int_0^1 x(t) q_i(t) dt \quad (i=1, 2, \dots),$$

where $x(t) \in L$ and

$$q_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } 1/2^{i+1} < t < 1/2^i, \\ 0 & \text{, } 0 \leq t \leq 1/2^{i+1}, 1/2^i \leq t \leq 1. \end{cases}$$

⁷⁾ B. J. Pettis, A Note on Regular Banach Spaces, Bull. Am. Math. Soc. 44 (1938) p. 420-428, Theorem 4'.

It is readily verified that

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)| \leq \int_0^1 |x(t)| dt.$$

Therefore the sequence $\{f_i\}$ satisfies the conditions of the theorem⁸⁾. Yet since $\bar{E}$ is equivalent to M , and

$$\left\| \sum_{i=m}^n f_i \right\| = \max_{i=m}^n \left| \sum_{i=m}^n q_i(t) \right| = 1 \text{ where } m < n,$$

the series $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ cannot be convergent. The above considerations also prove that the unit sphere in L is not weakly compact — a fact which may be shown by a variety of other methods.

⁸⁾ In connection with this example see Orlicz, loc. cit. where it is used to prove that M is not weakly complete.

(Reçu par la Rédaction le 10. 10. 1938).

Editorial remark. The paper of S. BANACH and S. MAZUR, *Zur Theorie der linearen Dimension*, *Studia Math.* 4 (1933) p. 100—112, contains the following theorem (p. 108, b) and p. 109 ref. ¹⁴⁾): *If the space E of type (B) is such that the space $\bar{E}$ is weakly complete, a necessary and sufficient condition for the unconditional convergence of the series $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ of elements of the space E is that the series $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|$ converge for each element $x \in E$.* If the unit sphere in the space E is weakly compact, then the unit sphere in the space $\bar{E}$ is also weakly compact and therefore the space $\bar{E}$ is weakly complete (see l. c. ³⁾). Hence the above result of BANACH and MAZUR contains the theorem 1 of Mr. TAYLOR and even more. From the weak completeness of the space E does not follow the weak compactness of a unit sphere in the space E , as for instance in the case of the space (C) of continuous functions. Similarly the lemma used in the proof of theorem 1 remains true if the space E is weakly complete (see the proof of b), p. 108—109); the same is to be said concerning theorem 2. The proofs of Mr. TAYLOR are direct and therefore interesting.

Über lineare Gleichungen in separablen Räumen (II)

von

M. EIDELHEIT (Lwów).

In dieser Arbeit werden die Untersuchungen einer früheren Note¹⁾ über allgemeine lineare Gleichungen vom Typus $y_0 = U(x)$, wo y_0 gegeben ist, fortgesetzt. Es zeigt sich, daß die Hauptrolle bei der Formulierung der Bedingungen für die Lösbarkeit der Gleichung die Menge R der Werte der konjugierten Operation spielt²⁾. Wir betrachten zunächst den Fall, daß die erste schwache Hülle $R_{(1)}$ von R schwachabgeschlossen ist. Wir erhalten dann ein ziemlich einfaches und allgemeines Resultat. Nachher verallgemeinern wir dieses Ergebnis auf den Fall, daß es eine schwache Hülle $R_{(i)}$ von endlicher Ordnung gibt, die schwachabgeschlossen ist. Die Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung im allgemeinen Fall ist analog und wurde schon in (I) bewiesen, aber hier geschieht es unter geringeren Voraussetzungen und in einer mehr präzisen Form. Zum Schluß folgen einige Beispiele aus der Theorie der Fourierreihen und der Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, an welchen die Methode illustriert wird.

§ 1.

Wir legen im folgenden einen separablen Raum E vom Typus (B) zugrunde, dessen Elemente mit x bezeichnet werden. Mit $U(x)$ werden wir immer eine in E erklärte lineare²⁾ Operation

¹⁾ M. Eidelheit, Über lineare Gleichungen in separablen Räumen, *Studia Math.* 6 (1936) p. 117—138. Diese Arbeit wird im folgenden als (I) zitiert.

²⁾ Was die im folgenden benutzten Bezeichnungen und Begriffe anbetrifft, siehe: S. Banach, *Théorie des opérations linéaires* (Monografie matematyczne, Warszawa-Lwów 1932). Dieses Buch wird weiter als *Opérations* zitiert.

bezeichnen, deren Werte Elemente eines Raumes G vom Typus (B_0) sein mögen³⁾. Diese Elemente werden wir mit y , — lineare in E bzw. G erklärte Funktionale mit $f(x)$ bzw. $Y(y)$ bezeichnen. Es wird noch $X(x) = Y[U(x)]$ gesetzt. Wenn wir $f_n \rightarrow f$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ schreiben, so meinen wir immer, daß die Folge linearer Funktionale $f_n(x)$ gegen $f(x)$ schwach konvergiert. Ist H eine Menge linearer Funktionale, so soll $H_{(1)}$ die schwache Hülle von H d. h. die Menge der linearen Funktionale bedeuten, welche Grenzwerte schwachkonvergenter Folgen aus H sind; allgemein setzen wir für irgendeine Ordnungszahl $\alpha: R_{(\alpha)} = S_{(1)}$, wo $S = R_{(\alpha-1)}$, wenn α eine vorangehende Zahl hat, und $R_{(\alpha)} = \sum_{\xi < \alpha} R_{(\xi)}$ im anderen Fall. Endlich werden die Buchstaben i, k, l, m, n immer ganze positive Zahlen bedeuten.

Hilfssatz⁴⁾. Es sei H eine lineare Menge linearer Funktionale in E . Damit $H_{(1)}$ schwachabgeschlossen sei, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl $A > 0$ gebe derart, daß jedes Funktional $f \in H_{(1)}$ mit $|f| \leq 1$ der Grenzwert einer schwachkonvergenten Folge $f_n \in H$ mit $|f_n| \leq A$ sei.

