

RACHUNEK WARJACYJNY

Dr. ANTONI PRZEBORSKI
PROFESOR UNIwersYTETU WARSZAWSKIEGO

RACHUNEK WARJACYJNY

TOM I.

CZĘŚĆ PIERWSZA

**Z CZĘŚCIOWYCH SUBWENCYJ
WYDZIAŁU NAUKI MINIST. W. R. I O. P.
I KASY IMIENIA J. MIANOWSKIEGO.**

W A R S Z A W A 1926

**NAKŁADEM INSTYTUTU WYDAWNICZEGO ZWIĄZKU KÓŁ MATEMATYCZNYCH,
FIZYCZNYCH I ASTRONOMICZNYCH POLSKIEJ MŁODZIEŻY AKADEMICKIEJ**

ODBITO W Drukarni Polskiej Franciszka Zemanka w Krakowie.

W S T Ę P.

W czerwcu roku 1696 w wychodzącym w Lipsku czasopiśmie „Acta Eruditorum“ Jan Bernoulli zaproponował matematykom rozwiązanie następującego zagadnienia:

W płaszczyźnie pionowej dane są dwa punkty A i B ; dla punktu materialnego, poruszającego się pod wpływem siły ciężkości, wskazać tor, łączący punkty A i B , taki, iż punkt materialny, wychodząc z A , znajdzie się w B w najkrótszym czasie.

Zagadnienie owo dało początek nowemu działowi matematyki, noszącemu nazwę rachunku warjacyjnego.

Aby wyjaśnić, jakiego rodzaju kwestjami matematycznymi zajmuje się rachunek warjacyjny, postaramy się sformułować analitycznie zagadnienie J. Bernoulliego, inaczej mówiąc, zagadnienie brachistochrony.

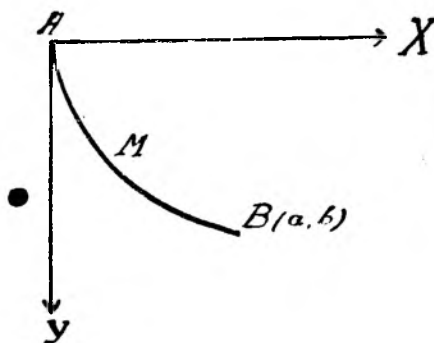
Wybieramy w płaszczyźnie ruchu rozważanego ważkiego punktu materialnego M układ osi współrzędnych prostokątnych XAY , przyczem za oś X przyjmujemy prostą poziomą, a za oś Y prostą pionową i skierowaną ku dołowi. Współrzędne punktów A i B będą odpowiednio $(0, 0)$ i (a, b) .

Jeżeli, jak zwykle, g oznaczać będzie przyspieszenie siły ciężkości, masę zaś punktu M przyjmiemy za 1, to nazywając v szybkość punktu M , otrzymamy na zasadzie prawa żywych sił równanie:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = 2gy + v_0^2 \quad (1)$$

gdzie v_0 jest prędkością początkową

punktu, zaś $\frac{ds}{dt}$ oznacza pochodną długości łuku toru, wziętą względem czasu.



Rys. 1.

Jeżeli pozatem założymy, iż równanie toru może być napisane w postaci $y=y(x)$, przyczem funkcja $y(x)$ jest w przedziale $0 \leq x \leq a$ funkcją jednoznaczną i posiadającą ciągłą pierwszą pochodną, wówczas

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2},$$

a więc z równania (1) otrzymamy:

$$T = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{2gy + v_0^2}} = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy + v_0^2}} dx, \quad (2)$$

przyczem T oznacza czas, w ciągu którego punkt materialny przebył drogę od A do B , poruszając się po torze rozpatrywanym. Zatem w zagadnieniu J. Bernoulliego żąda się znalezienia funkcji $y(x)$, jednoznacznej i posiadającej ciągłą pierwszą pochodną, któraby nadawała najmniejszą wartość całce (2) i przytem spełniały warunki graniczne $y(0) = 0$, $y(a) = b$.

Zagadnienie to jest wypadkiem szczególnym ogólniejszego zagadnienia, które można wypowiedzieć w sposób następujący:

znaleźć funkcję $y(x)$ jednoznaczną i posiadającą ciągłą pierwszą pochodną w przedziale (a, b) , która nadawałaby całce

$$I = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (3)$$

wartość ekstremalną i spełniałaby warunki graniczne: $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, przyczem funkcja f , granice a i b oraz wartości y_a i y_b są nam dane.

2. Z kolei i takie postawienie kwestji można jeszcze uogólnić, zakładając, iż funkcja podcałkowa f zależy nie tylko od funkcji niewiadomej $y(x)$ i jej pierwszej pochodnej, ale również i od pochodnych wyższych rzędów, do pewnego rzędu p włącznie. W tym wypadku możemy przyjąć, iż pewne warunki graniczne musi spełniać nie tylko sama funkcja, ale i niektóre jej pochodne.

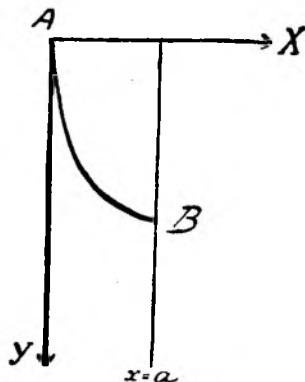
Idąc po drodze jeszcze dalszych uogólnień, możemy przyjąć, iż funkcja podcałkowa zależy nie od jednej, a od kilku funkcji niewiadomych i ich kolejnych pochodnych do pewnych rzędów. W ten sposób dochodzimy do postawienia następującego zagadnienia:

Znaleźć funkcje $y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x)$, które nadawałyby wartość ekstremalną całce

$$I = \int_a^b f(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(p_1)}, y_2, y_2' \dots y_2^{(p_2)}, \dots y_n, y_n' \dots y_n^{(p_n)}) dx \quad (4)$$

i poza warunkami różniczkowości i ciągłości pochodnych do pewnych rzędów włącznie, spełniałyby jeszcze pewne warunki graniczne.

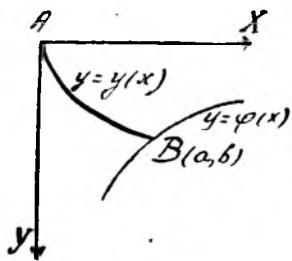
3. Jakiego rodzaju mogą być wspomniane warunki graniczne, pokażemy na prostym przykładzie nieco zmodyfikowanego zagadnienia brachistochrony. Założmy, mianowicie, iż trzeba znaleźć tor punktu materialnego, poruszając się po którym, ten ostatni stoczy się w czasie najkrótszym z danego punktu A na pewną prostą pionową. Jeżeli, jak i dawniej, wybierzemy prostokątny układ współrzędnych o początku w punkcie A , zaś równanie prostej pionowej będzie $x = a$, to zauważymy, iż w rozpatrywanym zagadnieniu nie jest nam dana rzędna punktu B — końca naszego toru, a zatem tę rzędną trzeba będzie określić z warunku minimum całki (2).



Rys. 2.

Jeżelibyśmy szukali linii najkrótszego spadku punktu materialnego, staczającego się z danego punktu A na daną krzywą, to, przy tym samym układzie współrzędnych, trzeba by szukać minimum całki (2), dla której górna granica a już nie jest daną; funkcja niewiadoma $y(x)$ powinna dawać minimum całki (2) i spełniać warunki graniczne $y(0) = 0$, $y(a) = \varphi(a)$, gdzie $y = \varphi(x)$ przedstawia równanie krzywej danej, na którą stacza się punkt materialny (p. rys. 3).

Granice całkowania a , t. j. odciętą końca krzywej szukanej określamy z warunku minimum całki (2). Nie będziemy się obecnie zatrzymywać na rozpatrywaniu różnych możliwych warunków granicznych w zagadnieniu ogólnym, ponieważ do tego jeszcze powrócimy. Zauważymy tylko, iż zagadnienie ogólne wypowiedziane przez nas wyżej, możemy nazwać zagadnieniem bezwarunkowego ekstremum całki (4); rację tej nazwy wyjaśnimy później.



Rys. 3.

4. Wróćmy, jednak, do najprostszego zagadnienia o znajdowaniu ekstremum całki

$$I = \int_a^b f(x, y, y') dx,$$

przyczem chwilowo nie bierzemy pod uwagę warunków granicznych. Gdy w tej całce będziemy podstawiali zamiast y (a więc pośrednio i y') takie funkcje x , ażeby całka nasza miała określony sens, to, oczywiście, jej wartość liczbową będzie się zmieniała; z tego punktu widzenia mamy prawo

powiedzieć, że całka nasza jest funkcją od funkcji $y(x)$, ale musimy natychmiast podkreślić, iż owa zależność funkcyjna jest zależnością specjalnego rodzaju. Rzeczywiście: I zależy od zbioru wszystkich wartości, które przyjmuje funkcja $y = y(x)$ w przedziale od a do b . Mówiąc językiem geometrycznym, powiemy, że I zależy od całego łuku krzywej $y = y(x)$ w przedziale $a \leq x \leq b$ albo inaczej: I jest funkcją linii. Wraz ze zmianą krzywej, t. j. postaci funkcji $y = y(x)$, zmienia się wartość liczbową I .

Systematycznym badaniem tego rodzaju funkcji zajęto się stosunkowo niedawno i w tej dziedzinie najwięcej ciekawymi i ważnymi są prace matematyka włoskiego Vito Volterra i jego uczniów. Poza całym szeregiem prac, poświęconych tym kwestjom, są one badane systematycznie w dziele Volterra *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris 1913 i w dziele Paul Lévy *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Paris 1922. Z punktu widzenia nauki o funkcjach linii, rachunek warjacyjny przedstawia dział, odpowiadający działowi o wartościach ekstremalnych funkcji zmiennych niezależnych.

Zauważymy, iż wraz z funkcjami linii, możemy mówić o funkcjach powierzchni, objętości i wogóle rozmaitości wielowymiarowych. Np. całka podwójna, rozciągnięta na pewien obszar płaski σ ,

$$I = \iint_{\sigma} f(x, y, z) dx dy, \quad (5)$$

gdzie z oznacza dowolną funkcję (x, y) , zależy od zbioru wszystkich wartości z , przyjmowanych w obszarze σ , inaczej mówiąc, jest ona funkcją pewnej części powierzchni $z = z(x, y)$, odpowiadającej obszarowi σ . Jeżeli byśmy mieli na celu znalezienie powierzchni $z = z(x, y)$, przechodzącej przez dany kontur i nadającej wartość ekstremalną całce (5), to znów mielibyśmy do czynienia z zagadnieniem z dziedziny rachunku warjacyjnego.

5. Jak wiadomo, w teorii ekstremów funkcji wielu zmiennych różniamy dwa rodzaje zagadnień: zagadnienia na ekstremum bez warunkowe i ekstremum warunkowe. Zagadnienia pierwszego rodzaju dadzą się przedstawić w postaci następującej: znaleźć ekstremum funkcji $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, zakładając, iż zmienne niezależne pozostają w określonych przedziałach. W zagadnieniach drugiego rodzaju szukamy ekstremum funkcji

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

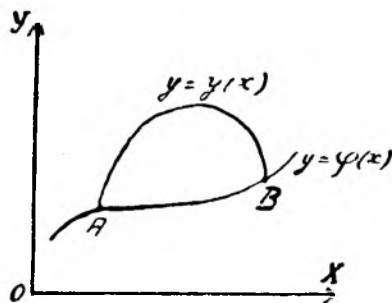
w założeniu, iż w rozpatrywanych przedziałach zmienne x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) są związane pewnymi równaniami

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, f_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Zupełnie podobnie rzecz się przedstawia w dziedzinie rachunku warjacyjnego. Jako przykład rozpatrzmy następujące zagadnienie:

Znaleźć krzywą płaską, przeprowadzoną między dwoma danymi punktami A i B , leżącymi na danej krzywej $y = \varphi(x)$, (p. rys. 4) taką, żeby krzywa szukana 1^o miała daną długość s i 2^o wraz z daną krzywą $y = \varphi(x)$, o której zakładamy, że jest ciągłą, ograniczała największe pole.

Niech odciętymi punktów A i B będą odpowiednio liczby a i b ($a < b$); jeżeli przyjmiemy, że krzywa szukana posiada w przedziale $a \leq x \leq b$ równanie $y = y(x)$, gdzie $y(x)$ w tym przedziale jest funkcją jednoznaczną, posiadającą ciągłą pierwszą pochodną, wówczas możemy sformułować analitycznie nasze zagadnienie w sposób następujący:



Rys. 4.

Znaleźć w przedziale $a \leq x \leq b$ funkcję $y(x)$, jednoznaczną, o ciągłej pierwszej pochodnej, spełniającą warunki: $y(a) = \varphi(a)$, $y(b) = \varphi(b)$

(gdzie $\varphi(x)$ jest daną funkcją ciągłą i jednoznaczną w danym przedziale) i taką, ażeby całka

$$\int_a^b [y(x) - \varphi(x)] dx$$

osiągnęła największą wartość, podczas gdy całka

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

musi posiadać z góry daną wartość liczbową s .

Oczywiście, ten ostatni warunek jest pewnem ograniczeniem, nałożonem na funkcję $y(x)$. Dopiero co sformułowane zagadnienie nosi nazwę zagadnienia izoperymetrów.

6. Innego rodzaju będą warunki, które musi spełniać funkcja niewiadoma w następujących zagadnieniach.

Na danej powierzchni

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad (6)$$

znaleźć linję najkrótszej odległości, łączącą punkty (a, b, c) i (A, B, C) .

Jeżeli założymy, że równanie szukanej krzywej da się napisać w postaci

$$y = y(x), \quad z = z(x)$$

gdzie $y(x)$ i $z(x)$ są, jak zawsze, funkcjami jednoznacznymi, o ciągłych pierwszych pochodnych w przedziale $a \leq x \leq A$, wówczas zagadnienie nasze sprowadza się do znalezienia minimum całki

$$\int_a^A \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx \quad (7)$$

przy założeniu, iż funkcje szukane $y(x)$ i $z(x)$ są związane równaniem (6) i spełniają warunki: $y(a) = b$, $z(a) = c$, $y(A) = B$, $z(A) = C$. Znow więc warunek (6) ogranicza wybór funkcji $y(x)$ i $z(x)$, pomiędzy którymi szukamy funkcji, nadających minimalną wartość całce (7). Rozpatrzmy teraz następujące zagadnienie:

Znaleźć linię najkrótszego spadku punktu materialnego o masie l , poruszającego się w płaszczyźnie pionowej z punktu $A(a, y_a)$ do punktu $B(b, y_b)$, jeżeli przytem opór ośrodka jest pewną daną funkcją $f(v)$ szybkości v .

Przyjmując za oś x prostą poziomą, leżącą wraz z punktami A i B w pewnej płaszczyźnie pionowej, a za oś y prostą pionową, skierowaną ku dołowi i, zakładając, że $f(v)$ przedstawia wartość bezwzględną oporu, mamy z jednej strony przyrost siły żywej $d\frac{v^2}{2}$ a z drugiej pracę elementarną siły ciężkości i oporu środka w postaci $gdy - f(v) ds$, gdzie g jest przyspieszeniem siły ciężkości a ds elementem drogi. Przyrównywując te wyrażenia, otrzymamy

$$vv' = gy' - f(v) \sqrt{1 + y'^2}. \quad (8)$$

Z drugiej strony, biorąc pod uwagę, że $v = \frac{ds}{dt}$, znajdziemy następujący wzór na czas spadania

$$T = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v} dx. \quad (9)$$

W ten sposób zadanie nasze sprowadza się do znalezienia takich funkcji y i v , które nadają wartość ekstremalną całce (9), a same są związane równaniem różniczkowym (8). Oczywiście, pozatem funkcje te muszą spełniać jeszcze pewne warunki graniczne.

7. Rozpatrzone powyżej zagadnienia mogą być uogólnione w sposób następujący:

Znaleźć funkcje $y_1, y_2, \dots, y_n$ jednoznaczne, o ciągłych pochodnych do pewnych rzędów włącznie, które dawałyby ekstremum całki:

$$\int_a^b f(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(p_1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(p_n)}) dx,$$

przyczem całki

$$\int_a^b f_i(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(q_1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(q_n)}) dx \quad i = 1, 2, \dots, p$$

mają z góry dane wartości liczbowe, zaś same funkcje spełniają pewne dane równania różniczkowe (w szczególnym wypadku równania skończone t. j. nie zawierające pochodnych funkcji niewiadomych)

$$\varphi_j(x, y_1, y'_1, \dots, y_1^{(r_1)}, \dots, y_n, y'_n, \dots, y_n^{(r_n)}) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, q$$

oraz pewne warunki graniczne. Oczywiście jest, że liczba równań $\varphi_j = 0$ musi być mniejszą niż n .

Analogiczne zagadnienia można byłoby postawić przy badaniu ekstremów całek podwójnych, potrójnych i t. d. zależących od funkcji 2, 3 itd. zmiennych. Wszystkie zagadnienia tego rodzaju będziemy nazywali zagadnieniami na ekstremum warunkowe.

8. Wróćmy jednak do naszego najprostszego zagadnienia:

Znaleźć funkcję $y(x)$ jednoznaczna, posiadającą ciągłą pierwszą pochodną w przedziale (a, b) i taką, żeby dawała wartość ekstremalną całki

$$I = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (10)$$

i spełniała przytem warunki graniczne $y(a) = y_a, y(b) = y_b$, gdzie y_a i y_b są danymi liczbami. Weźmy pod uwagę zbiór wszystkich funkcji spełniających warunki jednoznaczności, różniczkowalności oraz nasze warunki graniczne. Zbiór wszystkich tych funkcji nazwiemy obszarem funkcyjnym albo dziedziną funkcyjną (Y). Podstawiając owe funkcje do całki (10) otrzymamy nieskończenie wiele wartości, które może przybierać całka I . Mnogość tych wartości posiada kres górny i dolny; pierwszy z nich nazwiemy M , a drugi m ; jedna z tych liczb, a nawet obie, mogą być i nieskończone.

Jeżeli dla pewnej z rozpatrywanych funkcji np. $y = \bar{y}(x)$ mamy

$$\int_a^b f(x, \bar{y}, \bar{y}') dx = M,$$

wówczas powiadamy, iż całka I w dziedzinie funkcyjnej (Y) posiada a b s o l u t n e (albo bezwzględne) maximum.

Jeżeli istnieje, przynajmniej jedna, funkcja $y = \underline{y}(x)$ obszaru (Y), taka, iż

$$\int_a^b f(x, \underline{y}, \underline{y}') dx = m,$$

to powiadamy, że całka I posiada w obszarze funkcyjnym (Y) a b s o l u t n e (bezwzględne) minimum.

Jak wiadomo, naogół, kres górny nieskończonego zbioru liczb rzeczywistych sam do zbioru może nie należeć, a zatem, mówiąc ogólnie, absolutne maximum czy minimum całki (10) może nie istnieć.

Jeżeli na szukaną funkcję $y(x)$ będziemy nakładali warunki ograniczające, w rodzaju tych, iż musi ona posiadać w przedziale (a, b) poza pierwszą również i drugą pochodną, albo że musi być analityczną itp., to oczywiście, obszary funkcyjne, dla których będziemy badali wartości całki I , będą za każdym razem inne. Jest rzeczą zupełnie zrozumiałą, że jeżeli

w pewnej dziedzinie funkcyjnej nie istnieje ekstremum absolutne całki I , to stąd nie można wnioskować, iż nie istnieje ono i w innej dziedzinie.

Np. całka I może nie posiadać ekstremum absolutnego w dziedzinie funkcji $y(x)$, nie będących jednostajnie ograniczonymi*) w przedziale (a, b) , i posiadać je w dziedzinie funkcji jednostajnie ograniczonych, albo np. ekstremum całki może nie istnieć dla funkcji $y(x)$, posiadających tylko pierwszą pochodną, a istnieć gdy rozważamy funkcje, posiadające skończoną drugą pochodną itp.

Przy rozwiązywaniu, zatem, jakiegokolwiek zagadnienia z rachunku warjacyjnego musimy zawsze wskazać obszar funkcyjny, w którym szukamy rozwiązania.

9. Załóżmy, że w pewnej dziedzinie funkcyjnej (Y) istnieje ekstremum całki (10), i niech to ekstremum będzie osiągnięte przez funkcję $y = y(x)$. Jeżeli w obszarze (Y) rozpatrzymy pewien podobzar (Y_1) , zawierający funkcję $y = y(x)$, to, oczywiście, ta ostatnia da ekstremalną wartość dla całki I również i w obszarze (Y_1) . Np. jeżeliby funkcja $y = y(x)$, posiadająca ciągłe pochodne pierwszą i drugą, dawała ekstremum całki (10) w obszarze (Y) funkcji, posiadających pierwszą pochodną, ale mogących, ewentualnie, nie posiadać pochodnej drugiej, to funkcja $y = y(x)$ daje również ekstremum całki I w obszarze (Y_1) , składającym się z funkcji, posiadających pierwszą i drugą pochodne.

Okoliczność odwrotna może nie zachodzić; mianowicie, jeżeli w dziedzinie funkcyjnej (Y_1) , będącej częścią dziedziny (Y) , pewna funkcja $y(x)$ daje ekstremum całki I , to, naogół biorąc, ta sama funkcja $y = y(x)$ nie będzie już dawała ekstremum w dziedzinie (Y) . Zauważymy jeszcze rzecz następującą: jeżeli funkcja $y = y(x)$ daje ekstremum całki I w pewnym obszarze funkcyjnym (Y) , to zawsze będzie istniał pewien obszar (Y_1) , będący częścią (Y) , dla którego funkcja $y(x)$ będzie dawała ekstremum całki I . Będziemy mówili, że funkcja $y = y(x)$ daje ekstremum względne całki I w pewnym obszarze funkcyjnym (Y) , jeżeli funkcja $y(x)$ daje ekstremum bezwzględne w pewnym obszarze (Y_1) , będącym częścią (Y) .

Na zasadzie powyższego określenia możemy powiedzieć, iż ekstremum bezwzględne całki I w pewnej dziedzinie funkcyjnej (Y) jest zarazem ekstremum względne, ale nie naodwrot.

Pojęcia ekstremum względnego i bezwzględnego mogą być, oczywiście, przeniesione na wypadek, gdy mamy do czynienia z całkami, zależnymi od wielu funkcji niewiadomych, zarówno w zadaniach na ekstremum warunkowe jak i bezwarunkowe. Również jest rzeczą zrozumiałą, że możemy mówić o ekstremum względnym lub bezwzględnym tylko w stosunku do określonych dziedzin funkcyjnych t.j. pewnych zbiorów funkcji.

*) Mówimy, iż funkcje, należące do pewnego zbioru funkcji, są jednostajnie ograniczone, jeżeli istnieje liczba rzeczywista A większa od wartości bezwzględnych każdej z naszych funkcji.

Zauważymy, iż często będzie nam wygodnie korzystać z następującej terminologii: punktem przestrzeni $(n+1)$ wymiarowej będziemy nazywali każdy układ $n+1$ liczb rzeczywistych $x^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$; krzywą w przestrzeni $(n+1)$ wymiarowej — każdy układ n funkcji rzeczywistych

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x),$$

rozpatrywanych jednocześnie. Gdy $n=1$, lub $n=2$, wówczas zdefiniowanym w ten sposób punktem i krzywym odpowiadają istotnie pewne twory geometryczne — punkty i krzywe — na płaszczyźnie i w przestrzeni. Pozatem, często będziemy korzystali z pojęcia krzywej sąsiedniej względem danej krzywej i dlatego wyjaśnimy bliżej to pojęcie.

Niech będzie dana krzywa

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x), \quad (11)$$

przyczem wszystkie funkcje $y_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, n$) są jednoznaczne w przedziale (a, b) i posiadają tam pochodne skończone do rzędu p włącznie. Weźmy teraz pod uwagę układ $n(q+1)$ liczb dodatnich

$$A_0^{(i)}, A_1^{(i)}, \dots, A_q^{(i)} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (q \leq p),$$

przyczem $q \leq p$; wówczas powiemy, iż pewna krzywa

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_1(x), \bar{y}_2 = \bar{y}_2(x), \dots, \bar{y}_n = \bar{y}_n(x) \quad (12)$$

jest w przedziale (a, b) sąsiednią względem krzywej (11) i przytem sąsiedztwo to jest rzędu q , jeżeli dla $a \leq x \leq b$ zachodzą nierówności:

$$|\bar{y}_i(x) - y_i(x)| < A_0^{(i)}, |\bar{y}'_i(x) - y'_i(x)| < A_1^{(i)}, \dots, |\bar{y}_i^{(q)}(x) - y_i^{(q)}(x)| < A_q^{(i)} \\ (i=1, 2, \dots, n). \quad (13)$$

Oczywistem jest, że sąsiedztwo, określa się z jednej strony rzędem q , a z drugiej — liczbami $A_0^{(i)}, A_1^{(i)}, \dots, A_q^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, n$).

Zbiór wszystkich krzywych pewnej dziedziny funkcyjnej, sąsiednich względem krzywej (11) — w sensie wskazanym wyżej — nazwiemy obszarem sąsiedztwa rzędu q lub po prostu sąsiedztwem rzędu q krzywej (11), określonym przez liczby $A_0^{(i)}, A_1^{(i)}, \dots, A_q^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, n$).

Jeżeli funkcja $y(x)$ będzie posiadała w rozpatrywanym przedziale ciągłe pochodne do rzędu p włącznie, to powiemy, iż funkcja $y(x)$ należy do klasy $C^{(p)}$, natomiast jeżeli funkcja będzie posiadała funkcje pochodne ciągłe do $(p-1)$ rzędu włącznie, zaś pochodne p -go rzędu będzie istniała i będzie ciągła wszędzie z wyjątkiem skończonej ilości punktów (w których pochodne prawo-stronna i lewo-stronna będą istniały i będą różne)

wówczas będziemy mówili, iż funkcja należy do klasy $D^{(p)*}$. Często będziemy mówili, iż krzywa

$$y = y(x)$$

należy do klasy $C^{(p)}$ lub $D^{(p)}$, jeżeli funkcja $y(x)$ należy do klasy $C^{(p)}$ lub $D^{(p)}$.

Przejście od danej krzywej (11) dowolnej do innej krzywej nazwiemy zmianą krzywej danej.

Jeżeli krzywa dana i wszystkie krzywe (12), do których przechodzimy, należą do pewnego obszaru funkcyjnego (Y) — to powiemy, iż krzywą daną zmieniamy w obszarze (Y).

Jeżeli przytem krzywe (12) spełniają warunek (13) wówczas będziemy mówili, że krzywa (11) zmienia się w obszarze sąsiedztwa q -go rzędu, określone przez liczby $A_0^{(i)}, A_1^{(i)}, \dots, A_q^{(i)}$.

Różnicę między dowolną funkcją $\bar{y}_i(x)$ i daną funkcją $y_i(x)$ nazwiemy warjacją funkcji danej i piszemy

$$\bar{y}_i(x) - y_i(x) = \delta y_i(x). \quad (14)$$

Analogicznie, przez $\delta y'_i(x), \delta y''_i(x), \dots, \delta y_i^{(p)}(x)$ oznaczamy różnice:

$$\begin{aligned} \bar{y}'_i(x) - y'_i(x) &= \delta y'_i(x), \quad \bar{y}''_i(x) - y''_i(x) = \delta y''_i(x), \dots \\ \bar{y}_i^{(p)}(x) - y_i^{(p)}(x) &= \delta y_i^{(p)}(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Opierając się na powyższych określeniach widzimy, iż

$$\frac{d^p}{dx^p} \delta y_i(x) = \delta \frac{d^p}{dx^p} y_i(x),$$

a więc operacje, wyrażone przez symbole δ i $\frac{d}{dx}$, posiadają własność przemienności.

*) Punkty, w których pochodna prawostronna i lewostronna funkcji $f(x)$ istnieją i są różne, nazywamy punktami kątowymi funkcji $f(x)$. Np. dla funkcji $y = f(x) = |x|$ punktem kątowym będzie punkt $x=0$, gdyż pochodna prawostronna będzie $+1$, a lewostronna -1 . Możemy zatem powiedzieć, iż funkcję zaliczymy wtedy do klasy $D^{(p)}$, jeżeli pierwsze $(p-1)$ pochodnych są ciągłe zaś p -ta pochodna istnieje i jest ciągła z wyjątkiem ewentualnie skończonej ilości punktów kątowych pochodnej $(p-1)$ -ej. W przyszłości, będziemy rozważali tylko takie funkcje klasy $D^{(p)}$, które posiadają p -te liczby pochodne ograniczone.

ROZDZIAŁ I.

WARUNEK EULERA — LAGRANGE'A.

Zacniemy od rozpatrzenia najprostszego zagadnienia rachunku war-
jacyjnego:

Znaleźć w przedziale zamkniętym (a, b) funkcję jedno-
znaczną $y = \varphi(x)$, należącą do klasy $C^{(1)}$, która dawałaby
extremum całki

$$I = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (1)$$

i spełniałaby warunki $y(a) = y_a$ i $y(b) = y_b$, przyczem y_a
i y_b są danymi liczbami.

Założmy, iż taka funkcja istnieje i postarajmy się zbadać warunki
konieczne, które ona musi spełniać.

Jeżeli wartość całki I dla $y = \varphi(x)$ oznaczmy przez I_0 , wówczas,
z określenia extremum, wynika, że dla wszystkich krzywych obszaru
funkcyjnego, dla którego szukamy extremum, ma miejsce nierówność

$$I - I_0 \geq 0 \quad (2)$$

w wypadku minimum, i

$$I - I_0 \leq 0$$

w wypadku maximum.

Jak łatwo widzieć, możemy się ograniczyć wyłącznie do badania mi-
nimum t. j. do rozpatrywania nierówności (2), gdyż badanie maximum
całki I da się sprowadzić do badania minimum całki $-I$. Jeżeli dla wszyst-
kich krzywych, należących do rozważanej dziedziny funkcyjnej, możemy
w nierówności (2) znak $\geq$ zastąpić przez znak $>$, wówczas mówimy, że
minimum jest właściwe, jeżeli zaś dla pewnej funkcji $y(x)$, należącej
do naszej dziedziny i różnej od $\varphi(x)$, w (2) zachodzi znak równości — to
powiadamy, że mamy do czynienia z minimum niewłaściwym.

Jak widzieliśmy we wstępie, wszelkie extremum absolutne jest za-
razem extremum względnem. Skorzystamy z tej okoliczności przy wyprowa-

dzeniu warunków niezbędnych, które musi spełniać funkcja $\varphi(x)$, dająca ekstremum całki I .

Najpierw, jednak, zauważymy, iż aby można było stosować metody, z których korzystać będziemy później, musimy nałożyć pewne warunki na funkcję podcałkową $f(x, y, y')$. Przyjmijmy, mianowicie, że jest ona, w stosunku do swych argumentów x, y, y' funkcją jednoznaczną i należącą do klasy $C^{(3)}$ t. j. posiada wszystkie pochodne cząstkowe względem x, y, y' do trzeciego rzędu włącznie, ciągłe gdy $A \leq x \leq B$, $\alpha_0 \leq y \leq \alpha_1$, a y' jest skończone, gdzie A i B są liczbami określonymi, przyczym $A < a$ i $B > b$; α_0 i α_1 oznaczają liczby skończone, a nawet w pewnych wypadkach $\pm \infty$.

Zbiór wartości argumentów (x, y) nazwiemy obszarem (R) . Zatem rozważane przez nas funkcje $y(x)$ klasy $C^{(1)}$ muszą dla $A \leq x \leq B$ spełniać warunek

$$\alpha_0 \leq y(x) \leq \alpha_1, \quad y'(x) \text{ — skończone.} \quad (3)$$

Funkcje $y(x)$, spełniające te warunki, oraz warunki $y(a) = y_a$ i $y(b) = y_b$, tworzą pewną dziedzinę funkcyjną, którą nazwiemy dziedziną (Y) .

