

STUDIA MATHEMATICA

REDAKTOROWIE

STEFAN BANACH

HUGO STEINHAUS

TOM VI.

LWÓW 1936

TREŚĆ TOMU VI.

	Str.
J. Marcinkiewicz: Sur l'interpolation (I)	1
F. Hausdorff: Über zwei Sätze von G. Fichtenholz und L. Kantorovitch	18
W. Orlicz: Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (V)	20
J. Marcinkiewicz: Sur la convergence des séries orthogonales	39
M. Kac: Sur les fonctions indépendantes (I) (Propriétés générales)	46
M. Kac et H. Steinhaus: Sur les fonctions indépendantes (II) (La loi exponentielle; la divergence de séries)	59
J. Marcinkiewicz: Sur l'interpolation (II)	67
Z. Zalcwasser: Sur la sommabilité des séries de Fourier	82
M. Kac et H. Steinhaus: Sur les fonctions indépendantes (III) (Le mouvement brownien; la loi de Maxwell)	89
W. Orlicz: Einige Gegenbeispiele zur Konvergenztheorie der allgemeinen Orthogonalentwicklungen	98
M. Eidelheit: Zur Theorie der konvexen Mengen in linearen normierten Räumen	104
S. Kaczmarz: Notes on orthogonal series III.	112
M. Eidelheit: Über lineare Gleichungen in separablen Räumen	117
M. Eidelheit: Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen	139
W. Orlicz: Über k -fach monotone Folgen	149
H. Auerbach: Zum Helmholtzschen Raumproblem	160
M. Krzyżański und J. Schauder: Quasilineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus. Gemischte Randwertaufgaben	162
J. Schauder: Gemischte Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus	190
F. J. Murray: Relations between certain problems of Banach	199

Sur l'interpolation (I)

par

J. MARCINKIEWICZ (Wilno).

Soit donnée une fonction $f(x)$ continue et de période 2π . D'après les théorèmes classiques, quel que soit n naturel on peut former un polynôme trigonométrique d'ordre n au plus, coïncidant avec $f(x)$ en $(2n+1)$ points différents de l'intervalle $(0, 2\pi)$.

On sait que ce polynôme est unique¹⁾. Son expression analytique, en général assez compliquée, devient bien simple si l'on prend pour la base d'interpolation les $2n+1$ points

$$0.1 \quad x_i = i \cdot \frac{2\pi}{2n+1} \quad (i=0, 1, \dots, 2n),$$

c'est-à-dire dans le cas où l'on définit le polynôme cherché $U_n(f, x)$ par les $2n+1$ égalités

$$0.2 \quad U_n(f, x_i) = f(x_i), \quad (i=0, 1, \dots, 2n).$$

En effet, soit

$$0.3 \quad \varphi_n(t) = i \cdot \frac{2\pi}{2n+1}$$

pour

$$i \cdot \frac{2\pi}{2n+1} \leq t < (i+1) \frac{2\pi}{2n+1} \quad (i=0, 1, 2, \dots, 2n);$$

alors²⁾

$$0.4 \quad U_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) d\varphi_n(t),$$

$$\text{où} \quad D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

¹⁾ Voir p. ex. Jackson [1], p. 109 sqq.

²⁾ Jackson [1], p. 116; voir aussi Marcinkiewicz [1].

Si l'on pose

$$0.5 \quad U_n(f, x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{i=1}^n (a_i^{(n)} \cos ix + b_i^{(n)} \sin ix),$$

les coefficients a et b se trouvent définis par les égalités³⁾

$$0.6 \quad \begin{aligned} a_i^{(n)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos it \, d\varphi_n(t), \\ b_i^{(n)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin it \, d\varphi_n(t). \end{aligned}$$

On remarque une grande analogie formelle entre l'expression (0.4) et la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de la fonction f :

$$0.7 \quad S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) \, dt.$$

En partant de cette remarque j'essaie de développer la théorie des polynômes $U_n(f, x)$ parallèlement à celle des séries de Fourier.

Dans cette note je m'occupe seulement des fonctions continues. En particulier, les paragraphes 1 et 2 contiennent les théorèmes négatifs sur la sommabilité forte et ordinaire de la suite $U_n(f, x)$, les paragraphes 3, 4, 5 les théorèmes positifs relatifs à la convergence, enfin au paragraphe 6 je donne la résolution positive du problème de la convergence „en moyenne“.

Le dernier paragraphe est consacré à l'énoncé de quelques questions restant ouvertes.

§ 1.

Théorème 1. *On peut définir une fonction $f(x)$ continue et de période 2π de sorte que l'on ait pour $x \neq 0, 2\pi$*

$$1.1 \quad \sum_{n=1}^N |U_n(f, x) - f(x)| \neq O(N).$$

³⁾ Jackson [1], p. 115.

La démonstration⁴⁾ résulte immédiatement du

Lemme⁵⁾. Pour chaque $\nu > \nu_0$ il existe une fonction $f_\nu(x)$ vérifiant les conditions suivantes :

- 1.2 $0 \leq f_\nu(x) \leq 1$;
- 1.3 la suite $U_n(f_\nu)$ converge uniformément quand $n \rightarrow \infty$;
- 1.4 pour chaque $x \in \Delta_\nu = (0, \log^{-1/2} \nu) + (\pi - \log^{-1/2} \nu, \pi + \log^{-1/2} \nu) + (2\pi - \log^{-1/2} \nu, 2\pi)$ et pour $x = \pi$ il y a un entier $n(x) < n_\nu$ pour lequel

$$\sum_{i=1}^{n(x)} |U_i(f_\nu, x)| > A n(x) \log^{-1/2} \nu,$$

où A ne dépend que de ν_0 .

Désignons pour chaque p impair par $R_p(x)$ et $R'_p(x)$ respectivement le système des points $x_i = 2\pi i/p$ contenus dans le segment $(x, 2\pi)$ et le système des points $x'_i = 4\pi i/p$ contenus dans le même segment. Soit $n_1 = (2\nu + 1)$, $n_i = n_{i-1}^4$, ($i = 2, 3, \dots, \nu$). Nous allons définir la fonction $f(x) = f_\nu(x)$ dans les points des systèmes $R_p(0)$ pour $n_i < p \leq (4n_i + 1)$ ($i = 1, 2, \dots, \nu$) et p impair.

Posons

- 1.5 $f(x) = 1$ pour $x \in R'_p(\frac{2\pi}{\nu})$, p impair et $n_1 < p \leq (4n_1 + 1)$,
 $f(x) = 0$ pour les autres $x \in R_p(0)$.

Cette définition est univoque. En effet, l'égalité $x = i/p = j/q$ pour p et q impairs entraîne que i et j sont en même temps pairs ou impairs; cela veut dire que le point $2\pi x$ ou bien appartient à $R'_p(2\pi/\nu)$ et à $R'_q(2\pi/\nu)$, ou bien n'appartient ni à $R'_p(2\pi/\nu)$ ni à $R'_q(2\pi/\nu)$.

Supposons que l'on ait défini déjà $f(x)$ aux points $x \in R_p(0)$ pour $n_i < p \leq (4n_i + 1)$, ($i = 1, 2, \dots, k-1$) et soit $n_k < p \leq (4n_k + 1)$, p étant, comme toujours, impair. Posons

- 1.6 $f(x) = 1$ pour $x \in R'_p(\frac{2\pi k}{\nu})$,
 $f(x) = 0$ pour les points $x \in R_p(0)$ en lesquels la fonc-

⁴⁾ La démonstration est empruntée à M. Kolmogoroff; voir Kolmogoroff [1]. Voir aussi Marcinkiewicz [1].

⁵⁾ Le symbole $x \in E$ signifie que x appartient à l'ensemble E ; $x \notin E$ signifie que x n'appartient pas à E .

tion f reste encore indéfinie⁶⁾. On prouve facilement que cette définition est univoque.

La fonction $f(x)$ étant ainsi définie aux points $x \in R_p(0)$, $n_i < p \leq (4n_i + 1)$, ($i = 1, 2, \dots, \nu$), nous l'admettons linéaire dans les segments contigus à ces points.

La fonction ainsi construite jouit évidemment des propriétés (1.2) et (1.3), et il nous reste à prouver (1.4).

Soit donc $x \in A_i$, $(i-1)\frac{2\pi}{\nu} < x \leq i\frac{2\pi}{\nu}$, $n_i < p \leq (4n_i + 1)$ et $U_n(x) = U_n(f, x)$.

$$\begin{aligned} 1.7) \quad |U_{\frac{p-1}{2}}(x)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_{\frac{p-1}{2}}(x-t) dq_{\frac{p-1}{2}}(t) \right| \\ &= \left| \sin \frac{px}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\cos \frac{p}{2} t}{2 \sin \frac{x-t}{2}} dq_{\frac{p-1}{2}}(t) \right| \\ &\geq \left| \sin \frac{px}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{\frac{2\pi i}{\nu}}^{\frac{2\pi(i+1)}{\nu}} f(t) D_{\frac{p-1}{2}} dq_{\frac{p-1}{2}} \right| = A_p(x) + B_p(x). \end{aligned}$$

Il est facile d'évaluer $A_p(x)$. On a

$$1.8 \quad A_p(x) \geq \left| \sin \frac{px}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{\frac{2i\pi}{\nu}}^{\frac{2(i+1)\pi}{\nu}} \frac{f(t)}{t-x} dq_{\frac{p-1}{2}}(t) \right| \geq \bar{A} \left| \sin \frac{p}{2} x \right| \log \nu,$$

où $\bar{A}$ désigne une constante qui ne dépend que de ν_0 . D'autre part il y a au plus $(4n_{i-1} + 1)^2$ points $t \in R_p(0)$ tels que $t \leq 2\pi i/\nu$ et $f(t) \neq 0$, et comme, à l'exception des deux les plus proches, la distance de chaque de ces points au point x surpasse

$$\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{4n_{i-1} + 1} \right)^2, \text{ on obtient}$$

⁶⁾ Certains $x \in R_p(0)$ peuvent appartenir à plusieurs systèmes $R_q(0)$ avec $q < p$.

⁷⁾ Cette formule subsiste seulement pour $x \in R_p(0)$, mais la formule 1.8 est juste aussi pour $x \in R_p(0)$, car on a alors $\sin \frac{p}{2} x = 0$.

$$|B_p(x)| \leq (4n_{i-1} + 1)^2 \cdot \sin^{-1} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{4n_{i-1} + 1} \right)^2 \cdot \frac{\pi}{n_i} + 2 \cdot 2\pi \leq \bar{B},$$

où $\bar{B}$ désigne une constante absolue.

Il s'ensuit

$$1.9 \quad |U_{\frac{p-1}{2}}(x)| \geq \bar{A} \left| \sin \frac{px}{2} \right| \log \nu - \bar{B}$$

et

$$1.10 \quad \sum_{\substack{p=1 \\ \frac{p-1}{2}=1}}^{2n_i} |U_{\frac{p-1}{2}}(x)| \geq \bar{A} \sum_{\substack{p=n_i+1 \\ p \text{ impair}}}^{4n_i+1} \left| \sin \frac{px}{2} \right| \log \nu - 2n_i \bar{B}.$$

On prouve facilement que l'hypothèse (pour $x \in \mathcal{A}_i$)

$$1.11 \quad \left| \sin \frac{px}{2} \right| < \frac{1}{8} \log^{-1/2} \nu$$

entraîne

$$1.12 \quad \left| \sin \left(\frac{p}{2} + 1 \right) x \right| \geq \frac{1}{8} \log^{-1/2} \nu.$$

En portant cette évaluation dans (1.10) on trouve

$$1.13 \quad \sum_{p=1}^{2n_i} |U_p(x)| > A' \log^{1/2} \nu \cdot 2n_i - \bar{B} \cdot 2n_i.$$

Pour ν assez grand l'inégalité (1.13) équivaut à

$$1.14 \quad \sum_{p=1}^{2n_i} |U_p(x)| \geq A \log^{1/2} \nu \cdot 2n_i.$$

On prouve aussi une inégalité analogue à (1.14) pour $x = \pi$, donc l'inégalité (1.4) se trouve entièrement établie.

§ 2.

Dans ce paragraphe nous prouverons le

Théorème 2. *Il existe un point $x = x_0$ et une fonction continue $f(x)$ telle que*

$$2.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n U_r(f, x_0) \right| = \infty.$$

Nous nous bornerons à démontrer le

Lemme. *Pour tout intervalle (α, β) on peut définir une fonction continue $f(x)$, $|f| < 1$, satisfaisant pour une valeur particulière $x = x_0 \in (\alpha, \beta)$ et un certain indice n à l'inégalité*

$$2.2 \quad \left| \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n U_r(f, x_0) \right| > M,$$

M désignant un nombre quelconque donné d'avance.

Choisissons un nombre premier ν assez grand pour qu'un des segments $(2i \cdot 2\pi/\nu, (2i+1)2\pi/\nu)$, soit (α', β') , se trouve dans (α, β) . Soit n un entier remplissant l'inégalité $\log n > M\nu$. Nous allons définir la fonction f aux points de $R_p(\alpha')$ pour p impair $\leq 2n+1$. Si le nombre impair p n'est pas divisible par ν , nous poserons tout simplement $f(x) = 0$ pour $x \in R_p(\alpha')$. Nous poserons aussi $f(x) = 0$ dans tout point $x \in R_p(\alpha')$ n'appartenant pas à $R_p'(\alpha')$.

Si p est divisible par ν et $x \in R_p'(\alpha')$, alors

$$x = \frac{2i \cdot \nu^{i'}}{p' \cdot \nu^j} 2\pi$$

où $p' \nu^j = p$, et les entiers i, p' sont premiers relativement à ν . Nous poserons $f(x) = 1$ si $\alpha < \beta$ et $f(x) = 0$ dans le cas contraire. Soit encore $f(x) = 0$ dans le segment $(0, \alpha')$ et linéaire dans les segments contigus aux points de $R_p(\alpha')$. On prouve facilement que cette définition de la fonction $f(x)$ est univoque.

Remarquons que pour p premier relativement à ν , et ne surpassant pas $2n+1$, on a identiquement

$$2.3 \quad U_{\frac{p-1}{2}}(x) \equiv 0.$$

Considérons le point $x = x_0 = \alpha' + \frac{1}{2n+1}$ et soit $p \leq 2n+1$ divisible par ν ; alors

$$2.4 \quad U_{\frac{p-1}{2}}(f, x) = \sin \frac{p}{2} \left(2i_0 \cdot \frac{2\pi}{\nu} + \frac{1}{2n+1} \right) \int_{\alpha'}^{2\pi} f(t) \frac{d\varphi_{\frac{p-1}{2}}(t)}{2 \sin \frac{x-t}{2}} \\ = \sin \left(\frac{p}{2} \frac{1}{2n+1} \right) \cdot \int_{\alpha'}^{2\pi} f(t) \frac{d\varphi_{\frac{p-1}{2}}(t)}{2 \sin \frac{x-t}{2}} \quad \text{avec } \alpha' = 2i_0 \frac{2\pi}{\nu}.$$

Il en résulte que pour $1 \leq p \leq n$ les $U_p(x)$ sont de même signe. En vertu de la formule (2.4) on trouve pour p divisible par ν

$$2.5 \quad \left| U_{\frac{p-1}{2}}(x) \right| \geq \bar{A} \cdot \frac{p}{n} \cdot \log p,$$

donc

$$2.6 \quad \left| \sum_{p=1}^n U_p(x) \right| > \frac{1}{\nu} A \cdot n \cdot \log n > A \cdot M \cdot n,$$

où $\bar{A}$ et A désignent deux constantes absolues. M étant arbitraire donné d'avance, la formule (2.6) équivaut à (2.2).

§ 3.

Théorème 3. *Si la série de Fourier de la fonction $f(x)$ converge absolument, alors la suite $U_n(f, x)$ converge uniformément.*

Démonstration. Soit

$$3.1 \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} (a_r \cos \nu x + b_r \sin \nu x),$$

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^n (a_r \cos \nu x + b_r \sin \nu x),$$

$$U_n(f, x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{r=1}^n (a_r^{(n)} \cos \nu x + b_r^{(n)} \sin \nu x).$$

D'après les formules (0.6)³⁾ on a

$$3.2 \quad a_r^{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos \nu t d\varphi_n(t) = a_r + \sum_{t=1}^{\infty} (a_{t(2n+1)+r} + a_{t(2n+1)-r}),$$

$$b_r^{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin \nu t d\varphi_n(t) = b_r + \sum_{t=1}^{\infty} (b_{t(2n+1)+r} - b_{t(2n+1)-r}).$$

Les égalités (3.1) et (3.2) donnent

$$3.3 \quad |U_n(f, x) - S_n(x)| \leq \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{r=0}^n |a_{t(2n+1) \pm r}| + |b_{t(2n+1) \pm r}|$$

$$= \left(\sum_{r=n+1}^{\infty} |a_r| + |b_r| \right) \rightarrow 0.$$

On prouve par la même méthode le

Théorème 4. *Si la fonction $f(x)$ continue et impaire admet les coefficients de Fourier décroissants et d'ordre $o(n^{-1})$ alors la suite $\{U_n(f, x)\}$ converge uniformément.*

³⁾ Ces formules sont connues; voir p. ex. Jackson [1], Tonelli [1], Marcinkiewicz [1].

Démonstration. Remarquons que la série de Fourier d'une fonction remplissant les conditions du théorème converge uniformément. Il en résulte qu'il suffit de prouver la convergence uniforme vers zéro de la suite $\{U_n(f, x) - S_n(f, x)\}$.

Or on a, d'après les formules (3.1) et (3.2)

$$\begin{aligned} 3.4 \quad |U_n(f, x) - S_n(f, x)| &\leq \sum_{r=0}^n \sum_{t=1}^{\infty} |b_{t(2n+1)+r} - b_{t(2n+1)-r}| \\ &\leq \sum_{r=n+1}^{2n+1} b_r = o(1). \end{aligned}$$

§ 4.

Théorème 5⁹). Soit

$$\begin{aligned} 4.1 \quad U_n(f, x) &= \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{v=1}^n (a_v^{(n)} \cos v x + b_v^{(n)} \sin v x), \\ U_{n,i}(x) &= \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{v=1}^i (a_v^{(n)} \cos v x + b_v^{(n)} \sin v x) \quad (i=0, 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

La fonction $f(x)$ étant supposée continue, on a uniformément

$$4.2 \quad \sum_{i=0}^n |U_{n,i}(x) - f(x)| = o(n).$$

Démonstration. Nous allons prouver la formule (4.2) en tout point x , en laissant au lecteur la démonstration qu'elle subsiste uniformément. Pour simplifier l'écriture, posons $f(x) = 0$.

On a

$$\begin{aligned} 4.3 \quad U_{n,i}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin(i + 1/2)(x-t)}{2 \sin \frac{x-t}{2}} dq_n(t) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos \frac{x-t}{2} \frac{\sin i(x-t)}{2 \sin \frac{x-t}{2}} dq_n(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos i(x-t) dq_n = A_{n,i} + B_{n,i}. \end{aligned}$$

Les formules (0.6), (4.1) et (4.3) donnent

$$4.4 \quad |B_{n,i}| \leq |a_i^{(n)}| + |b_i^{(n)}|.$$

⁹) Le théorème est modelé sur un théorème analogue de la théorie des séries de Fourier; voir p. ex. Zygmund [1].

Désignons par $h(t)$ la fonction égale à $\cos \frac{x-t}{2} \cdot f(t)$ dans l'intervalle $(x - 1/n, x + 1/n)$ et s'annulant autre part. Posons encore $g(t) = (f(t) \cos \frac{x-t}{2} - h(t)) / 2 \sin \frac{x-t}{2}$. En portant les fonctions ainsi définies dans (4.3) on trouve

$$4.5 \quad A_{n,i}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin i(x-t) d\varphi_n + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(t) \frac{\sin i(x-t)}{2 \sin \frac{x-t}{2}} d\varphi_n(t) = A'_{n,i} + A''_{n,i}.$$

Évidemment

$$4.6 \quad |A''_{n,i}| \leq \frac{2}{\pi} \max |f| \cdot \frac{\pi i}{2} \cdot \frac{2\pi}{2n+1} \leq \pi \max |f|.$$

D'autre part, en désignant par $\alpha_i^{(n)}$ et $\beta_i^{(n)}$ les coefficients du polynôme $U_n(g, x)$, on a

$$|A'_{n,i}| \leq |\alpha_i^{(n)}| + |\beta_i^{(n)}|.$$

D'après les formules (4.3), (4.4), (4.5) et (4.6) il vient

$$4.7 \quad \sum_{i=0}^n |U_{n,i}(x)| \leq \left| \frac{\alpha_0^{(n)}}{2} \right| + \sum_{i=1}^n |\alpha_i^{(n)}| + |\beta_i^{(n)}| + \left| \frac{\alpha_0^{(n)}}{2} \right| + \sum_{i=1}^n |\alpha_i^{(n)}| + |\beta_i^{(n)}| + \pi(n+1) \max |f|.$$

Pour chaque fonction $\psi(x)^{10)}$ on a d'une façon évidente

$$4.8 \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi^2(x) d\varphi_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U_n^2(\psi) dx = \frac{\gamma_0^2}{2} + \sum_{i=1}^n (\gamma_i^2 + \delta_i^2),$$

où γ_i et δ_i désignent les coefficients du polynôme $U_n(\psi)$. En appliquant la formule (4.8) il est facile de donner une évaluation de la somme

$$\left| \frac{\gamma_0}{2} \right| + \sum_{i=1}^n |\gamma_i| + |\delta_i|.$$

¹⁰⁾ C'est la relation de Parseval pour les polynômes d'interpolation.

En effet, d'après l'inégalité de Schwarz on a

$$4.9 \quad \left| \frac{\gamma_0}{2} \right| + \sum_{i=1}^n |\gamma_i| + |\delta_i| \leq \left(\frac{\gamma_0^2}{2} + \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 + \delta_i^2 \right)^{1/2} \sqrt{n+1} \\ = \sqrt{n+1} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi^2(x) d\varphi_n(x) \right)^{1/2}.$$

En portant cette évaluation dans (4.7) on trouve

$$4.10 \quad \sum_{i=0}^n |U_{n,i}(x)| \leq \sqrt{n+1} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g^2(t) d\varphi_n \right)^{1/2} \\ + \sqrt{n+1} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) d\varphi_n \right)^{1/2} + \pi(n+1) \max |f| \\ \leq \sqrt{n+1} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g^2(t) d\varphi_n \right)^{1/2} + 2\pi(n+1) \max |f|$$

et en vertu de

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g^2(t) d\varphi_n \leq \max f^2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{2n+1} \cdot 4n^2 \sum \frac{1}{i^2} \\ \leq 32n \max f^2$$

on a

$$4.11 \quad \sum_{i=0}^n |U_{n,i}(x)| \leq 6(n+1) \max |f| \\ + 2\pi \max |f| (n+1) \leq 13(n+1) \max |f|.$$

Il suffit de poser $f = f_1 + f_2$, où $\max |f_1| < \varepsilon/13$ et la fonction f_2 est un polynôme, pour en tirer

$$4.12 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n |U_{n,i}(x)| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui équivaut à (4.2).

On déduit du théorème démontré le

Théorème 6. *La suite* ¹¹⁾

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n U_{n,i}(f, x)$$

converge uniformément vers $f(x)$.

¹¹⁾ Les polynômes $\sigma_n(x)$ ont été définis dans Marcinkiewicz [1].

On peut aussi établir cette proposition sans faire appel au théorème 5, même d'une façon très simple, si l'on remarque que

$$4.13 \quad \sigma_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin^2(n+1) \frac{x-t}{2}}{2(n+1) \sin^2 \frac{x-t}{2}} d\varphi_n(t).$$

§ 5.

Dans une note¹²⁾ j'ai construit une fonction $f(x)$ continue dont la suite $\{U_n(f)\}$ diverge presque partout tout en restant uniformément bornée par rapport à x et n .

Les limites d'indétermination de la suite $\{U_n(f, x)\}$ étant supposées finies dans un ensemble de mesure positive, il s'impose le problème quelle est la relation entre la fonction f et ces limites d'indétermination. On a à cet égard le

Théorème 7¹³⁾. Si pour chaque $x \in E$ ($\text{mes } E > 0$)

$$5.1 \quad S^*(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} U_n(x) < \infty,$$

alors on a presque partout dans E

$$5.2 \quad S_*(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} U_n(x) > -\infty \text{ et}$$

$$5.3 \quad S^*(x) + S_*(x) = 2f(x).$$

La démonstration de ce théorème ne diffère pas de celle de la proposition analogue dans la théorie des séries de Fourier, et l'on n'a qu'appliquer le théorème 5 au lieu des résultats concernant la sommabilité $(C, 1)$. C'est uniquement pour la commodité des lecteurs que je vais reproduire les calculs.

Soient $\mathcal{G}$ un sous-ensemble positif de E et $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, une suite de nombres positifs définis de manière à satisfaire

$$5.4 \quad U_n(f, x) < S^*(x) + \varepsilon_n \text{ pour } x \in \mathcal{G}.$$

Admettons que la fonction $S^*(x)$ est continue dans $\mathcal{G}$. Le point $x \in \mathcal{G}$ étant un point de densité de l'ensemble $\mathcal{G}$, on peut choisir une suite $\{\lambda_n\}$ telle que $n\lambda_n \rightarrow \pi$ et $x \pm \lambda_n \in \mathcal{G}$ pour chaque n . Supposons enfin que $f(x) = 0$; alors

¹²⁾ Marcinkiewicz [1]; voir aussi Grünwald [1].

¹³⁾ Pour les problèmes analogues dans la théorie des séries de Fourier voir Kuttner [1], Marcinkiewicz et Zygmund [1].

$$\begin{aligned}
 5.5 \quad & \frac{S^*(x + \lambda_n) + S^*(x - \lambda_n)}{2} + \varepsilon_n \geq \frac{1}{2} \{U_n(x + \lambda_n) + U_n(x - \lambda_n)\} \\
 & = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{v=1}^n (a_v^{(n)} \cos vx + b_v^{(n)} \sin vx) \cos v\lambda_n \\
 & = 2 \sin \frac{\lambda_n}{2} \sum_{i=0}^{n-1} U_{n,i}(x) \sin(\nu + 1/2) \lambda_n + U_n(x) \cos n\lambda_n.
 \end{aligned}$$

D'après le théorème 5,

$$5.6 \quad \left| 2 \sin \frac{\lambda_n}{2} \right| \cdot \sum_{i=0}^n |U_{n,i}(x)| \rightarrow 0,$$

donc la formule (5.5) donne

$$5.7 \quad S^*(x) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} U_n(x) \cos n\lambda_n = -S_*(x)$$

et

$$5.8 \quad S^*(x) + S_*(x) \geq 0.$$

En supprimant l'hypothèse $f(x) = 0$, on obtient

$$5.9 \quad S^*(x) + S_*(x) \geq 2f(x) \text{ et par symétrie } S^*(x) + S_*(x) \leq 2f(x).$$

La formule (5.9) subsiste presque partout dans $\mathcal{E}$, donc aussi presque partout dans E . Il en résulte (5.3).

On prouve de même le

Théorème 8. *Si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un n_ε tel que $U_n(x) > f(x) - \varepsilon$ pour chaque $n > n_\varepsilon$ et $0 \leq x \leq 2\pi$, alors la suite $\{U_n(f)\}$ converge uniformément.*

§ 6.

Dans ce paragraphe nous allons démontrer quelques inégalités auxiliaires.

Théorème 9. *Si S_n désigne un polynôme trigonométrique d'ordre n au plus et du reste quelconque et si $1 \leq p < \infty$, alors*

$$6.1 \quad \left(\int_0^{2\pi} |S_n(x)|^p d\varphi_n(x) \right)^{1/p} \leq C_p \left(\int_0^{2\pi} |S_n(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

où C_p ne dépend que de p .

Démonstration.

$$6.2 \quad \int_0^{2\pi} |S_n(x)|^p d\varphi_n(x) = \int_0^{2\pi} |S_n(x)|^p d(\varphi_n - x) + \int_0^{2\pi} |S_n(x)|^p dx.$$

En intégrant par parties le premier terme du second membre on obtient

$$\begin{aligned} 6.3 \quad \left| \int_0^{2\pi} |S_n(x)|^p d(\varphi_n - x) \right| &\leq p \int_0^{2\pi} |\varphi_n - x| \cdot \left| \frac{d}{dx} S_n(x) \right| \cdot |S_n(x)|^{p-1} dx \\ &\leq \pi p/n \int_0^{2\pi} \left| \frac{d}{dx} S_n(x) \right| \cdot |S_n(x)|^{p-1} dx \\ &\leq \pi p/n \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{d}{dx} S_n(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_0^{2\pi} |S_n|^p dx \right)^{(p-1)/p} \end{aligned}$$

Or, d'après un théorème de M. ZYGMUND ¹⁴⁾

$$\left(\int_0^{2\pi} |S'_n(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq n \left(\int_0^{2\pi} |S_n(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

la formule (6.2) fournit donc

$$6.4 \quad \left| \int_0^{2\pi} |S_n|^p d(\varphi_n - x) \right| \leq \pi p \int_0^{2\pi} |S_n|^p dx.$$

Les formules (6.3) et (6.4) prouvent (6.1) avec $C_p^p \leq p\pi + 1$.

Il est curieux que l'on a aussi l'inégalité réciproque, à savoir on a le

Théorème 10. Si $S_n(x)$ désigne un polynôme trigonométrique d'ordre n et $1 < p < \infty$, alors

$$6.5 \quad \left(\int_0^{2\pi} |S_n(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq C_p' \left(\int_0^{2\pi} |S_n(x)|^p d\varphi_n(x) \right)^{1/p},$$

où C_p' est une fonction de p .

Démonstration. Remarquons que

$$\left(\int_a^b |f|^p dt \right)^{1/p} = \sup \int_a^b f(t) g(t) dt,$$

¹⁴⁾ Zygmund [2].

où la borne supérieure est prise pour toutes les fonctions $g(t)$ telles que $\int_0^{2\pi} |g(t)|^q dt = 1$ et q est défini par l'égalité $1/p + 1/q = 1$.

Il en résulte qu'il suffit de prouver l'inégalité

$$6.6 \quad \int_0^{2\pi} S_n \cdot g(t) dt \leq C'_p \left(\int_0^{2\pi} |S_n|^p d\varphi_n \right)^{1/p}$$

pour chaque fonction g telle que $\int_0^{2\pi} |g(t)|^q dt = 1$.

En désignant par $S_n(g, x)$ la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de la fonction g et en tenant compte du fait que $S_n(t)S_n(g, t)$ est un polynôme d'ordre $\leq 2n$, on a

$$6.7 \quad \begin{aligned} \int_0^{2\pi} S_n(t)g(t)dt &= \int_0^{2\pi} S_n(t) \cdot S_n(g, t) dt = \int_0^{2\pi} S_n(t) S_n(g, t) d\varphi_n(t) \\ &\leq \left(\int_0^{2\pi} |S_n(t)|^p d\varphi_n \right)^{1/p} \cdot \left(\int_0^{2\pi} |S_n(g, t)|^q d\varphi_n \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

D'après le théorème 9 on a

$$6.8 \quad \left(\int_0^{2\pi} |S_n(g, t)|^q d\varphi_n \right)^{1/q} \leq C_q \left(\int_0^{2\pi} |S_n(g, t)|^q dt \right)^{1/q}.$$

En vertu d'un théorème classique de M. M. RIESZ¹⁵⁾, $S_n(g, t)$ étant la somme partielle de la série de Fourier de la fonction g , et $g \in L^q$, on a

$$6.9 \quad \left(\int_0^{2\pi} |S_n(g, t)|^q dt \right)^{1/q} \leq A_q \left(\int_0^{2\pi} |g(t)|^q dt \right)^{1/q} = A_q,$$

où A_q dépend seulement de q .

En appliquant l'inégalité (6.9) à (6.8) et (6.7) on trouve

$$6.10 \quad \int_0^{2\pi} S_n(t)g(t)dt \leq A_q C_p \left(\int_0^{2\pi} |S_n(t)|^p d\varphi_n \right)^{1/p}.$$

On en déduit la formule (6.5) avec $C'_p \leq A_q \cdot C_p$.

¹⁵⁾ M. Riesz [1].

En appliquant l'inégalité (6.1) nous prouverons enfin le
Théorème 11¹⁶⁾. Si $f(x)$ désigne une fonction continue,
alors on a pour $1 \leq p < \infty$

$$6.11 \quad \int_0^{2\pi} |U_n(f) - f(x)|^p dx \rightarrow 0.$$

Démonstration. Évaluons l'expression

$$6.12 \quad \left(\int_0^{2\pi} |U_n(f)|^p dx \right)^{1/p};$$

d'après la remarque faite au cours de la démonstration du théorème 10, il suffit d'évaluer l'expression

$$6.13 \quad \int_0^{2\pi} U_n(f) g(t) dt, \text{ où } \int_0^{2\pi} |g(t)|^q dt = 1 \text{ et } 1/p + 1/q = 1.$$

D'une façon évidente on a, pour $1 < p < \infty$,

$$\begin{aligned} 6.14 \quad \int_0^{2\pi} U_n(f) g(t) dt &= \int_0^{2\pi} g(t) \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) D_n(x-t) d\varphi_n(x) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(x) \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) D_n(x-t) dt \right) d\varphi_n(x) \\ &\leq 2\pi \max |f| \left(\int_0^{2\pi} d\varphi_n(x) |S_n(g, x)|^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité (6.1) on en tire

$$6.15 \quad \int_0^{2\pi} U_n(f) g(t) dt \leq 2\pi C_q \left(\int_0^{2\pi} |S_n(g, x)|^q dx \right)^{1/q} \max |f|.$$

Supposons que $p \geq 2$ et évaluons le second membre du (6.15) à l'aide du théorème de M. M. RIESZ; alors

$$6.16 \quad \int_0^{2\pi} U_n(f) g(t) dt \leq 2\pi C_q A_q \left(\int_0^{2\pi} |g|^q dt \right)^{1/q} = 2\pi C_p A_q \max |f|.$$

¹⁶⁾ Ce théorème est un cas particulier de l'inégalité (6.5), mais nous préférons de donner une démonstration sans faire appel au théorème 10.

Il s'ensuit pour $p \geq 2$

$$6.17 \quad \left(\int_0^{2\pi} |U_n(f)|^p dt \right)^{1/p} \leq B_p \max |f|,$$

avec $B_p \leq 2\pi C_q A_q$; comme pour $1 \leq p < 2$

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |U_n(f)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |U_n(f)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \max |f|,$$

on voit que la formule (6.17) subsiste pour $1 \leq p < \infty$.

Pour en tirer notre théorème, on n'a qu'à poser $f = f_1 + f_2$, où $\max |f_1| < \varepsilon$ et f_2 désigne un polynôme.

§ 7.

Nous allons poser quelques problèmes à résoudre:

1. *Peut-on construire une fonction $f(x)$ continue avec la suite $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i(f, x) \right\}$ divergente presque partout?*

2. *Quelle est le module de continuité d'une fonction $f(x)$ vérifiant la thèse du théorème 1, et quelle est la meilleure évaluation, valable presque partout, de l'expression $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |U_i(f, x) - f(x)|$ pour chaque fonction continue¹⁷⁾?*

¹⁷⁾ Remarquons que pour la suite $\{U_n(x)\}$ on connaît les deux théorèmes suivants: 1° L'évaluation $U_n(x) = o(\log n)$ est en général la meilleure presque partout. 2° Il existe une fonction $f(x)$ telle que $|f(x+t) - f(x)| \leq \frac{A}{\log \frac{1}{|t|}}$, où A désigne une constante, et dont la suite $\{U_n(f)\}$ diverge presque partout; voir Marcinkiewicz [1].

Bibliographie.

- D. JACKSON [1]. *The Theory of Approximation*, New York, 1930.
- A. KOLMOGOROFF [1]. Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout, *Fund. Math.* 4 (1923) p. 324—328.
- B. KUTTNER [1]. A theorem on trigonometric series, *Journ. Lond. Math. Soc.* 10 (1935) p. 131—140.
- L. TONELLI [1]. *Serie trigonometrica*, Bologna, 1928.
- G. GRÜNWARD [1]. Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome, *Acta Szeged* 7 (1935) p. 207—221.
- J. MARCINKIEWICZ [1]. Sur les polynomes d'interpolation (en polonais), *Wiadomości Matematyczne* 39 (1935) p. 85—125.
- M. RIESZ [1]. Sur les fonctions conjuguées, *Math. Zeitschr.* 27 (1927) p. 218—244.
- A. ZYGMUND et J. MARCINKIEWICZ [1]. On the differentiability of functions, *Fund. Math.* 26 (1936) p. 1—42.
- A. ZYGMUND [1]. *Trigonometrical series*, Warszawa, 1935.
- [2]. A remark on conjugate series, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), 34 (1932) p. 392—400.

(Reçu par la Rédaction le 5. 11. 1935).

Über zwei Sätze von G. Fichtenholz und L. Kantorovitch

von

F. HAUSDORFF (Bonn).

$f(x)$ sei eine Abbildung von A in A^* , d. h. jedem $x \in A$ ist ein $f(x) \in A^*$ zugeordnet. Beliebige viele solche Abbildungen mögen *wesentlich verschieden* heißen, wenn es zu endlich vielen verschiedenen $f_1, \dots, f_k$ unter ihnen immer mindestens eine Stelle x gibt, wo $f_1(x), \dots, f_k(x)$ paarweise verschieden sind.

Beliebig viele Teilmengen Z der Menge C mögen *unabhängig* heißen, wenn für endlich viele verschiedene $Z_1, \dots, Z_p, Z'_1, \dots, Z'_q$ unter ihnen immer

$$Z_1 \dots Z_p (C - Z'_1) \dots (C - Z'_q) \neq \emptyset.$$

Dann gelten die Sätze:

I. Ist A von der unendlichen Mächtigkeit m , so gibt es 2^m wesentlich verschiedene Abbildungen von A in A .

II. Eine Menge C der unendlichen Mächtigkeit m hat 2^m unabhängige Teilmengen.

In ihrer Arbeit: Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées (Stud. Math. 5 (1935), p. 69–98) haben die Herren G. FICHTENHOLZ und L. KANTOROVITCH den Satz I (Lemme III, p. 81 und Supplément, p. 94–98) sowie für $m = \aleph_0$ und $m = 2^{\aleph_0}$ den Satz II (p. 80 und Lemme IV, p. 82) bewiesen. Die Beweise sind aber ziemlich umständlich und lassen sich, wie die Verfasser selbst vermuten, sehr viel einfacher führen.

Beweis von I. M sei von der Mächtigkeit m und A die Menge der endlichen Mengen $x \subset M$; A ist von der Mächtigkeit $1 + m + m^2 + \dots = \aleph_0 m = m$. Durchläuft t die sämtlichen 2^m Teilmengen von M , so ist

$$f(x, t) = xt$$

(Durchschnitt von x und t) bei festem t eine Abbildung von A in A . Diese 2^m Abbildungen sind wesentlich verschieden. Denn sind $t_1, t_2, \dots, t_k$ paarweise verschieden, so wähle man aus jeder der Mengen $(t_i - t_j) + (t_j - t_i) \neq 0$ ($1 \leq i < j \leq k$) ein Element und bilde die Summe x dieser Elemente; dann ist $xt_i \neq xt_j$.

Beweis von II. Gemäß I nehmen wir 2^m wesentlich verschiedene Abbildungen $f(x, t)$ von A in A als gegeben an, wo der Parameter t eine Menge der Mächtigkeit 2^m durchläuft. Es sei B die Menge der endlichen Mengen $y \subset A$ und $C = (A, B)$ das kombinatorische Produkt von A und B , d. h. die Menge der geordneten Paare (x, y) mit $x \in A, y \in B$. Auch B und C haben die Mächtigkeit m . Jedem t ordnen wir die Menge $Z(t)$ der Paare (x, y) mit $f(x, t) \in y$ zu; $C - Z(t)$ ist die Menge der Paare (x, y) mit $f(x, t) \notin y$. Dann sind die 2^m Mengen $Z(t)$ unabhängig. Denn sind $t_1, \dots, t_p, t'_1, \dots, t'_q$ allesamt verschieden, so gibt es nach I ein x derart, daß die $p + q$ Bilder

$$x_i = f(x, t_i), \quad x'_j = f(x, t'_j)$$

für $i = 1, \dots, p$ und $j = 1, \dots, q$ allesamt verschieden sind. Ist dann $y = \{x_1, \dots, x_p\}$, so ist

$$f(x, t_i) \in y, \quad f(x, t'_j) \notin y,$$

also

$$(x, y) \in Z(t_i), \quad (x, y) \in C - Z(t'_j),$$

$$\prod_i Z(t_i) \cdot \prod_j [C - Z(t'_j)] \neq 0.$$

(Reçu par la Rédaction le 13. 11. 1935).

Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen¹⁾ (V)

von

W. ORLICZ (Lwów).

Es sei $\{\varphi_i(x)\}$ ein in $(0,1)$ orthogonales, normiertes Funktionensystem. Wir werden im Folgenden ein solches System kurz mit OS bezeichnen. Wir sagen, daß das OS $\{\varphi_i(x)\}$ *gleichmäßig beschränkt* ist, wenn die Ungleichung $|\varphi_n(x)| \leq K$ ($n=1, 2, 3, \dots$) für fast alle x stattfindet. In dieser Arbeit betrachten wir einige Eigenschaften der Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pm p_i \varphi_i(x),$$

wobei wir voraussetzen, daß diese Reihe für jede oder fast jede Vorzeichenverteilung (der Sinn des letzten Ausdruckes soll im Folgenden präzisiert werden) die Entwicklung einer Funktion eines gewissen Funktionenraumes ist. Die hier bewiesenen Sätze bilden eine Weiterführung früherer Untersuchungen des Verfassers²⁾; zu betonen ist, daß wir außer den früher untersuchten Räumen (L^α) , $\alpha \geq 1$, (L^∞) , (C) noch den Raum (V^*) der mit den Funktionen von beschränkter Variation äquivalenten Funktionen betrachten.

Manche auf Reihen obiger Gestalt bezügliche Fragen wurden im Spezialfall des trigonometrischen Systems und für fast alle Vorzeichenverteilungen von verschiedenen Verfassern behan-

¹⁾ Der Inhalt dieser Arbeit wurde in der Sitzung vom 26.5.1934 der Poln. Math. Gesellschaft (Abteilung Lwów) vorgetragen.

²⁾ Siehe: W. Orlicz, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (I), (II), *Studia Math.* 1 (1929) p. 1–39, p. 241–255; (III) *Bull. Ac. Pol.* (1932) p. 229–233. Diese Arbeiten zitieren wir im folgenden als Beiträge (I), (II), (III)

delt (LITTLEWOOD, PALEY, ZYGMUND, SALEM³⁾); der Satz 5 dieser Arbeit bildet eine Verallgemeinerung eines früher von LITTLEWOOD für das trigonometrische System bewiesenen Satzes.

§ 1.

In der Theorie der Orthogonalentwicklungen ist es üblich zwei Funktionen nur dann als verschieden zu betrachten, wenn sie nicht äquivalent sind, d. h. nicht für fast jedes x des Definitionsintervalls identisch sind. Da man also verschiedene äquivalente Funktionen nicht unterscheiden will, so werden wir in dieser Arbeit unter einer Funktion von *beschränkter Variation*, immer — wenn das Gegenteil nicht ausdrücklich bemerkt wird — eine solche Funktion verstehen, welche einer Funktion von beschränkter Variation (im gewöhnlichen Sinne des Wortes) äquivalent ist. Mit (V^*) bezeichnen wir die Menge aller so erklärten Funktionen von beschränkter Variation. Wenn wir die Addition von Funktionen aus (V^*) sowie auch ihre Multiplikation mit reellen Zahlen wie gewöhnlich definieren, so kann ersichtlich (V^*) als ein linearer Raum betrachtet werden.

Sei $f(x) \in (V^*)$; es gibt dann offenbar eine einzige Funktion $f^*(x)$ mit den folgenden Eigenschaften: a) $f(x) = f^*(x)$ für fast jedes x aus $\langle 0, 1 \rangle$; b) $f^*(0) = 0$; c) $f^*(x)$ ist für jedes $0 < x \leq 1$ linksseitig stetig und ist in $\langle 0, 1 \rangle$ im gewöhnlichen Sinne von beschränkter Variation. Die Funktion $f^*(x)$ wollen wir die *reduzierte Funktion* nennen. Folgendes leuchtet sofort ein: 1) zwei Funktionen $f(x), g(x)$ aus (V^*) sind dann und nur dann äquivalent, wenn überall in $\langle 0, 1 \rangle$ $f^*(x) = g^*(x)$; 2) ist $f(x) \in (V^*)$, $g(x) \in (V^*)$, $f(x) + g(x) = h(x)$, so besteht für jedes x aus $\langle 0, 1 \rangle$ die Gleichung $f^*(x) + g^*(x) = h^*(x)$; 3) ist $f_i(x) \in (V^*)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = f(x)$ gleichmäßig in $\langle 0, 1 \rangle - A$ mit $|A| = 0$, $f(x) \in (V^*)$, so ist $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i^*(x) = f^*(x)$ gleichmäßig in $\langle 0, 1 \rangle$.

³⁾ J.E. Littlewood, On mean values of power series (II), Journal London Math. Soc. 5 (1930) p. 179–182; R. E. A. C. Paley — A. Zygmund, On some series of functions (I), Proc. Cambr. Phil. Soc. 26 (1930) p. 337–357; R. Salem, Sur une propriété des séries de Fourier des fonctions de carré sommable, C. R. 197 (1933) p. 113–115.

Unter *totaler Variation* einer Funktion $f(x)$ aus (V^*) verstehen wir die totale Variation (im gewöhnlichen Sinne des Wortes) der reduzierten Funktion $f^*(x)$. Wir führen jetzt in (V^*) eine Metrik ein, indem wir für zwei dem Raume (V^*) angehörende Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$

$$(f_1(x), f_2(x)) = \text{Variation } (f_1^*(x) - f_2^*(x))_{0 \leq x \leq 1}$$

setzen; ferner definieren wir noch die Norm von $f(x) \in (V^*)$

$$f(x)_{V^*} = (0, f(x)) = \text{Variation } (f^*(x))^4.$$

Es möge dem Leser der einfache Beweis überlassen werden, daß (V^*) mit dieser Metrik ein Raum vom Typus (B) ist. Wir bemerken noch, daß man die Norm $\|f(x)\|_{V^*}$ auch so definieren kann:

Man zerlegt das Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ durch endlich viele Punkte $0 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 \dots \xi_p < \xi_{p+1} = 1$ in $p+1$ Teilintervalle und bildet die Summe $|M_0| + \sum_{i=1}^p (M_i - m_i)$, wo M_i, m_i ($i = 0, 1, 2, \dots, p$)

die kleinste bzw. die größte Zahl bedeutet mit der Eigenschaft, daß $f(x) > M_i$ bzw. $f(x) < m_i$ in $\langle \xi_i, \xi_{i+1} \rangle$ nur in einer Nullmenge besteht. Die obere Grenze aller derartigen Summen; wenn man die Intervalleinteilung beliebig variiert, ist gleich $\|f(x)\|_{V^*}$.

Hilfssatz 1. Wenn $f_n(x) \in (V^*)$, $\|f_n(x)\|_{V^*} \leq M$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), so gibt es eine Teilfolge $\{f_{n_i}(x)\}$ mit den folgenden Eigenschaften: a) es ist fast überall $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i}(x) = f(x)$; b) $f(x) \in (V^*)$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \|f_{n_i}(x)\|_{V^*} \geq \|f(x)\|_{V^*}$.

Beweis. Betrachten wir die reduzierten Funktionen $f_n^*(x)$. Aus unserer Voraussetzung folgt, daß die totalen Variationen jener Funktionen sowie auch sie selbst beschränkt sind; nach dem bekannten Satz von HELLY läßt sich also aus $\{f_n^*(x)\}$ eine überall konvergierende Teilfolge $\{f_{n_i}^*(x)\}$ herausgreifen. Ist $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i}^*(x) = f^*(x)$, so besteht $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i}(x) - f(x)$ fast überall, und es ist $f(x)$ offenbar in (V^*) enthalten. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben;

⁴⁾ Wohlgermerkt hat die in $\langle 0, 1 \rangle$ stetige Funktion $f(x) = 1$ als reduzierte Funktion $f^*(x) = 1$ ($0 < x < 1$), $f^*(0) = 0$ und bekommt demzufolge die Norm 1.

wir wählen eine Intervalleinteilung $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots \xi_p < \xi_{p+1} = 1$, so daß

$$\|f(x)\|_{V^*} - \varepsilon \leq \sum_{k=0}^{p-1} |f^*(\xi_{k+1}) - f^*(\xi_k)|.$$

Da $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i}^*(0) = f(0) = f^*(0) = 0$, $f^*(x)$ in $\langle 0, 1 \rangle$ linksseitig stetig und höchstens in den Sprungstellen $f(x) \neq f^*(x)$ so kann man immer ξ_k so wählen, daß $f(\xi_k) = f^*(\xi_k)$ ($k = 1, 2, \dots, p$). Wir haben also für hinreichend große i

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_{V^*} - \varepsilon &\leq \sum_{k=0}^{p-1} |f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)| \leq \sum_{k=0}^{p-1} |f_{n_i}^*(\xi_{k+1}) \\ &\quad - f_{n_i}^*(\xi_k)| + \varepsilon \leq \|f_{n_i}(x)\|_{V^*} + \varepsilon, \end{aligned}$$

woraus sich weiter $\|f(x)\|_{V^*} - 2\varepsilon \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \|f_{n_i}(x)\|_{V^*}$, $\|f(x)\|_{V^*}$

$\leq \lim_{i \rightarrow \infty} \|f_{n_i}(x)\|_{V^*}$ ergibt.

Hilfssatz 2. Wenn das OS $\{\varphi_i(x)\}$ aus Funktionen von beschränkter Variation besteht und wenn die Teilsummen der Orthogonalreihe $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x)$ der Bedingung

$$\left\| \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \right\|_{V^*} \leq M \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

genügen, so ist diese Orthogonalreihe die Orthogonalentwicklung einer Funktion von beschränkter Variation.

Beweis. Der Hilfssatz 1 ist in diesem Falle anwendbar; es gibt also eine Indizesfolge $\{n_p\}$ und eine Funktion von beschränkter Variation $f(x)$, so daß fast überall $\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_p} c_i \varphi_i(x) = f(x)$

gilt. Da weiter, wegen unserer Voraussetzung, $\left| \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \right| \leq M$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), so haben wir

$$\int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n_p} c_i \varphi_i(x) \right) \varphi_j(x) dx = c_j.$$

Hilfssatz 3. Sei (A) ein Raum vom Typus (B) , $x_i \in (A)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$). Gibt es eine Konstante M , so daß für jede Vorzeichenverteilung $\varepsilon_i = \pm 1$ die Ungleichung

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\| \leq M \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

besteht, so gilt auch für jedes d_i , $|d_i| \leq 1$, die Ungleichung

$$\left\| \sum_{i=1}^n d_i x_i \right\| \leq M \quad (n = 1, 2, 3 \dots).$$

Beweis. Ist $f(x)$ ein in (A) definiertes, lineares Funktional, dessen Norm die Zahl 1 nicht übertrifft, so folgt aus unserer Voraussetzung $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i f(x_i) \leq M$ und weiter $\sum_{i=1}^n |f(x_i)| \leq M$,
 $|f(\sum_{i=1}^n d_i x_i)| \leq M$, $\left\| \sum_{i=1}^n d_i x_i \right\| \leq M$.

§ 2.

Satz 1. Es bezeichne (S) einen von den folgenden Räumen: a) (L^α) d. h. den Raum der mit der α -ten Potenz ($\alpha > 1$) integrierbaren Funktionen; b) (L^∞) d. h. den Raum der wesentlich beschränkten Funktionen; c) (V^*) d. h. den Raum der Funktionen von beschränkter Variation.

Gegeben sei ein in (S) vollständiges OS $\{\varphi_i(x)\}$, dessen Funktionen beschränkt sind und außerdem dem Raume (S) angehören. Ist die Reihe

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i p_i \varphi_i(x)$$

bei beliebiger Vorzeichenverteilung $\varepsilon_i = \pm 1$ die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus (S), so ist auch die Reihe

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{\infty} d_i p_i \varphi_i(x),$$

wo $|d_i| \leq 1$ ($i = 1, 2, 3 \dots$), die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus (S).

Beweis. Wir werden hier den Beweis für den Raum (V^*) durchführen. Sei (n) die Menge aller unendlichen Folgen $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}$, wo $\varepsilon_i = \pm 1$. Die Menge (n) kann man als einen metrischen Raum auffassen, wenn wir die Entfernung zweier Elemente $\varepsilon^1, \varepsilon^2 \in (n)$ durch die Formel

$$(\varepsilon^1, \varepsilon^2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\varepsilon_i^1 - \varepsilon_i^2|}{1 + |\varepsilon_i^1 - \varepsilon_i^2|}$$

definieren. Dafür, daß $\lim_{k \rightarrow \infty} (\varepsilon^k, \varepsilon) = 0$, wo $\varepsilon^k = \{\varepsilon_i^k\} \in (n)$, $\varepsilon = \{\varepsilon_i\} \in (n)$, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes i $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_i^k = \varepsilon_i$ stattfindet. Es folgt daraus gleich die Vollständigkeit des Raumes (n) .

Es sei $\varepsilon = \{\varepsilon_i\} \in (n)$; bezeichnen wir mit $U(\varepsilon) = f(x)$ diejenige Funktion von beschränkter Variation, für welche

$$\int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx = \varepsilon_i p_i \quad (i = 1, 2, 3 \dots);$$

$U(\varepsilon)$ ist eine im Raume (n) definierte Operation, deren Werte dem Raume (V^*) angehören. Diese Operation ist ersichtlich, wegen der Vollständigkeit des OS $\{\varphi_i(x)\}$ in (S) , eindeutig definiert. Sei A_r die Menge derjenigen Elemente aus (n) , für welche die Ungleichung

$$(3) \quad \|U(\varepsilon)\|_{V^*} \leq r$$

besteht. Wir behaupten, daß die Mengen A_r abgeschlossen sind.

Ist

$\varepsilon^k \in A_r$ ($k = 1, 2, 3 \dots$), $\lim_{k \rightarrow \infty} (\varepsilon^k, \varepsilon) = 0$, $U(\varepsilon^k) = f_k(x)$, $U(\varepsilon) = f(x)$, so existiert, wegen (3), nach Hilfssatz 1, eine Teilfolge $\{f_{k_i}(x)\}$ und eine Funktion $\bar{f}(x) \in (V^*)$, so daß die Beziehung $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{k_i}(x) = \bar{f}(x)$ für fast jedes x besteht. Daraus folgt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_j^{k_i} p_j = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^1 f_{k_i}(x) \varphi_j(x) dx = \int_0^1 \bar{f}(x) \varphi_j(x) dx;$$

da aber andererseits

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_j^{k_i} p_j = \varepsilon_j p_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx$$

so ist, wegen der Vollständigkeit des OS $\{\varphi_i(x)\}$, $f(x) = \bar{f}(x)$ für fast jedes x . Nach Hilfssatz 1, b) ist also $\lim_{i \rightarrow \infty} \|f_{k_i}(x)\|_{V^*} \geq \|f(x)\|_{V^*}$, woraus sich endlich $\|f(x)\|_{V^*} \leq r$ ergibt.

Der Raum (n) ist mit der Summe $\sum_{r=1}^{\infty} A_r$ identisch, mithin gibt es ein r_0 derart, daß A_{r_0} von der zweiten Kategorie ist und infolge der Abgeschlossenheit eine Kugel k_0 enthält. Bezeichnen wir mit ϱ den Radius mit $\varepsilon^0 \equiv \{\varepsilon_i^0\}$ den Mittelpunkt dieser Kugel; für jedes Element $\varepsilon \in (n)$, für welches $(\varepsilon, \varepsilon^0) \leq \varrho$, besteht die Ungleichung

$$(4) \quad \|U(\varepsilon)\|_{V^*} \leq r_0.$$

Sei m ein fest gewählter Index, mit $\sum_{i=m+1}^{\infty} 1/2^i \leq \varrho$, $\varepsilon \equiv \{\varepsilon_i\}$ sei ein beliebiges Element aus (n) . Wir definieren jetzt eine Folge $\bar{\varepsilon} \equiv \{\bar{\varepsilon}_i\}$ indem wir $\bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_i^0$ für $1 \leq i \leq m$, $\bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_i$ für $i \geq m+1$ setzen. Wie leicht einzusehen, gehört $\bar{\varepsilon}$ der Kugel k_0 an und die Zahlen $\bar{\varepsilon}_i p_i$ sind die Koeffizienten der Funktion

$$U(\varepsilon) - \sum_{i=1}^m \varepsilon_i p_i \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^0 p_i \varphi_i(x).$$

Nach (4) gelten also die Ungleichungen

$$(5) \quad \begin{aligned} & \|U(\varepsilon) - \sum_{i=1}^m \varepsilon_i p_i \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^0 p_i \varphi_i(x)\|_{V^*} \leq r_0, \\ & \|U(\varepsilon)\|_{V^*} \leq r_0 + 2 \sum_{i=1}^m |p_i| \|\varphi_i(x)\|_{V^*} = M. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n$ irgend eine endliche Vorzeichenverteilung; aus (5) folgt sogleich $\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i p_i \varphi_i(x)\|_{V^*} \leq M$; es ist also

nach Hilfssatz 3 $\|\sum_{i=1}^n d_i p_i \varphi_i(x)\|_{V^*} \leq M$, wo $|d_i| \leq 1$, und endlich, nach Hilfssatz 2, sind $d_i p_i$ die Koeffizienten einer Funktion von beschränkter Variation.

Im Falle der Räume (L^a) , (L^∞) verläuft der Beweis ganz analog; es ist nur statt des Hilfssatzes 1 der Hilfssatz 1 aus Beiträgen (I) (p. 6) und statt des Hilfssatzes 2 die Bemerkung zum Satze 2 derselben Arbeit (p. 12) anzuwenden.

Satz 2. Gegeben sei ein in (C) abgeschlossenes OS $\{\varphi_i(x)\}$, dessen Funktionen beschränkt sind. Ist die Reihe (1) bei beliebiger

Vorzeichenverteilung $\varepsilon_i = \pm 1$ die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus (L^1) , so ist auch die Reihe (2), wo $|d_i| \leq 1$ ($i=1, 2, 3, \dots$), die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus (L^1) .

Beweis. Ordnen wir einer Folge $\varepsilon \in (n)$, analog wie in dem vorangehenden Beweise, diejenige Funktion $U(\varepsilon) = f(x)$ zu,

für welche $\int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx = \varepsilon_i p_i$, so haben wir es mit einer eindeutig

in (n) erklärten Operation zu tun, deren Wertevorrat dem Raume (L^1) angehört. Es ist — wie früher — zu beweisen, daß die Menge A_r der Elemente $\varepsilon \in (n)$, für welche $\|U(\varepsilon)\|_1 \leq r$, abgeschlossen ist. Sei $U(\varepsilon^k) = f_k(x)$, $U(\varepsilon) = f(x)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (\varepsilon^k, \varepsilon) = 0$, $\varepsilon^k \in A_r$; man kann eine Teilfolge $\{f_{k_i}(x)\}$ so herausgreifen, daß

$$(6) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^1 f_{k_i}(x) \varphi_j(x) dx = \lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_{k_i} p_j = \varepsilon p_j = \varepsilon_j \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx.$$

Ist $w(x) = \sum_{i=1}^p c_i \varphi_i(x)$ wo c_i irgendwelche reelle Zahlen bedeuten, so folgt aus (6)

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^1 f_{k_i}(x) w(x) dx = \int_0^1 f(x) w(x) dx,$$

und weiter — da die Ungleichung $\|f_{k_i}(x)\|_1 \leq r$ besteht und das OS $\{\varphi_i(x)\}$ in (C) abgeschlossen ist —

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^1 f_{k_i}(x) g(x) dx = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

für eine beliebige stetige Funktion $g(x)$. Aus der letzten Beziehung folgt aber bekanntlich $\lim_{i \rightarrow \infty} \|f_{k_i}(x)\|_1 = \|f(x)\|_1$, woraus sich weiter $\|f(x)\|_1 \leq r$, $\varepsilon \in A_r$ ergibt.