Beweis. Notwendigkeit. Es bezeichne Z_k die Menge der Funktionale $f \in H_{(1)}$, für welche es eine Folge $f_n \in H$ mit $f_n \rightarrow f$, $|f_n| \leq k$ ($n = 1, 2, \dots$) gibt. Es ist dann nach dem „Resonanztheorem“⁵⁾ $H_{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k$, und da $H_{(1)}$ abgeschlossen ist, so ist eine der Mengen Z_k , z. B. Z_{k_0} , von der zweiten Kategorie in bezug auf $H_{(1)}$. Nun sind die Mengen Z_k abgeschlossen. Denn ist $f_m \in Z_k$, $f_m \rightarrow f$, so gibt es für jedes m eine Folge $f_n^{(m)} \in H$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(m)} = f_m$, $|f_n^{(m)}| \leq k$. Aus der Doppelfolge $f_n^{(m)}$ läßt sich dann eine Folge herausgreifen, die in einer in E dichten Menge gegen f konvergiert; wegen der Beschränktheit der Normen der Funktionale ist sie überall konvergent⁶⁾. Die Menge Z_{k_0} enthält demnach eine Kugel in $H_{(1)}$. Daraus folgt leicht die Behauptung.

³⁾ Vgl. M. Eidelheit, Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen, Studia Math. 6 (1936) p. 139–148.

⁴⁾ Dieser Hilfssatz wurde mir von Herrn S. Banach mündlich mitgeteilt.

⁵⁾ Opérations, p. 80, th. 5.

⁶⁾ Opérations, p. 79, th. 3.

Hinlänglichkeit. Es sei $f_m \in H_{(1)}$, $f_m \rightarrow f$. Es gibt dann nach dem erwähnten „Resonanztheorem“ eine Zahl $C > 0$ mit $|f_m| \leq C$ ($m = 1, 2, \dots$). Nach der Voraussetzung gibt es für jedes m eine Folge $f_n^{(m)} \in H$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(m)} = f_m$, $|f_n^{(m)}| \leq CA$. Aus dieser Doppelreihe läßt sich wie oben eine gegen f schwachkonvergente Teilfolge herausgreifen, d. h. $f \in H_{(1)}$ ⁷⁾.

Satz 1. *Es bezeichne R die Menge der linearen Funktionalen von der Form $X(x) = Y[U(x)]$, wo $Y(y) \in G$ beliebig ist und es sei $R_{(1)}$ schwachabgeschlossen. Damit die Gleichung*

$$(1) \quad y_0 = U(x),$$

wo y_0 ein gegebenes Element aus G ist, eine Lösung besitze, ist notwendig und hinreichend, daß die Beziehung $X_n \rightarrow 0$ ($X_n = Y_n[U(x)]$) die Relation $Y_n(y_0) \rightarrow 0$ zur Folge habe.

Beweis. Notwendigkeit. Es sei $y_0 = U(x_0)$, $x_0 \in E$. Dann ist für $X_n \rightarrow 0$ auch $Y_n(y_0) = Y_n[U(x_0)] = X_n(x_0) \rightarrow 0$.

Hinlänglichkeit. Es sei $\{x_n\}$ eine in der Kugel $|x| < 1$ dichte Folge von Elementen aus E . Wir bemerken zunächst, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m = m(\varepsilon)$ und ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, derart daß die Beziehungen

$$|X| < 1, |X(x_k)| < \delta \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (X(x) = Y[U(x)])$$

die Ungleichung $|Y(y_0)| < \varepsilon$ zur Folge haben.

Denn anderenfalls würde es ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Folge $\{Y_n(y)\}$ geben, so daß $X_n(x) = Y_n[U(x)]$ gesetzt,

$$(2) \quad |X_n| < 1, |X_n(x_k)| \leq \frac{1}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad \text{und} \quad |Y_n(y_0)| \geq \varepsilon_0$$

wäre. Nach dem unter ⁶⁾ zitierten Satze ist $X_n \rightarrow 0$ und unsere Voraussetzung verlangt dann, daß $Y_n(y_0) \rightarrow 0$ sei, entgegen (2).

Ist nun $f \in R_{(1)}$ und $X_n \in R$, $X_n \rightarrow f$, so konvergiert nach dem Cauchy'schen Satze und mit Rücksicht auf unsere Voraussetzung die entsprechende Folge $\{Y_n(y_0)\}$ und ihr Grenzwert ist offenbar unabhängig von der Wahl der speziellen gegen f konvergierenden Folge. Wir bezeichnen ihn mit $\Phi(f)$.

⁷⁾ Vgl. zu diesem Beweis: Opérations, p. 213–214, Beweis des Theorems 2.

Wir wollen nun zeigen, daß dieses in $R_{(1)}$ erklärte additive und homogene Funktional schwachstetig ist. Es sei zu dem Zweck $\varepsilon > 0$ gegeben und es bezeichne A die nach dem Hilfssatz für R existierende Zahl, die man ≥ 1 annehmen darf: wir behaupten, daß $|\Phi(f)| \leq \varepsilon$ ist, sobald

$$f \in R_{(1)}, |f| \leq 1, |f(x_k)| < \delta \quad (k=1, 2, \dots, m),$$

wo $\delta = \delta(\varepsilon/A)$ und $m = m(\varepsilon/A)$ die nach dem Vorangehenden für ε/A existierenden Zahlen sind.

Da nämlich $R_{(1)}$ schwachabgeschlossen ist, so gibt es nach dem Hilfssatz für ein $f \in R_{(1)}$ mit $|f| \leq 1$ eine Folge $\{Y_n(y)\}$, derart daß

$$(X_n(x) = Y_n[U(x)], X_n \rightarrow f, |X_n| \leq A \quad (n=1, 2, \dots))$$

ist. Für genügend große n wird dann $|X_n(x_k)| < \delta$ ($k=1, 2, \dots, m$), also gemäß der Bedeutung von δ und m $|Y_n(y_0)/A| < \varepsilon/A$ und somit $|\Phi(f)| = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(y_0) \leq \varepsilon$.