Dla krótkości będziemy często pisali funkcje $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ i t. d. w postaci $f_x, f_y, f_{y'}, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, f_{y'y}$ i t. d. zaś $f_\varphi, f_{\varphi'}$ i t. p. będzie oznaczać wartość $f_y, f_{y'}$ i t. p., gdy zamiast y i y' wstawimy $\varphi(x)$ i $\varphi'(x)$.

2. Jak widzieliśmy we wstępie, przy wyprowadzaniu warunków koniecznych możemy się ograniczyć do rozpatrywania dziedzin funkcyjnych specjalnego rodzaju, zawartych w dziedzinie (Y) i zawierających w sobie funkcję $y = \varphi(x)$.

Co się tyczy krzywej $y = \varphi(x)$, to założymy, że leży ona całkowicie wewnątrz obszaru (R) , to znaczy, że w przedziale (A, B) zachodzi nierówność

$$\alpha_0 < \varphi(x) < \alpha_1;$$

poza to założymy, że do dziedziny funkcyjnej (Y) należą wszystkie funkcje $y(x)$ klasy $C^{(1)}$, leżące w pewnym sąsiedztwie zerowego rzędu funkcji $\varphi(x)$, określonym przez pewną liczbę rzeczywistą $A_0 > 0$ t. j. wszystkie oznaczone funkcje, spełniające w przedziale zamkniętym (A, B) nierówność

$$-A_0 < y(x) - \varphi(x) < A_0.$$

Jest rzeczą oczywistą, że wszystkie punkty krzywych $y = y(x)$ muszą należeć do obszaru (R) .

Ponieważ zakładamy istnienie tylko pierwszej pochodnej funkcji $\varphi(x)$, przeto możemy rozpatrywać wyłącznie sąsiedztwa zerowego i pierwszego rzędu.

Jeżeli krzywe $y = y(x)$ znajdują się w sąsiedztwie zerowego rzędu, t. j. są ograniczone przez pewną liczbę A_0 tylko wartości bezwzględne

różnicy $y(x) - \varphi(x)$, wówczas powiemy, że krzywa $y = \varphi(x)$ zmienia się silnie, a warjację $\delta\varphi(x) = y(x) - \varphi(x)$ nazwiemy warjacją silną. Jeżeli zaś krzywe $y = y(x)$ należą do sąsiedztwa 1-go rzędu, scharakteryzowanego przez pewne stałe A_0, A_1 , t. j. jeżeli funkcje $y(x)$ spełniają warunki

$$|y(x) - \varphi(x)| < A_0, \quad |y'(x) - \varphi'(x)| < A_1, \quad (5)$$

to powiemy, że funkcja $y = \varphi(x)$ zmienia się słabo, zaś warjację $\delta\varphi(x) = y(x) - \varphi(x)$ nazwiemy warjacją słabą.

Oczywiście, zbiór warjacji słabych jest częścią zbioru warjacji silnych, a więc, jeżeli krzywa $y = \varphi(x)$ daje ekstremum przy silnych zmianach, to powinna również dawać ekstremum przy zmianach słabych, ale nie naodwrot.

Zatem przy wprowadzaniu warunków koniecznych możemy się ograniczyć do rozpatrywania zmian słabych. Zrobimy, jednak, jeszcze dalsze ograniczenie i będziemy rozważać warjacje słabe pewnego kształtu. Będziemy mianowicie, porównywać wartość całki I , wziętej dla krzywej $y = \varphi(x)$, z wartościami całki I , wziętej dla krzywych

$$y = y(x) = \varphi(x) + h\eta(x), \quad (6)$$

gdzie $\eta(x)$ jest dowolną funkcją klasy $C^{(1)}$ w przedziale $a \leq x \leq b$. Ponieważ, z założenia, wszystkie nasze krzywe przechodzą przez punkty (a, y_a) oraz (b, y_b) więc, pozatem musi być

$$\eta(a) = \eta(b) = 0.$$

Funkcje $\eta(x)$, posiadające wyżej wskazane własności, tworzą dziedzinę funkcyjną, którą nazwiemy (H) .

Przy $h = 0$ funkcja $y(x)$ przechodzi w $\varphi(x)$. Oczywiście, jakiegokolwiek byłyby liczby dodatnie A_0 i A_1 , zawsze można dobrać $|h|$ tak małe aby

$$|y(x) - \varphi(x)| = |h\eta(x)| < A_0; \quad |y'(x) - \varphi'(x)| = |h\eta'(x)| < A_1.$$

3. Jeżeli w I zamiast y podstawimy funkcję (6), a więc, zamiast y' funkcję $\varphi'(x) + h\eta'(x)$, wówczas całka I stanie się pewną funkcją h

$$I(h) = \int_a^b f(x, y, y') dx = \int_a^b f(x, \varphi + h\eta, \varphi' + h\eta') dx, \quad (7)$$

posiadającą ekstremum przy $h = 0$. Wskutek warunków, które nałożyliśmy na funkcję $f(x, y, y')$, dla h dostatecznie małych co do wartości bezwzględnej funkcja $I(h)$ będzie posiadała względem h ciągłe pochodne do trzeciego rzędu włącznie, a więc warunkiem koniecznym istnienia ekstremum przy $h = 0$ będzie

$$\left[\frac{dI(h)}{dh} \right]_{h=0} = 0 \quad (8)$$

przyczem ten warunek musi być spełniony dla dowolnych funkcji $\eta(x)$ należących do dziedziny (H) .

Różniczkując (7) względem h i kładąc $h=0$, napiszemy warunek (8) w postaci

$$\left[\frac{dI(h)}{dh} \right]_{h=0} = \int_a^b (f_{\varphi} \eta + f_{\varphi'} \eta') dx = 0. \quad (9)$$

Funkcje $f_{\varphi}[x, \varphi(x), \varphi'(x)]$ i $f_{\varphi'}[x, \varphi(x), \varphi'(x)]$ są w przedziale (a, b) ciągłymi, a więc i całkowalnymi, funkcjami x . Całkując przez części

$$\int_a^b f_{\varphi} \eta dx,$$

doprowadzimy (9) do postaci

$$\eta(x) \int_a^x f_{\varphi} dx \Big|_a^b + \int_a^b [f_{\varphi'} - \int_a^x f_{\varphi} dx] \eta'(x) dx = 0, \quad (10)$$

gdzie symbol $\psi(x) \Big|_a^b$ oznacza różnicę $\psi(b) - \psi(a)$.

Na mocy założenia $\eta(a) = \eta(b) = 0$, przeto wzór (10) da się przedstawić w kształcie

$$\int_a^b [f_{\varphi'} - \int_a^x f_{\varphi} dx] \eta'(x) dx = 0. \quad (11)$$

Zatem, jeżeli krzywa $y = \varphi(x)$ daje całce I wartość ekstremalną w porównaniu z sąsiednimi krzywymi, wówczas związek (11) musi zachodzić dla wszystkich funkcji $\eta(x)$, należących do dziedziny (H) . Oznaczmy przez $\omega(x)$ funkcję

$$\omega(x) = f_{\varphi'} - \int_a^x f_{\varphi} dx.$$

Wykażemy, iż $\omega(x)$ jest stałą i w tym celu udowodnimy następujący *l e m a t*. Jeżeli dla pewnej funkcji $\omega(x)$, ciągłej w przedziale (a, b) , stale zachodzi równość

$$\int_a^b \omega(x) \mathcal{F}(x) dx = 0 \quad (\alpha)$$

jakąkolwiek byłaby funkcja $\mathcal{F}(x)$ ciągła w (a, b) i spełniająca warunek

$$\int_a^b \mathcal{F}(x) dx = 0, \quad (\beta)$$

wówczas $\omega(x) = \text{Const.}$ dla $a \leq x \leq b$.

D o w ó d. Z (α) i (β) wynika, że dla dowolnej stałej C :

$$\int_a^b [\omega(x) - C] \mathcal{F}(x) dx = 0. \quad (\gamma)$$

Nadamy C pewną określoną wartość, mianowicie, taką, aby

$$\int_a^b [\omega(x) - C] dx = \int_a^b \omega(x) dx - C(b-a) = 0.$$

Wówczas funkcja ciągła: $\omega(x) - C = \mathcal{F}(x)$ będzie spełniała warunek (β), zatem kładąc w (γ) tę szczególną wartość funkcji $\mathcal{F}(x)$, dostaniemy

$$\int_a^b [\omega(x) - C]^2 dx = 0$$

co, przy założeniu ciągłości funkcji $\omega(x)$, jest możliwe tylko wtedy, gdy $\omega(x) = C$ a więc lemat jest udowodniony.

Zastosujemy go do naszego wypadku, kładąc $\mathcal{F}(x) = \eta'(x)^*$. Ponieważ z założenia

$$\int_a^b \eta'(x) dx = \eta(b) - \eta(a) = 0,$$

przeto wnioskujemy, iż

$$\omega(x) = f_{\varphi'}(x, \varphi, \varphi') - \int_a^x f_{\varphi}(x, \varphi, \varphi') dx = C, \quad (13)$$

przyczem C oznacza pewną stałą.

A więc warunkiem koniecznym zachodzenia równości (11) przy dowolnej funkcji $\eta(x)$, należącej do dziedziny (H), jest aby miał miejsce związek (13). Łatwo widzieć, że i naodwrot, warunek (13) jest wystarczającym, gdyż pociąga za sobą związek (11) dla wszystkich funkcji $\eta(x)$, należących do (H).

Funkcja

$$\int_a^x f_{\varphi}(x, \varphi, \varphi') dx$$

jest różniczkowalną, a więc, na zasadzie (13), możemy stąd wnioskować o różniczkowalności funkcji $f_{\varphi}(x, \varphi, \varphi')$, zatem

$$\frac{d}{dx} f_{\varphi'}(x, \varphi, \varphi') - f_{\varphi}(x, \varphi, \varphi') = 0. \quad (14)$$

A więc: jeżeli krzywa $y = \varphi(x)$ klasy $C^{(1)}$ daje ekstremum całki I , wówczas musi ona spełniać warunek (14). Otrzymany wynik stanowi twierdzenie Du-Bois-Reymond'a.

4. W wypadku gdy $f_{\varphi'}(x, \varphi, \varphi')$ zależy od φ' t. j. jeżeli $f_y(x, y, y')$ zależy od y' , i jeżeli przytem funkcja $\varphi(x)$ posiada skończoną drugą pochodną, wówczas związek (14) da się przepisać w postaci:

*) Jak łatwo widzieć, każdą funkcję ciągłą, $\mathcal{F}(x)$, spełniającą warunek (β), można uważać za pochodną pewnej funkcji $\eta(x)$ klasy $C^{(1)}$, spełniającej warunek $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Wystarczy położyć

$$\eta(x) = \int_a^x \mathcal{F}(x) dx$$

$$f_{\varphi'\varphi'} \cdot \varphi'' + f_{\varphi'\varphi} \cdot \varphi' + f_{\varphi'x} - f_{\varphi} = 0, \quad (15)$$

skąd wnioskujemy, że $y = \varphi(x)$ jest całką równania różniczkowego drugiego rzędu

$$\frac{d}{dx} f_y - f_y = f_{y'y'} \cdot y'' + f_{y'y} y' + f_{y'x} - f_y = 0. \quad (16)$$

Powyższe równanie różniczkowe było znalezione po raz pierwszy przez Eulera i Lagrange'a i wskutek tego nosi nazwę równania Eulera-Lagrange'a. W ten sposób otrzymaliśmy następujące:

Twierdzenie Eulera-Lagrange'a. Jeżeli funkcja $y = \varphi(x)$ klasy $D^{(2)}$, przyjmująca pewne oznaczone wartości na krańcach przedziału (a, b) , daje ekstremum całki I w stosunku do krzywych sąsiednich, wówczas $\varphi(x)$ musi spełniać równanie różniczkowe Eulera-Lagrange'a*).

Krzywe, będące krzywymi całkowemi równania różniczkowego Eulera-Lagrange'a, noszą nazwę krzywych Eulera-Lagrange'a lub krzywych ekstremalnych.

5. W poprzednim paragrafie robiliśmy założenia co do istnienia drugiej pochodnej funkcji $\varphi(x)$; obecnie, wraz z Hilbertem, rozpatrzmy pewien warunek dostateczny istnienia tej pochodnej. W tym celu udowodnimy następujące:

Twierdzenie Hilberta. Jeżeli w przedziale zamkniętym (a, b) funkcja

$$f_{\varphi'\varphi'}[x, \varphi, \varphi']$$

jest różną od zera, wówczas funkcja $\varphi(x)$, spełniająca równanie (14), posiada ciągłą drugą pochodną.

Jak widzieliśmy wcześniej, funkcja $f_{\varphi'}(x, \varphi, \varphi')$ którą, dla krótkości, oznaczmy przez $\psi(x)$ posiada pochodną równą

$$f_{\varphi}[x, \varphi(x), \varphi'(x)].$$

Nadamy x -owi pewien przyrost h (w wypadku gdy $x = a$, $h > 0$, zaś gdy $x = b$, $h < 0$), wówczas wskutek ciągłości funkcji $\varphi(x)$ i $\varphi'(x)$ znajdziemy, że

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + k, \quad \varphi'(x+h) = \varphi'(x) + g,$$

przyczem

$$\lim_{h \rightarrow 0} k = \lim_{h \rightarrow 0} g = 0$$

i oprócz tego

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} = \varphi'(x).$$

Korzystając z twierdzenia o wartości pośredniej i opierając się na ciągłości

*) Wszędzie, oczywiście, za wyjątkiem skończonej ilości punktów, w których nie istnieje druga pochodna.

funkcji $f_{y'x}(x, y, y')$, $f_{y'y}(x, y, y')$, $f_{y'y'}(x, y, y')$ względem argumentów x, y, y' , możemy napisać

$$\frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} = \frac{f_{\varphi'}(x+h, \varphi+k, \varphi'+g) - f_{\varphi'}(x, \varphi, \varphi')}{h} =$$

$$= \frac{[f_{\varphi'x}(x, \varphi, \varphi') + \varepsilon]h + [f_{\varphi'\varphi}(x, \varphi, \varphi') + \varepsilon_1]k + [f_{\varphi'\varphi'}(x, \varphi, \varphi') + \varepsilon_2]g}{h},$$

przyczem

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0.$$

Przechodząc do granicy $h = 0$ i biorąc pod uwagę, że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} = f_{\varphi}(x, \varphi, \varphi'),$$

otrzymamy

$$f_{\varphi}(x, \varphi, \varphi') = f_{\varphi'x}(x, \varphi, \varphi') + f_{\varphi'\varphi}(x, \varphi, \varphi') \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} [f_{\varphi'\varphi'}(x, \varphi, \varphi') + \varepsilon_2] \frac{g}{h}$$

Stąd możemy wnioskować o istnieniu granicy

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f_{\varphi'\varphi'}(x, \varphi, \varphi') + \varepsilon_2] \frac{g}{h} = f_{\varphi}(x, \varphi, \varphi') - f_{\varphi'x}(x, \varphi, \varphi') - f_{\varphi'\varphi}(x, \varphi, \varphi') \varphi'(x). \quad (17)$$

Ponieważ, jednak, z założenia, $f_{\varphi'\varphi'}(x, \varphi, \varphi')$ w zamkniętym przedziale (a, b) jest różną od zera, przeto:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f_{\varphi'\varphi'}(x, \varphi, \varphi') + \varepsilon_2] \frac{g}{h} = f_{\varphi'\varphi'}(x, \varphi, \varphi') \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g}{h} =$$

$$= f_{\varphi'\varphi'}(x, \varphi, \varphi') \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x+h) - \varphi'(x)}{h} = f_{\varphi'\varphi'}(x, \varphi, \varphi') \varphi''(x)$$

W ten sposób udowodniliśmy istnienie $\varphi''(x)$, przyczem, jak to widać z (17), $\varphi''(x)$ będzie funkcją ciągłą.

Jeżeliby funkcja $f_{\varphi'\varphi'}(x, \varphi, \varphi')$ stawała się zerem w pewnym punkcie przedziału (a, b) , to w tym punkcie $\varphi''(x)$ mogłaby nie istnieć, gdyż z (17) wynika tylko istnienie granicy

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f_{\varphi'\varphi'}(x, \varphi, \varphi') + \varepsilon_2] \frac{g}{h},$$

zaś ta ostatnia, w wypadku $f_{\varphi'\varphi'}(x, \varphi, \varphi') = 0$ mogłaby istnieć nawet wtedy

gdy stosunek $\frac{g}{h} = \frac{\varphi'(x+h) - \varphi'(x)}{h}$ nie zdąży do żadnej granicy. Wa-

runek $f_{\varphi'\varphi'}(x, \varphi, \varphi') \neq 0$ jest spełniony w wypadku, który Hilbert nazywa regularnym, a mianowicie, w wypadku, gdy dla wszystkich punktów (x, y) dziedziny (R) i dla wszystkich skończonych wartości y' funkcja $f_{y'y'}(x, y, y')$ jest różna od zera.

6. Badając związek (14) Du-Bois-Reymond'a, zakładaliśmy, że funkcja $f_{\varphi'}(x, \varphi, \varphi')$ zależy naogół od φ' , t. j. że funkcja $f_{y'}(x, y, y')$ zależy od y' .

Założmy, obecnie, jako wypadek szczególny, że $f_{y'}(x, y, y')$ nie zależy od y' . Jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f(x, y, y')$ jest linjową względem y' , t. j.

$$f(x, y, y') = P(x, y) + Q(x, y) y',$$

gdzie $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są jednoznacznie ciągłymi funkcjami x i y . W tym wypadku związek (14) przekształca się na następujący:

$$\frac{d}{dx} Q(x, \varphi) = P_{\varphi}(x, \varphi) + Q_{\varphi}(x, \varphi) \varphi'$$

albo

$$Q_x(x, \varphi) = P_{\varphi}(x, \varphi).$$

Stąd widzimy, że w tym wypadku funkcja $y = \varphi(x)$ musi spełniać związek

$$Q_x(x, y) = P_y(x, y). \quad (18)$$

Związek ten może być równaniem lub tożsamością. W pierwszym wypadku równanie to musi przedstawiać krzywą, mogącą dawać ekstremum całki I . Oczywiście, jednak, że w tym wypadku, zagadnienie nasze, postawione na początku rozdziału, nie zawsze będzie miało rozwiązanie, gdyż krzywa, dająca rozwiązanie zagadnienia, powinna, w myśl założeń, przechodzić przez punkty (a, y_a) , (b, y_b) i wskutek tego, jeżeli współrzędne choć jednego z tych punktów nie spełniają równania krzywej, wówczas rozwiązanie naszego zagadnienia nie istnieje.

Założmy teraz, iż równość (18) jest tożsamością, a więc jest spełniona przy dowolnych wartościach (x, y) , leżących w rozpatrywanym obszarze. Biorąc pod uwagę, że w rozważanym przypadku całka I przyjmuje postać

$$\int_a^b [P(x, y) + Q(x, y) y'] dx = \int_{a, y_a}^{b, y_b} [P dx + Q dy]$$

i uwzględniając, że tożsamość (18) jest warunkiem, przy którym $P dx + Q dy$ jest różniczką zupełną pewnej funkcji $U(x, y)$, widzimy, że w naszym wypadku

$$I = \int_{a, y_a}^{b, y_b} dU = U(b, y_b) - U(a, y_a)$$

t. j. całka I nie zależy od drogi całkowania, a wyłącznie od granic.

7. Udowodnimy obecnie twierdzenie odwrotne, że jeżeli całka $\int_a^b f(x, y, y') dx$ nie zależy od drogi całkowania*) a tylko od granic (a, y_a) i (b, y_b) , to funkcja $f(x, y, y')$ ma postać

$$f(x, y, y') = P(x, y) + Q(x, y) y',$$

przyczem funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ spełniają tożsamościowo warunek

$$Q_x(x, y) = P_y(x, y).$$

Oczywiście, funkcja $f(x, y, y')$ musi spełniać warunki, o których mówiliśmy na samym początku.

Weźmy w rozpatrywanym obszarze dowolny punkt (ξ, η) i zbudujmy krzywą klasy $C^{(2)}$, łączącą punkty (a, y_a) i (b, y_b) , przechodzącą przez punkt (ξ, η) oraz spełniającą w tym punkcie warunek

$$\varphi'(\xi) = \alpha, \quad \varphi''(\xi) = \beta,$$

gdzie α i β są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Jeżeli do całki (19) będziemy podstawiali funkcje

$$y = \varphi(x) + h\eta(x),$$

przyczem $\eta(x)$ należy do dziedziny funkcyjnej (H) , to, w myśl założeń, wartość całki nie zmieni się t. j. dla wszystkich h dostatecznie małych co do wartości bezwzględnej

$$I(h) = \text{const.},$$

a więc tożsamościowo

$$\frac{dI(h)}{dh} = 0.$$

Kładąc w otrzymanym związku $h = 0$, otrzymamy, iż

$$\int_a^b (f_{\varphi'} \eta + f_{\varphi} \eta') dx = 0,$$

skąd, jak poprzednio widzieliśmy, wynika, że

$$\frac{d}{dx} f_{\varphi'} - f_{\varphi} = 0,$$

*) t. j. od postaci funkcji $y = y(x)$.

albo, ponieważ z założenia φ'' istnieje,

$$f_{\varphi'\varphi'}(x, \varphi, \varphi')\varphi'' + f_{\varphi'\varphi}(x, \varphi, \varphi')\varphi' + f_{\varphi'x}(x, \varphi, \varphi') - f_{\varphi}(x, \varphi, \varphi') = 0 \quad (19)$$

dla całego przedziału, a więc, w szczególności dla punktu (ξ, η) w którym pochodne

$$\varphi'(\xi) = \alpha, \quad \varphi''(\xi) = \beta,$$

są liczbami dowolnymi.

Zatem ostatni związek musi się sprawdzać przy dowolnych wartościach $\varphi''(x)$, co jest możliwem tylko wtedy, gdy tożsamościowo:

$$f_{\varphi'\varphi'}(x, \varphi, \varphi') = 0, \quad f_{\varphi'\varphi}(x, \varphi, \varphi')\varphi' + f_{\varphi'x}(x, \varphi, \varphi') - f_{\varphi}(x, \varphi, \varphi') = 0.$$

Z pierwszej równości wnioskujemy, że $f(x, y, y')$ jest funkcją liniową y'

$$f(x, y, y') = P(x, y) + Q(x, y)y'.$$

Podstawiamy otrzymane wyrażenie na $f(x, y, y')$ do drugiej tożsamości; otrzymamy wówczas, że dla wszystkich punktów (x, y) rozpatrywanego obszaru zachodzi związek

$$Q_x(x, y) = P_y(x, y),$$

a więc twierdzenie jest udowodnione.

8. Powróćmy obecnie do rozpatrywania ogólnego wypadku.

Z twierdzenia Eulera-Lagrange'a widzimy, iż funkcja dająca ekstremum całki

$$\int_a^b f(x, y, y') dx$$

i należąca do rozpatrywanej dziedziny funkcyjnej (Y) jest całką równania

$$\frac{d}{dx} f_{y'} - f_y = 0. \quad (20)$$

Zakładamy przytem, że istnieje druga pochodna naszej funkcji. Równanie (20) jest równaniem drugiego rzędu, a więc jego całka ogólna zawiera dwie stałe dowolne, t. j. może być przedstawiona w postaci

$$y = \omega(x, \alpha, \beta).$$

Stałe dowolne muszą być tak wybrane, aby były spełnione warunki graniczne

$$y(a) = \omega(a, \alpha, \beta) = y_a, \quad y(b) = \omega(b, \alpha, \beta) = y_b. \quad (21)$$

Jeżeli te równania są rozwiązalne względem α i β , to zagadnienie nasze może posiadać rozwiązanie, jeżeli, natomiast równania (21) nie są rozwiązalne względem α i β albo rozwiązania na α i β są takie, że krzywa

$$y = \omega(x, \alpha, \beta)$$

nie jest krzywą rzeczywistą, to zagadnienie nasze nie posiada rozwiązań.

Założmy, że równania (21) posiadają jedyne rozwiązanie

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0,$$

wówczas odpowiedzią na nasze zagadnienie może być funkcja

$$y = \varphi(x) = \omega(x, \alpha_0, \beta_0).$$

9. W pewnych szczególnych wypadkach całkowanie równania (20) da się sprowadzić do całkowania równania różniczkowego pierwszego rzędu. Rozpatrzmy niektóre z tych wypadków.

Jeżeli $f_y(x, y, y')$ jest funkcją wyłącznie x t. j.

$$f_y(x, y, y') = \psi(x),$$

to całką pierwszą równania (20) będzie równanie pierwszego rzędu

$$f_{y'}(x, y, y') = \int \psi(x) dx + \alpha, \quad (22)$$

przyczem α jest stałą dowolną. W szczególności, gdy $f(x, y, y')$ nie zależy od y , wówczas $\psi(x)$ tożsamościowo równa się zero i równanie (22) przyjmie postać

$$f_{y'}(x, y') = \alpha.$$

Jeżeli teraz jeszcze założymy, że funkcja $f_{y'}(x, y')$ nie zależy od x , to równanie (22) będzie miało kształt

$$f_{y'}(y') = \alpha, \quad (23)$$

skąd otrzymamy na y' wartości stałe, t. j. całkami równania Eulera-Lagrange'a będą funkcje

$$y = C_1 x + C_2,$$

gdzie C_1 i C_2 są stałe, a więc liniami ekstremalnemi będą proste. Drugi ciekawy wypadek, w którym można znaleźć pierwszą całkę równania Eulera-Lagrange'a zachodzi wtedy, gdy funkcja $f(x, y, y')$ zależy tylko od y i y' .

Opierając się na regule różniczkowania funkcji złożonych, dostaniemy wówczas

$$\frac{d}{dx} f = f_y y' + f_{y'} y'', \quad (24)$$

gdzie y jest dowolną funkcją x , należącą do klasy $C^{(2)}$ lub $D^{(2)}$.

Jeżeli y jest całką równania Eulera, to zachodzi tożsamość

$$f_y = \frac{d}{dx} f_{y'}.$$

Podstawiając tę wartość f_y do (24) dostaniemy

$$\frac{d}{dx} f = y' \frac{d}{dx} f_{y'} + f_{y'} y'' = \frac{d}{dx} (f_{y'} y'),$$

skąd mamy dla całki równania Eulera-Lagrange'a tożsamość

$$f = f_{y'} y' + \alpha, \quad (25)$$

przyczem α jest stałą dowolną. W tym więc wypadku równanie (25) jest pierwszą całką równania Eulera-Lagrange'a.

10. Rozpatrzmy obecnie kilka zagadnień.

Zagadnienie linii najkrótszej odległości na płaszczyźnie.

Na płaszczyźnie dane są dwa punkty (a, y_a) oraz (b, y_b) , znaleźć równanie linii najkrótszej odległości między danymi punktami. Jeżeli założymy, że równanie linii szukanej da się napisać w postaci

$$y = y(x),$$

gdzie $y(x)$ oznacza funkcję jednoznaczną klasy $C^{(2)}$ lub $D^{(2)}$, wówczas długość tej linii w spólrzędnych prostokątnych wyrazi się przez całkę

$$I = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Ponieważ funkcja podcałkowa zależy wyłącznie od y' , przeto liniami ekstremalnemi będą w tym wypadku proste

$$y = \alpha x + \beta.$$

Stałe α i β określamy z warunków

$$y_a = \alpha a + \beta, \quad y_b = \alpha b + \beta.$$

Zwróćmy uwagę na to, że rozwiązane przez nas zagadnienie nie jest równoważne postawionemu wyżej zagadnieniu geometrycznemu, ponieważ rozwiązania szukaliśmy w określonej dziedzinie funkcyjnej. Wskutek tego, jeżeliby rozwiązaniem naszego zagadnienia była krzywa, nie posiadająca w pewnych punktach oznaczonej stycznej, lub taka krzywa, której równanie nie dałoby się przedstawić w całym przedziale (a, b) w postaci $y = y(x)$, gdzie $y(x)$ jest funkcją jednoznaczną — to takich rozwiązań zapomocą naszej metody nie otrzymalibyśmy. Wreszcie, jeżeliby odcięte a i b punktów

końcowych były równe, to i w tym wypadku metoda nasza nie dałaby nam rozwiązania, ponieważ funkcja $y(x)$ nie mogłaby być jednoznaczna i posiadałaby w pewnych punktach pochodną nieskończoną.

Zagadnienie brachistochrony.

Punkt materialny pod wpływem siły ciężkości porusza się w płaszczyźnie pionowej od punktu A do punktu B . Znaleźć linię najkrótszego spadku, jeżeli przytem nie będziemy brali pod uwagę oporu ośrodka, zaś szybkość początkową przyjmiemy równą zeru.

Wybierając układ współrzędnych, tak, jak to robiliśmy we wstępie i czyniąc co do funkcji $y(x)$ wspomniane tam założenia, sprowadzamy rozwiązanie zagadnienia do znalezienia minimum całki

$$\int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx. \quad (a > 0)$$

Funkcja podcałkowa nie zależy od x , możemy więc odrazu napisać pierwszą całkę równania Eulera-Lagrange'a:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} = \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{y}} + \alpha.$$

Stąd, po łatwych przekształceniach znajdziemy

$$y' = \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - y}}{\sqrt{y}}. \quad (26)$$

Oznaczając dla krótkości $\frac{1}{\alpha^2}$ przez $2\beta^2$ widzimy, że jeżeli y' ma być rzeczywiste, musi być

$$y \geq 0 \quad 2\beta^2 - y \geq 0;$$

możemy więc założyć, że

$$y = 2\beta^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

wówczas z równości (26) dostaniemy

$$dx = \pm \frac{\sqrt{y} dy}{\sqrt{2\beta^2 - y}} = \pm 2\beta^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi = \pm \beta^2 (1 - \cos \varphi) d\varphi.$$

Ponieważ, w myśl warunków zadania, x powinno wzrastać, przeto w ostatnim wzorze musimy wziąć znak górny, a wówczas

$$x - \gamma = \beta^2 (\varphi - \sin \varphi).$$

Zatem równania linii ekstremalnych będą:

$$x - \gamma = \beta^2 (\varphi - \sin \varphi), \quad y = \beta^2 (1 - \cos \varphi),$$

a więc one przedstawiają cykloidy.

Biorąc pod uwagę, że szukana linia ekstremalna przechodzi przez początek współrzędnych, znajdziemy, że $\gamma = 0$. Zatem nasza cykloida jest utworzona przez punkt obwodu koła o promieniu β^2 , toczącego się po osi x .

Łatwo wykazać, iż można stałą dowolną β dobrać w ten sposób, ażeby linia ekstremalna przechodziła przez dowolny punkt $(a, y_a)^*$ t. j. tak określić β^2 oraz $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$, aby

$$a = \beta^2 (\varphi_1 - \sin \varphi_1), \quad y_a = \beta^2 (1 - \cos \varphi_1)$$

t. j. tak, aby

$$\frac{a}{y_a} = \frac{\varphi_1 - \sin \varphi_1}{1 - \cos \varphi_1}. \quad (A)$$

Rozpatrzmy w tym celu funkcję

$$\psi(\varphi) = \frac{\varphi - \sin \varphi}{1 - \cos \varphi}$$

i wykażemy, iż przy wzrastaniu φ od 0 do 2π , $\psi(\varphi)$ stale rośnie od zera do $+\infty$ t. j. przyjmuje każdą wartość dodatnią dokładnie jeden raz.

Rzeczywiście, pochodna

$$\psi'(\varphi) = \frac{2 - 2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi}{(1 - \cos \varphi)^2} = \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 2 \varphi \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{(1 - \cos \varphi)^2}$$

jest nieujemną dla wartości: $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$, gdyż $\cos \frac{\varphi}{2} \leq 0$, zaś $\sin \frac{\varphi}{2} \geq 0$.

Przepisując wzór na $\psi'(\varphi)$ w postaci

$$\psi'(\varphi) = \frac{4 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{(1 - \cos \varphi)^2} \left[\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right],$$

widzimy, iż będzie ona nieujemną również w przedziale $0 \leq \varphi \leq \pi$. Istnieje zatem dokładnie jeden pierwiastek φ_1 równania (A). Znajac φ_1 łatwo znajdziemy wartość β .