Von dieser Stelle an führt man den Beweis dem vorhergehenden ganz analog und man bekommt $\sum_{i=1}^n d_i p_i \varphi_i(x) \leq M$, $|d_i| \leq 1$ ($n=1, 2, 3, \dots$). Nach dem Satze 3 aus Beiträge (II) und dem Satze 2 aus Beiträge (I) folgt hieraus, daß $d_i p_i$ die Koeffizienten einer integrierbaren Funktion sind.

Bemerkung. In beiden Sätzen haben wir aus unseren Voraussetzungen auf die Ungleichung $\|\sum_{i=1}^n d_i p_i \varphi_i(x)\| \leq M$, $|d_i| \leq 1$ ($n=1, 2, 3, \dots$) geschlossen. Diese ist aber im Falle der Räume (L^α) ($1 \leq \alpha < \infty$) und (V^*) mit der unbedingten Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} p_i \varphi_i(x)$ in den entsprechenden Funktionenräumen äquivalent⁵⁾. Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 bzw. 2 gilt also: Dafür, daß die Reihe (1) für jede Vorzeichenverteilung die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus (L^α) ($1 \leq \alpha < \infty$) oder (V^*) sei, ist die unbedingte Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} p_i \varphi_i(x)$ im entsprechenden Funktionenraume notwendig und hinreichend.

Satz 1 in Verbindung mit dem Satze 10 aus Beiträge (II) ergibt den folgenden

Satz 3. Gegeben sei ein in (L^∞) vollständiges OS $\{\varphi_i(x)\}$, dessen Funktionen beschränkt sind. Damit für jede Vorzeichenverteilung die Reihe (1) die Orthogonalentwicklung einer beschränkten Funktion sei, ist notwendig und hinreichend, daß für fast jedes x die Ungleichung

$$(7) \quad \sum_{i=1}^{\infty} |p_i| |\varphi_i(x)| \leq M$$

bestehe.

Bemerkung. Für ein gleichmäßig beschränktes OS ist das Bestehen der Ungleichung (7) für fast jedes x mit der Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} |p_i|$ äquivalent.

§ 3.

Mit $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$... bezeichnen wir die Funktionen des RADEMACHER'schen OS (von $\varepsilon_0(t)$ sehen wir hier ab). Um die i -te

⁵⁾ Für (L^α) siehe Beiträge (II); für (V^*) siehe: S. Banach und S. Mazur, Zur Theorie der linearen Dimension, *Studia Math.* 4 (1933) p. 100—112, insb. p. 108. Im letzten Falle ergibt sich die uns interessierende Tatsache auch leicht aus Hilfssatz 6 der vorliegenden Arbeit.

Funktion $\varepsilon_i(t)$ zu erhalten, zerlegt man das Intervall $(0,1)$ in 2^i gleiche Teilintervalle und setzt in ihren Innern $\varepsilon_i(t)$ abwechselnd ± 1 und 0 in den Endpunkten der Teilintervalle; somit stellt ersichtlich die Funktionenfolge $\{\varepsilon_i(t)\}$ sämtliche unendlichen Vorzeichenverteilungen (bis auf eine abzählbare Menge) in Abhängigkeit von dem Parameter t dar, wo t eine Menge Z durchläuft, die das ganze Intervall $(0,1)$ bis auf die abzählbare Menge der Endpunkte aller Teilintervalle ausmacht. Ist $0, \vartheta_1(t) \vartheta_2(t) \vartheta_3(t) \dots$ die dyadische Entwicklung einer Zahl t aus Z , so entspricht ihr umkehrbar eindeutig die Vorzeichenverteilung $\varepsilon_i(t)$ wobei $\vartheta_i(t) = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon_i(t))$ ($i = 1, 2, 3, \dots$); es folgt daraus gleich, daß wenn $t_k \in Z, t_0 \in Z, \varepsilon(t_k) = \{\varepsilon_i(t_k)\}, \varepsilon(t_0) = \{\varepsilon_i(t_0)\}$, die Beziehung $\lim_{k \rightarrow \infty} (\varepsilon(t_k), \varepsilon(t_0)) = 0$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \vartheta_i(t_k) = \vartheta_i(t_0)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) äquivalent ist.

Man sagt, eine Eigenschaft (W) bestehe für fast jede Vorzeichenverteilung, wenn die Menge derjenigen Werte t , für welche die Vorzeichenverteilung $\varepsilon_i(t)$ die Eigenschaft (W) nicht aufweist, vom Maße 0 ist. In diesem Sinne sagt man z. B., daß für fast jede Vorzeichenverteilung $\varepsilon_i = \pm 1$ die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i$ konvergiert, oder daß für fast jede Vorzeichenverteilung die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i p_i \varphi_i(x)$ die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus (L'') ist u. s. w.

Die Orthogonalreihe $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i p_i \varphi_i(x)$ kann wohl die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus einem gewissen Funktionsraume für fast jede dagegen nicht für jede Vorzeichenverteilung sein. Wenn z. B. $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2) \log^{1+\varepsilon} i < +\infty$, so ist nach einem Satze der Herren R. E. A. C. PALEY und A. ZYGMUND⁶⁾ die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$ für fast jede Vorzeichenver-

⁶⁾ Vgl. die unter ³⁾ zit. Arbeit der Herren Paley und Zygmund oder auch: A. Zygmund, Trigonometrical Series, Warszawa (1935), p. 127–128.

teilung ε_i die Fouriersche Reihe einer beschränkten (sogar stetigen) Funktion; wird aber zusätzlich

$$\sum_{i=1}^{\infty} (|a_i| + |b_i|) = +\infty$$

vorausgesetzt, so findet dies sicher (vgl. Satz 3) nicht für jede Vorzeichenverteilung statt. Im allgemeinen kommt also die Untersuchung der Orthogonalreihen für jede Vorzeichenverteilung und fast jede Vorzeichenverteilung nicht auf dasselbe hinaus.

Satz 4. *Unter denselben Voraussetzungen wie im Satz 1 gilt folgendes: Entweder ist die Reihe (1) für fast jede Vorzeichenverteilung die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus (S), oder für fast jede Vorzeichenverteilung trifft das Gegenteil.*

Beweis. Mit T bezeichnen wir die Menge derjenigen Werte $t \in Z$, für welche die Reihe (1), $\varepsilon_i = \varepsilon_i(t)$ gesetzt, die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus (S) ist. Wir setzen

ferner für $t \in T$ $U(\varepsilon(t)) = f(x)$, wo $\int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx = \varepsilon_i(t) p_i$

($i = 1, 2, 3, \dots$), $f(x) \in (S)$, und betrachten die t -Menge $T.F$, wo F eine abgeschlossene Menge aus Z ist. Sei A_r die Menge derjenigen Werte $t \in T.F$, für welche $\|U(\varepsilon(t))\|_S \leq r$. Da aus $t_n \rightarrow t_0$, $t_n \in T.F$ die Beziehung $(\varepsilon(t_n), \varepsilon(t_0)) \rightarrow 0$, $t_0 \in F$ folgt, so lehrt eine analoge Überlegung wie bei dem Beweise des Satzes 1, daß $t_0 \in A_r$. Die Mengen A_r sind also abgeschlossen, $T.F = \sum_{r=1}^{\infty} A_r$

ist meßbar, daher auch T . Sei $t \in T$ und $0, \vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3 \dots$ seine dyadische Entwicklung; wenn für eine Zahl t' die dyadische Entwicklung höchstens auf endlich vielen Stellen von $0, \vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3 \dots$ verschieden ist, so gehört mit t auch t' der Menge T an. Da es aber eine wohlbekannte Tatsache ist, daß eine meßbare Menge mit dieser Eigenschaft entweder das Maß 1 oder 0 besitzt, so ist unser Satz bewiesen.

Analog ergibt sich der folgende Satz:

Satz 4'. *Unter denselben Voraussetzungen wie im Satz 2 ist die Reihe (1) entweder für fast jede Vorzeichenverteilung die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus (L^1) , oder für fast jede Vorzeichenverteilung trifft das Gegenteil.*

Hilfssatz 4. Es bestehen für $1 \leq \alpha < \infty$ die Ungleichungen

$$(8) \quad \int_0^1 \left| \sum_{i=0}^{n(t)} a_i \varepsilon_i(t) \right|^\alpha dt \leq C_\alpha \left(\sum_{i=0}^n a_i^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

wo $n(t) \leq n$ einen von t abhängigen Index bedeutet;

$$(8') \quad \left(\sum_{i=N}^n a_i^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} \leq C_\alpha(E) \int_E \left| \sum_{i=N}^n a_i \varepsilon_i(t) \right|^\alpha dt \quad (n=N, N+1, \dots),$$

wobei $E \subset (0, 1)$, $|E| > 0$ und N von E abhängig ist.

Beweis. Dies sind Verallgemeinerungen der bekannten Ungleichungen von KHINTCHINE; (8) stammt von R. E. A. C. PALEY und A. ZYGMUND²⁾; in (8') haben wir das Integrationsintervall durch eine Integrationsmenge ersetzt. Um (8') zu beweisen, bemerken wir vor allem, daß es wegen

$$\int_E \left| \sum_{i=0}^n a_i \varepsilon_i(t) \right| dt \leq \left(\int_E \left| \sum_{i=0}^n a_i \varepsilon_i(t) \right|^\alpha dt \right)^{\frac{1}{\alpha}} |E|^{1-\frac{1}{\alpha}} \quad (\alpha > 1)$$

nur den Grenzfall $\alpha = 1$ zu behandeln genügt. Es bestehen nun die Ungleichungen

$$(9) \quad \int_E \left(\sum_{i=N}^n a_i \varepsilon_i(t) \right)^2 dt \leq \left(\int_E \left| \sum_{i=N}^n a_i \varepsilon_i(t) \right| dt \right)^2 \left(\int_E \left(\sum_{i=N}^n a_i \varepsilon_i(t) \right)^4 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(10) \quad \int_E \left(\sum_{i=N}^n a_i \varepsilon_i(t) \right)^2 dt = |E| \left(\sum_{i=N}^n a_i^2 \right) + 2 \sum_{N \leq i < j} a_i a_j \int_E \varepsilon_i(t) \varepsilon_j(t) dt.$$

Da aber bekanntlich das Funktionensystem $\{\varepsilon_i(t) \varepsilon_j(t)\} \ (i < j)$ in $(0, 1)$ orthogonal und normiert ist, so können wir N so groß

wählen, daß die Ungleichung $\sqrt{\sum_{N \leq i < j} \left(\int_E \varepsilon_i(t) \varepsilon_j(t) dt \right)^2} < |E| 2^{-\frac{3}{2}}$

besteht. Es gilt

$$2 \left| \sum_{N \leq i < j} a_i a_j \int_E \varepsilon_i(t) \varepsilon_j(t) dt \right| \leq$$

$$2 \left(\sum_{N \leq i < j} a_i^2 a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{N \leq i < j} \left(\int_E \varepsilon_i(t) \varepsilon_j(t) dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{-1} |E| \left(\sum_{i=N}^n a_i^2 \right),$$

und mithin nach (9), (10) und (8)

²⁾ Siehe ³⁾.

$$(11) \quad \left(\sum_{i=N}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1(E) \int_E \left| \sum_{i=N}^n a_i \varepsilon_i(t) \right| dt \quad (n \geq N),$$

mit $C_1(E) = 2^{\frac{3}{2}} |E|^{-\frac{3}{2}} C_4^{\frac{3}{2}}$.

Hilfssatz 5. Wenn für eine Funktionenfolge $\{f_i(x)\}$, $f_i(x) \geq 0$ die Ungleichung

$$(12) \quad \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n f_i(x) \right)^{\alpha} dx \leq M \quad (0 < \alpha < \infty; n = 1, 2, 3, \dots)$$

besteht, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $p(\varepsilon)$ mit

$$(13) \quad \int_0^1 \left(\sum_{i=p}^q f_i(x) \right)^{\alpha} dx \leq \varepsilon \quad (q > p).$$

Beweis. Aus (12) folgt, daß die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ fast überall konvergiert und $\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \right)^{\alpha} dx \leq M$ ist. Da $r_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x)$ eine monotone Funktionenfolge bilden mit $r_n(x) \rightarrow 0$ fast überall, so haben wir $\int_0^1 \left(r_n(x) \right)^{\alpha} dx \rightarrow 0$, woraus sich, wegen

$$\int_0^1 \left(\sum_{i=p}^q f_i(x) \right)^{\alpha} dx \leq \int_0^1 r_{p-1}^{\alpha}(x) dx,$$

(13) ergibt.

Satz 5. Von dem OS $\{\varphi_i(x)\}$ setzen wir voraus, daß es aus beschränkten Funktionen besteht und in (L^{α}) vollständig bzw. in (C) abgeschlossen ist, je nachdem $\alpha > 1$ bzw. $\alpha = 1$ ist. Dafür, daß die Reihe (1) für fast jede Vorzeichenverteilung die Entwicklung einer Funktion aus (L^{α}) darstelle, ist notwendig und hinreichend, daß die folgende Beziehung bestehe:

$$(14) \quad \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n p_i^2 \varphi_i^2(x) \right)^{\frac{\alpha}{2}} dx \leq M \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Beweis. 1°. Wir setzen

$$F_{nm}(t) = \max_{n \leq q \leq m} \int_0^1 \left| \sum_{i=n}^q p_i \varphi_i(x) \varepsilon_i(t) \right|^{\alpha} dx;$$

$q(t)$ bezeichne denjenigen Index, für welchen dieses Maximum erreicht ist. Nach (8) erhalten wir

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=n}^{q(t)} p_i \varphi_i(x) \varepsilon_i(t) \right|^\alpha dt \leq C_\alpha \left(\sum_{i=n}^m p_i^2 \varphi_i^2(x) \right)^{\frac{\alpha}{2}} \quad (n=1, 2, 3, \dots; n < m),$$

woraus sich durch beiderseitige Integration und Vertauschung der Integrationsfolge

$$(15) \quad \int_0^1 F_{nm}(t) dt = \int_0^1 dx \int_0^1 \left| \sum_{i=n}^{q(t)} p_i \varphi_i(x) \varepsilon_i(t) \right|^\alpha dt \\ \leq C_\alpha \int_0^1 \left(\sum_{i=n}^m p_i^2 \varphi_i^2(x) \right)^{\frac{\alpha}{2}} dx$$

ergibt. Die Funktionenfolge $\{F_{nm}(t)\}$ ist monoton wachsend; setzen wir $\lim_{m \rightarrow \infty} F_{nm}(t) = F_n(t)$, so ist wegen (15) die Ungleichung

$$\int_0^1 F_n(t) dt \leq C_\alpha \int_0^1 \left(\sum_{i=n}^\infty p_i^2 \varphi_i^2(x) \right)^{\frac{\alpha}{2}} dx$$

erfüllt. Da $F_s(t) \leq 2^\alpha F_n(t)$ ($s \geq n$), so folgt hieraus nach Hilfsatz 5 die Beziehung

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = 0$$

für fast jedes t . Wegen

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{i=n}^m p_i \varphi_i(x) \varepsilon_i(t) \right|^\alpha dx \right) \leq F_n(t)$$

ist die Orthogonalreihe (1) in jedem Punkte, in welchem (16) gilt, im Mittel mit der Potenz α konvergent, und stellt mithin die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus (L^α) dar.

2°. Wir werden jetzt die Notwendigkeit der angeführten Bedingung beweisen. Es sei also für fast jede Vorzeichenverteilung die Reihe (1) die Entwicklung einer Funktion aus (L^α) ; da die Menge A_r der t -Punkte aus Z , für welche $\|U(\varepsilon(t))\|_\alpha \leq r$ (wie dies aus dem vorangehenden Beweise hervorgeht) meßbar ist, so ist eine der Mengen A_r , etwa A_{r_0} , von positivem Maße. Setzen wir

$$F_n(t) = \max_{1 \leq q \leq n} \left\{ \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^q \varepsilon_i(t) p_i \varphi_i(x) \right|^\alpha dx \right\} = \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{q_n(t)} \varepsilon_i(t) p_i \varphi_i(x) \right|^\alpha dx,$$

wo $q_n(t)$ den kleinsten Index bezeichnet, für den dieses Maximum erreicht wird, und ferner $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = F(t)$. Wir behaupten, daß es eine Menge $A \subset A_{r_0}$ von positivem Maße sowie eine Konstante K gibt derart, daß $F_n(t) \leq F(t) \leq K$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) für $t \in A$. Betrachten wir zuerst die Punkte $t \in A_{r_0}$, für die von einem gewissen Index an $F_n(t) = F(t)$ stattfindet. Hat die Menge dieser Punkte ein positives Maß, so gibt es offenbar eine Menge $A \subset A_{r_0}$ vom Maße > 0 , so daß für ein festes n_0 und $t \in A$ $F_{n_0}(t) = F(t)$.

Es ist klar, daß $K = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n_0} |p_i| \cdot |\varphi_i(x)| \right)^{\alpha} dx$ gesetzt, die Menge

A die verlangte Eigenschaft aufweist. Betrachten wir jetzt den entgegengesetzten Fall. Dann gibt es in A_{r_0} eine Menge $\bar{A}$ von positivem Maße mit $q_n(t) \rightarrow \infty$ für $t \in \bar{A}$, die in jedem ihrer Punkte die Dichte 1 hat. Bezeichnen wir als i -tes Intervall der n -ten Teilung das Intervall $\delta_i^n = ((i-1)/2^n, i/2^n)$ ($i = 1, 2, \dots, 2^n$; $n = 1, 2, \dots$), welches bei der Definition der n -ten RADEMACHER'schen Funktion auftritt. Setzen wir

$$\eta_s = |\bar{A}| 2^{-(s+1)}, \vartheta_s = (|\bar{A}| - 3/4 \cdot \eta_s) (|\bar{A}| - \eta_s/2)^{-1} \quad (s = 1, 2, 3, \dots).$$

Ordnen wir jedem natürlichen n und $t \in \bar{A}$ das Intervall $\delta_{i_n(t)}^{q_n(t)}$ der $q_n(t)$ -ten Teilung zu, für welches $t \in \delta_{i_n(t)}^{q_n(t)}$; offenbar ist $\lim_{n \rightarrow \infty} |\delta_{i_n(t)}^{q_n(t)}| = 0$. Es werde mit V die Intervallmenge

$\{\delta_{i_n(t)}^{q_n(t)}\}$, $t \in \bar{A}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) bezeichnet. Durch wiederholte Anwendung des VITALI'schen Überdeckungssatzes beweisen wir die Existenz einer Folge von Intervallklassen $\{A_1^s, A_2^s, \dots, A_{j_s}^s\}$, welche für jedes s die folgenden Eigenschaften besitzen: a) $A_j^s \in V$ ($j = 1, 2, \dots, j_s$); b) $A_j^s \cdot A_{j'}^s = 0$ für $j \neq j'$ ($j, j' = 1, 2, \dots, j_s$); c) A_j^s ($j = 1, 2, \dots, j_s$) gehört zu einer späteren Teilung als irgend ein $A_1^{s-1}, A_2^{s-1}, \dots, A_{j_{s-1}}^{s-1}$; d) $|A_j^s \cdot \bar{A}| \geq \vartheta_s |A_j^s|$ ($j = 1, 2, \dots, j_s$);

e) $|\sum_{j=1}^{j_s} A_j^s| \geq |\bar{A}| - \eta_s/2$ ($j = 1, 2, \dots, j_s$). Wir spiegeln die Menge $A_j^s \cdot \bar{A}$ am Mittelpunkte von A_j^s und bezeichnen den Durchschnitt der so erhaltenen Menge mit der ursprünglichen mit B^s

($j=1, 2, \dots, j_s$; $s=1, 2, \dots$). Aus d) folgt $|B_j^s| \geq (2j_s - 1) |A_j^s|$; ist $B^s = \sum_{j=1}^{j_s} B_j^s$, so kommt $|B^s| \geq (2j_s - 1) \left| \sum_{j=1}^{j_s} A_j^s \right| \geq |\bar{A}| - \eta_s$.

Wir behaupten, daß die Menge $A = \prod_{s=1}^{\infty} B^s$ das verlangte leistet. Vor allem ist $|A| \geq |\bar{A}|/2 > 0$. Es seien $t_0 \in A$ und eine natürliche Zahl n vorgegeben; wir wählen s_0 derart, daß alle $A_j^{s_0}$ ($j=1, 2, \dots, j_{s_0}$) einer späteren Teilung als die n -te angehören. Es ist $t_0 \in B^{s_0}$ und somit für ein gewisses j_0 $t_0 \in A_{j_0}^{s_0} = \delta_l^u$, wobei $u = q_m(\tilde{t}) > n$, $l = i_m(\tilde{t})$, $m \geq q_m(\tilde{t}) > n$. Den Eigenschaften des RADEMACHER'schen Funktionensystems gemäß sind

die Funktionen $\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^l \varepsilon_i(t) p_i \varphi_i(x) \right|^u dx$ für $1 \leq l \leq u$ in δ_l^u kon-

stant. Aus dieser Bemerkung sowie aus der Definition von $u = q_m(\tilde{t})$ folgern wir, daß für jedes $t \in B^{s_0}$ $\delta_l^u = B_{j_0}^{s_0}$, somit auch für $t = t_0$ die Ungleichung

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^l \varepsilon_i(t) p_i \varphi_i(x) \right|^u dx \leq \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^u \varepsilon_i(t) p_i \varphi_i(x) \right|^u dx \quad (l=1, 2, \dots, u)$$

gilt. Bemerken wir des weiteren $\|U(\varepsilon(t))\|_u \leq r_0$ für $t \in B_{j_0}^{s_0}$; da der Menge $B_{j_0}^{s_0}$ offenbar mit t_0 auch der in bezug auf den Mittelpunkt von δ_l^u symmetrisch gelegene Punkt t'_0 angehört, dem die Vorzeichenverteilung

$$\varepsilon_i(t'_0) = \varepsilon_i(t_0) \quad (i=1, 2, \dots, u), \quad \varepsilon_i(t'_0) = -\varepsilon_i(t_0) \quad (i=u+1, u+2, \dots)$$

entspricht, so ist

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^u \varepsilon_i(t_0) p_i \varphi_i(x) \right|^u dx \right)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{2} \|U(\varepsilon(t_0)) + U(\varepsilon(t'_0))\|_u \leq r_0.$$

Aus den letzten Ungleichungen folgt

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t_0) p_i \varphi_i(x) \right|^u dx \right)^{\frac{1}{u}} \leq r_0,$$

und die durchgeführte Überlegung beweist für jedes $t \in A$

$$F_n(t) \leq K \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

wo $K = r_0^u$. Durch Anwendung der Ungleichung (8') kommt

$$\left(\sum_{i=N}^n p_i^2 \varphi_i^2(x) \right)^{\frac{\alpha}{2}} \leq C_\alpha(A) \int_A \left| \sum_{i=N}^n \varepsilon_i(t) p_i \varphi_i(x) \right|^\alpha dt,$$

woraus sich endlich durch beiderseitige Integration und Vertauschung der Integrationsfolge

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sum_{i=N}^n p_i^2 \varphi_i^2(x) \right)^{\frac{\alpha}{2}} dx &\leq C_\alpha(A) \int_A dt \int_0^1 \left| \sum_{i=N}^n \varepsilon_i(t) p_i \varphi_i(x) \right|^\alpha dx \\ &\leq C_\alpha(A) |A| 2^\alpha K = \bar{M} \end{aligned}$$

ergibt.

Bemerkungen. 1°. Ist das OS $\{\varphi_i(x)\}$ gleichmäßig beschränkt, so ist die Ungleichung (14) mit $\sum_{i=1}^{\infty} p_i^2 < +\infty$ äqui-

valent. Der sich daraus für $\alpha = 1$ ergebende Satz bildet eine Verallgemeinerung des von J. E. LITTLEWOOD⁸⁾ für das trigonometrische OS bewiesenen Satzes.

2°. Die folgenden Konsequenzen unseres Satzes verdienen besonders betont zu werden: Wenn — unter den Voraussetzungen des Satzes 5 — die Reihe (1) für fast jede Vorzeichenverteilung die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus (L^α) ist, so ist sie für fast jede Vorzeichenverteilung: a) im Mittel mit der Potenz α konvergent, b) für fast jedes x konvergent. Wir haben a) im Laufe des Beweises gezeigt; was b) betrifft, so genügt es zu bemerken, daß aus (14) die Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} p_i^2 \varphi_i^2(x)$ für fast jedes x folgt, woraus sich nach einer geläufigen Methode unsere Behauptung ergibt⁹⁾.

Wir betrachten den Raum (V) aller in $\langle 0, 1 \rangle$ definierten Funktionen, die (im gewöhnlichen Sinne) von beschränkter Variation sind; die Norm erklären wir durch $\|f(x)\|_V = |f(0)| + \text{Var.}(f(x))$.

Hilfssatz 6. Die Funktionen $f_i(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) seien im gewöhnlichen Sinne von beschränkter Variation; es bestehe für eine Konstante K die Ungleichung

⁸⁾ Siehe²⁾.

⁹⁾ Vgl. dazu die unter³⁾ zit. Arbeit der Herren Paley und Zygmund, p. 339.

$$(17) \quad \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t) f_i(x) \right\|_V \leq K \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

wenn t einer Menge A von positivem Maße angehört. Dann ist die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i(x)\|_V^2$$

konvergent¹⁰⁾.

Beweis. Jede lineare, separable Menge im Raume (V) ist mit einer linearen Menge in (L^1) äquivalent¹¹⁾. Sei (V_0) die kleinste auf den Funktionen $f_i(x)$ aufgespannte lineare Menge in (V) ; (L_0^1) bezeichne die mit ihr äquivalente Menge in (L^1) , $F_i(x)$ bezeichne die der Funktion $f_i(x)$ zugeordnete Funktion aus (L_0^1) .

Wegen (17) und $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t) F_i(x) \in (L_0^1)$ besteht die Ungleichung

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t) F_i(x) \right| dx \leq K \quad (n=1, 2, 3, \dots, t \in A),$$

woraus sich nach (8') die Ungleichung

$$\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n F_i^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} dx \leq M \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ergibt. Diese hat aber die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^1 |F_i(x)| dx \right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i(x)\|_V^2$$

zur Folge¹²⁾.

Satz 6. Gegeben sei ein in (V^*) vollständiges OS $\{f_i(x)\}$, dessen Funktionen dem Raume (V^*) angehören. Wenn die Reihe (1) für fast jede Vorzeichenverteilung die Orthogonalentwicklung einer Funktion von beschränkter Variation ist, so muß die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i^2 \|\varphi_i(x)\|_{V^*}^2$$

konvergieren.

¹⁰⁾ Dies ist die Verallgemeinerung eines von den Herren Banach und Mazur bewiesenen Satzes; siehe die unter ⁵⁾ zit. Arbeit, p. 108.

¹¹⁾ Siehe die unter ⁵⁾ zit. Arbeit, p. 101.

¹²⁾ Siehe: W. Orlicz, Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen (I), *Studia Math.* 4 (1933) p. 33–37.

Beweis. Durch eine analoge Schlußweise wie beim Beweise des Satzes 5 zeigen wir, daß die Ungleichung

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t) p_i \varphi_i(x) \right\|_{V^*} \leq K$$

für ein gewisses K besteht, wenn $n = 1, 2, \dots$ und t einer Menge von positivem Maße angehört. Es bleibt noch übrig, den Hilfsatz 6 anzuwenden, um den Beweis zu vollenden.

Bemerkung. Für das trigonometrische OS kommt die Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} p_i^2 \|\varphi_i(x)\|_{V^*}^2$ auf die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2)$ hinaus.

(Reçu par la Rédaction le 18. 11. 1935).

Sur la convergence des séries orthogonales

par

J. MARCINKIEWICZ (Wilno).

1. Le but de cette note est de démontrer les deux théorèmes suivants:

Théorème A. *Pour chaque système $\{\varphi_i(x)\}$ orthogonal et normé dans $(0, \pi)$ on peut choisir une suite $\{n_i\}$ de sorte que l'expression*

$$1.1 \quad S_{n_i}(x) = \sum_{r=1}^{n_i} a_r \varphi_r(x)$$

soit presque partout convergente, dès que l'on a

$$1.2 \quad \sum_{r=1}^{\infty} a_r^2 < \infty.$$

Théorème B. *La série*

$$1.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/5} \cos nx$$

représente une fonction $f(x) \in L^p$, ($p < 6/5$). On y peut changer l'ordre des termes de sorte que la série ainsi obtenue

$$1.4 \quad \sum_{r=1}^{\infty} n_r^{-1/5} \cos n_r x$$

jouisse de la propriété suivante:

Chaque suite

$$1.5 \quad \sum_{r=1}^{q_i} n_r^{-1/5} \cos n_r x$$

diverge presque partout.

Le théorème *A* généralise dans un sens certains théorèmes de M. M. KOLMOGOROFF ¹⁾ et KACZMARZ ²⁾. Le théorème *B* montre que l'hypothèse (1.2) ne peut pas être remplacée par celle que la série

$$1.6 \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x)$$

soit le développement d'une fonction $f(x) \in L^p$, $p < 6/5$, même si l'on détermine la suite $\{n_i\}$ pour chaque fonction séparément et si le système $\{\varphi_i(x)\}$ est complet dans L^1 et uniformément borné.

2. Démonstration de A. La suite $\{\varphi_i(x)\}$ étant donnée dans l'intervalle $(0, \pi)$, posons

$$2.1 \quad \varphi_i(x) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v^{(i)} \cos vx.$$

Le système $\varphi_i(x)$ étant orthogonal et normé, on a d'après l'inégalité de BESSEL

$$2.2 \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_v^{(i)}|^2 < \infty \quad (v = 0, 1, 2, \dots).$$

Déterminons la suite infinie de nombres naturels croissants (n_ν) remplissant l'inégalité

$$2.3 \quad \sum_{i \geq n_\nu} |a_v^{(i)}|^2 < \pi^2 2^{-\nu} \quad (v = 0, 1, 2, \dots)$$

et posons pour $n_\nu \leq i < n_{\nu+1}$ ($v = 0, 1, 2, \dots$)

$$2.4 \quad u(i) = v,$$

$$2.5 \quad \varphi'_i(x) = \sum_{v=0}^{u(i)} a_v^{(i)} \cos vx \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

(D'après (2.3) on peut supposer $u(0) = 0$).

Évaluons la somme de la série

$$2.6 \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \cdot |\varphi'_i(x)|;$$

¹⁾ A. Kolmogoroff, Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, Fund. Math. 5 (1924) p. 96–97.

²⁾ S. Kaczmarz, Note on orthogonal series I, Studia Math. 5 (1935) p. 24–28.

d'après (2.3), (2.4) et (2.5) on obtient

$$\begin{aligned}
 & \sum_{(i)} |a_i \varphi'_i(x)| \leq \sum_{(i)} |a_i| \sum_{v=0}^{u(i)} |a_v^{(i)}| \\
 2.7 \quad & = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\substack{(i) \\ u(i) \geq v}} |a_i a_v^{(i)}| \leq \left(\sum_{(i)} a_i^2 \right)^{1/2} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\sum_{u(i) \geq v} a_v^{(i)2} \right)^{1/2} \\
 & \leq \left(\sum_{(i)} a_i^2 \right)^{1/2} \sum_{v=0}^{\infty} 2^{-v/2} \leq 4 \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Choisissons maintenant la fonction croissante $v(i)$ de sorte que

$$2.8 \quad \left(\int_0^{\pi} \left(\sum_{v(i)+1}^{\infty} a_v^{(i)} \cos vx \right)^2 dx \right)^{1/2} < 2^{-i}$$

et posons

$$2.9 \quad \varphi_i'' = \sum_{v(i)+1}^{\infty} a_v^{(i)} \cos vx,$$

$$2.10 \quad \varphi_i^* = \sum_{u(i)+1}^{v(i)} a_v^{(i)} \cos vx;$$

d'après l'inégalité

$$2.11 \quad \int_0^{\pi} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i \varphi_i''| \right)^2 dx \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \varphi_i''^2 dx \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$$

on conclut que la série $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i \varphi_i''|$ converge presque partout vers

une fonction de classe L^2 dès que

$$2.12 \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty,$$

et il en résulte en vertu de (2.7) sous l'hypothèse (2.12) que la série

$$2.13 \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i^*$$

vérifie la relation

$$2.14 \quad \lim_{p, q \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \left(\sum_p^q a_i \varphi_i^* \right)^2 dx = 0.$$

Ces remarques faites, on démontre le théorème A avec la suite $\{n_i\}$ soumise à l'unique condition

$$2.15 \quad u(n_{i+1}) > 2v(n_i), \quad (n_0 = 1).$$

En effet, la série

$$2.16 \quad \sum_{i=2}^{\infty} a_i \varphi_i(x)$$

étant donnée et la condition (2.12) remplie, posons

$$2.17 \quad \begin{aligned} a'_i &= \begin{cases} 0 & \text{pour } n_{2^v+1} < i \leq n_{2^v} \quad (v = 0, 1, 2, \dots); \\ a_i & \text{pour } n_{2^v} < i \leq n_{2^{v+1}} \quad (v = 0, 1, 2, \dots); \end{cases} \\ a''_i &= \begin{cases} 0 & \text{pour } n_{2^v} < i \leq n_{2^{v+1}} \quad (v = 0, 1, 2, \dots); \\ a_i & \text{pour } n_{2^{v+1}} < i \leq n_{2^v} \quad (v = 0, 1, 2, \dots). \end{cases} \end{aligned}$$

D'après (2.13) et (2.14) la série

$$2.18 \quad \sum_{i=1}^{\infty} a'_i \varphi_i^*$$

converge „en moyenne“ vers une fonction $f \in L^2$. D'autre part, en désignant par $S_n(f, x)$ la somme partielle d'ordre n du développement de la fonction $f(x)$ d'après le système $1, \cos x, \cos 2x, \dots$ (considéré dans $(0, \pi)$), on obtient

$$2.19 \quad \sum_{v=1}^{n_{2i+1}} a'_v \varphi_v^* = \sum_{v=1}^{n_{2i+2}} a'_v \varphi_v^* = S_{v(n_{2i+1})}(f, x).$$

Or, on a d'après (2.15)

$$2.20 \quad v(n_{2i+1}) > 2v(n_{2i-1});$$

on en tire, d'après un théorème connu de M. KOLMOGOROFF, la convergence presque partout de la suite $S_{v(n_{2i+1})}(f, x)$, donc aussi celle de

$$2.21 \quad \sum_{v=1}^{n_i} a'_v \varphi_v^*$$

et, d'une façon analogue, celle de

$$2.22 \quad \sum_{v=1}^{n_i} a''_v \varphi_v^*.$$

Les formules (2.7), (2.11), (2.21) et (2.22) prouvent le théorème A.

En conservant la démonstration on peut donner une autre forme au théorème démontré, à savoir :

Soit

$$2.23 \quad S(x) = \text{borne sup}_{(i)} \sum_{v=1}^{n_i} a_v \varphi_v(x);$$

alors

$$2.24 \quad \int_0^\pi S^2(x) dx \leq C \sum_{i=1}^\infty a_i^2,$$

où les n_i sont définis par les formules (2.15) et C désigne une constante³⁾.

3. Démonstration de B. La première partie du théorème B est banale; en effet $f(x) = \sum_{n=1}^\infty n^{-1/6} \cos nx = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(n+1/2)x}{2 \sin x/2} \mathcal{A}_n$, où $\mathcal{A}_n = n^{-1/6} - (n+1)^{-1/6}$, donc

$$\begin{aligned} 3.1 \quad |f(x)| &\leq c \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} x^{-1} |\sin(n+1/2)x| \mathcal{A}_n + c \sum_{n=\lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1}^\infty x^{-1} \mathcal{A}_n \\ &= O(x^{1/6-1}) + O(x^{1/6-1}) = O(x^{-5/6}). \end{aligned}$$

Pour prouver la deuxième partie, définissons la suite $\{n_i\}$ de sorte qu'elle satisfasse aux conditions suivantes:

$$3.2 \quad n_i \leq 4i^3,$$

3.3 l'équation $n = \pm n_i \pm n_{i'} \pm n_{i''}$ admet au plus une solution pour chaque $n \neq 0$.

A ce but supposons $n_1 = 1$; $n_1, n_2, \dots, n_k$ définis, il y a au plus $4k^3$ nombres positifs de forme $\pm n_i \pm n_{i'} \pm n_{i''}$; il en résulte l'existence d'un $n_{k+1} \leq 4(k+1)^3$ qui n'est pas de la forme $\pm n_i \pm n_{i'} \pm n_{i''}$ avec $i, i', i'' \leq k$. La suite $\{n_k\}$ ainsi définie vérifie (3.2) et (3.3). Désignons par m_i les nombres entiers différents de n_i . D'après (3.2) la série

$$3.4 \quad \sum_{i=1}^\infty (n_i^{-1/6})^2$$

³⁾ Voir A. Zygmund, Trigonometrical series, Warszawa 1935, p. 252.

diverge; cela permet de choisir la suite infinie $\{p_i\}$ de sorte que

$$3.5 \quad (i+1)^4 \geq \sum_{v=1}^{p_i} (n_v^{-1/6})^2 > i^4, \\ (p_{k+1} - p_k > k; \quad k = 1, 2, \dots).$$

Posons

$$3.6 \quad \varphi_1(x) = \cos n_1 x, \quad \varphi_2(x) = \cos n_2 x, \\ \varphi_{p_1}(x) = \cos n_{p_1} x, \quad \varphi_{p_1+1}(x) = \cos m_1 x,$$

d'une façon générale

$$\varphi_{p_k+k}(x) = \cos m_k x, \quad \varphi_{p_k+k+1}(x) = \cos n_{p_k+1} x, \\ \varphi_{p_k+k+2}(x) = \cos n_{p_k+2} x \dots \\ 3.7 \quad \varphi_{p_{k+1}+k}(x) = \cos n_{p_{k+1}}(x) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

et désignons par

$$3.8 \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x)$$

le développement de la fonction $f(x)$ définie par (1.3) d'après le système $\varphi_i(x)$. La série (3.8) ne diffère de (1.3) que par l'ordre de ses termes. Soit E , $|E| > 0$, un ensemble arbitraire.

Choisissons k assez grand pour que l'on ait

$$3.9 \quad \int_E \cos^2 n_i x \, dx \geq 1/4 |E|, \quad \text{pour } i > p_k,$$

$$3.10 \quad \left(\sum_{\substack{i,j=p_k \\ i \neq j}}^{\infty} \left(\int_E \cos n_i x \cos n_j x \, dx \right)^2 \right)^{1/2} \leq 1/8 |E|;$$

la formule (3.10) est réalisable d'après (3.3). Si

$$p_r + r \leq q < p_{r+1} + r,$$

alors

$$3.13 \quad \int_E \left(\sum_{i=p_k+r}^q a_i \varphi_i(x) \right)^2 dx \\ \geq \int_E \left(\sum_{i=p_k+1}^{q-r} n_i^{-1/6} \cos n_i x \right)^2 dx \\ - 2 \int_E \left| \sum_{i=p_k+1}^{q-r} n_i^{-1/6} \cos n_i x \sum_{i=k}^r m_i^{-1/6} \cos m_i x \right| dx$$

$$\begin{aligned}
& - \int_E \left(\sum_{i=k}^r m_i^{-1/6} \cos m_i x \right)^2 dx \geq \sum_{i=p_k+1}^{q-r} n_i^{-1/3} \int_E \cos^2 n_i x dx \\
& \quad + \sum_{\substack{i,j=p_k+1 \\ i \neq j}}^{q-r} n_i^{-1/6} n_j^{-1/6} \int_E \cos n_i x \cos n_j x dx \\
& \quad - 2r\pi \left(\int_E \left(\sum_{i=p_k+k}^{q-r} n_i^{-1/6} \cos n_i x \right)^2 dx \right)^{1/2} - r\pi \\
& \geq 1/4 |E| \sum_{i=1}^{q-r} n_i^{-1/3} - 1/8 |E| \sum_{i=1}^{q-r} n_i^{-1/3} - O(1) - O(r) \\
& \quad - 2r\pi \left(\int_E \left(\sum_{i=p_{k+1}}^{q-r} n_i^{-1/6} \cos n_i x \right)^2 dx \right)^{1/2} \\
& = 1/8 |E| - O(r) - 2r\pi \left(\int_E \left(\sum_{i=p_{k+1}}^{q-r} n_i^{-1/6} \cos n_i x \right)^2 dx \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

où $O(r)$ désigne une expression ne surpassant pas pour k fixe Mr (M constante). On prouve facilement à l'aide de (3.10) que

$$3.14 \quad \int_E \left(\sum_{i=p_k+1}^{q-r} n_i^{-1/6} \cos n_i x \right)^2 dx = O \left(\sum_{i=1}^{q-r} n_i^{-1/3} \right);$$

les formules (3.13) et (3.14) donnent d'après (3.5)

$$3.15 \quad \int_E \left(\sum_{i=p_k+k}^q a_i \varphi_i(x) \right)^2 dx \geq 1/8 |E| r^4 - O(r) - O(r^3)$$

et en posant dans (3.15) $q = q_v$, $q_v \rightarrow \infty$,

$$3.16 \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \int_E \left(\sum_{i=1}^{q_v} a_i \varphi_i(x) \right)^2 dx = \infty.$$

La suite q_v et l'ensemble E étant arbitraires, on en tire le théorème.

(Reçu par la Rédaction le 16. 12. 1935).

Sur les fonctions indépendantes (I)
(Propriétés générales)

par

M. KAC (Lwów).

Ce travail a pour but le développement systématique des idées de M. H. STEINHAUS contenues dans son travail „Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure“ ¹⁾. Dans ce travail M. STEINHAUS a montré entre autres que les théorèmes sur la convergence de séries orthogonales de M. H. RADEMACHER répondent à la question, quelle est la probabilité de la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \pm c_n$ quand les signes $\pm$ sont choisis au hasard avec une probabilité égale. Cette probabilité est égale à la mesure de l'ensemble où la série de M. RADEMACHER ²⁾ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ est convergente, c'est-à-dire à 1 si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$, à 0 dans le cas contraire. Cette importante remarque a permis de résoudre d'autres problèmes relatifs aux probabilités dénombrables par leur réduction à la théorie des systèmes orthogonaux ³⁾.

¹⁾ Fund. Math. 4 (1923) p. 287—310.

²⁾ H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, Math. Ann. 87 (1922) p. 112—138; spécialement Chap. VI.

³⁾ a) H. Steinhaus, Sur la probabilité de la convergence de séries, Studia Math. 2 (1930) p. 21—39; b) A. Khintchine u. A. Kolmogoroff, Über Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden, Recueil Math. de Moscou 32 (1925) p. 668—677; c) A. Rajchman, Prawo wielkich liczb, Mathesis Polska 6 (1931) p. 66—74 et Zastrzone prawo wielkich liczb, Mathesis Polska 6 (1931) p. 145—161 (en polonais).

On doit à M. STEINHAUS une définition de l'indépendance des fonctions, en nombre fini ou infini. D'après cette définition que nous publions ici, certains systèmes orthogonaux introduits par M. STEINHAUS lui-même⁴⁾ et par d'autres auteurs, tels que le système $\{e^{2\pi i f_n}\}$ et celui de M. RADEMACHER, sont constitués par des fonctions indépendantes.

Certains théorèmes, que nous démontrerons dans la suite, correspondent aux théorèmes connus du calcul des probabilités, mais nous en donnerons des démonstrations plus simples. Il nous semble aussi que les résultats obtenus ne sont pas sans intérêt pour la théorie des systèmes orthogonaux.

1. Les fonctions, dont nous parlerons dans la suite, sont supposées définies et mesurables dans l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$. Soit $f(x)$ une telle fonction; nous désignons par E_f chaque ensemble de la forme

$$E_x \{ \alpha < f(x) < \beta \}, \quad E_x \{ \alpha \leq f(x) < \beta \} \quad \text{etc.}$$

Définition 1. Les fonctions $f_1(x), \dots, f_k(x)$ sont indépendantes (au sens de M. STEINHAUS) si

$$|E_{f_1} \times \dots \times E_{f_k}| = |E_{f_1}| \dots |E_{f_k}|$$

pour tous les ensembles $E_{f_1}, \dots, E_{f_k}$.

Définition 2. Les fonctions $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$) forment une suite de fonctions indépendantes, si chaque système fini de ces fonctions est composé des fonctions indépendantes au sens de la définition 1.

Lemme 1. Si les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont indépendantes et si l'intégrale $\int_0^1 f_2(x) dx$ existe, alors

$$\int_{E_{f_1}} f_2(x) dx = |E_{f_1}| \cdot \int_0^1 f_2(x) dx.$$

Soit

$$E_{f_1}^{(k,n)} = E_x \left\{ \frac{k}{n} \leq f_2(x) < \frac{k+1}{n} \right\} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 1, 2, \dots),$$

⁴⁾ Loc. cit. ^{3a)}.

alors

$$\begin{aligned} \int_{E_{f_1}} f_2(x) dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-mn}^{mn} |E_{f_1} \times E_{f_1}^{(k,n)}| \frac{k}{n} \\ &= |E_{f_1}| \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-mn}^{mn} |E_{f_2}^{(k,n)}| \frac{k}{n} = |E_{f_1}| \cdot \int_0^1 f_2(x) dx. \end{aligned}$$

Lemme 2. Si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont indépendants et si les intégrales

$$\int_0^1 f_1(x) dx, \int_0^1 f_2(x) dx \text{ et } \int_0^1 f_1(x) f_2(x) dx$$

existent, alors

$$\int_0^1 f_1(x) f_2(x) dx = \int_0^1 f_1(x) dx \cdot \int_0^1 f_2(x) dx.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 f_1(x) f_2(x) dx - \sum_{k=-mn}^{mn} \frac{k}{n} \int_{E_{f_2}^{(k,n)}} f_1(x) dx \right| \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=-mn}^{mn} \int_{E_{f_2}^{(k,n)}} f_1(x) \left[f_2(x) - \frac{k}{n} \right] dx \right| = 0, \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=-mn}^{mn} \int_{E_{f_2}^{(k,n)}} f_1(x) \left[f_2(x) - \frac{k}{n} \right] dx \right| \\ & \leq \frac{1}{n} \sum_{k=-mn}^{mn} \int_{E_{f_2}^{(k,n)}} |f_1(x)| dx \leq \frac{1}{n} \int_0^1 |f_1(x)| dx; \end{aligned}$$

or, d'après le lemme 1,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-mn}^{mn} \frac{k}{n} \int_{E_{f_2}^{(k,n)}} f_1(x) dx = \int_0^1 f_1(x) dx \cdot \int_0^1 f_2(x) dx.$$

De même, si les fonctions $f_1(x), \dots, f_k(x)$ sont indépendantes et si les intégrales

$$\int_0^1 f_i(x) dx, \quad \int_0^1 f_1(x) \dots f_i(x) dx \quad (i=1, \dots, k)$$

existent, on a

$$\int_0^1 f_1(x) \dots f_k(x) dx = \int_0^1 f_1(x) dx \dots \int_0^1 f_k(x) dx.$$

Lemme 3. Sous les hypothèses du lemme 2, nous avons

$$\int_{E_{f_1}} f_1(x) f_2(x) dx = \int_{E_{f_1}} f_1(x) dx \int_0^1 f_2(x) dx.$$

Soit, par exemple, $E_{f_1} = E\{\alpha \leq f_1(x) < \beta\}$. Posons

$$Z_r^{(n)} = E\left\{\alpha + \frac{r(\beta - \alpha)}{n} \leq f_1(x) < \alpha + \frac{(r+1)(\beta - \alpha)}{n}\right\} \quad (r=0, 1, \dots, n-1).$$

Nous avons évidemment

$$E_{f_1} = \sum_{r=0}^{n-1} Z_r^{(n)}, \quad Z_i^{(n)} Z_k^{(n)} = 0 \quad (i \neq k)$$

et

$$\int_{E_{f_1}} f_1(x) f_2(x) dx = \sum_{r=0}^{n-1} \int_{Z_r^{(n)}} f_1(x) f_2(x) dx,$$

$$\left| \int_{Z_r^{(n)}} f_1(x) f_2(x) dx - \left(\alpha + \frac{r(\beta - \alpha)}{n} \right) \int_{Z_r^{(n)}} f_2(x) dx \right| \leq \frac{\beta - \alpha}{n} \int_{Z_r^{(n)}} |f_2(x)| dx,$$

donc

$$\left| \int_{E_{f_1}} f_1(x) f_2(x) dx - \sum_{r=0}^{n-1} \left(\alpha + \frac{r(\beta - \alpha)}{n} \right) \int_{Z_r^{(n)}} f_2(x) dx \right| \leq \frac{\beta - \alpha}{n} \int_0^1 |f_2(x)| dx.$$

En passant à la limite pour $n \rightarrow \infty$, nous obtenons en vertu du lemme 1

$$\int_{E_{f_1}} f_1(x) f_2(x) dx = \int_{E_{f_1}} f_1(x) dx \cdot \int_0^1 f_2(x) dx.$$

Lemme 4. Si les fonctions $f_1(x), \dots, f_k(x)$ sont indépendantes, si les intégrales

$\int_0^1 f_j(x) dx$ ($j=1, 2, \dots, k$) et $\int_0^1 f_j(x) f_k(x) dx$ ($j=1, 2, \dots, k-1$) existent et $Z = E_{f_1} \times \dots \times E_{f_{k-1}}$, alors

$$\int_Z f_j(x) f_k(x) dx = |E_{f_1}| \dots |E_{f_{j-1}}| |E_{f_{j+1}}| \dots |E_{f_{k-1}}| \int_{E_{f_j}} f_j(x) dx \int_0^1 f_k(x) dx.$$

La démonstration est analogue à celle du lemme 3.

Dans certaines considérations on rencontre des ensembles définies par des inégalités simultanées

$$F_i(f_1(x), \dots, f_k(x)) \leq d_i \quad (\geq d_i) \quad (i=1, \dots, j),$$

les $F_i(x_1, \dots, x_k)$ étant continues. Il est assez facile de voir qu'un tel ensemble est une somme finie ou dénombrable d'ensembles disjoints de la forme $E_{f_i} \times \dots \times E_{f_k}$.

Remarquons aussi que si les fonctions $f_i(x)$ sont indépendantes et les fonctions $\Phi_i(x)$ continues (on peut supposer qu'elles sont seulement mesurables), alors les fonctions $\Phi_i(f_i(x))$ sont indépendantes.

2. Théorème 1. *Pour que les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ soient indépendantes, il suffit (la nécessité est évidente d'après le lemme 2) que l'on ait*

$$(1) \quad \int_0^1 e^{i(\xi f_1(x) + \eta f_2(x))} dx = \int_0^1 e^{i\xi f_1(x)} dx \cdot \int_0^1 e^{i\eta f_2(x)} dx \quad (i = \sqrt{-1})$$

quels que soient les nombres réels ξ, η .

Démonstration. Montrons par exemple que

$$\begin{aligned} & |E\{|f_1(x)| < M\} \times E\{|f_2(x)| < N\}| \\ &= |E\{|f_1(x)| < M\}| \cdot |E\{|f_2(x)| < N\}|. \end{aligned}$$

Remarquons d'abord que l'on peut supposer

$$(2) \quad |E\{|f_1(x)| = M\}| = 0 \text{ et } |E\{|f_2(x)| = N\}| = 0,$$

car dans le cas contraire nous pouvons choisir deux suites $\{M_p\}$ et $\{N_p\}$ croissantes ($M_p \rightarrow M$, $N_p \rightarrow N$) et telles que

$$|E\{|f_1(x)| = M_p\}| = 0 \text{ et } |E\{|f_2(x)| = N_p\}| = 0.$$

Nous démontrerons le théorème pour M_p et N_p et, en passant à la limite pour $p \rightarrow \infty$, nous obtiendrons le théorème pour M et N .

On sait que

$$(3) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin M\xi}{\xi} e^{i\gamma\xi} d\xi = \begin{cases} 1 & \text{pour } |\gamma| < M \\ \frac{1}{2} & \text{pour } |\gamma| = M \\ 0 & \text{pour } |\gamma| > M \end{cases};$$

il en résulte sans peine que

$$(4) \quad \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin M\xi \sin N\eta}{\xi \eta} e^{i(\gamma_1\xi + \gamma_2\eta)} d\xi d\eta = \begin{cases} 1 & \text{pour } |\gamma_1| < M \text{ } |\gamma_2| < N \\ \frac{1}{2} & \text{pour } |\gamma_1| < M \text{ } |\gamma_2| = N \text{ ou } |\gamma_1| = M \text{ } |\gamma_2| < N \\ \frac{1}{4} & \text{pour } |\gamma_1| = M \text{ } |\gamma_2| = N \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

D'après (2), (3) et (4) nous avons

$$\begin{aligned} |E\{|f_1(x)| < M\}| &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin M\xi}{\xi} \left[\int_0^1 e^{i\xi f_1(x)} dx \right] d\xi, \\ |E\{|f_2(x)| < N\}| &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin N\eta}{\eta} \left[\int_0^1 e^{i\eta f_2(x)} dx \right] d\eta, \\ |E\{|f_1(x)| < M\} \times E\{|f_2(x)| < N\}| &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin M\xi \sin N\eta}{\xi \eta} \left[\int_0^1 e^{i(\xi f_1(x) + \eta f_2(x))} dx \right] d\xi d\eta; \end{aligned}$$

en employant (1) nous obtenons notre théorème.

Si l'on suppose que $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont intégrables avec chaque puissance, il s'ensuit de même que (1) est équivalent à

$$(5) \quad \int_0^1 f_1^k(x) f_2^l(x) dx = \int_0^1 f_1^k(x) dx \cdot \int_0^1 f_2^l(x) dx$$

pour tous les k et l naturels⁵⁾.

3. M. STEINHAUS a introduit les fonctions $\mathfrak{F}_n(x)$ ⁶⁾ qui jouissent des propriétés suivantes:

⁵⁾ Pour une classe de fonctions moins étendue, cette proposition a été obtenue par M. L. KANTOROVITCH (L'Enseignement Mathématique (1930) p. 18).

⁶⁾ Loc. cit ^{3a)}.

1. $0 \leq \vartheta_i(x) \leq 1$;
2. $|E_x \{ \vartheta_i(x) \in L \}| = |L|$ ($i = 1, 2, \dots$; $L \subset \langle 0, 1 \rangle$ mesurable);
3. les fonctions $\vartheta_i(x)$ sont indépendantes.

Posons $\psi_n(x) = 2\vartheta_n(x) - 1$. Les fonctions $\psi_n(x)$ sont aussi indépendantes. Calculons par exemple

$$|E_x \{ |\sum_{k=1}^n a_k \psi_k(x)| < t \}|.$$

Il est facile de voir, que

$$|E_x \{ |\sum_{k=1}^n a_k \psi_k(x)| < t \}| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t\xi}{\xi} \left[\int_0^1 e^{i\xi \sum_{k=1}^n a_k \psi_k(x)} dx \right] d\xi,$$

car $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t\xi}{\xi} e^{i\xi \sum_{k=1}^n a_k \psi_k(x)} d\xi$ est la fonction caractéristique de

l'ensemble $E_x \{ |\sum_{k=1}^n a_k \psi_k(x)| < t \}$. Or, on a d'après 2,

$$\int_0^1 e^{i\xi \sum_{k=1}^n a_k \psi_k(x)} dx = \int_0^1 e^{i\xi \sum_{k=1}^n a_k (2x-1)} dx = \frac{\sin a_k \xi}{\xi},$$

donc d'après 3

$$\int_0^1 e^{i\xi \sum_{k=1}^n a_k \psi_k(x)} dx = \prod_{k=1}^n \int_0^1 e^{i\xi a_k \psi_k(x)} dx = \prod_{k=1}^n \frac{\sin a_k \xi}{\xi};$$

nous aurons donc

$$|E_x \{ |\sum_{k=1}^n a_k \psi_k(x)| < t \}| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t\xi}{\xi^{n+1}} \sin a_1 \xi \dots \sin a_n \xi d\xi.$$

La propriété 2 donne presque immédiatement l'égalité suivante:

$$\begin{aligned} \int \dots \int_{|x_k| < 1, |\sum_{k=1}^n a_k x_k| < t} dx_1 \dots dx_n &= 2^n |E_x \{ |\sum_{k=1}^n a_k \psi_k(x)| < t \}| \\ &= \frac{2^n}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t\xi}{\xi^{n+1}} \sin a_1 \xi \dots \sin a_n \xi d\xi. \end{aligned}$$

Nous avons en même temps retrouvé une formule importante de M. G. PÓLYA ⁷⁾. Notre méthode permet aussi de calculer certaines intégrales des fonctions qui dépendent d'une infinité dénombrable de variables.

4. Dans la suite nous supposons

$$\int_0^1 f_i(x) dx = 0 \quad \int_0^1 f_i^2(x) dx = b_i.$$

Théorème 2. Si $b_i = 1$ et $\int_0^1 |f_i(x)|^k dx < M$

($i = 1, 2, \dots; k = 3, 4, \dots$), alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (n^{-1/2} \sum_{i=1}^n f_i(x))^k dx = \frac{2^{k/2} + \infty}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-t^2} dt.$$

Démonstration. Ecrivons $\exp x$ pour e^x ; nous avons d'après le lemme 2

$$\int_0^1 \exp(z n^{-1/2} \sum_{i=1}^n f_i(x)) dx = \prod_{i=1}^n \int_0^1 \exp(z n^{-1/2} f_i(x)) dx,$$

z étant un nombre complexe arbitraire, et

$$\int_0^1 \exp(z n^{-1/2} f_i(x)) dx = 1 + \frac{z^2}{2} \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{z^k}{k!} n^{-k/2} \int_0^1 f_i^k(x) dx.$$

Pour $|z| \leq R$ nous avons

$$\left| \sum_{k=3}^{\infty} \frac{z^k}{k!} n^{-k/2} \int_0^1 f_i^k(x) dx \right| = O(n^{-1/2}),$$

donc

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \int_0^1 \exp(z \cdot n^{-1/2} f_i(x)) dx = e^{\frac{z^2}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2^k \cdot k!}$$

uniformément dans le cercle $|z| \leq R$. D'autre part

$$(7) \quad \int_0^1 \exp(z n^{-1/2} \sum_{i=1}^n f_i(x)) dx = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \int_0^1 (n^{-1/2} \sum_{i=1}^n f_i(x))^k dx.$$

⁷⁾ G. Pólya, Berechnung eines bestimmten Integrals, Math. Ann. 74 (1913) p. 204—212 (en particulier p. 204—208).

D'après le bien connu théorème de WEIERSTRASS sur la convergence d'une suite de séries de puissances, (6) et (7) donnent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} \int_0^1 (n^{-1/2} \sum_{i=1}^n f_i(x)) dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \text{ impair} \\ \frac{1}{(k/2)! 2^{k/2}} & \text{pour } k \text{ pair.} \end{cases}$$

Cette relation est équivalente à notre théorème.