Aus dem Bewiesenen folgt sofort die Schwachstetigkeit des Funktional $\Phi(f)$. Denn es sei $f_n \in R_{(1)}$, $f_n \rightarrow 0$. Es gibt dann nach dem „Resonanztheorem“ eine Zahl $C > 1$, derart daß $|f_n| \leq C$ ($n=1, 2, \dots$) ist. Ist nun $\varepsilon > 0$ gegeben, so wird für genügend große n $|f_n(x_k)| < \delta$ ($k=1, 2, \dots, m$), wo $m = m(\varepsilon/A)$, $\delta = \delta(\varepsilon/A)$ ist, also $|\Phi(f_n)| \leq C\varepsilon$, d. h. $\Phi(f_n) \rightarrow 0$.

Nun gibt es nach einem Satze des Herrn S. BANACH⁸⁾ ein Element $x_0 \in E$, so daß $f(x_0) = \Phi(f)$ für $f \in R_{(1)}$. Insbesondere für $f \in R$, $f(x) = Y[U(x)]$ ergibt sich daraus $Y[U(x_0)] = Y(y_0)$. Da diese Gleichung für jedes $Y(y)$ besteht, so folgt $U(x_0) = y_0$, w. z. b. w.

Korollar. *Gibt es für die Elemente y_n ($n=1, 2, \dots$) eine Lösung von (1) und gilt $Y(y_n - y_0) \rightarrow 0$ gleichmäßig in bezug auf die Menge der Funktional $Y(y)$ mit $|X| \leq 1$ ($X(x) = Y[U(x)]$), so gibt es auch eine Lösung für y_0 .*

Beweis. Es sei $X_n \rightarrow 0$ ($X_n = Y_n[U(x)]$). Es gibt dann ein $C > 0$, so daß $|X_n| \leq C$ ($n=1, 2, \dots$) ist. Daraus folgt

⁸⁾ Opérations, p. 131, th. 8; dieses Theorem besteht offenbar auch dann, wenn man den ganzen Raum $\bar{E}$ durch irgendeine lineare schwachabgeschlossene Menge ersetzt.

$$|Y_n(y_0 - y_k)| \leq C \sup_{|X| \leq 1} |Y(y_0 - y_k)|,$$

also $|Y_n(y_0) - Y_n(y_k)| < \varepsilon_k$ ($n = 1, 2, \dots$), wobei $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Da nach Voraussetzung mit Rücksicht auf Satz 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(y_k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) ist, so folgt daraus $Y_n(y_0) \rightarrow 0$, w. z. b. w.

§ 2.

1. Wir setzen nunmehr voraus, daß der Raum E nicht nur separabel ist, sondern auch eine ausgezeichnete Basis besitzt. Die Basis $\{e_n\}$ heißt dabei ausgezeichnet, wenn für beliebige Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$

$$|\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} e_{n+1}| \geq |\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n|$$

ist⁹⁾. Dagegen braucht sie nicht normierend zu sein, wie dies in (I) vorausgesetzt wurde. Setzt man

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) e_i,$$

so sind die $g_i(x)$ lineare Funktionale¹⁰⁾. Setzt man ferner für ein beliebiges lineares Funktional $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) f(e_i)$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^k g_i(x) f(e_i),$$

so ist¹¹⁾

$$|f| = \sup_{k=1,2,\dots} |f^{(k)}| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f^{(k)}|.$$

Eine weitere Bemerkung, die wir jetzt formulieren wollen, ist die folgende:

Es ist $f_n \rightarrow f$ dann und nur dann, wenn 1° eine Zahl $C > 0$ existiert, so daß $|f_n| \leq C$ ($n = 1, 2, \dots$), 2° $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n^{(k)} - f^{(k)}| = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) ist.

⁹⁾ Diese Definition ist mit der in (I) p. 123 gegebenen offenbar äquivalent.

¹⁰⁾ Opérations, p. 111.

¹¹⁾ (I) p. 123, Hilfssatz 3.

Beweis. Es sei $f_n \rightarrow f$. Es ist dann $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e_i) = f(e_i)$ ($i=1, 2, \dots$), mithin $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n^{(k)} - f^{(k)}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^k (f_n(e_i) - f(e_i)) g_i(x) \right\| = 0$ ($k=1, 2, \dots$). Die Bedingung 1° ist bekannt.

Umgekehrt seien 1° und 2° erfüllt. Es ist dann, da die Funktionale $g_i(x)$ voneinander linear unabhängig sind, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e_i) = f(e_i)$ ($i=1, 2, \dots$) und da die Folge $\{e_i\}$ eine Basis bildet, so folgt wegen 1° sofort $f_n \rightarrow f$.

2. Wir kehren jetzt zur Gleichung (1) zurück und setzen voraus, daß es eine endliche Zahl i gibt, derart daß $R_{(i)}$ schwach-abgeschlossen ist. Es gilt dann der

Satz 2. *Besitzt die Gleichung (1) eine Lösung x_0 mit $|x_0| \leq M$, so gibt es für beliebige positive $\eta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i$ solche $k_1, k_2, \dots, k_i$, daß für jedes $Y(y) \ (X(x) = Y[U(x)])$*

$$(3) \quad |Y(y_0)| \leq \max_{m=0,1,\dots,i} [\varepsilon_m \max_{k_m < k \leq k_{m+1}} |X^{(k)}|] \quad (k_0=0, k_{i+1}=\infty, \varepsilon_0=M+\eta)$$

gilt; dabei ist k_m ($m=1, 2, \dots, i$) nur von $\eta, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ abhängig. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so gibt es zu jedem $\eta > 0$ eine Lösung x_0 von (1) mit $|x_0| < M + \eta^{12}$.