Zatrzymamy się krótko nad rozwiązaniem następującego zagadnienia:

Przez punkty (a, y_a) i (b, y_b) przeprowadzić krzywą, dla której powierzchnia obrotowa, otrzymana przez obrót krzywej dokoła osi x , byłaby najmniejszą.

*) Zakładamy, że a , oraz y_a są dodatnie.

Zakładamy, że równanie krzywej szukanej da się napisać w postaci

$$y = y(x),$$

gdzie $y(x)$ jest funkcją jednoznaczną klasy $C^{(2)}$ lub $D^{(2)}$ w przedziale (a, b) . Wówczas zagadnienie sprowadza się do znalezienia minimum całki

$$2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Ponieważ funkcja podcałkowa nie zależy od x , przeto rozpatrując całkę pierwszą równania Eulera-Lagrange'a

$$f = y' f_{y'} + \alpha,$$

łatwo znajdziemy całkę ogólną równania Eulera-Lagrange'a w postaci

$$y = \frac{\alpha}{2} \left(e^{\frac{x-\beta}{\alpha}} + e^{\frac{-x+\beta}{\alpha}} \right).$$

Jest to równanie linii łańcuchowej, której osią jest oś x -ów. W tym wypadku zadanie nie zawsze ma rozwiązanie, gdyż jak wskazuje dokładniejsze badanie, nad którym zastanawiać się nie będziemy, nie zawsze można przeprowadzić przez dwa dowolne punkty linię łańcuchową o danej osi.

Rozpatrzmy wreszcie zagadnienie linii geodozyjnych na powierzchni. Weźmy pod uwagę powierzchnię, której równania w postaci parametrycznej są

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v),$$

przyczem funkcje $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ należą do klasy $C^{(2)}$ lub $D^{(2)}$. Weźmy, dalej, na powierzchni dwa punkty: $(u = a, v = A)$ oraz $(u = b, v = B)$; mamy przeprowadzić na powierzchni między owymi punktami linię najkrótszej odległości.

Jak wiadomo, kwadrat elementu linjowego dowolnej krzywej, leżącej na powierzchni, będzie

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

gdzie

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \quad F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2$$

przyczem sama krzywa jest dana przez równanie

$$\omega(u, v) = 0. \quad (26)$$

Założmy, iż równanie szukanej krzywej najkrótszej odległości da się sprowadzić do postaci

$$v = \varphi(u), \quad (27)$$

gdzie φ jest funkcją klasy $C^{(2)}$ i $D^{(2)}$.

Wówczas, przyjmując za dziedzinę funkcyjną zbiór funkcji $v(u)$, należących do $C^{(2)}$ i $D^{(2)}$ i spełniających przetem warunki

$$v(a) = A, \quad v(b) = B, \quad (28)$$

możemy zagadnienie nasze wypowiedzieć w sposób następujący:

Znaleźć ekstremum całki

$$I = \int_a^b \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2} du, \quad (29)$$

przyczem funkcje $v = v(u)$ należą do klasy $C^{(2)}$ lub $D^{(2)}$ i spełniają warunki (28). Równanie Eulera dla całki (29) będzie:

$$\frac{d}{du} \frac{F + Gv'}{\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}} - \frac{E_v + 2F_v v' + G_v v'^2}{2\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}} = 0.$$

Otrzymane równanie różniczkowe drugiego rzędu jest właśnie równaniem linii geodezyjnych.

Rozpatrzmy dla przykładu równanie linii geodezyjnych na powierzchniach obrotowych, powstałych przez obrót krzywej

$$z = \omega(x)$$

dokoła osi z . Równania tej powierzchni dadzą się napisać w postaci:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = \omega(r),$$

możemy zatem przyjąć, że w tym przypadku $v = r$, $u = \varphi$.

Łatwy rachunek wykazuje, iż

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2, \quad F = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} = 0,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 1 + \omega'^2(r),$$

a więc musimy znaleźć ekstremum całki

$$s = \int_a^b \sqrt{r^2 + [1 + \omega'^2(r)] r'^2} d\varphi,$$

gdzie s oznacza długość łuku. Ponieważ wyrażenie podcałkowe nie zawiera φ , przeto całkę pierwszą równania Eulera-Lagrange'a otrzymamy w postaci:

$$f - r' f_{r'} = c,$$

albo

$$\sqrt{r^2 + [1 + \omega'^2(r)]} r'^2 - \frac{r'^2 [1 + \omega'^2(r)]}{\sqrt{r^2 + [1 + \omega'^2(r)]} r'^2} = c,$$

czyli

$$\frac{r^2}{\sqrt{r^2 + [1 + \omega'^2(r)]} r'^2} = c. \quad (30)$$

Jeżeli przyjmiemy pod uwagę, że

$$\sqrt{r^2 + (1 + \omega'^2(r))} r'^2 = \frac{ds}{d\varphi},$$

gdzie ds oznacza element długości łuku, wówczas możemy związek (30) przepisać w postaci

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = c = \text{const.} \quad (31)$$

Równanie powyższe nie zależy wcale od funkcji $\omega(r)$, a więc jest równaniem różniczkowym linii geodezyjnych na dowolnej powierzchni obrotowej.

Rozpatrzmy bliżej to równanie. Niech MP i NQ (rys. 5) będą dwoma sąsiednimi południkami, MN równoleżnikiem, zaś MM' bardzo małym łukiem linii geodezyjnej. Oznaczmy przez α kąt między południkami a linią geodezyjną, wówczas z trójkąta $MM'N$, pomijając wielkości małe drugiego rzędu w stosunku do ds , otrzymamy:

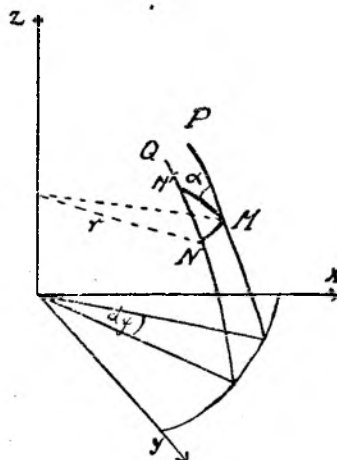
$$rd\varphi = ds \sin \alpha,$$

albo, na skutek równości (31)

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = r \sin \alpha = \text{const.}$$

Kąt α nazywamy azymutem linii geodezyjnej.

Wykazaliśmy zatem istnienie bardzo prostego związku między promieniem równoleżnika i odpowiednim azymutem linii geodezyjnej. Ze związku tego bardzo często korzysta się w geodezji wyższej przy badaniu linii geodezyjnych na powierzchni ziemi, uważanej za spłaszczoną elipsoidę obrotową.



Rys. 5.

Całkowanie równania (30) da się sprowadzić do kwadratur.

Rzeczywiście, uwzględniając iż $r' = \frac{dr}{d\varphi}$, otrzymamy z (30)

$$c^2 \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{r^2 (r^2 - c^2)}{1 + \omega'^2(r)},$$

skąd

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{c}{r} \sqrt{\frac{1 + \omega'^2(r)}{r^2 - c^2}}$$

albo

$$\varphi - \varphi_0 = c \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1 + \omega'^2(r)}{r^2 - c^2}}.$$

ROZDZIAŁ II.

ROZWIĄZANIA NIECIAĞŁE.

1. Dotychczas rozpatrywaliśmy zagadnienie znalezienia ekstremum całki

$$I = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (1)$$

w pewnej dziedzinie funkcyjnej (Y). Funkcje tej dziedziny w przedziale (a, b) należały do klasy $C^{(1)}$ t. j. były ciągłe wraz z pierwszymi pochodnymi. Obecnie uogólnimy nieco zagadnienie i założymy, że do naszej dziedziny funkcyjnej (Y) należą funkcje klasy $D^{(1)}$ w przedziale (a, b) t. j. funkcje odpowiadające krzywym o skończonej liczbie punktów kątowych*), przy czem zakładamy jeszcze, jak zresztą zawsze, że pochodne tych funkcji są ograniczone. Rozwiązania, dające nam ekstremum całki I i należące do klasy $D^{(1)}$, będziemy nazywali rozwiązaniami nieciągłymi. Nazwa ta jest ogólnie przyjęta, choć może niezupełnie trafna, gdyż same rozwiązania są funkcjami ciągłymi i może być tylko mowa o nieciągłości pochodnych. Całkę I , wziętą dla krzywej, posiadającej skończoną liczbę punktów kątowych o odciętych $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_s$, będziemy uważali jako sumę całek

$$\int_a^{\gamma_1} f(x, y, y') dx + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f(x, y, y') dx + \dots + \int_{\gamma_s}^b f(x, y, y') dx. \quad (2)$$

2. Zanim przejdziemy do badania rozwiązań nieciągłych, udowodnimy szereg pomocniczych lematów. Zauważymy przedtem, iż funkcję analityczną nazywamy funkcję, dającą się rozwinąć na szereg Taylora, a więc posiadającą pochodne wszystkich rzędów. Jeżeli $\varphi(x)$ jest funkcją analityczną, wówczas krzywą $y = \varphi(x)$ nazwiemy krzywą analityczną.

*) Aczkolwiek zawsze możemy uważać, że klasa funkcji $C^{(1)}$ jest zawarta w klasie $D^{(1)}$ —ale w pewnych wypadkach wygodnie jest przeciwstawić sobie klasy $C^{(1)}$ i $D^{(1)}$. To ma właśnie miejsce w naszym wypadku.

Lemat I. Do dowolnej krzywej $y = y(x)$ klasy $D^{(n)}$, posiadającej ograniczoną n -tą pochodną, leżącą na płaszczyźnie wewnątrz pewnego obszaru R i spełniającej warunki $y(a) = A_0, y'(a) = A_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = A_{n-1}, y(b) = B_0, y'(b) = B_1, \dots, y^{(n-1)}(b) = B_{n-1}$, można dobrać krzywą analityczną $y = \pi(x)$, leżącą również w obszarze R i spełniającą następujące warunki: 1^o $\pi(a) = A_0, \pi'(a) = A_1, \dots, \pi^{(n-1)}(a) = A_{n-1}, \pi(b) = B_0, \pi'(b) = B_1, \dots, \pi^{(n-1)}(b) = B_{n-1}$, 2^o krzywa $y = \pi(x)$ leży w sąsiedztwie $(n-1)$ rzędu krzywej $y = y(x)$ określonym przez dowolnie małe liczby $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1})$, 3^o w całym przedziale (a, b) z wyjątkiem zbioru Ω , składającego się ze skończonej liczby odcinków o łącznej długości dowolnie małej, jest spełniony warunek

$$|y^{(n)}(x) - \pi^{(n)}(x)| < \varepsilon_n,$$

gdzie ε_n jest dowolnie małą liczbą dodatnią, i wreszcie: 4^o dla wszystkich punktów, należących do Ω zachodzi nierówność

$$|y^{(n)}(x) - \pi^{(n)}(x)| < A,$$

gdzie A jest pewną liczbą skończoną.

Dowód tego lematu oparty jest na znanym twierdzeniu Weierstrass'a:

Do dowolnej funkcji $F(x)$, ciągłej w danym skończonym przedziale, i do dowolnego $\varepsilon > 0$ można znaleźć taki wielomian $P(x)$, że dla wszystkich punktów wspomnianego wyżej przedziału zachodzi nierówność

$$|F(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Przechodzimy do dowodu naszego lematu, przyczem umówimy się przez ε_i i η_i oznaczać dowolnie małe wielkości dodatnie, zaś przez k_i pewne skończone liczby dodatnie.

Niech $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ oznaczają odcięte punktów nieciągłości n -tej pochodnej rozpatrywanej funkcji $y = y(x)$, należącej do klasy $D^{(n)}$. Weźmy liczbę ω dodatnią i dostatecznie małą, tak aby przedziały $(\gamma_i - \omega, \gamma_i + \omega)$ nie posiadały punktów wspólnych. Miara długości tych wszystkich przedziałów wynosi oczywiście $2s\omega$ i dla dostatecznie małych wartości ω , może być zrobioną dowolnie małą. Oznaczmy dla prostoty: $\alpha_i = \gamma_i - \omega, \beta_i = \gamma_i + \omega$.

Zbiór zamkniętych przedziałów (α_i, β_i) nazwiemy Ω , a pozostałą część przedziału (a, b) oznaczmy Ω_1 .

Określmy obecnie funkcję ciągłą $\lambda(x)$ tak, aby dla wartości x , należących do Ω_1

$$\lambda(x) = y^{(n)}(x), \quad (3)$$

zaś w pozostałych przedziałach uzupełnimy ją linjowo, t. j. w przedziale (α_i, β_i) :

$$\lambda(x) = \frac{x - \alpha_i}{\beta_i - \alpha_i} y^{(n)}(\beta_i) + \frac{x - \beta_i}{\alpha_i - \beta_i} y^{(n)}(\alpha_i). \quad (4)$$

Niech m i m_1 oznaczają odpowiednio kresy górne funkcji $|y^{(n)}(x)|$ i $|\lambda(x)|$ w obszarze Ω , wówczas, oczywiście, dla punktów x , należących do Ω zachodzi nierówność

$$|y^{(n)}(x) - \lambda(x)| \leq m + m_1 = k_{n+1}. \quad (5)$$

Na zasadzie twierdzenia Weierstrassa do dowolnego $\varepsilon > 0$ możemy znaleźć wielomian $p_n(x)$ taki, że w całym zamkniętym przedziale (a, b) zachodzi nierówność

$$|\lambda(x) - p_n(x)| < \varepsilon_n. \quad (6)$$

Na zasadzie (3), (5) i (6) wnioskujemy, że w całym obszarze Ω_1

$$|y^{(n)}(x) - p_n(x)| < \varepsilon_n, \quad (7)$$

zaś dla punktów x , należących do Ω

$$|y^{(n)}(x) - p_n(x)| \leq |y^{(n)}(x) - \lambda(x)| + |\lambda(x) - p_n(x)| \leq k_{n+1} + \varepsilon_n = k_n. \quad (8)$$

Niech x będzie dowolną liczbą $a \leq x \leq b$; zakładając, że w przedziale (a, x) znajduje się $q \leq s$ odciętych punktów nieciągłości, znajdziemy:

$$\begin{aligned} \int_a^x [y^{(n)}(x) - p_n(x)] dx &= y^{(n-1)}(x) - p_{n-1}(x) = \int_a^{\alpha_1} [y^{(n)}(x) - p_n(x)] dx + \\ &+ \int_{\alpha_1}^{\gamma_1} [y^{(n)}(x) - p_n(x)] dx + \int_{\gamma_1}^{\beta_1} [y^{(n)}(x) - p_n(x)] dx + \dots + \\ &+ \int_{\beta_{q-1}}^{\alpha_q} [y^{(n)}(x) - p_n(x)] dx + \int_{\alpha_q}^{\gamma_q} [y^{(n)}(x) - p_n(x)] dx + \\ &+ \int_{\gamma_q}^{\beta_q} [y^{(n)}(x) - p_n(x)] dx + \int_{\beta_q}^x [y^{(n)}(x) - p_n(x)] dx. \end{aligned} \quad (9)$$

We wzorze (9), oczywiście,

$$p_{n-1}(x) = \int_a^x p_n(x) dx + y^{(n-1)}(a)$$

jest wielomianem, spełniającym warunki

$$p'_{n-1}(x) = p_n(x), p_{n-1}(a) = y^{(n-1)}(a). \quad (10)$$

Na zasadzie nierówności (7) i (8) łatwo znajdziemy, że:

$$\begin{aligned} & |y^{(n-1)}(x) - p_{n-1}(x)| \leq \\ & \leq \left| \int_a^{\alpha_1} [y^{(n)}(x) - p_n(x)] dx \right| + \sum_{i=1}^q \left\{ \left| \int_{\alpha_i}^{\gamma_i} [y^{(n)}(x) - p_n(x)] dx \right| + \right. \\ & \left. + \left| \int_{\gamma_i}^{\beta_i} [y^{(n)}(x) - p_n(x)] dx \right| \right\} + \left| \int_{\beta_q}^x [y^{(n)}(x) - p_n(x)] dx \right| \leq \\ & \leq (x - a - 2q\omega) \varepsilon_n + 2qk_n\omega \leq (b - a) \varepsilon_n + 2sk_n\omega_{n-1}. \quad (11) \end{aligned}$$

Zatem, dobierając odpowiednio ε_n i ω , możemy osiągnąć, że

$$|y^{(n-1)}(x) - p_{n-1}(x)| < \varepsilon_{n-1},$$

gdzie ε_{n-1} jest dowolną liczbą dodatnią.

Funkcja $y^{(n-1)}(x) - p_{n-1}(x)$ jest ciągłą w zamkniętym przedziale (a, b) , a więc dla dowolnej wartości x , należącej do tego przedziału, będzie

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x [y^{(n-1)}(x) - p_{n-1}(x)] dx \right| &= |y^{(n-2)}(x) - p_{n-2}(x)| < (x - a) \varepsilon_{n-1} \leq \\ &\leq (b - a) \varepsilon_{n-1}. \end{aligned}$$

W tym wzorze $p_{n-2}(x)$ oznacza wielomian

$$p_{n-2}(x) = \int_a^x p_{n-1}(x) dx + y^{(n-2)}(a),$$

spełniający warunki

$$p'_{n-2}(x) = p_{n-1}(x), p_{n-2}(a) = y^{(n-2)}(a). \quad (12)$$

Dobierając odpowiednio ε_{n-1} (a więc ε_n i ω), osiągniemy, że

$$|y^{(n-2)}(x) - p_{n-2}(x)| < \varepsilon_{n-2},$$

gdzie ε_{n-2} jest dowolną liczbą dodatnią.

Zupełnie analogicznie, dobierając odpowiednio ε_n i ω , znajdziemy skończony ciąg wielomianów:

$$p_{n-3}(x), p_{n-4}(x), \dots, p_1(x),$$

spełniających warunki

$$p'_{n-k}(x) = p_{n-k+1}(x), p_{n-k}(a) = y^{(n-k)}(a), \quad (13)$$

oraz

$$|y^{(n-k)}(x) - p_{n-k}(x)| < \varepsilon_{n-k} \quad (14)$$

i, wreszcie, wielomian $p(x)$, taki, że

$$\begin{aligned} p'(x) &= p_1(x), p(a) = y(a) \\ |y(x) - p(x)| &< \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Ze wzoru (13) wynika, że

$$p^{(n-k)}(x) = p_{n-k}(x)$$

oraz, że

$$p^{(n-k)}(a) = y^{(n-k)}(a).$$

Zatem znaleźliśmy wielomian, a więc funkcję analityczną, który spełnia, przy odpowiednim doborze liczby ε_0 , wszystkie warunki naszego lematu prócz, może, warunku, aby dla $x=b$ wielomian wraz ze swymi $n-1$ pierwszymi pochodnymi przyjmował z góry dane wartości $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$.

Wykażemy, iż można tak dobrać współczynniki pewnego wielomianu $\phi(x)$ stopnia $n-1$, ażeby wielomian

$$\pi(x) = p(x) + (x-a)^n \phi(x),$$

spełniał wszystkie warunki lematu.

Oczywiście dla $x=a$ wielomian $\pi(x)$ spełnia warunki

$$\pi(a) = p(a) = y(a), \pi'(a) = p'(a) = y'(a), \dots, \pi^{(n-1)}(a) = p^{(n-1)}(a) = y^{(n-1)}(a).$$

Ażeby, pozatem, były spełnione warunki

$$\pi(b) = y(b), \pi'(b) = y'(b), \dots, \pi^{(n-1)}(b) = y^{(n-1)}(b),$$

musimy dobrać $\phi(b), \phi'(b), \dots, \phi^{(n-1)}(b)$, tak, aby

$$(b-a)^n \phi(b) = y(b) - p(b)$$

$$(b-a)^n \phi'(b) = y'(b) - p'(b) - n(b-a)^{n-1} \phi(b)$$

$$\dots$$

$$(b-a)^n \phi^{(i)}(b) = y^{(i)}(b) - p^{(i)}(b) - n C^1_i (b-a)^{n-1} \phi^{(i-1)}(b) -$$

$$- n(n-1) C^2_i (b-a)^{n-2} \phi^{(i-2)}(b) - \dots$$

$$\dots - n(n-1) \dots (n-i+1) C^i_i (b-a)^{n-i} \phi(b)$$

$$\dots$$

$$(b-a)^n \phi^{(n-1)}(b) = y^{(n-1)}(b) - p^{(n-1)}(b) -$$

$$- n C^1_{n-1} (b-a)^{n-1} \phi^{(n-2)}(b) \dots - n(n-1) \dots 2 C^{n-1}_{n-1} (b-a) \phi(b),$$

skąd wnioskujemy, że $\phi^{(i)}(b)$ będzie funkcją linjową i jednorodną różnic

$$y(b) - p(b), y'(b) - p'(b), \dots, y^{(i)}(b) - p^{(i)}(b)$$

t. j. będzie postaci:

$$\phi^{(i)}(b) = \mu_0 [y(b) - p(b)] + \mu_1 [y'(b) - p'(b)] + \dots + \mu_i [y^{(i)}(b) - p^{(i)}(b)],$$

gdzie $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_i$ są oznaczonymi współczynnikami liczbowymi. Na zasadzie nierówności (14) oraz (15) znajdziemy, że

$$|\phi^{(i)}(b)| < k_0 \varepsilon_0 + k_1 \varepsilon_1 + \dots + k_i \varepsilon_i < \eta_i.$$

Stąd wnioskujemy, że w całym przedziale (a, b) wielomian $(x - a)^n \phi(x)$ spełnia warunek

$$|(x - a)^n \phi(x)| < \eta,$$

gdzie η oznacza dowolną z góry daną liczbę dodatnią. W tym celu wystarczy tylko dobrać odpowiednio liczby ε i ω , określające wielomian $p_n(x)$ i zbiór Ω . Zatem krzywa $y = \pi(x)$ będzie właśnie szukaną krzywą analityczną, a więc w szczególności, krzywą klasy $C^{(n)}$.

3. Stosując nasz lemat do wypadku gdy funkcja $y = y(x)$ jest ciągłą i posiada wszędzie, prócz skończonej ilości punktów kątowych, pochodną, a przytem ta pochodna jest ograniczoną, dochodzimy do wniosku, że do każdej krzywej $y = y(x)$ klasy $D^{(1)}$, leżącej wewnątrz pewnego obszaru R i przechodzącej przez dwa punkty (a, y_a) i (b, y_b) , znajdziemy krzywą $y = \pi(x)$ klasy $C^{(1)}$, leżącą również wewnątrz R , przechodzącą przez wspomniane punkty i spełniającą warunek

$$|y(x) - \pi(x)| < \varepsilon$$

w całym przedziale, oraz warunek

$$|y'(x) - \pi'(x)| < \varepsilon_1,$$

w całym przedziale (a, b) z wyjątkiem skończonej ilości odcinków Ω o łącznej długości dowolnie małej, w których spełniony jest warunek

$$|y'(x) - \pi'(x)| < k_1.$$

Jak i przedtem, ε i ε_1 oznaczają dowolnie małe liczby dodatnie, zaś k_1 pewną liczbę skończoną.

4. Opierając się na powyższem, możemy udowodnić następujący lemat:

Lemat II. Jakąkolwiek byłaby krzywa $y = y(x)$, klasy $D^{(1)}$, posiadająca ograniczoną pochodną $y'(x)$ w pobliżu punktów kątowych, przeprowadzona wewnątrz pewnego obszaru R między dwoma punktami (a, y_a) i (b, y_b) , zawsze można przeprowadzić między temi samemi punktami

w obszarze R taką krzywą analityczną $y = \pi(x)$, ażeby dla dowolnie danego $\delta > 0$ miała miejsce nierówność

$$\left| \int_a^b f(x, y, y') dx - \int_a^b f(x, \pi, \pi') dx \right| < \delta.$$

Zauważymy, że wskutek ciągłości funkcji $f(x, y, y')$ dla (x, y) , leżących w obszarze R , i dla ograniczonych wartości y' , będzie ona ograniczoną *).

Niech $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ będą punktami nieciągłości dla $y'(x)$. Zbudujemy, w myśl poprzedniego, krzywą $y = \pi(x)$, przyczem ε_1 na zasadzie pierwszego lematu możemy dobrać tak, aby dla punktów leżących poza Ω

$$|f(x, y, y') - f(x, \pi, \pi')| < \mu, \quad (16)$$

gdzie μ jest dowolnie wybraną liczbą.

Pozatem, w przedziałach zamkniętych należących do Ω wskutek ograniczoneści funkcji $y'(x)$ i $\pi'(x)$, mamy

$$|f(x, y, y')| < k, \quad |f(x, \pi, \pi')| < k, \quad (17)$$

przyczem k jest pewną liczbą skończoną.

Oznaczając, dla krótkości, przez $f(y')$ i $f(\pi')$ odpowiednio funkcje $f(x, y, y')$ i $f(x, \pi, \pi')$, a pozatem, zachowując dawne oznaczenia, na zasadzie (16) i (17) możemy napisać:

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b [f(y') - f(\pi')] dx \right| \leq \left| \int_a^{\alpha_1} [f(y') - f(\pi')] dx \right| + \\ & + \sum_{i=1}^s \left\{ \left| \int_{\alpha_i}^{\gamma_i} [f(y') - f(\pi')] dx \right| + \left| \int_{\gamma_i}^{\beta_i} [f(y') - f(\pi')] dx \right| \right\} + \\ & + \sum_{i=1}^{s-1} \left| \int_{\beta_i}^{\alpha_{i+1}} [f(y') - f(\pi')] dx \right| + \left| \int_{\beta_s}^b [f(y') - f(\pi')] dx \right| < \mu(b-a-2s\omega) + 4k\omega < \\ & < \mu(b-a) + 4k\omega. \end{aligned}$$

Dobierając odpowiednio ω i μ , a więc i ε_1 , osiągniemy, że $\mu(b-a) + 4k\omega < \delta$, zatem lemat nasz jest udowodniony.

4. Oznaczając, jak dawniej, przez R zbiór wartości (x, y) , dla których, przy skończonych wartościach y' , $f(x, y, y')$ jest ciągłą, otrzymujemy na zasadzie lematu II następujące twierdzenie:

Twierdzenie. Jeżeli pewna krzywa $y = \varphi(x)$, należąca do obszaru funkcyjnego (Y) , składającego się ze wszyst-

*) Zakładamy przytem, że obszar R wraz z brzegiem leży wewnątrz innego obszaru R' , w którym funkcja $f(x, y, y')$ posiada wspomniane tu własności. Założenie to milcząco będziemy uważali za spełnione i na przyszłość.

kich krzywych klasy $D^{(1)}$ i $C^{(1)}$ znajdujących się w obszarze R , leżąca wewnątrz obszaru R i przechodząca przez dwa punkty (a, y_a) i (b, y_b) , nie daje ekstremum całki I pomiędzy krzywymi klasy $D^{(1)}$, to ona również nie daje ekstremum całki I pomiędzy krzywymi klasy $C^{(1)}$ i, w szczególności, analitycznymi.

Oznaczmy przez I_φ całkę I , wziętą dla pewnej krzywej $y = \varphi(x)$. Jeżeli wartość I_φ nie jest ekstremum dla wartości całki I , wziętej dla krzywych klasy $D^{(1)}$, to istnieją przynajmniej dwie krzywe tej klasy: $y = \varphi_1(x)$ i $y = \varphi_2(x)$, dla których

$$I_{\varphi_1} - I_\varphi = A > 0, \quad I_{\varphi_2} - I_\varphi = B < 0. \quad (18)$$

W myśl lematu II istnieją dwie krzywe klasy $C^{(1)}$: $y = \psi_1(x)$, $y = \psi_2(x)$, spełniające, dla z góry danego $\delta > 0$, warunki

$$-\delta < I_{\psi_1} - I_{\varphi_1} < \delta, \quad -\delta < I_{\psi_2} - I_{\varphi_2} < \delta. \quad (19)$$

Z (18) i (19) wynika, że:

$$I_{\psi_1} - I_\varphi > A - \delta, \quad I_{\psi_2} - I_\varphi < B + \delta.$$

Wskutek dowolności δ , możemy je wybrać tak, aby $A - \delta > 0$, $B + \delta < 0$, a więc dla dwu krzywych klasy $C^{(1)}$: $y = \psi_1(x)$ i $y = \psi_2(x)$ różnice $I_{\psi_1} - I_\varphi$ oraz $I_{\psi_2} - I_\varphi$ mają znaki różne, zatem krzywa $y = \varphi(x)$ nie daje ekstremum i dla krzywych klasy $C^{(1)}$.

Analogicznie możnaby udowodnić, że jeżeli całka I nie zachowuje swego znaku dla krzywych klasy $D^{(1)}$, należących do dziedziny (Y) , to nie zachowa również swego znaku i dla krzywych klasy $C^{(1)}$, należących do dziedziny (Y) .

Rzeczywiście, niech dla dwu krzywych $y = \psi(x)$ i $y = \varphi(x)$ klasy $D^{(1)}$

$$I_\psi = \alpha^2 > 0, \quad I_\varphi = -\beta^2 < 0.$$

W myśl poprzedniego, dla dowolnie małych dodatnich ε i η , znajdziemy dwie krzywe analityczne $y = \theta(x)$ i $y = \omega(x)$, dla których zachodzą nierówności:

$$I_\theta - I_\psi > -\varepsilon, \quad I_\omega - I_\varphi < \eta.$$

Z tych nierówności i z poprzednich równości wnioskujemy, że

$$I_\theta > \alpha^2 - \varepsilon, \quad I_\omega < -\beta^2 + \eta.$$

Dobierając ε i η tak, aby $\alpha^2 - \varepsilon > 0$ i $-\beta^2 + \eta < 0$, znajdziemy, że dla krzywych $y = \theta(x)$ i $y = \omega(x)$ klasy $C^{(1)}$

$$I_0 > 0, \quad I_\omega < 0,$$

a zatem twierdzenie nasze jest udowodnione.

Twierdzenie to, jak łatwo spostrzec, może być uogólnione na wypadek, gdy funkcja podcałkowa zależy i od pochodnych wyższych rzędów, powiedzmy do n -tego rzędu włącznie, t. j. gdy całka nasza ma postać

$$I = \int_a^b f[x, y, y', \dots, y^{(n)}] dx.$$

Jeżeli przypuścimy, że f jest funkcją ciągłą względem swych $n + 2$ argumentów, wówczas możemy udowodnić następujące twierdzenie:

Jeżeli $y = \varphi(x)$ jest funkcją klasy $D^{(n)}$, posiadającą ograniczone liczby pochodne n -tego rzędu, wówczas zawsze możemy znaleźć taką krzywą analityczną $y = \psi(x)$, ażeby miała miejsce nierówność

$$|I_\psi - I_\varphi| < \varepsilon,$$

gdzie ε oznacza dowolną z góry daną liczbę dodatnią.

Analogicznie możemy wykazać, że jeżeli krzywa $y = \varphi(x)$ nie daje ekstremum całki I w dziedzinie funkcji klasy $D^{(n)}$, to również nie da ekstremum w dziedzinie funkcji, należących do $C^{(n)}$ albo funkcji analitycznych. Oczywiście, przypuszczamy, że krzywe rozważanej dziedziny funkcyjnej zapełniają pewien obszar na płaszczyźnie, wewnątrz którego leży krzywa $y = \varphi(x)$. Twierdzenie wspomniane udowodnić jest bardzo łatwo, wzorując się na poprzednim dowodzie, wobec tego przeprowadzenie dowodu pozostawiamy czytelnikowi.

5. Obecnie przejdziemy do rozpatrywania warunków, jakie musi spełniać krzywa klasy $D^{(1)}$, przeprowadzona wewnątrz obszaru R między dwoma danymi punktami (a, y_a) oraz (b, y_b) i dająca ekstremum całki I . Niech rozwiązaniem nieciągłym będzie krzywa

$$y = \varphi(x), \tag{20}$$

posiadająca w granicach całkowania s punktów kątowych o odciętych

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_s.$$

W celu otrzymania warunków koniecznych, będziemy porównywali wartości całki I , wziętej dla krzywej (20), z wartościami I , wziętymi dla krzywych, posiadających s punktów kątowych, znajdujących się dowolnie blisko punktów kątowych funkcji $\varphi(x)$.