Théorème 3. Si

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i < \infty,$$

la série

$$\sum_{i=1}^n f_i(x)$$

est convergente presque partout.

En s'appuyant sur le lemme 4 et les remarques finales du n° 1, nous n'avons qu'à répéter la démonstration d'un théorème analogue de M. STEINHAUS⁸⁾.

Comme une conséquence simple, nous obtenons ce corollaire:
Si

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{i^2} < \infty,$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n f_i(x) = 0$$

presque partout.

En effet, la série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i(x)}{i}$ est convergente presque partout (voir théorème 3); en se servant d'un théorème bien connu de KRONECKER, on obtient notre proposition. Cette proposition correspond à la „loi forte des grands nombres“ de M. A. KOLMOGOROFF. Nous pouvons démontrer cette loi d'une façon très simple, sous des conditions un peu différentes.

Théorème 4. Si chaque quatre fonctions de la suite $\{f_i(x)\}$ sont indépendantes et

⁸⁾ Loc. cit^{3 a)}, p. 34—35.

1. $\int_0^1 f_i^4(x) dx < q b_i^2 \quad (q \geq 1; \quad i = 1, 2, \dots),$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-2} \sum_{i=1}^n b_i)^2 < \infty,$

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n f_i(x) = 0 \text{ presque partout.}$$

Démonstration. Observons que

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_i^3(x) f_k(x) dx &= \int_0^1 f_i^3(x) dx \int_0^1 f_k(x) dx = 0 \quad (i \neq k), \\ \int_0^1 f_i^2(x) f_k^2(x) dx &= b_i b_k \quad (i \neq k), \\ \int_0^1 f_{i_1}(x) f_{i_2}(x) f_{i_3}(x) f_{i_4}(x) dx &= 0 \quad (i_1 < i_2 < i_3 < i_4); \end{aligned}$$

il en résulte sans peine que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (n^{-1} \sum_{i=1}^n f_i(x))^4 dx \leq 6q \sum_{n=1}^{\infty} (n^{-2} \sum_{i=1}^n b_i)^2 < \infty.$$

D'après un théorème connu, on en déduit que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-1} \sum_{i=1}^n f_i(x))^4$$

est convergente presque partout, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n f_i(x) = 0$$

presque partout.

5. Sous les conditions du théorème 4 (la condition 2 exclue), nous avons le

Théorème 5. Si

$$t < (\sum_{i=1}^n b_i)^{1/2} = B_i^{1/2},$$

alors

$$|E| = |E_x \{ |\sum_{i=1}^n f_i(x)| < t \}| < \frac{1}{2} \left[2 + \sigma - (\sigma^2 + 4(1 - \frac{t^2}{B_n}))^{1/2} \right],$$

où $\sigma = (q - 1)^{1/2} + 1$.

Démonstration ⁹⁾. Nous avons évidemment

$$\begin{aligned}
 & t^2 \geq t^2 |E| \\
 & \geq \int_E \left| \sum_{i=1}^n f_i(x) \right|^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_E f_i^2(x) dx - 2 \sum_{1 \leq i < k \leq n} \int_E f_i(x) f_k(x) dx \\
 (8) \quad & = |E| \cdot B_n - \sum_{i=1}^n \int_{CE} [f_i^2(x) - b_i] dx - 2 \sum_{1 \leq i < k \leq n} \int_{CE} f_i(x) f_k(x) dx \\
 & \geq |E| \cdot B_n - \left| \sum_{i=1}^n \int_{CE} [f_i^2(x) - b_i] dx \right| - 2 \left| \sum_{1 \leq i < k \leq n} \int_{CE} f_i(x) f_k(x) dx \right|
 \end{aligned}$$

(CE = l'ensemble complémentaire à E). Nous pouvons supposer que

$$\int_0^1 f_i^4(x) dx > b_i^2$$

(dans le cas contraire, c'est à dire quand

$$\int_0^1 f_i^4(x) dx = b_i^2$$

pour certains i , nous aurons $f_i^2(x) = b_i$ presque partout, et certains termes manqueront). Il est aisé de voir que les fonctions

$$(A_i - b_i^2)^{-1/2} (f_i^2(x) - b_i) \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (A_i = \int_0^1 f_i^4(x) dx)$$

sont orthogonales et normées ainsi que les fonctions

$$b_i^{-1/2} b_k^{-1/2} f_i(x) f_k(x) \quad (i < k).$$

En employant l'inégalité de BESSEL, nous obtenons après quelques transformations faciles

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{i=1}^n \int_{CE} [f_i^2(x) - b_i] dx \right| < (q-1)^{1/2} B_n (1 - |E|)^{1/2}, \\
 & \left| \sum_{1 \leq i < k \leq n} \int_{CE} f_i(x) f_k(x) dx \right| < B_n (1 - |E|)^{1/2},
 \end{aligned}$$

donc, en comparant avec (8),

$$|E| \cdot B_n - \sigma B_n (1 - |E|)^{1/2} < t^2.$$

Cette inégalité implique notre théorème.

⁹⁾ Nous employons une méthode due à M. A. Zygmund, avec quelques modifications.

Théorème 6. *Sous les conditions du théorème 3, nous avons*

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n f_i(x) \right| dx \geq R(q) B_n^{1/2} \quad (10)$$

$$\text{avec } R(q) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} (2 + \sigma - (\sigma^2 + 3)^{1/2}) \right].$$

Démonstration. Soit

$$t = \frac{1}{2} B_n^{1/2} \text{ et } F = E \left\{ \left| \sum_{i=1}^n f_i(x) \right| > t \right\};$$

d'après le théorème 5,

$$|F| > 1 - \frac{1}{2} (2 + \sigma - (\sigma^2 + 3)^{1/2}) = 2R(q),$$

donc

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n f_i(x) \right| dx > t \cdot |F| = R(q) B_n^{1/2}.$$

Nous pouvons affirmer généralement que

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n f_i(x) \right|^k dx > t^k \cdot |F| = \frac{R(q)}{2^{(k-1)/2}} B_n^{k/2} \quad (k > 0).$$

6. L'analogie entre les fonctions indépendantes et les „variables éventuelles indépendantes“ est évidente. Nous voulons montrer sur un exemple, comment on peut appliquer les fonctions indépendantes au calcul des probabilités. Nous démontrerons la proposition suivante:

Soit $\{x_i(t)\}$ une suite de fonctions définies dans l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$ et telles que

$$\int_0^1 x_i(t) dt = 0 \quad (i = 1, 2, \dots), \quad \sum_{i=1}^{\infty} i^{-2} \int_0^1 x_i^2(t) dt < \infty.$$

La probabilité que, pour une suite $\{t_n\}$ choisie au hasard ($0 \leq t_n \leq 1$), on ait

¹⁰⁾ Cette relation pour les fonctions de Rademacher a été obtenue par MM. S. Kaczmarz et H. Steinhaus (Theorie der Orthogonalreihen, Monogr. Mat. 6 (1935) p. 132). Pour la démonstration, les auteurs utilisent l'inégalité de M. Khintchine et ils obtiennent la constante $1/8$. (Pour les fonctions de Rademacher $R(q) = R(1) = 1/8 > 1/8$).

$$(P) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i(t_i) = 0,$$

est 1.

(C'est une forme de la „loi forte des grands nombres“).

Démonstration. D'après une interprétation connue¹¹⁾, il s'agit de démontrer que la mesure, dans l'espace de suites $\{t_n\}$ ($0 \leq t \leq 1$) (cet espace est le produit $X_1 \times X_2 \times \dots$; $X_i = \langle 0, 1 \rangle$), de l'ensemble des suites pour lesquelles (P) est rempli, est égale à 1. M. STEINHAUS a montré¹²⁾ que les fonctions $\vartheta_n(t)$ définissent la mesure dans l'espace considéré et que, d'après les propriétés de ces fonctions, (P) équivaut à

$$(P') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i(\vartheta_i(t)) = 0$$

presque partout.

On voit sans peine que $\{x_i(\vartheta(t))\}$ est une suite de fonctions indépendantes, qui remplit les conditions du corollaire du théorème 3; il en résulte la relation (P'), donc aussi (P).

Il est assez clair que l'on peut identifier les „variables éventuelles indépendantes“, avec les fonctions indépendantes; cette interprétation nous permettra de réduire les notions du calcul des probabilités à celles de la théorie des fonctions de variables réelles.

¹¹⁾ Z. Łomnicki et S. Ulam, Sur la théorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilités I., Fund Math, 23 (1934) p. 237–278.

¹²⁾ Loc. cit ^{3a)}, p. 23–28.

(Reçu par la Rédaction le 10 1. 1936).

Sur les fonctions indépendantes (II) ¹⁾
(La loi exponentielle; la divergence de séries)

par

M. KAC et H. STEINHAUS (Lwów).

Cette communication contient deux propositions sur les fonctions indépendantes. La première correspond à un théorème connu de M. LINDBERG ²⁾, la deuxième concerne la divergence de série de fonctions indépendantes. Notre méthode ressemble à celle de M. BERNSTEIN ³⁾, mais elle est plus simple.

Définition. Les fonctions $\varphi_k(x)$ ($k=1, 2, \dots$; $0 \leq x \leq 1$) sont également intégrables s'il existe pour chaque $\varepsilon > 0$ un nombre $M(\varepsilon)$ tel que l'on ait

$$\left| \int_{\substack{x \\ E(|\varphi_k(x)| > M)}} \varphi_k(x) dx \right| < \varepsilon \quad (k=1, 2, \dots).$$

Théorème 1. Si $\{f_k(x)\}$ est une suite de fonctions indépendantes, si en outre

$$(1) \quad \int_0^1 f_k(x) dx = 0 \quad (k=1, 2, \dots),$$

¹⁾ M. Kac, Sur les fonctions indépendantes (I), Stud. Math. 6 (1936) p. 46—58.

²⁾ I. W. Lindeberg, Eine Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschr. 15 (1922) p. 211—225. Voir aussi A. Khintchine, Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse der Mathematik, Berlin 1934.

³⁾ S. Bernstein, Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes, Math. Ann. 97 (1927) p. 1—59; chapitre I.

$$(2) \quad \int_0^1 f_k^2(x) dx = 1 \quad (k=1, 2, \dots),$$

et si les $f_k^2(x)$ sont également intégrables, alors

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |E(\alpha < (2n)^{-1/2} \sum_{k=1}^n f_k(x) < \beta)| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2} dt.$$

Lemme 1. Si $\{F_n(x)\}$ est une suite de fonctions mesurables, définies dans $\langle 0, 1 \rangle$, telle que

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{ivF_n(x)} dx = f(v)$$

uniformément en v , et

$$(5) \quad \Im(f(v)) = 0^4,$$

$$(6) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(v)| dv < \infty,$$

alors

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |E(\alpha < F_n(x) < \beta)| = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta v - \sin \alpha v}{v} f(v) dv.$$

Démonstration. Pour établir ce lemme, introduisons $\psi(x)$, la fonction caractéristique de l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$; soit ε un nombre positif assez petit. Définissons les fonctions auxiliaires $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$, admettant des dérivées continues jusqu'au deuxième ordre, de manière que:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= 0 \text{ pour } x \leq \alpha, \quad x \geq \beta, & \psi_2(x) &= 0 \text{ pour } x \leq \alpha - \varepsilon, \quad x \geq \beta + \varepsilon, \\ \psi_1(x) &= 1 \text{ pour } \alpha + \varepsilon \leq x \leq \beta - \varepsilon, & \psi_2(x) &= 1 \text{ pour } \alpha \leq x \leq \beta, \\ 0 < \psi_1(x) &< 1, & 0 < \psi_2(x) &< 1. \end{aligned}$$

Nous aurons évidemment

$$\psi_1(x) \leq \psi(x) \leq \psi_2(x),$$

donc

$$\begin{aligned} (8) \quad \int_0^1 \psi_1(F_n(x)) dx &\leq \int_0^1 \psi(F_n(x)) dx \\ &= |E(\alpha < F_n(x) < \beta)| \leq \int_0^1 \psi_2(F_n(x)) dx. \end{aligned}$$

⁴⁾ $\Im z$ désigne la partie imaginaire de z .

La formule de Fourier

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dv \int_\alpha^\beta \psi_1(t) \cos v(x-t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \mathcal{R} \int_0^\infty \left[e^{ivx} \int_\alpha^\beta \psi_1(t) e^{-ivt} dt \right] dv \quad ^5\end{aligned}$$

est valide; on en tire, en remplaçant le paramètre x par $F_n(x)$,

$$(9) \quad \int_0^1 \psi_1(F_n(x)) dx = \frac{1}{\pi} \mathcal{R} \int_0^\infty \Phi_n(v) \left[\int_\alpha^\beta \psi_1(t) e^{-ivt} dt \right] dv,$$

où

$$\Phi_n(v) = \int_0^1 e^{ivF_n(x)} dx$$

et l'interversion des intégrations est justifiée par les relations

$$|\Phi_n(v)| \leq 1, \quad \int_\alpha^\beta \psi_1(t) e^{-ivt} dt = O\left(\frac{1}{v^2}\right);$$

les mêmes relations et (4) permettent de voir sans peine que (9) implique

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \psi_1(F_n(x)) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(v) \left[\int_\alpha^\beta \psi_1(t) \cos vtdt \right] dv.$$

On obtient de la même manière la formule

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \psi_2(F_n(x)) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(v) \left[\int_{\alpha-\varepsilon}^{\beta+\varepsilon} \psi_2(t) \cos vtdt \right] dv.$$

(8), (10) et (11) donnent

$$\begin{aligned}(12) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(v) \left[\int_\alpha^\beta \psi_1(t) \cos vtdt \right] dv &\leq \lim_x |E(\alpha < F_n(x) < \beta)| \\ &\leq \overline{\lim}_x |E(\alpha < F_n(x) < \beta)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(v) \left[\int_{\alpha-\varepsilon}^{\beta+\varepsilon} \psi_2(t) \cos vtdt \right] dv;\end{aligned}$$

or, les inégalités

⁵⁾ $\mathcal{R}z$ désigne la partie réelle de z .

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \frac{\sin \beta v - \sin \alpha v}{v} dv - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \left[\int_{\alpha}^{\beta} \psi_1(t) \cos vt dt \right] dv \right| \\
& \leq \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_0^{\infty} |f(v)| dv, \\
& \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \frac{\sin \beta v - \sin \alpha v}{v} dv - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \left[\int_{\alpha-\varepsilon}^{\beta+\varepsilon} \psi_2(t) \cos vt dt \right] dv \right| \\
& \leq \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_0^{\infty} |f(v)| dv
\end{aligned}$$

sont vraies pour tous les ε positifs, ce qui conduit avec (12) à la thèse du lemme.

Lemme 2. Si la limite $f(v)$ de $\phi_n(v)$ est nulle pour les v non nuls et si la convergence est uniforme dans chaque intervalle fini qui ne contient pas le point $v = 0$, alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |E(|F_n(x)| < M)| = 0$$

quel que soit M . Il est clair que la suite $\{F_n(x)\}$ est divergente presque partout.

La démonstration n'est qu'un remaniement facile de la démonstration du lemme 1.

Lemme 3. Si

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \varphi^2(x) dx = 1,$$

alors

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 e^{i v \varphi(x) / \sqrt{2n}} dx \right]^n = e^{-v^2/4}.$$

Démonstration. Soit

$$F(v, x) = e^{i v \varphi(x) / \sqrt{2n}} dx = \cos v \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2n}} + i \sin v \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2n}};$$

les formules

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} \cos(\vartheta_1(y)y) \quad (0 < \vartheta_1(y) < 1),$$

$$\sin y = y - \frac{y^2}{2} \sin(\vartheta_2(y)y) \quad (0 < \vartheta_2(y) < 1)$$

donnent

$$F(v, x) = 1 + \frac{iv\varphi(x)}{\sqrt{2n}} - \frac{v^2\varphi^2(x)}{4n} \left\{ \cos \left[\vartheta_1(v, x) \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2n}} \right] + i \sin \left[\vartheta_2(v, x) \frac{v\varphi(x)}{\sqrt{2n}} \right] \right\},$$

$$\int_0^1 F(v, x) dx = 1 - \frac{v^2}{4n} \int_0^1 \varphi^2(x) \left\{ \cos \left[\vartheta_1(v, x) \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2n}} \right] + i \sin \left[\vartheta_2(v, x) \frac{v\varphi(x)}{\sqrt{2n}} \right] \right\} dx.$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left[\vartheta_1(v, x) \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2n}} \right] = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left[\vartheta_2(v, x) \frac{v\varphi(x)}{\sqrt{2n}} \right] = 0$$

presque partout, donc, $\sin y$ et $\cos y$ étant bornés, on a, d'après un théorème connu,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \varphi^2(x) \left\{ \cos \left[\vartheta_1(v, x) \frac{v\varphi(x)}{\sqrt{2n}} \right] + i \sin \left[\vartheta_2(v, x) \frac{v\varphi(x)}{\sqrt{2n}} \right] \right\} dx = \int_0^1 \varphi^2(x) dx = 1,$$

et nous voyons en même temps que la convergence est uniforme par rapport à v . Nous pouvons donc écrire

$$\int_0^1 e^{iv\varphi(x)/\sqrt{2n}} dx = 1 - \frac{v^2}{4n} (1 + \varepsilon_n(v)), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(v) = 0;$$

la convergence étant uniforme, on en déduit (13). Ainsi le lemme 3 est démontré. Il est aisé de voir qu'un raisonnement tout à fait analogue conduit à la généralisation suivante du lemme démontré:

Lemme 4. Si

$$\int_0^1 \varphi_k(x) dx = 0, \quad \int_0^1 \varphi_k^2(x) dx = 1 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

et si les $\varphi_k^2(x)$ sont également intégrables, alors

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \int_0^1 e^{iv\varphi_k(x)/\sqrt{2n}} dx = e^{-\frac{v^2}{4}}.$$

Démonstration du théorème 1. Posons

$$F_n(x) = (2n)^{-1/2} \sum_{k=1}^n f_k(x);$$

les fonctions $f_k(x)$ étant indépendantes, on a

$$(15) \quad \Phi_n(v) = \int_0^1 e^{ivF_n(x)} dx = \prod_{k=1}^n \int_0^1 e^{ivf_k(x)/\sqrt{2n}} dx.$$

Remarquons maintenant que l'intégrale (7) pour $f(v) = e^{-\frac{v^2}{4}}$ peut être évaluée grâce à la formule classique

$$(16) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \beta v - \sin \alpha v}{v} e^{-\frac{v^2}{4}} dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-t^2} dt;$$

(7), (14), (15) et (16) fournissent la thèse (3) du théorème 1.

Remarque 1. Pour établir le théorème classique de Laplace, définissons les fonctions

$$\varrho_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq p \\ 0, & p < x \leq 1 \end{cases}, \quad \varrho_2(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq p^2, p \leq x \leq p + pq \\ 0, & p^2 < x < p, p + pq < x \leq 1 \end{cases} \text{ etc. } (p + q = 1).$$

Le théorème de Laplace équivaut à la proposition suivante:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |E(np + \alpha \sqrt{2npq} < \sum_{k=1}^n \varrho_k(x) < np + \beta \sqrt{2npq})| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-t^2} dt.$$

Posons $\mu_k(x) = \frac{\varrho_k(x) - p}{\sqrt{pq}}$; les fonctions $\mu_k(x)$ sont indépendantes, uniformément bornées et

$$\int_0^1 \mu_k(x) dx = 0, \quad \int_0^1 \mu_k^2(x) dx = 1.$$

En appliquant le théorème 1 à ces fonctions, nous obtenons le théorème de Laplace.

Remarque 2. On peut donner au théorème 1 la forme (moins générale) suivante:

Soit $f(x)$ une fonction définie dans $\langle 0, 1 \rangle$ telle que

$$\int_0^1 f(x) dx = 0, \quad \int_0^1 f^2(x) dx = 1;$$

la mesure (n -dimensionnelle), de l'ensemble E_n de points $P(t_1, \dots, t_n)$ ($0 \leq t_k \leq 1$) pour lesquels les inégalités

$$\alpha < (2n)^{-1/2} \sum_{k=1}^n f(t_k) < \beta$$

ont lieu, tend vers $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2} dt$, quand n tend vers ∞ .

En effet, en introduisant les fonctions $\vartheta_n(x)$ de M. STEINHAUS⁶⁾, nous aurons

$$|E_n| = \left| E \left(\alpha < (2n)^{-1/2} \sum_{k=1}^n f(\vartheta_k(x)) < \beta \right) \right|,$$

et les fonctions $f(\vartheta_k(x))$ sont indépendantes et remplissent les conditions du théorème 1. Cette interprétation donne en particulier le théorème suivant:

La probabilité que la "somme Riemanienne" $n^{-1} \sum_{k=1}^n f(t_k)$, où les $t_1, t_2, \dots, t_k$ sont choisis au hasard, approche $\int_0^1 f(x) dx$ avec une erreur moindre que $\alpha/\sqrt{n}$, tend vers $2/\sqrt{\pi} \int_0^{\alpha/\sqrt{2}} e^{-t^2} dt$, quand n tend vers ∞ .

Théorème 2. Si $\{f_k(x)\}$ est une suite de fonctions indépendantes, qui remplit les conditions du théorème 1 et si

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0^?),$$

alors la série

$$(17) \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(x)$$

diverge presque partout.

Démonstration. Quand on pose

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k f_k(x),$$

⁶⁾ Loc. cit. ¹⁾, p. 51–52.

⁷⁾ Cette condition n'est essentielle que pour notre démonstration; quand elle n'est pas remplie, le terme général de (17) ne tend vers zéro que dans un ensemble de mesure nulle, ce qui implique la thèse.

on peut écrire

$$\int_0^1 e^{i v F_n(x)} dx = \prod_{k=1}^n \int_0^1 e^{i v c_k f_k(x)} dx$$

et un raisonnement tout à fait analogue à la démonstration du lemme 3 donne immédiatement la divergence uniforme en v ($|v| > \varepsilon$) vers 0 du produit au second membre (on utilise ici le fait que le produit $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - a_k^2)$ est nul si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \infty$ et $a_k \rightarrow 0$); d'après le lemme 2 nous obtenons la divergence presque partout de $\{F_n(x)\}$ et par là celle de la série (17).

(Reçu par la Rédaction le 10. 2. 1936).

Sur l'interpolation (II)

par

J. MARCINKIEWICZ (Wilno).

Notions et remarques préliminaires.

Nous appellerons¹⁾ polynôme interpolant d'ordre n de la fonction $f(x)$ le polynôme

$$U_n(x) = U_n(f, x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{i=1}^n (a_i^{(n)} \cos ix + b_i^{(n)} \sin ix)$$

défini par les $2n+1$ égalités

$$\begin{aligned} 0.1 \quad U_n(f, x_i) &= f(x_i) & (i = 0, 1, 2, \dots, 2n), \\ x_i &= i \frac{2\pi}{2n+1} & (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

L'expression analytique du polynôme $U_n(f, x)$ est très simple, à savoir

$$0.2 \quad U_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) d\varphi_n(t),$$

où

$$D_n(u) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin u/2}$$

et où $\varphi_n(t)$ désigne la fonction définie par les formules

$$0.3 \quad \varphi_n(x) = x_{i+1} \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

pour $x_i < x \leq x_{i+1}$.

Les égalités suivantes²⁾ (qui sont fondamentales pour toute la théorie des polynômes $U_n(f, x)$),

¹⁾ Voir Jackson [1] p. 110 sqq.

²⁾ Jackson [1] p. 112–113.

$$0.4 \quad \int_0^{2\pi} \sin px d\varphi_n(x) = 0 \quad (p \text{ et } n \text{ entiers arbitraires})$$

$$\int_0^{2\pi} \cos px d\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ n'est pas un multiple de } 2n+1, \\ \pi & \text{si } p \neq 0 \text{ est un multiple de } 2n+1 \end{cases}$$

sont bien connues.

En particulier il en résulte la formule (0.2) et

$$0.5 \quad \begin{aligned} a_i^{(n)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos it d\varphi_n(t), \\ b_i^{(n)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin it d\varphi_n(t). \end{aligned} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

La série de Fourier de la fonction $f(x)$

$$0.6 \quad S(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

étant supposée absolument convergente, on peut exprimer les coefficients $a_i^{(n)}$ et $b_i^{(n)}$ à l'aide des a_i et b_i ; en effet, en portant $S(f)$ au lieu de f dans (0.5) et en appliquant (0.4), on obtient³⁾

$$0.7 \quad \begin{aligned} a_i^{(n)} &= a_i + \sum_{t=1}^{\infty} (a_{t(2n+1)+i} + a_{t(2n+1)-i}), \\ b_i^{(n)} &= b_i + \sum_{t=1}^{\infty} (b_{t(2n+1)+i} - b_{t(2n+1)-i}). \end{aligned}$$

Pour simplicité des énoncés à suivre, nous désignerons par A^p la classe de fonctions $f(x)$ absolument continues, s'annulant pour $x=0, 2\pi$, et admettant une dérivée de la classe L^p ⁴⁾, par $U'_n(f, x)$ la dérivée du polynôme $U_n(f, x)$, par f' la dérivée de f , enfin par $|f|_p$ l'expression

$$\left(\int_0^{2\pi} |f|^p dx \right)^{1/p}.$$

³⁾ Ces formules sont connues; voir p. ex. Tonelli [1] p. 162, Marcinkiewicz [1] et [2].

⁴⁾ On dit que $f \in L^p$, si $\int_0^{2\pi} |f|^p dx < \infty$.

Soit encore $A^{(1)} = A$ et

$$0.8 \quad S_n(x) = S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^n (a_i \cos ix + b_i \sin ix).$$

Dans cette note je considère les polynômes $U'_n(f, x)$ des fonctions $f \in A$.

Le premier paragraphe contient le théorème de la localisation, le deuxième les critères ainsi dits⁵⁾ de DIRICHLET, de DINI et de M. de la VALLÉE POUSSIN, le troisième un théorème (que j'appelle le théorème de M. KOLMOGOROFF) concernant la convergence des suites lacunaires, le quatrième des résultats concernant la convergence en moyenne, enfin le cinquième et le sixième respectivement un théorème analogue à celui de MM. YOUNG et HAUSDORFF dans la théorie des séries de Fourier et des théorèmes relatifs au problème de l'équiconvergence des suites $U'_n(f, x)$ et $S'_n(f, x)$.

Dans les deux derniers paragraphes j'ai introduit les polynômes $V'_n(f, x)$ jouissant de propriétés analogues à celles des sommes de FEJÉR et j'ai résolu quelques problèmes relatifs à la convergence unilatérale, posés pour la théorie des séries de Fourier par M. A. ZYGMUND⁶⁾.

La plupart de ces résultats a été publiée en polonais dans ma note [1]⁷⁾. Les problèmes de la note présente sont modélés plus ou moins sur ceux de la théorie des séries de Fourier. Le lecteur s'en apercevra sans peine, c'est la raison pour laquelle je donne souvent seulement les idées des démonstrations. Je suppose chez le lecteur la connaissance des éléments de la théorie des séries de Fourier.

§ 1.

Théorème 1. *Si la fonction $f \in A$ est constante dans un intervalle (α, β) , alors la suite $U'_n(f, x)$ converge uniformément vers zéro dans chaque intervalle (α', β') , $(\alpha < \alpha' < \beta' < \beta)$.*

La démonstration est basée sur deux lemmes:

Lemme 1. *Si la série de Fourier d'une fonction $f'(x)$ est absolument convergente, la suite $U'_n(f, x)$ converge uniformément vers f' .*

C'est une conséquence de (0.7).

⁵⁾ Voir p. ex. Zygmund [1].

⁶⁾ Zygmund [2].

⁷⁾ Voir la bibliographie à la fin.

Lemme 2. On a pour toute fonction $g(x) \in A$

$$1.1 \quad \int_0^{2\pi} g(x) \cos(n + 1/2)x d\varphi_n(x) = o(n^{-1}).$$

En effet

$$1.2 \quad \begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi} g(x) \cos(n + 1/2)x d\varphi_n(x) \\ &= - \int_0^{2\pi} g\left(x + \frac{2\pi}{2n+1}\right) \cos(n + 1/2)x d\varphi_n(x), \end{aligned}$$

donc

$$1.3 \quad 2I_n = \int_0^{2\pi} h_n(x) \cos(n + 1/2)x d\varphi_n(x)$$

avec

$$h_n(x) = g(x) - g\left(x + \frac{2\pi}{2n+1}\right).$$

En intégrant par parties le second membre de (1.3), on obtient

$$1.4 \quad 2I_n = - \int_0^{2\pi} h'_n(x) \int_0^x \cos(n + 1/2)t d\varphi_n(t) dx,$$

et comme

$$1.5 \quad \left| \int_0^x \cos(n + 1/2)t d\varphi_n(t) \right| \leq \frac{2\pi}{2n+1}, \quad \int_0^{2\pi} |h'_n(x)| dx \rightarrow 0,$$

la formule (1.4) donne (1.1).

Démonstration du théorème 1. En vertu du lemme 1, nous pouvons supposer $f(x) = 0$ pour $\alpha \leq x \leq \beta$. Le point x étant un point intérieur du segment (α, β) , on a d'après (0.2)

$$1.6 \quad \begin{aligned} U'_n(f, x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\partial}{\partial x} D_n(x-t) d\varphi_n(t) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{(n + 1/2) \cos(n + 1/2)(x-t)}{2 \sin \frac{x-t}{2}} d\varphi_n(t) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin(n + 1/2)(x-t)}{4 \sin^2 \frac{x-t}{2}} \cos \frac{x-t}{2} d\varphi_n(t) \end{aligned}$$

$$= (n + 1/2) \cos(n + 1/2) x \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(t) \cos(n + 1/2) t}{2 \sin \frac{x-t}{2}} d\varphi_n(t) \\ - \sin(n + 1/2) x \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\cos \frac{x-t}{2}}{4 \sin^2 \frac{x-t}{2}} \cos(n + 1/2) t d\varphi_n(t).$$

Les fonctions

$$f(t)/2 \sin \frac{x-t}{2} \text{ et } f(t) \cos \frac{x-t}{2} / 4 \sin^2 \frac{x-t}{2}$$

étant de classe A , on obtient d'après le lemme 2

$$1.7 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} U'_n(f, x) = 0.$$

Nous laissons au lecteur la démonstration que la formule (1.7) subsiste uniformément dans chaque intervalle (α', β') , $(\alpha < \alpha' < \beta' < \beta)$.

§ 2.

Théorème 2. *Si la fonction $f \in A$ est telle que pour un $x = x_0$ la fonction*

$$2.1 \quad g(t) = \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}$$

est à variation bornée et continue pour $t=0$, alors la suite $U'_n(f, x_0)$ converge vers $f'(x_0)$.

Remarquons que cette condition est vérifiée si p. ex. la fonction $f'(x)$ est elle-même à variation bornée dans un entourage du point x_0 , ou si l'intégrale

$$2.2 \quad \int_0^{2\pi} |[f'(x_0+t) - f'(x_0)]/t| dt,$$

prise au sens de M. LEBESGUE, existe.

Sans restreindre la généralité, nous supposons $f(x) = f'(x) = 0$. La fonction $g(t)$, donc aussi

$$h(t) = \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{2 \sin \frac{x_0-t}{2}},$$

étant à variation bornée en vertu du théorème 1, nous pouvons supposer que sa variation totale ne surpasse pas ε . En appliquant le deuxième théorème de la moyenne, on trouve

$$2.3 \quad |U'_n(f, x_0)| \leq 2\varepsilon \left| \int_0^x 2 \sin \frac{x_0 - t}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} D_n(x_0 - t) d\varphi_n(t) \right|,$$

et comme

$$2.4 \quad \int_0^x 2 \sin \frac{x-t}{2} \frac{\partial}{\partial x} D_n(x-t) d\varphi_n(t) \\ = (n+1/2) \int_0^x \cos(n+1/2)(t-x) d\varphi_n(t) - \int_0^x \frac{\sin(n+1/2)(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{x-t}{2}} d\varphi_n(t),$$

on prouve facilement qu'il existe une constante M telle que

$$2.5 \quad \left| \int_0^x 2 \sin \frac{x-t}{2} \frac{\partial}{\partial x} D_n(x-t) d\varphi_n(t) \right| \leq M,$$

d'où

$$2.6 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} |U'_n(f, x_0)| \leq 2\varepsilon M.$$

Le nombre ε étant arbitraire, notre théorème est démontré.

§ 3.

Théorème 3. Pour toute fonction $f \in A^2$ et toute suite $\{n_i\}$ de nombres entiers vérifiant la condition

$$3.1 \quad n_i / n_{i+1} < q < 1 \quad (i = 1, 2, \dots),$$

la suite $U'_{n_i}(f, x)$ converge presque partout.

Démonstration. En supposant f' impair,

$$S(f') = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin ix,$$

on obtient

$$3.2 \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [S'_n(f, x) - U'_n(f, x)]^2 dx \leq n^2 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{b_{t(2n+1)+i}}{t(2n+1) \pm i} \right)^2 \\ \leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{b_{t(2n+1) \pm i}}{t} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{b_{t(2n+1) \pm i}^2}{t^{1/2}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^{3/2}} \\ \leq 3 \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon_{n,v} b_v^2, \text{ où } \varepsilon_{n,v} \leq \min \left[1, \left(\frac{2n+1}{v-n} \right)^{1/2} \right].$$

Cette formule donne

$$\begin{aligned}
 3.3 \quad & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [S'_{n_i}(f, x) - U'_{n_i}(f, x)]^2 dx \\
 & < 3 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{r=n_i+1}^{\infty} \varepsilon_{n_i, r} b_r^2 \leq 3 \sum_{r=1}^{\infty} b_r^2 \sum_{n_i < r} \varepsilon_{n_i, r}.
 \end{aligned}$$

Désignons par $r = r(\nu)$ le plus grand indice i tel que $n_i < \nu$;

$$\begin{aligned}
 3.4 \quad & \sum_{n_i < r} \varepsilon_{n_i, r} \leq \sum_{i=1}^{r-1} 1 \leq \sum_{i=1}^{r-1} \left(\frac{2n_i + 1}{n_r - n_i} \right)^{1/2} + 1 \\
 & \leq 4 \sum_{i=1}^{r-1} \left(\frac{n_i}{n_r} \right)^{1/2} + 1 \leq 4 \sum_{i=1}^{\infty} q^{i/2} + 1 = C_q;
 \end{aligned}$$

les formules (3.3) et (3.4) prouvent que

$$3.5 \quad \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} (S'_{n_i} - U'_{n_i})^2 dx \leq 3\pi C_q \sum_{r=1}^{\infty} b_r^2 < \infty.$$

D'après un théorème de M. KOLMOGOROFF, la suite $\{S'_{n_i}(f, x)\}$ converge presque partout. Il en résulte, en vertu de (3.5), la convergence presque partout de la suite $\{U'_{n_i}(f, x)\}$. Pour f' pair la démonstration est analogue.

§ 4.

Théorème 4. Si $f \in A^p$ ($1 < p < \infty$), alors

$$4.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |U'_n(f, x) - f'(x)|_p = 0.$$

Nous allons établir d'abord cinq lemmes.

Lemme 1. Si la fonction $g(x) \in L^p$ ($1 < p < \infty$) et si

$$\begin{aligned}
 4.2 \quad & S(g) = \sum_{r=1}^{\infty} (a_r \cos \nu x + b_r \sin \nu x), \\
 & S_{i,j}(x) = S_{i,j}(g, x) = \sum_{r=i+1}^j (a_r \cos \nu x + b_r \sin \nu x), \\
 & \bar{S}_{i,j}(x) = \bar{S}_{i,j}(g, x) = \sum_{r=i+1}^j (a_r \sin \nu x - b_r \cos \nu x),
 \end{aligned}$$

alors il existe une constante C_p telle que

$$4.3 \quad |S_{i,j}(g, x)|_p \leq C_p |g|_p, \quad |\bar{S}_{i,j}(g, x)|_p \leq C_p |g|_p.$$

Ce résultat est connu; il est dû à M. M. RIESZ⁸⁾.

⁸⁾ M. Riesz [1] p. 218.

Lemme 2. Si $f \in A^p$ ($1 < p < \infty$), alors

$$4.4 \quad |f - S_n(f)|_p \leq n^{-1} C_p |f'|_p.$$

Soit $S(f') = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu}(x)$, où $A_{\nu}(x) = a_{\nu} \cos \nu x + b_{\nu} \sin \nu x$; posons

$$\bar{A}_{\nu}(x) = a_{\nu} \sin \nu x - b_{\nu} \cos \nu x; \text{ alors}$$

$$4.5 \quad S(f) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_{\nu}(x)}{\nu};$$

on a donc

$$4.6 \quad f - S_n(x) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\bar{A}_{\nu}(x)}{\nu} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\bar{S}_{n,\nu}(x)}{\nu(\nu+1)}.$$

En appliquant au second membre de (4.6) l'inégalité de MIN-KOWSKI⁹⁾, on trouve

$$4.7 \quad |f - S_n|_p \leq \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} |\bar{S}_{n,\nu}|_p$$

et, en vertu de (4.3),

$$4.8 \quad |f - S_n|_p \leq C_p |f'|_p \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \leq n^{-1} C_p |f'|_p.$$

Lemme 3. $S_n(x)$ désignant un polynôme d'ordre n au plus et $S'_n(x)$ sa dérivée, on a l'inégalité

$$4.9 \quad |S'_n|_p \leq n |S_n|_p.$$

Cette proposition est due à M. A. ZYGMUND¹⁰⁾.

Lemme 4. Si la fonction $h(t)$, absolument continue et de période 2π , admet une dérivée $h'(x) \in L^p$ ($1 < p < \infty$), alors il existe une constante A_p , telle que

$$4.10 \quad \int_0^{2\pi} |h(t)|^p d\varphi_n(t) \leq |h|_p^p + n^{-1} A_p |h'|_p \cdot |h|_p^{p-1}.$$

En effet

$$4.11 \quad \int_0^{2\pi} |h(t)|^p d\varphi_n(t) = \int_0^{2\pi} |h(t)|^p d(\varphi_n(t) - t) + \int_0^{2\pi} |h(t)|^p dt.$$

⁹⁾ Voir p. ex. Hardy, Littlewood et Pólya [1] p. 30.

¹⁰⁾ Zygmund [2] p. 392.

En intégrant par parties le premier terme du coté droit, on trouve

$$4.12 \quad \left| \int_0^{2\pi} |h(t)|^p d(\varphi_n(t) - t) \right| \leq \frac{2\pi}{2n+1} p \int_0^{2\pi} |h'(t)| \cdot |h^{p-1}(t)| dt$$

et en appliquant l'inégalité de HÖLDER,

$$4.13 \quad \left| \int_0^{2\pi} |h(t)|^p d(\varphi_n(t) - x) \right| \leq n^{-1} A_p |h|_p^{p-1} |h'|_p$$

avec $A_p \leq \pi p$. Les formules (4.11) et (4.13) donnent (4.10).

En posant $h(t) = S_n(t)$, où $S_n(t)$ désigne un polynôme au plus d'ordre n , et en appliquant l'inégalité (4.9), on trouve le

Lemme 5¹¹⁾.

$$4.14 \quad \left(\int_0^{2\pi} |S_n(t)|^p d\varphi_n(t) \right)^{1/p} \leq A'_p |S_n|_p, \text{ où } A'_p \leq (1 + \pi p)^{1/p}.$$

Ces lemmes étant établis nous allons démontrer le théorème.

On a

$$4.15 \quad |U_n(f, x) - S_n(f, x)|_p = \int_0^{2\pi} P_n(f, x) g(x) dx,$$

où $P_n(x) = U_n - S_n$ et g désigne une fonction telle que $|g|_q = 1$, $1/p + 1/q = 1$. En partant de (4.15) on obtient

$$\begin{aligned} 4.16 \quad & |U_n(f, x) - S_n(f, x)|_p \\ &= \int_0^{2\pi} g(x) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{f(t) - S_n(f, t)\} D_n(x - t) d\varphi_n(t) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \{f(t) - S_n(f, t)\} S_n(g, t) d\varphi_n(t) \\ &\leq \left(\int_0^{2\pi} |f(t) - S_n(f, t)|^p d\varphi_n(t) \right)^{1/p} \left(\int_0^{2\pi} |S_n(g, t)|^q d\varphi_n(t) \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

¹¹⁾ Cette inégalité est connue; voir Marcinkiewicz [2].

Les formules (4.10), (4.4), (4.14) et (4.2) donnent

$$4.17 \quad |U_n(f, x) - S_n(f, x)|_p \leq n^{-1} [C_p + A_p(1 + C_p)C_p^{p-1}]^{1/p} |f'|_p A'_q C_q \leq B_p |f'|_p n^{-1},$$

où B_p désigne une constante. En vertu de (4.17) et (4.9), il vient

$$4.18 \quad |U'_n(f, x) - S'_n(f, x)|_p \leq B_p |f'|_p.$$

Pour en tirer la formule (4.1), il suffit de poser $f' = f'_1 + f'_2$, où $|f'_1|_p < \varepsilon$ et f'_2 désigne un polynôme.

§ 5.

Théorème 5. Soit $f \in A^p$ ($1 < p \leq 2$),

$$U'_n(f, x) = \sum_{r=1}^n (a_r^{(n)} \cos r x + b_r^{(n)} \sin r x);$$

alors il existe une constante A_p telle que

$$5.1 \quad \left(\sum_{r=1}^n |a_r^{(n)}|^q + |b_r^{(n)}|^q \right)^{1/q} \leq A_p |f'|_p \quad (1/p + 1/q = 1).$$

Réciproquement, si $f \in A$ et si l'on a, pour une constante M ,

$$5.2 \quad \left(\sum_{r=1}^n |a_r^{(n)}|^p + |b_r^{(n)}|^p \right)^{1/p} \leq M \quad (n = 1, 2, \dots),$$

alors $f \in A^q$ et

$$5.3 \quad |f'|_q \leq A_p M.$$

Ce théorème résulte du théorème connu de MM. YOUNG et HAUSDORFF ¹²⁾ à l'aide du

Lemme. Si la condition (5.2) est vérifiée (pour $1 \leq p < \infty$), on a

$$5.4 \quad \left(\sum_{r=1}^{\infty} |a_r|^p + |b_r|^p \right)^{1/p} \leq M,$$

$$\text{où} \quad S(f') = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \cos r x + b_r \sin r x.$$

D'autre part, la série

$$\sum_{r=1}^{\infty} |a_r|^p + |b_r|^p$$

¹²⁾ Voir p. ex. Zygmund [1] p. 200—201.

étant supposée convergente, il existe une constante A_p telle que

$$5.5 \quad \left(\sum_{r=1}^n |a_r^{(n)}|^p + |b_r^{(n)}|^p \right)^{1/p} \leq A_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} |a_r|^p + |b_r|^p \right)^{1/p} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Démonstration. La formule (5.2) donne pour chaque couple (n_0, n) , $n_0 \leq n$

$$5.6 \quad \sum_{r=1}^{n_0} |a_r^{(n)}|^p + |b_r^{(n)}|^p \leq M^p,$$

et comme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_r^{(n)} = a_r$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_r^{(n)} = b_r$, il en résulte

$$5.7 \quad \sum_{r=1}^{n_0} |a_r|^p + |b_r|^p \leq M^p;$$

en passant à la limite on obtient (5.4)

Pour $p=1$ on a d'une façon évidente d'après (0.7)

$$\sum_{r=1}^n |a_r^{(n)}| + |b_r^{(n)}| \leq \sum_{r=1}^{\infty} |a_r| + |b_r|,$$

nous supposons donc $p > 1$. En appliquant les formules (0.7) on trouve

$$5.8 \quad |a_i^{(n)}|^p \leq (|b_i| + n \sum_{t=1}^{\infty} \frac{|b_{t(2n+1) \pm i}|}{t(2n+1) \pm i})^p \\ \leq (|b_i|^p + \sum_{t=1}^{\infty} |b_{t(2n+1) \pm i}|^p) (1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^q})^{p/q},$$

donc

$$5.9 \quad |a_i^{(n)}|^p \leq A_p^p \{ |b_i|^p + \sum_{t=1}^{\infty} |b_{t(2n+1) \pm i}|^p \};$$

on trouve de même

$$5.10 \quad |b_i^{(n)}|^p \leq A_p^p \{ |a_i|^p + \sum_{t=1}^{\infty} |a_{t(2n+1) \pm i}|^p \}.$$

En faisant la somme des formules (5.9) et (5.10) pour $i=1, 2, \dots, n$, on obtient (5.5).

§ 6.

Les considérations précédentes font ressortir une grande analogie entre les suites $\{S'_n(f, x)\}$ et $\{U'_n(f, x)\}$. Il nous paraît fort intéressant de trouver quelques conditions non banales de l'équiconvergence de ces deux suites; nous ne connaissons aucune. Par application directe des formules (0.7), on trouve les théorèmes:

Théorème 6. *Si les coefficients de la série $S(f)$ sont d'ordre $o(n^{-1})$, alors on a uniformément*

$$6.1 \quad S'_n(f, x) - U'_n(f, x) \rightarrow 0.$$

Théorème 7. *Si la série $S(f')$ est lacunaire, alors la relation (6.1) subsiste uniformément¹³⁾.*

Remarquons qu'en général ces deux suites ne sont pas équi-convergentes; on a le

Théorème 8. *Il existe une fonction $f \in A^2$, dont la série $S(f')$ converge dans le point $x=0$ et la suite $U'_n(f, 0)$ diverge.*

Pour le prouver, posons

$$6.2 \quad f'_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{k=n+1}^{2n} \{ \cos(t(4n+1)+k)x - \cos(t(4n+1)-k)x \};$$

on aura d'une façon évidente

$$6.3 \quad \int_0^{2\pi} f_n'^2 dx < 2\pi \quad \text{et} \quad |S_p(f_n, 0)| \leq 1 \quad (p=1, 2, \dots)$$

et d'autre part

$$6.4 \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{\sin(t(4n+1)+k)x}{t(4n+1)+k} - \frac{\sin(t(4n+1)-k)x}{t(4n+1)-k} \right);$$

considérons $U'_{2n}(f, 0)$; on a

$$6.5 \quad \begin{aligned} a_k^{(2n)} &= \frac{k}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{t(2n+1)+k} + \frac{1}{t(2n+1)-k} \right) \quad (n < k \leq 2n), \\ a_k^{(2n)} &= 0 \quad (1 \leq k \leq n), \end{aligned}$$

c'est à dire

$$6.6 \quad \begin{aligned} U'_n(f, 0) &= \sum_{v=1}^{2n} a_v^{(2n)} \geq 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{t(2n+1)+k} \\ &\geq 2n \sum_{t=1}^n \frac{1}{t(4n+1)} \geq \frac{1}{4} \sum_{t=1}^n \frac{1}{t} \geq A \log n. \end{aligned}$$

Pour en tirer notre théorème, il suffit de poser

$$f = \sum \log^{-1/2} n_i f_{n_i}(x),$$

la suite $\{n_i\}$ étant croissante assez rapidement. On prouve que la fonction ainsi définie vérifie les conditions du théorème.

¹³⁾ On vérifie de même que la condition $\sum n(a_n^2 + b_n^2) < \infty$ entraîne uniformément (6.1).

§ 7.

Soit $f(x) \in A$

$$7.1 \quad U'_{n,i}(f, x) = U'_{n,i}(x) = \sum_{v=1}^i (a_v^{(n)} \cos v x + b_v^{(n)} \sin v x),$$

$$V'_n(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U'_{n,i}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\partial}{\partial x} K_n(x-t) d\varphi_n(t),$$

où $K_n(u)$ désigne l'expression $\frac{\sin^2(n+1)u/2}{2(n+1)\sin^2 u/2}$; nous allons prouver le

Théorème 9. *Si $f(x) \in A$, alors la suite $V'_n(f, x)$ converge presque partout vers $f'(x)$, en particulier il en est ainsi dans chaque point x où*

$$7.2 \quad \int_0^h |f'(x+t) - f'(x)| dt = o(h).$$

Démonstration. Supposons que dans un point x on ait (7.2) et admettons $f(x) = f'(x) = 0$. Alors

$$7.3 \quad V_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\partial}{\partial x} K_n(x-t) d\varphi_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{x-1/n} + \frac{1}{\pi} \int_{x-1/n}^{x+1/n} + \frac{1}{\pi} \int_{x+1/n}^{2\pi}$$

$$= A_n + B_n + C_n.$$

D'une façon évidente $B_n \rightarrow 0$. Évaluons C_n :

$$7.4 \quad C_n = \frac{1}{\pi} \int_{x+1/n}^{x+\delta} + \frac{1}{\pi} \int_{x+\delta}^{2\pi} = C'_n + C''_n;$$

δ étant fixé, on a

$$7.5 \quad C''_n \rightarrow 0;$$

d'autre part

$$7.6 \quad C'_n = \frac{1}{\pi} \int_{x+1/n}^{x+\delta} f(t) \frac{\sin(n+1)(x-t)}{4 \sin^2 \frac{x-t}{2}} d\varphi_n(t)$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_{x+1/n}^{x+\delta} f(t) \frac{\sin^2(n+1) \frac{x-t}{2}}{2(n+1) \sin^3 \frac{x-t}{2}} \cos \frac{x-t}{2} d\varphi_n(t) = \gamma_n + \gamma'_n$$

et l'on voit sans peine que $\gamma'_n \rightarrow 0$, tandis que

$$\begin{aligned}
 7.7 \quad \gamma_n &= \frac{1}{\pi} \int_{x+\frac{1}{n}}^{x+\delta} f(t) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-t)}{4 \sin^2 \frac{x-t}{2}} d\varphi_n(t) + o(1) \\
 &= \frac{1}{\pi} \sin(n+\frac{1}{2})x \int_{x+\frac{1}{n}}^{x+\delta} f(t) \frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{4 \sin^2 \frac{x-t}{2}} d\varphi_n(t) + o(1)
 \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
 7.8 \quad & \int_{x+\frac{1}{n}}^{x+\delta} f(t) \frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{4 \sin^2 \frac{x-t}{2}} d\varphi_n(t) \\
 &= \left| \int_{x+\frac{1}{n}}^u f(t) \cos(n+\frac{1}{2})t d\varphi_n(t) \right| \frac{1}{4 \sin^2 \frac{x-t}{2}} \Big|_{x+\frac{1}{n}}^{x+\delta} \\
 &- \int_{x+\frac{1}{n}}^{x+\delta} \int_{x+\frac{1}{n}}^u f(t) \cos(n+\frac{1}{2})t d\varphi_n(t) \frac{\cos \frac{x-u}{2}}{4 \sin^2 \frac{x-u}{2}} du,
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 7.9 \quad & \left| \int_{x+\frac{1}{n}}^{x+\delta} f(t) \frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{4 \sin^2 \frac{x-t}{2}} d\varphi_n(t) \right| \\
 &\leq o(1) + \frac{2\pi}{2n+1} \int_{x+\frac{1}{n}}^{x+\delta} \int_x^{x+u} |f'(t)| dt \left| \frac{du}{4 \sin^2 \frac{x-t}{2}} \right| \\
 &\leq o(1) + 8 \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \max \frac{1}{h} \int_0^h |f'(x+t)| dt \int_{x+\frac{1}{n}}^{x+\delta} \frac{dt}{(x-t)^2} \\
 &\leq o(1) + A \cdot \max \frac{1}{h} \int_0^h |f'(x+t)| dt,
 \end{aligned}$$

où A désigne une constante absolue. Il en résulte, d'après les formules (7.7), (7.6), (7.3), (7.4) et (7.5),

$$7.10 \quad C_n \rightarrow 0.$$

On prouve de même que $A_n \rightarrow 0$.

§ 8.

En appliquant le résultat obtenu dans le paragraphe précédent, on démontre le

Théorème 10. *Si, dans un ensemble E de mesure positive,*

$$8.1 \quad S^*(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} U_n'(f, x) < +\infty,$$

alors on y a presque partout

$$8.2 \quad S_*(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} U_n'(f, x) > -\infty,$$

$$8.3 \quad S^*(x) + S_*(x) = 2f'(x).$$

La démonstration est tout à fait semblable à celle d'un théorème analogue dans la théorie des séries de Fourier¹⁴⁾, il faut seulement remplacer partout les sommes de FEJÉR par les polynômes $V_n'(f, x)$.

¹⁴⁾ Voir Marcinkiewicz et Zygmund [1] et Marcinkiewicz [2].

Bibliographie.

- D. JACKSON, [1], The Theory of Approximation, New York (1930).
 G. HARDY, J. LITTLEWOOD and G. PÓLYA, [1], Inequalities, Cambridge (1934).
 J. MARCINKIEWICZ, [1], Wielomiany interpolacyjne funkcyj bezwzględnie ciągłych, Wiadomości Matematyczne 35 (1935).
 J. MARCINKIEWICZ, [2], Sur l'interpolation (I), Studia Math. 6 (1936).
 M. RIESZ, [1], Sur les fonctions conjuguées, Math. Zeitschr. 27 (1928).
 L. TONELLI, [1], Serie Trigonometriche, Bologna (1928).
 A. ZYGMUND, [1], Trigonometrical Series, Warszawa (1935).
 [2], A remark on conjugate series, Proc. Lond. Math. Soc. 34 (1932).
 J. MARCINKIEWICZ and A. ZYGMUND, [1], On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series, Fund. Math. 26 (1936), p. 1–43.

(Reçu par la Rédaction le 10. 2. 1936).

Sur la sommabilité des séries de Fourier

par

Z. ZALCWASSER (Warszawa).

1. Soit

$$(1) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

la série de Fourier d'une fonction sommable $f(x)$ et

$$(2) \quad S_0(x), S_1(x), S_2(x), \dots$$

la suite des sommes partielles de la série (1). D'après un théorème classique de M. H. LEBESGUE, la suite (2) est presque partout sommable (C, 1) vers la fonction $f(x)$. Or, comme la suite (2) n'est pas en général convergente, on peut se poser le problème suivant: Formons une suite

$$(3) \quad S_{p_1}(x), S_{p_2}(x), \dots \quad (p_1 < p_2 < \dots),$$

extraite de la suite (2). La nouvelle suite (3) est-elle encore sommable (C, 1) presque partout? Nous avons obtenu sur ce sujet deux résultats particuliers.

2. Théorème I. $f(x)$ étant une fonction sommable, on a presque partout

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [S_{1^2}(x) + S_{2^2}(x) + \dots + S_{n^2}(x)] = f(x).$$

Démonstration. On a

$$(4) \quad \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n S_{r^2}(x) - f(x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \varphi_x(t) \frac{H_n(t)}{2 \sin \frac{1}{2} t} dt = I_n,$$

où

$$(5) \quad \varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x); \quad H_n(t) = \sum_{v=1}^n \sin(v^2 + 1/2)t,$$

$$(6) \quad |H_n(t)| \leq \left| \sum_{v=1}^n e^{i(v^2 + 1/2)t} \right| = \left| \sum_{v=1}^n e^{iv^2 t} \right|.$$

Pour obtenir une borne supérieure des sommes $|\sum e^{iv^2 t}|$, on peut appliquer le lemme de M. van der CORPUT¹⁾:

Si $g(u)$ ($a \leq u \leq b$) est une fonction réelle deux fois dérivable et si $g''(u) \geq \varrho > 0$ pour $a \leq u \leq b$ (ϱ — une constante), alors

$$\left| \sum_{a \leq v \leq b} e^{2\pi i g(v)} \right| \leq [g'(b) - g'(a) + 2] \left(\frac{4}{\sqrt{\varrho}} + A \right),$$

A étant une constante absolue.

Ici nous avons

$$g(u) = \frac{u^2 t}{2\pi}, \quad g'(u) = \frac{ut}{\pi}, \quad \varrho = \frac{t}{\pi} \quad (t > 0), \quad a = 0, \quad b = n,$$

donc

$$(7) \quad \left| \sum_{v=1}^n e^{iv^2 t} \right| \leq \left(\frac{nt}{\pi} + 2 \right) \left(\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} + A \right) \quad (t > 0).$$

Revenons à l'expression (4); décomposons l'intégrale I_n de la manière suivante:

$$(8) \quad I_n = \frac{1}{n\pi} \left[\int_0^{1/n^2} + \int_{1/n^2}^{1/n} + \int_{1/n}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right] = U_1 + U_2 + U_3 + U_4,$$

désignons

$$\int_0^h |\varphi_x(t)| dt = \Phi_x(h) = \Phi(h)$$

et supposons que

$$(9) \quad \Phi'(0) = 0, \quad \text{c. à. d.} \quad \Phi(h) = o(h^2),$$

¹⁾ J. G. van der Corput, Zahlentheoretische Abschätzungen, Math. Ann. 84 (1921) p. 53—79.

²⁾ Il est bien connu que cette hypothèse est remplie par presque tout x . (Lebesgue).

alors nous aurons

$$(10)_1 \quad |U_1| \leq \frac{1}{n\pi} \int_0^{1/n^2} \frac{|\varphi_x(t)|}{2 \sin \frac{1}{2} t} \sum_{v=1}^n (v^2 + 1/2) t dt \\ \leq \frac{1}{n\pi} \int_0^{1/n^2} |\varphi_x(t)| 2n^3 dt = \frac{2}{\pi} n^2 \Phi(1/n^2) = o(1).$$

Dans l'intégrale U_2 on a $nt \leq 1$ et l'inégalité (7) se simplifie:

$$(7)_1 \quad |H_n(t)| \leq \left| \sum_{v=1}^n e^{iv^2 t} \right| \leq \frac{A_1}{\sqrt{t}} \quad (0 < t \leq \frac{1}{n}),$$

A_1 étant une constante absolue; il s'ensuit que

$$|U_2| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{1/n^2}^{1/n} |\varphi_x(t)| \frac{2A_1}{t^{3/2}} dt = \frac{2A_1}{n\pi} \left\{ [\Phi(t)t^{-3/2}]_{1/n^2}^{1/n} + \frac{3}{2} \int_{1/n^2}^{1/n} \Phi(t)t^{-5/2} dt \right\} \\ = U'_2 + U''_2.$$

De l'hypothèse (9) il résulte immédiatement que $U'_2 = o(1)$ et

$$U''_2 = \frac{o(1)}{n} \int_{1/n^2}^{1/n} t^{-3/2} dt = o(1),$$

donc

$$(10)_2 \quad U_2 = o(1).$$

Dans l'intégrale U_3 on a $nt \geq 1$ et de l'inégalité (7) on déduit

$$(7)_2 \quad \left| \sum_{v=1}^n e^{iv^2 t} \right| \leq A_2 n \sqrt{t} \quad (A_2 \text{ — une constante absolue; } t \geq \frac{1}{n}), \\ |U_3| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{1/n}^{\delta} |\varphi_x(t)| \frac{2A_2 n}{\sqrt{t}} dt = \frac{2A_2}{\pi} \left\{ [\Phi(t)t^{-1/2}]_{1/n}^{\delta} + \frac{1}{2} \int_{1/n}^{\delta} \Phi(t)t^{-3/2} dt \right\} \\ = U'_3 + U''_3.$$

On vérifie aisément que

$$|U'_3| \leq M \sqrt{\delta}, \quad |U''_3| \leq M \sqrt{\delta};$$

M ne dépendant ni de n ni de δ on peut choisir δ de manière que l'on ait

$$(10)_3 \quad |U_3| < \varepsilon \quad \text{pour tous les } n > \frac{1}{\delta}.$$

En tenant fixe le nombre δ démontrons enfin que $\lim_{n \rightarrow \infty} U_4 = 0$.