Beweis. Notwendigkeit. Es seien zunächst η und ε_1 gegeben. Wir werden zeigen, daß es ein k_1 gibt, so daß für jedes $f \neq 0$ die Ungleichung

$$|f(x_0)| < \max [(M+\eta) \max_{0 < k \leq k_1} |f^{(k)}|, \varepsilon_1 \sup_{k_1 < k} |f^{(k)}|]$$

besteht. Denn anderenfalls würde es Zahlen $\eta, \varepsilon_1 > 0$ und eine Folge $\{f_n\}$ mit $f_n \neq 0$,

$$|f_n(x_0)| \geq (M+\eta) |f_n^{(k)}| \text{ für } 0 < k \leq n, \quad |f_n(x_0)| \geq \varepsilon_1 |f_n^{(k)}| \text{ für } k > n$$

geben. Man darf hier, da beide Seiten der Ungleichungen homogen

¹²⁾ Mehr kann im allgemeinen nicht behauptet werden. Dies zeigt schon die Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} \xi_k = 1$, wo es ersichtlich für jedes $\eta > 0$ eine Lösung $\{\xi_k\}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < 1 + \eta$, aber keine mit $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leq 1$ gibt.

in f sind, $f_n(x_0) = 1$ annehmen und es kommt dann

$$|f_n| = \sup_{k > n} |f_n^{(k)}| \leq \frac{1}{\varepsilon_1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Nach einem bekannten Satze¹³⁾ gibt es daher eine schwachkonvergente Teilfolge $f_{n_i} \rightarrow f$, die gegen ein Funktional f konvergiert. Für f hat man

$$f(x_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i}(x_0) = 1, \quad |f^{(k)}| = \lim_{i \rightarrow \infty} |f_{n_i}^{(k)}| \leq \frac{1}{M + \eta} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

also $|f| \leq \frac{1}{M + \eta} = \frac{f(x_0)}{M + \eta}$, was gegen $|x_0| \leq M$ verstößt.

Wir zeigen nun: wählt man noch $\varepsilon_2 > 0$ beliebig, so gibt es ein k_2 , derart daß für jedes $f \neq 0$

$$|f(x_0)| < \max((M + \eta) \max_{0 < k \leq k_1} |f^{(k)}|, \varepsilon_1 \max_{k_1 < k \leq k_2} |f^{(k)}|, \varepsilon_2 \sup_{k_2 < k} |f^{(k)}|)$$

gilt. Anderenfalls würde es nämlich ein $\varepsilon_2 > 0$ und eine Folge $\{f_n\}$ mit $f_n \neq 0$ geben, so daß $|f_n(x_0)| \geq (M + \eta) |f_n^{(k)}|$ für $0 < k \leq k_1$,

$|f_n(x_0)| \geq \varepsilon_1 |f_n^{(k)}|$ für $k_1 < k \leq k_1 + n$, $|f_n(x_0)| \geq \varepsilon_2 |f_n^{(k)}|$ für $k_1 + n < k$ wäre. Man darf wieder $f_n(x_0) = 1$ annehmen und erhält dann $|f_n| \leq 1/\varepsilon_2$ ($n = 1, 2, \dots$). Es gibt demnach eine schwachkonvergente Teilfolge $f_{n_i} \rightarrow f$ und es ist

$$f(x_0) = 1, \quad |f(x_0)| \geq (M + \eta) |f^{(k)}| \text{ für } 0 < k \leq k_1, \\ |f(x_0)| \geq \varepsilon_1 |f^{(k)}| \text{ für } k_1 < k,$$

was mit dem schon Bewiesenen in Widerspruch steht.

So fortfahrend gelangt man zu dem Ergebnis: sind beliebige positive Zahlen $\eta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i$ gegeben, so gibt es solche $k_1, k_2, \dots, k_i$, daß für jedes $f \neq 0$ die Ungleichung

$$|f(x_0)| < \max_{m=0,1,\dots,i} [\varepsilon_m \max_{k_m < k \leq k_{m+1}} |f^{(k)}|]$$

besteht; dabei ist k_m nur von $\eta, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ abhängig ($m = 1, 2, \dots$). Aus dieser Ungleichung folgt sofort (3).

¹³⁾ Opérations, p. 123, th. 3.

Hinlänglichkeit. Wir bemerken zunächst, daß $Y_n(y_0) \rightarrow 0$ ist, wenn $X_n \rightarrow 0$ ($X_n = Y_n[U(x)]$). Es gibt nämlich eine Zahl $C > 0$, so daß $|X_n| \leq C$ ($n = 1, 2, \dots$) ist. Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, so setzen wir $\eta = 1$, $\varepsilon_m = \varepsilon/C$ ($m = 1, 2, \dots, i$) und bestimmen demgemäß $k_1, k_2, \dots, k_i$. Für genügend große n hat man dann $|X_n^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{M+1}$ für $0 < k \leq k_1$, also nach (3) $|Y_n(y_0)| \leq \varepsilon$.

Demnach kann man, ähnlich wie im Beweise des Satzes 1, das Funktional $\Phi(f)$ für $f \in R_{(1)}$ definieren. Wir werden nun zeigen, daß für $R_{(1)}$ eine analoge Bedingung wie für R , aber mit $\Phi(f)$ statt $Y(y_0)$, f statt X und $i-1$ statt i besteht. Es seien positive $\eta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{i-1}$ gegeben. Wir bestimmen die entsprechenden $k_1, k_2, \dots, k_{i-1}$ für R . Es sei nun $f \in R_{(1)}$, $\Phi(f) \neq 0$. Es gibt dann eine Folge $\{Y_n(y)\}$ und eine Zahl $C > 0$, derart daß $(X_n(x) = Y_n[U(x)])$

$$X_n \rightarrow f, \quad |X_n| \leq C, \quad |Y_n(y_0)| > \frac{1}{2} |\Phi(f)| \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ist. Jetzt setzen wir $\varepsilon_i = |\Phi(f)|/2C$ und bestimmen das entsprechende k_i . Es ist dann $|Y_n(y_0)| \leq \max_{m=0,1,\dots,i} [\varepsilon_m \max_{k_m < k \leq k_{m+1}} |X_n^{(k)}|]$ ($k_{i+1} = \infty$). Hier ist aber

$$\varepsilon_i \sup_{k_i < k} |X_n^{(k)}| \leq \varepsilon_i |X_n| \leq \frac{1}{2} |\Phi(f)| < |Y_n(y_0)| \quad (n = 1, 2, \dots),$$

mithin

$$|Y_n(y_0)| \leq \max_{m=0,1,\dots,i-1} [\varepsilon_m \max_{k_m < k \leq k_{m+1}} |X_n^{(k)}|] \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Für $n \rightarrow \infty$ ergibt sich daraus

$$|\Phi(f)| \leq \max_{m=0,1,\dots,i-1} [\varepsilon_m \max_{k_m < k \leq k_{m+1}} |f^{(k)}|]$$

und man kann hier k_i durch ∞ ersetzen.