Łatwo widzieć, że łuki krzywej (20), znajdujące się pomiędzy sąsiednimi punktami kątowymi, będą czyniły

zadość warunkowi Du-Bois Reymond'a, a wrazie istnienia drugiej pochodnej $\varphi''(x)$ będą krzywymi ekstremalnemi t. j. krzywymi całkowemi równania Eulera-Lagrange'a

$$\frac{d}{dx} f_{y'} - f_y = 0. \quad (21)$$

W rzeczy samej, porównajmy wartość całki I , wziętej dla krzywej (20), z wartością całki, wziętej dla krzywej $y = y(x)$, określonej w sposób następujący: dla $a \leq x \leq \gamma_i$ oraz $\gamma_{i+1} \leq x \leq b$, będzie:

$$y(x) = \varphi(x),$$

zaś w przedziale $\gamma_i \leq x \leq \gamma_{i+1}$

$$y(x) = \varphi(x) + h\eta(x),$$

gdzie $\eta(x)$ jest dowolną funkcją klasy $C^{(1)}$ taką, że $\eta(\gamma_i) = \eta(\gamma_{i+1}) = 0$. Jak łatwo widzieć

$$\begin{aligned} I = & \int_a^{\gamma_1} f(x, \varphi, \varphi') dx + \sum_{k=1}^{i-1} \int_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} f(x, \varphi, \varphi') dx + \sum_{k=i+1}^{s-1} \int_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} f(x, \varphi, \varphi') dx + \\ & + \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f(x, \varphi + h\eta, \varphi' + h\eta') dx. + \int_{\gamma_s}^b f(x, \varphi, \varphi') dx. \end{aligned}$$

Ponieważ, z założenia, krzywa $y = \varphi(x)$ daje ekstremum całki I , zatem, oczywiście, w przedziale $\gamma_i \leq x \leq \gamma_{i+1}$ musi dawać ekstremum całki:

$$\int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f(x, \varphi + h\eta, \varphi' + h\eta') dx.$$

W myśl założeń, czynionych co do funkcji $y = \varphi(x)$, wewnątrz przedziału $\gamma_i \leq x \leq \gamma_{i+1}$ $\varphi'(x)$ zmienia się w sposób ciągły, a więc, na zasadzie wyników otrzymanych w rozdziale poprzednim, wnioskujemy, że w przedziale (γ_i, γ_{i+1}) funkcja $\varphi(x)$ musi czynić zadość warunkowi Du-Bois Reymond'a, a przy istnieniu $\varphi''(x)$ musi być całką szczególną równania Eulera-Lagrange'a (21). Podobnie możemy się przekonać, że w ostatnim wypadku $\varphi(x)$ jest całką tego równania w przedziałach (a, γ_1) i (γ_s, b) .

Jeżeli całką ogólną równania (21) będzie $y = \omega(x, \alpha, \beta)$, wówczas funkcja $\varphi(x)$ musi przyjmować następujące wartości:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \omega(x, \alpha_0, \beta_0) \text{ dla } (a \leq x \leq \gamma_1), \varphi(x) = \omega(x, \alpha_1, \beta_1) \text{ dla } (\gamma_1 \leq x \leq \gamma_2) \dots \\ & \dots \varphi(x) = \omega(x, \alpha_i, \beta_i) \text{ dla } (\gamma_i \leq x \leq \gamma_{i+1}), \dots \varphi(x) = \omega(x, \alpha_s, \beta_s) \\ & \text{dla } (\gamma_s \leq x \leq b). \end{aligned}$$

Zatem, jeżeli dana jest nam tylko liczba s punktów kątowych, lecz odcięte ich nie są dane, wówczas dla określenia funkcji musimy mieć wartości $3s + 2$ stałych dowolnych $(\alpha_0, \beta_0, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ $i = 1, 2, \dots, s$. Możemy, jednak, odrazu napisać $s + 2$ równań, które muszą być spełnione przez te stałe wskutek warunków granicznych oraz ciągłości funkcji $\varphi(x)$ w punktach kątowych:

$$\omega(a, \alpha_0, \beta_0) = y_a, \quad \omega(b, \alpha_s, \beta_s) = y_b, \quad \omega(\gamma_i + 1, \alpha_i, \beta_i) = \omega(\gamma_i + 1, \alpha_{i+1}, \beta_{i+1}),$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, s-1. \quad (22)$$

Zatem, do określenia $3s + 2$ stałych brakuje nam jeszcze $2s$ równań. Obecnie przejdziemy do wyprowadzenia tych równań, otrzymanych po raz pierwszy przez Erdmanna i Weierstrassa.

6. Przy wyprowadzaniu warunków koniecznych będziemy porównywali wartości całki I_φ z wartościami całki I_y , gdzie $y = y(x)$ jest krzywą identyczną z krzywą $y = \varphi(x)$ w przedziałach $a \leq x \leq \gamma_{q-1}$ oraz $\gamma_q + 1 \leq x \leq b$ przyczem q oznacza dowolną z liczb $1, 2, 3, \dots, s$ zaś $\gamma_0 = a, \gamma_s + 1 = b$.

Wówczas, przepisując całkę I_y w postaci

$$I_y = \int_a^{\gamma_{q-1}} f(x, \varphi, \varphi') dx + \int_{\gamma_{q-1}}^{\gamma_q + 1} f(x, y, y') dx + \int_{\gamma_q + 1}^b f(x, \varphi, \varphi') dx,$$

widzimy, że ekstremum tej całki będzie osiągnięte jednocześnie z ekstremum całki

$$\int_{\gamma_{q-1}}^{\gamma_q + 1} f(x, y, y') dx,$$

wziętej dla krzywej, posiadającej tylko jeden punkt kątowy o odciętej γ_q . Zatem, nie tracąc nic na ogólności, możemy się ograniczyć do zbadania wypadku, gdy krzywe szukane mają jeden punkt kątowy. Oznaczmy, jak poprzednio, granice całkowania przez a i b , a odciętą punktu kątowego przez γ . Z poprzedniego wiemy, że ekstremum całki jest osiągane dla krzywej $y = \varphi(x)$ składającej się z dwóch łuków krzywych, czyniących zadość warunkowi Du-Bois Reymond'a. Oznaczmy wartości $\varphi(x)$ w przedziale $a \leq x \leq \gamma$ jako $\psi(x)$, a w przedziale $\gamma \leq x \leq b$ jako $\omega(x)$, wówczas, ponieważ krzywa $y = \varphi(x)$ jest ciągłą i posiada punkt kątowy przy $x = \gamma$, zatem

$$\psi(\gamma) = \omega(\gamma), \quad \psi'(\gamma) \neq \omega'(\gamma). \quad (23)$$

Założmy pozatem, że $\psi(x)$ i $\psi'(x)$ są funkcjami ciągłymi w przedziale $a \leq x \leq \gamma + \varepsilon$, zaś $\omega(x)$ i $\omega'(x)$ w przedziale $\gamma - \varepsilon \leq x \leq b$, gdzie ε jest pewną, dostatecznie małą liczbą dodatnią. Będziemy porównywali

wartość całki I_φ z wartościami I_y , przyczem $y(x)$ jest funkcją, posiadającą następujące własności:

$$\text{w przedziale } a \leq x \leq \gamma + h \quad y = \psi(x) + \lambda \eta_1(x)$$

$$\text{w przedziale } \gamma + h \leq x \leq b \quad y = \omega(x) + \lambda \eta_2(x)$$

W powyższych wzorach $|h| < \varepsilon$, $\eta_1(x)$ i $\eta_2(x)$ zaś są funkcjami klasy $C^{(1)}$ w odpowiednich przedziałach i prócz tego

$$\eta_1(a) = 0, \quad \eta_2(b) = 0, \quad (24)$$

$$\eta_1(\gamma) \neq \eta_2(\gamma), \quad (25)$$

przyczem $\eta_1(\gamma)$ i $\eta_2(\gamma)$ są zupełnie dowolnymi liczbami, zaś λ określamy z równania

$$\psi(\gamma + h) + \lambda \eta_1(\gamma + h) = \omega(\gamma + h) + \lambda \eta_2(\gamma + h), \quad (26)$$

wyrażającego, że krzywa $y = y(x)$ jest ciągłą.

Wskutek ciągłości funkcji $\eta_1(x)$ i $\eta_2(x)$ i warunku (25), widzimy, że λ , dla dostatecznie małych wartości h , jest ciągłą i różniczkowalną funkcją h i przytem

$$\lambda(0) = 0.$$

Zatem dla $h = 0$ krzywa $y = y(x)$ przechodzi w krzywą $y = \varphi(x)$, a więc całka I_y jest pewną funkcją h , posiadającą ekstremum przy $h = 0$. Ponieważ

$$\begin{aligned} I_y = I(h) &= \int_a^{\gamma+h} f(x, \psi + \lambda \eta_1, \psi' + \lambda \eta_1') dx + \\ &+ \int_{\gamma+h}^b f(x, \omega + \lambda \eta_2, \omega' + \lambda \eta_2') dx \end{aligned} \quad (27)$$

jest funkcją h , posiadającą ciągłą pierwszą pochodną, zatem warunkiem niezbędnym zachodzenia ekstremum jest

$$I'(0) = 0. \quad (28)$$

Jeżeli, dla krótkości, wszędzie zamiast $f(x, \psi, \psi')$, $f_\psi(x, \psi, \psi')$ i t. d. będziemy pisali $f(\psi')$, $f_\psi(\psi')$ i t. d., i analogicznie, zamiast $f(x, \omega, \omega')$ $f_\omega(x, \omega, \omega')$ i t. d., $f(\omega')$, $f_\omega(\omega')$ i t. d., wówczas, różniczkując całkę (27) względem h , przepiszemy równość (28) w postaci

$$I'(0) = f(\psi) \Big|^\gamma + \int_a^\gamma [f_\psi(\psi) \eta_1 + f_{\psi'}(\psi) \eta_1'] \left(\frac{d\lambda}{dh} \right)_0 dx - f(\omega) \Big|^\gamma + \\ + \int_\gamma^b [f_\omega(\omega) \eta_2 + f_{\omega'}(\omega) \eta_2'] \left(\frac{d\lambda}{dh} \right)_0 dx = 0,$$

przyczem $\left(\frac{d\lambda}{dh} \right)_0$ oznacza wartość pochodnej $\frac{d\lambda}{dh}$ dla $h=0$. Całkując przez części, i biorąc pod uwagę, że $\eta_1(a) = \eta_2(b) = 0$, przepisujemy ostatnią równość w postaci

$$f(\psi) \Big|^\gamma + f_{\psi'}(\psi) \eta_1 \left(\frac{d\lambda}{dh} \right)_0 \Big|^\gamma + \int_a^\gamma [f_\psi(\psi) - \frac{d}{dx} f_{\psi'}(\psi)] \eta_1 \left(\frac{d\lambda}{dh} \right)_0 dx - \\ - f(\omega) \Big|^\gamma - f_{\omega'}(\omega) \eta_2 \left(\frac{d\lambda}{dh} \right)_0 \Big|^\gamma + \int_\gamma^b [f_\omega(\omega) - \frac{d}{dx} f_{\omega'}(\omega)] \eta_2 \left(\frac{d\lambda}{dh} \right)_0 dx = 0.$$

Ponieważ $\psi(x)$ i $\omega(x)$ czynią zadość warunkowi Du-Bois Reymond'a, zatem tożsamościowo

$$f_\psi(\psi) - \frac{d}{dx} f_{\psi'}(\psi) = 0, \quad f_\omega(\omega) - \frac{d}{dx} f_{\omega'}(\omega) = 0,$$

a więc związek ostatni da się sprowadzić do postaci

$$f(\psi) \Big|^\gamma + f_{\psi'}(\psi) \eta_1 \left(\frac{d\lambda}{dh} \right)_0 \Big|^\gamma - f(\omega) \Big|^\gamma - f_{\omega'}(\omega) \eta_2 \left(\frac{d\lambda}{dh} \right)_0 \Big|^\gamma = 0. \quad (29)$$

Wartość $\left(\frac{d\lambda}{dh} \right)_0$ da się obliczyć z (26). Mianowicie, biorąc pod uwagę, że $\lambda(0) = 0$, łatwo znajdziemy, że

$$\left(\frac{d\lambda}{dh} \right)_0 = \frac{\psi'(\gamma) - \omega'(\gamma)}{\eta_2(\gamma) - \eta_1(\gamma)}.$$

Podstawiając tę wartość do (29), po łatwych przekształceniach sprowadzimy wzór (29) do postaci

$$[f(\psi) - f(\omega) - (\psi - \omega) f_{\omega'}(\omega)] \Big|^\gamma \eta_2(\gamma) - \\ - [f(\psi) - f(\omega) - (\psi - \omega) f_{\psi'}(\psi)] \Big|^\gamma \eta_1(\gamma) = 0.$$

Ponieważ $\eta_1(\gamma)$ i $\eta_2(\gamma)$ są liczbami zupełnie dowolnymi, zatem dla $x = \gamma$ musi być

$$f(\psi') - f(\omega') - (\psi' - \omega')f_{\omega'}(\omega') = 0, f(\psi') - f(\omega') - (\psi' - \omega')f_{\psi'}(\psi') = 0. \quad (30)$$

Odejmując powyższe równości stronami, i uwzględniając, że $\psi'(\gamma) \neq \omega'(\gamma)$, otrzymamy warunek Erdmanna

$$f_{\psi'}(\psi') = f_{\omega'}(\omega'). \quad (31)$$

Wskutek tej równości związku (30) dadzą się przepisać w postaci

$$f(\psi') - \psi' f_{\psi'}(\psi') = f(\omega') - \omega' f_{\omega'}(\omega'). \quad (32)$$

Równość (32) nosi nazwę warunku Weierstrassa.

Zatem w każdym punkcie kątowym muszą być spełnione oba warunki. Jeżeli teraz wrócimy do ogólnego wypadku, gdy liczba punktów kątowych jest s , wówczas zauważymy, że warunki Erdmanna-Weierstrassa dadzą nam dokładnie $2s$ równań, które, wraz z równaniami (22), wystarczą, co do ilości, dla określenia wszystkich stałych.

Powstaje obecnie pytanie, czy układ tych równań posiada rozwiązanie.

7. Rozpatrzmy najpierw warunek

$$f_{\psi'}(\psi') = f_{\omega'}(\omega'). \quad (33)$$

Ponieważ, w myśl założeń, funkcja $f_{y'y'}(x, y, y')$ istnieje dla wszystkich wartości x, y , należących do obszaru R i dla wszystkich skończonych wartości y' , przeto z warunku (33), na zasadzie twierdzenia Rolle'a, wnioskujemy, że dla $x = \gamma, y = \psi(\gamma) = \omega(\gamma)$ funkcja $f_{y'y'}(x, y, y')$ przyjmuje wartość zero dla pewnej wartości pośredniej y' , leżącej pomiędzy $\psi'(\gamma)$ i $\omega'(\gamma)$.

Zatem, jeżeli w żadnym punkcie obszaru R funkcja $f_{y'y'}(x, y, y')$ nie przyjmuje wartości zero, przy żadnej wartości skończonej argumentu y' , wówczas dla żadnego punktu obszaru R warunek (33) nie może być spełniony, a zatem, w tym wypadku, ekstremum nie może być osiągnięte dla krzywej o punktach kątowych.

Przypominając, że za przykładem Hilberta, zagadnienie rachunku warjacyjnego, gdy funkcja $f_{y'y'}(x, y, y')$ jest różna od zera dla dopuszczalnych wartości argumentów, nazwalimy zagadnieniem regularnym, możemy otrzymać wynik wypowiedzieć w sposób następujący:

Twierdzenie. Zagadnienie regularne rachunku warjacyjnego nie posiada rozwiązań nieciągłych.

8. Powiemy słów kilka o wypadku, gdy dane są odcięte punktów kątowych, t. j. wartości γ_i . Znowu możemy się ograniczyć do wypadku, gdy szukana krzywa posiada dokładnie jeden punkt kątowy.

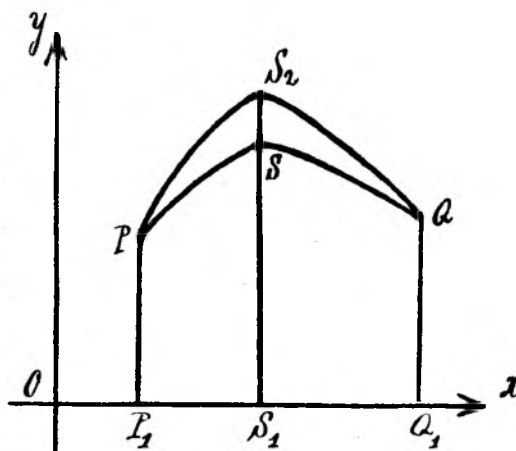
Krzywa szukana $y = \varphi(x)$ musi się składać z łuków linii ekstremalnych

$$y = \psi(x), \quad \bar{y} = \omega(x),$$

pierwszy w przedziale $a \leq x \leq \gamma$, a drugi w przedziale $\gamma \leq x \leq b$. Za krzywą zmienną przyjmijmy krzywą $y = y(x)$, składającą się z łuków

$$y = \psi(x) + h \eta(x), \\ \bar{y} = \omega(x) + h \eta(x),$$

pierwszego w przedziale $a \leq x \leq \gamma$, a drugiego w przedziale $\gamma \leq x \leq b$, przyczem $\eta(x)$ jest funkcją klasy $C^{(1)}$, spełniającą warunki $\eta(a) = \eta(b) = 0$, zaś $\eta(\gamma)$ może być liczbą dowolną. Oczywiście, dla $h = 0$, krzywa $y = y(x)$ przechodzi w krzywą $y = \varphi(x)$. Całka I_y jest funkcją h



Rys. 6.

$$I(h) = \int_a^\gamma f(x, y, y') dx + \int_\gamma^b f(x, \bar{y}, \bar{y}') dx.$$

Dla $h = 0$ pochodna $I'(h)$ musi się równać zeru. Po przekształceniach, analogicznych do przeprowadzonych wyżej, znajdziemy, że

$$I'(0) = [f_{\psi'}(\psi') - f_{\omega'}(\omega')] \eta \Big|_\gamma = 0,$$

co wskutek dowolności $\eta(\gamma)$ doprowadza do jednego warunku

$$f_{\psi'}(\gamma, \psi(\gamma), \psi'(\gamma)) = f_{\omega'}(\gamma, \omega(\gamma), \omega'(\gamma))$$

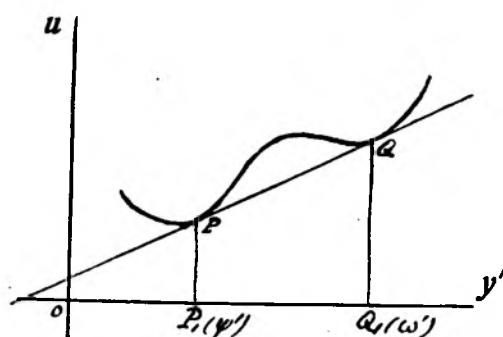
skąd, jak i w poprzednim wypadku, wnioskujemy, że zagadnienie regularne nie posiada rozwiązań nieciągłych.

Zauważymy, iż dla określenia wszystkich $2s + 2$ stałych, wchodzących do równania krzywej, posiadamy dostateczną liczbę warunków, mianowicie: dwa warunki graniczne, s warunków ciągłości w punktach γ_i i, wreszcie, s warunków, otrzymanych ostatnio przez nas.

9. Warunkom Erdmanna-Weierstrassa można nadać ciekawą interpretację geometryczną.

Dajmy x i y dowolne wartości należące do obszaru R , wówczas możemy rozpatrywać funkcję $u = f(x, y, y')$ jako funkcję zmiennej y' . Krzywa $u = f(y')$ nosi nazwę wskaźnicy punktu (x, y) .

Niech punkt P wskaźnicy odpowiada wartości $y' = \psi'$ a punkt Q —



Rys. 7.

wartości $y' = \omega'$, wówczas, łatwo wykazać, że warunki Erdmanna-Weierstrassa mogą być wypowiedziane geometrycznie w sposób następujący: styczne do wskaźnicy w punktach P i Q są identyczne; inaczej mówiąc warunkiem koniecznym aby punkt (x, y) był punktem kątowym krzywej ekstremalnej jest, żeby wskaźnica tego punktu posiadała styczną podwójną, przyczem punk-

tami styczności muszą być punkty $(\psi', f(\psi'))$ i $(\omega', f(\omega'))$. Rzeczywiście, równania stycznej do wskaźnicy, we wspomnianych punktach będą odpowiednio

$$u - f(\psi') = f_{\psi'}(\psi') (y' - \psi'), \quad u - f(\omega') = f_{\omega'}(\omega') (y' - \omega').$$

Biorąc pod uwagę, że współczynniki kątowe stycznych będą $f_{\psi'}(\psi')$ i $f_{\omega'}(\omega')$, a odcinki, czynione przez te proste na osi u , odpowiednio $f(\psi') - \psi' f_{\psi'}(\psi')$, i $f(\omega') - \omega' f_{\omega'}(\omega')$, widzimy, że styczne będą identyczne, o ile współczynniki kątowe i odcinki na osi u będą odpowiednio sobie równe. Ale warunki

$$f_{\psi'}(\psi') = f_{\omega'}(\omega'), \quad f(\psi') - \psi' f_{\psi'}(\psi') = f(\omega') - \omega' f_{\omega'}(\omega'),$$

są właśnie warunkami Erdmanna-Weierstrassa, co dowodzi słuszność naszego twierdzenia.

Rozpatrując wypadek, gdy odcięta punktu kątowego jest nam dana, otrzymamy, jak łatwo widzieć, następującą geometryczną interpretację: wskaźnica punktu kątowego posiada w punktach $y' = \psi'$ i $y' = \omega'$ styczne równoległe.

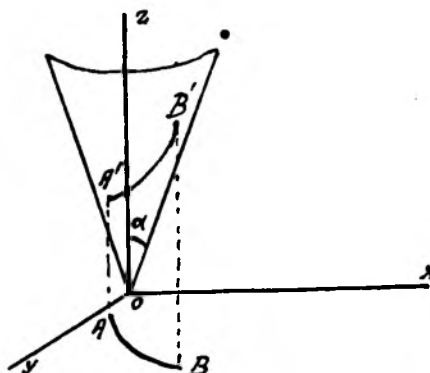
10. Jako przykład rozpatrzmy następujące zagadnienie Erdmanna:

Znaleźć najmniejszą powierzchnię walcową, ograniczoną dwiema tworzącymi, płaszczyzną do nich prostopadłą oraz powierzchnią stożka kołowego, którego wierz-

chołek leży na tej płaszczyźnie, a oś jest do płaszczyzny prostopadła.

Oczywiście, zagadnienie sprowadza się do znalezienia krzywej przecięcia szukanego walca z daną płaszczyzną. Przyjmijmy płaszczyznę daną za płaszczyznę xy , wierzchołek stożka za początek układu współrzędnych, a oś stożka za oś z ; pozatem oznaczmy przez α kąt między tworzącymi i osią stożka. Wówczas równanie stożka będzie

$$z = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Rys. 8.

Niech równanie szukanej krzywej przecięcia walca z płaszczyzną xy będzie $y = y(x)$, a współrzędne punktów przecięcia granicznych tworzących z płaszczyzną xy odpowiednio (a, y_a) i (b, y_b) . Wówczas, jak łatwo widzieć, szukana powierzchnia walcowa wyrazi się przez całkę

$$I = \int_a^b z ds = \operatorname{ctg} \alpha \int_a^b \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (34)$$

Zatem nasze zagadnienie sprowadza się do znalezienia minimum całki (34) przy warunkach granicznych $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$.

W tym wypadku równanie Eulera przyjmie postać

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{y' \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{1 + y'^2}} \right] - \frac{y \sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

albo

$$(x^2 + y^2) y'' + (x y' - y) (1 + y'^2) = 0.$$

Ostatnie równanie da się przepisać w kształcie

$$\frac{y''}{1 + y'^2} + \frac{xy' - y}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{\frac{d}{dx} y'}{1 + y'^2} + \frac{\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right)}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = 0,$$

skąd, całkując, dostaniemy

$$\operatorname{arctg} y' + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} c$$

gdzie c jest stałą dowolną całkowania.

Otrzymane równanie można zastąpić przez

$$\frac{y' + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y'y}{x}} = c,$$

albo

$$y'x + y = cx - cyy'.$$

Całkując to równanie, otrzymamy:

$$xy = \frac{c}{2} (x^2 - y^2) + c_1, \quad (35)$$

gdzie c_1 jest drugą stałą dowolną.

Przy c_1 różnem od zera równanie (35) przedstawia hyperbolę równoboczną o środku w początku układu, zaś przy $c_1 = 0$ parę prostych, przecinających się w początku współrzędnych. Bezpośrednie podstawienie pozwoli nam sprawdzić, że krzywa (35) jest krzywą całkową równania Eulera. Stałe c i c_1 musimy dobrać w ten sposób, aby krzywa (35) przechodziła przez punkty (a, y_a) i (b, y_b) . Możemy, oczywiście zawsze przyjąć, że $y_a \geq 0$ i $y_b \geq 0$.

Jeżeli przytem $a > 0$ i $b > 0$, to przez dane punkty możemy przeprowadzić gałąź hyperboli równobocznej, jeżeli natomiast $a < 0$ i $b > 0$ i kąt między prostymi, łączącymi te punkty z początkiem układu, jest większy lub równy $\frac{\pi}{2}$, wówczas dane punkty nie dadzą się połączyć gałęzią hyperboli równobocznej, a zatem jedyną krzywą Eulera-Lagrange'a, przechodzącą przez punkty (a, y_a) i (b, y_b) , będzie krzywa, nieciągła, składająca się z dwóch odcinków prostych, przecinających się w początku współrzędnych. Oczywiście, początek współrzędnych będzie wtedy punktem kątowym. Warunki Erdmanna-Weierstrassa w danym wypadku będą miały postać:

$$\frac{\phi' \sqrt{x^2 + \phi^2}}{\sqrt{1 + \phi'^2}} = \frac{\omega' \sqrt{x^2 + \omega^2}}{\sqrt{1 + \omega'^2}},$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + \phi^2}}{\sqrt{1 + \phi'^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + \omega^2}}{\sqrt{1 + \omega'^2}}.$$

Jedynem możliwym rozwiązaniem tego układu równań jest $x = 0$, $\phi = \omega = 0$. Zatem nasza krzywa nieciągła może dawać ekstremum całki (34). Na tym przykładzie widzimy, że rozwiązanie nieciągłe może zjawić się wówczas, gdy między dwoma danymi punktami nie da się przeprowadzić krzywa Eulera-Lagrange'a klasy $C^{(1)}$.

11. Rozpatrzmy jeszcze jedno zagadnienie, które doprowadza do rozwiązań nieciągłych i z którym się spotykamy w teorii załamania światła. Niech na płaszczyźnie dany będzie łuk pewnej krzywej LL' , której równanie jest

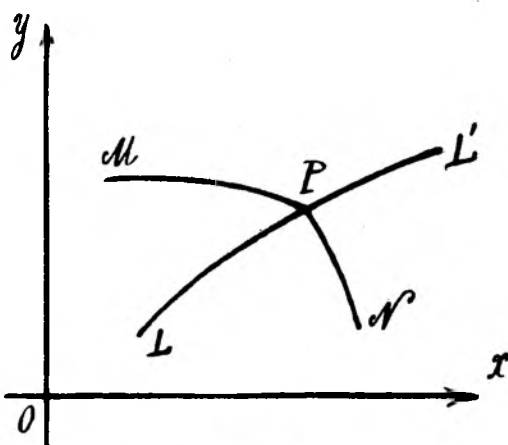
$$y = \omega(x), \quad (36)$$

gdzie $\omega(x)$ jest w przedziale (a, b) funkcją klasy $C^{(1)}$, i niech dane będą dwa punkty $M(a, y_a)$ i $N(b, \bar{y}_b)$, przyczem $b > a$.

Trzeba znaleźć w dziedzinach funkcyjnych (Y) i $(\bar{Y})$, składających się z krzywych klasy $C^{(1)}$, przechodzących odpowiednio przez punkty M i N i przecinających się na krzywej LL_1 takie krzywe

$$y = \varphi(x), \quad \bar{y} = \psi(x) \quad (37)$$

aby dla y i $\bar{y}$, danych przez wzory (37), całka



Rys. 9.

$$I_{y, \bar{y}} = \int_a^{\xi} f(x, y, y') dx + \int_{\xi}^b F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx, \quad (38)$$

gdzie ξ jest odcięta punktu przecięcia $P(\xi, \bar{y})$ naszych krzywych, miała wartość ekstremalną. Oczywiście, z założenia, wszystkie krzywe rozpatrywanych dziedzin funkcyjnych (Y) i $(\bar{Y})$ muszą, odpowiednio, spełniać warunki

$$y(a) = y_a, \quad \bar{y}(b) = \bar{y}_b. \quad (39)$$

Prócz tego, jeżeli $\bar{x}$ jest odcięta punktu przecięcia odpowiednich krzywych, to

$$y(\bar{x}) = \omega(\bar{x}), \quad \bar{y}(\bar{x}) = \omega(\bar{x}). \quad (40)$$

O funkcjach f i F zakładamy, że należą do klasy $C^{(2)}$.