A cet effet il suffit de remarquer que

$$U_4 = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n}, \text{ où } v_n = \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\varphi_x(t)}{2 \sin \frac{1}{2} t} \sin(\nu^2 + 1/2)t dt;$$

la fonction $\frac{\varphi_x(t)}{2 \sin \frac{1}{2} t}$ étant sommable dans l'intervalle (δ, π) , on a $v_n \rightarrow 0$ ³⁾ et à fortiori

$$(10)_4 \quad U_4 = o(1).$$

Les formules (8) et $(10)_{1,2,3,4}$ entraînent $I_n \rightarrow 0$, c. q. f. d.

3. D'une manière analogue on démontre les deux propositions suivantes:

Théorème I'. Si l'on désigne par $\bar{S}_n(x)$ les sommes partielles de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kx + a_k \sin kx),$$

conjuguée à la série (1), on a presque partout

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{S}_{i^2}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} t} dt.$$

Théorème I''. Si la série (1) est une série de Fourier-Stieltjes, c. à. d. si

$$a_n + i b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} dF(t),$$

$F(t)$ étant une fonction réelle à variation bornée, on a presque partout

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{i^2}(x) = F'(x).$$

Dans la démonstration du théorème I'' il faut remplacer l'intégrale I_n par

$$I_n^* = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{H_n(t)}{2 \sin \frac{1}{2} t} d\psi(t),$$

où $\psi(t) = \psi_x(t) = F(x+t) - F(x-t) - 2tF'(x)$ ⁴⁾.

³⁾ Cela revient à constater que les coefficients de Fourier-Lebesgue tendent vers zéro.

⁴⁾ Voir p. ex.: A. Zygmund, *Trigonometrical series* (Warszawa 1935) p. 59-60.

Le raisonnement qui a nous servi pour démontrer que $U_4 \rightarrow 0$ ne s'applique pas ici, car les coefficients de Fourier-Stieltjes ne tendent pas en général vers zéro. Mais nous pouvons faire appel à un résultat dû à MM. HARDY et LITTLEWOOD ⁵⁾:

Si t ($0 < t < \pi$) est un nombre incommensurable avec π , alors

$$\sum_{r=1}^n e^{i r^2 t} = o(n).$$

Ceci posé, la démonstration du fait $U_4^* \rightarrow 0$ n'offre pas des difficultés.

4. Théorème II. *Si $f(x)$ est une fonction à carré sommable, on a presque partout*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n |S_{p_r}(x) - f(x)| = 0,$$

$\{p_r\}$ étant une suite croissante des nombres entiers positifs, vérifiant la condition

$$(T) \quad p_k^2 \sum_{r=k}^{\infty} \frac{1}{p_r^2} = O(1) \text{ pour } k \rightarrow \infty.$$

Remarquons que toute suite $\{p_r\}$ croissante et convexe remplit la condition (T).

Démonstration. Quand $p_r = \nu$, la proposition se réduit à un théorème connu de MM. HARDY-LITTLEWOOD ⁶⁾. M. ZYGMUND ⁷⁾ en a donné une démonstration simple et élégante et son raisonnement s'applique aussi au cas actuel. Pour la commodité du lecteur nous exposerons la démonstration *in extenso*. Posons

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}.$$

Comme

$$\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n |S_{p_r}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n |S_{p_r}(x) - \sigma_{p_r}(x)| + \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n |\sigma_{p_r}(x) - f(x)|,$$

⁵⁾ G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some problems of Diophantine Approximation. II., Acta Math. 37 (1914) p. 193—239; p. 213, Theorem 2.14.

⁶⁾ G. H. Hardy et J. E. Littlewood, Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable, C. R. Acad. Sc. Paris 156 (1913) p. 1307—1309.

⁷⁾ L. c. ⁴⁾, p. 241.

$$\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n |S_{p_r} - \sigma_{p_r}| \leq \left\{ \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n (S_{p_r} - \sigma_{p_r})^2 \right\}^{1/2}$$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_{p_r}(x) - f(x)| = 0$ presque partout, il suffit de démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n [S_{p_r}(x) - \sigma_{p_r}(x)]^2 = 0 \text{ presque partout.}$$

Cette relation est à son tour une conséquence immédiate de la convergence de la série

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p_r} [S_{p_r}(x) - \sigma_{p_r}(x)]^2.$$

Une série de fonctions positives étant intégrable terme à terme il suffit de prouver que

$$(11) \quad B = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p_r} \int_0^{2\pi} (S_{p_r} - \sigma_{p_r})^2 dx < \infty.$$

Or,

$$(12) \quad B = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p_r} \cdot \frac{\pi}{(p_r + 1)^2} \sum_{m=1}^{p_r} d_m^2 m^2, \text{ où } d_m^2 = a_m^2 + b_m^2,$$

$$(13) \quad \begin{aligned} \sum_{m=1}^{p_r} d_m^2 m^2 &= \sum_{k=1}^r \left(\sum_{m=p_{k-1}+1}^{p_k} d_m^2 m^2 \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^r p_k^2 \cdot \sum_{m=p_{k-1}+1}^{p_k} d_m^2 = \sum_{k=1}^r p_k^2 \omega_k \quad (p_0 = 0), \end{aligned}$$

où

$$(14) \quad \omega_k = \sum_{m=p_{k-1}+1}^{p_k} d_m^2;$$

(12), (13), (14) et la condition (T) donnent

$$\begin{aligned} B &\leq \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\pi}{p_r} \cdot \frac{1}{p_r^2} \sum_{k=1}^r p_k^2 \omega_k = \pi \sum_{k=1}^{\infty} p_k^2 \omega_k \cdot \sum_{r=k}^{\infty} \frac{1}{p_r^2} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k M = M \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 < \infty \quad (M = \text{une constante}). \end{aligned}$$

Ainsi la première partie de notre énoncé est démontrée.

⁸⁾ Si la série $\sum_{r=1}^{\infty} \sigma_r$ converge, $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = o(n)$.

Il reste de prouver que toute suite $\{p_r\}$ croissante et convexe remplit la condition (T). On a

$p_{2k} - p_k \geq p_k - p_1$, $p_{2k} \geq 2p_k - p_1 \geq Cp_k$ pour $k \geq k_0$, $C=1,5$, donc

$$p_{2^m k} \geq C^m p_k \text{ pour } k \geq k_0 \quad (m=1, 2, 3, \dots);$$

il s'ensuit pour $k \geq k_0$

$$p_k^2 \sum_{r=k}^{\infty} \frac{1}{r p_r^2} = \frac{1}{k} + p_k^2 \left(\sum_{r=k+1}^{2k} + \sum_{r=2k+1}^{4k} + \dots \right) \\ \leq 1 + \log 2 (1 + C^{-2} + C^{-4} + \dots) = M < \infty.$$

5. En terminant j'indique quelques questions qui se rattachent aux théorèmes démontrés:

1° dans le théorème I, peut-on remplacer la suite $\{S_{r+1}\}$ par $\{S_{r+3}\}$ ou $\{S_{r+4}\}$ etc.?

2° le théorème II est-il vrai pour toute suite croissante $\{p_r\}$?

3° peut-on remplacer la sommabilité $(C, 1)$ par (C, α) , où $\alpha < 1$?

(Reçu par la Rédaction le 11. 2. 1936).

Sur les fonctions indépendantes (III)
(Le mouvement brownien; la loi de Maxwell)

par

M. KAC et H. STEINHAUS (Lwów).

On attribue à BROWN (botanicien anglais, 1827) la découverte du mouvement perpétuel de particules solides très petites, suspendues dans un milieu liquide ou gazeux. Ce mouvement, que l'on rend visible à l'aide d'un microscope ou d'un ultramicroscope, est dû aux chocs incessants qu'éprouve la particule de la part des molécules du milieu ambiant; on le sait depuis les travaux théoriques de M. A. EINSTEIN et M. SMOLUCHOWSKI¹⁾, confirmés par les expériences de M. J. PERRIN²⁾. Ainsi ce phénomène constitue une preuve importante pour la théorie cinétique de la matière.

La théorie des fonctions indépendantes, exposée dans les Communications précédentes³⁾, permet d'obtenir les résultats principaux des auteurs précités avec une simplicité remarquable; le rôle qui revient aux hypothèses physiques devient plus clair si elles ne sont plus confondues avec les artifices du calcul; en particulier, la probabilité n'apparaît que comme une interprétation finale des résultats obtenus par des raisonnements de mathématique pure.

1. Un vase V de volume 1 contient un grand nombre de particules en émulsion avec un milieu liquide ou gazeux. On

¹⁾ M. Smoluchowski, O fluktuacyach termodynamicznych i ruchach Browna, *Prace matematyczno-fizyczne* 25 (1914) p. 187—263; on y trouve de nombreuses indications bibliographiques.

²⁾ Loc. cit.¹⁾, p. 212.

³⁾ Ces *Studia*, ce volume, p. 46—58 et p. 59—66.

suppose que l'on ait représenté V sur le segment $0 \leq \alpha \leq 1$ d'une manière biunivoque et telle que la mesure soit conservée; nous entendons par là que la mesure lebesguienne spciale d'une partie quelconque de V est égale à la mesure linéaire de Lebesgue de la partie correspondante de $\langle 0, 1 \rangle$. Une représentation de cette espèce pourrait même être effectuée par des fonctions continues de α , si l'on permettrait qu'un certain ensemble spcial de mesure nulle cesse d'avoir une image univoque dans $\langle 0, 1 \rangle$; néanmoins, cette image aurait toujours une mesure nulle et la condition essentielle d'égalité de mesures serait encore respectée. De cette manière nous avons caractérisé chaque point de V par un nombre unique α (sauf peut-être un ensemble de mesure nulle).

Imaginons maintenant un laps de temps τ très court, pendant lequel chaque particule subit un choc qui la déplace jusqu'à ce que les contrechocs détruisent la composante x de sa vitesse. L'effet est un déplacement $f_1(\alpha)$ vers les x positifs. Le symbole $f_1(\alpha)$ désigne donc ici la grandeur du déplacement dans le sens $+x$ qu'éprouverait une particule qui serait située au temps initial $t=0$ au point α de l'espace; il est indifférent, si ce point a été occupé en réalité ou non. La particule fictive est assujettie à un deuxième choc qui la force de quitter sa nouvelle place; il en résulte un deuxième déplacement $f_2(\alpha)$ pendant le temps $\langle \tau, 2\tau \rangle$. Ainsi les abscisses x successives de la particule sont déterminées toujours par le même nombre α .

Nous supposons que

1° les fonctions $f_k(\alpha)$ sont uniformément bornées,

$$2^\circ \int_0^1 f_k(\alpha) d\alpha = 0 \quad (k),$$

$$3^\circ \int_0^1 f_k^2(\alpha) d\alpha = \gamma \quad (k),$$

4° les fonctions $\{f_k(\alpha)\}$ constituent un système de fonctions indépendantes.

L'hypothèse 1° est évidente, même pour un récipient infini. Les hypothèses 2° et 3° expriment que l'émulsion est en équilibre statistique; en particulier, 3° signifie la constance de la moyenne temporelle de l'énergie totale des molécules. Enfin 4° utilise la notion d'indépendance, introduite dans la Com-

munication 1⁴). En affirmant que $f_{k+1}(\alpha)$ est indépendant de $\{f_1(\alpha), f_2(\alpha) \dots f_k(\alpha)\}$, nous constatons que le passé d'une particule est sans corrélation avec son avenir; en effet, la particule une fois arrêtée est exposée au hasard des chocs moléculaires tout comme elle l'était au temps initial; nous sommes donc d'accord avec le langage des physiciens.

En désignant par $x_t(\alpha)$ le déplacement dans le sens $+x$ après le temps $t = n\tau$ et par s_t la racine carrée du carré moyen des $x_t(\alpha)$ pour tous les points de V , nous pourrions écrire

$$(1) \quad x_t(\alpha) = f_1(\alpha) + f_2(\alpha) + \dots + f_n(\alpha),$$

$$s_t^2 = \int_0^1 x_t^2(\alpha) d\alpha = \sum_{k=1}^n \int_0^1 f_k^2(\alpha) d\alpha = n\gamma' = \frac{\gamma'}{\tau} t,$$

$$(2) \quad s_t = \sqrt{\frac{\gamma'}{t}} \sqrt{t}.$$

C'est la loi classique pour le déplacement moyen au bout du temps t ; elle résulte de l'orthogonalité seule. En tirant parti de toutes les hypothèses 1°—4°, nous obtenons par le théorème 1 de la Communication II

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |E_c(a < \frac{f_1(\alpha) + f_2(\alpha) + \dots + f_n(\alpha)}{\sqrt{2n\gamma'}} < b)| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-\xi^2} d\xi,$$

ce qui donne immédiatement, à cause de (1) et (2),

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |E_c(a\sqrt{2s_t} < x_t(\alpha) < b\sqrt{2s_t})| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-\xi^2} d\xi.$$

C'est le deuxième théorème de la théorie classique. En effet, (3) dit que, pour t très grand, le déplacement aura acquis une valeur comprise entre $a\sqrt{2s_t}$ et $b\sqrt{2s_t}$, pour toutes les particules qui occupaient au temps initial une partie P du récipient V , dont le volume $|P|$ (mesuré L) est donné très exactement par l'intégrale de Gauss. Si la répartition des particules était uniforme au début, il est légitime de dire que cette intégrale donne la probabilité de rencontrer une particule de ce genre.

2. Les formules d'EINSTEIN et de SMOLUCHOWSKI rattachent la valeur du coefficient $\gamma'\tau$ aux constantes physiques. Cette question

⁴) Loc. cit. ³), p. 47.

exige un raisonnement à part, nous voulons cependant indiquer ici les calculs de M. L. INFELD⁵⁾, qui conduisent à la valeur classique de ce coefficient sans prêter aux objections de la méthode ancienne.

Soit M la masse d'une particule, R la constante des gaz, T la température absolue, N le nombre d'Avogadro, S le coefficient de Stokes. Quand on désigne S/M par β , il est à remarquer que l'on peut rendre $e^{\beta\tau}$ très grand sans violer la condition que τ doit être très petit. En effet, S est égal à $6\pi a\zeta$, où a désigne le diamètre de la particule et ζ le coefficient de viscosité du milieu ambiant. (Pour une particule de gomme-gutte de densité 1,2, de diamètre $2 \cdot 10^{-5}$ cm, plongée dans l'eau de 17°C , ce qui correspond à $\zeta = 0,0108$, on trouve $S/M = \beta = 0,33 \times 10^8$. Si l'on choisit p. e. $\tau = 10^{-6}$ sec, on obtient $e^{\beta\tau} \approx 10^{14}$).

Soit $v_0(\alpha)$ la vitesse initiale d'une particule, $v_t(\alpha)$ sa vitesse au moment t ($0 \leq t \leq \tau$); la loi de STOKES donne

$$(4) \quad M \frac{dv_t}{dt} = -Sv_t, \quad v_t = v_0 e^{-\beta t},$$

ce qui entraîne (pour les composantes x des vitesses)

$$f_1(\alpha) = \int_0^\tau v_t(\alpha) dt = v_0(\alpha) \frac{1 - e^{-\beta\tau}}{\beta} \quad 6)$$

et

$$(5) \quad \gamma = \int_0^1 f_1^2(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\beta^2} \int_0^1 v_0^2(\alpha) d\alpha = \frac{\sigma^2}{\beta^2} \quad (\sigma = \sqrt{\int_0^1 v_0^2(\alpha) d\alpha}),$$

quand on néglige $e^{-\beta\tau}$ vis-à-vis de l'unité. La moyenne temporelle de l'énergie (dans le sens $+x$), pour une particule, devient, à cause de (4),

$$\frac{M}{2\tau} \int_0^\tau v_t^2(\alpha) dt = \frac{Mv_0^2(\alpha)}{2\tau} \int_0^\tau e^{-2\beta t} dt = \frac{Mv_0^2(\alpha)(1 - e^{-2\beta\tau})}{4\beta\tau}.$$

En négligeant $e^{-2\beta\tau}$ vis-à-vis de l'unité et en calculant la moyenne spaciale de la moyenne temporelle, on obtient par application du principe de l'équipartition de l'énergie au système *particules + molécules*

⁵⁾ Avec permission de l'auteur.

⁶⁾ On en déduit la signification de 3° (p. 90), f_1 étant proportionnel à v_0 .

$$\frac{RT}{2N} = \int_0^1 d\alpha \left\{ \frac{M}{2\tau} \int_0^1 v_i^2(\alpha) dt \right\} = \frac{M}{4\beta\tau} \int_0^1 v_0^2(\alpha) d\alpha = \frac{M\sigma^2}{4\beta\tau}$$

et, à cause de (5),

$$\frac{RT}{N} = \frac{M\beta\gamma}{2\tau} = \frac{S\gamma}{2\tau}, \quad \frac{\gamma}{\tau} = 2 \frac{RT}{NM},$$

ce qui est l'expression classique pour le coefficient cherché. Les calculs de ce paragraphe dépassent notre but qui a été atteint au § 1; là nous n'avons fait que répéter les déductions connues sans les encombrer de considérations superflues (comme p. e. la loi exponentielle de CLAUSIUS).

3. Définition. Nous dirons que les valeurs d'une fonction $f(\xi)$ sont distribuées suivant une autre fonction $g(\omega)$, que nous appellerons la *distribuant*e de $f(\xi)$, si l'on a

$$(6) \quad |E(f(\xi) < \omega)| = g(\omega)$$

pour tous les ω réels.

Lemme. Pour que deux fonctions $f^{(1)}(\xi)$, $f^{(2)}(\xi)$, définies dans $\langle 0, 1 \rangle$, aient la même distribuant (en d'autres termes, pour qu'elles soient équivalentes), il faut et il suffit que l'on ait

$$(7) \quad \int_0^1 e^{i\omega f^{(1)}(\xi)} d\xi = \int_0^1 e^{i\omega f^{(2)}(\xi)} d\xi$$

pour tous les ω réels.

La nécessité de cette condition découle de cette remarque presque évidente: $F(t)$ étant continue pour tout t réel, il est légitime de remplacer dans l'intégrale

$$\int_0^1 F(f(\xi)) d\xi$$

la fonction $f(\xi)$ par une autre qui lui est équivalente. Pour démontrer que (7) suffit, nous nous servons de l'expression

$$D(a, \xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(a - f(\xi))\omega}{\omega} d\omega,$$

due à DIRICHLET, qui est égale à 1, -1 ou 0, suivant que l'on a $f(\xi) < a$, $f(\xi) > a$, ou $f(\xi) = a$.

On a

$$(8) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 D(a, \xi) d\xi = |E(f(\xi) < a)| + \frac{1}{2} |E(f(\xi) = a)|.$$

D'autre part

$$(9) \quad \int_0^1 D(a, \xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^1 \sin(a - f(\xi)) \omega d\xi \right\} \frac{d\omega}{\omega};$$

pour justifier l'interversion des intégrations, on remplace les limites infinies par $-N$ et $+N$, on écrit que les deux intégrales doubles sont égales et on remarque qu'il est permis de passer à la limite $N = \infty$ sous le signe d'intégration $\int_0^1 \dots d\xi$, car l'inégalité

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-N}^{+N} \frac{\sin(a - f(\xi)) \omega}{\omega} d\omega \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega$$

fournit pour l'intégrale intérieure une borne absolue < 2 .

Or, on voit que l'expression entre parenthèses $\{ \}$ dans (9) est la partie imaginaire de

$$e^{ia\omega} \int_0^1 e^{-if(\xi)\omega} d\xi;$$

ainsi (7), (8) et (9) impliquent

$$\begin{aligned} & |E(f^{(1)}(\xi) < a)| + \frac{1}{2} |E(f^{(1)}(\xi) = a)| \\ &= |E(f^{(2)}(\xi) < a)| + \frac{1}{2} |E(f^{(2)}(\xi) = a)| \end{aligned}$$

et il reste à démontrer que cette égalité engendre l'égalité des deux distribuantes $g^{(1)}(\omega)$, $g^{(2)}(\omega)$ qui correspondent à $f^{(1)}(\xi)$, $f^{(2)}(\xi)$ suivant (6). Or, on a pour une suite des a_k croissant vers a_∞ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ |E(f(\xi) < a_k)| + \frac{1}{2} |E(f(\xi) = a_k)| \right\} = |E(f(\xi) < a_\infty)|,$$

ce qui achève la démonstration. Le critère (7) ne présuppose que la mesurabilité de $f^{(1)}$, $f^{(2)}$.

Soient $X(\alpha)$, $Y(\alpha)$, $Z(\alpha)$ les composantes d'un vecteur quelconque, supposées mesurables. Nous supposons que ce vecteur (qui dépend de α) n'est pas presque partout nul. Sa composante $Q(\alpha)$ suivant une direction quelconque l, m, n

$$Q(\alpha) = \frac{lX(\alpha) + mY(\alpha) + nZ(\alpha)}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

aura, par hypothèse, une distribution de valeurs qui ne dépend pas de la direction considérée. Nous avons alors le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour l'indépendance des fonctions $X(\alpha)$, $Y(\alpha)$, $Z(\alpha)$ est que leur distribuante soit une fonction

$$(10) \quad \Theta_h(\omega) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\omega} e^{-h^2 \xi^2} d\xi \quad (h > 0)$$

(dite de Gauss).

Démonstration. 1°: La condition est suffisante. En effet, pour montrer l'indépendance, il suffit, d'après le critère de la Communication I²), d'établir l'égalité

$$(11) \quad \int_0^1 e^{i\sqrt{l^2+m^2+n^2} Q(\alpha)} d\alpha = \int_0^1 e^{i(lX(\alpha)+mY(\alpha)+nZ(\alpha))} d\alpha \\ = \int_0^1 e^{ilX(\alpha)} d\alpha \cdot \int_0^1 e^{imY(\alpha)} d\alpha \cdot \int_0^1 e^{inZ(\alpha)} d\alpha$$

pour tous les l, m, n réels. Or, $\Theta_h(\omega)$ est évidemment la distribuante pour la fonction inverse $\omega = \varphi(\alpha)$, définie par $\alpha = \Theta_h(\omega)$. Comme $X(\alpha)$, $Y(\alpha)$, $Z(\alpha)$, $Q(\alpha)$ ont aussi la distribuante $\Theta_h(\omega)$, l'égalité à établir est équivalente à

$$(12) \quad \int_0^1 e^{i\sqrt{l^2+m^2+n^2} \varphi(\alpha)} d\alpha = \int_0^1 e^{il\varphi(\alpha)} d\alpha \cdot \int_0^1 e^{im\varphi(\alpha)} d\alpha \cdot \int_0^1 e^{in\varphi(\alpha)} d\alpha.$$

Par la substitution $\alpha = \Theta_h(\omega)$, c. à. d.

$$\alpha = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\omega} e^{-h^2 \xi^2} d\xi, \quad \frac{d\alpha}{d\omega} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \omega^2}, \quad \varphi(\alpha) = \omega,$$

(12) devient

²) Loc. cit. ¹) p. 50.

$$(13) \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sqrt{l^2+m^2+n^2}\omega - h^2\omega^2} d\omega \\ = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{il\omega - h^2\omega^2} d\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{im\omega - h^2\omega^2} d\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{in\omega - h^2\omega^2} d\omega.$$

Ici les parties imaginaires disparaissent et l'évaluation classique

$$(14) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos l\omega \cdot e^{-h^2\omega^2} d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{h} e^{-\frac{l^2}{4h^2}}$$

réduit les deux membres de (13) à $e^{-\frac{l^2+m^2+n^2}{4h^2}}$.

2°: La condition est nécessaire. Si l'on suppose l'indépendance de X, Y, Z , on suppose de ce fait que (11) a lieu. En désignant par $\psi(l)$ l'intégrale

$$\int_0^1 e^{ilX(\alpha)} d\alpha$$

et en tirant parti de l'hypothèse que Q, X, Y, Z ont la même distributive, ce qui permet de remplacer dans (11) ces fonctions par X , on obtient

$$(15) \quad \psi(\sqrt{l^2+m^2+n^2}) = \psi(l) \psi(m) \psi(n)$$

pour tous les l, m, n , réels. Or, la supposition que X est mesurable suffit pour affirmer la continuité de $\psi(l)$. L'équation (15), dite de Maxwell, n'admet donc, d'après MM. BANACH et RUZIEWICZ⁸⁾, que les solutions

$$\psi(t) \equiv 0, \quad \psi(t) = e^{-kt^2}.$$

La constante k est ≥ 0 , car on a $|\psi(l)| \leq 1$; elle est positive, car $k = 0$ implique

$$\int_0^1 e^{ilX(\alpha)} d\alpha = 1 \quad \int_0^1 e^{il \cdot 0} d\alpha$$

et fournit pour $X(\alpha)$, d'après notre lemme, la même distribution des valeurs que pour 0, ce qui est incompatible avec l'hypothèse $X(\alpha) \neq 0$. La définition de $\psi(l)$ donne $\psi(0) = 1$, ce qui exclut la solution $\psi(t) \equiv 0$. Il s'ensuit

⁸⁾ S. Banach et S. Ruziewicz, Sur les solutions d'une équation fonctionnelle de J. Cl. Maxwell, Bull. de l'Acad. Pol. des Sciences et des Lettres, Cl. des Sc. Math. et Nat., série A, janv.-déc. 1922, p. 1-8.

$$\int_0^1 e^{itX(\alpha)} d\alpha = e^{-kt^2} \quad (k > 0).$$

D'autre part, nous avons eu ((14))

$$\int_0^1 e^{it\eta(\alpha)} d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{h} e^{-\frac{t^2}{4h^2}},$$

ce qui conduit à

$$\int_0^1 e^{it\eta(\alpha)} d\alpha = \int_0^1 e^{it\mu X(\alpha)} d\alpha,$$

si l'on choisit

$$h = \sqrt{\pi}, \quad \mu = \frac{1}{2\sqrt{\pi k}}.$$

Ce résultat et notre lemme montrent que $\varphi(\alpha)$ et $\mu X(\alpha)$ ont la même distribuite; or, nous savons que la distribuite de $\varphi(\alpha)$ est $\Theta_h(\omega)$ avec $h = \sqrt{\pi}$. On en conclut que $X(\alpha)$ a $\Theta_h(\mu\omega)$ pour distribuite. Or, on a

$$\begin{aligned} \Theta_h(\mu\omega) &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\mu\omega} e^{-h^2 \xi^2} d\xi \\ &= \mu \int_{-\infty}^{\omega} e^{-\mu^2 \pi \eta^2} d\eta = \frac{1}{2\sqrt{\pi k}} \int_{-\infty}^{\omega} e^{-\frac{\eta^2}{4k}} d\eta = \Theta_{\frac{1}{2\sqrt{k}}}(\omega), \end{aligned}$$

ce qui est une fonction de Gauss.

La partie 2° est une généralisation d'un théorème connu de MAXWELL; la partie 1° permet d'affirmer l'indépendance des trois composantes du mouvement brownien, quand l'observation a montré la distribution de Gauss dans toutes les directions.

(Reçu par la Rédaction le 21. 3. 1936).

Einige Gegenbeispiele zur Konvergenztheorie der allgemeinen Orthogonalentwicklungen

von

W. ORLICZ (Lwów).

Herr J. MARCINKIEWICZ hat den folgenden interessanten Satz bewiesen¹⁾:

Für ein beliebiges Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$ existiert eine Indizesfolge $\{n_p\}$ mit der Eigenschaft, daß die Folge

$$\sum_{i=1}^{n_p} a_i \varphi_i(x),$$

wo $a_i = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx$, $f(x) \in (L^2)$, fast überall konvergiert.

Wir betrachten im folgenden einige Orthogonalentwicklungen, die gewisse Konvergenzdefekte aufweisen; aus dem Satz 1' folgt insbesondere, daß der vorstehende Satz des Herrn J. MARCINKIEWICZ auf den Fall der Räume (L^α) , $1 \leq \alpha < 2$, sich nicht verallgemeinern läßt.

Wir bezeichnen mit $M[u]$ eine in $\langle 0, +\infty \rangle$ stetige, konvexe Funktion, die nur für $u=0$ gleich Null ist und außerdem den Bedingungen $\lim_{u \rightarrow 0} M[u]u^{-1} = 0$, $\lim_{u \rightarrow \infty} M[u]u^{-1} = +\infty$, $M[2u] \leq kM[u]$ für $u \geq u_0$ genügt. Mit (L^M) bezeichnen wir den Raum vom Typus (B) aller derjenigen meßbaren Funktionen $f(x)$, für welche das Integral $\int_a^b M[|f(x)|] dx$ endlich ist

¹⁾ J. Marcinkiewicz, Sur la convergence des séries orthogonales, dieser Band, p. 39–45.

Satz 1. Die Funktion $M[u]$ genüge der Bedingung

$$\lim_{u \rightarrow \infty} M[u] u^{-2} = 0;$$

dann existiert in (a, b) ein Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$ mit der folgenden Eigenschaft:

Für jede zeilenfinite Toeplitzsche Summationsmethode T gibt es eine Funktion $f(x) \in (L^M)$, so daß, $a_i = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx$ gesetzt, die Orthogonalentwicklung

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x)$$

für fast jedes x mit der Methode T nicht summierbar ist.

Beweis. Man konstruiert zuerst ganz leicht eine Funktion $f^*(x)$, so daß $f^*(x) > 0$ für $x \in (a, b)$, $f^*(x) \in (L^M)$, $\int_a^b (f^*(x))^2 dx = +\infty$; wir behaupten das jedes in (a, b) erklärte Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$, welches in (L^2) vollständig ist, für welches aber $\int_a^b f^*(x) \varphi_i(x) dx = 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), die obige Eigenschaft aufweist²⁾.

Da unserer Voraussetzung gemäß das Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$ in (L^2) vollständig ist, so ist es in (L^M) abgeschlossen, d. h. wenn $f(x) \in (L^M)$, $\varepsilon > 0$ vorgegeben sind, so gibt es eine lineare Kombination $w_m(x) = \sum_{i=1}^{N(m)} c_i^{(m)} \varphi_i(x)$ mit

$$\int_a^b M[f(x) - w_m(x)] dx < \varepsilon.$$

Aus einem Satze des Herrn S. SAKS³⁾ ergibt sich zuerst die Existenz einer Menge $A \subset (a, b)$ so daß:

²⁾ Der Ansatz zu dieser Beweismethode stammt von S. Banach, siehe: S. Banach, Sur la convergence presque partout des fonctionnelles linéaires, Bull. des Sc. Math. 50 (1926) p. 27–32, 36–43.

³⁾ S. Saks, Sur les fonctionnelles de M. Banach et leur application aux développements des fonctions, Fund. Math. 10 (1927) p. 186–196; insb. p. 192, théorème 6.

a) wenn $f(x) \in (L^M)$, so ist die Reihe (1) fast überall in A T -summierbar;

b) es gibt Funktionen aus (L^M) , für welche fast überall in $(a, b) - A$ die Reihe (1) mit der Methode T nicht summierbar ist.

Es ist $|A| = 0$; denn nehmen wir an, es sei $|A| > 0$ und bezeichnen wir mit $S(f; x), f(x) \in (L^M)$ die fast überall in A existierende Grenzfunktion

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N(n)} a_{in} s_n(f; x) = S(f; x),$$

wobei (a_{in}) ($i = 1, 2, 3, \dots; n = 1, 2, 3, \dots, N(n)$) die der Methode T entsprechende Matrix, $s_n(f; x)$ die n -te Teilsumme der Entwicklung (1) bedeuten. $S(f; x)$ kann als eine lineare Operation⁴⁾ in (L^M) betrachtet werden, deren Werte dem Raume (S) angehören. Da $S(w_m; x) = w_m(x)$, so folgt aus dem Vorangehenden für jede Funktion aus (L^M) die Identität $S(f; x) = f(x)$ fast überall in A . Dies ist aber mit $S(f^*; x) = 0$ unvereinbar.

Wählen wir als $f^*(x)$ eine Funktion welche mit jedem positiven Exponenten $\alpha < 2$, jedoch nicht quadratisch integrierbar ist, so ergibt eine ähnliche Beweisführung den

Satz 1'. *Es existiert in (a, b) ein Orthogonalsystem $\{q_i(x)\}$ mit der Eigenschaft:*

Ist $1 < \alpha < 2$, T eine beliebige zeilenfinite Toeplitzsche Summationsmethode, so gibt es eine Funktion $f(x)$ mit

$$\int_a^b |f(x)|^\alpha dx < +\infty,$$

deren Orthogonalentwicklung (1) fast überall nicht T -summierbar ist.

Satz 2. *Die Funktion $M[u]$ genüge der Bedingung*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} M[u] u^{-2} = 0;$$

das im Laufe des Beweises vom Satz 1 benutzte unvollständige Orthogonalsystem $\{q_i(x)\}$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

a) *Wenn T eine beliebige zeilenfinite Toeplitzsche Summationsmethode bezeichnet, die der Matrix (a_{in}) ($i = 1, 2, 3, \dots$;*

⁴⁾ Siehe die unter ²⁾ genannte Arbeit des Herrn Banach oder die unter ³⁾ genannte Arbeit des Herrn Saks.

$n = 1, 2, 3 \dots N(n)$), entspricht, so gibt es eine Funktion $f(x) \in (L^M)$, so daß die Folge der Transformaten

$$(2) \quad T_i(f; x) = \sum_{n=1}^{N(n)} a_{in} s_n(f; x)$$

nicht asymptotisch konvergent ist;

b) Es gibt Funktionen $f(x) \in (L^M)$, für welche

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b |T_i(f; x)| dx = +\infty;$$

c) Wenn $M'[u]$ die zu $M[u]$ komplementäre Funktion bezeichnet⁵⁾, so gibt es stetige Funktionen $g(x)$, so daß

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b M' [|T_i(g; x)|] dx = +\infty.$$

Beweis. a) Wenn die Folge $\{T_i(f; x)\}$ für jede Funktion $f(x) \in (L^M)$ asymptotisch gegen $S(f; x)$ konvergiert, so ist $S(f; x)$ eine lineare Operation in (L^M) , deren Werte dem Raume (S) angehören; eine ähnliche Überlegung wie früher zeigt, daß $S(f; x) = f(x)$, was mit $S(f^*; x) = 0$ im Widerspruch steht.

b) Nehmen wir an, daß für jedes $f(x) \in (L^M)$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b |T_i(f; x)| dx < +\infty.$$

Dies hat die Ungleichung

$$\int_a^b |T_i(f; x)| dx \leq C \text{ wenn } \int_a^b M[|f(x)|] dx \leq 1$$

mit einem konstanten C zur Folge, woraus sich weiter, wegen der Abgeschlossenheit des Orthogonalsystems $\{q_i(x)\}$ in (L^M) ,

die Beziehung $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b |T_i(f; x) - f(x)| dx = 0$ ergibt. Es müßte

also die Folge $\{T_i(f; x)\}$ für jedes $f(x) \in (L^M)$ asymptotisch konvergieren.

⁵⁾ Siehe: Z. Birnbaum — W. Orlicz, Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen, *Studia Math.* 3 (1931) p. 1—67, insb. p. 8.

c) Wäre für jede stetige Funktion $g(x)$ die Ungleichung

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b M' [|T_i(g; x)|] dx < +\infty$$

erfüllt, so hätte man für jede Funktion $f(x) \in (L^M)$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) T_i(g; x) dx \right| &= \left| \int_a^b g(x) T_i(f; x) dx \right| \\ &\leq K(g) + \int_a^b M[|f(x)|] dx = C(g) \quad (i=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

und hieraus weiter

$$\begin{aligned} \int_a^b |T_i(f; x)| dx &\leq C \text{ für } \int_a^b M[|f(x)|] dx \leq 1, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b |T_i(f; x) - f(x)| dx &= 0, \end{aligned}$$

was, wie wir schon wissen, unmöglich ist.

Die im Vorangehenden angewandte, sehr allgemeine Beweismethode erlaubt nicht zu entscheiden, ob gleichmäßig beschränkte, oder in (L^1) vollständige Orthogonalsysteme $\{\varphi_i(x)\}$ existieren mit den Eigenschaften von den in den obigen Sätzen die Rede war, und es bleibt eine offene Frage, ob sich unsere Sätze dahin verschärfen lassen. In dieser Richtung liegt der folgende einfache Satz, der aber nicht einmal ein Gegenbeispiel zu dem Satz von MARCINKIEWICZ (im Falle der Räume (L^u) , $1 \leq u < 2$) liefert.

Satz 3. Zu einer vorgegebenen Funktion $M|u|$ mit

$$\lim_{u \rightarrow \infty} M[u] u^{-2} = 0$$

und einer vorgegebenen zeilenfiniten Toeplitzischen Summationsmethode T existiert ein gleichmäßig beschränktes, in (L^1) vollständiges, Orthogonalsystem von der Eigenschaft: Es gibt eine Funktion $f(x) \in (L^M)$, für welche die Folge der Transformaten (2) in einer Menge von positivem Maße divergiert und asymptotisch nicht konvergent ist. Dieses Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$ besitzt außerdem die Eigenschaften b), c) des Satzes 2.

Beweis. Betrachten wir zuerst irgendein Orthogonalsystem $\{\psi_i(x)\}$, das aus gemeinsam beschränkten Funktionen besteht und in (L^1) vollständig ist. Wir wählen eine Funktion $f(x)$ so daß

$$\int_a^b M[|f(x)|] dx < +\infty, \quad \int_a^b f^2(x) dx = +\infty;$$

wenn wir mit a_i die Koeffizienten dieser Funktion bezeichnen, so ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = +\infty$. Aus früheren Sätzen des Verfassers⁶⁾ ergibt sich die Existenz einer Vorzeichenverteilung $\varepsilon_i = \pm 1$ mit der Eigenschaft, daß die der T -Methode entsprechende Transformierten der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varepsilon_i \psi_i(x)$ in einer Menge vom positiven Maße divergent sind und asymptotisch nicht konvergieren. Das Orthogonalsystem $\varphi_i(x) = \varepsilon_i \psi_i(x)$ besitzt die verlangten Eigenschaften.

⁶⁾ W. Orlicz, Über die Divergenz von allgemeinen Orthogonalreihen, *Studia Math.* 4 (1933) p. 27–32.

(Reçu par la Rédaction le 11. 4. 1936).

Zur Theorie der konvexen Mengen in linearen normierten Räumen

von

M. EIDELHEIT (Lwów).

Bekanntlich gibt es in einem euklidischen Raum für zwei konvexe Körper, die keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen, eine sie trennende Ebene. Herr S. MAZUR hat nun die Frage gestellt, ob dieser Satz auch in linearen normierten Räumen richtig bleibt. Dabei nennen wir eine konvexe Menge einen *konvexen Körper*, wenn sie innere Punkte besitzt. Unter einer *Ebene* verstehen wir die Menge der Punkte, die eine Gleichung von der Form

$$(1) \quad f(x) = c$$

erfüllen, in der $f(x)$ ein lineares Funktional, c eine reelle Zahl bedeutet. Wir sagen, daß die Ebene, die durch (1) gegeben ist, zwei konvexe Körper *trennt*, wenn in einem Körper stets $f(x) \leq c$, im anderen stets $f(x) > c$ gilt.

In der vorliegenden Note wird diese Frage positiv beantwortet.

Es sei K ein konvexer Körper, x_0 ein innerer Punkt von K . Ist x ein beliebiger Punkt, so setzen wir $K(x) =$ untere Grenze der positiven Zahlen h , für welche

$$\left(\frac{x}{h} + x_0\right) \in K.$$

$K(x)$ heißt das *Minkowskische Funktional* des Körpers K in bezug auf den Punkt x_0 . Das Minkowskische Funktional besitzt folgende Eigenschaften:

1. Es ist $K(x - x_0) < 1$, wenn x ein innerer, $K(x - x_0) = 1$, wenn x ein Randpunkt, $K(x - x_0) > 1$, wenn x ein äußerer Punkt von K ist. 2. $K(x) \geq 0$, $K(0) = 0$. 3. $K(tx) = tK(x)$ für reelle

positive t und beliebige Elemente x . 4. $K(x+y) \leq K(x) + K(y)$ für beliebige Elemente x, y . 5. $K(x) \leq M|x|$, wo $M > 0$ von x unabhängig ist. 6. Ist K beschränkt, so gibt es ein $m > 0$, so daß $K(x) > m|x|$ ist (m eine Konstante)¹⁾.

Satz. Sind zwei konvexe Körper ohne gemeinsame innere Punkte in einem linearen normierten Raume gegeben, so gibt es immer eine sie trennende Ebene.

Beweis. Wir behandeln zuerst den Fall, daß K_1 und K_2 zwei konvexe Körper mit gemeinsamen Randpunkten sind. Es seien x_0 ein gemeinsamer Randpunkt, x_1 und x_2 innere Punkte von K_1 bzw. K_2 . Wir dürfen annehmen, daß

$$(2) \quad x_2 - 2x_0 \neq 0$$

ist, denn man kann das immer durch eine Translation der beiden Körper um $x_2 - 2x_0$ erreichen. Wir bezeichnen das Minkowskische Funktional des Körpers K_2 in bezug auf den Punkt x_2 mit $K_2(x)$. Es ist dann, wegen (2), für die Punkte x des Körpers K_2

$$(3) \quad K_2(x - 2x_0) \leq 1$$

und es gibt eine positive Zahl M_2 , derart daß

$$(4) \quad K_2(x) \leq M_2|x|$$

für alle x gilt.

Es sei jetzt H_1 die Menge der Punkte z' von der Form

$$z' = z + \vartheta(x - z),$$

wobei ϑ eine Zahl, x, z Elemente mit

$$(5) \quad 0 \leq \vartheta \leq 1, x \in K_1, |z| < \frac{1}{M_2}$$

sind. H_1 ist ein konvexer Körper, der den Körper K_1 und außerdem den Nullpunkt als inneren Punkt enthält. Wir beweisen zunächst, daß die Mengen H_1, K_2 keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen. Es genügt zu zeigen, daß stets

$$K_2(z' - 2x_0) \geq 1$$

ist.

¹⁾ Vgl. S. Mazur, Über konvexe Mengen in linearen, normierten Räumen, *Studia Math.* 4 (1933) p. 70–84, insb. p. 71–73.

In der Tat ist

$$(6) \quad K_2(z' - 2x_0) \geq K_2(\vartheta x - 2x_0) - K_2(\vartheta x - z')$$

und wegen (4), (5)

$$(7) \quad K_2(\vartheta x - z') = (1 - \vartheta) K_2(-z) \leq (1 - \vartheta) M_2 |z| \leq 1 - \vartheta.$$

Ferner ist, wenn wir

$$(8) \quad w = 2x_0 + \frac{1}{2 - \vartheta} (\vartheta x - 2x_0)$$

setzen,

$$(9) \quad K_2(\vartheta x - 2x_0) = (2 - \vartheta) K_2(w - 2x_0).$$

Da man (8) auch in der Form

$$w = x_0 + \frac{\vartheta}{2 - \vartheta} (x - x_0)$$

schreiben kann, woraus wegen (5) $w \in K_1$ folgt, so ist, da ja K_1 und K_2 ohne gemeinsame innere Punkte vorausgesetzt sind,

$$K_2(w - 2x_0) \geq 1.$$

Aus (6), (7) und (9) folgt nun

$$K_2(z' - 2x_0) \geq (2 - \vartheta) - (1 - \vartheta) = 1.$$

Bezeichnen wir jetzt mit K die Menge der Punkte von der Form

$$x + t(y - x),$$

wobei t eine reelle Zahl bedeutet und wo

$$(10) \quad x \in H_1, \quad K_2(-y) \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

so ist K ein konvexer Körper, der den Körper H_1 enthält.

Wir beweisen im folgenden, daß x_0 ein Randpunkt des Körpers K ist. Es genügt zu zeigen, daß K keinen Punkt von der Form ax_0 mit

$$(11) \quad a > 1$$

enthält. Nehmen wir an, daß im Gegenteil

$$(12) \quad ax_0 = x + t(y - x)$$

sei und daß die Relationen (10), (11) erfüllt seien. Wir dürfen dabei in (10) $t > 0$ voraussetzen, da sonst die Körper H_1 und K_2 einen gemeinsamen inneren Punkt besitzen würden. Aus (12) folgt

$$(13) \quad y = ax_0 - \frac{1-t}{t} (x - ax_0).$$

Wir wählen nun eine Zahl λ mit

$$(14) \quad 0 < \lambda < \frac{t}{1-t}, \quad \lambda < 1$$

und setzen

$$(15) \quad y' = x_0 + \lambda(y - x_0).$$

Da x_0 ein Randpunkt des Körpers K_2 und infolgedessen

$$K_2(-x_0) = K_2(x_0 - 2x_0) = 1$$

ist, so haben wir mit Berücksichtigung von (10)

$$(16) \quad K_2(-y') \leq 1;$$

andererseits ist nach (13)

$$(17) \quad y' = bx_0 - \lambda \frac{1-t}{t} (x - bx_0) \text{ mit } b = \frac{t - \lambda t + \lambda a}{t - \lambda t + \lambda},$$

wobei, wegen (10), (11) und (14), $b > 1$ ist.

Wir bemerken jetzt, daß

$$K_2[x_0 + \vartheta(x - x_0) - 2x_0] \geq 1 \text{ für } 0 \leq \vartheta \leq 1, x \in H_1$$

ist, da H_1 und K_2 , wie gezeigt wurde, keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen. Da $0 \in H_1$, so ist für $x \in H_1$ auch $x/b \in H_1$ und infolgedessen

$$K_2[-x_0 + \vartheta\left(\frac{x}{b} - x_0\right)] \geq 1 \text{ für } 0 \leq \vartheta \leq 1, x \in H_1.$$

Nach (14) können wir hier $\vartheta = \lambda \frac{1-t}{t}$ setzen und erhalten, wenn wir noch beiderseits mit b multiplizieren,

$$K_2[-bx_0 + \lambda \frac{1-t}{t} (x - bx_0)] \geq b > 1,$$

was mit (16) und (17) im Widerspruch steht.

Es sei nun $K(x)$ das Minkowskische Funktional des Körpers K in bezug auf den Nullpunkt. Nach einem bekannten Satz des Herrn BANACH²⁾ gibt es, da $K(x_0) = 1$ ist, ein additives Funktional $f(x)$ mit

$$(18) \quad f(x_0) = 1, f(x) \leq K(x) \text{ für jedes } x,$$

und aus dieser Ungleichung ergibt sich, daß $f(x)$ auch linear ist.

²⁾ S. Banach, *Théorie des Opérations linéaires*, Warszawa (1932), p. 27, th. 1.

Aus (10) folgt, daß für ein beliebiges x , $y = \frac{x}{K_2(-x)} \in K$ ist und infolgedessen

$$(19) \quad K(x) \leq K_2(-x).$$

Ebenso ist, wegen $K \supset H_1$, $K(x) \leq H_1(x)$, wenn wir mit $H_1(x)$ das Minkowskische Funktional des Körpers H_1 inbezug auf den Nullpunkt bezeichnen. Aus (18) ergibt sich ferner

$$(20) \quad f(x) \leq K_2(-x) \text{ und } f(x) \leq H_1(x).$$

Die erste Ungleichung ist mit $f(x) \geq -K_2(x)$ äquivalent. Für $x \in K_2$ folgt hieraus

$$f(x - 2x_0) \geq -K_2(x - 2x_0) \geq -1 \text{ und, wegen } f(x_0) = 1, \\ f(x) \geq 1.$$

Nach (20) ist noch für $x \in H_1$

$$f(x) \leq 1.$$

Die Ebene $f(x) = 1$ trennt also die Körper H_1 und K_2 und umsomehr K_1 und K_2 .

Wir betrachten jetzt den Fall, daß K_1 und K_2 zwei konvexe beschränkte Körper mit einem positiven Abstand d voneinander sind.

Wir wählen beliebig zwei Punkte x_1 und x_2 , die innere Punkte von K_1 bzw. K_2 sind und bezeichnen mit $K_1(x)$ bzw. $K_2(x)$ das Minkowskische Funktional des Körpers K_1 bzw. K_2 inbezug auf x_1 bzw. x_2 . Wegen der Beschränktheit der Körper K_1 , K_2 gibt es positive Zahlen m_1, M_1, m_2, M_2 mit

$$(21) \quad m_1|x| \leq K_1(x) \leq M_1|x|, m_2|x| \leq K_2(x) \leq M_2|x| \text{ für jedes } x.$$

Wir setzen ³⁾

$$\alpha = \inf_{x \in K_2} K_1(x - x_1), \quad \beta = \inf_{x \in K_1} K_2(x - x_2)$$

und zeigen zunächst, daß

$$(22) \quad \alpha > 1, \quad \beta > 1$$

ist. In der Tat ist für $x \in K_2$, da ja K_1 und K_2 einen positiver Abstand voneinander haben, $K_1(x - x_1) > 1$ und infolgedessen

$$(23) \quad K_1(x - x_1) = 1 + K_1(x - x_1) \left(1 - \frac{1}{K_1(x - x_1)}\right) \\ = 1 + K_1 \left(x - x_1 - \frac{x - x_1}{K_1(x - x_1)}\right).$$

³⁾ Das Zeichen „inf.“ bedeutet die untere Grenze.

Da aber der Punkt $x_1 + \frac{x - x_1}{K_1(x - x_1)}$ dem Rande des Körpers K_1 angehört, so ist für $x \in K_2$

$$\left| x - x_1 - \frac{x - x_1}{K_1(x - x_1)} \right| \geq d$$

und nach (21) ergibt sich aus (23)

$$K_1(x - x_1) \geq 1 + m_1 d,$$

also $\alpha > 1$. Ebenso bekommen wir $\beta > 1$.

Nun ist leicht einzusehen, daß es einen Punkt x_0 gibt, für welchen

$$(24) \quad K_1(x_0 - x_1) \leq \alpha, \quad K_2(x_0 - x_2) \leq \beta$$

ist. Wäre nämlich für jeden Punkt x , welcher der Ungleichung $K_1(x - x_1) \leq \alpha$ genügt, $K_2(x - x_2) > \beta$, so hätten wir für x , welche den Ungleichungen

$$\alpha \leq K_1(x - x_1) < \alpha + \frac{(\beta - 1)m_1}{M_2}$$

genügen, nach (21)

$$\begin{aligned} K_2[x - x_2] &\geq K_2\left[x_1 + \alpha \frac{x - x_1}{K_1(x - x_1)} - x\right] = K_2\left[x_1 + \alpha \frac{x - x_1}{K_1(x - x_1)} - x\right] \\ &> \beta - M_2 \left| x_1 + \alpha \frac{x - x_1}{K_1(x - x_1)} - x \right| > \beta - \frac{M_2}{m_1} K_1\left[x - x_1 - \alpha \frac{x - x_1}{K_1(x - x_1)}\right] \\ &= \beta - \frac{M_2}{m_1} [K_1(x - x_1) - \alpha] > \beta - \frac{M_2}{m_1} \cdot \frac{(\beta - 1)m_1}{M_2} = 1. \end{aligned}$$

Es wäre dann für $x \in K_2$

$$K_1(x - x_1) \geq \alpha + \frac{(\beta - 1)m_1}{M_2},$$

entgegen der Definition der Zahl α .

Es seien nun K' bzw. K'' die Mengen der Punkte von der Form

$$x_0 + t(x - x_0), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x \in K_1, \quad \text{bzw.} \quad x_0 + t(x - x_0), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x \in K_2.$$

K' und K'' sind konvexe Körper, welche die Körper K_1 bzw. K_2 enthalten, und besitzen den gemeinsamen Punkt x_0 .

Wir bemerken, daß x_0 der einzige gemeinsame Punkt ist. Denn wäre für gewisse t_1, t_2 ($0 < t_1 \leq 1, 0 < t_2 \leq 1$) $x \in K_1, y \in K_2$

$$x_0 + t_1(x - x_0) = x_0 + t_2(y - x_0),$$

so hätten wir auf Grund von (22) und (24), wenn z. B. $t_1/t_2 \leq 1$ ist,

$$K_1(y - x_1) = K_1[(x_0 - x_1)(1 - \frac{t_1}{t_2}) + \frac{t_1}{t_2}(x - x_1)] < \alpha,$$

entgegen der Definition der Zahl α . Ähnlich kommen wir zu einem Widerspruch, wenn wir $t_2/t_1 \leq 1$ annehmen.

Die Körper K'_1, K'' genügen also den Bedingungen des schon behandelten Falles und wir können auf sie den Satz anwenden. Da $K' \supset K_1, K'' \supset K_2$, so gibt es auch für die Körper K_1, K_2 eine sie trennende Ebene.

Nun lassen wir die Voraussetzung des positiven Abstandes der beschränkten Körper K_1 und K_2 voneinander fallen. (Es ist zu beachten, daß auch dann, wenn K_1 und K_2 abgeschlossen sind, sie keine gemeinsamen Punkte zu besitzen brauchen).

Wir behalten die vorigen Bezeichnungen bei. Es sei H_n der konvexe Körper, welcher durch

$$K_1(x - x_1) \leq \frac{n}{n+1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

gegeben ist. Die Körper K_2 und H_n ($n=1, 2, \dots$) haben einen positiven Abstand voneinander, denn es ist für $x \in H_n, y \in K_2$

$$K_1(y - x) = K_1(y - x_1) - K_1(x - x_1) \geq 1 - \frac{n}{n+1},$$

also nach (21)

$$|y - x| \geq \frac{1}{M_1} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Da $H_n \subset K_1$, also H_n beschränkt ist, so gibt es nach dem Vorangehenden für jedes n eine Ebene von der Form

$$f_n(x) = 1,$$

welche die Körper K_2, H_n trennt. Es ist dann

$$(25) \quad f_n(x) \leq 1 \text{ für } x \in H_n; \quad f_n(x) > 1 \text{ für } x \in K_2 \quad (n=1, 2, \dots).$$

Aus diesen Ungleichungen folgt, da H_n, K_2 innere Punkte besitzen, daß die Folge $\{f_n\}$ beschränkt ist. Daraus folgt weiter⁴⁾, daß es ein lineares Funktional $f(x)$ mit

⁴⁾ loc. cit. ³⁾ p. 118, lemme 1.

$$(26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq f(x) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

für jedes x gibt. Aus (25), (26) folgt zunächst

$$(27) \quad f(x) \geq 1 \text{ für } x \in K_2.$$

Es sei ferner x ein beliebiger innerer Punkt des Körpers K_1 . Es ist dann $x \in H_n$ für genügend große n , also nach (25) $f_n(x) \leq 1$. Nach (26) folgt hieraus

$$(28) \quad f(x) \leq 1.$$

Aus der Stetigkeit des Funktional $f(x)$ ergibt sich (28) auch auf dem Rande von K_1 . Die Ungleichungen (27), (28) zeigen, daß die Ebene $f(x) = 1$ die verlangte Eigenschaft besitzt.

Wir erledigen endlich den allgemeinen Fall, wenn man von den konvexen Körpern K_1, K_2 nur weiß, daß sie keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen.

Wir bezeichnen mit $H_1^{(n)}$ bzw. $H_2^{(n)}$ denjenigen Teil des Körpers K_1 bzw. K_2 , welcher in der Kugel $|x| \leq n$ liegt. Die — für genügend große n — konvexen Körper $H_1^{(n)}, H_2^{(n)}$ sind beschränkt. Es gibt also — für diese n — nach dem schon Bewiesenen, lineare Funktionale $f_n(x)$ derart, daß

$$f_n(x) \leq 1 \text{ für } x \in H_1^{(n)}; \quad f_n(x) \geq 1 \text{ für } x \in H_2^{(n)}$$

ist. Aus diesen Ungleichungen ergibt sich wie oben, daß es ein lineares Funktional $f(x)$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq f(x) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

für jedes x gibt. Ist nun $x \in K_1$, so gilt, von einem gewissen n_0 ab, $x \in H_1^{(n)}$, also $f_n(x) \leq 1$. Daraus ergibt sich

$$f(x) \leq 1 \text{ für } x \in K_1.$$

Ähnlich bekommt man

$$f(x) \geq 1 \text{ für } x \in K_2.$$

Die Ebene

$$f(x) = 1$$

trennt also die Körper K_1, K_2 w. z. b. w.

Notes on orthogonal series III.

by

S. KACZMARZ (Lwów).

1. Let $\{\varphi_n(t)\}$ be an orthonormal system in the interval $\langle 0, 1 \rangle$. The system presents¹⁾ the *singularity* k_p ($1 \leq p < \infty$), if there exists a function $f(t) \in L^p$ [$f(t)$ belongs to L^p if the function $|f(t)|^p$ is integrable over $\langle 0, 1 \rangle$], such that $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^p n^{p-2} = \infty$, where f_n are the coefficients of $f(t)$ with respect to the system $\{\varphi_n\}$. On the other hand, the *singularity* l_p ($1 \leq p < \infty$) requires the existence of an orthogonal series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ with the properties: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p n^{p-2} < \infty$, 2) the series is not the development of a function belonging to L^p .

The purpose of this paper is to extend these definitions to the case $p = \infty$. We define namely the *singularity* k_{∞} as the existence of a function $f(t) \in M$ (that is $f(t)$ is bounded almost everywhere), such that $\limsup_{n \rightarrow \infty} n |f_n| = \infty$. If there is a numerical sequence $\{a_n\}$ such that $n |a_n|$ is bounded and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ is not the development of a function belonging to M , we shall say that the system $\{\varphi_n\}$ presents the *singularity* l_{∞} .

¹⁾ See S. Kaczmarz und H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, Monografie matematyczne t. VI, Warszawa-Lwów 1935 (referred in the sequence as OR) p. 237–238.

²⁾ We write $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \in L^p$, if this series is the development of a function $f(t)$ belonging to L^p , otherwise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \sim \notin L^p$.

2. The following theorems show the relations between the singularities k and l .

Theorem 1. *If the system $\{\varphi_n\}$ presents the singularity l_∞ , then the system presents also the singularity k_1 .*

Suppose that the system does not present the singularity k_1 . We have then for any function $f(t) \in L$ the relation $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n|}{n} < \infty$.

Let $\{a_n\}$ be a sequence with the properties: $n|a_n| < A$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \sim \varepsilon M$. Then for any $f(t) \in L$ we have $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n| < \infty$, hence $\{a_n\}$ is the sequence of coefficients of a function belonging to M , contrary to the property of $\{a_n\}$ and the theorem is proved.

Theorem 2. *If the system $\{\varphi_n(t)\}$ presents the singularity k_1 , $\varphi_n(t) \in M$, $\{\varphi_n(t)\}$ complete in M , then $\{\varphi_n(t)\}$ presents also the singularity l_∞ .*

By the hypothesis there exists a function $f(t) \in L$, such that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n|}{n} = \infty$. Suppose that for any sequence $\{a_n\}$, such that $n|a_n| \leq 1$, we have $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \in M$; thus the sequence $\{\frac{1}{n}\}$ is a majorant³⁾ for the space M . From the theorem [692] in OR⁴⁾ follows that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n|}{n} < \infty$ for any $f(t) \in L$, contrary to the hypothesis. Consequently there exists a sequence $\{a_n\}$ such that $n|a_n| \leq 1$ and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \sim \varepsilon M$.

Corollary. Under the assumptions: $\varphi_n \in M$, $\{\varphi_n\}$ complete in M , the singularities k_1 and l_∞ are equivalent.

Theorem 3. *If the system $\{\varphi_n\}$ presents the singularity l_1 , then it presents also the singularity k_∞ .*

Suppose that the system does not present the singularity k_∞ . Then for any $f(t) \in M$ we have $n|f_n| < A$. Let $\{a_n\}$ be a se-

³⁾ OR, p. 240.