Auf Grund dieser Ungleichung kann man ähnlich wie früher das Funktional $\Phi(f)$ wieder auf $R_{(2)}$ erweitern und eine analoge Bedingung mit $i-2$ statt $i-1$ beweisen. So fortfahrend gelangt man bis zu $R_{(i-1)}$ und es ergibt sich ein dort erklärtes additives und homogenes Funktional $\Phi(f)$, das eine Erweiterung des in

$R_{(1)}$ erklären bildet, von der Beschaffenheit, daß zu beliebigen $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$ es ein k_ε gibt, derart daß für jedes $f \in R_{(i-1)}$

$$|\Phi(f)| \leq \max [(M + \eta) \max_{0 < k \leq k_\varepsilon} |f^{(k)}|, \varepsilon |f|]$$

gilt. Dieses Funktional kann man noch einmal auf $R_{(i)}$ erweitern und es erweist sich ähnlich wie im Beweise des Satzes 1, da ja $R_{(i)}$ schwachabgeschlossen ist, als schwachstetig. Darüber hinaus ergibt sich durch eine der oben durchgeführten analoge Überlegung, daß für $f \in R_{(i)}$ und beliebiges $\eta > 0$ $|\Phi(f)| \leq (M + \eta) |f|$ ist. Man kann hier für $f \neq 0$ das Gleichheitszeichen ausschließen, da η beliebig war.

Es sei nun $\bar{R}$ die Menge der Funktionale $f \in R_{(i)}$, für welche $\Phi(f) = 0$ gilt und $f_0 \in R_i$ derart, daß $\Phi(f_0) = 1$. (Ein solches f_0 gibt es, wenn nur $y_0 \neq 0$, was wir annehmen dürfen). $\bar{R}$ ist schwachabgeschlossen und man hat für $f \in \bar{R}$ und beliebiges $\eta > 0$

$$1 = |\Phi(f - f_0)| < (M + \eta) |f - f_0|.$$

Nach einem Satze des Herrn S. BANACH¹⁴⁾ gibt es dann ein Element x_0 mit $|x_0| < M + \eta$, derart daß $f_0(x_0) = 1$, $f(x_0) = 0$ für $f \in \bar{R}$. Daraus folgt leicht, daß $\Phi(f) = f(x_0)$ für $f \in R_{(i)}$ ist, da jedes $f \in R_{(i)}$ sich eindeutig in der Form $f = \alpha f_0 + g$ darstellen läßt, wo α eine Zahl ist und $g \in \bar{R}$. Insbesondere für $f \in R$, $f = Y[U(x)]$, erhält man $\Phi(f) = Y(y_0) = Y[U(x_0)]$ und, da $Y(y)$ beliebig war, $y_0 = U(x_0)$, w. z. b. w.

3. Wir gehen jetzt zum allgemeinen Fall über und machen keine Voraussetzungen über die Menge R . Wir haben dann den

Satz 3. *Besitzt die Gleichung (1) eine Lösung x_0 mit $|x_0| \leq M$, so gibt es für jedes $\eta > 0$ und jede Zahlenfolge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, eine Folge $\{k_n\}$, so daß für jedes $Y(y)$*

$$(4) |Y(y_0)| \leq \sup_{m=0,1,2,\dots} [\varepsilon_m \max_{k_m < k \leq k_{m+1}} |X^{(k)}|] \quad (k_0 = 0, \varepsilon_0 = M + \eta, X(x) = Y[U(x)])$$

gilt; dabei ist k_m nur von η , $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ abhängig ($m = 1, 2, \dots$). Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt für irgend eine Folge $\{\varepsilon_n\}$ mit $0 < \varepsilon_n \leq M$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ und beliebiges $\eta > 0$, so gibt es für jedes $\eta > 0$ eine Lösung x_0 von (1) mit $|x_0| < M + \eta$.

¹⁴⁾ Opérations, p. 125, th. 6.

Der Beweis ist dem des Satzes 2 völlig analog; man muß nur bei dem Beweis der Notwendigkeit das dort angezeigte Verfahren unendlich viele Male wiederholen. Man beweist sodann leicht die Ungleichung (4). Der Beweis der Hinlänglichkeit ist noch leichter, denn aus (4) folgt sofort eine analoge Ungleichung für $R_{(1)}$

$$|\Phi(f)| \leq \sup_{m=0,1,\dots} [\varepsilon_m \max_{k_m < k \leq k_{m+1}} |f^{(k)}|]$$

und diese überträgt sich für jede Ordnungszahl α auf $R_{(\alpha)}$ und gilt daher in der kleinsten schwachabgeschlossenen Hülle von R .

Bemerkung. In den Anwendungen wird sich manchmal die folgende, derjenigen des Satzes 3 äquivalente, Bedingung als mehr brauchbar erweisen:

Besitzt die Gleichung (1) eine Lösung, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ und jede Zahlenfolge $\{A_n\}$, $A_n > 0$, eine Zahl $\delta > 0$ und eine Folge $\{l_i\}$, derart daß für jedes $Y(y)$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} X(x) &= Y[U(x)], \quad |X^{(k)}| \leq \delta \text{ für } 0 < k \leq l_1, \\ |X^{(k)}| &\leq A_i \text{ für } l_i < k \leq l_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

die Ungleichung $|Y(y_0)| < \varepsilon$ zur Folge haben; δ ist dabei nur von ε und l_i nur von ε , A_1 , $A_2, \dots$, A_i abhängig ($i = 1, 2, \dots$). Ist umgekehrt diese Bedingung für irgend ein $\varepsilon > 0$ und irgend eine Folge $\{A_n\}$ mit $A_n > 0$, $A_n \rightarrow \infty$ erfüllt, so ist die Gleichung (1) lösbar. (In analoger Weise läßt sich auch Satz 2 formulieren; nur muß beidesmal verlangt werden, daß die A_i beliebig sein sollen).