Łatwo wykazać, że szukane funkcje φ i ψ muszą spełniać warunki Du-Bois Reymond'a:

$$\frac{d}{dx} f_{\varphi'} - f_{\varphi} = 0, \quad \frac{d}{dx} F_{\psi'} - F_{\psi} = 0. \quad (41)$$

Rzeczywiście, założmy, że zagadnienie nasze jest rozwiązane i niech, właśnie, krzywa MPN daje to rozwiązanie, przyczem równanie MP jest

$y = \varphi(x)$ zaś równanie $PN : y = \psi(x)$. Będziemy porównywali wartości naszej całki $I_{\varphi, \psi}$ z wartościami $I_{y, \psi}$ wziętymi dla innej krzywej MPN , dla której łuk PN jest dawną krzywą $y = \psi(x)$, a zmienia się wyłącznie łuk MP , przyczem punkty M i P pozostają nieruchome. Wówczas, jak łatwo widzieć, dla tych krzywych funkcja osiągnie wtedy i tylko wtedy wartość ekstremalną, gdy osiągnie ekstremum całka

$$\int_a^{\xi} f(x, y, y') dx,$$

to zaś, jak wiemy, jest możliwe tylko dla funkcji $y = \varphi(x)$ spełniającej pierwsze z równań (41). Analogicznie, porównując wartość całki $I_{\varphi, \psi}$ z wartościami całek $I_{\varphi, \bar{y}}$, przekonamy się, że funkcja $\bar{y} = \psi(x)$ musi spełniać drugie z równań (41). Zatem otrzymaliśmy warunki konieczne które muszą spełniać nasze rozwiązania:

$$\frac{d}{dx} f_{\varphi'} - f_{\varphi} = 0, \quad \frac{d}{dx} F_{\psi'} - F_{\psi} = 0. \quad (42)$$

Dalej, na zasadzie (40), wnioskujemy, że

$$\varphi(\xi) = \omega(\xi), \quad \psi(\xi) = \psi(\xi), \quad (43)$$

jednak, ogółem biorąc, $\varphi'(\xi) \neq \psi'(\xi)$ t. j. krzywa MPN należy do klasy $D^{(1)}$. Będziemy porównywali wartości całki $I_{\varphi, \psi}$ z wartościami całek $I_{y, \bar{y}}$ gdzie

$$y = \varphi(x) + k\eta(x), \quad \bar{y} = \psi(x) + k_1\eta_1(x), \quad (44)$$

przyczem $\eta(x)$ i $\eta_1(x)$ są w rozpatrywanych przedziałach funkcjami klasy $C^{(1)}$ i spełniają warunki

$$\eta(a) = \eta_1(b) = 0, \quad \eta(\xi) \neq 0, \quad \eta_1(\xi) \neq 0. \quad (45)$$

Co się tyczy k i k_1 , to, dla dostatecznie małych wartości h , określamy je z warunków ciągłości krzywej, składającej się z łuków krzywych (44), przecinających się na krzywej LL_1 . Warunki te mają postać

$$\begin{aligned} \varphi(\xi + h) + k\eta(\xi + h) &= \omega(\xi + h), \\ \psi(\xi + h) + k_1\eta_1(\xi + h) &= \psi(\xi + h). \end{aligned} \quad (46)$$

Wskutek równań (43) i warunków, nałożonych na funkcje $\varphi, \psi, \eta, \eta_1, \omega$, wnioskujemy, że funkcje $k(h)$ i $k_1(h)$ są jednoznaczniemi funkcjami h klasy $C^{(1)}$ i że dla $h = 0$ funkcje te przyjmują wartość zero t. j.

$$k(0) = 0, \quad k_1(0) = 0. \quad (47)$$

Na zasadzie tego, różniczkując (46) względem h i kładąc $h = 0$, otrzymamy wzory

$$\begin{aligned} k'(0) \eta(\xi) &= \omega'(\xi) - \varphi'(\xi), \\ k'_1(0) \eta_1(\xi) &= \omega'(\xi) - \psi'(\xi). \end{aligned} \quad (48)$$

Całka $I_{y, \bar{y}}$ przy wartościach (44) dla y i $\bar{y}$ będzie pewną funkcją h , postaci

$$I_{y, \bar{y}} = J(h) = \int_a^{\xi+h} f(x, y, y') dx + \int_{\xi+h}^b F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx,$$

przyczem

$$I(0) = I_{\varphi, \psi}.$$

Ponieważ dla $h = 0$ funkcja $I(h)$ posiada ciągłą pochodną, przeto niezbędnym warunkiem istnienia ekstremum jest

$$I'(0) = 0.$$

Ostatni związek, da się przepisać w kształcie

$$\begin{aligned} f \Big|_{\xi}^{\xi} - F \Big|_{\xi}^{\xi} + \int_a^{\xi} (f_{\varphi} \eta + f_{\varphi'} \eta') k'(0) dx + \\ + \int_{\xi}^b (F_{\psi} \eta_1 + F_{\psi'} \eta'_1) k'_1(0) dx = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Po przecałkowaniu przez części drugich składników każdego z wyrażeń podcałkowych, biorąc pod uwagę tożsamości (42), doprowadzimy (49) do postaci

$$f \Big|_{\xi}^{\xi} - F \Big|_{\xi}^{\xi} + f_{\varphi'} \eta k'(0) \Big|_{\xi}^{\xi} - F_{\psi'} \eta_1 k'_1(0) \Big|_{\xi}^{\xi} = 0,$$

albo na zasadzie (48)

$$f - f_{\varphi'} (\varphi' - \omega') = F - F_{\psi'} (\psi' - \omega'); \quad (50)$$

w tym wzorze argumentem jest ξ .

Jeżeli przyjmiemy, że nasze krzywe $y = \varphi(x)$ oraz $y = \psi(x)$ są całkami odpowiednich równań Eulera, a więc należą do klasy $C^{(2)}$, to, jak łatwo widzieć, otrzymamy dostateczną ilość równań dla określenia krzywej MPN .

Rzeczywiście, całkując równanie Eulera (42), otrzymamy całki ogólne tych równań

$$y = \lambda(x, \alpha, \beta), \quad \bar{y} = \mu(x, \bar{\alpha}, \bar{\beta}),$$

gdzie $\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$ są stałymi dowolnymi całkowania. Dla określenia ich, jak również odciętej ξ , posiadamy pięć równań, a mianowicie:

$$\begin{aligned} \lambda(a, \alpha, \beta) &= y_a, & \mu(b, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= \bar{y}_b, \\ \lambda(\xi, \alpha, \beta) &= \omega(\xi), & \mu(\xi, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= \omega(\xi), \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} f[\xi, \lambda(\xi, \alpha, \beta), \lambda'(\xi, \alpha, \beta)] - f_{\lambda'}[\xi, \lambda(\xi, \alpha, \beta), \lambda'(\xi, \alpha, \beta)] [\lambda'(\xi, \alpha, \beta) - \omega'(\xi)] = \\ = F[\xi, \mu(\xi, \bar{\alpha}, \bar{\beta}), \mu'(\xi, \bar{\alpha}, \bar{\beta})] - F_{\mu'}[\xi, \mu(\xi, \bar{\alpha}, \bar{\beta}), \mu'(\xi, \bar{\alpha}, \bar{\beta})] [\mu'(\xi, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) - \omega'(\xi)] \end{aligned}$$

12. Zastosujemy obecnie powyższe rozważania ogólne do zagadnienia załamania światła (refrakcji). Zagadnienie to możemy wypowiedzieć w sposób następujący.

W płaszczyźnie dana jest krzywa $y = \omega(x)$, która dzieli tę płaszczyznę na dwie części. Załóżmy, że pewne zjawisko np. — fale świetlne — może się rozchodzić wzdłuż linii na płaszczyźnie, przyczem szybkość rozchodzenia w jednej części płaszczyzny jest $v(x, y)$, a w drugiej $v_1(x, y)$. Znaleźć krzywą wzdłuż której rozpatrywane zjawisko rozprzestrzeniło się w najkrótszym czasie z pewnego punktu (a, A) , leżącego w jednej części płaszczyzny, do punktu (b, B) , leżącego w części drugiej.

Jeżeli przypuścimy, że krzywa rozchodzenia się zjawiska ma w pierwszej części płaszczyzny równanie $y = y(x)$, a w drugiej części: $\bar{y} = \bar{y}(x)$, przyczem $y(x)$ i $\bar{y}(x)$ są funkcjami klasy $C^{(2)}$, wówczas

$$v(x, y) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + y'^2} \frac{dx}{dt}, \quad v_1(x, y) = \frac{d\bar{s}}{dt} = \sqrt{1 + \bar{y}'^2} \frac{dx}{dt}.$$

Oznaczając wielkości $\frac{1}{v(x, y)}$ i $\frac{1}{v_1(x, y)}$ odpowiednio przez $n(x, y)$ i $n_1(x, y)$ [wielkości te w wypadku światła są proporcjonalne do współczynników załamania], znajdziemy, że okres czasu rozprzestrzenienia się zjawiska wzdłuż rozważanej krzywej, jest dany przez całkę

$$I_{y, \bar{y}} = \int_a^{\xi} n(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx + \int_{\xi}^b n_1(x, \bar{y}) \sqrt{1 + \bar{y}'^2} dx,$$

przyczem ξ jest odcięta punktu przecięcia toru zjawiska z krzywą rozgraniczającą $y = \omega(x)$.

Równania różniczkowe części krzywej szukanej będą odpowiednio

$$\frac{d}{dx} \frac{y' n}{\sqrt{1+y'^2}} - n_y \sqrt{1+y'^2} = 0, \quad \frac{d}{dx} \frac{\bar{y}' n_1}{\sqrt{1+\bar{y}'^2}} - n_{1\bar{y}} \sqrt{1+\bar{y}'^2} = 0.$$

Jeżeli szybkość rozchodzenia się zjawiska, a więc i współczynniki załamania, są stałe, wówczas krzywymi całkowymi tych równań są proste.

Rozpatrzmy dokładniej warunki (50) dla rozważanego wypadku. Można je przepisać w postaci

$$n \sqrt{1+\varphi'^2} - \frac{n \varphi'^2}{\sqrt{1+\varphi'^2}} - \frac{n \varphi' \omega'}{\sqrt{1+\varphi'^2}} = n_1 \sqrt{1+\psi'^2} - \frac{n_1 \psi'^2}{\sqrt{1+\psi'^2}} - \frac{n_1 \psi' \omega'}{\sqrt{1+\psi'^2}}$$

albo, po przekształceniu

$$\frac{n(1-\varphi'\omega')}{\sqrt{1+\varphi'^2}} = \frac{n_1(1-\psi'\omega')}{\sqrt{1+\psi'^2}}. \quad (52)$$

Oznaczając odpowiednio przez α , β , γ kąty jakie tworzą w punkcie (ξ, y_ξ) z dodatnim kierunkiem osi x -ów styczne do krzywych $y = \varphi(x)$, $\bar{y} = \psi(x)$, $y = \omega(x)$, i uwzględniając, że

$$\varphi'(\xi) = \operatorname{tg} \alpha, \quad \psi'(\xi) = \operatorname{tg} \beta, \quad \omega'(\xi) = \operatorname{tg} \gamma,$$

przepiszemy związek (52) w postaci

$$\frac{\cos(\alpha - \gamma)}{\cos(\beta - \gamma)} = \frac{n_1}{n}, \quad (53)$$

Zastępując kąt γ przez $\gamma + \frac{\pi}{2}$ i oznaczając przez i oraz i_1 kąty, które tworzą odpowiednio styczne do krzywych $y = \varphi(x)$ i $\bar{y} = \psi(x)$ z normalną krzywej rozgraniczającej, nadamy związkowi (53) kształt

$$\frac{\sin i}{\sin i_1} = \frac{n_1}{n}.$$

Jest to zwykła postać prawa załamania.

ROZDZIAŁ III.

PEWNE WŁASNOŚCI CAŁKI

$$\int_{\alpha}^{\beta} (Py^2 + 2Qyy' + Ry'^2) dx.$$

TWIERDZENIA JACOBI'EGO, LEGENDRE'A, STURMA.

1. W zagadnieniach, które napotkamy w przyszłości, ważną rolę będzie odgrywała kwestja znaku całki

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} (Py^2 + 2Qyy' + Ry'^2) dx, \quad (1)$$

gdzie P , Q i R są funkcjami x , klasy $C^{(1)}$ w przedziale (A, B) , przyczem A i B są pewnemi liczbami rzeczywistemi, spełniającemi warunek $A < \alpha < \beta < B$. Zbadamy całkę J w pewnej dziedzinie funkcyjnej (Y) , składającej się ze wszystkich funkcyj klasy $D^{(1)}$ i klasy $C^{(1)}$ i spełniających przytem warunki: $m < y(x) < M$, gdzie m i M są oznaczonemi liczbami i

$$y(\alpha) = y(\beta) = 0. \quad (2)$$

Założmy, że w przedziale $A \leq x \leq B$ funkcja $R(x)$ jest różną od zera. Jeżeli oznaczmy przez $\Omega(y, y')$ funkcję podcałkową w J , wówczas

$$R(x) = \frac{1}{2} \Omega_{yy'}(y, y'), \quad (3)$$

a więc warunek $R(x) \neq 0$ jest warunkiem regularności naszego zagadnienia. Stąd, na zasadzie wyników otrzymanych w rozdziale poprzednim, wnioskujemy, że ekstremum całki J może być osiągnięte tylko dla krzywej klasy $C^{(1)}$, skąd w dalszym ciągu, wynika, że, jeżeli dla pewnej krzywej o punktach kątowych, należącej do dziedziny (Y) , całka J przyjmuje wartość zero, to dla innych krzywych tej dziedziny J nie może zachować swego znaku.

Rzeczywiście, jeżeliby całka J zachowała swój znak, wówczas wartość zerowa, byłaby jedną z wartości ekstremalnych, a to jest, w myśl poprzedniego, niemożliwe.

Całkę J możemy przepisać w postaci

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} \Omega(y, y') dx. \quad (4)$$

Odpowiednie równanie Eulera będzie miało kształt

$$L(y) = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dx} \Omega_{y'} - \Omega_y \right] = 0. \quad (5)$$

przyczem $L(y)$ oznacza lewą stronę równania Eulera. Równanie to będzie linjowem i jednorodnem rzędu 2-go

$$\frac{d}{dx} (Ry') + (Q' - P)y = 0. \quad (6)$$

2. Zanim pójdziemy dalej, przypomnimy podstawowe własności całek linjowego i jednorodnego równania różniczkowego

$$a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = 0, \quad (7)$$

gdzie $a(x)$, $b(x)$ i $c(x)$ są funkcjami klasy $C^{(1)}$ w pewnym przedziale (A, B) , przyczem $a(x)$ jest różną od zera.

Wszystkie całki tego równania są klasy $C^{(2)}$ w rozważanym przedziale i są zupełnie określone przez swe wartości i wartości pierwszej pochodnej dla dowolnego punktu $x = a$. Ogólna całka równania posiada postać

$$u = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x),$$

gdzie C_1 i C_2 są stałemi dowolnemi, zaś $u_1(x)$ i $u_2(x)$ dwiema całkami szczególnymi, linjowo niezależnemi t. j. nie spełniającemi tożsamościowo związku

$$k_1 u_1(x) + k_2 u_2(x) = 0$$

przy żadnych wartościach k i k_1 , nie równych jednocześnie zeru. Warunkiem koniecznym i wystarczającym niezależności dwu dowolnych całek jest nieznikanie tożsamościowe wyznacznika

$$\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u'_1(x) & u'_2(x) \end{vmatrix}, \quad (8)$$

a do tego wystarczy, aby on nie był równym zero dla pewnej wartości $x = \alpha$ naszego przedziału. W tym wypadku, wyznacznik (8) będzie różnym od zera w całym przedziale*). Dwie całki niezależne nie mogą jednocześnie przyjmować wartość zero i tylko całka identycznie równa zero może przyjmować wartość zero jednocześnie ze swoją pochodną. Z ostatniego twierdzenia wynika następujący bardzo ważny wniosek: zera dowolnej całki $u(x)$ są izolowane. Rzeczywiście, niech α będzie zerem naszej całki t. j. $u(\alpha) = 0$ a więc $u'(\alpha) \neq 0$.

Dla dostatecznie małych wartości h , mamy

$$u(\alpha + h) = h[u'(\alpha) + \omega], \quad (9)$$

gdzie ω dąży do zera wraz z h ; a więc możemy znaleźć taką wartość $\delta > 0$, ażeby dla wszystkich wartości $|h| < \delta$ miała miejsce nierówność

$$|\omega| < |u'(\alpha)|,$$

ale wówczas, na zasadzie (9), widzimy, że $u(\alpha + h)$ przyjmuje wartość zero przy $|h| < \delta$, tylko dla $h = 0$. Innymi słowami, w przedziale $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ funkcja $u(x)$ posiada wartość zero tylko dla $x = \alpha$, co było do wykazania.

Po tych uwagach wstępnych przejdziemy do rozpatrzenia naszego zagadnienia.

3. Najpierw udowodnimy następujące, nadzwyczaj ważne twierdzenie Jacobi'ego.

Jeżeli istnieje całka szczególna równania (6), przyjmująca wartość zero dla wartości $x = \gamma$ i $x = \delta$, należących do przedziału zamkniętego (α, β) , i przytem przynajmniej jedna z liczb γ i δ leży wewnątrz przedziału (α, β) , wówczas całka J przyjmuje wartość zero dla pewnej krzywej z punktami kątowymi, należącej do wyżej wspomnianej dziedziny funkcyjnej (Y) ; a więc w tej dziedzinie, przy założeniu $R(x) \neq 0$ całka J nie zachowuje znaku. Biorąc pod uwagę twierdzenie wypowiedziane w § 4 rozdziału poprzedniego, wnioskujemy, że nie zachowa ona swego znaku i dla dziedziny funkcyjnej (Y_1) , będącej częścią (Y) i składającej się z krzywych klasy $C^{(1)}$.

*) Wynika to z twierdzenia Abela, (którego dowodu, zresztą bardzo łatwego, podawać tu nie będziemy), że wyznacznik (8) jest równy

$$C e^{-\int \frac{b(x) dx}{a(x)}}$$

gdzie C jest pewną stałą.

Niech $z = z(x)$ będzie całką równania (6), znikającą dla $x = \gamma$ oraz $x = \delta$ gdzie $\alpha \leq \gamma < \delta \leq \beta$, przyczem możliwym jest tylko jeden znak równości. Ponieważ $z(\gamma) = z(\delta) = 0$, więc $z'(\gamma)$ i $z'(\delta)$ są różne od zera.

Określimy funkcję $y = y(x)$ w sposób następujący:

w przedziale $\alpha \leq x \leq \gamma$	funkcja $y(x) = 0$
" $\gamma \leq x \leq \delta$	" $y(x) = z(x)$
" $\delta \leq x \leq \beta$	" $y(x) = 0$.

Ponieważ, w myśl założeń, przynajmniej jeden z przedziałów (α, γ) i (δ, β) , ma długość różną od zera, przeto krzywa $y = y(x)$ będzie posiadała w przedziale $\alpha \leq x \leq \beta$ przynajmniej jeden punkt kątowy γ lub δ . Całka J dla zdefiniowanej w ten sposób funkcji $y(x)$ da się przepisać w postaci

$$J = \int_{\gamma}^{\delta} \Omega(z, z') dx.$$

Na zasadzie tożsamości Eulera dla funkcji jednorodnych

$$\Omega(z, z') = \frac{1}{2} [\Omega_z z + \Omega_{z'} z'],$$

a więc całkę J możemy przedstawić w kształcie

$$J = \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\delta} [\Omega_z z + \Omega_{z'} z'] dx,$$

albo po przecałkowaniu przez części

$$J = \frac{1}{2} \Omega_{z'} z \Big|_{\gamma}^{\delta} + \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{\delta} [\Omega_z - \frac{d}{dx} \Omega_{z'}] z dx = \frac{1}{2} \Omega_{z'} z \Big|_{\gamma}^{\delta} - \int_{\gamma}^{\delta} L(z) z dx.$$

Ponieważ

$$L(z) = 0, \quad z(\gamma) = z(\delta) = 0$$

przeto, dla określonej przez nas funkcji $y(x)$ z punktami kątowymi

$$J = 0,$$

a więc twierdzenie jest udowodnione.

4. Udowodnimy obecnie twierdzenie, które można nazwać twierdzeniem Legendre'a.

Założmy, że w przedziale (α, β) funkcja $R(x) \neq 0$ i że istnieje całka $z = z(x)$ równania (6), różna od zera w całym przedziale zamkniętym (α, β) . Wówczas dla wszystkich funkcji $y(x)$ będących klasy $C^{(2)}$ w przedziale (α, β) i spełniających warunki

$$y(\alpha) = y(\beta) = 0,$$

całka J nie zmienia znaku.

Na zasadzie własności ogólnych, całek równań linjowych, o których wspominaliśmy w § 2 niniejszego rozdziału, całka $z(x)$ należy do klasy $C^{(2)}$.

Ponieważ $z(x)$ nie przyjmuje wartości zero w przedziale zamkniętym (α, β) , przeto jakkolwiek byśmy wzięli z rozpatrywanych funkcji funkcję $y(x)$, zawsze znajdziemy funkcję $w(x)$ klasy $C^{(2)}$, określoną z warunku

$$y(x) = z(x)w(x), \quad (10)$$

dla której

$$w(\alpha) = w(\beta) = 0. \quad (11)$$

Po przecałkowaniu przez części drugiego wyrazu całki

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} \Omega(y, y') dx = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (y \Omega_y + y' \Omega_{y'}) dx,$$

otrzymamy wskutek (10) i (11) całkę J w postaci

$$J = - \int_{\alpha}^{\beta} z w L(zw) dx, \quad (12)$$

gdzie, jak dawniej,

$$L(y) \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dx} \Omega_y - \Omega_y \right].$$

Biorąc pod uwagę, że

$$L(z) = 0,$$

znajdziemy:

$$\begin{aligned} z w L(zw) &= z w \left\{ \frac{d}{dx} [R(z' w + z w')] + (Q' - P) zw \right\} = \\ &= z w \{ w L(z) + R' z w' + 2 R z' w' + R w'' z \} = R' w w' z^2 + 2 R w w' z z' + \\ &\quad + R w w'' z^2 = \frac{d}{dx} (R w w' z^2) - R w'^2 z^2, \end{aligned}$$

a ponieważ wskutek (11)

$$R w w' z^2 \Big|_{\alpha}^{\beta} = R w w' z^2 \Big|_{\beta}^{\alpha} = 0,$$

przeto całka (12) przyjmie postać

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} R w'^2 z^2 dx, \quad (13)$$

skąd wynika prawdziwość naszego twierdzenia, gdyż funkcja podcałkowa znaku nie zmienia.

Łatwo widzieć, że na skutek twierdzenia udowodnionego w § 2 poprzedniego rozdziału, warunek, że funkcja $y(x)$ należy do klasy $C^{(2)}$, może być odrzucony i zastąpiony przez słabszy warunek, że funkcja y należy do klasy $D^{(1)}$ lub $C^{(1)}$. Zatem, twierdzenie nasze może być wypowiedziane w sposób następujący:

Jeżeli mamy całkę równania (6) należącą do klasy $C^{(2)}$ i nieznikającą w całym przedziale zamkniętym (α, β) i, jeżeli w tym przedziale $R(x) \neq 0$, to dla wszystkich krzywych $y = y(x)$, należących do klas $C^{(1)}$ i $D^{(1)}$ i spełniających warunki

$$y(\alpha) = y(\beta) = 0,$$

całka J zachowuje swój znak.

5. Jako wniosek z udowodnionego twierdzenia wynika następujące twierdzenie:

Jeżeli dla pewnych dwóch wartości ξ_1 i ξ_2 , leżących w przedziale (α, β) , funkcja R posiada różne znaki, to całka J nie może zachować swego znaku w obszarze funkcyjnym Y rozpatrzonym wyżej.

Rzeczywiście, wskutek ciągłości funkcji R zawsze możemy znaleźć dwa takie przedziały (α_1, β_1) i (α_2, β_2) , zawierające odpowiednio punkty ξ_1 i ξ_2 , że w nich $R(x) \neq 0$ i zachowuje odpowiednio znaki $R(\xi_1)$ i $R(\xi_2)$. Wybierzmy dowolne wartości $z_1(\xi_1)$ i $z_2(\xi_2)$ różne od zera; wówczas znajdziemy takie

całki $z_1(x)$ oraz $z_2(x)$ równania (6), które będą ciągłe wraz ze swymi pierwszymi i drugimi pochodnymi odpowiednio w przedziałach (α_1, β_1) i (α_2, β_2) i będą różne od zera w pewnych przedziałach (α'_1, β'_1) oraz (α'_2, β'_2) , leżących odpowiednio wewnątrz przedziałów (α_1, β_1) i (α_2, β_2) .

Określmy teraz pewną funkcję $y(x)$ w sposób następujący

w przedziale:	funkcja:
$\alpha \leq x \leq \alpha'_1$	$y(x) = 0$
$\alpha'_1 \leq x \leq \beta'_1$	$y(x) = (x - \alpha'_1)^2 (x - \beta'_1)^2 z_1(x) = w(x) z_1(x)$
$\beta'_1 \leq x \leq \beta$	$y(x) = 0.$

Funkcja ta należy do klasy $C^{(2)}$ w całym przedziale (α, β) i dla niej całka J będzie miała postać

$$J = \int_{\alpha'_1}^{\beta'_1} \Omega(y, y') dx.$$

Ponieważ w przedziale (α'_1, β'_1) całka $z = z_1(x)$ równania (6) jest różną od zera, więc, w myśl poprzedniego znajdziemy dla J wartość

$$J = \int_{\alpha'_1}^{\beta'_1} R w'^2 z_1^2 dx,$$

skąd wnioskujemy, że dla określonej przez nas funkcji $y = y(x)$, znak J jest identyczny ze znakiem $R(\xi_1)$.

Zupełnie analogicznie można znaleźć taką krzywą $y = y(x)$, dla której całka J będzie miała wartość

$$J = \int_{\alpha'_2}^{\beta'_2} R w'^2 z_2^2 dx,$$

gdzie $w = (x - \alpha'_2)^2 (x - \beta'_2)^2$. Dla tej krzywej znak J będzie identyczny ze znakiem $R(\xi_2)$, a więc przeciwny niż dla poprzedniej wartości J .

Zatem, ażeby całka J zachowywała swój znak w dziedzinie funkcyjnej (Y) , funkcja $R(x)$ musi zachować swój znak w przedziale całkowania.

6. Udowodnione przez nas twierdzenia, pozwalają wyprowadzić cały szereg innych ważnych twierdzeń, dotyczących się całek równań linjowych różniczkowych 2-ego rzędu, i w szczególności twierdzenie Sturma.

Niech będzie dane pewne równanie różniczkowe linjowe i jednorodne

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0, \quad (14)$$

gdzie funkcje $a(x)$, $b(x)$ i $c(x)$ są funkcjami klasy $C^{(1)}$ w przedziale zamkniętym (A, B) i przytem, w całym tym przedziale $a(x) \neq 0$. Równanie to możemy zawsze sprowadzić do postaci zredukowanej

$$R(x)y'' + R'(x)y' + K(x)y = 0. \quad (15)$$

W tym celu wystarczy pomnożyć równanie (14) przez czynnik $\lambda(x)$ i dobrać funkcję $\lambda(x)$ w ten sposób, aby

$$\frac{d}{dx} \{ \lambda(x) a(x) \} = \lambda(x) b(x).$$

Z ostatniego równania znajdziemy na $\lambda(x)$ wartość

$$\lambda(x) = \frac{C e^{\int_A^x \frac{b}{a} dx}}{a(x)},$$

gdzie C jest stałą dowolną. Pozatem, jak łatwo widzieć, $\lambda(x)$ jest funkcją klasy $C^{(1)}$ i w całym przedziale jest różna od zera. Możemy więc na przyszłość zakładać, że mamy do czynienia z równaniem w postaci zredukowanej (15) przyczem $R(x) \neq 0$ dla $A \leq x \leq B$. Łącznie z równaniem (15) będziemy rozważali całą postać

$$J = \int_p^q (P y^2 + 2 Q y y' + R y'^2) dx, \quad (16)$$

dla której równanie (12) będzie równaniem Eulera i w której $A < p < q < B$. W tym celu, jak to można spostrzec, porównywując równanie (15) z równaniem Eulera

$$R y'' + R' y' + (Q' - P) y = 0, \quad (17)$$

możemy wybrać dowolnie funkcję Q klasy $C^{(1)}$, a za P funkcję, określoną z równania

$$Q' - P = K.$$

Dla całki J warunek Legendre'a jest spełniony.

Przypuśćmy, że pewna całka szczególna $y = u(x)$ równania (15) albo, co na jedno wychodzi, (17), należąca do klasy $C^{(2)}$, posiada w przedziale (p, q) dwie wartości zerowe α i β ($\alpha < \beta$), przyczem pomiędzy α i β niema innych zer. Takie zera nazwiemy kolejnemi. Wykażemy, że każda inna całka równania (15), linjowo niezależna od $u(x)$, znika przynajmniej jeden raz wewnątrz przedziału (α, β) . Istotnie, przy-

puśćmy, wbrew temu, że istnieje całka $y = v(x)$, która nie znika w całym przedziale zamkniętym (α, β) .*) Ponieważ $v(x)$ jest funkcją ciągłą i oprócz tego zera całki $u(x)$ są punktami izolowanymi, więc zawsze znajdziemy przedział zamknięty (γ, δ) zawarty w przedziale (A, B) , zawierający przedział (α, β) i posiadający własność, że dla wszystkich x , spełniających warunek $\gamma \leq x \leq \delta$, zachodzi $v(x) \neq 0$ zaś całka $u(x)$ znika w tym przedziale tylko dla $x = \alpha$ oraz $x = \beta$. Lecz wówczas, w myśl twierdzenia Jacobi'ego, całka

$$\int_{\gamma}^{\delta} (P y^2 + 2 Q y y' + R y'^2) dx \quad (18)$$

wskutek istnienia całki $y = u(x)$ musi zmienić swój znak w dziedzinie funkcyjnej, składającej się z krzywych klasy $D^{(1)}$, a więc i $C^{(1)}$, spełniających warunki

$$y(\gamma) = y(\delta) = 0.$$

Z drugiej strony, na zasadzie twierdzenia Legendre'a, wskutek istnienia całki $y = v(x)$, nie znikającej w całym przedziale zamkniętym (γ, δ) , całka (18) w tejże dziedzinie funkcyjnej powinna zachować swój znak. Z tej sprzeczności wynika fałszywość naszego przypuszczenia, a więc nie ma całki równania (15), nieznikającej w przedziale zamkniętym (α, β) .

Wykażemy obecnie, że każda całka szczególna $y = v(x)$, nieznikająca na końcach przedziału (α, β) [a więc niezależna linjowo od całki $u(x)$] przyjmuje wewnątrz (α, β) wartość zerową dokładnie raz jeden. Jak i poprzednio, przez α i β oznaczamy zera kolejne całki $u(x)$.

Rzeczywiście, przypuśćmy, że całka $v(x)$ znika w kilku punktach i niech γ i δ ($\alpha < \gamma < \delta < \beta$) oznaczają jej dwa kolejne zera. Ponieważ zera są punktami izolowanymi, przeto zawsze znajdziemy przedział zamknięty (λ, μ) , dla którego $\alpha < \lambda < \gamma$ i $\delta < \mu < \beta$, w którym $v(x)$ znika tylko dwa razy.

W ten sposób w przedziale zamkniętym (λ, μ) istnieje całka $y = u(x)$ równania (15), nie znikająca ani razu, oraz całka $y = v(x)$, znikająca dwa razy.

Wskutek pierwszego z tych faktów, całka

$$\int_{\lambda}^{\mu} (P y^2 + 2 Q y y' + R y'^2) dx$$

*) Oczywiście $v(x)$ nie może znikać na końcach przedziału (α, β) , gdyż dwie całki linjowo niezależne naszego równania, nie mogą jednocześnie znikać.

powinna zachować swój znak w dziedzinie krzywych $y = y(x)$ klasy $D^{(1)}$ i $C^{(1)}$, spełniających warunki

$$y(\lambda) = y(\mu) = 0.$$

Natomiast z drugiego faktu wynika, że ta sama całka w tej samej dziedzinie nie zachowuje swego znaku. Stąd wnioskujemy, że żadna całka szczególna równania różniczkowego (15) nie może zniknąć dwukrotnie pomiędzy dwoma kolejnymi zerami całki szczególnej. Ponieważ jednak, jak widzieliśmy wyżej, ona nie może również nie zniknąć ani razu, przeto prawdziwym jest następujące twierdzenie Sturma:

Jeżeli w linjowym i jednorodnym równaniu różniczkowym

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0,$$

którego współczynniki w przedziale zamkniętym (A, B) należą do klasy $C^{(1)}$, współczynnik $a(x)$ nie znika w żadnym punkcie tego przedziału, wówczas między dwoma kolejnymi zerami jakiejkolwiek całki szczególnej, leżącymi w przedziale (α, β) , gdzie $A < \alpha < \beta < B$, zawsze znajduje się jedno i tylko jedno zero dowolnej innej całki szczególnej.

7. Wykażemy obecnie, że gdy $R(x) \neq 0$ w przedziale zamkniętym (α, β) , to założenie twierdzenia Jacobi'ego, że istnieje całka odpowiedniego równania Eulera, nie znikająca w przedziale zamkniętym (α, β) , będzie spełnione dla całki

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} (Py^2 + 2Qyy' + Ry'^2) dx \quad (19)$$

wtedy, gdy całka równania

$$Ry'' + R'y' + (Q' - P)y = 0, \quad (20)$$

znikająca dla $x = \alpha$, będzie różną od zera dla wszystkich wartości $\alpha < x \leq \beta$. Będziemy oznaczali przez $\Delta(x, \gamma)$ dowolną całkę równania (20), znikającą dla $x = \gamma$. Oczywiście wszystkie inne całki, posiadające tę własność, będą się różniły tylko stałym czynnikiem.

Załóżmy, że $R(x) \neq 0$ i że R, R', Q i P są funkcjami ciągłymi w pewnym przedziale (a, b) zawierającym wewnątrz (α, β) .