⁴⁾ OR, p. 240.

quence with the properties $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \sim \varepsilon L$. The existence of such a sequence follows from the singularity l_1 . Then we have $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n| < \infty$ for every $f(t)$ belonging to M , which ⁵⁾ implies $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \varepsilon L$, contradictory to the singularity l_1 , and so the system $\{\varphi_n\}$ presents the singularity k_{∞} .

Theorem 4. *The singularity k_{∞} with the completeness of $\{\varphi_n\}$ in the space L implies the existence of the singularity l_1 .*

From the singularity k_{∞} follows the existence of a function $f(t) \varepsilon M$, such that $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup n |f_n| = \infty$. Consider the space X with elements $x = \{a_n\}$, such that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} < \infty$. Define the norm of x by $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$; then X is a space of the type B (that is vectorial, complete and normed). Suppose now that the system $\{\varphi_n\}$ does not present the singularity l_1 . Thus every x is the sequence of coefficients of a function $g(t)$ belonging to L and therefore ⁶⁾

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |g(t) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t)| dt = 0.$$

It follows that $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k f_k = \int_0^1 f(t) g(t) dt$ and $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n| < \infty$.

Hence for any $\{a_n\}$ with $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} < \infty$ we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} n |f_n| < \infty.$$

That implies $n |f_n| < A$, incompatible with the supposed property of $f(t)$ and so the theorem is proved.

Corollary. Under the assumption: $\{\varphi_n(t)\}$ complete in L , the singularities k_{∞} and l_1 are equivalent.

⁵⁾ OR, th. [646], p. 220.

⁶⁾ OR, th. [673], p. 232.

3. The theorems proved above show the relations between singularities but they do not assure their existence. A sufficient condition for the existence gives the following

Theorem 5. *The singularity k_∞ exists, if $|\varphi_n(t)| \leq A$ for all n and almost all t .*

Take a sequence $\{a_n\}$ with the properties: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} < \infty$,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$. Then on account of the boundedness of $\{\varphi_n\}$ we

have $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \varphi_n^2(t) = \infty$ on a set E of positive measure⁷⁾. This implies the existence of a sequence of indices $\{n_i\}$, such that⁸⁾

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^k a_{n_i} \varphi_{n_i}(t) \right| dt = \infty.$$

Hence we can find a continuous function $g(t)$ with coefficients g_n satisfying the relation

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \sum_{i=1}^k g_{n_i} a_{n_i} = \infty.$$

We have therefore $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n g_n| = \infty$; but the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ being convergent we have also $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup n |g_n| = \infty$, which proves the existence of k_∞ . Similarly we can prove:

Theorem 6. *The singularity k_∞ exists, if the system $\{\varphi_n\}$ is complete in L^2 .*

A sufficient condition for the existence of the singularity l_∞ gives the

Theorem 7. *If $|\varphi_n(t)| \leq A$, then the system $\{\varphi_n\}$ presents the singularity l_∞ .*

Consider⁹⁾ a system $\{\psi_n(t)\}$, complete in M , containing the system $\{\varphi_n\}$. We can suppose that $\psi_n(t) \in M$ and that $\varphi_n(t) = \psi_{2n}(t)$, if the set of functions $\{\psi_n\} - \{\varphi_n\}$ is not finite. Then

⁷⁾ OR, th. [512], p. 150.

⁸⁾ OR, th. [676], p. 235.

⁹⁾ OR, th. [614], p. 198.

we have¹⁰⁾

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n |\psi_n(t)| \leq \alpha,$$

if the sequence $\{d_n\}$ is a majorant for $\{\psi_n\}$ in M .

Suppose now, that the system $\{q_n\}$ does not present the singularity l_{∞} . Then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n(t) \in M$ for any $\{a_n\}$, such that $n|a_n| < 1$.

The sequence $\{\frac{1}{n}\}$ is therefore a majorant for $\{q_n\}$ and the sequence $\{d_n\}$, where $d_{2n} = \frac{1}{n}$, $d_{2n+1} = 0$ is a majorant for $\{\psi_n\}$; hence, as mentioned above, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|q_n(t)|}{n} < \alpha$. The boundedness of $\{q_n\}$ leads to the result $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \infty$. This contradiction implies the existence of l_{∞} . The proof in the case, when $\{\psi_n\} = \{q_n\}$ is finite, is quite similar.

Corollary. From theorems 1 and 7 follows the singularity k_1 for $|\varphi_n(t)| \leq A$.

Theorem 8. If $|\varphi_n(t)| \leq A$, then the singularity l_p exists for $1 \leq p < 2$.

Suppose, that for every $\{a_n\}$ such that $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p n^{p-2} < \infty$ we have $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n(t) \in L^p$. Take $a_n = 1$ for $n = k^{\alpha}$, $\alpha > \frac{1}{2-p}$ and $a_n = 0$ for other n . Then the series $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha(p-2)}$ is convergent and thus $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n(t) \in L^p$, contrary to the fact, that for bounded $\{q_n\}$ we have $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

¹⁰⁾ OR, p. 242.

Über lineare Gleichungen in separablen Räumen

von

M. EIDELHEIT (Lwów).

In dieser Arbeit werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Auflösung von Gleichungen der Form

$$y_0 = U(x),$$

mitgeteilt, wo $U(x)$ eine in einem Raum E vom Typus (B) erklärte lineare Operation mit Werten aus einem Raum G vom Typus (B_0) ¹⁾ ist und y_0 ein Element aus G bezeichnet.

Dies gelingt uns im § 1, unter Benutzung einer Methode des Herrn S. BANACH, für (nicht notwendig separable) Räume, deren Elemente — in einem später zu erklärenden Sinn — lineare Funktionale eines anderen Raumes repräsentieren, bei speziellen Voraussetzungen über die Operation $U(x)$. Für gewisse Räume, wie (L^p) , (l^p) ($p > 1$) und $(s)^2$), gelten die oben genannten Bedingungen ohne irgendwelche Beschränkung für $U(x)$. Mit Hilfe dieser Sätze stellen wir im § 2 allgemeine Bedingungen für separable Räume und beliebige lineare Operationen auf. Im § 3 interpretieren wir diese Bedingungen in den Räumen (c_0) , (c) , (C) und (L) . Zuletzt geben wir im § 4 einige Anwendungen in verschiedenen Gebieten der Analysis.

§ 1.

Im folgenden werden wir immer, wofern das Gegenteil nicht ausdrücklich gesagt wird, mit E einen Raum vom Typus (B) und

¹⁾ Siehe: S. Mazur und W. Orlicz, Zur Theorie der linearen metrischen Räume, erscheint im nächsten Band dieses Journal; die Definition eines Raumes vom Typus (B_0) findet man auch in meiner nächsten Note, dieser Band p. 139.

²⁾ Was die im folgenden benutzten Bezeichnungen und Begriffe anbetrifft, siehe: S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa (1932). Dieses Buch wird im folgenden als *Opérations* zitiert.

mit $U(x)$ eine lineare in E erklärte Operation, mit Werten aus einem Raum G vom Typus (B_0) bezeichnen. Die Elemente des Raumes E werden mit x , die Elemente des Raumes G mit y und die linearen Funktionale in G mit $Y(y)$ bezeichnet.

Nehmen wir an, daß die Elemente eines Raumes E lineare Funktionale eines anderen Raumes E' repräsentieren, d. h. daß jedem Paar von Elementen x, x' ($x \in E, x' \in E'$) eine Zahl (xx') zugeordnet ist, die folgenden Bedingungen genügt:

1. bei festem x ist (xx') ein lineares Funktional in E' ;
2. für jedes lineare Funktional $f(x')$ in E' gibt es ein Element $x \in E$, so daß $f(x') = (xx')$ für $x' \in E'$ und $|f| = |x|$ ist;
3. bei festem x' ist (xx') ein lineares Funktional in E , dessen Norm gleich $|x'|$ ist.

Als Räume E, E' kann man z. B. (l) und (c_0) , (m) und (l) , (M) und (L) u. s. w. nehmen.

Es sei eine Operation

$$y = U(x)$$

in E erklärt von der Eigenschaft, daß es für jedes $Y(y)$ ein Element $x' \in E'$ gibt, so daß

$$(1) \quad Y[U(x)] = (xx') \text{ für } x \in E$$

ist.

Satz 1. *Damit die Gleichung*

$$(2) \quad y_0 = U(x)$$

eine Lösung x in E mit $|x| \leq M$, wo $M > 0$ eine gegebene Zahl ist, besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes $Y(y)$ die Ungleichung

$$(3) \quad |Y(y_0)| \leq M |X|$$

besteht, wobei $X(x) = Y[U(x)]$ gesetzt wurde.

Beweis. Ist $x_0, |x_0| \leq M$ eine Lösung von (2), so hat man für jedes $Y(y)$

$$|Y(y_0)| = |Y[U(x_0)]| = |X(x_0)| \leq M |X|,$$

womit die Notwendigkeit von (3) bewiesen ist.

Es sei nun M eine Zahl die der Ungleichung (3) genügt. Bezeichnen wir mit H die Menge der Punkte $x' \in E'$, für welche es ein $Y(y)$ gibt, so daß (1) besteht. Da (xx') nach 1. in Bezug

auf x' additiv und homogen ist, so ist H linear. Wir erklären nun in H ein Funktional $\varphi(x')$ indem wir für ein x' , welches dem Funktional $Y(y)$ entspricht,

$$(4) \quad \varphi(x') = Y(y_0)$$

setzen. Dieses Funktional ist eindeutig bestimmt, da aus $Y_1[U(x)] = Y_2[U(x)]$ nach (3) $|Y_1(y_0) - Y_2(y_0)| = 0$ folgt. Berücksichtigen wir ferner 3., so ergibt sich aus (3), daß $\varphi(x')$ auch linear in H mit $|\varphi_H| \leq M$ ist. Folglich³⁾ gibt es ein lineares Funktional $\Phi(x')$ in E' , so daß

$$(5) \quad \Phi(x') = \varphi(x') \text{ für } x' \in H; |\Phi| \leq M$$

ist. Nach 2. folgt daraus die Existenz eines $x_0 \in E$ mit $|x_0| \leq M$, so daß

$$(6) \quad (x_0, x') = \Phi(x') \text{ für } x' \in E'$$

gilt. Lassen wir hier x' die Menge H durchlaufen, so bekommen wir nach (1), (4), (5)

$$Y[U(x_0)] = Y(y_0)$$

für jedes $Y(y)$ und folglich $U(x_0) = y_0$.

Bemerkung 1. Der bewiesene Satz gilt auch ohne spezielle Voraussetzungen über die Operation $U(x)$, wenn der Raum E die folgende Eigenschaft besitzt:

Wird mit $\bar{E}$ der zu E konjugierte Raum aller in E erklärten, linearen Funktionale $f(x)$ bezeichnet, so ist jedes lineare Funktional $\Phi(f)$ in $\bar{E}$ von der Form

$$\Phi(f) = f(x_0), \quad x_0 \in E.$$

Als Raum E' können wir dann nämlich den Raum $\bar{E}$ nehmen und $(x, x') = f(x)$ setzen. Die Voraussetzung über $U(x)$ ist in diesem Fall von selbst erfüllt.

Die obige Eigenschaft besitzen die Räume (l^p) , (L^p) , ($p > 1$) und der Raum (s) ⁴⁾ vom Typus (B_0) . Für den Raum (s) nimmt die Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung (2) die Form

$$(7) \quad Y(y_0) = 0, \text{ wenn } Y[U(x)] \equiv 0 \text{ ist,}$$

³⁾ Vgl. Opérations, p. 55, th. 2.

⁴⁾ Vgl. Opérations, p. 50, th. 11. und S. Banach, Teorja operacyj, Warszawa (1931) p. 62, twierdzenie 4.

an. Diese Bedingung sichert nämlich die Eindeutigkeit des im Beweise des Satzes 1 erklärten Funktional $\varphi(x')$, seine Linearität aber folgt hier aus der Additivität⁵⁾.

Bemerkung 2. In analoger Weise bekommen wir ohne spezielle Voraussetzungen über den Raum E und die Operation $U(x)$, wenn G ein Raum vom Typus (B) ist, den folgenden Satz⁶⁾.

Satz 2. *Damit es für ein gegebenes lineares Funktional $X(x)$ in E und eine gegebene Zahl $M > 0$ ein $Y(y)$ gibt, so daß die Gleichung*

$$X(x) = Y[U(x)] \text{ für } x \in E, \quad |Y| \leq M$$

besteht, ist notwendig und hinreichend, daß

$$(8) \quad |X(x)| \leq M |U(x)|, \text{ für } x \in E$$

gilt.

Es genügt im Beweise des Satzes 1 statt der Menge H die Bildmenge der Abbildung $y = U(x)$ zu nehmen,

$$\varphi(y) = X(x) \text{ für } y = U(x)$$

zu setzen und dieses Funktional zu erweitern.

§ 2.

Es sei eine Operation $U(x)$ im Raume (l) der absolut konvergenten Reihen erklärt, und eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ gegeben.

Hilfssatz 1. *Damit die Gleichung*

$$(9) \quad y_0 = U(x)$$

in (l) eine Lösung $x_0 = \sum z_n^{(0)}$ mit

$$(10) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z_n^{(0)}|}{\varepsilon_n} \leq 1$$

besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes $Y(y)$ die Ungleichung

⁵⁾ Loc. cit. ⁴⁾ p. 62, twierdzenie 6 und twierdzenie 7.

⁶⁾ Auf diese Folgerung hat mich Herr S. Mazur aufmerksam gemacht.

$$(11) \quad |Y(y_0)| \leq \sup_{n=1,2,\dots} \varepsilon_n |a_n|$$

besteht, wobei $Y[U(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ gesetzt wurde¹⁾.

Beweis. Es sei $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{(0)}$ eine Lösung von (9), die der Ungleichung (10) genügt. Wir setzen

$$e_k = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{(k)}; \quad \xi_n^{(k)} = 0, \quad k \neq n, \quad \xi_n^{(n)} = 1; \quad y_n = U(e_n) \quad (n=1,2,\dots)$$

und betrachten die Operation

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n y_n,$$

die den Raum (l) auf G abbildet. $V(x)$ ist linear und genügt, wegen $\varepsilon_n \rightarrow 0$, der im Satz 1 über die Operation $U(x)$ gemachten Voraussetzung. Da $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n y_n$ ist, so besitzt die Gleichung

$$(12) \quad y_0 = V(x)$$

die Lösung $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{(0)}$ und es ist nach (10) $|x| \leq 1$. Wendet man

jetzt den Satz 1 an und beachtet man, daß $Y[U(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n Y(y_n)$ und daß für $X(x) = Y[V(x)]$, $|X| = \sup_{n=1,2,\dots} \varepsilon_n |Y(y_n)|$ ist, so bekommt man (11).

Nehmen wir jetzt an, daß die Folge $\{\varepsilon_n\}$ der Ungleichung (11) genügt. Für die Gleichung (12) sind dann die Bedingungen des Satzes 1 erfüllt und folglich gibt es eine Lösung $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$

¹⁾ Wir bemerken, daß es für eine absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ immer eine Folge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ und sogar $\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1}$ ($n=1,2,\dots$) gibt, so daß $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\xi_n|}{\varepsilon_n} < 1$ ist. Besitzt also die Gleichung (9) überhaupt eine Lösung, so gibt es eine derartige Folge $\{\varepsilon_n\}$, welche die Ungleichung (11) erfüllt.

von (12) mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_n}{\varepsilon_n} < 1$. Die Gleichung (9) besitzt dann die Lösung $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_n^{(0)}}{\varepsilon_n}$ mit $\zeta_n^{(0)} = \varepsilon_n \zeta_n$ und es ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_n^{(0)}}{\varepsilon_n} < 1$, w. z. b. w.

Es sei nun E ein beliebiger separabler Raum. Offenbar gibt es dann eine beschränkte Punktfolge $\{x_n\}$ und eine Zahl $M > 0$, so daß für jedes in E lineare Funktional $f(x)$ die Ungleichung

$$(13) \quad |f| \leq M \sup_{n=1,2,\dots} |f(x_n)|$$

gilt.

Hilfssatz 2. *Damit die Gleichung*

$$(14) \quad y_0 = U(x)$$

eine Lösung in E besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ gibt, so daß für jedes $Y(y)$ die Ungleichung

$$(15) \quad |Y(y_0)| \leq \sup_{n=1,2,\dots} \varepsilon_n |Y[U(x_n)]|$$

besteht.

Beweis. Betrachten wir die Operation

$$T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n x_n, \quad z = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \in (I),$$

welche den Raum (I) auf den Raum E abbildet. $T(z)$ ist wegen der Beschränktheit der Folge $\{x_n\}$ linear. Ist ferner $f(x)$ ein beliebiges lineares Funktional in E , so gilt für $g(z) = f[T(z)]$, $|g| = \sup_{n=1,2,\dots} |f(x_n)|$. Folglich ist nach (13) $|f| \leq M|g|$ und nach

einem Satz des Herrn BANACH⁸⁾ bildet die Operation $T(z)$ den Raum (I) auf den ganzen Raum E ab. Daraus folgt, daß die Gleichung (14) dann und nur dann eine Lösung in E besitzt, wenn die Gleichung

$$y_0 = U[T(z)]$$

eine Lösung in (I) besitzt. Nach dem Hilfssatz 1 ist das dann und nur dann der Fall, wenn es eine Folge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ gibt, so daß (15) besteht, w. z. b. w.

⁸⁾ Opérations, p. 146, th. 1.

Definition 1. Eine Punktfolge $\{e_n\}$ nennt man eine Basis, wenn jedes Element x eine Entwicklung von der Form

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n,$$

wobei c_i Zahlen sind, zuläßt; die Koeffizienten c_i sollen eindeutig bestimmt sein.

Man beweist, daß dann

$$(16) \quad c_i = g_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

lineare Funktionale sind⁹⁾.

Definition 2. Eine Basis $\{e_n\}$ nennen wir ausgezeichnet, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt: sind n und $m > n$ zwei natürliche, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ und λ_m beliebige Zahlen, so ist

$$(17) \quad |\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n + \lambda_m e_m| \geq |\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n|.$$

Hilfssatz 3. Besitzt der Raum E eine ausgezeichnete Basis $\{e_n\}$, so besteht für jedes in E lineare Funktional $f(x)$ die Gleichung

$$|f| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n|,$$

wobei $f_n(x) = \sum_{i=1}^n f(e_i) g_i(x)$ gesetzt wurde.

Beweis. Da $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ für $x \in E$ ist, so haben wir

$$(18) \quad |f| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n|.$$

Andererseits ist, wenn wir $s_n(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x) e_i$ setzen, $f_n(x) = f[s_n(x)]$

und daher $|f_n(x)| \leq |f| \cdot |s_n(x)| \leq |f| \cdot |x|$, da nach (17) $|s_n(x)| \leq |x|$ ist. Aus dieser Ungleichung folgt, da sie für jedes x gilt,

$$|f_n| \leq |f| \quad (n = 1, 2, \dots)$$

was zusammen mit (18) die Behauptung ergibt.

Definition 3. Eine Basis $\{e_n\}$ nennen wir eine normierende Basis, wenn es für jede natürliche Zahl n eine endliche Folge von Elementen

$u_{n1}, u_{n2}, \dots, u_{nm_n}$ mit $|u_{ni}| \leq K$ ($K > 0$; $n = 1, 2, \dots$; $i = 1, 2, \dots, m_n$)

⁹⁾ Opérations, p. 111.

gibt, so daß für jedes lineare Funktional $f(x)$

$$(19) \quad |f_n| = \max_{i=1,2,\dots,m_n} |f(u_{ni})|$$

gilt.

Hauptsatz. Es besitze der Raum E eine ausgezeichnete normierende Basis. Damit die Gleichung

$$(20) \quad y_0 = U(x)$$

eine Lösung in E besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ gibt, so daß für jedes $Y(y)$ die Ungleichung

$$(21) \quad |Y(y_0)| \leq \sup_{n=1,2,\dots} \varepsilon_n |X_n|$$

besteht, wobei $X(x) = Y[U(x)]$ gesetzt wurde.

Beweis. Setzen wir

$$(22) \quad \begin{aligned} x_n &= u_{1,n} \text{ für } n \leq m_1 \\ x_n &= u_{k+1,j} \text{ für } n = m_1 + m_2 + \dots + m_k + j \quad (1 \leq j \leq m_{k+1}), \end{aligned}$$

so ist die Folge $\{x_n\}$ beschränkt und nach dem Hilfssatz 3 haben wir für jedes lineare Funktional $f(x)$

$$|f| = \sup_{n=1,2,\dots} |f(x_n)|.$$

Demzufolge besitzt die Gleichung (20) nach Hilfssatz 2 eine Lösung dann und nur dann, wenn es eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ gibt, so daß für jedes $Y(y)$ die Ungleichung

$$(23) \quad |Y(y_0)| \leq \sup_{n=1,2,\dots} \varepsilon_n |Y[U(x_n)]|$$

besteht. Dies ist aber mit (21) äquivalent. Denn ist (23) erfüllt, so genügt es

$$\varepsilon_1 = \max_{1 \leq n \leq m_1} \varepsilon_n \text{ und allgemein } \varepsilon_i = \max_{\substack{n=m_1+\dots+m_{i-1}+j \\ 1 \leq j \leq m_i}} \varepsilon_n$$

zu setzen und (19), (22) zu berücksichtigen, um (21) zu erhalten. Umgekehrt, wenn (21) erfüllt ist, so setzt man

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_n &= \varepsilon_1 \text{ für } n \leq m_1 \\ \bar{\varepsilon}_n &= \varepsilon_{k+1} \text{ für } n = m_1 + m_2 + \dots + m_k + j \quad (1 \leq j \leq m_{k+1}), \end{aligned}$$

und bekommt (23).

Bemerkung 3. Die in (21) vorkommende Folge $\{\varepsilon_n\}$ ist, wie aus dem Beweise des Hilfssatzes 2 folgt, nur von der

Lösung x_0 und nicht von der Operation $U(x)$ abhängig. Nehmen wir an, wir wissen, daß x_0 eine Lösung von (20) ist und wir wollen die entsprechende Folge $\{\varepsilon_n\}$ direkt bestimmen. Es muß dann für jedes in E lineare Funktional $f(x)$

$$(24) \quad |f(x_0)| \leq \sup_{n=1,2,\dots} \varepsilon_n |f_n|$$

sein und das genügt auch, da $Y(y_0) = Y[U(x_0)]$ ist.

Wir wählen zu diesem Zweck nach (16) eine wachsende Folge natürlicher Zahlen $\{N_k\}$, so daß

$$(25) \quad \left| \sum_{i=N_k+1}^{\infty} g_i(x_0) e_i \right| < \frac{|x_0|}{2^k} \quad (N_k = 0, k = 0, 1, \dots)$$

sein soll und setzen sodann

$$(26) \quad \varepsilon_n = \frac{|x_0|}{2^{k+1}} \quad \text{für } N_k < n \leq N_{k+1} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Ist nun $f(x)$ ein beliebiges lineares Funktional, so können wir nach dem Hilfssatz 3 eine natürliche Zahl N mit

$$(27) \quad |f_N| > \frac{1}{2} |f|$$

bestimmen. Es sei

$$(28) \quad N_k < N \leq N_{k+1}.$$

Nehmen wir an, daß

$$(29) \quad |f(x_0)| > \varepsilon_n |f_n| \quad (n = 1, 2, \dots, N_k)$$

sei. Nach (16) haben wir dann

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x_0) f(e_i) = \sum_{i=1}^{N_1} + \sum_{i=N_1+1}^{N_2} + \dots + \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} + \sum_{i=N_k+1}^{\infty} \\ &= f_{N_1} \left(\sum_1^{N_1} g_i(x_0) e_i \right) + f_{N_2} \left(\sum_{N_1+1}^{N_2} g_i(x_0) e_i \right) + \dots + f_{N_k} \left(\sum_{N_{k-1}+1}^{N_k} g_i(x_0) e_i \right) + f \left(\sum_{N_k+1}^{\infty} g_i(x_0) e_i \right). \end{aligned}$$

Da aber die Basis $\{e_i\}$ ausgezeichnet ist, so ist weiter nach (25)

$$|f(x_0)| \leq |f_{N_1}| |x_0| + |f_{N_2}| \frac{|x_0|}{4} + \dots + |f_{N_k}| \frac{|x_0|}{2^{2k-2}} + |f| \frac{|x_0|}{2^{2k}}.$$

Nach (26), (28) und (29) folgt daraus

$|f(x_0)| \leq \frac{1}{2} |f(x_0)| + \frac{1}{4} |f(x_0)| + \dots + \frac{1}{2^k} |f(x_0)| + |f| \frac{|x_0|}{2^{2k}}$
 oder $\frac{1}{2^k} |f(x_0)| \leq \frac{|f| \cdot |x_0|}{2^{2k}}$. Berücksichtigt man jetzt (27) und (28),
 so bekommt man

$$|f(x_0)| \leq |f_N| \frac{|x_0|}{2^{k-1}} \leq |f_N| \varepsilon_N.$$

Die Folge (26) genügt demnach der Ungleichung (24).

§ 3.

Wir werden jetzt den Hauptsatz auf einige Räume anwenden¹⁰⁾.

1. Der Raum (c_0) der gegen Null konvergierenden Zahlenfolgen.

Die Folge $\{e_n\}$,

$$e_n = \{\xi_k^{(n)}\}, \quad \xi_k^{(n)} = 0 \text{ für } k \neq n, \quad \xi_n^{(n)} = 1 \quad (n=1, 2, \dots)$$

bildet hier ersichtlich eine ausgezeichnete Basis. Ist $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k$,

($x = \{\xi_k\}$) ein beliebiges in (c_0) lineares Funktional, so ist

$$|f_n| = \sum_{k=1}^n |a_k|. \text{ Daraus ergibt sich}$$

$$|f_n| = \max |f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n)|,$$

wobei das Maximum sich über alle Systeme $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ mit $\alpha_k = \pm 1$ ($k=1, 2, \dots, n$) erstreckt. Die Basis $\{e_n\}$ ist daher eine normierende. Es gilt also der

Satz 3. *Damit die Gleichung*

$$y_0 = U(x)$$

in (c_0) eine Lösung besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ gibt, so daß für jedes $Y(y)$ die Ungleichung

¹⁰⁾ Vgl. zu diesem § Opérations, p. 59–68.

$$|Y(y)| \leq \sup_{n=1,2,\dots} \varepsilon_n \sum_{k=1}^n |a_k|$$

besteht, wobei $Y[U(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k$ gesetzt wurde.

2. Der Raum (c) der konvergenten Zahlenfolgen.

Setzen wir $e_0 = \{\xi_k\}$, $\xi_k = 1$ ($k=1, 2, \dots$), so bildet die Folge $e_0, e_1, \dots$ eine Basis. Ist

$$f(x) = a_0 \xi + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\xi_k - \xi) \quad (x = \{\xi_k\}, \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi)$$

ein beliebiges in (c) lineares Funktional, so hat man

$$f_n = |a_0 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k| + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|.$$

Man überzeugt sich demnach, ebenso, wie im Fall des Raumes (c_0) , daß die Basis $e_0, e_1, \dots, e_n, \dots$ eine ausgezeichnete und normierende ist. Wir haben somit den

Satz 4. Damit die Gleichung

$$y_0 = U(x)$$

in (c) eine Lösung besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ gibt, so daß für jedes $Y(y)$ die Ungleichung

$$|Y(y_0)| \leq \sup_{n=1,2,\dots} \varepsilon_n \left(|a_0 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k| + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k| \right)$$

besteht, wobei $Y[U(x)] = a_0 \xi + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\xi_k - \xi)$ gesetzt wurde.

3. Der Raum (L) der in $\langle 0, 1 \rangle$ integrierbaren Funktionen.

Hier bildet das HAARSCHES Orthogonalsystem eine Basis¹¹⁾.

Man kann leicht zeigen, daß diese Basis eine ausgezeichnete und normierende ist. Wir gehen aber darauf nicht näher ein, da wir direkt einen Hilfssatz beweisen werden, welcher uns einen allgemeineren Satz auszusprechen erlauben wird.

Hilfssatz 4. Es sei

$$(t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)}), \quad 0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_{m_n}^{(n)} = 1$$

¹¹⁾ Siehe: J. Schauder, Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math. Zeitsch. 26 (1927), p. 50.

eine normale Zerlegungsfolge des Intervalls $\langle 0, 1 \rangle$, (d. h. es sei $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i=1, 2, \dots, m_n} (t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}) = 0$); dann ist für eine beliebige in $\langle 0, 1 \rangle$ beschränkte Funktion $g(t)$

$$\text{wesentliche obere Grenze } |g(t)| = \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{1}{t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}} \left| \int_{t_{i-1}^{(n)}}^{t_i^{(n)}} g(t) dt \right|.$$

Beweis. Wir setzen zur Abkürzung $M = \text{wes. ob. Gr. } |g(t)|$. Offenbar ist

$$\frac{1}{t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}} \left| \int_{t_{i-1}^{(n)}}^{t_i^{(n)}} g(t) dt \right| \leq M \quad (n=1, 2, \dots; i=1, 2, \dots, m_n).$$

Andererseits gibt es für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < M$ eine meßbare Menge A mit $|A| > 0$, so daß $|g(t)| > M - \varepsilon$ für $t \in A$ ist. Bezeichnen wir mit A_1 bzw. A_2 die Menge der Punkte von A , für die $g(t) \geq 0$ bzw. $g(t) < 0$ ist. Eine dieser Mengen, z. B. A_1 hat ein positives Maß. Es sei t ein Punkt von A_1 von der Dichte 1. Es ist dann für genügend große n , wenn $t \in (t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}) = \delta$

$$\frac{1}{t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}} \left| \int_{t_{i-1}^{(n)}}^{t_i^{(n)}} g(t) dt \right| \geq \frac{1}{|\delta|} \left(\left| \int_{\delta \cap A_1} g(t) dt \right| - \left| \int_{\delta \cap A_2} g(t) dt \right| \right) \geq \frac{|\delta \cap A_1|}{|\delta|} (M - \varepsilon) - \frac{|\delta \cap A_2|}{|\delta|} M > M - 2\varepsilon,$$

woraus die Behauptung folgt.

Satz 5. Damit die Gleichung

$$y_0 = U(x)$$

in (L) eine Lösung besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ gibt, so daß für jedes $Y(y)$ die Ungleichung

$$|Y(y)| \leq \sup_{\substack{n=1, 2, \dots \\ i=1, 2, \dots, m_n}} \varepsilon_n \frac{1}{t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}} \left| \int_{t_{i-1}^{(n)}}^{t_i^{(n)}} h(t) dt \right|$$

besteht, wobei $Y[U(x)] = \int_0^1 x(t) h(t) dt$, $x = x(t)$ gesetzt wurde.

Beweis. Ist $f(x) = \int_0^1 x(t)g(t)dt$ ein beliebiges, in (L) lineares Funktional, so ist $|f| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |g(t)|$ wes. ob. Gr. $|g(t)|$ und nach Hilfssatz 4 hat man, wenn man für $(n=1, 2, \dots; i=1, 2, \dots, m_n)$

$$u_i^{(n)}(t) = \frac{1}{t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}} \quad (t_{i-1}^{(n)} \leq t \leq t_i^{(n)}),$$

$$\text{sonst } u_i^{(n)}(t) = 0$$

setzt,

$$|f| = \sup_{\substack{n=1, 2, \dots \\ i=1, 2, \dots, m_n}} |f(u_i^{(n)})| \text{ und } |u_i^{(n)}| = 1 \quad (n=1, 2, \dots; i=1, 2, \dots, m_n).$$

Der Satz 5 ist demnach eine Folge des Hilfssatzes 2.

4. Der Raum (C) der in $\langle 0, 1 \rangle$ stetigen Funktionen.

Hier bildet das SCHAUDERSche System eine Basis¹²⁾. Man kann zeigen, daß es bei entsprechender Anordnung eine ausgezeichnete und normierende Basis ist. Wir verzichten aber wieder auf den Beweis, da wir direkt eine Formel beweisen werden, die einen allgemeineren Satz auszusprechen erlaubt.

Es sei $g(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) eine Funktion von beschränkter Variation. Wir setzen

$$g_0(t) = g(t+0) \quad (0 < t < 1), \quad g_0(0) = g(0), \quad g_0(1) = g(1).$$

Die Funktion $g_0(t)$ ist, wie leicht einzusehen ebenfalls von beschränkter Variation, unterscheidet sich von $g(t)$ höchstens in einer abzählbaren, im Inneren des Intervalls $\langle 0, 1 \rangle$ liegenden Menge und ist in jedem Punkt t mit $0 < t < 1$ rechtsseitig stetig. Ist $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ irgendeine Zerlegung des Intervalls $\langle 0, 1 \rangle$, so setzen wir

$$(30) \quad \begin{aligned} v(g; t_0, t_1, \dots, t_m) = & \left| \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} g(t) dt - g(0) \right| + \dots + \left| \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t) dt \right. \\ & \left. - \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(t) dt \right| + \dots + \left| g(1) - \frac{1}{t_m - t_{m-1}} \int_{t_{m-1}}^{t_m} g(t) dt \right|. \end{aligned}$$

¹²⁾ Loc. cit. ¹¹⁾ p. 48.

Hilfssatz 5. Ist $(t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)})$ eine normale Zerlegungsfolge des Intervalls $<0, 1>$, so ist ¹³⁾

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(g; t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)}) = V_0^1(g_0).$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß $V_0^1(g_0)$ die obere Grenze der Zahlen $v(g; t_0, t_1, \dots, t_m)$ ist.

Es ist nämlich zunächst für eine beliebige Zerlegung

$$v(g; t_0, t_1, \dots, t_m) = v(g_0; t_0, t_1, \dots, t_m).$$

Setzen wir nun

$$g_0(t) = g_0(0) + P(t) - N(t),$$

wobei $P(t)$ bzw. $N(t)$ die positive bzw. negative Variation der Funktion $g_0(t)$ bezeichnen, so ist

$$v(g; t_0, t_1, \dots, t_m) \leq v(P; t_0, t_1, \dots, t_m) + v(N; t_0, t_1, \dots, t_m).$$

Da aber die Funktionen $P(t)$ und $N(t)$ monoton wachsend sind, so haben wir weiter

$$v(P; t_0, t_1, \dots, t_m) = P(1) - P(0), \quad v(N; t_0, t_1, \dots, t_m) = N(1) - N(0).$$

Daraus bekommen wir, wegen $V_0^1(g_0) = V_0^1(P) + V_0^1(N)$,

$$(31) \quad v(g_0; t_0, t_1, \dots, t_m) \leq V_0^1(g_0).$$

Andererseits gibt es, für ein beliebiges $\varepsilon > 0$, Punkte

$$0 = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \dots < \vartheta_r = 1, \text{ so daß}$$

$$(32) \quad \sum_{i=1}^r |g(\vartheta_i) - g(\vartheta_{i-1})| > V_0^1(g_0) - \varepsilon$$

ist. Ferner kann man, da für $0 < \alpha < 1$

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha + 0} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g_0(t) dt = g_0(\alpha)$$

gilt, Punkte τ_i mit $\vartheta_i < \tau_i < \vartheta_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, r-1$) so wählen, daß

$$(33) \quad s_r = \left| \frac{1}{\tau_1 - \vartheta_1} \int_{\vartheta_1}^{\tau_1} g_0(t) dt - g(0) \right| + \dots$$

¹³⁾ Mit $V_0^1(g_0)$ bezeichnen wir die Variation von $g_0(t)$ in $<0, 1>$; die daraus folgende Relation $\lim_{n \rightarrow \infty} v(g_0; t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)}) = V_0^1(g_0)$ gilt allgemein für eine Funktion $g(t)$ mit beschränkter Variation, für die stets die Ungleichung $g(t-0) < g(t) < g(t+0)$ bzw. $g(t-0) \geq g(t) \geq g(t+0)$ besteht.

$$\begin{aligned}
& + \left| \frac{1}{\tau_i - \vartheta_i} \int_{\vartheta_i}^{\tau_i} g_0(t) dt - \frac{1}{\tau_{i-1} - \vartheta_{i-1}} \int_{\vartheta_{i-1}}^{\tau_{i-1}} g_0(t) dt \right| + \dots \\
& + \left| g_0(1) - \frac{1}{\tau_{r-1} - \vartheta_{r-1}} \int_{\vartheta_{r-1}}^{\tau_{r-1}} g_0(t) dt \right| > \sum_{i=1}^r |g_0(\vartheta_i) - g_0(\vartheta_{i-1})| - \varepsilon
\end{aligned}$$

ausfällt. Setzen wir nun $t_{2i-1} = \vartheta_i$, $t_{2i} = \tau_i$, ($i = 1, 2, \dots, r-1$), $t_0 = 0$, $t_{2r-1} = 1$, so ist wegen

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{\tau_i - \vartheta_i} \int_{\vartheta_i}^{\tau_i} - \frac{1}{\tau_{i-1} - \vartheta_{i-1}} \int_{\vartheta_{i-1}}^{\tau_{i-1}} \right| & \leq \left| \frac{1}{\tau_i - \vartheta_i} \int_{\vartheta_i}^{\tau_i} - \frac{1}{\vartheta_i - \tau_{i-1}} \int_{\tau_{i-1}}^{\vartheta_i} \right| \\
& + \left| \frac{1}{\vartheta_i - \tau_{i-1}} \int_{\tau_{i-1}}^{\vartheta_i} - \frac{1}{\tau_{i-1} - \vartheta_{i-1}} \int_{\vartheta_{i-1}}^{\tau_{i-1}} \right| \\
v(g_0; t_0, t_1, \dots, t_{2r-1}) & > s_r
\end{aligned}$$

und folglich nach (32) und (33)

$$v(g_0; t_0, t_1, \dots, t_{2r-1}) > V_0^1(g_0) - 2\varepsilon,$$

was zusammen mit (31) die Behauptung ergibt.

Nun bemerken wir, daß, wenn man von einer Zerlegung $(t_0, t_1, \dots, t_m)$ zu einer anderen, in welcher die Punkte $t_0, t_1, \dots, t_m$ ebenfalls Teilpunkte sind, übergeht, die Zahl $v(g_0; t_0, t_1, \dots, t_m)$ nicht kleiner wird. Um dies nachzuweisen, dürfen wir offenbar annehmen, daß nur ein einziger Teilpunkt hinzugefügt wurde. Es ist dann zu zeigen, daß für $\alpha < \beta < \tau < \gamma < \delta$

$$\begin{aligned}
(34) \quad & \left| \frac{1}{\gamma - \beta} \int_{\beta}^{\gamma} g_0(t) dt - \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g_0(t) dt \right| + \left| \frac{1}{\delta - \gamma} \int_{\gamma}^{\delta} g_0(t) dt \right. \\
& \left. - \frac{1}{\gamma - \beta} \int_{\beta}^{\gamma} g_0(t) dt \right| \leq \left| \frac{1}{\tau - \beta} \int_{\beta}^{\tau} g_0(t) dt - \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g_0(t) dt \right| \\
& + \left| \frac{1}{\gamma - \tau} \int_{\tau}^{\gamma} g_0(t) dt - \frac{1}{\tau - \beta} \int_{\beta}^{\tau} g_0(t) dt \right| \\
& + \left| \frac{1}{\delta - \gamma} \int_{\gamma}^{\delta} g_0(t) dt - \frac{1}{\gamma - \tau} \int_{\tau}^{\gamma} g_0(t) dt \right|
\end{aligned}$$

gilt. Nun ist

$$\frac{1}{\gamma - \beta} \int_{\beta}^{\gamma} - \frac{1}{\tau - \beta} \int_{\beta}^{\tau} = \frac{\gamma - \tau}{\gamma - \beta} \left(\frac{1}{\gamma - \tau} \int_{\tau}^{\gamma} - \frac{1}{\tau - \beta} \int_{\beta}^{\tau} \right)$$

und daher

$$\left| \frac{1}{\gamma - \beta} \int_{\beta}^{\gamma} - \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \right| \leq \frac{\gamma - \tau}{\gamma - \beta} \left| \frac{1}{\gamma - \tau} \int_{\tau}^{\gamma} - \frac{1}{\tau - \beta} \int_{\beta}^{\tau} \right| + \left| \frac{1}{\tau - \beta} \int_{\beta}^{\tau} - \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \right|$$

Ähnlich bekommen wir

$$\left| \frac{1}{\delta - \gamma} \int_{\gamma}^{\delta} - \frac{1}{\gamma - \beta} \int_{\beta}^{\gamma} \right| \leq \left| \frac{1}{\delta - \gamma} \int_{\gamma}^{\delta} - \frac{1}{\gamma - \tau} \int_{\tau}^{\gamma} \right| + \left| \frac{1}{\gamma - \tau} \int_{\tau}^{\gamma} - \frac{1}{\tau - \beta} \int_{\beta}^{\tau} \right| \frac{\tau - \beta}{\gamma - \beta}$$

Addiert man die beiden letzten Ungleichungen, so erhält man (34).

Nun können wir zum Beweise des Hilfssatzes übergehen. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Wir wissen schon, daß es eine Zerlegung $(u'_0, u'_1, \dots, u'_s)$ des Intervalls $\langle 0, 1 \rangle$ gibt, so daß $v(g_0; u'_0, u'_1, \dots, u'_s) > V_0^1(g_0) - \varepsilon$ ist. Da die Funktion $g_0(t)$ höchstens in einer abzählbaren Menge unstetig ist, kann man Punkte $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_s = 1$ genügend nahe den Punkten $u'_0, u'_1, \dots, u'_s$ wählen, so daß $g_0(t)$ in $u_1, u_2, \dots, u_{s-1}$ stetig ist und daß

$$(35) \quad v(g_0; u_0, u_1, \dots, u_s) > V_0^1(g_0) - 2$$

gilt. Es gibt dann eine Zahl $\eta > 0$, so daß für $\alpha_i < u_i < \beta_i$, $\beta_i - \alpha_i < \eta$ ($i = 1, 2, \dots, s-1$)

$$(36) \quad \sum_{i=1}^{s-1} \left| \frac{1}{\beta_i - u_i} \int_{u_i}^{\beta_i} g_0(t) dt - \frac{1}{u_i - \alpha_i} \int_{\alpha_i}^{u_i} g_0(t) dt \right| < \varepsilon$$

ist. Wir wählen nun eine natürliche Zahl n_0 , so daß für $n > n_0$

$$(37) \quad t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)} < \eta, \quad 2(t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}) < u_k - u_{k-1} \\ (i = 1, 2, \dots, m_n; k = 1, 2, \dots, s)$$

ist. Aus der zweiten Ungleichung folgt, daß für $n > n_0$ höchstens einer der Punkte $u_1, u_2, \dots, u_{s-1}$ ins Innere eines Teilintervalls der n -ten Zerlegung fällt und daß in diesem Fall im Inneren der beiden benachbarten Intervalle keiner dieser Punkte sich befindet.

Wir bilden nun für $n > n_0$ eine neue Zerlegung des Intervalls $\langle 0, 1 \rangle$, indem wir zu den Teilpunkten $t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)}$ die Punkte $u_1, u_2, \dots, u_{s-1}$ hinzufügen. Die dieser Zerlegung ent-

sprechende Zahl v bezeichnen wir mit v'_n . Zunächst ist, wie wir gesehen haben,

$$(38) \quad v'_n \geq v(g_0; u_0, u_1, \dots, u_s).$$

Ferner ist

$$(39) \quad v'_n - v(g_0; t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)}) = \sum_r \mathcal{A}_r^{(n)},$$

wobei die rechtsstehende Summe sich auf die Indizes r erstreckt, für welche u_r ins Innere eines Teilintervalls $(t_{i_r}^{(n)}, t_{i_r+1}^{(n)})$ fällt, und es ist für $t_{i_r-1}^{(n)} < t_{i_r}^{(n)} < u_r < t_{i_r+1}^{(n)} < t_{i_r+2}^{(n)}$ (der Einfachheit wegen lassen wir im folgenden die Indizes r und n weg)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_r^{(n)} = & \left\{ \left| \frac{1}{u_r - t_i} \int_{t_i}^{u_r} - \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \right| + \left| \frac{1}{t_{i+1} - u_r} \int_{u_r}^{t_{i+1}} - \frac{1}{u_r - t_i} \int_{t_i}^{u_r} \right| \right. \\ & \left. + \left| \frac{1}{t_{i+2} - t_{i+1}} \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} - \frac{1}{t_{i+1} - u_r} \int_{u_r}^{t_{i+1}} \right| \right\} \\ = & \left\{ \left| \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} - \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \right| + \left| \frac{1}{t_{i+2} - t_{i+1}} \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} - \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \right| \right\}. \end{aligned}$$

Nun ist aber, ähnlich wie früher,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{u_r - t_i} \int_{t_i}^{u_r} - \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \right| - \left| \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} - \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \right| \\ \leq & \left| \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} - \frac{1}{u_r - t_i} \int_{t_i}^{u_r} \right| \leq \frac{t_{i+1} - u_r}{t_{i+1} - t_i} \left| \frac{1}{t_{i+1} - u_r} \int_{u_r}^{t_{i+1}} - \frac{1}{u_r - t_i} \int_{t_i}^{u_r} \right| \end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{t_{i+2} - t_{i+1}} \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} - \frac{1}{t_{i+1} - u_r} \int_{u_r}^{t_{i+1}} \right| - \left| \frac{1}{t_{i+2} - t_{i+1}} \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} - \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \right| \\ \leq & \frac{u_r - t_i}{t_{i+1} - t_i} \left| \frac{1}{t_{i+1} - u_r} \int_{u_r}^{t_{i+1}} - \frac{1}{u_r - t_i} \int_{t_i}^{u_r} \right|. \end{aligned}$$

Aus diesen Ungleichungen folgt

$$\mathcal{A}_r^{(n)} \leq 2 \left| \frac{1}{t_{i_r+1}^{(n)} - u_r} \int_{u_r}^{t_{i_r+1}^{(n)}} g_0(t) dt - \frac{1}{u_r - t_{i_r}^{(n)}} \int_{t_{i_r}^{(n)}}^{u_r} g_0(t) dt \right|.$$

Aus (36), (37) und (39) ergibt sich nun für $n > n_0$

$$v'_n - v(g_0; t_0^{(n)}, t_i^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)}) < 2\varepsilon$$

Nach (35) und (38) erhält man hieraus für $n > n_0$

$$v(g_0; t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)}) > V_0^1(g_0) - 4\varepsilon,$$

woraus sich nach (31) der Hilfssatz ergibt.

Satz 6. Damit die Gleichung

$$y_0 = U(x)$$

eine Lösung in (C) besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ gibt, so daß für jedes $Y(y)$ die Ungleichung

$$|Y(y_0)| \leq \sup_{n=1,2,\dots} \varepsilon_n v(h; t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)})$$

besteht, wobei $Y[U(x)] = \int_0^1 x(t) dh(t)$, $x = x(t)$ gesetzt wurde,

$(t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)})$ eine beliebige normale Zerlegungsfolge des Intervalls $\langle 0, 1 \rangle$ ist und $v(h; t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)})$ durch (30) erklärt ist.

Beweis. Wir setzen

$$x_i^{(n)}(t) = \frac{t - t_{i-1}^{(n)}}{t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}} \quad \text{für } t_{i-1}^{(n)} \leq t \leq t_i^{(n)},$$

$$x_i^{(n)}(t) = \frac{t_{i+1}^{(n)} - t}{t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}} \quad \text{für } t_i^{(n)} \leq t \leq t_{i+1}^{(n)},$$

$$x_i^{(n)}(t) = 0 \quad \text{für } t < t_i^{(n)} \text{ oder } t > t_{i+1}^{(n)} \quad (i=0, 1, \dots, m_n)$$

(für $i=0$ bzw. $i=m_n$ ist das Intervall $(t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)})$ bzw. $(t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)})$ wegzulassen).

Ist nun

$$f(x) = \int_0^1 x(t) dg(t), \quad x = x(t)$$

ein beliebiges, in (C) lineares Funktional, so ist ¹⁴⁾ $|f| = V_0^1(g_0)$, wo $g_0(t)$ wie oben erklärt ist. Da aber, wie leicht einzusehen,

$$v(g; t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)}) = \sum_{i=0}^{m_n} \left| \int_{t_{i-1}^{(n)}}^{t_i^{(n)}} x_i^{(n)}(t) dg(t) \right| = \sum_{i=0}^{m_n} |f(x_i^{(n)})|$$

¹⁴⁾ Siehe: F. Riesz, Sur les opérations fonctionnelles linéaires, C. R. Acad. Sc. Paris, 149 (1909), p. 974–977.

ist, so haben wir nach Hilfssatz 5

$$|f| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m_n} |f(x_i^{(n)})|.$$

Setzen wir nun

$$z_n(t; \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m_n}) = \sum_{i=0}^{m_n} \alpha_i x_i^{(n)}(t),$$

wobei $\alpha_i = \pm 1$ ist ($i=0, 1, \dots, m_n$), so bekommen wir

$$\sum_{i=0}^{m_n} |f(x_i^{(n)})| = \max |f(z_n; \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m_n})|,$$

wobei das Maximum über alle Systeme $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m_n})$ mit $\alpha_i = \pm 1$ erstreckt ist. Da ferner stets $|z_n; \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m_n}| \leq 2$ ist, so ergibt sich Satz 6 in ganz ähnlicher Weise, wie der Hauptsatz; es ist dort nur $|f_n|$ durch $\sum_{i=0}^{m_n} |f(x_i^{(n)})|$ zu ersetzen.

§ 4.

Wir wollen jetzt einige Anwendungen angeben.

1. *Integralgleichungen.* Es sei $K(s, t)$ eine im Quadrat $\langle 0, 1; 0, 1 \rangle$ mit der q -ten Potenz ($q > 1$) integrierbare Funktion. Setzen wir für $x(t) \in (L^p)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

$$(40) \quad y(s) = \int_0^1 K(s, t) x(t) dt,$$

so bekommen wir¹⁵⁾ eine lineare Operation

$$y = U(x), \quad (x = x(t), \quad y = y(s))$$

in (L^p) mit Werten aus (L^q) . Ist

$$Y(y) = \int_0^1 y(s) Y(s) ds \quad [Y(s) \in (L^p)]$$

ein lineares Funktional in (L^q) , so hat man $Y[U(x)] = \int_0^1 x(t) X(t) dt$,

wobei $X(t) = \int_0^1 K(s, t) Y(s) ds$ ist.

¹⁵⁾ Opérations, p. 104.

Aus der Bemerkung 1 ergibt sich nun der folgende

Satz 7. *Damit die Gleichung (40) eine Lösung x in (L^p) mit $\int_0^1 |x(t)|^p dt \leq M^p$ ($M > 0$ eine gegebene Zahl) besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß für jede Funktion $Y(s) \in (L^p)$ die Ungleichung*

$$\left| \int_0^1 Y(s) y(s) ds \right|^q \leq M^q \int_0^1 \int_0^1 K(s, t) Y(s) ds |^q dt$$

besteht.

2. *Lineare Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.*
Es sei

$$(41) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

ein System von unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten ξ_k . Wir bestimmen eine Zahlenfolge $\{c_i\}$ mit $c_i > 0$ so daß alle Folgen $\{\frac{a_{ik}}{c_k}\}$ ($i = 1, 2, \dots$) beschränkt sind. Wir suchen nun eine Lösung $x = \{\xi_n\}$ von (41) mit $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n \xi_n| < \infty$. Der Raum (lc_n) dieser Folgen $\{\xi_n\}$ wird offenbar mit dem Raum (l) äquivalent, wenn wir

$$|x| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n \xi_n|$$

setzen. Es gilt daher für den Raum (lc_n) ein zu Hilfssatz 1 analoger Satz. Jedes lineare Funktional in (lc_n) ist von der Form $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$, wobei die Folge $\{\frac{a_n}{c_n}\}$ beschränkt und $|f| = \sup_{n=1, 2, \dots} \frac{|a_n|}{c_n}$ ist. Setzen wir nun $y = \{\eta_i\}$, so ist durch (41) eine lineare Operation

$$y = U(x)$$

im Raume (lc_n) erklärt, mit Werten aus dem Raume (s) . Ist

$$Y(y) = \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \dots + \lambda_m \eta_m$$

ein beliebiges in (s) lineares Funktional, so ist

$$Y[U(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \dots + \lambda_m a_{mk}) \xi_k.$$

Wir haben daher den

Satz 8. Damit das System (41) eine Lösung $\{\xi_n\}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n \xi_n| < \infty$ besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n > 0, \varepsilon_n \rightarrow 0$ gibt, so daß für beliebige Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ (m beliebig)

$$|\lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \dots + \lambda_m \eta_m| \leq \sup_{n=1,2,\dots} \frac{\varepsilon_n}{c_n} |\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_m a_{mn}|$$

ist.

3. Summationstheorie. Es sei A eine normale Summationsmethode, welcher die Matrix $(A) = (a_{ik})$ mit $a_{ik} = 0, k > i, a_{ii} \neq 0 (i = 1, 2, \dots)$ entspricht. Es sei $(A^{-1}) = (b_{ik})$ die zur Matrix (A) inverse Matrix. Eine Folge $\{\eta_n\}$ ist offenbar dann und nur dann zu 0 mit der Methode A summierbar, wenn das System der Gleichungen

$$(42) \quad \sum_{k=1}^i b_{ik} \xi_k = \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

eine Lösung in (c_0) besitzt. Setzen wir $x = \{\xi_k\}, y = \{\eta_i\}$, so ist durch (42) eine in (c_0) lineare Operation

$$y = U(x)$$

mit Werten aus dem Raum (s) erklärt. Bezeichnet

$$Y(y) = \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \dots + \lambda_m \eta_m$$

ein beliebiges in (s) lineares Funktional, so ist

$$Y[U(x)] = \sum_{k=1}^m (\lambda_1 b_{1k} + \lambda_2 b_{2k} + \dots + \lambda_m b_{mk}) \xi_k$$

und mit Rücksicht auf den Satz 3 ergibt sich der

Satz 9. Damit eine Folge $\{\eta_n\}$ mit der Methode A zu 0 summierbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1} > 0, \varepsilon_n \rightarrow 0$ gibt, so daß für beliebige Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ (m beliebig)

$$|\lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \dots + \lambda_m \eta_m| \leq \max_{n=1,2,\dots,m} \varepsilon_n \sum_{k=1}^n |\lambda_1 b_{1k} + \lambda_2 b_{2k} + \dots + \lambda_m b_{mk}|$$

gilt¹⁶⁾.

4. Das Momentenproblem. Es sei $\{\varphi_i(t)\}$ eine Folge in $\langle 0, 1 \rangle$ integrierbarer Funktionen. Wir betrachten das System der Gleichungen

¹⁶⁾ Wir benutzen hier die Bemerkung, daß die Folge $\{\varepsilon_n\}$ monoton abnehmend angenommen werden darf. (Vgl. die Fußnote 7)).

$$(43) \quad \int_0^1 x(t) \varphi_i(t) dt = \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots),$$

wo $\{\eta_i\}$ eine gegebene Zahlenfolge ist und die unbekannte Funktion $x(t)$ stetig sein soll. Die Gleichungen (43) erklären in (C) eine lineare Operation

$$y = U(x), \quad (y = \{\eta_i\}, \quad x = x(t))$$

mit Werten aus (s). Ist

$$Y(y) = \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \dots + \lambda_m \eta_m$$

ein beliebiges in (s) erklärtes lineares Funktional, so hat man

$$(44) \quad Y[U(x)] = \int_0^1 x(t) [\lambda_1 \varphi_1(t) + \dots + \lambda_m \varphi_m(t)] dt = \int_0^1 x(t) dg(t)$$

wobei

$$(45) \quad g(t) = \int_0^t [\lambda_1 \varphi_1(u) + \lambda_2 \varphi_2(u) + \dots + \lambda_m \varphi_m(u)] du$$

ist. Nach Satz 6 erhalten wir hieraus den

Satz 10. *Damit das System (43) eine stetige Funktion als Lösung besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ gibt, so daß für beliebige Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ (m beliebig) die Ungleichung*

$$\begin{aligned} |\lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \dots + \lambda_m \eta_m| &\leq \sup_{n=1,2,\dots} \varepsilon_n \left\{ \left| \frac{1}{t_1^{(n)} - t_0^{(n)}} \int_{t_0^{(n)}}^{t_1^{(n)}} g(t) dt - g(0) \right| + \dots \right. \\ &+ \left| \frac{1}{t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}} \int_{t_i^{(n)}}^{t_{i+1}^{(n)}} g(t) dt - \frac{1}{t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}} \int_{t_{i-1}^{(n)}}^{t_i^{(n)}} g(t) dt \right| + \dots \\ &\left. + \left| g(1) - \frac{1}{t_{m_n}^{(n)} - t_{m_n-1}^{(n)}} \int_{t_{m_n-1}^{(n)}}^{t_{m_n}^{(n)}} g(t) dt \right| \right\} \end{aligned}$$

besteht, wobei $g(t)$ durch (45) erklärt ist und $(t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)})$ eine normale Zerlegungsfolge des Intervalls $< 0, 1 >$ ist.

(Reçu par la Rédaction le 15. 5. 1936).

Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen

von

M. EIDELHEIT (Lwów).

In der vorliegenden Arbeit geben wir Bedingungen an, unter welchen ein beliebiges System von Gleichungen

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

für jede Folge $\{\eta_i\}$ eine Lösung $\{\xi_k\}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik} \xi_k| < \infty$ ($i = 1, 2, \dots$)

besitzt. Die benutzte Methode stützt sich wesentlich auf die, neuerdings von den Herren S. MAZUR und W. ORLICZ begründete, Theorie der Räume vom Typus (B_0) ¹⁾. Der Bequemlichkeit des Lesers wegen, werden zunächst die für das folgende wichtigen Begriffe und Sätze dieser Theorie zusammengestellt. Wir fügen sodann einige Bemerkungen hinzu. Es folgt ein allgemeiner Satz über Systeme linearer Gleichungen in einem Raum vom Typus (B_0) und eine Anwendung dieses Satzes auf die Systeme (1). Endlich werden diese Resultate zu einem einfachen Beweis des bekannten Satzes über die Existenz einer ganzen analytischen Funktion, die in einer gegebenen Punktfolge gegebene Werte annimmt, benutzt.

§ 1.

1. Ein linearer Raum E wird als *Raum vom Typus (B_0)* bezeichnet, wenn in ihm eine Folge von Funktionalen $\{|x|_i\}$ mit den folgenden Eigenschaften vorhanden ist:

¹⁾ S. Mazur und W. Orlicz, Zur Theorie der linearen metrischen Räume, erscheint im nächsten Band dieses Journals.

1. $|x|_i \geq 0$, $|\Theta|_i = 0$, $|tx|_i = |t| |x|_i$, $|x+y|_i \leq |x|_i + |y|_i$ ($i=1, 2, \dots$),
2. Ist $|x|_i = 0$ ($i=1, 2, \dots$), so gilt $x = \Theta$, (x, y sind Elemente von E , Θ das Nullelement, t eine reelle Zahl),
3. Erklärt man die Entfernung (x, y) zweier Elemente x, y durch

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x-y|_i}{1+|x-y|_i},$$

so wird der Raum E zu einem vollständigen Raum.