Beweis. Notwendigkeit. Wir wählen $\eta = 1$, $\varepsilon_i = \varepsilon/A_i$, und bestimmen $k_1, k_2, \dots$. Offenbar kann man dann $l_i = k_i$, $\delta = \frac{\varepsilon}{M + \eta}$ setzen.

Hinlänglichkeit. Wir bestimmen zu ε und $\{A_n\}$ das entsprechende $\delta = \delta(\varepsilon)$ und $\{l_i\}$, und setzen $M = \varepsilon/\delta(\varepsilon)$. Es sei nun $\eta > 0$ beliebig gegeben. Wir setzen $\varepsilon_i = \varepsilon/A_i$ und $k_i = l_i$ ($i = 1, 2, \dots$). Es ist dann $\varepsilon_i \rightarrow 0$ und für jedes $Y(y)$ gilt

$$|Y(y_0)| \leq \sup_{m=0,1,\dots} [\varepsilon_m \max_{k_m < k \leq k_{m+1}} |X^{(k)}|] \quad (k_0 = 0, \varepsilon_0 = M + \eta, X(x) = Y[U(x)]).$$

Denn ist für ein $Y(y)$

$$|Y(y_0)| > \sup_{m=0,1,\dots} [\varepsilon_m \max_{k_m < k \leq k_{m+1}} |X^{(k)}|],$$

so darf man wegen der Homogenität beider Seiten in $Y(y)$ $Y(y_0) = \varepsilon$ annehmen und es ergibt sich dann

$$|X^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{M + \eta} < \frac{\varepsilon}{M} = \delta(\varepsilon) \text{ für } 0 < k \leq l_1, \quad |X^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m} = A_m \\ \text{für } l_m < k \leq l_{m+1}.$$

Es sollte also $|Y(y_0)| < \varepsilon$ sein, entgegen der Annahme.

§ 3.

Wir wollen nun einige Anwendungen unserer Sätze mitteilen¹⁵⁾.

1. Fourierreihen.

Satz 4. Damit $\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ eine Fourierreihe sei, ist hinreichend, daß die Reihe

$$\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \mu_1 b_1 + \dots + \lambda_n a_n + \mu_n b_n + \dots$$

inbezug auf alle endliche Folgen $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$, die der Ungleichung

$$|\lambda_0 + \lambda_1 \cos t + \mu_1 \sin t + \dots + \lambda_n \cos nt + \mu_n \sin nt + \dots| \leq 1$$

für $0 \leq t \leq 2\pi$ genügen, gleichmäßig konvergiere.

(Eine ähnliche Bedingung gilt für den Fall der Fourierreihe einer stetigen Funktion).

Beweis. Wir betrachten das System der Gleichungen

$$\int_0^{2\pi} x(t) \cos nt dt = a_n, \quad \int_0^{2\pi} x(t) \sin nt dt = b_n \quad (n = 0, 1, \dots),$$

wo die a_n , b_n gegeben sind und die unbekannte Funktion $x(t)$ in $(0, 2\pi)$ integrierbar sein soll. Ordnen wir jedem $x = x(t)$ die Folge $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots$ zu, wo

$$\alpha_n = \int_0^{2\pi} x(t) \cos nt dt, \quad \beta_n = \int_0^{2\pi} x(t) \sin nt dt \quad (n = 0, 1, \dots)$$

und setzen $y = \{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n, \dots\}$, so bekommen wir offenbar eine lineare Operation $y = U(x)$, die den Raum L auf

¹⁵⁾ Vgl. zu diesem § Opérations, p. 65–67.

einen Teil des Raumes (s) abbildet. Der Raum (s) ist vom Typus $(B_0)^{16)}$ und jedes lineare Funktional $Y(y)$ in (s) ist von der Form

$$Y(y) = \lambda_0 \alpha_0 + \lambda_1 \alpha_1 + \mu_1 b_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n + \mu_n b_n.$$

Die Menge R besteht aus den Funktionalen von der Form

$$(5) \quad X(x) = Y[U(x)] = \int_0^{2\pi} x(t) [\lambda_0 + \lambda_1 \cos t + \mu_1 \sin t + \dots + \lambda_n \cos nt + \mu_n \sin nt] dt.$$

Wir bemerken nun, daß $R_{(1)}$ mit dem Raum aller linearen Funktionalen in L identisch ist. Denn ist $f(x) = \int_0^{2\pi} x(t) g(t) dt$ ein beliebiges lineares Funktional in L , also $g(t)$ meßbar und beschränkt in $(0, 2\pi)$, so sei $\sigma_n(t)$ das n -te zu $g(t)$ gehörige Fejérsche Polynom. Es ist dann $|\sigma_n(t)| \leq K$, wo $K > 0$ von n und t unabhängig ist, und $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(t) = g(t)$ fast überall¹⁷⁾, mithin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} x(t) \sigma_n(t) dt = \int_0^{2\pi} x(t) g(t) dt \text{ für jedes } x \in L.$$

Setzen wir noch $y_0 = (a_0, a_1, b_1, \dots)$, $y_n = (a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, 0, 0, \dots)$, so sind die Voraussetzungen des Korollars zu Satz 1 erfüllt und wir erhalten den Satz 4 indem wir bemerken, daß die Norm des Funktional (5)

$$|X| = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |\lambda_0 + \lambda_1 \cos t + \mu_1 \sin t + \dots + \lambda_n \cos nt + \mu_n \sin nt|$$

ist.

2. Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.

Es sei das System

$$(6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = b_i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

vorgelegt, wobei

¹⁶⁾ Loc. cit.³⁾.