Ponieważ z założenia, że $\Delta(\beta, \alpha) \neq 0$ jest liczbą różną od zera i ponieważ $\Delta(x, \alpha)$ jest ciągłą w otoczeniu punktu β , przeto istnieje taka

liczba dodatnia ϵ , że $\Delta(x, \alpha)$ będzie różnym od zera dla wszystkich wartości x , spełniających warunek $\alpha < x < \beta + \epsilon$. Weźmy dowolną liczbę γ spełniającą warunek $\beta < \gamma < \beta + \epsilon$, i zbudujemy całkę równania (20), znikającą w punkcie $x = \gamma$ t. j. całkę $\Delta(x, \gamma)$. Całki $\Delta(x, \alpha)$ i $\Delta(x, \gamma)$ są linjowo niezależne ponieważ $\Delta(\gamma, \alpha) \neq 0$ i $\Delta(\gamma, \gamma) = 0$. Stąd znów wynika, że $\Delta(\alpha, \gamma) \neq 0$. Ale łatwo widzieć, że $\Delta(x, \gamma)$ nie może przyjmować wartości zero dla żadnego punktu przedziału zamkniętego (α, β) . Rzeczywiście dla $x = \alpha$ całka $\Delta(x, \gamma)$ jest różną od zera, jeżeliby zaś ona zniknęła dla pewnej wartości δ , przyczem $\alpha < \delta \leq \beta$, wówczas między δ i γ powinno istnieć zero całki $\Delta(x, \alpha)$, co jest sprzeczne z założeniem. A więc w całym przedziale zamkniętym (α, β) całka $\Delta(x, \gamma)$ jest różną od zera, zatem w tym przedziale warunek Jacobi'ego dla całki J jest spełniony.

W ten sposób otrzymaliśmy ostatecznie następujące twierdzenie:

Warunkiem koniecznym, aby całka

$$\int_{\alpha}^{\beta} (P y^2 + 2 Q y y' + R y'^2) dx$$

nie zmieniała swego znaku w dziedzinie wszystkich funkcji klasy $C^{(1)}$ i $D^{(1)}$, spełniających warunki

$$y(\alpha) = y(\beta) = 0,$$

jest, żeby funkcja $R(x)$ nie zmieniała swego znaku w przedziale całkowania i ażeby całka $\Delta(x, \alpha)$ równania różniczkowego Eulera, znikająca dla $x = \alpha$, była różną od zera dla wszystkich punktów wewnętrznych przedziału $\alpha < x < \beta$. Warunkiem dostatecznym niezmienności znaku rozpatrywanej całki, jest, aby $R(x)$ było różne od zera w pewnym przedziale zamkniętym (a, b) zawierającym wewnątrz przedział (α, β) i żeby całka $\Delta(x, \alpha)$ była różną od zera dla wszystkich wartości x spełniających warunek $\alpha < x \leq \beta$.

8. Jako przykład rozpatrzmy całkę

$$\int_{\alpha}^{\beta} (y'^2 - k^2 y^2) dx, \quad (21)$$

dla której $R = 1$, a więc warunek Legendre'a jest spełniony dla wszystkich wartości x .

Odpowiednie równanie Eulera będzie miało postać

$$y'' + k^2 y = 0,$$

skąd

$$\Delta(x, \alpha) = \sin k(x - \alpha).$$

Zatem warunek Jacobi'ego będzie

$$k(\beta - \alpha) < \pi$$

czyli

$$\beta - \alpha < \frac{\pi}{k},$$

albo jeszcze inaczej

$$k < \frac{\pi}{\beta - \alpha}.$$

Jeżeli granice całkowania spełniają ostatni warunek, to całka (21) zachowuje swój znak i przy tem znak dodatni dla wszystkich funkcji klasy $C^{(1)}$ i $D^{(1)}$, spełniających warunki

$$y(\alpha) = y(\beta) = 0.$$

Stąd wynika, że dla tych funkcji otrzymamy nierówność:

$$\frac{\int_{\alpha}^{\beta} y'^2 dx}{\int_{\alpha}^{\beta} y^2 dx} > \frac{\pi^2}{(\beta - \alpha)^2}.$$

9. Damy obecnie ważne zastosowania otrzymanych wyników. Niech dla całki

$$\int_{\alpha}^{\beta} (P y^2 + 2 Q y y' + R y'^2) dx$$

będą spełnione warunki dostateczne Jacobi'ego i Legendre'a, mówiące o niezmienności jej znaku, przyczem założymy, że $R(x) > 0$ i niech $z = z(x)$ będzie całką równania Eulera, nie znikającą w przedziale zamkniętym (α, β) . Wówczas, jeżeli $w(x)$ jest dowolną funkcją klasy $C^{(1)}$, znikającą w punktach α i β , to kładąc $y = z w$ znajdziemy, jak i w § 4 niniejszego rozdziału

$$\int_{\alpha}^{\beta} (P y^2 + 2 Q y y' + R y'^2) dx = \int_{\alpha}^{\beta} R z^2 w'^2 dx.$$

Zauważymy, że dla przedziału zamkniętego (α, β) zachodzą nierówności

$$0 < m^2 \leq R z^2 \leq M^2, \quad 0 < n^2 \leq z^2 \leq N^2, \quad (22)$$

gdzie m, M, n, N oznaczają pewne stałe, różne od zera.

Rozpatrzmy obecnie całkę

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} [(P - \omega^2 \phi) y^2 + 2 Q y y' + R y'^2] dx &= \int_{\alpha}^{\beta} R z^2 w'^2 dx - \\ &- \int_{\alpha}^{\beta} \omega^2 \phi z w^2 dx, \end{aligned} \quad (23)$$

przyczem $\phi(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale zamkniętym (α, β) zaś ω — pewna stała.

Wykażemy, że stałą ω^2 możemy wybrać tak małą, ażeby całka (23) nie zmieniała swego znaku w dziedzinie funkcji $y(x)$ klasy $D^{(1)}$ i $C^{(1)}$, przyjmujących wartość zero dla $x = \alpha$ i $x = \beta$.

Rzeczywiście oznaczmy przez λ^2 dowolną liczbę dodatnią, dla której spełniona byłaby w całym przedziale (α, β) nierówność

$$\phi(x) < \lambda^2.$$

Na zasadzie tej nierówności oraz nierówności (22), mamy

$$\int_{\alpha}^{\beta} R z^2 w'^2 dx - \omega^2 \int_{\alpha}^{\beta} \phi z^2 w^2 dx \geq m^2 \int_{\alpha}^{\beta} (w'^2 - \frac{\omega^2 N^2 \lambda^2}{m^2} w^2) dx, \quad (24)$$

a więc jeżeli ω^2 wybierzemy w ten sposób, aby

$$\frac{\omega^2 N^2 \lambda^2}{m^2} < \frac{\pi^2}{(\beta - \alpha)^2},$$

to całka, stojąca po prawej stronie nierówności (24), będzie dodatnią, skąd wynika, że dodatnią będzie i całka (23). Ale wówczas, równanie Eulera dla tej ostatniej całki t. j. równanie

$$L(y) \equiv \frac{d}{dx} (Ry') + (Q' - P)y = -\omega^2 \psi y \quad (25)$$

będzie posiadało całkę różną od zera w całym przedziale (α, β) , w szczególności, jeżeli $\psi(x)$ w całym przedziale (α, β) nie przyjmuje wartości dodatnich, to równanie (25) posiada całkę różną od zera w całym przedziale (α, β) przy każdej wartości ω^2 .

Otrzymane wyniki mogą być wypowiedziane w sposób następujący:
Jeżeli równanie różniczkowe

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0,$$

gdzie $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ są klasy $C^{(1)}$ w przedziale zamkniętym (A, B) , zaś $a(x) \neq 0$, posiada całkę $z'' = z(x)$, różną od zera w pewnym przedziale zamkniętym (α, β) , zawartym wewnątrz przedziału (A, B) , to przy dostatecznie małej wartości stałej ω^2 równanie

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = -\omega^2 \psi(x)y,$$

gdzie $\psi(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale (α, β) , również posiada całkę $z_1(x)$, różną od zera w przedziale zamkniętym (α, β) .

ROZDZIAŁ IV.

WARUNKI LEGENDRE'A I JACOBI'EGO.

1. Obecnie wyprowadzimy dalsze warunki konieczne istnienia ekstremum całki

$$I = \int_a^b f(x, y, y') dx, \quad (1)$$

przyczem ekstremum szukać będziemy w obszarze funkcyjnym (Y), składającym się ze wszystkich funkcji klasy $C^{(2)}$, spełniających warunki

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \quad (2)$$

oraz warunek $m < y(x) < M$ ($a \leq x \leq b$), gdzie m i M oznaczają pewne dane liczby.

Niech $y = \varphi(x)$ będzie szukanym rozwiązaniem. Jak wiadomo funkcja $\varphi(x)$ spełnia równanie Eulera t. j. tożsamościowo zachodzi równość

$$\frac{d}{dx} f_{\varphi'} - f_{\varphi} = 0. \quad (3)$$

Jak i dawniej, będziemy porównywali wartość całki (1), wziętej dla krzywej

$$y = \varphi(x)$$

i dla krzywych

$$y = \varphi(x) + h \eta(x),$$

gdzie $\eta(x)$ jest funkcją klasy $C^{(1)}$ w przedziale (a, b) , spełniającą warunek $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Zbiór takich funkcji $\eta(x)$ nazwiemy obszarem funkcyjnym (H). Jeżeli do (1) podstawimy wartość $y = \varphi(x) + h \eta(x)$, wówczas całka I będzie pewną funkcją h

$$I(h) = \int_a^b f(x, y, y') dx,$$

posiadającą ekstremum dla $h = 0$.

Z warunku Eulera wynika, że

$$I'(0) = 0.$$

Zbadamy obecnie wartość $I''(0)$. Wskutek warunków, nałożonych na funkcję $f(x, y, y')$, znajdziemy

$$I''(h) = \int_a^b (f_{yy} \eta^2 + 2f_{yy'} \eta \eta' + f_{y'y'} \eta'^2) dx,$$

a ponieważ dla $h = 0$ zachodzą równości $y = \varphi(x)$, $y' = \varphi'(x)$, przeto, oznaczając dla prostoty

$$P = f_{\varphi\varphi}(x, \varphi(x), \varphi'(x)), \quad Q = f_{\varphi\varphi'}(x, \varphi(x), \varphi'(x)), \quad R = f_{\varphi'\varphi'}(x, \varphi(x), \varphi'(x)),$$

możemy napisać

$$I''(0) = \int_a^b (P \eta^2 + 2Q \eta \eta' + R \eta'^2) dx. \quad (4)$$

Funkcje P, Q, R będą w przedziale zamkniętym (a, b) funkcjami klasy $C^{(1)}$, ponieważ $f(x, y, y')$ w rozpatrywanym obszarze jest funkcją klasy $C^{(3)}$. Zrobimy nawet pewne więcej ograniczające przypuszczenie, założymy mianowicie, że P, Q i R będą funkcjami klasy $C^{(1)}$ w pewnym przedziale (A, B) zawierającym wewnątrz (a, b) t. j. $A < a < b < B$. Oczywiście warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcji $I(h)$ przy $h = 0$ jest warunek, aby $I''(0)$ nie zmieniała swego znaku w dziedzinie wszystkich funkcji $\eta(x)$, należących do (H) . Ale wówczas, na zasadzie wyników, otrzymanych w rozdziale poprzednim i dotyczących całki (4), muszą być spełnione warunki Legendre'a i Jacobi'ego; w ten sposób otrzymujemy następujące twierdzenie:

Warunkiem niezbędnym istnienia ekstremum całki I jest, aby funkcja

$$R = f_{\varphi'\varphi'}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \quad (5)$$

nie zmieniała swego znaku w granicach całkowania i żeby całka równania różniczkowego

$$\frac{d}{dx} (Rz') + (Q' - P)z = 0, \quad (6)$$

znikająca przy $x = a$, t. j. całka

$$z = \Delta(x, a) \quad (7)$$

była różną od zera dla wszystkich wartości x , spełniających warunek

$$a < x < b.$$

Pierwszy z tych warunków został znaleziony przez Legendre'a i nosi nazwę warunku Legendre'a, a drugi został otrzymany przez Jacobi'ego i zowie się warunkiem Jacobi'ego.

Zera całki (7), różne od a , noszą nazwę zer sprzężonych z a ; zatem warunek Jacobi'ego da się wypowiedzieć w sposób następujący: wewnątrz przedziału (a, b) nie powinno być zer sprzężonych z a .

2. Jeżeli funkcja $y = \varphi(x)$ klasy $C^{(2)}$, daje ekstremum całki

$$I = \int_a^b f(x, y, y') dx,$$

przyczem $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, to, na zasadzie poprzedniego, muszą być spełnione następujące warunki: 1^o funkcja ta musi być rozwiązaniem równania różniczkowego

$$\frac{d}{dx} f_{y'} - f_y = 0$$

(warunek Eulera-Lagrange'a), 2^o funkcja

$$R(x) = f_{y'y'}(x, \varphi(x), \varphi'(x))$$

nie powinna zmieniać znaku w przedziale (a, b) (warunek Legendre'a) i 3^o całka $z = \Delta(x, a)$ równania różniczkowego

$$Rz'' + R'z' + (Q' - P)z = 0,$$

gdzie

$$P = f_{yy}(x, \varphi(x), \varphi'(x)), \quad Q = f_{yy'}(x, \varphi(x), \varphi'(x)), \quad R = f_{y'y'}(x, \varphi(x), \varphi'(x)),$$

przyjmująca dla $x = a$ wartość zero, nie powinna zniknąć dla żadnej wartości x , leżącej wewnątrz przedziału (a, b) (warunek Jacobi'ego).

Będziemy porównywali wartość całki (1), wziętej dla krzywej $y = \varphi(x)$, z wartościami tej całki dla krzywych

$$y = \varphi(x) + h \eta(x),$$

gdzie $\eta(x)$ jest dowolną funkcją klasy $C^{(1)}$, przyczem $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Łatwo wykazemy, że jeżeli tylko w warunku Jacobi'ego założymy, że

$$z = \Delta(x, a) \neq 0 \quad \text{dla } a < x \leq b$$

t. j., że $\Delta(x, a)$ nie znika wewnątrz przedziału z dołączeniem punktu b (warunek ten nazwiemy silniejszym warunkiem Jacobi'ego) i że w warunku Legendre'a założymy, że w przedziale $a \leq x \leq b$ funkcja $R(x) \neq 0$ (silniejszy warunek Legendre'a), to wspomniane trzy warunki będą również wystarczającymi dla istnienia ekstremum całki $I(h)$, jeżeli tylko dla h będziemy brali dostatecznie małe wartości. Rzeczywiście, jak widzieliśmy, w tym wypadku całka I będzie pewną funkcją h , $I(h)$, taką, że dla wszystkich funkcji dziedziny (H)

$$I'(0) = 0$$

i prócz tego, dla wszystkich funkcji dziedziny (H) $I''(0)$ posiada ten sam znak, a te właśnie warunki, są wystarczającymi, ażeby $I(0)$ było ekstremalną wartością całki $I(h)$ w rozpatrywanej dziedzinie funkcyjnej.

3. Można jednak iść jeszcze dalej w tym kierunku i wykazać, że jeżeli wspomniane wyżej warunki (silniejszy warunek Legendre'a i silniejszy warunek Jacobi'ego) są spełnione, to można będzie dla krzywej $y = \varphi(x)$ znaleźć takie sąsiedztwo pierwszego rzędu, że pomiędzy wszystkimi krzywymi klasy $D^{(1)}$ i $C^{(1)}$, leżącymi w tem sąsiedztwie i czyniącymi zadość warunkom $y(a) = \varphi(a)$ i $y(b) = \varphi(b)$, krzywa $y = \varphi(x)$ będzie dawała ekstremum, inaczej mówiąc, można znaleźć takie liczby dodatnie A_0 i A_1 , że pomiędzy wszystkimi krzywymi $y = y(x)$ klasy $C^{(1)}$ i $D^{(1)}$, dla których

$$|y(x) - \varphi(x)| < A_0, \quad |y'(x) - \varphi'(x)| < A_1,$$

krzywa $y = \varphi(x)$ będzie dawała ekstremum całki (1).

Innymi słowami: warunki Eulera-Lagrange'a i silniejsze warunki Legendre'a i Jacobi'ego są warunkami wystarczającymi dla istnienia słabego ekstremum w pewnym sąsiedztwie krzywej $y = \varphi(x)$.

W dalszym ciągu zakładamy, że funkcja $f(x, y, y')$ należy do klasy $C^{(3)}$ dla wartości (x, y) , należących do pewnego obszaru $\mathcal{R}$ i skończonych y' . Kładąc

$$y(x) = \varphi(x) + \omega(x), \quad y'(x) = \varphi'(x) + \omega'(x), \quad \omega(a) = \omega(b) = 0,$$

otrzymamy tożsamościowo

$$\begin{aligned} f(x, \varphi + \omega, \varphi' + \omega') - f(x, \varphi, \varphi') &= f_{\varphi}(x, \varphi, \varphi') \omega + f_{\varphi'}(x, \varphi, \varphi') \omega' + \\ &+ \frac{1}{1.2} [f_{\varphi\varphi}(x, \varphi, \varphi') \omega^2 + 2f_{\varphi\varphi'}(x, \varphi, \varphi') \omega \omega' + f_{\varphi'\varphi'}(x, \varphi, \varphi') \omega'^2] + \\ &+ \frac{1}{1.2.3} [\bar{f}_{yyy} \omega^3 + 3\bar{f}_{yyy'} \omega^2 \omega' + 3\bar{f}_{yy'y'} \omega \omega'^2 + \bar{f}_{y'y'y'} \omega'^3], \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie przez $\bar{f}_{yyy}$, $\bar{f}_{yyy'}$ i t. d., oznaczamy wartości odpowiednich pochodnych dla argumentów x, k, l przyczem k i l są pewnymi wartościami pośrednimi odpowiednio między φ i $\varphi + \omega$ oraz φ' i $\varphi' + \omega'$. Korzystając z dawnych oznaczeń i kładąc, prócz tego,

$$\begin{aligned} M &= \frac{\bar{f}_{yyy} \omega + 3\bar{f}_{yyy'} \omega'}{3}, \\ N &= \frac{3\bar{f}_{yy'y'} \omega + \bar{f}_{y'y'y'} \omega'}{3}, \end{aligned} \quad (9)$$

możemy wzór (8), przecałkowany w granicach od a do b , przepisać w postaci

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_a^b f(x, \varphi + \omega, \varphi' + \omega') dx - \int_a^b f(x, \varphi, \varphi') dx = \\ &= \int_a^b (f_{\varphi} \omega + f_{\varphi'} \omega') dx + \frac{1}{1.2} \int_a^b (P \omega^2 + 2Q \omega \omega' + R \omega'^2) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \int_a^b (M \omega^2 + N \omega'^2) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Wskutek ciągłości, a więc i ograniczoności, funkcji f_{yyy} , $f_{yy'y'}$ i t. d. biorąc dowolną liczbę $\delta > 0$, możemy w ten sposób dobrać liczby

A_0 i A_1 i funkcje $\omega(x)$, ażeby w całym przedziale zamkniętym (a, b) zachodziły nierówności

$$|M| < \delta, \quad |N| < \delta \quad (11)$$

dla wszystkich $\omega(x)$, spełniających warunki $|\omega(x)| < A_0$, $|\omega'(x)| < A_1$, $\omega(b) = \omega(a) = 0$. Uwzględniając, że funkcja $y = \varphi(x)$ jest rozwiązaniem równania Eulera i że $\omega(a) = \omega(b) = 0$, znajdziemy:

$$\int_a^b (f_\varphi \omega + f_{\varphi'} \omega') dx = f_{\varphi'} \omega \Big|_a^b + \int_a^b \left(f_\varphi - \frac{d}{dx} f_{\varphi'} \right) dx = 0. \quad (12)$$

Biorąc dowolną liczbę dodatnią α^2 , możemy (10) na zasadzie (12) przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} \Delta I = \frac{1}{2} \left\{ \int_a^b \alpha^2 \omega^2 dx + \int_a^b [(P - \alpha^2) \omega^2 + 2Q \omega \omega' + R \omega'^2] dx + \right. \\ \left. + \int_a^b (M \omega^2 + N \omega'^2) dx \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Jeżeli silniejsze warunki Jacobi'ego i Legendre'a są spełnione, to równanie

$$\frac{d}{dx} (R z') + (Q' - P) z = 0$$

posiada całkę różną od zera w całym przedziale zamkniętym (a, b) . Ale wówczas, na zasadzie twierdzenia, udowodnionego w § 9 rozdziału poprzedniego, równanie

$$\frac{d}{dx} (R z') + (Q' - P + \alpha^2) z = 0$$

dla dostatecznie małych wartości α^2 będzie również posiadało całkę różną od zera w przedziale zamkniętym (a, b) .

Na zasadzie twierdzenia Legendre'a, oznaczając przez z tę ostatnią całkę i kładąc

$$\omega = z w,$$

otrzymamy tożsamościowo

$$\int_a^b [(P - \alpha^2) \omega^2 + 2Q\omega\omega' + R\omega'^2] dx = \int_a^b R z^2 w'^2 dx. \quad (14)$$

Podstawiając w wzór (13) zamiast ω jego wartość $\omega = zw$, oznaczając przez μ i ν odpowiednie wartości funkcji M i N , oraz biorąc pod uwagę ostatnią tożsamość, przepiszemy (13) w kształcie

$$\Delta I = \frac{1}{2} \int_a^b (\alpha^2 z^2 w^2 + R z^2 w'^2 + \mu z^2 w^2 + \nu (z'w + zw')^2) dx.$$

Na mocy silniejszego warunku Legendre'a i ciągłości funkcji $R(x)$, posiadająca ona w zamkniętym przedziale (a, b) dodatnie bezwzględne minimum, a więc możemy dobrać A_0 i A_1 w ten sposób, aby w całym przedziale zamkniętym (a, b) miała miejsce nierówność

$$R + \nu > 0,$$

a wtedy wyrażenie na ΔI możemy przekształcić do postaci

$$\Delta I = \frac{1}{2} \int_a^b \left[(\alpha^2 z^2 + \mu z^2 + \frac{R\nu z'^2}{R+\nu}) w^2 + (R+\nu) (w'z + \frac{\nu z'w}{R+\nu})^2 \right] dx. \quad (15)$$

Ponieważ z jest funkcją ciągłą, różną od zera w przedziale zamkniętym (a, b) , przeto istnieje taka liczba dodatnia k^2 , że w całym przedziale zamkniętym (a, b) $z^2 \geq k^2 > 0$; jednocześnie wskutek ciągłości z' , możemy przyjąć, że $z'^2 \leq g^2$ gdzie g^2 jest również pewną liczbą dodatnią. Wskutek tego, przy wszelkiem α^2 zawsze możemy w ten sposób dobrać liczbę δ , a z kolei i funkcje ω , ażeby w całym przedziale zamkniętym (a, b)

$$\alpha^2 z^2 + \mu z^2 + \frac{R\nu z'^2}{R+\nu} > 0.$$

Ale wówczas, na zasadzie nierówności $R + \nu > 0$ i wzoru (14), możemy napisać, że

$$\Delta I > 0$$

dla wszystkich funkcji $\omega(x)$, spełniających warunki

$$|\omega(x)| < A_0 \quad |\omega'(x)| < A_1.$$

Twierdzenie nasze jest więc udowodnione.

3. Widzimy więc, że zagadnienie znalezienia słabego ekstremum całki

$$I = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

przy założeniu $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, sprowadzą się do scałkowania dwu równań różniczkowych drugiego rzędu: równania Eulera

$$\frac{d}{dx} f_{y'} - f_y = 0 \quad (16)$$

i linowego równania Jacobi'ego

$$\frac{d}{dx} (R y') + (Q' - P) y = 0. \quad (16a)$$

Jacobi jednak wykazał, że znając całkę ogólną równania (16), otrzymamy przez proste różniczkowanie dwie niezależne całki szczególne, a więc i całkę ogólną równania (16a).

Z analitycznej teorii równań różniczkowych wynika, że jeżeli są spełnione założenia, które narzuciliśmy funkcji 3-zmiennych $f(x, y, y')$ i jeżeli jest spełniony silniejszy warunek Legendre'a $R > 0$, to dla wartości x, α, β , spełniających nierówności

$$A \leq x \leq B, \quad |\alpha - \alpha_0| < \gamma, \quad |\beta - \beta_0| < \gamma, \quad (17)$$

gdzie $A < a < b < B$, zaś γ pewna liczba dodatnia, całka ogólna $y = \omega(x, \alpha, \beta)$ równania Eulera, posiada następujące własności: 1^o dla $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ przechodzi ona w całkę szukaną, spełniającą warunki graniczne; 2^o funkcje $\omega, \omega_x, \omega_{xx}$ są w stosunku do zmiennych x, α, β , funkcjami klasy $C^{(1)}$; 3^o funkcja $y = \omega(x, \alpha, \beta)$ spełnia warunek

$$f_{yy'} [x, \omega(x, \alpha, \beta), \omega_x(x, \alpha, \beta)] > 0;$$

4^o wyznacznik

$$\frac{\partial(\omega, \omega_x)}{\partial(\alpha, \beta)}$$

jest różnym od zera.

Ponieważ $y = \omega(x, \alpha, \beta)$ jest całką ogólną równania Eulera, przeto dla wszystkich wartości α, β , spełniających nierówności (17), tożsamościowo zachodzi

$$\frac{d}{dx} f_y [x, \omega(x, \alpha, \beta), \omega_x(x, \alpha, \beta)] - f_y [x, \omega(x, \alpha, \beta), \omega_x(x, \alpha, \beta)] = 0.$$

Różniczkując tę tożsamość względem α i względem β (co można uczynić na zasadzie powiedzianego wyżej) otrzymamy dwie nowe tożsamości

$$\frac{d}{dx} [f_{yy'} \omega_x \alpha] + [\frac{d}{dx} f_{yy'} - f_{yy}] \omega_\alpha = 0,$$

$$\frac{d}{dx} [f_{yy'} \omega_x \beta] + [\frac{d}{dx} f_{yy'} - f_{yy}] \omega_\beta = 0.$$

Kładziemy w tych tożsamościach $\alpha = \alpha_0$ i $\beta = \beta_0$. Pamiętając, że

$$f_{yy} [x, \omega(x, \alpha_0, \beta_0), \omega_x(x, \alpha_0, \beta_0)] = P, \quad f_{yy'} [x, \omega(x, \alpha_0, \beta_0), \omega_x(x, \alpha_0, \beta_0)] = Q,$$

$$f_{yy'} [x, \omega(x, \alpha_0, \beta_0), \omega_x(x, \alpha_0, \beta_0)] = R$$

i oznaczając odpowiednio przez u_1 i u_2 funkcje $\omega_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0)$ i $\omega_\beta(x, \alpha_0, \beta_0)$, przepisujemy ostatnio otrzymane tożsamości w kształcie

$$\frac{d}{dx} (R u_1') + (Q' - P) u_1 = 0, \quad \frac{d}{dx} (R u_2') + (Q' - P) u_2 = 0,$$

skąd wnioskujemy, że funkcje u_1 i u_2 są całkami szczególnymi równania Jacobi'ego.

Wskutek warunku, że dla x, α, β , spełniających nierówności (17) $\frac{\partial(\omega, \omega_x)}{\partial(\alpha, \beta)} \neq 0$, znajdziemy, że w przedziale $A \leq x \leq B$

$$\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

t. j. $u_1(x)$ i $u_2(x)$ są niezależnymi całkami równania Jacobi'ego, a więc całka ogólna tego ostatniego, będzie $u = C_1 u_1 + C_2 u_2$, gdzie C_1 i C_2 są stałymi dowolnymi. Stąd już łatwo wykazać, że całką, którą oznaczaliśmy przez $\Delta(x, a)$ będzie

$$\Delta(x, a) = u_2(a) u_1(x) - u_1(a) u_2(x). \quad (18)$$

4. Otrzymany wynik, pozwoli nam znaleźć prostą interpretację geometryczną warunku Jacobi'ego.

Rozpatrzmy rodzinę linii ekstremalnych, przechodzących przez punkt (a, y_a) . Żeby znaleźć równanie tej rodziny krzywych, wystarczy wyeliminować z równań

$$y = \omega(x, \alpha, \beta), \quad y_a = \omega(a, \alpha, \beta), \quad (19)$$

jeden z parametrów (α, β) . Drugie z tych równań jest spełnione przy $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$ ponieważ zaś wyznacznik $\frac{\partial(\omega, \omega_x)}{\partial(\alpha, \beta)}$ jest różny od zera dla wartości argumentów danych przez nierówność (17), przeto, przynajmniej jedna z liczb $\omega_\alpha(a, \alpha_0, \beta_0), \omega_\beta(a, \alpha_0, \beta_0)$ jest różną od zera. Niech tą liczbą będzie $\omega_\beta(a, \alpha_0, \beta_0)$, wówczas, wskutek ciągłości funkcji $\omega_\beta(x, \alpha, \beta)$, $\omega_\beta(a, \alpha, \beta)$ będzie różnym od zera i dla $|\alpha - \alpha_0| < \delta, |\beta - \beta_0| < \delta$, gdzie δ jest pewną liczbą dodatnią; stąd znów wynika, że z drugiego z równań (19) możemy otrzymać funkcję różniczkowalną $\beta = \beta(\alpha)$, przyjmującą wartość β_0 dla $\alpha = \alpha_0$. Podstawiając do pierwszego z równań (10) $\beta = \beta(\alpha)$, otrzymamy równanie naszej rodziny linii ekstremalnych w postaci

$$y = \omega(x, \alpha, \beta) = \psi(x, \alpha),$$

przyczem $\psi(a, \alpha) = \omega(a, \alpha_0, \beta_0) = y_a$.

Łatwo wykazać, że

$$\psi_\alpha(x, \alpha_0) = C \Delta(x, a) \quad C — \text{pewna stała.}$$

Istotnie

$$\psi_\alpha(x, \alpha_0) = \omega_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0) + \omega_\beta(x, \alpha_0, \beta_0) \left(\frac{d\beta}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} \quad (20)$$

i prócz tego

$$\omega_\alpha(a, \alpha_0, \beta_0) + \omega_\beta(a, \alpha_0, \beta_0) \left(\frac{d\beta}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = 0, \quad (21)$$

przeto, pamiętając, że $\omega_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0) = u_1(x)$, $\omega_\beta(x, \alpha_0, \beta_0) = u_2(x)$, otrzymamy z równości (20) i (21), że

$$\phi_{\alpha}(x, \alpha_0) = \frac{u_2(a) u_1(x) - u_1(a) u_2(x)}{u_2(a)} = \frac{\Delta(x, a)}{u_2(a)},$$

co było do wykazania.

Teraz łatwo znajdziemy geometryczną interpretację warunku Jacobi'ego. Istotnie, równania

$$y = \phi(x, a), \quad \frac{\partial \phi(x, a)}{\partial a} = 0, \quad (22)$$

wyznaczają obwiednię rodziny krzywych $y = \phi(x, \alpha)$; równanie tej obwiedni otrzymamy rugując parametr α z równań (22). Jednocześnie, przy danym α równania (22) dają nam spólrzędne punktu styczności danej krzywej, należącej do rodziny, i obwiedni. Stąd wynika, że warunek Jacobi'ego $\Delta(x, a) \neq 0$ ($a < x < b$), sprowadzający się, w myśl poprzedniego, do warunku $\phi_{\alpha}(x, \alpha_0) \neq 0$, może być wypowiedziany w sposób następujący: w przedziale ($a < x < b$) krzywa ekstremalna $y = \phi(x, \alpha_0)$ nie powinna być styczną do obwiedni rodziny $y = \phi(x, \alpha)$. Punkt styczności krzywej ekstremalnej $y = \phi(x, \alpha_0)$ z obwiednią, nosi nazwę punktu sprzężonego z punktem (a, y_a) . Możemy więc warunek Jacobi'ego wypowiedzieć jeszcze w sposób następujący: żaden punkt wewnętrzny łuku krzywej ekstremalnej, łączącej punkty (a, y_a) i (b, y_b) , nie może być punktem sprzężonym z (a, y_a) .

Może się zdarzyć, że obwiednia naszych krzywych $y = \phi(x, \alpha)$ zredukuje się do jednego punktu (c, y_c) , wówczas punkt ten nazwiemy biegunem, sprzężonym z punktem (a, y_a) .