Setzt man ferner

$$(2) \quad |x| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x|_i}{1+|x|_i},$$

so heißt eine Folge linearer Funktionale $\{f_i(x)\}$ *stark konvergent*, wenn es eine Kugel $|x| \leq r$ gibt, so daß $\{f_i(x)\}$ in dieser Kugel gleichmäßig konvergiert. Jeder Raum vom Typus (B_0) ist, wie leicht einzusehen, ein Raum vom Typus (F) ²⁾. Die Räume vom Typus (B) sind spezielle Fälle der Räume vom Typus (B_0) und man erhält sie, indem man

$$|x|_i = \|x\| \quad (i=1, 2, \dots)$$

setzt. Viele Sätze aus der Theorie der Räume vom Typus (B) übertragen sich auf die Räume vom Typus (B_0) . Insbesondere gilt der folgende, für uns wichtige

Satz 1.³⁾ *Es sei $U(x)$ eine im Raume E vom Typus (B_0) erklärte lineare Operation mit Werten aus einem Raum G , ebenfalls vom Typus (B_0) . Ist $Y(y)$ ein lineares Funktional in G so ist*

$$(3) \quad X(x) = Y[U(x)]$$

ein lineares Funktional in E . Die Operation

$$X = \bar{U}(Y)$$

die durch (3) erklärt ist, ist linear und heißt zur Operation $U(x)$ konjugiert. Damit die Gleichung

$$(4) \quad y = U(x)$$

für jedes $y \in G$ eine Lösung $x \in E$ besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß die Operation $X = \bar{U}(Y)$ eine stetige Umkehrung zuläßt.

²⁾ Über die Räume vom Typus (F) siehe: S. Mazur und W. Orlicz, Über Folgen linearer Operationen, *Studia Math.* 4 (1933) p. 152–158.

³⁾ loc. cit. ¹⁾.

2. Bemerkung 1. Damit eine Folge linearer Funktionale $\{f_i(x)\}$ stark gegen $f(x)$ konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß es eine natürliche Zahl N und eine Zahlenfolge $\{M_i\}$ mit $M_i > 0$, $M_i \rightarrow 0$ gibt, so daß

$$(5) \quad |f_i(x) - f(x)| \leq M_i \sum_{k=1}^N |x|_k \quad (x \in E)$$

gilt.

Die Bedingung ist hinreichend. Denn ist $|x| \leq \frac{1}{2^{N+1}}$, so wird nach (2)

$$\frac{|x|_k}{1 + |x|_k} \leq \frac{1}{2}, \text{ also } |x|_k \leq 1 \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

und die Folge $\{f_i(x)\}$ ist in der Kugel $|x| \leq \frac{1}{2^{N+1}}$ gleichmäßig konvergent.

Die Bedingung ist notwendig. Es sei nämlich die Folge $\{f_i(x)\}$ in der Kugel $|x| \leq \delta$ gleichmäßig konvergent. Wir wählen eine natürliche Zahl N , so daß $\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\delta}{2}$ ist. Die Menge H der Punkte x mit $|x|_i \leq \frac{\delta}{2}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) gehört dann nach (2) der Kugel $|x| < \delta$ an, und infolgedessen ist die Folge $\{f_i(x)\}$ in H gleichmäßig konvergent. Setzt man nun

$$M_i = \frac{2}{\delta} \sup_{x \in H} |f_i(x) - f(x)|,$$

so ist (5) ersichtlich erfüllt.

Ist $f(x)$ ein additives Funktional und gibt es eine Zahl $M > 0$ und eine natürliche Zahl N , so daß

$$|f(x)| \leq M \sum_{k=1}^N |x|_k \quad (x \in E)$$

gilt, so ist $f(x)$ offenbar linear. Umgekehrt, ist $f(x)$ ein beliebiges lineares Funktional in E , so gibt es ein $\delta > 0$, so daß für $|x| < \delta$, $|f(x)| < 1$ gilt. Eine der in Bemerkung 1 durchgeführten ähnliche Überlegung zeigt, daß es eine Zahl $M > 0$ und eine natürliche Zahl N gibt, so daß die Ungleichung

$$(6) \quad |f(x)| \leq M \sum_{i=1}^N |x|_i \quad (x \in E)$$

besteht. Ist $f(x) \neq 0$, so nennen wir die kleinste natürliche Zahl N , für die es ein $M > 0$ gibt, so daß (6) besteht, die *Ordnung* des Funktionals $f(x)$ und bezeichnen sie mit $n(f)$. Für $f(x) \equiv 0$ setzen wir $n(f) = 0$. Aus dieser Definition folgt sofort, daß $f(x)$ in der Menge der Punkte: $|x|_i \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, n(f)$) beschränkt bleibt, während es für $N < n(f)$ immer eine Folge $\{x_m\}$ mit $|x_m|_1 \leq 1$, $|x_m|_2 \leq 1, \dots, |x_m|_N \leq 1$ ($m = 1, 2, \dots$) gibt, für welche die Folge $\{f(x_m)\}$ unbeschränkt ist. Die Ordnung besitzt ferner folgende Eigenschaften:

- a) ist λ eine reelle Zahl $\neq 0$, so gilt $n(\lambda f) = n(f)$;
- b) $n(f_1 + f_2) \leq \max [n(f_1), n(f_2)]$;
- c) ist $n(f_1) < n(f_2)$, so gilt $n(f_1 + f_2) = n(f_2)$;
- d) ist die Folge linearer Funktionale $\{f_i(x)\}$ in jedem Punkt x beschränkt, so ist auch die Folge $\{n(f_i)\}$ beschränkt.

Die Eigenschaften a), b) sind evident. Um c) zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß aus b)

$$(7) \quad n(f_1 + f_2) \leq n(f_2)$$

folgt. Andererseits gibt es eine Folge $\{x_k\}$, $|x_k|_i \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, n(f_2) - 1$; $k = 1, 2, \dots$), für welche die Folge $\{f_2(x_k)\}$ unbeschränkt ist. Es ist dann, wegen $n(f_1) \leq n(f_2) - 1$, die Folge $\{f_1(x_k)\}$ beschränkt und infolgedessen die Folge $\{f_1(x_k) + f_2(x_k)\}$ unbeschränkt. Daraus schließen wir aber, daß $n(f_1 + f_2) \geq n(f_2)$ sein muß, was zusammen mit (7) die Behauptung ergibt.

Endlich folgt d), nach einem Satze der Herren S. MAZUR und W. ORLICZ⁴⁾, aus der gleichgradigen Stetigkeit der Folge $\{f_i(x)\}$, ähnlich wie (6).

Als Beispiel eines Raumes vom Typus (B_0) nehmen wir den Raum (s) aller Zahlenfolgen $\{\xi_k\}$. Man setzt dann für $x = \{\xi_k\}$, $|x|_i = |\xi_i|$ ($|\xi_i|$ bedeutet den absoluten Wert von ξ_i). Jedes lineare Funktional ist von der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^N a_k \xi_k.$$

Man sieht leicht, daß, wenn $a_N \neq 0$ ist,

$$n(f) = N$$

gilt. Die starke Konvergenz einer Folge von linearen Funktionalen $\{f_i(x)\}$

⁴⁾ loc. cit. ²⁾, p. 153.

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^{N_i} a_k^{(i)} \xi_k$$

gegen $f(x) = 0$ bedeutet hier nach d), daß die Folge $\{N_i\}$ beschränkt, $N_i \leq N$ und $\lim_{i \rightarrow \infty} a_k^{(i)} = 0$ ($k = 1, 2, \dots, N$) ist.

3. Wir betrachten nun ein System von Gleichungen

$$(8) \quad f_i(x) = \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

wo $f_i(x)$ gegebene lineare Funktionale in E und η_i reelle Zahlen sind.

Satz 2. *Damit das System (8) für jede Folge $\{\eta_i\}$ eine Lösung $x \in E$ besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1) *die Funktionale $f_i(x)$ sind voneinander linear unabhängig,*

2) *für jede natürliche Zahl p gibt es eine natürliche Zahl i_p , so daß, wenn für irgendwelche Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$, ($\lambda_i \neq 0$) und*

$$\varphi(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_i f_i(x)$$

$$n(\varphi) \leq p$$

ist, die Ungleichung

$$i \leq i_p$$

gilt.

Beweis. Die Bedingungen sind notwendig. Setzen wir $\{\eta_i\} = y$, so ist durch (8) eine in E lineare Operation $y = U(x)$ mit Werten aus dem Raum (s) erklärt. Ist

$$Y(y) = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \dots + c_N \eta_N$$

ein beliebiges lineares Funktional in (s) , so wird

$$(9) \quad \bar{U}(Y) = Y[U(x)] = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_N f_N(x).$$

Diese Operation soll nach dem Satz 1 eine Umkehrung besitzen. Das ist aber ersichtlich mit 1) äquivalent. Nehmen wir nun an, daß 2) nicht richtig sei. Es gibt dann eine natürliche Zahl p und eine Folge linearer Funktionale

$$(10) \quad \varphi_m(x) = \lambda_1^{(m)} f_1(x) + \lambda_2^{(m)} f_2(x) + \dots + \lambda_{i_m}^{(m)} f_{i_m}(x),$$

$$(\lambda_{i_m}^{(m)} \neq 0, i_m \rightarrow \infty)$$

so daß

$$n(\varphi_m) \leq p \quad (m = 1, 2, \dots)$$

gilt. Nach Bemerkung 1 können wir nun eine Zahlenfolge $\{a_m\}$

mit $a_m \neq 0$ bestimmen, so daß die Folge $\{a_m \varphi_m(x)\}$ gegen $f(x) \equiv 0$ stark konvergiert. Dem Satz 1 zufolge muß dann die Folge der Funktionale in (s)

$$Y_m(y) = a_m (\lambda_1^{(m)} \eta_1 + \lambda_2^{(m)} \eta_2 + \dots + \lambda_{i_m}^{(m)} \eta_{i_m})$$

gegen $Y(y) \equiv 0$ konvergieren. Aus der Eigenschaft d) der Ordnung folgt nun, wegen $\lambda_{i_m}^{(m)} \neq 0$, daß die Folge $\{i_m\}$ beschränkt ist, entgegen (10).

Die Bedingungen sind hinreichend. Zunächst folgt aus 1), daß die Operation (9) eine Umkehrung zuläßt. Es sei nun

$$(11) \quad \varphi_m(x) = \lambda_1^{(m)} f_1(x) + \lambda_2^{(m)} f_2(x) + \dots + \lambda_{i_m}^{(m)} f_{i_m}(x)$$

eine gegen $f(x) \equiv 0$ stark konvergente Folge. Nach der Eigenschaft d) der Ordnung ist die Folge $\{n(\varphi_m)\}$ beschränkt. Aus 2) folgt daher, daß die Folge $\{i_m\}$ beschränkt ist: $i_m \leq N$. Berücksichtigt man nun 1), so sieht man leicht, daß die Folgen $\{\lambda_1^{(m)}\}$, $\{\lambda_2^{(m)}\}, \dots, \{\lambda_N^{(m)}\}$ gegen 0 konvergieren. [Denn es gibt Punkte $x_1, x_2, \dots, x_N$, so daß $f_k(x_k) = 1, f_i(x_k) = 0, i \neq k$ ($i, k = 1, 2, \dots, N$) und $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(x_k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, N$) ist]. Folglich konvergieren die Funktionale

$$\bar{Y}_m(y) = \lambda_1^{(m)} \eta_1 + \lambda_2^{(m)} \eta_2 + \dots + \lambda_{i_m}^{(m)} \eta_{i_m}$$

stark gegen $Y(y) \equiv 0$, w. z. b. w.

Bemerkung 2. Aus der Bedingung 2) folgt insbesondere, daß

$$\lim_{i \rightarrow \infty} n(f_i) = \infty$$

sein muß. Wir schließen daraus, daß, wenn E ein Raum vom Typus (B) ist, das System (8) nicht für jede Folge $\{\eta_i\}$ lösbar sein kann, da in diesem Fall $n(f) = 1$ für jedes von $f(x) \equiv 0$ verschiedene lineare Funktional wäre.

Bemerkung 3. Ist

$$n(f_i) < n(f_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots),$$

so besitzt das System (8) immer eine Lösung. Die Bedingungen 1), 2) folgen nämlich dann ohne weiteres aus den Eigenschaften a), b), c) der Ordnung.

§ 2.

4. Es sei nun

$$(12) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = \eta_i \quad (i=1, 2, \dots)$$

ein beliebiges System von Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten ξ_k .

Satz 3. Damit das System (12) für jede Folge $\{\eta_i\}$ eine Lösung $\{\xi_k\}$ mit

$$(13) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik} \xi_k| < \infty \quad (i=1, 2, \dots)$$

besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1') die Zeilen der Matrix (a_{ik}) sind voneinander linear unabhängig;

2') für jede natürliche Zahl p gibt es eine natürliche Zahl i_p , so daß, wenn für irgendwelche Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$, $M(\lambda_i \neq 0, M > 0)$

$$\left| \sum_{v=1}^i \lambda_v a_{v,k} \right| \leq M \sum_{v=1}^p |a_{v,k}| \quad (k=1, 2, \dots)$$

ist, die Ungleichung $i \leq i_p$ besteht.

Beweis. Wir dürfen offenbar annehmen, daß es in jeder Kolonne der Matrix (a_{ik}) mindestens ein von 0 verschiedenes Element gibt. Die Menge E aller Zahlenfolgen $\{\xi_k\}$, die der Bedingung (13) genügen, bildet einen linearen Raum bei den gewöhnlichen Definitionen der Verknüpfungen. Setzen wir noch für $x = \{\xi_k\}$

$$(14) \quad |x|_i = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik} \xi_k| \quad (i=1, 2, \dots),$$

so wird E , wie leicht einzusehen, ein Raum vom Typus (B_0) . Da die Elemente $e_m = \{\xi_k^{(m)}\}$, $\xi_k^{(m)} = 0$ ($k \neq m$), $\xi_m^{(m)} = 1$ ($k, m = 1, 2, \dots$) ersichtlich eine Basis in E bilden, so ist jedes lineare Funktional in E von der Form

$$(15) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k.$$

Ist ferner

$$(16) \quad n(f) \leq N,$$

so gilt für ein gewisses $M > 0$ nach (6) und (14)

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k \right| \leq M \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik} \xi_k| \quad (x \in E).$$

Setzt man hier der Reihe nach $x = e_1, e_2, \dots$, so erhält man

$$(17) \quad |c_k| \leq M \sum_{i=1}^N |a_{ik}| \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Umgekehrt, ist (17) erfüllt, so ist offenbar (15) ein lineares Funktional und es besteht die Ungleichung (16).

Setzt man nun

$$(18) \quad f_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k \quad (i = 1, 2, \dots),$$

so bekommt man den Satz 3 als Folge des Satzes 2.

Bemerkung 4. Die Bemerkung 2 ergibt hier nach (17) als notwendige Bedingung dafür, daß das System (12) immer eine Lösung besitzt, folgendes:

Für jede natürliche Zahl p gibt es eine natürliche Zahl i_p , so daß für $i \geq i_p$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{1k}| + |a_{2k}| + \dots + |a_{pk}|}{|a_{ik}|} = 0$$

gilt.

Bemerkung 5. Ist $a_{ik} \neq 0$ ($i, k = 1, 2, \dots$) und

$$(19) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{ik}}{a_{i+1,k}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots),$$

so besitzt das System (12) immer eine Lösung.

Um dies zu beweisen, genügt es nach der Bemerkung 3 zu zeigen, daß

$$n(f_i) = i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

gilt, wo $f_i(x)$ durch (18) erklärt ist. Zunächst folgt aus (17)

$$(20) \quad n(f_i) \leq i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Ferner setze man

$$x_m = \{\xi_k^{(m)}\}, \quad \xi_k^{(m)} = 0, \quad k \neq m, \quad \xi_m^{(m)} = \frac{1}{a_{i-1,m}} \quad (k, m = 1, 2, \dots).$$

Dann sind nach (19) die Folgen $\{|x_m|_1\}, \{|x_m|_2\}, \dots, \{|x_m|_{i-1}\}$

beschränkt und die Folge $\{f_i(x_m)\}$ unbeschränkt. Demnach ist $n(f_i) \geq i$, also wegen (20) $n(f_i) = i$.

5. Wir bemerken jetzt, daß alle vorangehenden Ausführungen ungeändert bleiben, wenn man überall „reelle Zahl“ durch „komplexe Zahl“ ersetzt.

Es seien nun $\{z_i\}$, $\{w_i\}$ beliebige Folgen komplexer Zahlen und

$$(21) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} z_i = \infty, \quad z_i \neq z_k, \quad i \neq k.$$

Es wird eine analytische Funktion

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad \text{mit} \quad g(z_i) = w_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

gesucht. Es genügt zu zeigen, daß das System

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_i^k c_k = w_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

eine Lösung besitzt. Wir dürfen dabei, wegen (21),

$$(22) \quad |z_i| \leq |z_{i+1}| \quad (i = 1, 2, \dots)$$

voraussetzen.

Zunächst folgt aus der bekannten Auswertung der Vandermondeschen Determinante, daß die Zeilen der Matrix $(a_{ik}) = (z_i^k)$ voneinander linear unabhängig sind. Nehmen wir nun an, daß für irgendwelche Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, M$ ($\lambda_i \neq 0, M > 0$) und eine natürliche Zahl p

$$\left| \sum_{v=1}^i \lambda_v z_v^k \right| \leq M \sum_{v=1}^p |z_v^k| \quad (k = 0, 1, \dots)$$

ist. Hieraus erhält man für eine beliebige natürliche Zahl m

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{k |z_i^k|} \left| \sum_{v=1}^i \lambda_v z_v^k \right| \leq M \sum_{k=1}^m \frac{1}{k |z_i^k|} \sum_{v=1}^p |z_v^k|$$

und umsomehr

$$\left| \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^i \lambda_v \frac{z_v^k}{k z_i^k} \right| \leq M \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^p \left| \frac{z_v^k}{k z_i^k} \right|,$$

was auch in der Form

$$(23) \quad \left| \sum_{v=1}^i \lambda_v \sum_{k=1}^m \frac{z_v^k}{k z_i^k} \right| \leq M \sum_{v=1}^p \sum_{k=1}^m \left| \frac{z_v^k}{k z_i^k} \right|$$

geschrieben werden kann. Beachten wir nun, daß die Reihen

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_v^k}{k z_i^k}$ wegen (22) für $\nu < i$ konvergieren, während man für

$\nu = i$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_i^k}{k z_i^k} = \infty$ erhält. Es ergibt sich dann, wegen $\lambda_i \neq 0$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{v=1}^i \lambda_v \sum_{k=1}^m \frac{z_v^k}{k z_i^k} \right| = \infty$$

und nach (23) umsomehr

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^p \sum_{k=1}^m \left| \frac{z_v^k}{k z_i^k} \right| = \infty.$$

Daraus folgt $|z_i| \leq |z_p|$. Wählt man nun gemäß (21) die natürliche Zahl i_p , so daß für $\nu > i_p$ $|z_\nu| > |z_p|$ gilt, so muß $i \leq i_p$ sein, womit alles bewiesen ist.

Dieser Beweis bleibt, wie Herr H. STEINHAUS bemerkt hat, ungeändert, wenn man $\lim_{i \rightarrow \infty} |z_i| = r$, $|z_i| \leq r$ statt $z_i \rightarrow \infty$ annimmt und $g(z)$ regulär im Kreise $|z| < r$ voraussetzt.

(Reçu par la Rédaction le 15. 6. 1936).

Über k -fach monotone Folgen

von

W. ORLICZ (Lwów).

1. In diesem Aufsatz bringen wir einige Sätze aus der Theorie der unendlichen Reihen sowie auch aus der Theorie der Orthogonalentwicklungen. Obwohl die Sätze des zweiten bzw. dritten Abschnittes verschiedenen Problemkreisen angehören, so haben sie doch das Gemeinsame, daß man es bei ihnen mit k -fach monotonen Zahlenfolgen zu tun hat.

Die Folge $\{a_\nu\}$ heißt bekanntlich k -fach monoton abnehmend, wenn die zugehörigen i -ten Differenzen $\Delta^{(i)} a_\nu$ nichtnegativ sind für $i=1, 2, \dots, k$ und alle ν . Die Folge $\{a_\nu\}$ nennen wir *von beschränkter Variation k -ter Ordnung*, wenn die Reihe

$$(1) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+k-1}{k-1} |\Delta^{(k)} a_\nu|$$

konvergiert. Offensichtlich ist die Konvergenz von (1) mit der Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^{k-1} |\Delta^{(k)} a_\nu|$ äquivalent.

Wir bezeichnen mit (v^k) den linearen Raum aller nullkonvergenten Zahlenfolgen $\{a_\nu\}$, die von beschränkter Variation k -ter Ordnung sind; definieren wir die Entfernung zweier Elemente $a = \{a_\nu\}$, $b = \{b_\nu\}$ aus (v^k) durch

$$(a, b) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+k-1}{k-1} |\Delta^{(k)}(a_\nu - b_\nu)|,$$

so erweist sich (v^k) , wie man zeigen kann, als ein Raum vom Typus $(B)^1$.

¹⁾ Vgl. dazu: J. Pfleger, Über Reihen mit r -fach monoton abnehmenden Gliedern, Monatshefte f. Math. u. Phys. 41 (1934) p. 191–200, insb. p. 196–197.

Wir definieren noch die Norm eines Elementes $a = \{a_v\} \in (v^k)$:

$$\|a\| = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{v+k-1}{k-1} |\mathcal{A}^{(k)} a_v|;$$

ist $a^p = \{a_v^p\}$, so folgt aus $\|a^p\| \rightarrow 0$ insbesondere $\lim_{p \rightarrow \infty} a_v^p = 0$ ($v=0, 1, 2, \dots$).

Eine Folge aus (v^r) gehört auch jedem Raume (v^s) ($s=1, 2, \dots, r-1$) an²⁾.

Wir formulieren zuerst den folgenden von Herrn J. PFLERGER herrührenden Hilfssatz³⁾.

Hilfssatz 1. Ist $\{\mathcal{A}_v\}$ eine Zahlenfolge, für welche die Reihe

$$\sum_{v=0}^{\infty} \binom{v+k-1}{k-1} |\mathcal{A}_v|$$

konvergiert, so ist die Folge

$$(2) \quad a_n = \sum_{v=n}^{\infty} \binom{v-n+k-1}{k-1} \mathcal{A}_v \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

nullkonvergent und $\mathcal{A}^{(k)} a_n = \mathcal{A}_n$ ($n=0, 1, 2, \dots$).

Der Zusammenhang zwischen k -fach monoton abnehmenden Zahlenfolgen und Folgen von beschränkter Variation k -ter Ordnung wird durch den folgenden Hilfssatz beleuchtet:

Hilfssatz 2. Ist die nullkonvergente Folge $\{a_v\}$ k -fach monoton abnehmend, so ist sie von beschränkter Variation k -ter Ordnung.

Ist die nullkonvergente Folge $\{a_v\}$ von beschränkter Variation k -ter Ordnung, so gibt es zwei k -fach monoton abnehmende nullkonvergente Folgen $\{a'_v\}$, $\{a''_v\}$ so daß $a_v = a'_v - a''_v$ ($v=0, 1, 2, \dots$).

Beweis. Der erste Teil des Hilfssatzes ist bekannt; um den zweiten Teil zu beweisen, setzen wir

$$\mathcal{A}'_v = 1/2 (|\mathcal{A}^{(k)} a_v| + \mathcal{A}^{(k)} a_v), \quad \mathcal{A}''_v = 1/2 (|\mathcal{A}^{(k)} a_v| - \mathcal{A}^{(k)} a_v)$$

und definieren die Folgen $\{a'_v\}$, $\{a''_v\}$ durch

$$a'_n = \sum_{v=n}^{\infty} \binom{v-n+k-1}{k-1} \mathcal{A}'_v, \quad a''_n = \sum_{v=n}^{\infty} \binom{v-n+k-1}{k-1} \mathcal{A}''_v.$$

²⁾ Vgl. dazu Hilfssatz 2.

³⁾ L. c. ¹⁾, p. 194, Hilfssatz VI.

Aus $\sum_{r=0}^{\infty} \binom{\nu+k-1}{k-1} |\mathcal{A}^{(k)} a_r| < +\infty$ folgt nach Hilfssatz 1 $a'_n \rightarrow 0$, $a''_n \rightarrow 0$ und $\mathcal{A}^{(k)} a'_n = \mathcal{A}'_n$, $\mathcal{A}^{(k)} a''_n = \mathcal{A}''_n$. Da $\mathcal{A}^{(k)} a'_n \geq 0$, $a'_n \rightarrow 0$, so ist die Folge $\{\mathcal{A}^{(k-1)} a'_n\}$ nullkonvergent und nichtwachsend, so daß $\mathcal{A}^{(k-1)} a'_n \geq 0$; durch wiederholte Anwendung derselben Schlüsse ergibt sich allgemein $\mathcal{A}^{(i)} a'_n \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, k$). Ebenso ist $\mathcal{A}^{(i)} a''_n \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, k$); da $\mathcal{A}^{(k)}(a'_n - a''_n) = \mathcal{A}^{(k)} a_n$ so ist $a_n = a'_n - a''_n$ und unser Hilfssatz ist bewiesen.

Als erste Anwendung dieses Hilfssatzes werden wir jetzt zeigen, daß der Raum (v^k) separabel ist. Sei $a = \{a_r\} \in (v^k)$ und $\mathcal{A}^{(k)} a_r \geq 0$. Wir betrachten die Folge

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}^{(k)} a_0, \dots, \mathcal{A}_p = \mathcal{A}^{(k)} a_p, \mathcal{A}_{p+1} = 0, \mathcal{A}_{p+2} = 0, \dots$$

und definieren die Folge $a^p = \{a_r^p\}$ mittels der Formel (2). Eine ähnliche Schlußweise wie früher zeigt, daß diese Folge k -fach monoton abnehmend ist. Ferner ist

$$\|a^p - a\| = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\nu+k-1}{k-1} |\mathcal{A}^{(k)}(a_r^p - a_r)| = \sum_{r=p+1}^{\infty} \binom{\nu+k-1}{k-1} |\mathcal{A}^{(k)} a_r|,$$

also $\lim_{p \rightarrow \infty} \|a^p - a\| = 0$. Hieraus folgt, unter Beachtung des Hilfssatzes 2, daß die Menge aller Zahlenfolgen von beschränkter Variation k -ter Ordnung, deren Glieder sämtlich rationale Zahlen sind und von einer Stelle an verschwinden, in (v^k) überalldicht liegt.

2. Es bezeichne im Folgenden X einen Raum vom Typus (B) . Sei $\{x_i\}$ eine Folge von Elementen aus X ; wir bezeichnen mit $c_n^{(k)}(x_n)$ die Cesàroschen Mittel k -ter Ordnung der Folge $\{x_i\}$, es ist also

$$c_n^{(k)}(x_n) = \frac{s_n^{(k)}(x_n)}{\binom{n+k}{k}} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$\text{wo } s_n^{(k)}(x_n) = \sum_{i=0}^n \binom{n+k-\nu-1}{k-1} x_i.$$

Es bedeute T^* eine Matrix $(b_{i\nu})$, welche den Bedingungen $\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{i\nu} = 1$, $\lim_{i \rightarrow \infty} b_{i\nu} = 0$ ($\nu=0, 1, 2, \dots$) genügt; als i -te Trans-

formierte der Folge $\{x_v\}$ bezeichnen wir die Summe

$$T_i(x_0, x_1, \dots) = \sum_{r=0}^{\infty} b_{ir} x_r.$$

Satz 1. Es sei $y_n = \sum_{r=0}^n x_r$, $y_n(c) = \sum_{r=0}^n c_r x_r$ ($n=0, 1, 2, \dots$),

wo $x_v \in X$ und $c \equiv \{c_v\}$ eine Zahlenfolge bedeutet. Wir setzen voraus, daß für jede k -fach monoton abnehmende nullkonvergente Zahlenfolge $a \equiv \{a_v\}$ eine Konstante $L(a)$ existiert, so daß

$$(3) \quad \|T_i(y_0(a), y_1(a), \dots)\| \leq L(a) \quad (i=0, 1, 2, \dots).$$

Dann gibt es eine universelle Konstante L , so daß

$$(4) \quad \|c_n^{(k-1)}(y_n)\| \leq L \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$(5) \quad \|c_n^{(k-1)}(z_0^i + \dots + z_n^i)\| \leq L \quad (i, n=0, 1, 2, \dots),$$

wo $z_n^i = x_n \left(\sum_{j=n}^{\infty} b_{ij} \right)$.

Beweis. Zum Beweise benötigen wir folgenden Hilfssatz:

Wenn für eine Elementenfolge $\{z_v\}$, $z_v \in X$, und für eine beliebige Zahlenfolge $\{a_v\}$ aus (v^k) mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Gliedern die Ungleichung

$$(6) \quad \left\| \sum_{v=0}^{\infty} a_v z_v \right\| \leq L \|a\|$$

besteht, so gilt

$$(7) \quad \max_n |c_n^{(k-1)}(z_0 + \dots + z_n)| \leq L.$$

Wir definieren die Zahlenfolge $\{a_v\}$ mittels der Formel (2), in der wir

$$A_v = A^{(k)} a_v = 0 \text{ für } v \neq n, \quad A_n = A^{(k)} a_n = \frac{1}{\binom{n+k-1}{k-1}}$$

gesetzt haben. Wenden wir auf die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z_v$ die Abelsche Umformung an, so erhalten wir wegen (6)

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=0}^{\infty} a_i z_i \right\| &= \left\| \sum_{i=0}^n a_i z_i \right\| = \left\| \sum_{i=0}^n A^{(k)} a_i s_i^{(k)}(z_i) + A^{(k-1)} a_{n+1} s_n^{(k)}(z_n) \right. \\ &\quad \left. + A^{(k-2)} a_{n+1} s_n^{(k-1)}(z_n) + a_{n+1} s_n^{(1)}(z_n) \right\| \\ &= \frac{1}{\binom{n+k-1}{k-1}} s_n^{(k)}(z_n) \leq L \quad (n=0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Da aber $s_n^{(k-1)}(z_0 + z_1 + \dots + z_n) = s_n^{(k)}(z_n)$, so ist (7) bewiesen.

Um jetzt den Satz 1 zu beweisen, betrachten wir die Folge der Transformaten $\{T_i(y_0(a), y_1(a), \dots)\}$. Aus Voraussetzung (3) und Hilfssatz 2 folgt, daß für jede Folge $a = \{a_i\} \in (v^k)$ die Folge $\{T_i(y_0(a), y_1(a), \dots)\}$ beschränkt ist; somit ergibt die Anwendung eines bekannten Satzes über Folgen linearer Operationen⁴⁾ die Existenz einer Konstanten L , mit welcher die Ungleichung

$$(8) \quad \|T_i(y_0(a), y_1(a), \dots)\| \leq L \|a\| \quad (i=0, 1, 2, \dots)$$

besteht. Für jede Zahlenfolge $\{a_i\}$, deren Glieder fast alle Null sind, gilt offenbar

$$T_i(y_0(a), y_1(a), \dots) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (x_r \sum_{j=r}^{\infty} b_{ij}) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z_r^i,$$

also nach (8)

$$\left\| \sum_{r=0}^{\infty} a_r z_r^i \right\| \leq L \|a\| \quad (i=0, 1, 2, \dots).$$

Da nach dem obigen Hilfssatze die Ungleichung

$$\max_n \|c_n^{(k-1)}(z_0^i + \dots + z_n^i)\| \leq L \quad (i=0, 1, 2, \dots)$$

besteht, so ist (5) bewiesen. Um noch (4) zu beweisen, bemerken wir, daß $\lim_{i \rightarrow \infty} z_r^i = x_r$, mithin gilt bei festem n

$$\lim_{i \rightarrow \infty} c_n^{(k-1)}(z_0^i + \dots + z_n^i) = c_n^{(k-1)}(x_0 + \dots + x_n)$$

und nach (5)

$$\|c_n^{(k-1)}(y_n)\| \leq L \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

⁴⁾ Siehe: S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa (1932); p. 80, Théorème 5.

Bemerkung. Setzen wir voraus, daß die Matrix T^* zeilenfinit ist, d. h. $b_{i\nu} = 0$ für $\nu > n(i)$, so folgt aus (5)

$$(9) \quad \|T_i(y_0, y_1, \dots)\| \leq L \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

In der Tat, es ist $z_i^i = 0$ für $\nu > n(i)$ und demzufolge

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{(k-1)}(z_0^i + \dots + z_n^i) = \sum_{j=0}^{n(i)} z_j^i = \sum_{r=0}^{n(i)} b_{i,r}(x_0 + x_1 + \dots + x_i).$$

Hieraus folgt wegen (5) die Ungleichung (9).

Im Sonderfalle $k=1$ wurde Satz 1 zuerst von Herrn S. KACZMARZ⁵⁾ bewiesen.

Satz 2. Damit die Reihe

$$(10) \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_i x_i$$

für jede k -fach monoton abnehmende nullkonvergente Zahlenfolge $\{a_i\}$ (C, l) -summierbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Ungleichung

$$(11) \quad c_n^{(m)}(y_n) \leq L \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

bestehe, wo $m = \min(l, k-1)$, $y_n = \sum_{i=0}^n x_i$ ist.

Beweis. Die angegebene Bedingung ist notwendig. Aus Satz 1 und der vorstehenden Bemerkung folgt sogleich die Beschränktheit der Cesàroschen Mittel $(k-1)$ -ter und l -ter Ordnung der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$.

Die angegebene Bedingung ist hinreichend. Um dies zu beweisen, bemerken wir, daß die (C, p) -Summierbarkeit für $p < q$ die (C, q) -Summierbarkeit zur Folge hat, daß weiter für k -fach monoton abnehmende nullkonvergente Zahlenfolgen die Beziehung

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+p-1}{p-1} A^{(p)} a_i < +\infty, \quad p < k, \quad \text{gilt und daß der folgende}$$

Satz besteht:

⁵⁾ S. Kaczmarz, Une remarque sur les séries, *Studia Math.* 3 (1931) p. 95–100, insb. p. 97.

Ist die Bedingung (11) erfüllt und $\sum_{r=0}^{\infty} \binom{\nu+m}{m} |\Delta^{(m+1)} a_r| < +\infty$,
 $a_\nu \rightarrow 0$, so ist die Reihe (10) (C, m) -summierbar⁶⁾.

Was den zuletzt genannten Satz betrifft, so ist er für numerische Reihen bekannt; seine Verallgemeinerung auf den Fall eines beliebigen B -Raumes liegt auf der Hand.

Bemerkung. Man kann im Satze 2 die Worte „ (C, l) -summierbar“ durch „ (C, l) -beschränkt“ ersetzen.

Im Sonderfalle $k=2, l=1$ wurde Satz 2 von Herrn SZIDON⁷⁾, für $k=2, l=0$ von Herrn S. KACZMARZ⁸⁾ bewiesen.

Satz 3. Wir setzen voraus, daß die Toeplitzsche Summationsmethode T die folgende Eigenschaft besitzt:

Immer wenn die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} \lambda_r$ T -summierbar ist, ist auch die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} a_r \lambda_r$ T -summierbar, wobei $\{a_r\}$ eine beliebige monotone ($k=1$) nullkonvergente Zahlenfolge bedeutet. Unter dieser Voraussetzung ist die T -Summierbarkeit mit der gewöhnlichen Konvergenz äquivalent.

Beweis. Aus unserer Voraussetzung folgt nach Satz 1 aus der T -Summierbarkeit der Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} \lambda_r$ die Beschränktheit ihrer Teilsummen. Nach einem Satze von MAZUR-ORLICZ⁹⁾ ergibt sich hieraus die Behauptung.

Satz 4. Wir setzen voraus, daß die Toeplitzsche Summationsmethode T mit allen Toeplitzschen Methoden, die von ihr

⁶⁾ G. H. Hardy, Generalisation of a theorem in the theory of divergent series, Proc. London Math. Soc. (2) 6 (1907); H. Bohr, Bidrag til de Dirichletske Raekkers Theorie, Inaug.-Diss., Kopenhagen (1910), insb. p. 61; vgl. auch: I. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, Journ. f. reine und ang. Math. 151 (1921) p. 79–111, insb. p. 104–106.

⁷⁾ S. Szidon, Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihen, Math. Zeitschr. 10 (1921) p. 121–127.

⁸⁾ L. c. ⁸⁾.

⁹⁾ S. Mazur et W. Orlicz, Sur les méthodes linéaires de sommation, C. R. de l'Acad. des Sc. 196 (1933) p. 32–34; siehe Théorème 6.

nicht schwächer sind, konsistent ist¹⁰⁾ und die folgende Eigenschaft besitzt:

Immer wenn die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} \lambda_v$ T -summierbar ist, ist auch die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v \lambda_v$ T -summierbar, wobei $\{a_v\}$ eine beliebige k -fach monoton abnehmende nullkonvergente Zahlenfolge bedeutet. Unter diesen Voraussetzungen ist die Methode T nicht stärker als die $(C, k-1)$ -Summierbarkeit.

Beweis. Für die Summationsmethode T gilt folgendes¹¹⁾: Es existiert eine abzählbare Menge S von konvergenten Zahlenfolgen, so daß für jede T -summierbare Folge $\{s_v\}$, $\varepsilon > 0$ und jedes ganze $p \geq 0$ eine Folge $\{s_v^0\} \in S$ vorhanden ist, die den Ungleichungen

$$\left| \sum_{v=0}^{\infty} a_{iv} (s_v - s_v^0) \right| < \varepsilon \quad (i=0, 1, 2, \dots),$$

$$|s_v - s_v^0| < \varepsilon \quad (v=0, 1, 2, \dots, p),$$

$$\left| \sum_{v=0}^n a_{iv} (s_v - s_v^0) \right| < \varepsilon \quad (i=0, 1, 2, \dots, p; n=0, 1, 2, \dots)$$

genügt. Aus Satz 1 folgern wir, daß für jede T -summierbare Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} \lambda_v$ die Folge $\{c_n^{(k-1)}(\lambda_0 + \dots + \lambda_n)\}$ beschränkt ist. Jetzt nehmen wir an, es sei

$$c_{p_i}^{(k-1)}(\lambda_0 + \dots + \lambda_{p_i}) \rightarrow a, \quad c_{q_i}^{(k-1)}(\lambda_0 + \dots + \lambda_{q_i}) \rightarrow b.$$

Da offenbar für jede Folge $\{s_v\} \in S$ der Grenzwert

$$\lim_{i \rightarrow \infty} c_{p_i}^{(k-1)}(s_{p_i})$$

existiert, so existiert dieser Grenzwert, infolge der oben angegebenen Eigenschaft der Methode T , für jede T -summierbare Folge $\{s_v\}$. Somit ist die Summationsmethode, die der Transformations-

¹⁰⁾ Das heißt: wenn jede T -summierbare Folge $\bar{T}$ -summierbar ist, so erteilt die $\bar{T}$ -Methode jeder T -summierbaren Folge denselben Grenzwert wie die Methode T .

¹¹⁾ L. c. 9).

mierten $c_{p_i}^{(k-1)}(s_{p_i})$ entspricht, nicht schwächer als die T -Methode

und aus $\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{\infty} a_{i,r} s_r = r$ folgt $\lim_{i \rightarrow \infty} c_{p_i}^{(k-1)}(s_{p_i}) = r$. Daher ist

$$a = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{\infty} a_{i,r} (\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_r) = A;$$

man beweist ganz analog $b = A$, die Folge $\{c_n^{(k-1)}(\lambda_0 + \dots + \lambda_n)\}$ muß also konvergieren.

3. Sei $\{q_r(x)\}$ ein in (a, b) orthogonales Funktionensystem; mit (L^a, L^b) bezeichnen wir die Menge aller Folgen $\{\lambda_r\}$ mit der Eigenschaft, daß immer, wenn

$$(12) \quad \sum_{r=0}^{\infty} f_r q_r(x)$$

die Entwicklung einer Funktion aus (L^a) ist, die Reihe

$$(13) \quad \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_r f_r q_r(x)$$

die Entwicklung einer Funktion aus (L^b) darstellt.

Es bezeichne $K_n^{(k)}(x, \xi)$ das n -te Cesàrosche Mittel k -ter Ordnung der Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} q_r(x) q_r(\xi)$; als die n -te der (C, k) -Methode entsprechende *Lebesguesche Funktion* bezeichnen wir

$$\varrho_n^{(k)}(\xi) = \int_a^b |K_n^{(k)}(x, \xi)| dx.$$

Satz 5. Es bestehe $\{q_r(x)\}$ aus beschränkten Funktionen und sei in (L^1) vollständig. Dafür, daß jede k -fach monoton abnehmende nullkonvergente Zahlenfolge $\{\lambda_r\}$ der Menge (L^1, L^1) angehört, ist die Existenz einer Konstanten M , mit der die Ungleichung

$$(14) \quad \varrho_n^{(k-1)}(\xi) \leq M$$

für fast jedes ξ besteht, notwendig und hinreichend.

Beweis. 1. Die Bedingung ist hinreichend. Wenn die Ungleichung (14) für fast jedes ξ besteht und $f(x) \in (L^1)$ so ist die Entwicklung (12) im Raume (L^1) $(C, k-1)$ -summierbar somit

im Raume (L^1) auch die Reihe (13) für jede k -fach monoton abnehmende nullkonvergente Zahlenfolge $\{\lambda_\nu\}$ $(C, k-1)$ -summierbar und stellt die Entwicklung einer integrierbaren Funktion dar.

2°. Die Bedingung ist notwendig. Aus Voraussetzungen des Satzes 5 folgt nach Hilfssatz 2, daß jede Folge $\{\lambda_\nu\} \in (v^k)$ der Menge (L^1, L^1) angehört. Wenn $\lambda \equiv \{\lambda_\nu\} \in (v^k)$, so bezeichnen wir (bei festgehaltenem $f(x)$) mit $U(\lambda; x)$ diejenige integrierbare Funktion, für welche

$$\int_a^b U(\lambda; x) dx = \lambda_\nu \int_a^b f(x) \varphi_\nu(x) dx, \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots), \quad f(x) \in (L^1).$$

$U(\lambda; x)$ stellt eine lineare Operation in (v^k) dar¹²⁾; es gibt also eine Konstante M_f so daß

$$(15) \quad \|U(\lambda; x)\|_1 \leq M_f \|\lambda\|.$$

Wir definieren jetzt eine Folge $\lambda \equiv \{\lambda_\nu\}$ mittels (2), worin

$$\Delta_\nu = \Delta^{(k)} \lambda_\nu = 0 \text{ für } \nu \neq n, \quad \Delta_n = \Delta^{(k)} \lambda_n = \frac{1}{\binom{n+k-1}{k-1}} \text{ gesetzt wird.}$$

Da $\|\lambda\| = 1$, $\lambda_{n+1} = \lambda_{n+2} = \dots = 0$, so ist nach (15)

$$\|U(\lambda; x)\|_1 = \left\| \sum_{\nu=0}^n \lambda_\nu f_\nu \varphi_\nu(x) \right\|_1 \leq M_f.$$

Die Anwendung der Abelschen Umformung auf die linkerhand stehende Summe ergibt (vgl. den Beweis des Hilfssatzes auf Seite 152)

$$\left\| \frac{s_n^{(k-1)} \left(\sum_{\nu=0}^n f_\nu \varphi_\nu(x) \right)}{\binom{n+k-1}{k-1}} \right\|_1 \leq M_f \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Somit ist für jedes $f(x) \in (L^1)$ die Reihe (12) $(C, k-1)$ -beschränkt (im Raume (L^1)), woraus bekanntlich (14) für fast jedes ξ folgt.

¹²⁾ Um das einzusehen genügt es z. B. einen Satz von S. Banach anzuwenden; siehe das unter *) zit. Buch, p. 41, Théorème 7.

Man beweist ganz ähnlich den Satz:

Satz 6. *Das Orthogonalsystem $\{q_\nu(x)\}$, $q_\nu(x) \in (L^\beta)$, sei in (L^α) vollständig. Dafür, daß jede *k*-fach monoton abnehmende nullkonvergente Zahlenfolge $\{\lambda_\nu\}$ der Menge (L^α, L^α) angehört, ist notwendig und hinreichend, daß die Entwicklung einer beliebigen Funktion $f(x) \in (L^\alpha)$ im Raume (L^α) $(C, k-1)$ -summierbar sei.*

(Reçu par la Rédaction le 3. 7. 1936).

Zum HELMHOLTZschen Raumproblem

von

H. AUERBACH (Lwów).

Bei diesem Problem¹⁾ handelt es sich um den Satz:

Sei G eine kontinuierliche lineare homogene Gruppe mit reellen Koeffizienten in n Veränderlichen, welche jedes reelle System inzidenter Richtungselemente in jedes andere auf eine einzige Weise zu überführen gestattet. Dann besteht G aus allen reellen Substitutionen von der Determinante 1, welche eine gewisse positiv-definite quadratische Form in sich transformieren.

Ein System inzidenter Richtungselemente im Sinne dieses Satzes setzt sich zusammen aus einer orientierten eindimensionalen linearen Mannigfaltigkeit M_1 , welche den Anfangspunkt enthält, einer orientierten zweidimensionalen linearen Mannigfaltigkeit M_2 , welche M_1 enthält, ..., einer orientierten $(n-1)$ -dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit M_{n-1} , welche M_{n-2} enthält.

Im folgenden wird ein einfacher Beweis des obigen Satzes mitgeteilt, welcher keine Rechnung erfordert und sich auf den Satz stützt:

Jede lineare homogene Gruppe mit beschränkten reellen Koeffizienten besitzt eine positiv-definite invariante quadratische Form²⁾.

Einem beliebigen reellen System inzidenter Richtungselemente r ordnen wir n vom Anfangspunkt ausgehende paarweise

¹⁾ Vgl. H. Weyl, *Raum Zeit Materie*, 5. Aufl. (Berlin, Springer 1923) p. 100 und H. Weyl, *Mathematische Analyse des Raumproblems* (Berlin, Springer 1923), fünfte Vorlesung.

²⁾ H. Auerbach, *Sur les groupes bornés de substitutions linéaires*, *Comptes Rendus* 195 (1932) p. 1367–1369; W. Fenchel, *Über beschränkte lineare Gruppen*, *Matem. Tidsskr.* (1936) p. 10.

orthogonale Einheitsvektoren $e_1, \dots, e_n$ zu, derart daß die Vektoren $e_1, \dots, e_k$ die lineare Mannigfaltigkeit M_k aufspannen und in dieser Reihenfolge ihre Orientierung kennzeichnen ($k=1, \dots, n-1$) und daß die Determinante der orthogonalen Matrix $|e_1 \dots e_n|$ den Wert 1 hat.

Wie leicht ersichtlich, wird auf diese Weise die Gesamtheit R der Systeme r umkehrbar eindeutig und stetig auf die Menge der reellen orthogonalen Matrizen von der Determinante 1 abgebildet. Daher ist R eine geschlossene, zusammenhängende, $n(n-1)/2$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Aus der Voraussetzung, daß die Gruppe G in R einfach transitiv ist, folgt in bekannter Weise, daß die Parameterzahl von G gleich $n(n-1)/2$ ist, sowie daß die Substitution $A(r)$ von G , welche ein fest gewähltes System inzidenter Richtungselemente in das System r überführt, stetig von r abhängt. Da die Mannigfaltigkeit R geschlossen ist, sind die Koeffizienten von $A(r)$ gleichmäßig beschränkt. Nach dem erwähnten Satze besitzt also die Gruppe G eine positiv-definite invariante quadratische Form. Da die Gruppe G offenbar zusammenhängend und von der Ordnung $n(n-1)/2$ ist, stimmt sie überein mit der Gesamtheit der reellen Substitutionen von der Determinante 1, welche diese Form in sich transformieren.

(Reçu par la Rédaction le 18. 7. 1936).

Quasilineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus. Gemischte Randwertaufgaben ¹⁾

von

M. KRZYŻAŃSKI und J. SCHAUDER (Lwów).

§ 1.

Stellung des Problems. Einer der Verfasser hat vor kurzem die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung in m unabhängigen Veränderlichen bewiesen, sobald es sich um das Cauchy'sche Anfangswertproblem für nichtanalytische Differentialgleichungen und Daten handelt ²⁾. Wir wollen nun hier umfassendere, nämlich gemischte Randwertaufgaben für Differentialgleichungen derselben Art betrachten. Dabei werden ähnliche Methoden benutzt und weiter entwickelt.

Sei

$$(1) \quad f\left(x_1, \dots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}\right) = 0$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die linke Seite von (1) sei etwa in einer Kugel A des $(2m + m^2 + 1)$ -dimensionalen Raumes mit den Koordinaten $x_1, x_2, \dots, x_m, u, p_1, p_2, \dots, p_m,$

$r_{11}, \dots, r_{ik}, \dots, r_{mm}$ definiert. Wir setzen $a_{ik} = \frac{\partial f}{\partial r_{ik}}$ und betrachten die quadratische Form

$$(2) \quad \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \alpha_i \alpha_k$$

der Hilfsvariablen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Die a_{ik} sind als Funktionen des

¹⁾ Die Hauptergebnisse dieser Arbeit wurden der Polnischen Mathematischen Gesellschaft (Abteilung Lwów) in der Sitzung vom 29. 2. 1936 mitgeteilt.

²⁾ J. Schauder, Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen, Fund. Math. 24 (1935) p. 213—246.

Punktes in A zu verstehen. Man nennt nun die Gleichung (1) vom normal-hyperbolischen Typus³⁾, falls die quadratische Form (2) — bei konstanten a_{ik} — in die Form $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_{m-1}^2 - \beta_m^2$ linear transformiert werden kann. Dieser normal-hyperbolische Charakter von (1) soll im ganzen A gesichert sein.

Wir wollen von einer Fläche $g(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ sagen, sie sei raumartig, bzw. zeitartig orientiert (oder kürzer, sie sei raum- bzw. zeitartig), je nachdem längs dieser Fläche

$$(3) \quad a(g) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_k} < 0,$$

bzw.

$$(4) \quad a(g) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_k} > 0.$$

Diese Definition stimmt übrigens, wie leicht einzusehen, mit der HADAMARDSchen⁴⁾ überein: das Flächenstück S ist raumartig, falls in jedem Punkte von S die Tangentialebene den charakteristischen Kegel nicht schneidet; wird aber dieser Kegel von der Tangentialebene stets geschnitten, so ist S zeitartig.

Ist S gänzlich raumartig orientiert, so ist die Lösung von (1) durch ihre Cauchy'schen Anfangswerte auf S eindeutig bestimmt. Ist aber ein Teil S_2 von S zeitartig, so reicht auf S_2 die Angabe der Randwerte selbst aus. Das in der vorliegenden Arbeit zu lösende Problem besteht nun darin, eine Lösung durch die Anfangswerte auf dem raumartig orientierten S_1 und durch die Randwerte auf dem zeitartig orientierten S_2 zu bestimmen, falls sich S_1 und S_2 in einer $(m-2)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit schneiden⁵⁾.

§ 2.

Abschätzungen für lineare Differentialgleichungen; Ableitungen erster Ordnung. Wir beginnen unsere

³⁾ J. Hadamard, Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Paris 1932, insb. p. 46–48. Die dort für den linearen Fall gegebene Definition läßt sich sofort auf die allgemeinste nicht-lineare Differentialgleichung übertragen.

⁴⁾ Vgl. loc. cit. ³⁾, insb. p. 53. Zur Definition des charakteristischen Kegels vgl. dasselbe Buch, insb. p. 24.

⁵⁾ Dieses Problem wurde im Falle der Wellengleichung vom Hrn. Hadamard behandelt. Vgl. loc. cit. ³⁾, p. 337.

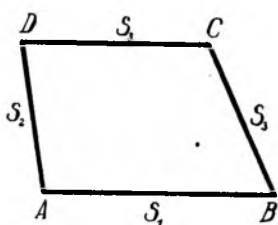
Untersuchungen mit einer linearen normal-hyperbolischen Differentialgleichung

$$(5) \quad \sum_{i,k=1}^m a_{ik}(x_1, x_2, \dots, x_m) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j=1}^m b_j(x_1, x_2, \dots, x_m) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x_1, x_2, \dots, x_m) u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

und nehmen die quadratische Form

$$(6) \quad \sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik} \alpha_i \alpha_k$$

als *positiv definit* an. Dadurch wird die Allgemeinheit keineswegs beeinträchtigt, da man offensichtlich durch eine orthogonale Transformation immer den Spezialfall (6) herbeiführen kann. Nunmehr betrachten wir im Raume der $x_1, x_2, \dots, x_m$ ein Volumenelement V , das die Form eines Pyramidenstumpfes (Kegelstumpfes)



besitzt, etwa so, wie es in der Figur gezeichnet wurde. Zum Rande von V gehören erstens die Flächen S_1 bzw. S_2 , auf denen die Anfangswerte bzw. Randwerte vorgegeben sind. Die Gesamtheit S_3 der übrigen ebenen Randflächen (schematisch durch BCD dargestellt) soll raumartig orientiert sein und in bezug auf die Koordinatenachsen Neigungen besitzen, welche sich von denen der Fläche S_1 nur wenig unterscheiden. Wir nennen S_1 die untere, CD die obere Basis des Stumpfes. Es ist übrigens in unseren Überlegungen der Fall eines Kegelstumpfes mit einbegriffen, für welchen S_2 mit der ganzen Mantelfläche übereinstimmt. Weiter braucht auch S_1 nicht vorhanden zu sein, wenn es sich um Ableitungen erster Ordnung handelt; dann haben wir es mit einem Kegel schlechthin zu tun. Allen diesen Eventualitäten tragen die später zu entwickelnden Formeln Rechnung.

An Regularitätsbedingungen fordern wir: die Funktionen a_{ik} , sowie die Lösung u und ihre ersten Ableitungen sind in V stetig. Das Gebiet V lasse sich weiter in Teilgebiete zerlegen, in denen die Funktionen b_j , c , f , die ersten Ableitungen $\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}$, sowie die zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ stetig sind. Es sei

$$(7) \quad \sum |a_{ik}| + \sum |b_j| + |c| + \sum \left| \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} \right| \leq \gamma_1.$$

Mit n_s bezeichnen wir die äußere Normale auf S_s . Die der Fläche S_3 soeben auferlegten Bedingungen sind immer dann erfüllt, wenn der Winkel zwischen n_1 und n_3 nicht zu groß wird, genauer gesagt, wenn er durch eine Zahl λ_0 beschränkt bleibt, die von γ_1 , d. h. von der in Formel (7) vorkommenden Schranke abhängt:

$$(8) \quad \text{Winkel zwischen } n_1 \text{ und } n_3 \leq \lambda_0(\gamma_1) \text{ } ^6).$$

Unsere Aufgabe wird nun darin bestehen, die Ableitungen auf S_3 durch die Anfangswerte auf S_1 und die Randwerte auf S_2 abzuschätzen. Die fragliche Abschätzung wird dann gelingen, wenn (falls S_1 wirklich vorhanden ist)

$$(9) \quad \cos(n_1, x_m) \cdot \cos(n_2, x_m) > 0, \text{ } ^7)$$

eine Zusatzbedingung, die von nun an in der ganzen Arbeit als erfüllt vorausgesetzt wird. Aus (9) folgt wegen der Eigenschaften der Fläche S_3 [vgl. (8)]

$$(10) \quad \cos(n_2, x_m) \cdot \cos(n_3, x_m) < 0.$$

Indem wir nach FRIEDRICHS und LEWY (5) mit $\frac{\partial u}{\partial \lambda_m}$ multiplizieren ⁸⁾ und dann über V integrieren, erhalten wir

$$(11) \quad \int_{S_1+S_2+S_3} \int \left[2 \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_m} \cos(n, x_i) - \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(n, x_m) \right] d\sigma = \int_V \int \Phi dx_1 dx_2 \dots dx_m + \int_V \int f \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_1 dx_2 \dots dx_m.$$

⁶⁾ Die Schreibweise $\lambda_0(\gamma_1)$, sowie die später zu benutzende $C(\gamma_1)$, $C(\gamma_1, \gamma_2)$ etc. bedeutet, daß λ_0 , C , etc. von den in Klammern befindlichen Konstanten abhängen.

⁷⁾ Den Fall $\cos(n_1, x_m) \cos(n_2, x_m) \geq 0$ kann man auf den oben erwähnten leicht zurückführen. Man kann diesen Bedingungen eine geometrische Form geben.

⁸⁾ K. Friedrichs und H. Lewy, Über die Eindeutigkeit und das Abhängigkeitsgebiet der Lösungen beim Anfangswertproblem linearer hyperbolischer (Fortsetzung der Fußnote ⁶⁾ auf Seite 166).

Φ ist ein Polynom höchstens zweiten Grades in u , a_{ik} , b_j , c und den ersten Ableitungen dieser Funktionen. Es sei

$$(12) \quad g_s(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$$

die Gleichung von S_s ($s = 1, 2, 3$). Wir führen nun für festes s neue Koordinaten $\eta_1^s, \eta_2^s, \dots, \eta_m^s$ mittels der Transformation

$$(13) \quad \eta_1^s = x_1, \eta_2^s = x_2, \dots, \eta_{m-1}^s = x_{m-1}, \eta_m^s = g_s(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

ein. Für den unter dem Integralzeichen auf der linken Seite von (11) stehenden Ausdruck bekommen wir dann — falls man ihn nur auf S_s betrachtet — nach einigen leichten Umformungen

$$(14) \quad \left[\mathbf{a}(g_s) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_m^s} \right)^2 - \sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial \eta_i^s} \frac{\partial u}{\partial \eta_k^s} \right] \cos(n_s, x_m); \quad s = 1, 2, 3.$$

Spalten wir weiter das auf der linken Seite von (11) auftretende Integral in bereits abgeschätzte und die noch abzuschätzenden Teile, so ergibt sich mit Benutzung von (14)

$$(15) \quad \begin{aligned} & \int_{S_2} \int \mathbf{a}(g_2) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_m^2} \right)^2 \cos(n_2, x_m) d\sigma_2 + \int_{S_1} \int \left[\mathbf{a}(g_3) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_m^3} \right)^2 \right. \\ & \left. - \sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial \eta_i^3} \frac{\partial u}{\partial \eta_k^3} \right] \cos(n_3, x_m) d\sigma_3 = \int_V \int \left(\Phi + f \frac{\partial u}{\partial x_m} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_m \\ & - \int_{S_1} \int + \int_{S_2} \int \left[\sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial \eta_i^2} \frac{\partial u}{\partial \eta_k^2} \cos(n_2, x_m) \right] d\sigma_2. \end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{a}(g_3) < 0$ und wegen (6) ist der Ausdruck

$$(16a) \quad \left[\mathbf{a}(g_3) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_m^3} \right)^2 - \sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial \eta_i^3} \frac{\partial u}{\partial \eta_k^3} \right] \cos(n_3, x_m)$$

definit. Ebenso erweist sich der Ausdruck

$$(16b) \quad \mathbf{a}(g_2) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_m^2} \right)^2 \cos(n_2, x_m)$$

Differentialgleichungen, Math. Ann. 98 (1928) p. 192–204. Dort wird eine Abschätzung für

$$\sum_{i=1}^m \int_V \int \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m$$

im linearen Falle gegeben, falls es sich um das Cauchy'sche Problem handelt. Es gelingt hier eine entsprechende Abschätzung auch für die umfassendere gemischte Randwertaufgabe zu liefern.

in Berücksichtigung von $a(g_2) > 0$ als semidefinit. Aus (10) schließen wir, daß (16 a) und (16 b) dasselbe Vorzeichen besitzen.