¹⁷⁾ A. Zygmund, Trigonometrical series (Monografie matematyczne, Warszawa-Lwów 1935), p. 46, 3.22 und p. 49, 3.31.

$$a_{ik} = 0 \text{ für } k < i, \quad a_{ii} \neq 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| < \infty$$

angenommen wird. Wir setzen ferner voraus, daß es für jedes l eine Folge von linearen Kombinationen der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{ \mu_1^{(n)} a_{1k} + \mu_2^{(n)} a_{2k} + \dots + \mu_{m_n}^{(n)} a_{m_n k} \}$$

gibt, derart daß $\sum_{k=1}^{\infty} | \mu_1^{(n)} a_{1k} + \dots + \mu_{m_n}^{(n)} a_{m_n k} |$ unter einer von n und l unabhängigen Schranke bleibt und daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_1^{(n)} a_{1k} + \dots + \mu_{m_n}^{(n)} a_{m_n k}) = 0 \text{ für } k \neq l, = 1 \text{ für } k = l$$

ist. Es gilt dann der

Satz 5. Ist die Reihe $\sum \lambda_n b_n$ inbezug auf alle endliche Folgen $\{\lambda_n\}$, die der Ungleichung $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \dots| \leq 1$ genügen, gleichmäßig konvergent, so besitzt das System (6) eine Lösung $\{\xi_k\}$ mit $\xi_k \rightarrow 0$.

Beweis. Setzen wir für eine beliebige Folge $\{\xi_k\}$ mit $\xi_k \rightarrow 0$

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k \quad (i = 1, 2, \dots), \quad x = \{\xi_k\}, \quad y = \{\eta_i\},$$

so bekommen wir eine lineare Operation $y = U(x)$, die den Raum (c_0) auf einen Teil des Raumes (s) abbildet. Ist $Y(y) = \lambda_1 \eta_1 + \dots + \lambda_n \eta_n$ ein beliebiges lineares Funktional in (s) , so wird

$$(7) \quad X(x) = Y[U(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \dots + \lambda_n a_{nk}) \xi_k$$

und die Menge dieser Funktionalen bildet den Raum R . $R_{(1)}$ ist wieder mit dem Raum aller linearen Funktionalen in (c_0) identisch. Dies folgt aus unserer Voraussetzung nach dem unter 7) zitierten Satze des Herrn S. BANACH oder auch leicht direkt. Setzt man nun $y_0 = \{b_i\}$, $y_n = \{b_1, b_2, \dots, b_n, 0, 0, \dots\}$ und bemerkt, daß für y_n das System (6) eine Lösung besitzt, so ergibt sich, da die Norm des Funktionalen (7)

$|X| = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_1 a_{1k} + \dots + \lambda_n a_{nk}|$ ist, der Satz aus dem Korollar zu Satz 1.

Es sei nun das System

$$(8) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = b_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

vorgelegt, wobei $a_{ik} = 0$ für $k < i$, $a_{ii} \neq 0$ und die Folgen $\{a_{i1}, a_{i2}, \dots\}$ als beschränkt angenommen sind. Ist m fest, so gibt es für jedes k Zahlen $c_1^{m,k}, c_2^{m,k}, \dots, c_m^{m,k}$ derart, daß

$$a_{ik} = \sum_{n=1}^m c_n^{m,k} a_{in} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Wir setzen nun voraus, daß es eine Konstante $B > 0$ gibt, so daß

$$\sum_{n=1}^m |c_n^{m,k}| \leq B \quad (m, k = 1, 2, \dots)$$

ist. Es gilt dann der

Satz 6. *Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 , derart daß die Beziehungen $n \geq m > n_0$, $|\lambda_m a_{mk} + \lambda_{m+1} a_{m+1,k} + \dots + \lambda_n a_{nk}| \leq 1$ ($k = m, m+1, \dots, n$) die Ungleichung $|\lambda_m b_m + \lambda_{m+1} b_{m+1} + \dots + \lambda_n b_n| < \varepsilon$ zur Folge haben, so besitzt das System (8) eine Lösung $\{\xi_k\}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < \infty$.*

Beweis. Setzt man für eine beliebige Folge $\{\xi_k\}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < \infty, \quad x = \{\xi_k\}, \quad \eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k \quad (i = 1, 2, \dots), \quad y = \{\eta_i\},$$

so bekommt man eine lineare Operation $y = U(x)$, die den Raum (I) auf einen Teil des Raumes (s) abbildet. Ist

$$Y(y) = \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \dots + \lambda_n \eta_n,$$

so wird

$$X(x) = Y[U(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_1 a_{1k} + \dots + \lambda_n a_{nk}) \xi_k,$$

$$X^{(k)}(x) = \sum_{m=1}^k (\lambda_1 a_{1m} + \dots + \lambda_n a_{nm}) \xi_m,$$

$$|X^{(k)}| = \max_{1 \leq m \leq k} |\lambda_1 a_{1m} + \dots + \lambda_n a_{nm}|.$$

Bezeichnet man noch die Folge $\{b_i\}$ mit y_0 , so ist unser System (8) mit der Gleichung $y_0 = U(x)$ äquivalent. Wir wollen nun auf diese Gleichung die Bemerkung zu Satz 3 anwenden.

Wir bemerken zu dem Zweck zunächst, daß es eine Zahl $M > 0$ gibt, so daß für beliebige $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$(9) \quad |\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n| \leq M \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_1 a_{1k} + \dots + \lambda_n a_{nk}|$$

ist. Nach der Voraussetzung gibt es nämlich ein n_0 derart, daß $|\lambda_{n_0+1} b_{n_0+1} + \dots + \lambda_n b_n| \leq 1$ wird, sobald die Ungleichungen

$$n > n_0, \quad |\lambda_{n_0+1} a_{n_0+1,k} + \dots + \lambda_n a_{nk}| \leq 1 \quad (k = n_0 + 1, \dots, n)$$

bestehen. Es gibt ferner offenbar eine Zahl $M' > 0$, so daß die Ungleichungen $|\lambda_1 a_{1k} + \dots + \lambda_{n_0} a_{n_0 k}| \leq 1$ ($k = 1, 2, \dots, n_0$) die Ungleichung $|\lambda_i| \leq M'$ ($i = 1, 2, \dots, n_0$) zur Folge haben. Ist nun

$$n > n_0, \quad |\lambda_1 a_{1k} + \dots + \lambda_n a_{nk}| \leq 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

so folgt daraus zunächst

$$|\lambda_1 a_{1k} + \dots + \lambda_{n_0} a_{n_0 k}| \leq 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n_0),$$

dann für $n_0 + 1 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned} |\lambda_{n_0+1} a_{n_0+1,k} + \dots + \lambda_n a_{nk}| &\leq |\lambda_1 a_{1k} + \dots + \lambda_n a_{nk}| \\ &\quad + |\lambda_1 a_{1k} + \dots + \lambda_{n_0} a_{n_0 k}| \\ &\leq 1 + \left| \sum_{l=1}^{n_0} c_l^{n_0, k} (\lambda_1 a_{1l} + \lambda_2 a_{2l} + \dots + \lambda_{n_0} a_{n_0 l}) \right| \\ &\leq 1 + \sum_{l=1}^{n_0} |c_l^{n_0, k}| \leq 1 + B. \end{aligned}$$