Zauważymy jeszcze, że jeżeli linie ekstremalne są liniami prostymi, to warunek Jacobi'ego jest spełniony w każdym przedziale, gdyż w tym przypadku rodzina

$$y = \phi(x, \alpha),$$

jest pękiem prostych, przechodzących przez punkt (a, y_a) . W tym wypadku nie ma ani punktów ani biegunów sprzężonych z (a, y_a) .

5. Wprowadzimy obecnie kilka nowych pojęć, z których będziemy korzystali w przyszłości, a przedewszystkiem pojęcie pola dowolnej rodziny krzywych lub funkcji.

Powiemy, że dana rodzina krzywych $y = \phi(x, \alpha)$ tworzy pole (K) , jeżeli z równania

$$y = \phi(x, \alpha) \quad (23)$$

gdzie $\phi(x, \alpha)$ jest funkcją klasy $C^{(2)}$, zaś (x, y) należą do pewnego ob-

szaru (K) na płaszczyźnie, da się wyznaczyć α jako funkcją jednoznaczna x i y : $\alpha = \alpha(x, y)$, klasy $C^{(1)}$.

Geometrycznie warunek ten może być wypowiedziany w sposób następujący: przez dowolny punkt obszaru (K) można przeprowadzić jedną i tylko jedną krzywą rodziny $y = \psi(x, \alpha)$, posiadającą oznaczoną i zmieniającą się w sposób ciągły styczność. Określając z równania (23) wartość α i podstawiając ją w równość $y' = \psi_x(x, \alpha)$, otrzymamy pewną jednoznaczna funkcję x i y , którą oznaczmy przez $p(x, y)$:

$$y' = \psi_x[x, \alpha(x, y)] \equiv p(x, y); \quad (24)$$

$p(x, y)$ nazwiemy funkcją danego pola. Ponieważ $\psi(x, \alpha)$ jest w rozpatrywanym obszarze funkcją klasy $C^{(2)}$, przeto $p(x, y)$ będzie w stosunku do swych argumentów klasy $C^{(1)}$. Ze wzoru (24) wynika, że wówczas

$$y'' = \psi_{xx}[x, \alpha(x, y)] = p_x(x, y) + p_y(x, y) p(x, y). \quad (25)$$

Wychodząc z równania (23) i tożsamości (24) i (25), otrzymamy tożsamości

$$\begin{aligned} y &\equiv \psi[x, \alpha(x, y)], \quad \alpha[x, \psi(x, \alpha)] \equiv \alpha, \quad p[x, \psi(x, \alpha)] \equiv \psi_x(x, \alpha), \quad \psi_x[x, \alpha(x, y)] \equiv p(x, y), \\ p_x[x, \psi(x, \alpha)] + p_y[x, \psi(x, \alpha)] p[x, \psi(x, \alpha)] &\equiv \psi_{xx}(x, \alpha), \quad (26) \\ \psi_{xx}[x, \alpha(x, y)] &\equiv p_x(x, y) + p_y(x, y) p(x, y). \end{aligned}$$

6. Weźmy pod uwagę jedną z krzywych rodziny $y = \psi(x, \alpha)$, odpowiadającą wartości parametru $\alpha = \alpha_0$.

Powiemy, że jest ona otoczona przez pole, jeżeli leży wewnątrz pewnego pola utworzonego przez krzywe $y = \psi(x, \alpha)$. Jeżeli do pola dołączymy punkt, przez który przechodzi nie jedna, lecz kilka krzywych danej rodziny, wówczas powiemy, że mamy do czynienia z polem w szerszym tego słowa znaczeniu, albo polem niewłaściwym. W przeciwstawieniu do tego, zwykle pole będziemy nieraz nazywali polem w węższym znaczeniu słowa, albo polem właściwym. Np. jeżeli do punktów płaszczyzny dodamy punkt (a, y_a) , to pęk prostych $y - y_a = \alpha(x - a)$, przechodzących przez ten punkt, tworzy pole w szerszym znaczeniu.

Wykażemy, że warunkiem wystarczającym, ażeby krzywa klasy $C^{(2)}$

$$y = \psi(x, \alpha_0)$$

była otoczona przez pole właściwe krzywych

$$y = \psi(x, \alpha),$$

w przedziale zamkniętym $a \leq x \leq b$, jest warunek

$$\phi_{\alpha}(x, \alpha_0) \neq 0$$

dla całego tego przedziału.

Dla ustalenia uwagi, przypuśćmy, że $\phi_{\alpha}(x, \alpha_0) > 0$. Wówczas, wskutek ciągłości funkcji $\phi_{\alpha}(x, \alpha)$, znajdziemy taką liczbę δ , że dla wszystkich wartości x , należących do zamkniętego przedziału (a, b) i dla wszystkich wartości α , spełniających warunek

$$|\alpha - \alpha_0| \leq \delta, \quad (27)$$

zachodzi nierówność $\phi_{\alpha}(x, \alpha) > 0$. Stąd wynika, że dla dowolnej wartości $x = x_1$, należącej do przedziału (a, b) , funkcja $\psi(x_1, \alpha)$, jest monotoniczną funkcją α , rosnącą od $\psi(x_1, \alpha - \delta)$ do $\psi(x_1, \alpha + \delta)$. Stąd dalej wynika, że jeżeli y_1 jest liczbą spełniającą nierówność

$$\psi(x_1, \alpha - \delta) \leq y_1 \leq \psi(x_1, \alpha + \delta),$$

to równanie

$$y_1 = \psi(x_1; \alpha),$$

posiada względem α dokładnie jedno rozwiązanie, spełniające warunek (27), inaczej mówiąc, przez punkt (x_1, y_1) , przechodzi jedna i tylko jedna krzywa rodziny $y = \psi(x, \alpha)$.

Z twierdzeń o funkcjach uwikłanych wynika, że funkcja $\alpha(x, y)$, otrzymana z równania $y = \psi(x, \alpha)$, jest klasy $C^{(1)}$. Stąd wnioskujemy, że rodzina $y = \psi(x, \alpha)$, w rozpatrywanym przypadku, tworzy pole, otaczające krzywą $y = \psi(x, \alpha_0)$.

7. Jeżeli nasza rodzina krzywych $y = \psi(x, \alpha)$, przy czym $|\alpha - \alpha_0| < g$, gdzie g jest liczbą skończoną ewentualnie $+\infty$, składa się z krzywych, przechodzących przez pewien punkt $M(a, y_a)$, to oczywiście, dołączając do rozpatrywanego pola punkt M , możemy w pewnych wypadkach otrzymać pole niewłaściwe.

Niech $y = \psi(x, \alpha_0)$ będzie jedną z krzywych naszej rodziny. Ponieważ dla wszystkich naszych krzywych tożsamościowo

$$\psi(a, \alpha) = y_a,$$

przeto również tożsamościowo musi zachodzić

$$\frac{\partial \psi(a, \alpha)}{\partial \alpha} = 0.$$

Przypuśćmy, że dla funkcji $\psi(x, \alpha)$, wyrażenie

$$\left[\frac{\partial^2 \psi(x, \alpha)}{\partial x \partial \alpha} \right]_{\substack{x=a \\ \alpha=\alpha_0}} \quad (28)$$

jest różnym od zera. Pozatem przypuśćmy, że w przedziale $a < x \leq b$

$$\left[\frac{\partial \psi(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=\alpha_0} \neq 0. \quad (29)$$

Wówczas, jak łatwo widzieć, krzywa $y = \psi(x, \alpha_0)$, w zamkniętym przedziale (a, b) będzie otoczona przez pole niewłaściwe.

Rzeczywiście, rozpatrzmy funkcję ciągłą $\omega(x, \alpha)$, którą zdefiniujemy w sposób następujący: dla wszystkich wartości x , różnych od a , jest ona równą

$$\frac{1}{x-a} \cdot \frac{\partial \psi(x, \alpha)}{\partial \alpha},$$

zaś dla $x = a$ jest równa

$$\frac{\partial^2 \psi(x, \alpha)}{\partial \alpha \partial x}.$$

Na zasadzie (28) i (29) funkcja $\omega(x, \alpha_0)$, jest różną od zera w przedziale zamkniętym $a \leq x \leq b$, a więc wskutek jej ciągłości, możemy wybrać liczbę dodatnią δ , tak małą, aby dla wszystkich wartości α , spełniających nierówność $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, funkcja $\omega(x, \alpha)$ była również różną od zera w całym przedziale zamkniętym $a \leq x \leq b$. Wskutek ciągłości tej funkcji, będzie ona posiadała dodatnie minimum, t. j. dla wszystkich rozpatrywanych wartości x i α będzie zachodziła nierówność

$$\omega(x, \alpha) \geq k^2 > 0,$$

gdzie k^2 jest pewną liczbą dodatnią. Stąd, biorąc pod uwagę definicję funkcji $\omega(x, \alpha)$, wnioskujemy, że dla $a < x \leq b$ i $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$ funkcja $\frac{\partial \psi(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ jest różną od zera i niemniejszą niż $k^2(x-a)$.

Opierając się na rozumowaniu, analogicznem do tego, które już przeprowadzaliśmy, dochodzimy do wniosku, że dla wszystkich $a < x \leq b$ i $\alpha_0 - \delta \leq \alpha \leq \alpha_0 + \delta$ przez każdy punkt obszaru, zawartego między krzywami

$$y = \psi(x, \alpha_0 - \delta), \quad y = \psi(x, \alpha_0 + \delta),$$

przechodzi jedna i tylko jedna krzywa naszej rodziny, przyczem krzywa $y = \psi(x, \alpha_0)$ leży wewnątrz tego obszaru. Inaczej mówiąc, funkcja $\alpha(x, y)$ otrzymana z równania

$$y = \psi(x, \alpha),$$

w tym obszarze będzie funkcją jednoznaczną argumentów x i y , jak łatwo wiedzieć, będzie należała do klasy $C^{(1)}$. Dla $x = a$ funkcja będzie wieloznaczną, lecz możnaby dowieść, że, jeżeli punkt (x, y) będzie się zbliżał do punktu M wzdłuż dowolnej oznaczonej krzywej L klasy $C^{(1)}$, leżącej w rozpatrywanym obszarze, to $\alpha(x, y)$ będzie zdążało do wartości parametru α_1 tej krzywej $y = \psi(x, \alpha_1)$ naszej rodziny, która będzie styczna do L w punkcie (a, y_a) , zaś funkcja pola $p(x, y)$ będzie zdążała do wartości współczynnika kąтового $\psi_x(a, \alpha_1)$.

8. Dotychczas przypuszczaliśmy, że $y = \psi(x, \alpha)$ jest rodziną dowolnych krzywych. Obecnie założymy, że ta rodzina jest rodziną krzywych ekstremalnych, występujących przy rozwiązaniu podstawowego zagadnienia rachunku warjacyjnego.

Można wówczas udowodnić następujące twierdzenie: Jeżeli są spełnione warunki Legendre'a i Jacobi'ego (silniejsze warunki), wówczas krzywa ekstremalna $y = \varphi(x)$ łącząca dwa dane punkty $M(a, y_a)$ i $N(b, y_b)$ może być otoczona przez pole rodziny krzywych ekstremalnych i właściwe i niewłaściwe.

Rzeczywiście, jeżeli $R \neq 0$ i $\Delta(x, a) \neq 0$ w przedziale $a < x \leq b$, to możemy znaleźć taką całkę równania Jacobi'ego $\Delta(x, A)$ gdzie $A < a$, która będzie różną od zera w przedziale $a \leq x \leq b$.

Rozpatrzmy punkt $P(A, \varphi(A))$ oraz rodzinę krzywych ekstremalnych $y = \psi(x, \alpha)$, przechodzących przez ten punkt. Niech krzywa ekstremalna $y = \varphi(x)$ odpowiada wartości $\alpha = \alpha_0$. Ponieważ

$$\Delta(x, A) = C \left[\frac{\partial \psi(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=\alpha_0},$$

przeto wnioskujemy, że dla wszystkich x , dla których $a \leq x \leq b$, oraz dla wszystkich wartości α , spełniających warunek $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, gdzie δ jest pewną liczbą dodatnią, funkcja

$$\frac{\partial \psi(x, \alpha)}{\partial \alpha}$$

jest różną od zera, a to jest warunkiem wystarczającym istnienia pola właściwego. Jeżeli za P przyjmiemy punkt M , to ponieważ

$$\left[\frac{\partial^2 \psi(x, \alpha)}{\partial \alpha \partial x} \right]_{\substack{\alpha = \alpha_0 \\ x = a}}$$

nie równa się zero, gdyż

$$\left[\frac{\partial^2 \psi(x, \alpha)}{\partial \alpha \partial x} \right]_{\alpha = \alpha_0}$$

jest pochodna od całki równania Jacobi'ego

$$\left[\frac{\partial \psi(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha = \alpha_0},$$

która równa się zero przy $x=a$, więc są spełnione warunki istnienia pola niewłaściwego.

Łatwo udowodnić twierdzenie, będące w pewnym stopniu odwrotnem do twierdzenia, wypowiedzianego wyżej, a mianowicie: Jeżeli jest spełniony silniejszy warunek Legendre'a i istnieje pole właściwe lub niewłaściwe krzywych ekstremalnych, otaczających krzywą ekstremalną $y=\varphi(x)$, to warunek Jacobi'ego jest spełniony.

Niech rodzina krzywych ekstremalnych, tworzących pole, ma równanie

$$y = \psi(x, \alpha), \quad (30)$$

przyczem krzywa ekstremalna $y = \varphi(x)$ będzie krzywą $y = \psi(x, \alpha_0)$. Ponieważ z równania (30) da się otrzymać α jako funkcja klasy $C^{(1)}$, przeto

$$\psi_{\alpha}(x, \alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 1,$$

skąd możemy wywnioskować, że $\psi_{\alpha}(x, \alpha)$ jest różne od zera dla wszystkich wartości x , spełniających nierówności $a \leq x \leq b$, ewentualnie nierówności $a < x \leq b$; pierwsza z tych okoliczności ma miejsce w wypadku pola właściwego, druga — pola niewłaściwego. Ponieważ zaś funkcja $\psi_{\alpha}(x, \alpha_0)$ jest całką równania Jacobi'ego, więc w razie pola właściwego całka ta jest różną od zera w przedziale $a \leq x \leq b$, w razie zaś pola niewłaściwego całka ta jest całką $\Delta(x, a)$, która różni się od zera w przedziale $a < x \leq b$. Stąd wynika, że w obydwóch wypadkach warunek Jacobi'ego jest spełniony.

9. Rozpatrzmy obecnie wypadek, gdy b jest wartością sprzężoną z a . Jeżeli rodzina krzywych ekstremalnych, przechodzących przez punkt $M(a, y_a)$, ma za swą obwiednię punkt $N(b, y_b)$ t. j., jeżeli punkt ten jest sprzężony z M , to łatwo wykazać, że wartości wszystkich całek I , wziętych

dla dowolnej krzywej ekstremalnej naszej rodziny między M i N , są sobie równe. Rzeczywiście, dla dowolnej ekstremalnej $y = \psi(x, \alpha)$ całka I będzie funkcją α

$$I = I(\alpha) = \int_a^b f[x, \psi(x, \alpha), \psi'(x, \alpha)] dx, \quad (31)$$

posiadającą pierwszą ciągłą pochodną.

Z (29) wynika

$$I'(\alpha) = \int_a^b (f_\psi \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + f_{\psi'} \frac{\partial \psi'}{\partial \alpha}) dx = f_{\psi'} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \Big|_a^b + \int_a^b (f_\psi - \frac{d}{dx} f_{\psi'}) \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} dx; \quad (32)$$

ale ponieważ $\psi(x, \alpha)$ jest całką równania Eulera, przeto

$$f_\psi - \frac{d}{dx} f_{\psi'} = 0.$$

Dalej, z założenia

$$\frac{\partial \psi(a, \alpha)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \psi(b, \alpha)}{\partial \alpha} = 0,$$

a więc wzór (32) daje

$$I'(\alpha) = 0$$

t. j.

$$I(\alpha) = \text{const.}$$

10. Załóżmy, że rodzina krzywych ekstremalnych, przechodzących przez punkt $M(a, y_a)$, posiada obwiednię, nie redukującą się do punktu. Równanie tej obwiedni otrzymamy, rugując α z równań

$$y = \psi(x, \alpha), \quad \frac{\partial \psi(x, \alpha)}{\partial \alpha} = 0. \quad (33)$$

Ponieważ przy spełnieniu silniejszego warunku Legendre'a, liczba

$$\left[\frac{\partial^2 \psi(x, \alpha)}{\partial \alpha \partial x} \right]_{\substack{x=b \\ \alpha=\alpha_0}} \quad (34)$$

różną jest od zera, gdyż

$$\left[\frac{\partial \psi(b, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha = \alpha_0} = 0,$$

a więc dla wszystkich wartości $b - \varepsilon \leq x \leq b$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, gdzie ε i δ są pewnymi, dostatecznie małymi liczbami dodatnimi, funkcja

$$\frac{\partial^2 \psi(x, \alpha)}{\partial \alpha \partial x}$$

będzie również różna od zera, a więc z drugiego z równań (33) dla wartości α , bliskich do α_0 , wyznaczmy x , jako jednoznaczna funkcję α , należącą do klasy $C^{(1)}$ i przyjmującą wartość b dla $\alpha = \alpha_0$.

Funkcję tę oznaczmy przez

$$x = x(\alpha).$$

Podstawiając tę wartość $x(\alpha)$ do pierwszego z równań (33), otrzymamy równania obwiedni w postaci

$$x = x(\alpha), \quad y = \psi[x(\alpha), \alpha] = y(\alpha). \quad (35)$$

Rozpatrzmy funkcję $x(\alpha)$ i zbadamy warunki, przy których w pobliżu punktu $N(b, y_b)$ leżą punkty obwiedni o odciętych mniejszych niż b , inaczej mówiąc, zbadamy, kiedy w pobliżu punktu N znajduje się łuk obwiedni z lewej strony prostej $x = b$.

Jest rzeczą oczywistą, że to musi zachodzić, jeżeli $x(\alpha_0)$ nie jest wartością ekstremalną funkcji $x(\alpha)$ t. j. gdy $x'(\alpha_0) \neq 0$ albo, ponieważ

$$x'(\alpha) = - \frac{\psi_{\alpha\alpha}(x, \alpha)}{\psi_{\alpha x}(x, \alpha)},$$

wtedy, gdy $\psi_{\alpha\alpha}(b, \alpha_0) \neq 0$.

Dalej, to zachodzi, gdy $\psi_{\alpha\alpha}(b, \alpha_0)$ jest równe zero, ale gdy przytem przy przejściu przez wartość zero $x'(\alpha)$, znaku nie zmienia, co oczywiście, będzie miało miejsce, jeżeli funkcja $\psi_{\alpha\alpha}(b, \alpha)$ jest tego samego znaku dla wszystkich wartości α dostatecznie bliskich α_0 .

Wreszcie, jeżeli przy przejściu przez zero funkcja $\psi_{\alpha\alpha}(x, \alpha)$ zmienia swój znak, wówczas zmienia swój znak również i $x'(\alpha)$. Jeżeli przytem dla rosnących wartości α funkcja $x'(\alpha)$ przejdzie od wartości ujemnych do dodatnich, to $x(\alpha)$ osiąga dla $\alpha = \alpha_0$ minimum, a więc na lewo od prostej $x = b$ nie ma punktów naszej obwiedni. Jeżeli zaś $x'(\alpha)$ przyjmuje dla $\alpha = \alpha_0$ wartość zero, przechodząc przy wzrastającym α od wartości dodatnich do ujemnych, wówczas wartość $x(\alpha_0)$ będzie maximum, a więc wszystkie punkty obwiedni w pobliżu N będą leżały na lewo od tej prostej.

We wszystkich rozpatrzonych wypadkach obwiednia nie będzie krzywą Eulera. Rzeczywiście niech równanie obwiedni będzie

$$y = g(x).$$

Z (35) otrzymamy dla niej

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \psi_x(x, \alpha) + \psi_\alpha(x, \alpha) \frac{d\alpha}{dx} = \psi_x(x, \alpha), \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \psi_{xx}(x, \alpha) + 2\psi_{x\alpha}(x, \alpha) \frac{d\alpha}{dx} + \psi_{\alpha\alpha}(x, \alpha) \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \psi_\alpha(x, \alpha) \frac{d^2\alpha}{dx^2} = \\ &= \psi_{xx}(x, \alpha) + \psi_{x\alpha}(x, \alpha) \frac{d\alpha}{dx} + \left[\psi_{x\alpha}(x, \alpha) + \psi_{\alpha\alpha}(x, \alpha) \frac{d\alpha}{dx} \right] \frac{d\alpha}{dx} + \\ &\quad + \psi_\alpha(x, \alpha) \frac{d^2\alpha}{dx^2}, \end{aligned} \quad (36)$$

albo, ponieważ zróżniczkowanie względem x drugiego z równań (33) daje

$$\psi_{x\alpha}(x, \alpha) + \psi_{\alpha\alpha}(x, \alpha) \frac{d\alpha}{dx} = 0, \quad (37)$$

przeto na mocy (37) i tego, że $\psi_\alpha(x, \alpha) = 0$,

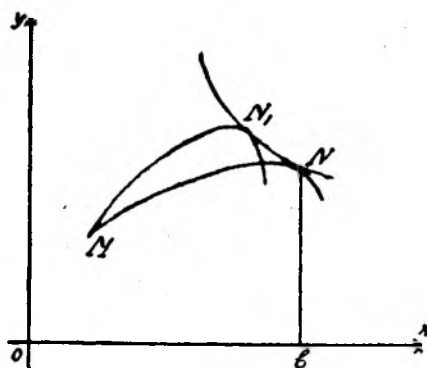
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \psi_{xx}(x, \alpha) + \psi_{x\alpha}(x, \alpha) \frac{d\alpha}{dx}, \quad (38)$$

a więc, ponieważ dla wszystkich wartości α , czyniących zadość warunkowi $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$, gdzie δ dostatecznie mała liczba, mamy, że $\psi_{x\alpha}(x, \alpha) \neq 0$ i ponieważ dla wszystkich wartości $\alpha \neq \alpha_0$ i bliskich do α_0 uważaliśmy $x'(\alpha)$ różnym od zera, więc na mocy (37) $\psi_{\alpha\alpha}(x, \alpha)$ i $\frac{d\alpha}{dx}$ są różne od zera; stąd widzimy, że dla obwiedni i dla odpowiedniej krzywej ekstremalnej $y = \phi(x, \alpha)$ drugie pochodne na zasadzie (38) są różne.

11. Opierając się na powyższem, łatwo wykazemy prawdziwość następującego twierdzenia:

Jeżeli dla $\alpha = \alpha_0$ funkcja $x'(\alpha)$ jest różną od zera, to cała, wzięta wzdłuż krzywej ekstremalnej MN , nie posiada wartości ekstremalnej; to samo ma również miejsce w przypadku, gdy $x'(\alpha)$ przyjmuje wartość zero, zachowując swój znak, albo, gdy, przy wzrastaniu α , $x'(\alpha)$ przechodzi od wartości dodatnich do ujemnych.

Rzeczywiście, ponieważ w pobliżu N w wymienionych wypadkach znajdują się punkty obwiedni, leżące z lewej strony prostej $x = b$, możemy więc znaleźć punkt N_1 z lewej strony prostej $x = b$, należący do obwiedni i leżący dowolnie blisko N ; N_1 będzie punktem styczności obwiedni z pewną krzywą MN_1 naszej rodziny krzywych ekstremalnych. Weźmy całkę dla krzywej, składającej się z łuku ekstremalnej MN_1 i łuku obwiedni NN_1 . Całka ta będzie funkcją parametru α , należącą do klasy $C^{(1)}$



Rys. 10.

$$I(\alpha) = \int_a^{x(\alpha)} f[x, \psi(x, \alpha), \psi_x(x, \alpha)] dx + \int_{x(\alpha)}^b f(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Pochodna tej całki będzie

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= f[x(\alpha), \psi, \psi'] x'(\alpha) + \int_a^{x(\alpha)} \left(f_\psi \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + f_{\psi'} \frac{\partial \psi'}{\partial \alpha} \right) dx - f[x(\alpha), y(\alpha), y'(\alpha)] x'(\alpha) = \\ &= f_{\psi'}(x, y, y') \frac{\partial \psi(x, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_a^{x(\alpha)}. \end{aligned}$$

Ponieważ jednak dla $x = a$ i dla $x = x(\alpha)$ zachodzi

$$\frac{\partial \psi(x, \alpha)}{\partial \alpha} = 0,$$

przeto

$$I'(\alpha) = 0,$$

a więc

$$I(\alpha) = \text{const.}$$

Przy $\alpha = \alpha_0$ całka nasza przejdzie w całkę, wziętą dla krzywej ekstremalnej MN , zatem

$$I(\alpha) = I(\alpha_0) = I_\varphi.$$

Ponieważ obwiednia $N_1 N$ nie jest krzywą Eulera, przeto wartość całki

$$\int_{x(\alpha)}^b f(x, y', y'') dx$$

nie jest wartością ekstremalną. Biorąc punkt N_1 dostatecznie blisko N , możemy te dwa punkty połączyć krzywą Eulera, spełniającą warunki Legendre'a i Jacobi'ego, a wówczas całka I , wzięta wzdłuż ekstremalnej MN_1 i krzywej Eulera, łączącej punkty N_1 i N , będzie mniejszą niż całka $I(\alpha)$, a więc i całka $I(\alpha_0)$.

Krzywa, składająca się z dwóch łuków krzywych ekstremalnych MN_1 i $N_1 N$, posiada w N_1 punkt kątowy. Rzeczywiście w przeciwnym razie można byłoby przez punkt N_1 przeprowadzić dwie krzywe ekstremalne, posiadające w N_1 wspólną styczną, co jest, przy naszych założeniach, niemożliwe.

12. Rozpatrzmy obecnie wypadek, gdy $x(\alpha_0)$ jest minimum dla $x(\alpha)$. Wówczas rozumowanie powyższe nie da się zastosować, i, jak to zobaczymy w następnym rozdziale, o ile silniejszy warunek Legendre'a będzie spełniony, będzie zachodziło ekstremum.

Obecnie wykażemy, że w tym wypadku odcinek naszej krzywej ekstremalnej, odpowiadający wartościom $a \leq x \leq b$, będzie otoczony przez niewłaściwe pole krzywych ekstremalnych, przechodzących przez punkt (a, y_a) . W tym celu wystarczy udowodnić, że każdy punkt prostej $x = b$, dostatecznie bliski punktu (b, y_b) da się połączyć z punktem (a, y_a) jedną i tylko jedną krzywą ekstremalną rozpatrywanej rodziny, co będzie, zachodziło, jeżeli w pewnym przedziale $\alpha_0 - \delta \leq \alpha \leq \alpha_0 + \delta$, $\psi(b, \alpha)$ będzie funkcją monotoniczną.

Rzeczywiście, ponieważ wartość

$$b = x(\alpha_0)$$

jest, z założenia, wartością minimalną funkcji $x(\alpha)$, określonej przez równanie

$$\psi_\alpha(x, \alpha) = 0,$$

przeto stąd wnioskujemy, że dla dostatecznie małych wartości δ , funkcja

$$\psi_\alpha(x, \alpha)$$

będzie różną od zera, dla wszystkich α , spełniających nierówności

$$\alpha_0 - \delta \leq \alpha < \alpha_0; \quad \alpha_0 < \alpha \leq \alpha_0 + \delta \quad (39)$$

i dla wszystkich $b - \eta \leq x \leq b$, gdzie η jest dostatecznie małą liczbą dodatnią, a ponieważ dla $x < b$ mamy

$$\psi_\alpha(x, \alpha_0) > 0,$$

więc stąd, opierając się na ciągłości funkcji $\psi_\alpha(x, \alpha)$, wnioskujemy, że

$$\psi_\alpha(b, \alpha) > 0$$

dla wszystkich wartości α , spełniających dla dostatecznie małego δ , nierówność (39), co dowodzi słuszności twierdzenia.

ROZDZIAŁ V.

WARUNEK WEIERSTRASSA. WARUNKI DOSTATECZNE.

1. Jak widzieliśmy w rozdziale poprzednim, dla istnienia słabego ekstremum całki

$$I = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (1)$$

przy założeniu $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ wystarcza spełnienie warunków Eulera-Lagrange'a i silniejszych warunków Legendre'a i Jacobi'ego. Następujący prosty przykład łatwo wykaże, że gdy mamy do czynienia z silnem extremum, wspomniane warunki są już niedostateczne.

Szukajmy, mianowicie, ekstremum całki

$$\int_0^1 (y'^2 + y'^3) dx$$

przy założeniu $y(0) = y(1) = 0$. Jak już wiemy, w tym wypadku krzywymi ekstremalnymi będą linje proste, a więc szukaną krzywą ekstremalną będzie oś x -ów t. j. prosta $y = 0$. Dla niej $R = 2 > 0$, czyli warunek Legendre'a jest spełniony. Tak samo, jak to widzieliśmy w rozdziale poprzednim, będzie spełniony warunek Jacobi'ego, czyli, że prosta $y = 0$ daje minimum słabe, równe zeru. Porównajmy naszą całkę, wziętą dla prostej $y = 0$, z całką, wziętą dla łamanej, którą otrzymamy, łącząc punkty $(0, 0)$ i $(1, 0)$ z punktem $(1 - \alpha, \beta)$, gdzie $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$. Wartość całki, wziętej dla linji łamanej wynosi

$$\frac{\beta^2}{\alpha(1-\alpha)} \left(1 + \frac{\beta}{1-\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \right).$$

Jakkolwiek małą wartość nadamy β , możemy dobrać α tak małe, aby wartość naszej całki była ujemną, a więc mniejszą niż jej wartość dla

krzywej ekstremalnej. Łatwo widzieć, że gdy α zdąży do zera, zaś β ma wartość stałą, łamana nasza będzie w przedziale $1 - \alpha \leq x \leq 1$ coraz więcej spadzysta względem osi x , a więc będzie przedstawiała silną zmianę krzywej ekstremalnej $y = 0$. Zatem prosta $y = 0$ nie daje silnego minimum. Wprawdzie łamana nasza jest linią o punktach kątowych, ale jak wiemy, jeżeli prosta $y = 0$ nie daje ekstremum w dziedzinie krzywych o punktach kątowych, to nie da go również w dziedzinie krzywych bez punktów kątowych.

Zatem dla silnych ekstremów rozpatrzone warunki są niewystarczającymi. Pierwszy zwrócił na to uwagę Weierstrass, który dał jeszcze jeden warunek na silne ekstremum.

Przejdziemy obecnie do rozpatrzenia tego warunku.

2. Niech równanie

$$y = \psi(x, \alpha)$$

będzie równaniem rodziny krzywych ekstremalnych całki

$$\int_a^b f(x, y, y') dx. \quad (2)$$

Wówczas funkcja $\psi(x, \alpha)$, przy każdej wartości α , spełnia tożsamościowo równanie

$$\frac{d}{dx} f_y - f_y = 0. \quad (3)$$

Założmy, że rozpatrywana rodzina krzywych ekstremalnych tworzy pole, przyczem funkcję tego pola oznaczmy przez $p(x, y)$. Wykażemy, że ta funkcja będzie rozwiązaniem pewnego równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu. Rzeczywiście, ponieważ $\psi(x, \alpha)$ jest całką równania (3), przeto tożsamościowo zachodzi

$$\begin{aligned} f_{\psi_x \psi_x} [x, \psi(x, \alpha), \psi_x(x, \alpha)] \psi_{xx}(x, \alpha) + f_{\psi_x \psi} [x, \psi(x, \alpha), \psi_x(x, \alpha)] \cdot \psi_x(x, \alpha) + \\ + f_{\psi_x x} [x, \psi(x, \alpha), \psi_x(x, \alpha)] - f_{\psi} [x, \psi(x, \alpha), \psi_x(x, \alpha)] \equiv 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Tożsamość ta ma miejsce dla wszystkich wartości α ; podstawiając do niej zamiast α , $\alpha(x, y)$, gdzie $\alpha(x, y)$ jest rozwiązaniem równania

$$y = \psi(x, \alpha),$$

i, przyjmując pod uwagę tożsamość (27) w § 5 poprzedniego rozdziału, otrzymamy następującą tożsamość

$$f_{pp}[x, y, p(x, y)] [p_x(x, y) + p_y(x, y) p(x, y)] + f_{py}[x, y, p(x, y)] \cdot p(x, y) + \\ + f_{px}[x, y, p(x, y)] - f_y[x, y, p(x, y)] \equiv 0, \quad (5)$$

skąd wnioskujemy, że funkcja $p(x, y)$ jest całką równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu

$$f_{zz}(x, y, z)(z_x + z_y z) + f_{zy}(x, y, z)z + f_{zx}(x, y, z) - f_y(x, y, z) = 0. \quad (6)$$

Obecnie wykażemy prawdziwość twierdzenia, będącego w pewnym sensie odwrotnem do twierdzenia, udowodnionego przed chwilą.