Da ferner (16 a) auch in $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}$ definit ist, so bekommt man aus (15) — man beachte auch (7) —

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \int_{S_3} \int \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\sigma_3 &\leq C(\gamma_1) \left\{ \sum_{i=1}^m \int_V \int \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m \right. \\ (17) \quad &+ \int_V \int f^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m + \int_{S_1} \int \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + u^2 \right] d\sigma_1 \\ &\left. + \int_{S_2} \int \left[\sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_i^2} \right)^2 + u^2 \right] d\sigma_2 \right\}. \end{aligned}$$

Sei jetzt $S(t)$, $0 \leq t \leq 1$, eine eindimensionale Schar von Flächenstücken mit $S(0) = S_1$, $S(1) = S_3$, die in ihrer Gesamtheit das ganze V erschöpfen. Dann gilt eine der Formel (17) ähnliche Abschätzung für jedes $S(t)$ ⁹⁾:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \int_{S(t)} \int \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\sigma(t) &\leq C(\gamma_1) \left\{ \sum_{i=1}^m \int_{V(t)} \int \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m \right. \\ (18) \quad &+ \int_{V(t)} \int f^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m + \int_{S_1} \int \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + u^2 \right] d\sigma_1 \\ &\left. + \int_{S_2} \int \left[\sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_i^2} \right)^2 + u^2 \right] d\sigma_2 \right\}. \end{aligned}$$

Integrieren wir nun (18) nach t von 0 bis 1, so erhalten wir, falls die „Höhe“ des Stumpfes d. i. die größte Entfernung zwischen S_1 und S_3 nicht zu groß ist, etwa für

$$(19) \quad h \leq h_0(\gamma_1),$$

die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \int_V \int \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m &\leq C(\gamma_1) \left\{ \int_V \int f^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m \right. \\ (20) \quad &+ \int_{S_1} \int \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + u^2 \right] d\sigma_1 + \int_{S_2} \int \left[\sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_i^2} \right)^2 + u^2 \right] d\sigma_2 \left. \right\}, \end{aligned}$$

⁹⁾ Mit $V(t)$ bezeichnen wir den zwischen S_1 und $S(t)$ gelegenen Teil von V ; $d\sigma(t)$ ist das der Fläche $S(t)$ entsprechende Differential.

woraus wegen (17) auch auf S_3

$$(21) \quad \sum_{i=1}^m \int \dots \int_{S_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\sigma_3 \leq \text{rechte Seite in (20)}$$

folgt ¹⁰⁾.

§ 3.

Lineare Differentialgleichungen; Abschätzungen der Ableitungen höherer Ordnung. Wir wollen uns künftig mit dem Fall beschäftigen, wo die raumartige Fläche S_1 wirklich vorhanden ist. S_2 schneidet S_1 in einer $(m-2)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit Γ . Wir setzen voraus, daß Γ nicht geschlossen ist. Dies genügt. Denn ist Γ geschlossen, handelt es sich also um einen Kegelstumpf mit S_2 als der Mantelfläche, so kann man das Innere, d. h. unser Volumenstück V , dachziegelartig in Volumenstücke V' zerlegen, bei denen die entsprechenden Γ' nicht geschlossen sind. Indem wir dann die verlangte Abschätzung der höheren Ableitungen in jedem V' einzeln vornehmen, bekommen wir offensichtlich eine ähnliche Abschätzung im ganzen V . Ist nun Γ nicht geschlossen, so besitzt die durch die Gleichungen

$$(22) \quad x_1 = \eta_1, x_2 = \eta_2, \dots, x_{m-1} = \eta_{m-1}, g_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = \eta_m^{11})$$

definierte Koordinatentransformation $\eta_i = \psi(x)$ im ganzen V eine nirgends singuläre inverse Transformation $x = \psi^{-1}(\eta)$

$$(23) \quad \eta_1 = x_1, \eta_2 = x_2, \dots, \eta_{m-1} = x_{m-1}, \varphi(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) = x_m,$$

welche Ableitungen von ebenso hoher Ordnung zuläßt, wie die Funktion g_2 . Für

$$(24) \quad \bar{u}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) = u(x_1, x_2, \dots, x_m)^{12})$$

¹⁰⁾ Aus (15) läßt sich wegen (20) und (21) eine analoge Abschätzung auch für $\int \dots \int_{S_2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_m^2} \right)^2 d\sigma_2$ erhalten. Doch wird dies im folgenden nicht benutzt.

¹¹⁾ Formel (22) ist mit der Formel (13) für $s=2$ identisch. Wir haben es vorgezogen, zwecks Vermeidung vieler Indices η_i statt η_i^2 zu schreiben. $g_2 = 0$ ist die Gleichung der Fläche S_2 [vgl. Formel (12)].

¹²⁾ Wir schreiben hier und an manchen anderen Stellen $\bar{u}$ statt u , um anzudeuten, daß es sich nach ausgeführter Koordinatentransformation eigentlich um eine andere Funktion handelt. Entsprechende Bezeichnungen sollte man auch in den Koeffizienten a_{ik} , b_j etc. einführen. Doch ist dies für das Folgende belanglos.

bekommt man in den Variablen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ die Differentialgleichung

$$(25) \quad \sum_{j,s=1}^{m-1} a_{js} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta_j \partial \eta_s} + 2 \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{m-1} a_{jk} \frac{\partial g_2}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta_j \partial \eta_m} + \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \frac{\partial g_2}{\partial x_i} \frac{\partial g_2}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta_m^2} = \sum_{r=1}^m b_r \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_r} - c \bar{u} + f.$$

Für das Folgende muß nun beachtet werden, daß auf S_2 nur die Ableitungen $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_1}, \dots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_{m-1}}$ — nicht aber $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_m}$ — als gegeben zu betrachten sind. Demzufolge differenzieren wir (25) nach

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m-1}$$

und bekommen für $l \leq m-1$

$$(26) \quad \sum_{j,s=1}^{m-1} a_{js} \frac{\partial^2}{\partial \eta_j \partial \eta_s} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_l} + 2 \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{m-1} a_{jk} \frac{\partial g_2}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial \eta_j \partial \eta_m} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_l} + \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \frac{\partial g_2}{\partial x_i} \frac{\partial g_2}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial \eta_m^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_l} = \sum_{h=1}^{m-1} \sum_{j=1}^m q_{jh} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_h} + \left[\frac{\partial}{\partial \eta_l} \left(\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \frac{\partial g_2}{\partial x_i} \frac{\partial g_2}{\partial x_k} \right) \right] \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta_m^2} + \dots; l \leq m-1.$$

Die nicht hingeschriebenen Glieder enthalten Ableitungen von höchstens erster Ordnung. Das störende Glied

$$\left[\frac{\partial}{\partial \eta_l} \left(\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \frac{\partial g_2}{\partial x_i} \frac{\partial g_2}{\partial x_k} \right) \right] \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta_m^2}$$

kann nun leicht mit Hilfe von (25) beseitigt werden, da in (25)

der Koeffizient von $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta_m^2}$ nirgends Null ist. Man bekommt also

$$(27) \quad \text{linke Seite in (26)} = \sum_{h=1}^{m-1} \sum_{j=1}^m q'_{jh} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_h} + \text{Glieder höchstens erster Ordnung in } \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_1}, \dots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_m}.$$

Zu den alten Variablen $x_1, x_2, \dots, x_m$ zurückkehrend erhalten

wir aus (27) für $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_1}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_2}, \dots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_{m-1}}$ Differentialgleichungen von der Form¹³⁾

¹³⁾ $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_j}$ wird in den Formeln (28) (29) etc. als Funktion der Variablen

$x_1, x_2, \dots, x_m$ betrachtet.

$$(28) \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_l} + \sum_{h=1}^{m-1} \sum_{j=1}^m b_{jh}'' \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_h} + \sum_{h=1}^{m-1} c_h' \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_h} = f'.$$

Wir multiplizieren (28) mit $\frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_l}$, summieren über $l (l \leq m-1)$ und bekommen, genau so wie in § 2 verfahrend,

$$(29) \leq \text{Konst.} \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{m-1} \int_{S_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_l} \right)^2 d\sigma_3 + \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{m-1} \int_V \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_l} \right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m \right. \\ \left. + \int_V \int \left[f^2 + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 \dots dx_m + \sum_{j=2}^m \int_{S_1} \int (D_j u)^2 d\sigma_1 \right. \\ \left. + \int_{S_2} \int \left[u^2 + \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_i} \right)^2 + \sum_{i,k=1}^{m-1} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta_i \partial \eta_k} \right)^2 \right] d\sigma_2 \right\}.$$

Mit Rücksicht auf (25) läßt sich aber $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta_m^2}$ durch die anderen

Ableitungen ausdrücken und man gelangt somit auch zur Abschätzung

$$(30) \int_V \int \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta_m^2} \right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m \leq \text{rechte Seite in (29)}^{14}.$$

Die Abschätzung der dritten und noch höheren Ableitungen wird nach demselben Schema bewerkstelligt. Für die Abschätzung von

$$\int_V \int (D_h u)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m \text{ mit } h \leq m+2^{15})$$

genügt die Kenntnis der Schranken von $D_{h-1} a_{ik}$, $D_{h-1} b_j$, $D_{h-1} c$ etc. Es ist nun ein springender Punkt der Methode — wie dies bereits in der in § 1 zitierten Arbeit genau auseinandergesetzt wurde¹⁶⁾ — daß, falls es sich um höhere Ableitungen, etwa um $D_{m+q} u$ mit $q \geq 3$ handelt, man zur fraglichen Abschätzung

¹⁴⁾ Aus (29), (30) folgen sofort Abschätzungen für alle

$$\int_V \int \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m.$$

¹⁵⁾ D_h das Zeichen für irgendeine Ableitung h -ter Ordnung.

¹⁶⁾ Loc. cit. ²⁾, insb. p. 222–226, §§ 5, 6.

von $\int \dots \int_V (D_{m+q} u)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m$ auch dann gelangt, wenn man nur

über eine Kenntnis der Schranken für

$$\int \dots \int_V (D_{h+m} a_{ik})^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m, \quad \int \dots \int_V (D_{m+h} b_j)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m$$

etc., mit $h \leq q-1$ verfügt. Da dieses Verfahren fast ohne Änderung auch dem jetzigen Falle angepaßt werden kann, überlassen wir in diesem Punkte den Beweis dem Leser. Ein Umstand darf dabei nicht vergessen werden. Da auf S_2 Ableitungen beliebiger Ordnung von $\bar{u}$ nur nach den Variablen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m-1}$ bekannt sind, so ergibt das oben erwähnte Verfahren unmittelbar Abschätzungen für ¹⁷⁾

$$\int \dots \int_V (D_{\eta_{m+q}} \bar{u})^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m \quad \text{bzw. für} \quad \int \dots \int_{S_3} (D_{\eta_{m+q}} \bar{u})^2 d\sigma_3,$$

wobei in $D_{\eta_{m+q}} \bar{u}$ höchstens eine Differentiation nach η_m vorkommen kann. Um die anderen Ableitungen $D_{\eta_{m+q}} \bar{u}$ abzuschätzen, kann Induktion nach q angewandt werden. Man nehme an, daß alle $\int \dots \int_V (D_{m+q-1} u)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m$ bereits abgeschätzt sind, wie auch

diejenigen $\int \dots \int_V (D_{\eta_{m+q}} \bar{u})^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m$, bei welchen die Differentiation nach η_m höchstens $(p-1)$ -mal vorkommt ($p-1 > 0$). Schreibt man das betreffende $D_{\eta_{m+q}} \bar{u}$ in der Form

$$D_{\eta_{m+q}} \bar{u} = \frac{\partial^2}{\partial \eta_m^2} \mathcal{A}_{m+q-2} \bar{u},$$

wobei $\mathcal{A}$ wieder ein Zeichen für eine Ableitung bedeutet — so hat man für $\mathcal{A}_{m+q-2} \bar{u}$ die Differentialgleichung

$$(31) \quad \sum_{j,s=1}^{m-1} a_{js} \frac{\partial^2}{\partial \eta_j \partial \eta_s} \mathcal{A}_{m+q-2} \bar{u} + 2 \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{m-1} a_{jk} \frac{\partial g_2}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial \eta_j \partial \eta_m} \mathcal{A}_{m+q-2} \bar{u} + \sum_{j,s=1}^m a_{js} \frac{\partial g_2}{\partial x_j} \frac{\partial g_2}{\partial x_s} \frac{\partial^2}{\partial \eta_m^2} \mathcal{A}_{m+q-2} \bar{u} = \Omega.$$

¹⁷⁾ Mit $D_{\eta_i} \bar{u}$ bezeichnen wir irgendeine Ableitung i -ter Ordnung von $\bar{u}$ nach den Variablen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$.

Hier läßt sich nach der zitierten Arbeit ¹⁸⁾ $\int \dots \int_V \Omega^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m$

durch die entsprechenden Daten und ihre Ableitungen bis zu $(m + \varrho - 1)$ -er Ordnung abschätzen. Da auch eine Abschätzung

für $\frac{\partial^2}{\partial \eta_j \partial \eta_s} A_{m+\varrho-2} \bar{u}$ mit $j \leq m-1, s \leq m$ bekannt ist, so schließt

man aus (31) auf das Vorhandensein einer Schranke für

$$D_{m+\varrho} \bar{u} = \frac{\partial^2}{\partial \eta_m^2} A_{m+\varrho-2} \bar{u}.$$

Als Endergebnis erhalten wir, falls

$$(32) \quad \begin{aligned} & |a_{ik}| \leq \gamma_1, |b_j| \leq \gamma_1, |D_1 a_{ik}| \leq \gamma_1, |c| \leq \gamma_1, \\ & |D_h a_{ik}| \leq \gamma_2, |D_h b_j| \leq \gamma_2, |D_h c| \leq \gamma_2; (h' \leq m+1), \\ & \sum \int \dots \int_V [(D_{h+m} a_{ik})^2 + (D_{h+m} b_j)^2 + (D_{h+m} c)^2] dx_1 dx_2 \dots dx_m \leq \gamma_2; \\ & (h \leq \varrho - 1), \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$(33) \quad \begin{aligned} & \sum_{h=0}^{m+\varrho} \int \dots \int_V (D_h u)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m \leq C(\gamma_1, \gamma_2) \left[\sum_{h=0}^{m+\varrho} \int \dots \int_{S_1} (D_h u)^2 d\sigma_1 \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{h=0 \\ \eta \neq \eta_m}}^{m+\varrho} \int \dots \int_{S_2} (D_h \bar{u})^2 d\sigma_2 + \sum_{h=0}^{m+\varrho-1} \int \dots \int_V (D_h f)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m \right]^{19)}. \end{aligned}$$

Für diejenigen Ableitungen $D_h \bar{u}$, bei denen die Differentiation nach η_m höchstens einmal vorkommt, gilt noch

$$(34) \quad \sum_{h=0}^{m+\varrho} \int \dots \int_{S_3} (D_h \bar{u})^2 d\sigma_3 \leq \text{rechte Seite in (33)}.$$

Einige Bemerkungen sind hier noch am Platze:

1. Ist h die Höhe des Stumpfes V , so gilt unter Voraussetzung von (32) genauer

¹⁸⁾ Loc. cit. ²⁾, insb. p. 224—226.

¹⁹⁾ Man könnte eine ähnliche Abschätzung auch für alle $\int \dots \int_{S_2} (D_h u)^2 d\sigma_2$ bekommen.

$$(35) \sum_{h=0}^{m+\varrho} \int_{\bar{V}} \int (D_h u)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m \leq h [\text{rechte Seite in (33)}]^{20}.$$

Für solche Integrale $\int_{\bar{V}} \int (D_h \bar{u})^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m$, bei welchen die Differentiation nach η_m höchstens einmal vorkommt, folgt dies sofort aus (34) durch Integration nach t . Wegen (31) ergibt sich durch Induktion (vgl. oben) dasselbe auch für die anderen Integrale.

II. Auf S_1 — das man sich der Einfachheit halber als das Ebenenstück $x_m = 0$ denken kann — sind nur die Ableitungen

der Form $\frac{\partial^r u}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_{m-1}^{r_{m-1}}}$ bzw. der Form $\frac{\partial^{r+1} u}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_{m-1}^{r_{m-1}} \partial x_m}$ vorgege-

ben. Alle anderen Ableitungen auf S_1 müssen erst aus (5) durch Differentiation berechnet und abgeschätzt werden. Die Voraussetzungen, die dabei zu machen sind, sowie den Beweis der entsprechenden Abschätzungen entnehme man wörtlich der unter ²⁾ zitierten Arbeit (insbesondere p. 226—229).

III. Damit die Abschätzung von $D_{m+\varrho} u$ gelingt, müssen nur die Ableitungen $D_h u$ mit $h \leq m + \varrho$ und die Ableitungen $D_h a_{ik}$, $D_h b_j$, $D_h c$, $D_h f$ für $h \leq m + \varrho - 2$ als stetig vorausgesetzt werden. Was die Ableitungen $D_{m+\varrho+1} u$ und $D_{m+\varrho-1} a_{ik}$, $D_{m+\varrho-1} b_j$, $D_{m+\varrho-1} c$, $D_{m+\varrho-1} f$ anbetrifft, so genügt es sie als *abteilungsweise stetig* anzunehmen ²¹⁾.

§ 4.

Kompatibilitätsbedingungen. Von nun an wollen wir annehmen, daß die Fläche S_1 mit $x_m = 0$ und die Fläche S_2 mit $x_1 = 0$ übereinstimmt. Dies soll so verstanden werden, daß nach einer eventuellen Koordinatentransformation die Ebenen $x_m = 0$, $x_1 = 0$ in zwei Flächen S'_1 , S'_2 übergehen (wobei zugleich auch die Differentialgleichung sich ändert) in der Weise, daß nunmehr die in den vorhergehenden Paragraphen näher bespro-

²⁰⁾ Diese stärkere Abschätzung wird beim Existenznachweis für quasilineare Differentialgleichungen benutzt [vgl. loc. cit. ²⁾, insb. p. 234, Bemerkung 3^o und p. 244, Formel (39)].

²¹⁾ Wird in § 8 benutzt [vgl. Fußnote ⁴⁵⁾].

chenen Voraussetzungen für das Bestehen der Abschätzungen in den neuen Koordinaten erfüllt sind. Offensichtlich bestehen dann die analogen Abschätzungen auch in den alten Koordinaten. Es möge noch betont werden, daß die Annahme, S_1 bzw. S_2 stimme mit $x_m = 0$ bzw. $x_1 = 0$ überein, nicht unbedingt notwendig ist; sie erleichtert aber sehr die folgenden Erwägungen.

Wir suchen eine Lösung, für welche

$$(36) \quad \begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 0) &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}), \\ \frac{\partial u}{\partial x_m}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 0) &= \psi(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}), \\ u(0, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m) &= \chi(x_2, x_3, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Es ist klar, daß, falls eine stetige Lösung unseres Problems gesucht wird, die Daten auf den Ebenen $x_m = 0$ und $x_1 = 0$ der folgenden Kompatibilitätsbedingung nullter Ordnung genügen müssen:

$$(37) \quad \varphi(0, x_2, \dots, x_{m-1}) = \chi(x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, 0).$$

Sollen auch die Ableitungen erster Ordnung stetig sein, so muß

$$(38) \quad \psi(0, x_2, \dots, x_{m-1}) = \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_m} \right)_{x_m=0}$$

bestehen. Wir bezeichnen (38) als Kompatibilitätsbedingung erster Ordnung. Aus (36) berechnet man alle Ableitungen der zweiten Ordnung auf S_1 bis auf $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} \right)_{x_m=0} = \psi^{(2)}$. Diese wird aus der Differentialgleichung (5) selbst berechnet. Die Stetigkeit der zweiten Ableitungen erfordert also

$$\psi^{(2)}(0, x_2, \dots, x_{m-1}) = \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_m^2} \right)_{x_m=0}.$$

Dies ist die Kompatibilitätsbedingung zweiter Ordnung. Indem wir (5) $(k-2)$ -mal nach x_m differenzieren, berechnen wir in derselben Weise $\psi^{(k)} = \left(\frac{\partial^k u}{\partial x_m^k} \right)_{x_m=0}$. Man folgert daraus die Kompatibilitätsbedingung k -ter Ordnung

$$(39) \quad \psi^{(k)}(0, x_2, \dots, x_{m-1}) = \left(\frac{\partial^k \chi}{\partial x_m^k} \right)_{x_m=0}.$$

§ 5.

Analytische Daten, linearer Fall. Zuerst soll der Beweis der Lösbarkeit unseres Problems im linearen Falle geliefert werden. Wir nehmen die Koeffizienten a_{ik} , b_j , c der Gleichung (5), sowie auch die Anfangsdaten φ , ψ , χ , f als „genügend analytisch“ an. D. h. genauer: die genannten Funktionen sollen sich in jedem Punkte ihres Definitionsgebietes in Potenzreihen entwickeln lassen mit einem Konvergenzradius, der größer als der Durchmesser dieses Gebietes ist. Mit anderen Worten, wir beschränken uns auf solche φ , ψ , χ , f , für welche der Konvergenzradius oberhalb einer festen, von der Wahl des Anfangspunktes unabhängigen Schranke liegt; eine Bedingung, die z. B. dann erfüllt ist, wenn diese Daten sich auf Polynome reduzieren. Überdies sollen die Anfangsdaten Kompatibilitätsbedingungen bis zur Ordnung k einschließlich genügen (vgl. § 4).

Nach dem Hilfssatze von SCHAUDER²²⁾ gibt es ein $\delta_1 > 0$, das von den Daten φ , ψ , χ und f ²³⁾ nicht abhängt — wohl aber von den übrigen Koeffizienten der Gleichung — so daß Folgendes statthat: in dem ganzen zylinderartigen Streifen V_1 von der Höhe δ_1 mit $x_m = 0$ als der unteren Basis gibt es eine analytische Lösung u' von (5) mit den Anfangsdaten $u' = \varphi$, $\frac{\partial u'}{\partial x_m} = \psi$ auf $x_m = 0$. Dabei kann u' um jeden Punkt innerhalb

V_1 in eine Potenzreihe entwickelt werden, deren Konvergenzradius wieder oberhalb einer von φ , ψ , f und χ ²⁴⁾ unabhängigen Schranke liegt. Sei Γ der Durchschnitt (vgl. § 3) von S_1 und S_2 . Wir betrachten die durch Γ hindurchgehende singularitätenfreie charakteristische Fläche G von (5), welche ins Innere von V_1 ragt. G teilt V_1 in zwei Gebiete, von welchen wir dasjenige W' ins Auge fassen, welches zwischen S_1 und G gelegen ist. Wir setzen $u = u'$ in W' , womit insbesondere u auf G selbst definiert wird. Es bleibt also ein Goursat'sches Problem zwischen G und S_2 zu lösen, indem wir dort eine Lösung u'' von (5) bestimmen wollen,

²²⁾ Vgl. loc. cit. 2), insb. p. 229–231.

²³⁾ Vgl. Formel (36). Es ist zweckmäßig im linearen Falle f öfters zu den Daten mitzurechnen.

²⁴⁾ Die Unabhängigkeit des Konvergenzradius von χ folgt daraus, daß χ in dem betreffenden Hilfssatze überhaupt nicht vorkommt.

die auf G mit u' und auf S_2 mit χ übereinstimmt. Wir setzen dann $u = u''$ zwischen G und S_2 , womit die Randwertaufgabe vollständig gelöst wird.

Die Fortsetzung dieses Paragraphen ist dem Nachweis gewidmet, daß es eine andere Zahl $\delta_2 > 0$ gibt, so daß in jeder Kugel vom Radius δ_2 , deren Mittelpunkt auf Γ gelegen ist, u'' sich in eine Potenzreihe entwickeln läßt. Dabei ist wieder δ_2 von φ , ψ , χ , f unabhängig. Um dies zu zeigen, nehmen wir eine Variablentransformation vor, derart, daß die Fläche G in $y_1 = 0$ und die Fläche S_2 in $y_2 = 0$ übergeht. Dabei können nach Hrn. HADAMARD die neuen Variablen so gewählt werden²⁵⁾, daß die transformierte Gleichung die Form

$$(40) \quad \frac{\partial^2 \bar{u}''}{\partial y_1 \partial y_2} = H + f_1(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

besitzt. H ist ein linearer Ausdruck in $\bar{u}''$ und den ersten und zweiten Ableitungen von $\bar{u}''$, wobei aber in H keine Derivation nach y_1 vorkommt.

Bei dem Goursat'schen Problem für (40) handelt es sich nun um die Konstruktion einer Lösung $\bar{u}''$, die sich auf den Ebenen $y_1 = 0$ bzw. $y_2 = 0$ auf gegebene Funktionen $v(y_2, y_3, \dots, y_m)$ bzw. $w(y_1, y_3, \dots, y_m)$ reduziert. Offensichtlich ist der neue Konvergenzradius r von v , w und f_1 , nach der ausgeführten Koordinatentransformation, wieder nur von den Koeffizienten von H abhängig. Aus diesem Grunde können wir unsere Aufgabe vereinfachen, indem wir $v = 0$, $w = 0$ annehmen. Dadurch wird höchstens f_1 geändert und die oben auferlegte Bedingung über seinen Konvergenzradius bleibt weiter bestehen. Wir suchen nun die Gleichung (40) durch eine nach Potenzen in y_1 fortschreitende Reihe²⁶⁾

$$(42) \quad \bar{u}'' = a_0 + a_1 y_1 + \dots + a_h y_1^h + \dots$$

zu lösen. Man rechnet sofort die einzelnen a_h aus und es bleibt noch der Konvergenznachweis für die Reihe (42) in einer Kugel von einem festen Radius ϱ . Zu diesem Zwecke nehme man für H eine Majorante der Form

²⁵⁾ Vgl. loc. cit. ³⁾, insb. p. 107.

$$(43) \quad M \cdot \frac{\bar{u}'' + \sum_{i=2}^m p_i + \sum_{i,k=2}^m p_{ik}}{1 - \frac{y_1}{\alpha} + y_2 + \dots + y_m},$$

wobei $p_i = \frac{\partial \bar{u}''}{\partial y_i}$, $p_{ik} = \frac{\partial^2 \bar{u}''}{\partial y_i \partial y_k}$ ist, und für f_1 eine der Form

$$(44) \quad 1 - \frac{y_1}{\alpha} + y_2 + \dots + y_m$$

Dann genügt es zu beweisen, daß die Gleichung ²⁶⁾

$$(45) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{MZ + M \left(\sum_{i=2}^m \frac{\partial Z}{\partial y_i} + \sum_{i,k=2}^m \frac{\partial^2 Z}{\partial y_i \partial y_k} \right) + K}{1 - \frac{y_1}{\alpha} + y_2 + \dots + y_m}$$

eine Lösung mit positiven Koeffizienten besitzt, deren Konvergenzradius von K unabhängig ist. Man setze

$$(46) \quad X = y_1 + \alpha \sum_{i=2}^m y_i$$

und suche eine Lösung Z von (45) der Gestalt $Z(X)$. Dann reduziert sich (45) auf die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(47) \quad \frac{d^2 Z}{dX^2} = \frac{MZ + M\alpha(m-1) \frac{dZ}{dX} + K}{L - \frac{X}{r}},$$

$$L = \alpha - N\alpha^2, \quad N = \frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Man wählt α derart, daß $L > 0$.

Die Gleichung (47) besitzt eine Lösung, die mitsamt ihrer ersten Derivierten für $X=0$ verschwindet. Diese Lösung ist re-

²⁶⁾ Für das Folgende ist es wesentlich, daß in der Differentialgleichung (45) die Zahl K vorkommt, welche die Majorante (44) für f_1 charakterisiert.

gulär für $|X| \leq Lr$, d. h. in einem von K unabhängigen Intervall ²⁷⁾. Man bekommt auf diese Weise die verlangte Majorante für (42) und daraus leitet man durch Übergang zu den alten Koordinaten die Existenz einer Zahl δ_2 mit den verlangten Eigenschaften ab.

Wir fassen das bisherige Ergebnis dieses Paragraphen zusammen: *es gibt eine Zahl $\delta > 0$ ²⁸⁾, die von den auf S_1 und S_2 gewählten Daten und von f unabhängig ist, derart daß für $0 \leq x_m \leq \delta$ die Lösung u der hier betrachteten gemischten Randwertaufgabe existiert.*

Die Ableitungen von u bis zur Ordnung k einschließlich sind stetig, denn die eventuellen Sprünge können nur auf der charakteristischen Fläche G vorhanden sein. Der stetige Übergang über G ist aber eine unmittelbare Folgerung aus den vorausgesetzten Kompatibilitätsbedingungen bis zur k -ten Ordnung einschließlich ²⁹⁾. Was die Ableitungen höherer Ordnung anbelangt, so sind sie zwischen S_1 und G und zwischen G und S_2 vorhanden und dort stetig. Sie können aber wohl auf G Diskontinuitäten besitzen.

§ 6.

Hilfssätze aus der Theorie der reellen Funktionen. Der Übergang zu nichtanalytischen Daten und Koeffizienten wird durch einige Hilfssätze aus der Theorie der reellen Funktionen ermöglicht, mit denen wir uns jetzt kurz befassen wollen.

Definitionen: a) Eine Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ nennt man totalstetig im Sinne des Hrn. TONELLI, wenn sie sich auf fast jeder achsenparallelen Geraden als totalstetig im gewöhnlichen Sinne erweist und ihre fast überall vorhandenen Ableitungen erster Ordnung im Definitionsbereiche integrierbar sind.

b) Sei $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ eine Funktion, die quadratisch integrierbare Ableitungen bis zu k -ter Ordnung einschließlich fast überall besitzt. Die Ableitungen von f bis zu $(k-1)$ -er Ordnung einschließlich sollen in V im Sinne des Hrn. TONELLI totalstetig sein. Die Klasse dieser Funktionen wird im Folgenden mit R_k bezeichnet.

²⁷⁾ Wohl aber ist sie von M , d. h. von der in der Majorante (43) von H vorkommenden Konstante abhängig.

²⁸⁾ $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

²⁹⁾ Vgl. loc. cit. ³⁾, p. 110.

Hilfssatz I. Sei f eine Funktion der Klasse R_k im m -dimensionalen Würfel Q : $-1 \leq x_i \leq 1$ ($i=1, 2, \dots, m$). Dann gibt es eine Folge von Polynomen p_j derart, daß

$$(48) \quad \lim_{j=\infty} \int_Q (D_h p_j - D_h f)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m = 0; \quad 0 \leq h \leq k.$$

Zum Beweise werde

$$\Phi_l(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

gesetzt, mit $y_i = x_i \left(1 - \frac{1}{l}\right)$. Die Funktionen Φ_l gehören wieder zu R_k ; sie sind nicht nur in Q , sondern sogar in dem etwas größeren Würfel $|x_i| \leq \frac{1}{1-1/l}$ definiert. Überdies hat man

$$\lim_{l=\infty} \int_Q (D_h \Phi_l - D_h f)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m = 0 \quad (0 \leq h \leq k).$$

Es genügt also den Hilfssatz nur für die Funktionen Φ_l zu beweisen. Sei

$$(49) \quad \Phi_{s,l}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{\int_{Q_s} \Phi_l d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m}{s^{-m}} \quad (s=1, 2, \dots).$$

Q_s ist der Würfel $|x_i - \xi_i| \leq \frac{1}{s}$. Die Ableitungen von $\Phi_{s,l}$ bis zur Ordnung k einschließlich, werden durch Differentiation unter dem Integralzeichen in (49) gewonnen, d. h. es ist

$$(50) \quad D_h \Phi_{s,l} = \frac{\int_{Q_s} D_h \Phi_l d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m}{s^{-m}} \quad (0 \leq h \leq k).$$

Man hat überdies

$$\lim_{h=\infty} \int_Q (D_h \Phi_{s,l} - D_h \Phi_l)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m = 0.$$

Nun sind die Funktionen $\Phi_{s,l}$ mitsamt ihren Ableitungen $D_h \Phi_{s,l}$ ($h \leq k$) stetig³⁰⁾. Nach einem bekannten Satze gibt es also eine Folge von Polynomen, die mitsamt ihren Ableitungen bis zur

³⁰⁾ Dies folgt sofort aus der Darstellung (50) für diese Ableitungen.

Ordnung k einschließlich gleichmäßig gegen ϕ_{s_i} und deren entsprechende Ableitungen konvergieren. Wir erhalten schließlich durch das Diagonalverfahren eine Polynomfolge, die (48) erfüllt.

Bemerkung. Es ist klar, daß unser Hilfssatz auch dann bestehen bleibt, wenn man Q durch das in dem vorhergehenden Paragraphen betrachtete Volumenstück V ersetzt.

Es ist nun notwendig das vorhergehende Resultat noch zu vervollständigen:

Hilfssatz II. Setzen wir voraus, daß f in V den Bedingungen des Hilfssatzes I genügt und in einem Pyramidenstumpf $W \subset V$, der mit V die gemeinsame untere Basis hat, stetige Ableitungen bis zur Ordnung r einschließlich besitzt. In diesem Falle konvergieren die Ableitungen der r ersten Ordnungen der Approximationspolynome des Hilfssatzes I in W gleichmäßig gegen die entsprechenden Ableitungen von f .

Der einfache Beweis wird dem Leser überlassen.

Hilfssatz III. Voraussetzungen: Die Funktionen f_s gehören alle in V derselben Klasse R_k mit $k \geq m+1$ an; überdies sei

$$\int_V (D_h f_s)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m \leq \text{Konst.} \quad (0 \leq h \leq k).$$

Behauptung. Man kann eine gleichmäßig konvergente Teilfolge f_{s_i} herausgreifen, deren Grenzfunktion f in V wieder der Klasse R_k angehört.

Beweis. Die Existenz einer gleichmäßig konvergenten Teilfolge f_{s_i} ergibt sich sofort aus den früheren Hilfssätzen (vgl. z. B. loc. cit. ²⁾ Hilfssatz I). Daß dann die Grenzfunktion f zu R_k gehört, folgt aus einer bekannten Tatsache ³¹⁾: Gewisse Linearkombinationen

$$\bar{f}_i = \sum_{q=1}^i c_{qi} f_q$$

haben die Eigenschaft, daß nicht nur $\bar{f}_i \rightarrow f$ gleichmäßig, sondern außerdem auch die Ableitungen $D_h \bar{f}_i$ im Mittel konvergieren

³¹⁾ Vgl. z. B. S. Banach et S. Saks, Sur la convergence forte dans les champs L^p , *Studia Math.* 2 (1930) p. 51–57. Es gibt auch andere Wege um den Hilfssatz III zu beweisen.

$$(51) \quad \lim_{i, i' \rightarrow \infty} \int_V \int (D_h \bar{f}_i - D_h \bar{f}_{i'})^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m = 0; \quad 0 \leq h \leq k.$$

Die Zugehörigkeit der Grenzfunktion f zur Klasse R_k ist aber mit Benutzung von (51) sehr leicht zu beweisen.

§ 7.

Fortsetzung von § 5; Erweiterung des Existenzgebietes. Nach Festsetzung der Zahl $\delta > 0$ (vgl. § 5) zerlegen wir das Volumenstück V durch die Ebenen $x_m = i\delta$ in endlich viele Streifen: $V_1, V_2, \dots, V_p$. V_i ($i = 1, 2, \dots, p$) ist also der zwischen den Ebenen $x_m = (i-1)\delta$ und $x_m = i\delta$ gelegene Teil von V . Ähnlich bezeichne B_i den Durchschnitt von V mit der Ebene $x_m = i\delta$ und Γ_i den Durchschnitt von S_2 mit $x_m = i\delta$. Wir wollen — unter Benutzung der Hilfssätze des § 6 — zeigen, daß die in § 5 in V_1 gefundene Lösung u sich auf das ganze V erweitern läßt, wobei die Randbedingungen erfüllt bleiben. Wir verlieren aber dabei im Allgemeinen den analytischen Charakter der Lösung³²⁾ — auch dann, wenn die Koeffizienten und die Daten analytisch waren. Um den Nachweis für die Möglichkeit dieser Erweiterung zu liefern, werden in jedem V_i ($2 \leq i \leq p$) entsprechende Lösungen u_{is} ($2 \leq i \leq p$; $s = 1, 2, \dots$) konstruiert; benachbarte $u_{(i-1)s}, u_{is}$ bekommen auf B_i übereinstimmende Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung und zugleich werden auch u_{is} Kompatibilitätsbedingungen entsprechend hoher Ordnung genügen³³⁾. Dies wird jetzt näher ausgeführt.

Wir setzen

$$(52) \quad \begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, \delta) &= q_2(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}), \\ \frac{\partial u}{\partial x_m}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, \delta) &= \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) \end{aligned} \quad (34)$$

und bemerken, daß man diese Funktionen nicht ohne Weiteres als Anfangswerte auf B_1 annehmen darf. Denn q_2 bzw. ψ_2 sind

³²⁾ Eigentlich ist auch in V_1 die Lösung u nicht analytisch. Doch läßt sich V_1 in Teilgebiete zerlegen, in welchen u analytisch wird. Für V_i mit $i \geq 2$ läßt sich nicht einmal dieses behaupten.

³³⁾ Es besteht ein gewisser Unterschied in der Konstruktion der Lösungen in V_2 und der Lösungen in V_i mit $i \geq 3$.

³⁴⁾ Dementsprechend setze man auf S_1 $\varphi = \varphi_1, \psi = \psi_1$ [vgl. Formel (36)].

mitsamt ihren Ableitungen nur bis zu k bzw. $(k-1)$ -er Ordnung einschließlich stetig, während die Beweismethode des § 5 analytische Daten erfordert. Dennoch besitzen φ_2 und ψ_2 zwei Eigenschaften, die uns im folgenden vom großen Nutzen sein werden: α) φ_2, ψ_2 haben Ableitungen beliebig hoher Ordnung in allen Punkten, die nicht auf dem Durchschnitt ω_1 von B_1 und G liegen (vgl. das Ende des § 5); β) auf Γ_1 erfüllen φ_2, ψ_2 zusammen mit den alten Randwerten χ Kompatibilitätsbedingungen beliebig hoher Ordnung.

Wir approximieren nun φ_2 bzw. ψ_2 durch Polynome φ_{2s} bzw. ψ_{2s} derart, daß

- (53a) die Ableitungen von φ_{2s} bzw. ψ_{2s} bis zu k bzw. $(k-1)$ -er Ordnung einschließlich gegen diejenigen von φ_2 bzw. ψ_2 auf dem ganzen B_1 gleichmäßig konvergieren,
- (53b) in der Umgebung von Γ_1 konvergieren die Ableitungen von φ_{2s}, ψ_{2s} sogar die der Ordnungen $\leq k+m(p-2)$ gleichmäßig gegen diejenigen von φ_2, ψ_2 ³⁵⁾.

Nun müssen auf Γ_1 auch die Kompatibilitätsbedingungen approximiert werden. Dies wird etwa in folgender Weise bewerkstelligt. Wir berechnen formell aus den Anfangswerten φ_{2s}, ψ_{2s} ($s=1, 2, \dots$) und der genügend oft differenzierten Differentialgleichung (5) die Ableitungen der ihnen entsprechenden Lösungen u_{2s} auf B_1 und fassen insbesondere ihre Werte auf Γ_1 ins Auge. Wegen (53b) konvergieren die Ableitungen

$$(54) \quad \frac{\partial^h u_{2s}}{\partial x_m^h} \text{ auf } \Gamma_1 \text{ gleichmäßig gegen } \left(\frac{\partial^h \chi}{\partial x_m^h} \right)_{x_m=\delta} \\ [0 \leq h \leq k+m(p-2)].$$

Wir approximieren also auf S_2 — von der Ebene $x_m=\delta$ aufwärts — die Randwerte χ durch Polynome χ_s , derart daß

$$(55) \quad \left(\frac{\partial^h \chi_s}{\partial x_m^h} \right)_{\Gamma_1} = \left(\frac{\partial^h u_{2s}}{\partial x_m^h} \right)_{\Gamma_1}, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} D_h \chi_s = D_h \chi \text{ auf } S_2 \\ \text{für } 0 \leq h \leq k+m(p-2).$$

³⁵⁾ Die Möglichkeit einer solchen Approximation folgt aus den eben erwähnten Eigenschaften α), β). Wir erinnern: p ist die Anzahl der Streifen, in welche V zerlegt wird.

Nun sind nach § 5 in V_2 Lösungen u_{2s} von (5) vorhanden, die auf B_1 die Anfangswerte φ_{2s} , ψ_{2s} und auf S_2 von $x_m = \delta$ aufwärts die Randwerte χ_s annehmen. Da jetzt auf Γ_1 für u_{2s} Kompatibilitätsbedingungen bis zur Ordnung $k + m(p - 2)$ einschließlich erfüllt sind [vgl. (54), (55)], so besitzt jedes u_{2s} in V_2 stetige Ableitungen bis zur Ordnung $k + m(p - 2)$ einschließlich. Die Situation hat sich also wesentlich gebessert. Seien

$$\begin{aligned} u_{2s}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 2\delta) &= \varphi_{3s}, \\ \frac{\partial u_{2s}}{\partial x_m}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 2\delta) &= \psi_{3s} \end{aligned}$$

die Anfangswerte auf B_2 . Sie besitzen dort stetige Ableitungen bis zur Ordnung $k + m(p - 2)$ bzw. $k + m(p - 2) - 1$ einschließlich.

Es können also bei festem s Polynome

$$\varphi_{3sr}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}), \quad \psi_{3sr}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$$

derart gebildet werden, daß gleichmäßig auf B_2

$$(56) \quad \lim_{r=\infty} D_h \varphi_{3sr} = D_h \varphi_{3s}, \quad \lim_{r=\infty} D_{h-1} \psi_{3sr} = D_{h-1} \psi_{3s}, \\ [0 \leq h \leq k + m(p - 2)]^{36)}$$

ist. Wir berechnen wieder auf B_2 die Ableitungen $\frac{\partial^h u_{3sr}}{\partial x_m^h}$ für

$0 \leq h \leq k + m(p - 2)$. Auf Γ_2 genügen φ_{3s} , ψ_{3s} zusammen mit χ_s Kompatibilitätsbedingungen der Ordnungen $\leq k + m(p - 2)$. Somit lassen sich die Randwerte χ_s auf S_2 von der Ebene $x_m = 2\delta$ aufwärts durch Polynome χ_{sr} gleichmäßig approximieren:

$$(57) \quad \left(\frac{\partial^h \chi_{sr}}{\partial x_m^h} \right)_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial^h u_{3sr}}{\partial x_m^h} \right)_{\Gamma_2}, \quad \lim_{r=\infty} D_h \chi_{sr} = D_h \chi_s \text{ auf } S_2 \\ [0 \leq h \leq k + m(p - 2)].$$

Die den Daten φ_{3sr} , ψ_{3sr} , χ_{sr} entsprechenden Lösungen u_{3sr} existieren also im ganzen V_3 und haben dort wegen (57) stetige Ableitungen der Ordnung $k + m(p - 2)$. Wegen (56), (57) und (33) gilt für sie also die gemeinsame Abschätzung

³⁶⁾ In V_i ($i \geq 3$) müssen wir also zu Funktionen mit wenigstens drei Indices übergehen.

$$(58) \quad \int_{V_3} \int (D_h u_{3sr})^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m \leq \text{Konst.}$$

$$[0 \leq h \leq k + m(p-2)].$$

Aus (58) kann bekanntlich für eine gewisse Teilfolge u_{3sr_i} die Existenz einer Grenzfunktion u_{3s} , die (5) in V_3 löst, und die gleichmäßige Konvergenz

$$\lim_{r_i \rightarrow \infty} D_h u_{3sr_i} = D_h u_{3s} \text{ in } V_3 \quad [0 \leq h \leq k + m(p-3)]$$

gefolgert werden³⁷⁾.

So fortfahrend bilden wir in V_i ($2 \leq i \leq p$) eine Lösung u_{is} von (5), die dort stetige Ableitungen der Ordnung $k + m(p-i)$ besitzt. Sie nimmt auf S_2 die Randwerte χ_s an und erfüllt für $x_m = (i-1)\delta$ die Bedingung

$$D_h u_{(i-1)s} = D_h u_{is} \text{ auf } B_{i-1} \quad [0 \leq h \leq k + m(p-i)].$$

Für festes s lassen sich also die u_{is} ($i \geq 2$) zusammenheften; man bekommt in $V_2 + V_3 + \dots + V_p$ eine Lösung u_s von (5) mit den Randwerten χ_s auf S_2 und den Anfangswerten φ_{2s}, ψ_{2s} auf B_1 . u_s ist in $V_2 + V_3 + \dots + V_p$ k -mal stetig differenzierbar. Zugleich hat man mit Rücksicht auf (53), (57) und (33)³⁸⁾

$$(59) \quad \int_{V_2 + V_3 + \dots + V_p} \int (D_h u_s)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m \leq \text{Konst.} \quad (0 \leq h \leq k).$$

Nach § 5 Hilfssatz III folgt aus (59) die Existenz einer Grenzfunktion u , die in $V_2 + V_3 + \dots + V_p$ der Klasse R_k angehört und dort, falls $k \geq m + 2$ ³⁹⁾, offensichtlich der Gleichung (5) genügt. Zusammen mit der in § 5 gefundenen Lösung in V_1 , bildet sie wegen (52), (53) die gesuchte Lösung unserer Randwertaufgabe in V . Sie ist in V der Klasse R_k und erfüllt auf Γ Kompatibilitätsbedingungen bis zu k -ter Ordnung einschließlich.

³⁷⁾ Vgl. z. B. loc. cit. ²⁾, Hilfssatz I.

³⁸⁾ Den Formeln (57), (58) für u_{3sr} entsprechen ähnliche für die weiteren u_{isr} ($i > 3$).

³⁹⁾ Dann sind nämlich die zweiten Ableitungen von u in V stetig. Später (§ 10) werden wir sogar $k \geq 2m + 2$ annehmen. Offensichtlich kann man weniger einschränkende Voraussetzungen machen; wir interessieren uns aber nicht für solche Untersuchungen, weil ihnen vorläufig keine prinzipielle Bedeutung zukommt.

§ 8.

Lineare Differentialgleichungen mit nichtanalytischen Koeffizienten und Daten. Sei V der Pyramidenstumpf aus § 2. Die Koeffizienten von (5) und f sollen nunmehr nur der Klasse R_{k-1} angehören mit $k \geq m + 2$ ³⁹⁾. Wir betrachten weiter einen Pyramidenstumpf $W \subset V$, der mit V die gemeinsame Basis S_1 und Seitenflächen besitzt, ausgenommen diejenige Seitenfläche, welche durch die Schnittmannigfaltigkeit Γ hindurchgeht ⁴⁰⁾. Wir setzen voraus, daß in W die Koeffizienten und f stetige Ableitungen von genügend hoher Ordnung k' besitzen, etwa $k' = k + m$ ⁴¹⁾. Was die Anfangs- und Randwerte anbetrifft, nehmen wir diese vorsichtshalber etwa auch als $k' = k + m$ -mal differenzierbar an. Sie sollen Kompatibilitätsbedingungen bis zu k -ter Ordnung einschließlich erfüllen.

Unter diesen Bedingungen, gibt es eine Lösung u von (5) der hier betrachteten gemischten Randwertaufgabe, die in V in die Klasse R_k fällt. In W gehört sie sogar der Klasse R_{k+m} an, besitzt also dort stetige Ableitungen k -ter Ordnung ⁴²⁾. u erfüllt die Kompatibilitätsbedingungen bis zu k -ter Ordnung einschließlich. Endlich bestehen für u wieder die Abschätzungen (33), (35), falls (32) ⁴³⁾ erfüllt ist.

Zum Beweise genügt es nach den Hilfssätzen I, II des § 6 die Koeffizienten a_{ik} , b_j , c und f durch Polynome derart zu approximieren, daß diese mitsamt ihren Ableitungen bis zu $(k-1)$ -er Ordnung einschließlich gegen die entsprechenden Funktionen und ihre Ableitungen a) in V im Mittel, und b) in W sogar gleichmäßig bis zu Ableitungen entsprechender Ordnung konvergieren. Gleichzeitig werden Anfangswerte und Randwerte approximiert

⁴⁰⁾ Alle Randflächen von W sollen raumartig sein.

⁴¹⁾ Wären die Koeffizienten auch in W nur der Klasse R_{k-1} , so könnten wir nicht die Existenz der k -ten Ableitungen $D_k u$ für $x_m = 0$ nachweisen. Die Kompatibilitätsbedingungen k -ter Ordnung würden dann ihren Sinn verlieren. Darum fordern wir von den Koeffizienten und Daten in W eine höhere Regularität.

⁴²⁾ In $V - W$ brauchen gewisse Ableitungen $D_h u$ nicht zu existieren. Für einen Punkt P von Γ verstehen wir also unter $(D_h u)_P$ den Grenzwert $\lim_{P_n \rightarrow P} (D_h u)_{P_n}$, falls P_n im Innern von W oder auf $S_1 - \Gamma$ liegen.

⁴³⁾ Mit $\varphi = k - m$.

unter Beibehaltung der Kompatibilitätsbedingungen bis zu k -ter Ordnung⁴⁴⁾. Die Approximationsgleichungen

$$\sum_{i,k=1}^m a_{ik}^s \frac{\partial^2 u^s}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j=1}^m b_j^s \frac{\partial u^s}{\partial x_j} + c^s u^s = f^s$$

können nun nach § 7 gelöst werden. Es ist nach §§ 2, 3

$$\int_{\dots} \int_V (D_h u^s)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m \leq \text{Konst.} \quad (0 \leq h \leq k)^{45)},$$

woraus nach § 6 Hilfssatz III die gleichmäßige Konvergenz einer entsprechenden Teilfolge u^s gegen eine Funktion u aus R_k folgt⁴⁶⁾. u löst die Randwertaufgabe für (5). Daß u in W sogar zu der höheren Klasse R_{k+m} gehört, folgt bereits aus den früheren Ergebnissen⁴⁷⁾.

§ 9.

Quasilineare Differentialgleichungen. Einführung einer Funktionaloperation. Wir beschränken uns auf folgendes Hauptproblem: eine Lösung u der quasilinearen Differentialgleichung

$$(64) \quad \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \left(x_1, x_2, \dots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f \left(x_1, x_2, \dots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m} \right)$$

zu finden, welche auf $x_m = 0$ die gegebenen Anfangswerte und auf $x_1 = 0$ die gegebenen Randwerte annimmt. Alle anderen hier behandelten Randwertaufgaben lassen sich auf diesen Fall zurückführen⁴⁸⁾. Sei $v(x_1, x_2, \dots, x_m)$ eine genügend oft differen-

⁴⁴⁾ Dies wird wie in § 7 durchgeführt.

⁴⁵⁾ In $V_2 + V_3 + \dots + V_p$ wurden diese Abschätzungen bereits in Formel (59) gewonnen. Indem man die Bemerkung III aus § 3 benutzt, überzeugt man sich, daß die Abschätzungen auch in V_1 gelten, denn die u^s besitzen dort (vgl. das Ende des § 5) stetige Ableitungen k -ter und abteilungsweise stetige Ableitungen $(k+1)$ -er Ordnung.

⁴⁶⁾ Durch einen Grenzübergang bestätigt man, daß für u die Abschätzungen (33), (35) unter Voraussetzung von (32) weiter bestehen, obwohl jetzt u nur zur Klasse R_k gehört.

⁴⁷⁾ Vgl. loc. cit. ²⁾, Kap. II.

⁴⁸⁾ Vgl. § 3, Anfang.

zierbare, vorläufig aber nicht näher bestimmte Funktion. Betrachten wir die lineare Hilfsgleichung

$$(65) \quad \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \left(x_1, x_2, \dots, x_m, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_m} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_k} - f \left(x_1, x_2, \dots, x_m, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_m} \right);$$

durch (65) ist eine Funktionaloperation⁴⁹⁾

$$(66) \quad w = T(v)$$

definiert. Unser Problem reduziert sich also darauf, die Existenz eines Fixpunktes von (66) in einer passend gewählten Funktionenklasse nachzuweisen, d. i. eines Punktes u , für welchen

$$u = T(u).$$

§ 10.

Der Existenzbeweis im quasilinearen Fall. Sei V das Volumenstück aus § 2. Wir setzen voraus, daß die Cauchy'schen Anfangswerte

$$(67 \text{ a}) \quad \begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 0) &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) \\ \frac{\partial u}{\partial x_m}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 0) &= \psi(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) \end{aligned}$$

auf $x_m = 0$ und die Randwerte

$$(67 \text{ b}) \quad u(0, x_2, \dots, x_m) = \chi(x_2, \dots, x_m)$$

auf $x_1 = 0$, sowie die Koeffizienten a_{ik} und f genügend oft differenzierbar sind. Überdies sollen die Kompatibilitätsbedingungen bis zu k -ter Ordnung einschließlich erfüllt sein. Diese definiert man ähnlich wie im linearen Fall.

Sei W ein Teilpyramidenstumpf: $W \subset V$, dessen Lage in bezug auf V bereits in § 8 besprochen wurde. Alle Randflächen von W mögen raumartig angenommen werden. Nach dem Ergebnis von SCHAUDER⁵⁰⁾ gibt es in W eine Lösung u von (64) mit den Anfangswerten φ, ψ auf $x_m = 0$. Wegen der vorausgesetzten genügend hohen Differenzierbarkeit der Koeffizienten und Daten

⁴⁹⁾ Unter w verstehen wir eine Lösung von (65) mit den Daten (36).

⁵⁰⁾ Vgl. loc. cit. ²⁾, Kap. III.

besitzt diese Lösung in W Ableitungen bis zur $(k+m)$ -ten (wir setzen $k \geq 2m+2$ voraus) Ordnung einschließlich. Wir gehen von dieser Lösung u in W aus und werden diese auf das ganze V derart erweitern, daß nunmehr auch (67b) erfüllt ist. Zur Konkurrenz lassen wir nun folgende Funktionen v zu:

1) v ist in V definiert und stimmt in W mit der dort bereits vorhandenen Lösung u überein,

2) v nimmt auf $x_1 = 0$ die Randwerte χ an,

3) v gehört in V der Klasse R_k an, mit $k \geq 2m+2$ und es ist

$$(68) \quad \int_{\dots} \int_V (D_h v)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m \leq \mu; \quad 0 \leq h \leq k.$$

Die von den Funktionen v gebildete Klasse bezeichnen wir mit (K) . Sie ist offensichtlich nicht leer. Löst man die Hilfsgleichung (65) für eine Funktion v aus (K) , so gehört die Lösung w wieder zu (K) . In der Tat, man sieht gleich, daß sie in W mit u übereinstimmt wegen der *Eindeutigkeit* des Cauchy'schen Problems in W . Wir zeigen jetzt, daß w wieder in V zur Klasse R_k gehört. Zu diesem Zwecke schätzen wir — nach Einsetzung von v in (65) — die Koeffizienten und ihre Ableitungen ab. Die totalen Ableitungen $J_h a_{ik}$, $J_h f$ h -ter Ordnung haben die Form

$$(69) \quad J_h a_{ik} = \sum \phi_p \cdot D_p a_{ik}, \quad J_h f = \sum \phi_p \cdot D_p f.$$

In (69) bezeichnet ϕ_p ein Produkt verschiedener Ableitungen $D_p v$, wobei in jedem ϕ_p höchstens eine Ableitung der Ordnung $> k-m$ ⁶¹⁾ vorkommen kann. Daraus folgt [vgl. (33), (68)]

$$(70) \quad \int_{\dots} \int_V (J_h a_{ik})^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m \leq \nu(\mu),$$

$$\int_{\dots} \int_V (J_h f)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m \leq \nu(\mu).$$

Indem wir jetzt die Abschätzungen (35) benutzen⁶²⁾, schließen wir aus (70)

$$\int_{\dots} \int_V (D_h w)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m \leq h \nu_1(\mu);$$

⁶¹⁾ Vgl. loc. cit. ²⁾, p. 243.

⁶²⁾ Die schwächeren Abschätzungen (33) würden nicht ausreichen [vgl. Fußnote ²⁰⁾].

h ist die Höhe von V . Für genügend kleines h bekommen wir also wieder

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} (D_h w)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m \leq \mu.$$

Die Funktionenklasse (K) bildet eine konvexe Menge bei entsprechender Normierung. Genau so wie beim Cauchy'schen Problem verfahren, erhalten wir für ein gewisses u

$$u = T(u), \quad \text{w. z. b. w.}$$

(Reçu par la Rédaction le 10. 7. 1936).

Gemischte Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus

von

J. SCHAUDER (Lwów).

Es soll hier ein Verfahren angegeben werden, welches bei allgemeinen nichtlinearen hyperbolischen Differentialgleichungen der Form

$$(1) \quad F(x_1, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}) = 0$$

diejenigen gemischten Randwertprobleme zu erledigen erlaubt, die in der vorhergehenden Arbeit für den Fall der quasilinearen Differentialgleichung dieser Art gelöst wurden¹⁾.

Um die später zu entwickelnden Rechnungen einfacher zu gestalten, nehmen wir an, daß die zeitartig orientierte Fläche S_2 mit $x_m = 0$, und die raumartige Fläche S_1 mit $x_1 = 0$ übereinstimmt²⁾. Wie weiter anhangsweise gezeigt wird, lassen sich — wenigstens für lineare Differentialgleichungen — diese Probleme auch dann lösen, wenn S_2 charakteristisch ist.

§ 1.

Wir wollen die Anfangswerte von $u, p_1, p_2, \dots, p_m$ auf $x_1 = 0$ als gleich Null annehmen, was man bekanntlich immer durch eine Variablentransformation erreichen kann. Im Falle des Cauchy'schen Problems würden wir — nach einer früheren Bemerkung von

¹⁾ M. Krzyżański und J. Schauder, Quasilineare Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus. Gemischte Randwertaufgaben, *Studia Math.* 6 (1936) p. 162—189. Diese Arbeit wird im Folgenden mit G.R. bezeichnet.

²⁾ In G.R. wurde die Ebene $x_m = 0$ als die raumartige, die Ebene $x_1 = 0$ als die zeitartige Fläche angenommen.

mir³⁾ — mit der Aufstellung der Differentialgleichungen für $p_1, p_2, \dots, p_m$ beginnen. Bei dem vorliegenden allgemeineren Problem können wir aber in dieser Weise nicht vorgehen, weil auf S_2 nicht einmal die Randwerte von p_m vorgegeben sind. Aus diesem Grunde erscheint es zweckmäßig die Differentialgleichung nicht in der unentwickelten Form (1) zu lassen, sondern sie nach r_{mh} aufzulösen, d. h. nach derjenigen reinen zweiten Ableitung, die in der zur zeitartigen Fläche S_2 normalen Richtung genommen wird⁴⁾. Dies ist möglich, weil S_2 , als zeitartig, nicht charakteristisch ist. Es ist nicht nötig vorauszusetzen,

daß die Ableitungen $r_{mh} = \frac{\partial p_m}{\partial x_h}$ ($h=1, 2, \dots, m-1$) in F vorhanden sind. Wir schreiben also statt (1)

$$(2) \quad \psi + r_{mm} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r_{mh}} = 0 \quad (h=1, 2, \dots, m).$$

Differenzieren wir (2) nach $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$, so erhalten wir für $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$ das quasilineare Integro-Differentialsystem

$$(3) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^{x_1} p_1 dx_1 + \sum_{h=1}^{m-1} \frac{\partial \Phi}{\partial p_h} \frac{\partial p_h}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_m} \frac{\partial p_j}{\partial x_m} + \sum \frac{\partial \Phi}{\partial r_{ik}} \frac{\partial^2 p_j}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 p_j}{\partial x_m^2} = 0$$

($j=1, 2, \dots, m-1$; $r_{ik} \neq r_{mh}$).