Demnach hat man

$$\begin{aligned} |\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n| &\leq |\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{n_0} b_{n_0}| + |\lambda_{n_0+1} b_{n_0+1} + \dots + \lambda_n b_n| \\ &\leq M' (|b_1| + \dots + |b_{n_0}|) + 1 + B = M. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich leicht (9) wegen der Homogenität beider Seiten in $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Es seien nun positive $\varepsilon, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ gegeben. Man darf annehmen, daß $\varepsilon < 2MA_1, A_1 < A_2 < \dots$ ist. Wir setzen

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{2^{i+1}(A_i + BA_{i-1})} \quad (i = 1, 2, \dots; A_0 = \delta)$$

und bestimmen $k_i, k_i < k_{i+1}$, so daß für $n \geq m > k_i$ und beliebige $\lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$, die den Ungleichungen

$$|\lambda_m a_{mk} + \dots + \lambda_n a_{nk}| \leq 1 \quad (k = m, m+1, \dots, n)$$

genügen,

$$|\lambda_m b_m + \lambda_{m+1} b_{m+1} + \dots + \lambda_n b_n| < \varepsilon_i$$

sei.

Es sei nun

$$(10) \quad \begin{aligned} |\lambda_1 a_{1k} + \dots + \lambda_n a_{nk}| &\leq \delta \quad \text{für } 0 < k \leq k_1, \\ |\lambda_1 a_{1k} + \dots + \lambda_n a_{nk}| &\leq A_i \quad \text{für } k_i < k \leq k_{i+1}. \end{aligned}$$

Wir bestimmen zuerst i_0 so, daß $k_{i_0} < n \leq k_{i_0+1}$ sein soll. Aus (10) folgt für $0 < k \leq k_1$

$$(11) \quad |\lambda_1 a_{1k} + \dots + \lambda_{k_1} a_{k_1 k}| \leq \delta,$$

also für $k > k_1$

$$|\lambda_1 a_{1k} + \dots + \lambda_{k_1} a_{k_1 k}| = \left| \sum_{l=1}^{k_1} c_l^{k_1 k} (\lambda_1 a_{1l} + \dots + \lambda_{k_1} a_{k_1 l}) \right| \leq B\delta;$$

mithin ist für $k_1 < k \leq k_2$

$$\begin{aligned} |\lambda_{k_1+1} a_{k_1+1, k} + \dots + \lambda_{k_2} a_{k_2 k}| &= |\lambda_{k_1+1} a_{k_1+1, k} + \dots + \lambda_n a_{nk}| \\ &\leq |\lambda_1 a_{1k} + \dots + \lambda_n a_{nk}| + |\lambda_1 a_{1k} + \dots + \lambda_{k_1} a_{k_1 k}| \leq A_1 + B\delta. \end{aligned}$$

In analoger Weise zeigt man, daß für $k_2 < k \leq k_3$ die Ungleichung

$$|\lambda_{k_2+1} a_{k_2+1, k} + \dots + \lambda_{k_3} a_{k_3 k}| \leq A_2 + B A_1$$

gilt, indem man bemerkt, daß für $k \leq k_2$ $|\lambda_1 a_{1k} + \dots + \lambda_{k_2} a_{k_2 k}| \leq A_1$ ist, u. s. w. Es ist demnach

$$\begin{aligned} |\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n| &\leq |\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_{k_1} b_{k_1}| + |\lambda_{k_1+1} b_{k_1+1} + \dots + \lambda_{k_2} b_{k_2}| \\ &\quad + \dots + |\lambda_{k_{i_0}+1} b_{k_{i_0}+1} + \dots + \lambda_n b_n| \leq M\delta + \varepsilon_1(A_1 + B\delta) + \dots \\ &\quad + \varepsilon_{i_0}(A_{i_0} + B A_{i_0-1}) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^{i_0+1}} < \varepsilon, \text{ w. z. b. w.} \end{aligned}$$

(Reçu par la Rédaction le 15. 9. 1938).

**Reconnaissance de priorité relative à ma Note
„Une remarque sur les polynomes de M. S. Bernstein“¹⁾**

par

M. KAC (Lwów).

M. T. POPOVICIU avait la bonté de me communiquer que les résultats de ma Note se trouvent exposés sous une forme plus générale dans son travail „Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur“ (Mathematica 10 (1934) p. 49—54, en particulier p. 52—53).

En effet, en conservant les notations de ma Note, M. POPOVICIU a démontré que

$$|F(t) - B_n(t)| \leq \frac{3}{2} \omega \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right),$$

où $\omega(\delta)$ désigne le module d'oscillation de la fonction $F(t)$, ce qui contient mon résultat particulier pour le cas $\omega(\delta) = M\delta^a$.

Or il est facile de voir que ma méthode permet d'obtenir aussi le résultat de M. POPOVICIU.

En effet,

$$\begin{aligned} |F(t) - B_n(t)| &< \int_0^1 \left| F\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varrho_k^{(t)}(x)\right) - F(t) \right| dx \\ &\leq \int_0^1 \omega \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varrho_k^{(t)}(x) \right| \right) dx \leq \left(1 + \frac{1}{n\delta} \int_0^1 \sum_{k=1}^n \varrho_k^{(t)}(x) dx \right) \omega(\delta) \\ &\leq \left(1 + \frac{t^{1/2}(1-t)^{1/2}}{\delta\sqrt{n}} \right) \omega(\delta) \leq \frac{3}{2} \omega \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right). \end{aligned}$$

¹⁾ Studia Math. 7 (1938) p. 49—51.

(Reçu par la Rédaction le 10. 11. 1938).