In den Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}, \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial r_{ik}}$ erscheinen als Argumente

die Größen

$$(4) \quad x_1, x_2, \dots, x_m, \int_0^{x_1} p_1 dx_1, p_1, \dots, p_{m-1}, \frac{\partial}{\partial x_m} \int_0^{x_1} p_1 dx_1, \frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial p_i}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial p_{m-1}}{\partial x_{m-1}}, \frac{\partial p_1}{\partial x_m}, \dots, \frac{\partial p_{m-1}}{\partial x_m}.$$

³⁾ J. Schauder, Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen, Fund. Math. 24 (1935) p. 213—246, insb. p. 246, Fußnote ⁴⁷⁾.

⁴⁾ Und nicht, wie man vermuten würde, in der zur raumartigen Fläche normalen Richtung.

Die gemischte Randwertaufgabe läßt sich nun für (3) leicht lösen, da das Auftreten der Integrale nicht störend wirkt⁵⁾. Dabei genügen die auf $x_1 = 0$ berechneten Ableitungen von $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$ der Beziehung⁶⁾

$$(5) \quad \phi = 0 \quad (x_1 = 0).$$

Es soll jetzt gezeigt werden, daß die Relationen

$$(6) \quad A_{js} = \frac{\partial p_j}{\partial x_s} - \frac{\partial p_s}{\partial x_j} = 0 \quad (j, s = 1, 2, \dots, m-1)$$

bestehen. Wir bemerken, daß es dazu genügt, für die A_{js} ein homogenes lineares Differentialsystem aufzustellen. Aus der Eindeutigkeit dieses Systems und der Tatsache, daß die Anfangswerte und die Randwerte der A_{js} gleich Null sind, schließt man, daß die A_{js} identisch verschwinden. Diese Bemerkung hat übrigens, wenn es sich um das Cauchy'sche Problem allein handelt, schon Herr PETROWSKY geäußert. Für das hier in Betracht kommende, umfassendere Randwertproblem liegen die Verhältnisse komplizierter und erfordern neue Kunstgriffe⁷⁾.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein. Für die Ausdrücke (4) schreiben wir nacheinander:

$$(7) \quad \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_{m^2+m+1}$$

und für

$$(8) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial x_1}{\partial x_j}, \frac{\partial x_2}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial x_m}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^{x_j} p_1 dx_1, \frac{\partial p_1}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial p_{m-1}}{\partial x_j}, \\ & \frac{\partial p_j}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 p_j}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 p_j}{\partial x_i \partial x_k}, \dots, \frac{\partial^2 p_j}{\partial x_{m-1}^2}, \frac{\partial^2 p_j}{\partial x_1 \partial x_m}, \dots, \frac{\partial^2 p_j}{\partial x_{m-1} \partial x_m} \end{aligned}$$

ebenso

$$(9) \quad \xi_1^j, \xi_2^j, \dots, \xi_m^j, \xi_{m+1}^j, \dots, \xi_{m^2+m+1}^j.$$

⁵⁾ Vgl. loc. cit. ³⁾, Fußnote ⁴⁷⁾. Offensichtlich müssen dabei für S_1 und S_2 diejenigen Bedingungen erfüllt sein, die in G. R. (§§ 1, 2) formuliert wurden.

⁶⁾ Diese Beziehung wird am Ende des Beweises benutzt.

⁷⁾ Die Charakteristikentheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung liefert das erste Beispiel dieser Schlußweise. Dort handelt es sich um eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung. Aus der Tatsache, daß die Lösung dieser Gleichung an einer Stelle verschwindet, folgert man, daß sie identisch verschwindet.

Diese auf den ersten Blick befremdende Bezeichnung, bei welcher zwischen den einzelnen Variablen nicht unterschieden wird, erweist sich als sehr nützlich. Sie trägt auch zum Gelingen des Beweises bei.

Das System (3) lautet jetzt in der neuen Schreibweise

$$(10) \quad \sum_{l=1}^{m^2+m+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_l} \xi_l^j + \frac{\partial^2 p_j}{\partial x_m^2} = 0.$$

Wir differenzieren (10) nach x_s ($s < m$) und erhalten mit Beachtung von (4), (7), (8), (9)

$$(11) \quad \sum_{l, \varrho=1}^{m^2+m+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_l \partial \xi_\varrho} \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_s} \xi_l^j + \sum_{l=1}^{m^2+m+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l^j}{\partial x_s} + \frac{\partial^2 p_j}{\partial x_m^2} = 0$$

($j, s = 1, 2, \dots, m-1$).

Durch Vertauschung der Indizes und Subtraktion folgt

$$(12) \quad \sum_{l, \varrho=1}^{m^2+m+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_l \partial \xi_\varrho} \left(\frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_s} \xi_l^j - \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \xi_\varrho^s \right) + \sum_{l=1}^{m^2+m+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_l} \left(\frac{\partial \xi_l^j}{\partial x_s} - \frac{\partial \xi_l^s}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial^2 p_j}{\partial x_m^2} = 0.$$

Nun ist

$$(13) \quad \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_s} \xi_l^j - \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \xi_\varrho^s = \left(\frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_s} - \xi_\varrho^s \right) \xi_l^j + \left(\xi_l^j - \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \right) \xi_\varrho^s.$$

Nehmen wir wieder die Formeln (4), (7), (8), (9) zur Hilfe, so ergibt sich zuerst leicht

$$(14) \quad \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_s} - \xi_\varrho^s = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \dots, 2m).$$

Für $\varrho = 2m+1$ erhalten wir aber

$$\frac{\partial \xi_{2m+1}}{\partial x_s} - \xi_{2m+1}^s = \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_m} \int_0^{x_1} p_1 dx_1 - \frac{\partial p_s}{\partial x_m}$$

und daraus, wegen

$$\frac{\partial p_s}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m} \int_0^{x_1} \frac{\partial p_s}{\partial x_1} dx_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \int_0^{x_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_s} dx_1 - \frac{\partial p_s}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\int_0^{x_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_s} - \frac{\partial p_s}{\partial x_1} \right) dx_1 \right],$$

d. h.

$$(15) \quad \frac{\partial \xi_{2m+1}^s}{\partial x_s} - \xi_{2m+1}^s = \frac{\partial}{\partial x_m} \int_0^{x_1} A_{1s} dx_1.$$

Weiter ist

$$\frac{\partial \xi_\varrho^s}{\partial x_s} - \xi_\varrho^s = \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_s \partial x_k} - \frac{\partial^2 p_s}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p_i}{\partial x_s} - \frac{\partial p_s}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial A_{is}}{\partial x_k}$$

für $\varrho > 2m + 1$ und

$$\frac{\partial \xi_l^j}{\partial x_s} - \frac{\partial \xi_l^s}{\partial x_j} = 0 \quad (1 \leq l \leq 2m),$$

$$(16) \quad \frac{\partial \xi_{2m+1}^j}{\partial x_s} - \frac{\partial \xi_{2m+1}^s}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_s} - \frac{\partial p_s}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial A_{js}}{\partial x_m},$$

$$\frac{\partial \xi_l^j}{\partial x_s} - \frac{\partial \xi_l^s}{\partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_s} - \frac{\partial p_s}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 A_{js}}{\partial x_i \partial x_k} \quad (l > 2m + 1).$$

Indem wir für $\frac{\partial \xi_\varrho^s}{\partial x_s} - \xi_\varrho^s$, $\frac{\partial \xi_l^j}{\partial x_s} - \frac{\partial \xi_l^s}{\partial x_j}$ und $\frac{\partial \xi_l^j}{\partial x_j} - \xi_l^j$ die sich aus

den Formeln (14), (15), (16) ergebenden Ausdrücke unter Beachtung von (13) in (12) eintragen, überzeugen wir uns, daß (12) in ein hyperbolisches lineares und homogenes System für A_{js} übergeht, wobei noch Integrale von der Form

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \int_0^{x_1} A_{1s} dx_1$$

linear auftreten. Es ist aber leicht den Eindeutigkeitsbeweis für lineare Differentialgleichungen auf derartige Systeme zu übertragen⁸⁾. Somit haben wir die Beziehungen (6) bewiesen.

Es bleibt also noch zu zeigen, daß $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$ zusammen mit einer noch zu findenden Funktion p_m die Ableitungen

⁸⁾ Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus den Abschätzungen in G. R.

einer Funktion u sind, die (2) bei den vorgegebenen Anfangs- und Randbedingungen erfüllt. Zu diesem Zwecke werde

$$p_m = \int_0^{x_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_m} dx_1$$

gesetzt. Dann gelten auch die Gleichungen

$$(17) \quad \frac{\partial p_m}{\partial x_j} - \frac{\partial p_j}{\partial x_m} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m-1).$$

In der Tat hat man — nach der soeben bewiesenen Identität

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j}{\partial x_1} \quad (j < m) —$$

$$\frac{\partial p_j}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m} \int_0^{x_1} \frac{\partial p_j}{\partial x_1} dx_1 = \frac{\partial}{\partial x_m} \int_0^{x_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_j} dx_1 = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^{x_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_m} dx_1 = \frac{\partial p_m}{\partial x_j}.$$

Somit sind $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}, p_m$, wegen (6), (17) Ableitungen einer Funktion u , nämlich, wie man sich leicht überzeugt, von

$$(18) \quad u = \int_0^{x_1} p_1 dx_1.$$

Diese Funktion (18) erfüllt (2). Man kann nämlich die Differentialgleichungen (3) jetzt in der Form

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\Phi + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} \right] = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m-1)$$

schreiben. Es ist also

$$\Phi + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = h(x_m).$$

Andererseits verschwindet aber $\Phi + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}$ für $x_1=0$, was durch Formel (5) gewährleistet wird. Somit ist $h(x_m)=0$.

Die Lösung von (1) bzw. (2) ist durch ihre Anfangswerte und Randwerte im Kleinen eindeutig bestimmt. Denn die Differenz zweier Lösungen u' und u'' genügt einer linearen homogenen hyperbolischen Differentialgleichung mit stetig differenzierbaren

Koeffizienten. Um sich davon zu überzeugen⁹⁾, führe man die Funktion

$f(t) = F[x_1, x_2, \dots, x_m, tu'' + (1-t)u', \dots, tr_{ik}'' + (1-t)r_{ik}' \dots]$
 ein. Man bekommt für die Differenz $f(1) - f(0)$ die Gleichung

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t) dt = \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial^2 (u'' - u')}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j=1}^m B_j \frac{\partial (u'' - u')}{\partial x_j} + C(u'' - u')$$

mit

$$(19) \quad \begin{aligned} A_{ik} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r_{ik}} F[\dots, \tau u'' + (1-\tau)u', \dots] d\tau, \\ B_j &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial p_j} F[\dots, \tau u'' + (1-\tau)u', \dots] d\tau, \\ C &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} F[\dots, \tau u'' + (1-\tau)u', \dots] d\tau. \end{aligned}$$

Aus (19) ersieht man sofort, daß die Funktionen A_{ik} , B_j , C stetig differenzierbar sind. Da die Anfangswerte und Randwerte von $u'' - u'$ verschwinden, muß $u'' - u'$ wegen der Abschätzungen in G. R. identisch verschwinden¹⁰⁾.

§ 2.

Wir ergreifen die Gelegenheit, um darauf aufmerksam zu machen, daß die im linearen Falle in G. R. gegebenen Abschätzungen und Existenzbeweise auch dann bestehen bleiben, wenn die Fläche S_2 charakteristisch ist. Was die Abschätzung der Integrale $\int \dots \int_V (D_1 u)^2 dx_1 \dots dx_m$ anbetrifft, so folgt diese sofort

⁹⁾ Dieser Beweis gilt für dreimal stetig differenzierbare Lösungen.

¹⁰⁾ Die Frage ob, für hyperbolische Differentialgleichungen solche Regularitätsvoraussetzungen vorhanden sind, bei denen die Anzahl der notwendigen Differentiationen nicht mit der Anzahl der unabhängigen Variablen ins Unendliche wächst (die Herabsetzung der Regularitätsforderungen ist auf jeden Fall möglich), interessiert uns hier nicht.

aus Formel (15) in G. R., denn dann ist $\alpha(G_2) = 0$, ja sogar mehr, diese Abschätzung gelingt auch dann, wenn S_2 in manchen Punkten zeitartig, in anderen aber charakteristisch sich verhält. Um die den höheren Ableitungen entsprechenden Integrale abzuschätzen, muß aber anders als in G. R. vorgegangen werden. Nach Hrn. HADAMARD¹¹⁾ können wir nämlich alle Ableitungen auf einer charakteristischen Fläche S_2 berechnen. Wir sehen dies sofort ein, wenn wir neue Variablen in der Weise einführen, daß die Fläche S_2 mit $x_m = 0$ übereinstimmt. Dann wird der Koeffizient A_{mm} der linearen Gleichung gleich Null auf $x_m = 0$ und wir bekommen

$$(20) \quad \begin{aligned} & 2 \sum_{i=1}^{m-1} A_{im} \frac{\partial p_m}{\partial x_i} + B_m p_m = - \sum_{i,k=1}^{m-1} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \\ & - \sum_{j=1}^{m-1} B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - Cu + F \text{ auf } x_m = 0. \end{aligned}$$

Die Formel (20) kann als eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in den Variablen $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ für $\pi_m(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) = p_m(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 0)$ angesehen werden. Machen wir die natürliche Voraussetzung, daß die Schnittmannigfaltigkeit Γ von S_1 und S_2 nirgends zu einer bicharakteristischen Richtung parallel verläuft, so kann π_m eindeutig durch seine leicht zu findenden Anfangswerte auf dieser Schnittmannigfaltigkeit bestimmt werden. Wenn wir dann weiter unsere Differentialgleichung entsprechend oft differenzieren, so können wir auch die höheren Ableitungen auf S_2 berechnen. Unseren Abschätzungen steht dann nichts mehr im Wege.

Um den Existenzbeweis — zuerst im analytischen Falle — führen zu können, müssen wir die gesuchte Lösung aus zwei Lösungen u_1 und u_2 zusammenheften: der Lösung des Cauchy'schen Problems zwischen S_1 und einer anderen charakteristischen Fläche $\mathcal{C}$ und der Lösung u_2 eines Goursat'schen Problems zwischen $\mathcal{C}$ und S_2 . Wir müssen also die vollkommen natürliche Voraussetzung machen, daß die zweite neben S_2 aus der Schnittmannig-

¹¹⁾ J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes etc.*, Paris 1903, insb. p. 268. Wir benutzen hier seine übliche Schreibweise für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

faltigkeit T ausgehende charakteristische Fläche in das Gebiet V — in welchem die Lösung gefunden werden soll — hineinragt. Der Übergang zu nichtanalytischen Daten wird nach der alten Methode bewerkstelligt¹²⁾.

¹²⁾ Vgl. loc. cit. ¹⁾, ²⁾. Die Behandlung anderer Randwertprobleme in einer weiteren Arbeit ist beabsichtigt.

(Reçu par la Rédaction le 27. 9. 1936).

Relations between certain problems of Banach

by

F. J. MURRAY¹⁾ (Princeton, U. S. A.).

In his treatise on linear transformations, S. BANACH²⁾ lists among others the following unsolved problems (Cf. (B), pp. 144–145):

(a) To every closed linear manifold $\mathfrak{M}$ of L_p , $1 < p \neq 2$, does there exist, a closed linear manifold $\mathfrak{N}$ such that every $f \in L_p$ may be represented in a unique way as $g + h$, $g \in \mathfrak{M}$, $h \in \mathfrak{N}$?

(b) To every closed linear manifold $\mathfrak{M}$ of l_p , $1 < p \neq 2$, does there exist, a closed linear manifold $\mathfrak{N}$, such that every $f \in l_p$ may be represented in a unique way as $g + h$, $g \in \mathfrak{M}$, $h \in \mathfrak{N}$?

(c) Is every infinite-dimensional closed linear manifold $\mathfrak{M}$ of l_p isomorphic with l_p ?

We will show in this note, that the answer to (a) is the same as the answer to (b) and indeed depends on the limit of properties of $l_{p,n}$ as n approaches infinity. Also, that if the answer to (b) is yes, the answer to (c) is also yes.

1. Let $\mathcal{A}$ denote a separable space with a p -norm, i. e. $\mathcal{A}$ is either L_p or l_p , or the set $l_{p,n}$ of ordered n -tuples of real numbers $\{a_1, \dots, a_n\}$ with the norm $\|\{a_1, \dots, a_n\}\| = (|a_1|^p + \dots + |a_n|^p)^{1/p}$. We also let $l_p = l_{p,\infty}$.

Let $\mathfrak{M}$ be a closed linear manifold in $\mathcal{A}$, i. e. $\mathfrak{M}$ is a closed set such that $f \in \mathfrak{M}$ and $g \in \mathfrak{M}$ imply $af + bg \in \mathfrak{M}$, where a and b are any two real numbers.

¹⁾ National Research Fellow. Some of these results were obtained while the author was stationed at Brown University, Providence, R. I.

²⁾ S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warsaw (1932). We shall refer to this book as (B).

Let R denote the set of real numbers $0 \leq a \leq \infty$, and let $r(a, b) = a/(1+a) - b/(1+b)$ ($\infty/(1+\infty) = 1$). It is easy to see that R with the metric $|r(a, b)|$ is a metric HAUSDORFF-space and is in a one-to-one correspondence with the closed interval $\langle 0, 1 \rangle$.

If $\mathfrak{M}$ is a closed linear manifold in $\mathcal{A}$, a limited transformation E such that $E\mathcal{A} = \mathfrak{M}$, $E^2 = E$, is said to project $\mathcal{A}$ on $\mathfrak{M}$.

If E is a limited transformation, we denote by $|E|$ the bound of E .

Lemma 1.1. *Let $\mathfrak{M}$ be a closed linear manifold in $\mathcal{A}$. The existence of a closed linear manifold $\mathfrak{N}$ such that every $f \in \mathcal{A}$ may be represented uniquely as $h + g$, $h \in \mathfrak{M}$, $g \in \mathfrak{N}$, is equivalent to the existence of a projection E of $\mathcal{A}$ on $\mathfrak{M}$.*

Proof. Suppose $\mathfrak{N}$ exists. Let E be the transformation, which is such that $Ef = h$. Owing to the properties of $\mathfrak{N}$, this is single-valued, linear and defined everywhere. Now let f_i be a sequence, which approaches f and such that if $f_i = h_i + g_i$, $h_i \in \mathfrak{M}$, $g_i \in \mathfrak{N}$, the h_i form a convergent sequence with the limit h' . Then $h' \in \mathfrak{M}$, and the sequence $g_i = f_i - h_i$ also converges to a $g' \in \mathfrak{N}$. By continuity we have $f = h' + g'$. The uniqueness of the resolution of f now implies that $Ef = h'$, or that E is closed. Theorem 7 of (B) Chap. III, p. 41, now implies that E is bounded. Since the range of E is included in $\mathfrak{M}$ and for every $f \in \mathfrak{M}$, $Ef = f$, we see that the range of E is $\mathfrak{M}$, and $E^2 = E$ or E is a projection of $\mathcal{A}$ on $\mathfrak{M}$.

Now suppose E exists. Let $\mathfrak{N}$ be the set of g 's in $\mathcal{A}$ for which $Eg = 0$. Since E is bounded and linear, $\mathfrak{N}$ is a closed linear manifold. Now if f is $\in \mathcal{A}$, $f = Ef + (1-E)f$, where Ef is $\in \mathfrak{M}$, and $(1-E)f$ is $\in \mathfrak{N}$, since $E(1-E)f = (E-E^2)f = 0$. Now if h is $\in \mathfrak{M}$, $h = Ef$ for some $f \in \mathcal{A}$, and hence $Eh = E^2f = Ef = h$. Now if h is $\in \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N}$, $0 = Eh = h$, or $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N} \subset \{0\}$ or $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N} = \{0\}$. Now let f again be $\in \mathcal{A}$, $f = h + g = h' + g'$, $h, h' \in \mathfrak{M}$, $g, g' \in \mathfrak{N}$. Then $h - h' = g' - g$. Now $h - h'$ is $\in \mathfrak{M}$, $g' - g$ is $\in \mathfrak{N}$, hence $h - h' = g' - g$ is $\in \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N} = \{0\}$, or $h - h' = g' - g = 0$. This shows that $f \in \mathcal{A}$ can only be expressed in one way as $h + g$, $h \in \mathfrak{M}$, $g \in \mathfrak{N}$.

We prefer to consider problems (a) and (b) in the following equivalent form:

(a) To every closed linear manifold $\mathfrak{M}$ of L_p , $1 < p \neq 2$, is there a projection of L_p on $\mathfrak{M}$?

(b) To every closed linear manifold $\mathfrak{M}$ of l_p , $1 < p \neq 2$, is there a projection of l_p on $\mathfrak{M}$?

Let $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$, $n=1, 2, \dots, \infty$ (if $n=\infty$, omit $\mathcal{A}_n$), be a set of spaces. Let $(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \mathcal{A}_n)_p$ (if $n=\infty$, omit $\mathcal{A}_n$) denote the space of ordered sets of elements $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ (if $n=\infty$, omit f_n), $f_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$, such that $\sum_{\alpha=1}^n \|f_\alpha\|^p < \infty$, with a norm defined by the equation

$$\|\{f_1, f_2, \dots, f_n\}\| = \left(\sum_{\alpha=1}^n \|f_\alpha\|^p \right)^{1/p}.$$

$\mathcal{A}_\alpha \simeq \mathcal{A}_\beta$ is to mean that there exists a one-to-one isometric mapping of $\mathcal{A}_\alpha$ on $\mathcal{A}_\beta$.

Lemma 1.2. (a) $(l_{p, m_1} \times l_{p, m_2} \times \dots \times l_{p, m_n})_p \simeq l_{p, m}$ for $n=1, 2, \dots, \infty$, $m_\alpha=1, 2, \dots, \infty$, if $\sum_{\alpha=1}^n m_\alpha = m$.

(b) $(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \mathcal{A}_n)_p \simeq L_p$ for $n=1, 2, \dots, \infty$ if $\mathcal{A}_\alpha = L_p$, for each α .

Proof. (a) is obvious. To show (b), it is only necessary to divide the interval $(0, 1)$ into n intervals (if $n=\infty$, $\aleph_0$ intervals) and in each interval set up a one-to-one isometric mapping in the obvious manner between the functions, defined on this interval, measurable and with the p 'th power summable and L_p . When this has been done, a function on the interval $(0, 1)$ corresponds to an element of $(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \mathcal{A}_n)_p$, and it is easily seen that this sets up a one-to-one isometric correspondence of L_p and $(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \mathcal{A}_n)_p$.

2. Let $\mathfrak{M}$ be a closed linear manifold in $\mathcal{A}$. We define a function $C(\mathfrak{M})$, which takes on values in R as follows. If there exists no projection of $\mathcal{A}$ on $\mathfrak{M}$, then $C(\mathfrak{M}) = \infty$. Otherwise $C(\mathfrak{M}) = \text{gr. l. b. } (|E|, E\mathcal{A} = \mathfrak{M}, E^2 = E)$. Similarly we define the function $\bar{C}(\mathcal{A})$ as l. u. b. $(C(\mathfrak{M}), \mathfrak{M} \subset \mathcal{A})$.

Lemma 2.1. Let $\mathcal{A}_1$ and $\mathcal{A}_2$ be such that $\mathcal{A}_1$ is isometrically isomorphic with a closed linear manifold $\mathfrak{M}$ of $\mathcal{A}_2$. Let $\mathfrak{M}$ be such that there exists a projection E of $\mathcal{A}$ on $\mathfrak{M}$ with $|E|=1$, $\mathfrak{N}$ the set of f 's $\in \mathcal{A}_2$, for which $Ef=0$. Let $\mathfrak{B}$ be any closed linear manifold of $\mathcal{A}_2$ such that if $f \in \mathfrak{B}$, $f=h+g$, $h \in \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{M}$,

$g \in \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{N}$. Let $\mathfrak{P}_1$ in $\mathcal{A}_1$ be the manifold which corresponds to $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{M}$. Then $C(\mathfrak{P}_1) \leq C(\mathfrak{P})$.

Proof. If $C(\mathfrak{P}) = \infty$, our statement is true. Suppose $C(\mathfrak{P}) < \infty$. Let F be any projection of $\mathcal{A}_2$ on $\mathfrak{P}$. Then EF is a projection on $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{M}$. For if f_1 is $\in \mathcal{A}_2$, $f = Ff_1 = h + g$, $h \in \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{M}$, $g \in \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{N}$, and $EFf = h$ or the range of EF is included in $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{M}$. Also for every $h \in \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{M}$, we have $EFh = Eh = h$. This with our previous statement shows that $(EF)^2 = EF$ and that the range of EF is exactly $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{M}$.

Let $(EF)'$ be EF considered only on $\mathfrak{M}$. Obviously $(EF)'$ projects $\mathfrak{M}$ on $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{M}$. Let G be the corresponding transformation on $\mathcal{A}_1$. Then $C(\mathfrak{P}_1) \leq |G'| = |(EF)'| \leq |EF| \leq |E| \cdot |F| = |F|$ or $C(\mathfrak{P}_1) \leq |F|$. Since F was any projection on $\mathfrak{P}$, we have $C(\mathfrak{P}_1) \leq C(\mathfrak{P})$.

Lemma 2.2. *If $\mathcal{A}_1$ and $\mathcal{A}_2$ are as in Lemma 2.1, $\bar{C}(\mathcal{A}_1) \leq \bar{C}(\mathcal{A}_2)$. In particular if $\mathcal{A}_2 = (\mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_1)_p$, $\bar{C}(\mathcal{A}_1) \leq \bar{C}(\mathcal{A}_2)$.*

Proof. Let $\mathfrak{P}_1$ be any closed linear manifold of $\mathcal{A}_1$, $\mathfrak{P}$ the corresponding set of elements in $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{P}$ is a closed linear manifold satisfying the conditions given in Lemma 2.1, since $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{M} = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{N} = \{0\}$. Lemma 2.1 now implies that $C(\mathfrak{P}_1) \leq C(\mathfrak{P}) \leq \bar{C}(\mathcal{A}_2)$. But $\mathfrak{P}_1$ was any closed linear manifold in $\mathcal{A}_1$, hence $\bar{C}(\mathcal{A}_1) \leq \bar{C}(\mathcal{A}_2)$.

To show the second statement, we take $\mathfrak{M} \subset (\mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_1)_p$, as the set of elements $\{0, f\}$ of $(\mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_1)_p$, E as the transformation of $(\mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_1)_p$, such that $E\{f, g\} = \{0, g\}$. One readily sees that $\mathfrak{M}$ is isometrically isomorphic with $\mathcal{A}_1$, and that E projects $\mathcal{A}_2$ on $\mathfrak{M}$ and $|E'| = 1$. We may now apply the first part of this lemma to obtain the desired result.

Lemma 2.3. *If $\mathcal{A} \simeq (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \mathcal{A}_n)_p$ and k is the least upper bound of those numbers k_1 for which there are an infinite number of the α 's with $\bar{C}(\mathcal{A}_\alpha) > k_1$, then there exists a manifold $\mathfrak{P} \subset \mathcal{A}$, such that $C(\mathfrak{P}) \geq k$. (Note k may be ∞).*

Proof. It follows from the definition of k , that if ε is > 0 , then there exists an infinite number of the α 's for which $r(\bar{C}(\mathcal{A}_\alpha), k) \geq -\varepsilon$. Hence if $\{\varepsilon_i\}$ is a sequence of numbers > 0 , and such that $\varepsilon_i \rightarrow 0$, then we can find a sequence of integers $\{\alpha_i\}$ such that $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, for which $r(\bar{C}(\mathcal{A}_{\alpha_i}), k) \geq -\varepsilon_i/2$.

Now since $r(\bar{C}(\mathcal{A}_i), k) \geq -\varepsilon_i/2$, we can find a $\mathfrak{P}$, in $\mathcal{A}_i$, such that $r(C(\mathfrak{P}_i), k) > -\varepsilon_i$. Let $\mathfrak{P}$ be the closed linear manifold consisting of those elements $\{f_1, f_2, f_3, \dots\} \in \mathcal{A}$, such that $f_\beta = 0$, if β is not $\in \{\alpha_i\}$ and $f_{\alpha_i} \in \mathfrak{P}_{\alpha_i}$. As we saw in the proof of Lemma 2.2, $\mathcal{A}_{\alpha_i}$ and $\mathcal{A}$ are as $\mathcal{A}_1$ and $\mathcal{A}_2$ in Lemma 2.1 and it is easily seen that $\mathfrak{P}$ satisfies the conditions given in Lemma 2.1 also. Thus Lemma 2.1 now implies that $C(\mathfrak{P})$ is $\geq C(\mathfrak{P}_{\alpha_i})$ hence $r(C(\mathfrak{P}), k) \geq -\varepsilon_i$ for every i . This implies that $r(C(\mathfrak{P}), k) \geq 0$, $C(\mathfrak{P}) \geq k$.

3. Lemma 3.1. $\bar{C}(L_p) \geq \bar{C}(l_{p,\infty})$.

Proof. In (B) Theorem 9, Chap. XII, p. 206, it is shown that the manifold $\mathfrak{M} \subset L_p$, determined by the functions y_i is isometrically isomorphic with l_p , when

$$y_i(t) = 2^{i/p} \text{ for } 1/2^i \leq t \leq 1/2^{i-1}, \quad y_i(t) = 0 \text{ otherwise.}$$

Now if $z(t)$ is $\in L_p$, let

$$Ez(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 z(s) y_i^{p-1}(s) ds y_i(t).$$

Then by a direct calculation one can verify that $|E| = 1$ and that if z is $\in \mathfrak{M}$ (i. e. $z = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p < \infty$) $Ez = z$. Hence E projects L_p on $\mathfrak{M}$ and we may apply Lemma 2.2 so that it yields $\bar{C}(L_p) \geq \bar{C}(l_p)$.

Lemma 3.2. *There exists a linear manifold $\mathfrak{M} \subset L_p$, such that $C(\mathfrak{M}) = \bar{C}(L_p)$.*

Proof. This follows from Lemma 1.2 (b) (with $n = \infty$) and Lemma 2.3, for k is in this case $\bar{C}(L_p)$.

Lemma 3.3. *There exists a linear manifold $\mathfrak{M} \subset l_{p,\infty}$, such that $C(\mathfrak{M}) = \bar{C}(l_{p,\infty})$.*

Proof. In Lemma 1.2 (a) let $n_\alpha = \infty$ for every α . Then apply Lemma 2.3.

Lemma 3.4. $\bar{C}(l_{p,n}) \geq \bar{C}(l_{p,m})$ if $n \geq m$.

Proof. This follows from Lemma 1.2 and Lemma 2.2.

Theorem I. $C(\mathfrak{M})$ and $\bar{C}(\mathcal{A})$ are to be as in § 2. There exists an $\mathfrak{M}$ in L_p , and an $\mathfrak{N}$ in $l_{p,\infty}$, such that $C(\mathfrak{M}) = \bar{C}(L_p)$, and $C(\mathfrak{N}) = \bar{C}(l_{p,\infty})$. Furthermore

$$1 = \bar{C}(l_{p,1}) \leq \bar{C}(l_{p,2}) \leq \dots \leq C(l_{p,\infty}) \leq \bar{C}(L_p).$$

The Lemmas of this section imply this Theorem.

4. Lemma 4.1. Let $f_1, f_2, \dots, f_n$, be n linearly independent elements of L_p , $n < \infty$. There exists a constant C depending only on the set $f_1, f_2, \dots, f_n$, such that if

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i = 1, \quad (\alpha)$$

then $|\alpha_i| \leq C$.

Proof. Since the f_i 's are linearly independent, to each i there exists a linear functional F_i with a norm $k_i > 0$, such that $F_i(f_i) = 1$, $F_i(f_j) = 0$ for $i \neq j$ (Cf. (B) Chap. IV, lemma p. 57). Then for any set of numbers $\beta_1, \dots, \beta_n$ such that $\beta_i = 0$, we have

$$1/k_i = F_i(f_i + \sum_{j=1}^n \beta_j f_j) / k_i \leq \|f_i + \sum_{j=1}^n \beta_j f_j\|.$$

Hence $\|y f_i + \sum_{j=1}^n y \beta_j f_j\| \geq |y| / k_i$.

Thus in (α), $|\alpha_i| / k_i \leq 1$, or $|\alpha_i| \leq k_i$. To complete the proof let $C = \max_i k_i$.

Lemma 4.2. Let $f_1, \dots, f_n$ be n linearly independent elements of L_p , $n < \infty$. Then to every $\varepsilon > 0$, there exists an integer m , and n functions $h_1, \dots, h_n$, which are constant in each interval $(p/m, (p+1)/m)$, $p = 0, \dots, m-1$ and such that if (α) holds (Lemma 4.1), then

$$\|\sum_{i=1}^n \alpha_i (f_i - h_i)\| \leq \varepsilon \quad (\beta).$$

Proof. The hypothesis of Lemma 4.1 holds and we may apply it to obtain the C . Now to each f_i we can find a continuous function g_i , such that $\|f_i - g_i\| \leq \varepsilon / 2 C n$. The g_i 's are continuous and hence they are uniformly continuous. Thus there exists a δ , such that if $|x_1 - x_2| < \delta$, then

$$|g_i(x_1) - g_i(x_2)| \leq \varepsilon / 2 C n, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\gamma).$$

Now let m be any integer such that $1/m < \delta$. Let h_i be the step-function such that if $p/m \leq x < (p+1)/m$, $p = 0, 1, \dots, m-1$, $h_i(x) = g_i(p/m)$, $h_i(1) = g_i(1)$. It follows from (γ) that $\|h_i - g_i\| \leq \varepsilon/2 Cn$ and since $\|f_i - g_i\| \leq \varepsilon/2 Cn$, we obtain $\|f_i - h_i\| \leq \varepsilon Cn$.

Now if (α) holds,

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i (f_i - h_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \cdot \|f_i - h_i\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \varepsilon Cn \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon/n = \varepsilon.$$

Lemma 4.3. Let $f_1, \dots, f_n, h_1, \dots, h_n, \varepsilon$, be as in Lemma 4.2. If $\varepsilon < 1$, the h_i are linearly independent.

Proof. Let $\beta_1, \dots, \beta_n$ be a set of numbers such that $\beta_i = 0$ for a fixed i , then (Cf. proof of Lemma 4.1)

$$\left\| f_i + \sum_{j=1}^n \beta_j f_j \right\| \geq k_i$$

for a $k_i > 0$ and independent of the β_j 's, or

$$\left\| (1/k_i) f_i + \sum_{j=1}^n (\beta_j/k_i) f_j \right\| = t_i \geq 1,$$

where t_i now depends on the β_j 's, so we obtain

$$\left\| (1/k_i t_i) f_i + \sum_{j=1}^n (\beta_j/k_i t_i) f_j \right\| = 1.$$

Hence by (β) (Lemma 4.2)

$$\left\| (1/k_i t_i) h_i + \sum_{j=1}^n (\beta_j/k_i t_i) h_j \right\| \geq 1 - \varepsilon$$

or

$$\left\| h_i + \sum_{j=1}^n \beta_j h_j \right\| \geq k_i t_i (1 - \varepsilon) \geq k_i (1 - \varepsilon).$$

Hence if $\varepsilon < 1$, the h_i are linearly independent.

5. Lemma 5.1. Let $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{M}_0$ be two n -dimensional manifolds in $\mathcal{A}$, $1 \leq n < \infty$. Let us suppose that there exists n linearly independent elements $f_1, \dots, f_n, f_i \in \mathfrak{M}$, and n linearly independent elements $g_1, \dots, g_n, g_i \in \mathfrak{M}_0$, such that if

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \right\| = 1,$$

then $\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i (f_i - g_i) \right\| \leq \varepsilon$, with $(\varepsilon/(1 - \varepsilon)) C(\mathfrak{M}_0) < 1$, $\varepsilon < 1$.

Then

$$C(\mathfrak{M}) \leq C(\mathfrak{M}_0) [(1 + (\varepsilon/(1 - \varepsilon)) C(\mathfrak{M}_0)) / (1 - (\varepsilon/(1 - \varepsilon)) C(\mathfrak{M}_0))].$$

Proof. Under our hypotheses, if $\|\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i\| \leq 1 - \varepsilon$, then $\|\sum_{i=1}^n \alpha_i (f_i - g_i)\| \leq \varepsilon$. For let us suppose that $\|\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i\| \leq 1 - \varepsilon$, and $\|\sum_{i=1}^n \alpha_i (f_i - g_i)\| = k$. Then

$$\|\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i\| \leq \|\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i\| + \|\sum_{i=1}^n \alpha_i (f_i - g_i)\| \leq 1 - \varepsilon + k$$

or $\|\sum_{i=1}^n (\alpha_i / (1 - \varepsilon + k)) f_i\| \leq 1$. Hence $\|\sum_{i=1}^n (\alpha_i / (1 - \varepsilon + k)) (f_i - g_i)\| \leq \varepsilon$

or

$$k = \|\sum_{i=1}^n \alpha_i (f_i - g_i)\| \leq \varepsilon (1 - \varepsilon + k),$$

which implies that $k(1 - \varepsilon) \leq \varepsilon(1 - \varepsilon)$ and since $\varepsilon < 1$, this yields that $k \leq \varepsilon$.

Now if $\|\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i\| = t \neq 0$, or $\|\sum_{i=1}^n ((1 - \varepsilon)/t) \alpha_i g_i\| \leq 1 - \varepsilon$, then $\|\sum_{i=1}^n \alpha_i ((1 - \varepsilon)/t) (g_i - f_i)\| \leq \varepsilon$, or

$$\|\sum_{i=1}^n \alpha_i (g_i - f_i)\| \leq (\varepsilon/(1 - \varepsilon)) \|\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i\| \quad (\varepsilon).$$

If $\|\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i\| = 0$, then $\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i = 0$ and $\alpha_i = 0$ for every i and we see that (ε) holds in general.

Let η be any number > 0 , and such that

$$(C(\mathfrak{M}_0) + \eta)(\varepsilon/(1 - \varepsilon)) < 1.$$

We can find a projection E_0 of $\mathcal{A}$ on $\mathfrak{M}$, such that $|E_0| \leq C(\mathfrak{M}_0) + \eta$. Hence if $f \in \mathcal{A}$, then $f = g + h$, where $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i$ and $\|g\| \leq (C(\mathfrak{M}_0) + \eta)\|f\|$. Now we define a transformation T by the

equation $T(\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i + h) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i + h$. Then T is easily seen to be linear and to have domain $\mathcal{A}$.

Furthermore by (ε)

$$\begin{aligned} \|Tf - f\| &= \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i (g_i - f_i) \right\| \leq (\varepsilon/(1 - \varepsilon)) \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i \right\| \\ &\leq (\varepsilon/(1 - \varepsilon)) (C(\mathfrak{M}_0) + \eta) \|f\|. \end{aligned}$$

Thus $\|Tf\| \leq \|Tf - f\| + \|f\| \leq (1 + (\varepsilon/(1 - \varepsilon)) (C(\mathfrak{M}_0) + \eta)) \|f\|$ and $\|Tf\| \geq \|f\| - \|f - Tf\| \geq (1 - (\varepsilon/(1 - \varepsilon)) (C(\mathfrak{M}_0) + \eta)) \|f\|$. Since $(\varepsilon/(1 - \varepsilon)) (C(\mathfrak{M}_0) + \eta) < 1$, this last equation implies that T^{-1} exists and $\|T^{-1}\| \leq 1/(1 - (\varepsilon/(1 - \varepsilon)) (C(\mathfrak{M}_0) + \eta))$.

Now since E_0 is a projection on $\mathfrak{M}_0$, TE_0T^{-1} is a projection on $\mathfrak{M}$. For the domain of T^{-1} is $\mathcal{A}$, since the range of T is $\mathcal{A}$, as may be seen as follows. Let $f \in \mathcal{A}$, and $k = (\varepsilon/(1 + \varepsilon)) (C(\mathfrak{M}_0) + \eta)$ then k is < 1 . We first show that if $g = Tg'$, is in the range of T and $\|f - g\| \leq C$, then there exists an element g_1 in the range of T such that $\|f - g_1\| \leq kC$. For

$$\begin{aligned} \|f - T(g' - f + g)\| &= \|f - Tg' - T(f - g)\| = \|f - g - T(f - g)\| \\ &\leq k \|f - g\| \leq k \|C\|. \end{aligned}$$

Since $\|f - Tf\| \leq k \|f\|$, applying the above process $n - 1$ times yields that there exists a g_n in the range of T such that $\|f - g_n\| \leq k_n \|f\|$ for every n . Since k is < 1 , this shows that the range of T is everywhere dense. Thus the domain of T^{-1} is everywhere dense. T is closed, hence T^{-1} is closed. Thus T^{-1} is closed bounded and has domain everywhere dense. Hence its domain is $\mathcal{A}$. So we see that $TE_0T^{-1}\mathcal{A} = TE_0\mathcal{A} = T\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$ and $(TE_0T^{-1})^2 = TE_0T_0^{-1}TE_0T^{-1} = TE_0E_0T^{-1} = TE_0T^{-1}$. Thus TE_0T^{-1} is a projection on $\mathfrak{M}$.

So

$$C(\mathfrak{M}) \leq \|TE_0T^{-1}\| \leq (C(\mathfrak{M}_0) + \eta) \frac{1 + (\varepsilon/(1 - \varepsilon)) (C(\mathfrak{M}_0) + \eta)}{1 - (\varepsilon/(1 - \varepsilon)) (C(\mathfrak{M}_0) + \eta)}.$$

Since η may be taken arbitrarily small, we obtain

$$C(\mathfrak{M}_0) \leq C(\mathfrak{M}) \frac{1 + (\varepsilon/(1 - \varepsilon)) C(\mathfrak{M}_0)}{1 - (\varepsilon/(1 - \varepsilon)) C(\mathfrak{M}_0)}.$$

6. Let $\mathcal{A}$ be m -dimensional and let $n \leq m$. We define $\bar{C}_n(\mathcal{A}) =$ l. u. b. $(C(\mathfrak{M}), \mathfrak{M} \subset \mathcal{A}, \mathfrak{M} \text{ } n\text{-dimensional})$.

Lemma 6.1. $\bar{C}_n(L_p) \leq \text{l. u. b.}(\bar{C}_n(l_{p,m}); m < \infty)$, for $n < \infty$.

Proof. Let $\text{l. u. b.}(\bar{C}_n(l_{p,m}), m < \infty) = k_n$. Now if $k_n = \infty$, the Lemma is obviously true. So we may suppose that k_n is $< \infty$. Now let ε be any number such that $0 < \varepsilon < 1$ and $(\varepsilon/(1-\varepsilon))k_n < 1$. Let $\mathfrak{M}$ be any manifold of n dimensions in L_p . Let $f_1, \dots, f_n$ be n linearly independent elements of $\mathfrak{M}$. Now since $\varepsilon < 1$, applying Lemmas 4.2 and 4.3 to $f_1, \dots, f_n$ and (ε) yields the existence of an integer m and n linearly independent step-functions $h_1, \dots, h_n$ with the properties enumerated in Lemma 4.2. Let $\mathfrak{M}_0$ be the manifold determined by $h_1, \dots, h_n$.

We now show that $C(\mathfrak{M}_0) \leq k_n$. Let $y_i, i=1, \dots, m$ be defined as follows: $y_i(t) = m^{1/p}$, for $(i-1)/m \leq t < i/m$, $y_i(t) = 0$ otherwise. Let $\mathfrak{N}$ be the closed linear manifold consisting of linear combinations of the $y_i(t)$. $\mathfrak{N}$ is readily seen to be isometrically isomorphic with $l_{p,m}$, also $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{N}$. Hence given an $\eta > 0$, we can find a projection E_0 of $\mathfrak{N}$ on $\mathfrak{M}$ such that $|E_0| \leq \bar{C}_n(l_{p,m}) + \eta \leq k_n + \eta$.

Now for any $f \in L_p$, let

$$Ff = \sum_{i=1}^m \int_0^1 f(t) y_i^{p-1}(t) dt y_i.$$

By a simple calculation one may verify that $|F| = 1$, and that F projects L_p on $\mathfrak{N}$. Consider $E_0 F$. The range of $E_0 F$ is $\mathfrak{M}_0$, since the range of F is $\mathfrak{N}$ and the range of E_0 on $\mathfrak{N}$ is $\mathfrak{M}_0$. Furthermore since $\mathfrak{M}_0$ is $\subset \mathfrak{N}$, if $f \in \mathfrak{M}_0$, $E_0 Ff = E_0 f = f$ and hence $E_0 F$ projects L_p on $\mathfrak{M}_0$. Thus $C(\mathfrak{M}_0)$ is $\leq |E_0 F| \leq |E_0| |F| = |E_0| \leq k_n + \eta$. This holds no matter how small η is taken, hence $C(\mathfrak{M}_0) \leq k_n$.

Since η was chosen in such a manner that $k_n(\varepsilon/(1-\varepsilon)) < 1$, we have that $C(\mathfrak{M}_0)(\varepsilon/(1-\varepsilon)) < 1$. Hence we may apply Lemma 5.1 to $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_0$ and η , and obtain that

$$C(\mathfrak{M}) \leq C(\mathfrak{M}_0) \frac{1 + C(\mathfrak{M}_0)(\varepsilon/(1-\varepsilon))}{1 - C(\mathfrak{M}_0)(\varepsilon/(1-\varepsilon))} \leq \frac{k_n(1 + k_n(\varepsilon/(1-\varepsilon)))}{1 - k_n(\varepsilon/(1-\varepsilon))}$$

Inasmuch as this holds no matter how small ε is taken, we may conclude that $C(\mathfrak{M}) \leq k_n$. But $\mathfrak{M}$ was an arbitrary n -dimensional manifold in L_p , hence $\bar{C}_n(L_p) \leq k_n$.

7. Lemma 7.1. $C(L_p) \leq \text{l. u. b. } (C(l_{p,n}), n < \infty)$.

Proof. Let $\text{l. u. b. } (C(l_{p,n}); n < \infty) = k$. If $k = \infty$, the statement is obvious. Hence we may assume that k is $< \infty$. Let k_n be as in Lemma 6.1. Then $k_n \leq k$.

Let $\mathfrak{M}$ be a closed linear manifold in L_p . Since L_p is separable, $\mathfrak{M}$ is separable. Hence there exists a sequence $\{f_n\}$ which is everywhere dense in $\mathfrak{M}$. Now if f_n is linearly dependent on $f_1, \dots, f_{n-1}$, we drop it from the sequence. If the result is a finite sequence, $\mathfrak{M}$ has a finite dimensionality and Lemma 6.1 implies that $C(\mathfrak{M}) \leq k_n \leq k$. We may therefore confine our attention to infinite-dimensional $\mathfrak{M}$, i. e. those for which a sequence $\{f_n\}$ exists with each f_n linearly independent of the preceding $n-1$, and such that the linear combinations of the f_n are everywhere dense in $\mathfrak{M}$.

Let $\mathfrak{M}_n$ be the closed linear manifold determined by $f_1, \dots, f_n$. It follows that $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{M}_n \subset \dots$. Furthermore, by the nature of the sequence $\{f_n\}$, given an $f \in \mathfrak{M}$, and an $\varepsilon > 0$, we can find an n such that if $m > n$, there exists a $g \in \mathfrak{M}_m$, with $\|f - g\| < \varepsilon$.

Let η be any number > 0 . By Lemma 6.1, $C(\mathfrak{M}_m) \leq k_m \leq k$. Thus we can find a projection of L_p on $\mathfrak{M}_n$, E_n , such that $\|E_n\| \leq k + \eta$. Since the sequence $\{E_n\}$ is uniformly bounded, we can find a subsequence $\{E_{n_i}\}$ with $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$, which is weakly convergent to a transformation E with $\|E\| \leq k + \eta$.

Now if $f \in \mathfrak{M}$, we show that $E_n f \rightarrow f$. For given an $\varepsilon > 0$, we can find an n such that if $m > n$, there exists a $g_m \in \mathfrak{M}_m$ such that $\|f - g_m\| < \varepsilon/2(k + \eta)$. Now $f = g_m + (f - g_m)$, $E_m f = E_m g_m + E_m(f - g_m) = g_m + E_m(f - g_m)$. Hence $\|f - E_m f\| = \|f - g_m + E_m(f - g_m)\| \leq \|f - g_m\| + \|E_m(f - g_m)\| \leq \varepsilon/2(k + \eta) + (k + \eta)\varepsilon/2 = \varepsilon/2(k + \eta) + \varepsilon/2 \leq \varepsilon$. Thus $E_n f \rightarrow f$ strongly, which implies that $E_{n_i} f \rightarrow f$ strongly and hence weakly and $Ef = f$. Thus if $f \in \mathfrak{M}$, $Ef = f$ and so $E\mathcal{A} \supset \mathfrak{M}$.

Next, we show that $E\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}$. For if h is not $\in \mathfrak{M}$, there exists a linear functional $F(f)$ on L_p , such that $F(h) = 1$, $F(f) = 0$, $f \in \mathfrak{M}$ (Cf. (B), Chap. IV, Lemma p. 57). Let g be any element of L_p . Then $E_n g$ is $\in \mathfrak{M}$, and $F(E_n g) = 0$. Hence by the definition of weak convergence $F(Eg) = 0$, which implies that $Eg \neq h$. This is true for every g , hence h is not $\in E\mathcal{A}$ and $E\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}$.

Thus $E\mathcal{A} = \mathfrak{M}$ and since if f is $\in \mathfrak{M}$, $Ef = f$, $E^2 = E$. Furthermore, since $|E| \leq k + \eta$, $C(\mathfrak{M}) \leq k + \eta$. This last equation holds for any $\eta > 0$, hence $C(\mathfrak{M}) \leq k$. Since this is true for any $\mathfrak{M} \subset L_p$, $\bar{C}(L_p) \leq k$.

Theorem I and Lemma 7.1 yield

Theorem II. $\bar{C}(L_p) = C(l_p) = \text{l. u. b. } (C(l_{p,n}), n < \infty)$.

Theorems I and II imply that the answer to (a) is the same as that of (b) and also to the question "Is l. u. b. $(C(l_{p,n}), n < \infty) < \infty$?" For if the answer to the last question is yes, then by Theorem II and the definitions of $\bar{C}(\mathcal{A})$ and $C(\mathfrak{M})$ the answer to (a) and (b) is yes. If on the other hand the answer is no, then $\bar{C}(L_p) = C(l_p) = \infty$, and since by Theorem I there exists a closed linear manifold $\mathfrak{M}$, such that $C(\mathfrak{M}) = \bar{C}(\mathcal{A})$, $\mathcal{A} = L_p$, or l_p , the definition of $C(\mathfrak{M})$ yields that the answer to both (a) and (b) is no.

8. We will show in this section that if the answer to problem (b) is yes, that of (c) is also yes. Let $k_p = \bar{C}(l_p)$, by hypothesis k_p is $< \infty$. Let $\mathfrak{M}$ be any closed linear manifold of l_p .

We use a result given in (B) Chap. XII, pp. 194–197, that there exists constants B_p and C_p such that to every infinite-dimensional manifold $\mathfrak{M} \subset l_p$, there exists an $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$, and a transformation T' with range $\mathfrak{M}_0$ such that, for every $f \in l_p$,

$$B_p \|f\| \geq \|T'f\| \geq C_p \|f\|.$$

Let E be a projection of $\mathcal{A}$ on $\mathfrak{M}$. Let $\mathfrak{N}$ be the set of $f \in l_p$ such that $Ef = 0$. Let $\mathfrak{P}$ be the smallest closed linear manifold which contains $\mathfrak{N}$, $T'\mathfrak{N}$, $T'^2\mathfrak{N}$, ... which fact we denote by $\mathfrak{P} = \{\mathfrak{N}, T'\mathfrak{N}, T'^2\mathfrak{N}, \dots\}$. Obviously $T'\mathfrak{P} = \{T'\mathfrak{N}, T'^2\mathfrak{N}, \dots\}$ and since $|E| < \infty$, $T'\mathfrak{P} = \mathfrak{P}$. $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{P}$. Let F be a projection of l_p on $T'\mathfrak{P}$.

Now $F_0 = 1 - E + FE$ is a projection on $\mathfrak{P}$. For $F_0^2 = ((1-E) + FE)((1-E) + FE) = (1-E)^2 + (1-E)FE + FE(1-E) + FEFE$. Since $EF = F$, we have $(1-E)FE = (1-E)EFE = (E-E^2)FE = 0$, $FE(1-E) = F(E-E^2) = 0$, $FEFE = FFE = FE$ and hence $F_0^2 = (1-E)^2 + FE = 1 - E + FE = F_0$. Furthermore the range of F_0 is $\{\mathfrak{N}, T'\mathfrak{P}\} = \mathfrak{P}$.

Let $T = T'F_0 + (1-F_0)$. Since $\mathfrak{P} \supset T'\mathfrak{P}$, $T'F_0 = F_0T'F_0$ and hence $T = F_0T'F_0 + (1-F_0)$.

The range of T is $\mathfrak{M}$. For if h is $\in \mathfrak{M}$, $h = (1 - F_0)h + F_0h(1 - F_0)h + ((1 - E) + FE)h$. Since $Eh = h$, $h = (1 - F_0)h + (1 - E)Eh + Fh = (1 - F_0)h + Fh$. Since the range of F is $T'\mathfrak{B}$, $Fh = T'g = T'F_0g$ for some $g \in \mathfrak{B}$. Also since g is $\in \mathfrak{B}$, $(1 - F_0)g = 0$. Hence $h = (1 - F_0)h + T'F_0g = (1 - F_0)((1 - F_0)h + g) + T'F_0((1 - F_0)h + g) = ((1 - F_0) + T'F_0)((1 - F_0)h + g) = T((1 - F_0)h + g)$, or h is in the range of T . Hence the range of T includes $\mathfrak{M}$. But if h is in the range of T , $h = Tg$ for some g and since $1 - F_0 = (1 - ((1 - E) + FE)) = E - FE$ and $E(1 - F_0) = E(E - FE) = E - EFE = E - FE = 1 - F_0$, $Eh = ETg = E(T'F_0 + (1 - F_0))g = ET'F_0g + E(1 - F_0)g = T'F_0g + (1 - F_0)g = Tg = h$, i. e. $h = Eh$. Hence h is $\in \mathfrak{M}$, and the range of T is also included in $\mathfrak{M}$. This with our previous result shows that the range of T is $\mathfrak{M}$.

T^{-1} exists. For $Tf = 0$ implies $(1 - F_0)f + F_0T'F_0f = 0$, hence $(1 - F_0)f = 0$ and $F_0T'F_0f = 0 = T'F_0f$. But T' has an inverse hence $F_0f = 0$. Thus $f = (1 - F_0)f + F_0f = 0$ or $Tf = 0$ implies $f = 0$. We have also shown in the preceding paragraph that for every h in $\mathfrak{M}$ which is the range of T , $h = Tf$, where $f = (1 - F_0)h + g = (1 - F_0)h + T'^{-1}Fh$. Thus $T^{-1} = (1 - F_0) + T'^{-1}F$ defined on $\mathfrak{M}$.

Since F_0, F, T', T'^{-1} are all bounded, T and T^{-1} are both bounded. Since the range of T is $\mathfrak{M}$, we see that $\mathfrak{M}$ is isomorphic with l_p . Since $\mathfrak{M}$ was arbitrary, we have shown that an affirmative answer to (b) implies an affirmative answer to (c).

(Reçu par la Rédaction le 23. 7. 1936).



100

101

102

103

104

105

106

107

108

109

110

111

112

113

114

115

116

117

118

119

120

121

122

123

124

125

126

127

128

129

130

131

132

133

134

135

136

137

138

139

140

141

142

143

144

145

146

147

148

149

150

151

152

153

154

155

156

157

158

159

160

161

162

163

164

165

166

167

168

169

170

171

172

173

174

175

176

177

178

179

180

181

182

183

184

185

186

187

188

189

190

191

192

193

194

195

196

197

198

199

200

201

202

203

204

205

206

207

208

209

210

211

212

213

214

215

216

217

218

219

220

221

222

223

224

225

226

227

228

229

230

231

232

233

234

235

236

237

238

239

240

241

242

243

244

245

246

247

248

249

250

251

252

253

254

255

256

257

258

259

260

261

262

263

264

265

266

267

268

269

270

271

272

273

274

275

276

277

278

279

280

281

282

283

284

285

286

287

288

289

290

291

292

293

294

295

296

297

298

299

300

301

302

303

304

305

306

307

308

309

310

311

312

313

314

315

316

317

318

319

320

321

322

323

324

325

326

327

328

329

330

331

332

333

334

335

336

337

338

339

340

341

342

343

344

345

346

347

348

349

350

351

352

353

354

355

356

357

358

359

360

361

362

363

364

365

366

367

368

369

370

371

372

373

374

375

376

377

378

379

380

381

382

383

384

385

386

387

388

389

390

391

392

393

394

395

396

397

398

399

400

401

402

403

404

405

406

407

408

409

410

411

412

413

414

415

416

417

418

419

420

421

422

423

424

425

426

427

428

429

430

431

432

433

434

435

436

437

438

439

440

441

442

443

444

445

446

447

448

449

450

451

452

453

454

455

456

457

458

459

460

461

462

463

464

465

466

467

468

469

470

471

472

473

474

475

476

477

478

479

480

481

482

483

484

485

486

487

488

489

490

491

492

493

494

495

496

497

498

499

500

501

502

503

504

505

506

507

508

509

510

511

512

513

514

515

516

517

518

519

520

521

522

523

524

525

526

527

528

529

530

531

532

533

534

535

536

537

538

539

540

541

542

543

544

545

546

547

548

549

550

551

552

553

554

555

556

557

558

559

560

561

562

563

564

565

566

567

568

569

570

571

572

573

574

575

576

577

578

579

580

581

582

583

584

585

586

587

588

589

590

591

592

593

594

595

596

597

598

599

600

601

602

603

604

605

606

607

608

609

610

611

612

613

614

615

616

617

618

619

620

621

622

623

624

625

626

627

628

629

630

631

632

633

634

635

636

637

638

639

640

641

642

643

644

645

646

647

648

649

650

651

652

653

654

655

656

657

658

659

660

661

662

663

664

665

666

667

668

669

670

671

672

673

674

675

676

677

678

679

680

681

682

683

684

685

686

687

688

689

690

691

692

693

694

695

696

697

698

699

700

701

702

703

704

705

706

707

708

709

710

711

712

713

714

715

716

717

718

719

720

721

722

723

724

725

726

727

728

729

730

731

732

733

734

735

736

737

738

739

740

741

742

743

744

745

746

747

748

749

750

751

752

753

754

755

756

757

758

759

760

761

762

763

764

765

766

767

768

769

770

771

772

773

774

775

776

777

778

779

780

781

782

783

784

785

786

787

788

789

790

791

792

793

794

795

796

797

798

799

800

801

802

803

804

805

806

807

808

809

810

811

812

813

814

815

816

817

818

819

820

821

822

823

824

825

826

827

828

829

830

831

832

833

834

835

836

837

838

839

840

841

842

843

844

845

846

847

848

849

850

851

852

853

854

855

856

857

858

859

860

861

862

863

864

865

866

867

868

869

870

871

872

873

874

875

876

877

878

879

880

881

882

883

884

885

886

887

888

889

890

891

892

893

894

895

896

897

898

899

900

901

902

903

904

905

906

907

908

909

910

911

912

913

914

915

916

917

918

919

920

921

922

923

924

925

926

927

928

929

930

931

932

933

934

935

936

937

938

939

940

941

942

943

944

945

946

947

948

949

950

951

952

953

954

955

956

957

958

959

960

961

962

963

964

965

966

967

968

969

970

971

972

973

974

975

976

977

978

979

980

981

982

983

984

985

986

987

988

989

990

991

992

993

994

995

996

997

998

999

1000