Mianowicie przypuścimy, że $z = p(x, y)$ jest pewną całką równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych (6).

Wykażemy, że całka ogólna zwyczajnego równania różniczkowego

$$\frac{dy}{dx} = p(x, y), \quad (7)$$

zawierająca, jak wiadomo, jedną stałą dowolną całkowania

$$y = \psi(x, \alpha),$$

przedstawia rodzinę krzywych ekstremalnych całki (2).

Rzeczywiście, kładąc $z = p(x, y)$ w równaniu (6), otrzymamy tożsamość (5), zachodzącą dla wszystkich tych wartości x i y , dla których istnieją funkcje $p(x, y)$, $p_x(x, y)$, $p_y(x, y)$, $f_{pp}[x, y, p(x, y)]$ i t. d. Podstawiając tu $\psi(x, \alpha)$ zamiast y , przyczem $\psi(x, \alpha)$ jest całką równania (7) i, przyjmując pod uwagę tożsamość (27) § 5 poprzedniego rozdziału, przejdziemy od tożsamości (5) do tożsamości (4). Ale ta ostatnia tożsamość powiada, że funkcja $y = \psi(x, \alpha)$ jest całką równania (3), a więc twierdzenie nasze możemy uważać za udowodnione.

3. Wyprowadzimy jeszcze pewien godny uwagi wynik z tożsamości (5). Wynik ten nosi nazwę twierdzenia Beltrami'ego—Hilberta o niezależności. Napiszemy naszą tożsamość w postaci

$$f_{pp} p_x + f_{px} \equiv f_y - f_{py} p - f_{pp} p_y p$$

albo

$$\frac{\partial}{\partial x} f_p \equiv \frac{\partial}{\partial y} (f - p f_p).$$

Ostatni związek powiada, że wyrażenie

$$[f(x, y, p(x, y)) - p(x, y) f_p(x, y, p(x, y))] dx + f_p(x, y, p(x, y)) dy$$

jest różniczką zupełną, a więc, jeżeli w rozpatrywanym polu weźmiemy dwa punkty (a, y_a) i (b, y_b) i przeprowadzimy dowolne krzywe, łączące te dwa punkty, wówczas wartość całki

$$H = \int_{(a, y_a)}^{(b, y_b)} \{ [f(x, y, p(x, y)) - p(x, y) f_p(x, y, p(x, y))] dx + f_p(x, y, p(x, y)) dy \} \quad (8)$$

będzie zależała wyłącznie od granic całkowania a nie od drogi.

Na tem, właśnie, polega twierdzenie Beltrami'ego-Hilberta o niezależności.

Niech równanie krzywej, wzdłuż której całkujemy, będzie

$$y = y(x),$$

przyczem $y(x)$ jest funkcją klasy $C^{(1)}$. Wówczas możemy całkę (8) przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} H_y &= \int_a^b [f(x, y, p) + (y' - p) f_p(x, y, p)] dx = \\ &= \int_a^b W(x, y, y', p) dx, \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie $W(x, y, y', p)$ oznacza funkcję czterech argumentów x, y, y', p

$$W(x, y, y', p) = f(x, y, p) + (y' - p) f_p(x, y, p). \quad (10)$$

Argumenty te mają następujące znaczenia geometryczne: (x, y) oznaczają współrzędne punkta krzywej, y' — współczynnik kątowy stycznej do krzywej w punkcie (x, y) i, wreszcie, p — współczynnik kątowy stycznej tej krzywej ekstremalnej naszego pola, która przechodzi przez punkt (x, y) . Jeżeli przez punkty (a, y_a) i (b, y_b) można przeprowadzić linię ekstremalną, należącą do danej rodziny, wówczas wzdłuż tej krzywej

$$y' = p,$$

a więc

$$H_y = \int_a^b f(x, y, y') dx = I_y, \quad (11)$$

przyczem całka jest wzięta wzdłuż ekstremalnej, łączącej punkty (a, y_a) i (b, y_b) .

Dotychczas nic nie zakładaliśmy o naszej rodzinie krzywych ekstremalnych; obecnie przypuścimy, że składa się ona z krzywych ekstremalnych, przechodzących przez punkt (a, y_a) i tworzących pole niewłaściwe, otaczające krzywą ekstremalną

$$y = \psi(x, \alpha_0) = \varphi(x), \quad (12)$$

która łączy punkty (a, y_a) i (b, y_b) i leży wewnątrz rozważanego pola.

Niech Y będzie dziedziną funkcyjną, składającą się z funkcji $y = y(x)$, należących do klasy $C^{(1)}$, przechodzących przez punkty (a, y_a) i (b, y_b) i leżących wewnątrz rozważanego pola. Oczywiście, do tej dziedziny należy również funkcja $y = \varphi(x)$.

W myśl twierdzenia udowodnionego w § poprzednim, całka

$$H_y = \int_a^b W(x, y, y', p) dx,$$

gdzie p jest funkcją danego pola, będzie miała wartość stałą dla wszystkich krzywych należących do dziedziny funkcyjnej Y , przyczem

$$H_\varphi = \int_a^b f(x, \varphi, \varphi') dx = I_\varphi.$$

Weźmy dowolną krzywą $y = y(x)$, należącą do dziedziny Y i porównajmy całkę, wziętą dla tej krzywej i dla krzywej ekstremalnej $y = \varphi(x)$. Na zasadzie poprzedniego mamy

$$\Delta I = \int_a^b f(x, y, y') dx - \int_a^b f(x, \varphi, \varphi') dx = I_y - I_\varphi = I_y - H_\varphi = I_y - H_y,$$

albo

$$\begin{aligned}\Delta I &= \int_a^b [f(x, y, y') - f(x, y, p) - (y' - p) f_p(x, y, p)] dx = \\ &= \int_a^b E(x, y, y', p) dx,\end{aligned}\tag{13}$$

gdzie całkę bierzemy dla krzywej $y = y(x)$ i gdzie, zgodnie z Weierstrassem, $E(x, y, y', p)$ oznacza funkcję

$$E(x, y, y', p) = f(x, y, y') - f(x, y, p) - (y' - p) f_p(x, y, p).\tag{14}$$

Otrzymany przez nas wynik był znaleziony poraz pierwszy przez Weierstrassa i posiada znaczenie podstawowe. Istotnie, daje on nam przyrost zupełny całki I_y w postaci pewnej całki, wziętej wzdłuż krzywej i mianowicie tej, którą porównujemy z krzywą ekstremalną $y = \varphi(x)$.

Z (14) wynika, że warunkiem dostatecznym, ażeby krzywa ekstremalna $y = \varphi(x)$ dawała ekstremum całki I_y w dziedzinie Y , jest, aby funkcja Weierstrassa $E(x, y, y', p)$ w rozpatrywanym polu nie zmieniała swego znaku.

Rzeczywiście, jeżeli przypuścimy, że dla wszystkich punktów naszego pola zachodzi np. nierówność

$$E(x, y, y', p) \geq 0,$$

wówczas

$$\Delta I \geq 0$$

a więc, krzywa ekstremalna

$$y = \varphi(x)$$

daje nam minimum.

Tym sposobem otrzymujemy następujące twierdzenie Weierstrassa:

Jeżeli krzywą ekstremalną $y = \varphi(x)$, łączącą punkty (a, y_a) i (b, y_b) , można otoczyć przez pole krzywych ekstremalnych, przechodzących przez punkt (a, y_a) , wówczas, warunkiem wystarczającym, ażeby krzywa ekstremalna $y = \varphi(x)$ dawała ekstremum w dziedzinie funkcyjnej Y , składającej się z krzywych klasy $C^{(1)}$, przechodzących przez punkty (a, y_a) i (b, y_b) , jest warunek, aby dla wszystkich punktów (x, y) naszego pola i dla dowolnych skończonych wartości y' funkcja $E(x, y, y', p)$ nie zmieniała swego znaku.

Na mocy lematu rozdziału II twierdzenie to ma miejsce i w dziedzinie funkcyjnej Y_1 , składającej się z krzywych klasy $D^{(1)}$, przechodzących przez punkty (a, y_a) i (b, y_b) .

Z samego określenia funkcji $E(x, y, y', p)$ wynika, iż wzdłuż dowolnej krzywej ekstremalnej naszego pola jest ona równą zeru.

Zauważymy, że, rozwijając funkcję $f(x, y, y')$ na szereg Taylora według potęg $y' - p$, mamy

$$f(x, y, y') = f(x, y, p) + (y' - p) f_p(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{1 \cdot 2} f_{pp}(x, y, \bar{p}),$$

gdzie

$$\bar{p} = p + \theta (y' - p),$$

przyczem θ jest pewnym dodatnim ułamkiem właściwym.

Stąd wnioskujemy, że

$$E(x, y, y', p) = \frac{(y' - p)^2}{1 \cdot 2} f_{pp}(x, y, \bar{p}),$$

a więc, jeżeli dla wszystkich skończonych wartości liczby k i dla wszystkich punktów rozważanego pola funkcja

$$f_{yy'}(x, y, k) \tag{15}$$

zachowuje swój znak, wówczas a fortiori zachowa swój znak i funkcja $E(x, y, y', p)$ w całym polu, a więc krzywa ekstremalna da istotnie ekstremum w dziedzinie funkcyjnej Y_1 , wspomnianej wyżej.

Zatem: warunkiem wystarczającym istnienia ekstremum w dziedzinie Y_1 jest, aby funkcja $f_{yy'}(x, y, k)$ zachowała swój znak dla wszystkich punktów pola i dla wszystkich skończonych wartości k .

5. A więc, aby zastosować warunek wystarczający Weierstrassa, musimy się najpierw przekonać, że krzywa ekstremalna

$$y = \varphi(x)$$

jest otoczona przez pole.

Wykażemy, iż w tym celu wystarcza spełnienie silniejszych warunków Legendre'a i Jacobi'ego. Rzeczywiście, w tym wypadku, jeżeli będziemy rozważali rodzinę krzywych ekstremalnych, przechodzących przez punkt (a, y_a) ,

$$y = \psi(x, \alpha), \quad (16)$$

po między którymi $y = \psi(x, \alpha_0)$ oznacza krzywą ekstremalną, przechodzącą przez punkt (b, y_b) , wówczas funkcja $\psi_\alpha(x, \alpha_0)$ będzie całką równania Jacobi'ego, różną od zera dla wszystkich wartości x , spełniających nierówność $a < x \leq b$, a w tym wypadku, jak to widzieliśmy w § 2 rozdziału poprzedniego, krzywe (16) tworzą pole, otaczające krzywą $y = \psi(x, \alpha_0) = \varphi(x)$.

Z tego, cośmy powiedzieli wyżej, wynika również twierdzenie, udowodnione w rozdziale poprzednim, o wystarczalności warunków Eulera i silniejszych warunków Legendre'a i Jacobi'ego dla istnienia słabego ekstremum. Istotnie, jeżeli te warunki są spełnione, wówczas istnieje pole krzywych ekstremalnych, przechodzących przez punkt (a, y_a) , otaczających krzywą $y = \varphi(x)$.

Ponieważ, z założenia, warunek Legendre'a jest spełniony, przeto wzdłuż krzywej $y = \varphi(x)$ mamy

$$R(x) = f_{yy'}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) > k^2 > 0,$$

gdzie k^2 jest pewną liczbą dodatnią.

Wskutek ciągłości funkcji $f_{yy'}(x, y, y')$ względem swych argumentów, przeto możemy w ten sposób wybrać liczby dodatnie δ i δ_1 , aby dla wszystkich wartości x, y, y' spełniających warunki

$$a \leq x \leq b, \quad |y - \varphi(x)| \leq \delta, \quad |y' - \varphi'(x)| \leq \delta_1, \quad (17)$$

zachodziła nierówność

$$f_{yy'}(x, y, y') > k_1^2 > 0, \quad (18)$$

gdzie k_1^2 oznacza pewną liczbę dodatnią.

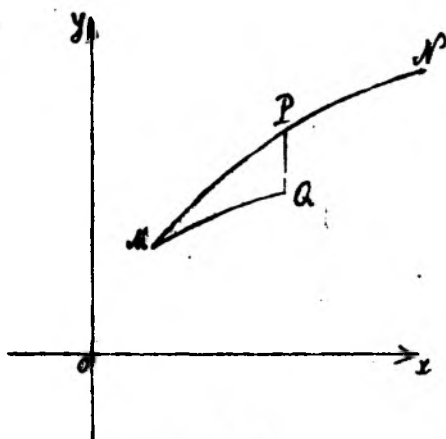
Ale δ możemy wybrać tak małym, ażeby odpowiednie punkty (x, y) leżały w polu, otaczającym krzywą ekstremalną $y = \varphi(x)$, a wówczas warunek (18) jest wystarczającym na to, ażeby z pomiędzy krzywych, przechodzących przez punkty (a, y_a) i (b, y_b) i przedstawiających na skutek (17), słabe zmiany krzywej $y = \varphi(x)$, ta ostatnia krzywa dawała ekstremum.

6. Z powiedzianego wyżej wynika, iż w wypadku rozpatrzonym przez nas w § 12 rozdziału poprzedniego, t. j. w wypadku, gdy b jest wartością sprzężoną z a i przytem obwiednia rodziny krzywych ekstremalnych, przechodzących przez punkt (a, y_a) nie posiada w pobliżu punktu (b, y_b) punktów o odciętej mniejszej od b , nasza krzywa ekstremalna daje przynajmniej słabe ekstremum całki I .

Rzeczywiście, w tym wypadku, jak widzieliśmy we wspomnianym §, łuk krzywej ekstremalnej, łączący punkty (a, y_a) i (b, y_b) jest otoczony przez pole na całym odcinku $a < x \leq b$, a więc da nam on, gdy silniejszy warunek Legendre'a jest spełniony, przynajmniej słabe ekstremum całki.

7. Z wyprowadzonego przez nas warunku dostatecznego dla istnienia silnego ekstremum można wyprowadzić warunek konieczny dla istnienia silnego ekstremum. Ten warunek również został podany przez Weierstrassa.

Niech krzywa ekstremalna $y = \varphi(x)$, przechodząca przez punkty $M(a, y_a)$ i $N(b, y_b)$, będzie otoczona przez pole krzywych ekstremalnych, przechodzących przez punkt (a, y_a) . Weźmy dowolny punkt $P(\xi, \eta)$, leżący na tej ekstremalnej, i w pobliżu niego, w rozpatrywanym polu, punkt



Rys. 11.

$Q(\xi - h, \eta_1)$, gdzie $h > 0$. Ponieważ ten ostatni punkt leży w polu, przeto znajdziemy taką krzywą ekstremalną, która łączy punkty $M(a, y_a)$ i $Q(\xi - h, \eta_1)$; niech równaniem jej będzie $y = \varphi_1(x)$. Połączmy punkty P i Q odcinkiem prostej i porównajmy z sobą całki, wzięte, z jednej strony, dla krzywej, składającej się z krzywej ekstremalnej $y = \varphi_1(x)$ między punktami M i Q , z odcinka prostej, łączącego punkty Q i P , i, wreszcie, z krzywej ekstremalnej $y = \varphi(x)$ między punktami P i N , a, z drugiej, dla krzywej ekstremalnej $y = \varphi(x)$ między punktami

M i N ; wówczas na zasadzie twierdzenia Beltrami'ego-Hilberta o niezależności, mamy

$$\Delta I = I_{\varphi_1} - I_{\varphi} = \int_a^{\xi-h} E(x, \varphi_1, \varphi_1', p) dx + \int_{\xi-h}^{\xi} E(x, y, y' p) dx + \\ + \int_{\xi}^b E(x, \varphi, \varphi', p) dx;$$

pierwsza i trzecia z tych całek są tożsamościowo równe zeru, gdyż są brane dla krzywych ekstremalnych pola, a co się tyczy drugiej całki, to ona jest brana dla prostej QP , a więc dla niej y' jest współczynnikiem kątowym tej prostej, t. j. jest równy

$$y' = \frac{\eta - \eta_1}{h}.$$

Uwzględniając, że funkcja $E(x, y, y', p)$ jest ciągłą w stosunku do swych argumentów również jak i funkcja $p(x, y)$, możemy zawsze wybrać η_1 dostatecznie bliskim η i h dostatecznie małym, aby na całym odcinku QP miała miejsce nierówność

$$\left| E\left(x, y, \frac{\eta - \eta_1}{h}, p(x, y)\right) - E\left(\xi, \eta, \frac{\eta - \eta_1}{h}, p(\xi, \eta)\right) \right| < \omega,$$

gdzie ω oznacza z góry daną dowolnie małą liczbę dodatnią. Stąd wnioskujemy, że, jeżeli $E\left(\xi, \eta, \frac{\eta - \eta_1}{h}, p(\xi, \eta)\right)$ jest różne od zera, to różnica

$$\Delta I = \int_{\xi-h}^{\xi} E\left(x, y, \frac{\eta - \eta_1}{h}, p\right) dx$$

będzie miała ten sam znak, co i $E\left(\xi, \eta, \frac{\eta - \eta_1}{h}, p(\xi, \eta)\right)$. Zauważając dalej, że możemy tak wybrać h i η_1 , ażeby liczba

$$\frac{\eta - \eta_1}{h}$$

posiadała dowolną wartość skończoną, dochodzimy do wniosku, że warunkiem niezbędnym istnienia silnego ekstremum jest, aby Weierstrassowska funkcja $E(\xi, \eta, \lambda, p(\xi, \eta))$ zachowywała swój znak dla wszystkich skończonych wartości λ .

Ponieważ punkt $P(\xi, \eta)$ jest dowolnym punktem krzywej ekstremalnej $y = \varphi(x)$, przeto otrzymujemy następujący warunek konieczny Weierstrassa dla istnienia silnego ekstremum.

Warunkiem niezbędnym istnienia silnego ekstremum jest, aby w przedziale (a, b) dla wszystkich punktów krzywej ekstremalnej $y = \varphi(x)$ funkcja

$$E(x, y, \lambda, p(x, y))$$

zachowywała swój znak dla dowolnych skończonych wartości λ .

8. Korzystając z wprowadzonego przez nas wcześniej pojęcia wskaźnicy, możemy, wzorując się na Zermeló, nadać następującą ciekawą geo-

metryczną interpretację warunkowi dostatecznemu, a w szczególności i warunkowi koniecznemu, Weierstrassa.

Rozpatrzmy równanie wskaźnicy

$$u = f(x, y, y'),$$

które dla krótkości będziemy pisali w postaci

$$u = f(y'). \quad (19)$$

Punkt K , dla którego $y' = p$, przyczem p jest wartością funkcji pola w punkcie (x, y) , nazwiemy punktem głównym wskaźnicy, a styczną w tym punkcie do wskaźnicy nazwiemy styczną główną.

Równanie stycznej głównej, oczywiście, ma postać

$$u - f(p) = f_p(p)(y' - p). \quad (20)$$

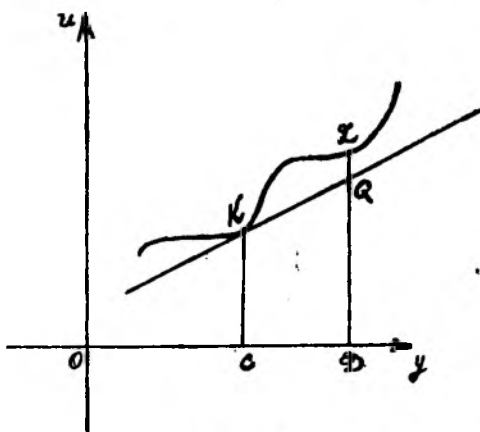
Oznaczmy rzędną punktu L wskaźnicy (19), odpowiadającego dowolnej wartości odciętej y' przez U , a rzędną punktu Q stycznej głównej, odpowiadającego

tej samej odciętej, przez u , wówczas z (19) i (20) otrzymamy

$$U - u = f(y') - f(p) - (y' - p)f_p(p) = E(x, y, y', p).$$

A więc warunek, że funkcja $E(x, y, y', p)$ zachowuje swój znak, jest równoważny warunkowi, że różnica rzędnych punktu, leżącego na wskaźnicy i odpowiedniego punktu stycznej głównej, zachowuje znak, albo, co na jedno wychodzi, warunkowi, że wskaźnica leży całkowicie z jednej strony swej stycznej głównej.

W szczególności, jeżeli dla wszystkich wartości y' funkcja $f_{y'y'}(y')$ zachowuje swój znak, wówczas krzywa (19) jest krzywą wypukłą lub wklęsłą w stosunku do osi x ; w tym wypadku krzywa (19) leży stale z jednej strony stycznej dowolnej — a więc i stycznej głównej. Jak łatwo widzieć, ten warunek przedstawia interpretację geometryczną warunku, rozpatrzonego przez nas przy końcu § 4 niniejszego rozdziału.



Rys. 12.

Jeżeli wskaźnica, odpowiadająca pewnemu punktowi (x_0, y_0) , przecina styczną główną w punktach o odciętych

$$y' = \alpha > p(x_0, y_0) = p_0, \quad y' = \beta < p(x_0, y_0) = p_0,$$

przechodząc w nich z jednej strony stycznej głównej na drugą, to nasza krzywa ekstremalna może dać ekstremum całki I_y tylko w dziedzinie funkcyjnej, w której krzywe, przechodzące w pobliżu punktu (x_0, y_0) , posiadają styczne o współczynnikach kątowych y' , spełniających nierówności

$$\beta < y' < \alpha. \quad (21)$$

Istotnie, dla wartości y' , wychodzących z tych granic, funkcja

$$E(x_0, y_0, y', p_0),$$

będzie posiadała znak różny od znaku jej dla wartości y' , spełniających nierówności (21), a więc wówczas nie będzie spełniony warunek konieczny Weierstrassa.

Jeżeli nazwiemy α_i , β_i odcięte punktów przecięcia naszej wskaźnicy ze styczną główną, w których wskaźnica przechodzi z jednej strony tej stycznej na drugą, przyczem

$$\dots < \beta_h < \dots < \beta_2 < \beta_1 < p_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k < \dots,$$

to, oczywiście, znaki funkcji $E(x_0, y_0, y', p_0)$ będą jednakowe w przedziałach otwartych (β_1, α_1) , $(\beta_{2p+1}, \beta_{2p})$, $(\alpha_{2q}, \alpha_{2q+1})$ z jednej strony i w przedziałach $(\beta_{2p}, \beta_{2p-1})$, $(\alpha_{2q-1}, \alpha_{2q})$ — z drugiej.

Zatem dziedzina funkcyjna, w której dana krzywa ekstremalna może dać ekstremum całki I_y , może zawierać tylko te krzywe pola, których współczynniki kątowe stycznych w pobliżu punktu (x_0, y_0) spełniają jeden z warunków

$$\alpha_1 < y' < \beta_1, \quad \alpha_{2q} < y' < \alpha_{2q+1}, \quad \beta_{2p+1} < y' < \beta_{2p}.$$

Extremum, otrzymane w tym wypadku, nosi nazwę ekstremum ograniczonego. Zauważymy, że, jeżeli w punkcie $y' = p$ funkcja $f_{yy'}(p)$ jest różną od zera, wówczas można znaleźć przedział $m < y' < M$, dla którego wskaźnica leży z jednej strony stycznej głównej. Jeżeli więc dla wszystkich punktów pola $f_{yy'}(p)$ zachowuje swój znak, to zawsze można znaleźć takie liczby μ i N , przyczem $\mu < N$, przedstawiające, odpowiednio, kres górny liczb m i kres dolny liczb M , że w dziedzinie funk-

cyjnej, składającej się z krzywych, które znajdują się w polu, otaczającym naszą ekstremalną i dla których

$$\mu < y' < N,$$

dana krzywa ekstremalna daje wartość ekstremalną całki I_y .

Interpretacja warunków Weierstrassa i Legendre'a, jak łatwo widzieć, sprowadza się do zbadania wskaźnic nie dla wszystkich punktów pola, a tylko dla punktów samej krzywej ekstremalnej.

8. Obecnie może powstać pytanie, czy zespół warunków Eulera, Legendre'a, Jacobi'ego i Weierstrassa nie będzie wystarczającym dla istnienia silnego ekstremum. Łatwo wykazać na prostym przykładzie, że warunki te nie są wystarczającymi.

Rozpatrzmy całkę

$$I = \int_0^1 (y'^2 - 4y y'^3 + 2x y'^4) dx$$

i postarajmy się znaleźć jej ekstremum pomiędzy krzywymi, przechodzącymi przez punkty $(0, 0)$ i $(1, 0)$. Odpowiednie równanie Eulera-Lagrange'a będzie

$$y'' (1 - 12y y' + 12x y'^2) = 0.$$

Widzimy więc, że jedynym rozwiązaniem, spełniającym zadane warunki graniczne, będzie $y = 0$. Rodziną krzywych ekstremalnych, przechodzących przez punkt $(0, 0)$, będzie pęk prostych $y = ax$, a więc warunek Jacobi'ego jest spełniony.

Dla naszej ekstremalnej

$$R = f_{y'y'}(x, 0, 0) = 2 > 0,$$

a więc jest spełniony i warunek Legendre'a. Wreszcie, jak łatwo widzieć, wzdłuż linii ekstremalnej $y = 0$ funkcja E Weierstrassa ma postać

$$E(x, 0, 0, k) = k^2 (1 + 2xk) > 0,$$

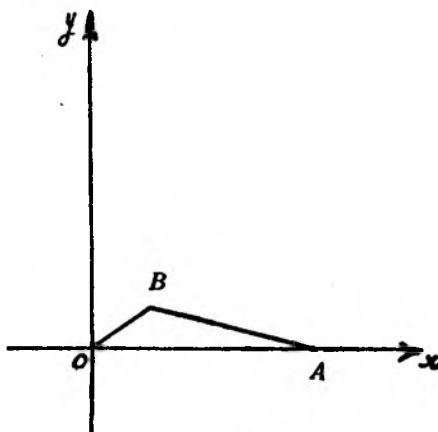
i wartość zerowa całki I dla $y = 0$ będzie wartością minimalną przy zmianach słabych. Zatem wszystkie warunki konieczne są spełnione. Łatwo jednak będzie wykazać, że warunki te są niedostateczne dla silnego

extremum. Rzeczywiście, weźmy naszą całkę dla linii łamanej OBA , gdzie punkt B ma współrzędne (α, β) i jest dostatecznie bliski do punktu $(0, 0)$. Dla całki tej, wziętej wzdłuż krzywej OBA , znajdziemy wyrażenie

$$I = \frac{\beta}{\alpha^2} [-\beta^2 + \alpha + \alpha^2 + 3\beta^2\alpha^2] + \omega,$$

przyczem $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \omega = 0$. Przyjmijmy

β dostatecznie małym i niech α zdąży do zera. Wówczas, oczywiście, przy dostatecznie małych wartościach α całka I będzie miała wartość ujemną, a więc mniejszą, niż wartość całki I dla prostej $y = 0$, co dowodzi, że istotnie wspomniane warunki nie są wystarczającymi dla silnego ekstremum.



Rys. 13.

ROZDZIAŁ VI.

NAJPROSTSZE ZAGADNIENIE RACHUNKU WARJACYJNEGO W WYPADKU ZMIENNYCH PUNKTÓW KOŃCOWYCH.

1. Dotychczas zakładaliśmy, że szukana funkcja, dająca ekstremum całki

$$I = \int_a^b f(x, y, y') dx,$$

przyjmuje dla $x = a$ i $x = b$ pewne dane wartości. Inaczej mówiąc, zakładaliśmy, że szukana krzywa $y = \varphi(x)$ przechodzi przez dwa dane punkty.

Widzieliśmy we wstępie, że zagadnienie nasze może być nieco uogólnione, a mianowicie, możemy założyć, iż krzywa szukana musi przechodzić przez dany punkt, a drugi swój koniec posiadać na pewnej danej krzywej

$$y = \tau(x),$$

albo jeszcze ogólniej: jeden koniec krzywej szukanej musi leżeć na jednej z dwóch danych krzywych, a drugi koniec na drugiej. Naprzykład, możemy postawić sobie zagadnienie: znaleźć w płaszczyźnie linię najkrótszej odległości punktu (a, y_a) od krzywej danej przez równanie

$$y = \tau(x),$$

albo: znaleźć linię najkrótszej odległości między krzywymi

$$y = \gamma(x), \quad y = \tau(x).$$

W pierwszym wypadku, przy odpowiednim doborze pola funkcyjnego, zagadnienie sprowadza się do znalezienia minimum całki

$$I = \int_a^{\xi} \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

przyczem ξ jest nieznane, a szukana funkcja spełnia warunki

$$y(a) = y_a, \quad y(\xi) = \tau(\xi).$$

W drugim wypadku trzeba w ten sposób określić funkcję $y(x)$ oraz liczby ξ i ξ_1 , ażeby całka

$$I = \int_{\xi}^{\xi_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

posiadała wartość minimalną, przyczem funkcja $y(x)$ musiałaby spełniać warunki

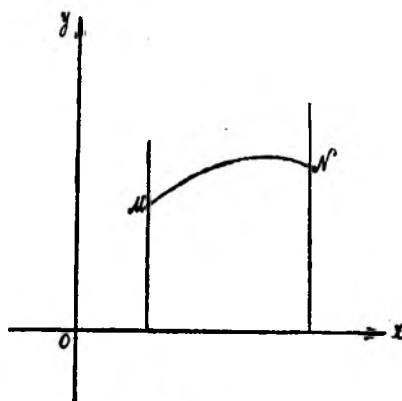
$$y(\xi) = \gamma(\xi), \quad y(\xi_1) = \tau(\xi_1).$$

Zagadnienia, podobne do powyższych, nazwiemy zagadnieniami o zmiennych punktach końcowych.

Do tego typu można również zaliczyć zagadnienia, w których dane są granice całkowania, ale nie są dane odpowiednie wartości graniczne szukanej funkcji t. j. zadanie następujące: szukamy takiej funkcji $y = \varphi(x)$, któraby dawała ekstremum całki

$$I = \int_a^b f(x, y, y') dx,$$

przyczem rzędne końców tej krzywej nie są dane. Oczywiście, geometrycznie zagadnienie sprowadza się do tego, że końce M i N (p. rys. 14) szukanej krzywej leżą na prostych $x = a$ i $x = b$.

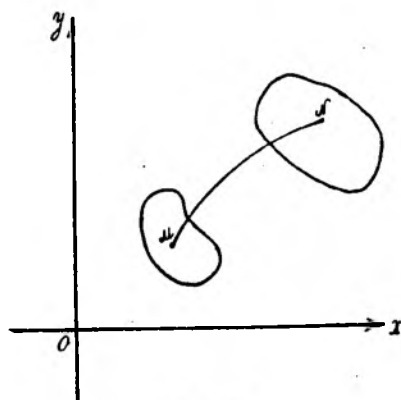


Rys. 14.

Wreszcie do tego rodzaju zagadnień możemy zaliczyć następujące: znaleźć krzywą $y = \varphi(x)$, dającą ekstremum całki.

$$\int_{\xi}^{\xi_1} f(x, y, y') dx$$

i posiadającą końce wewnątrz pewnych obszarów (p. rys. 15).



Rys. 15.

2. Rozpatrzmy szczegółowiej te różne zagadnienia. Najpierw zauważymy, że jeżeli rozważana dziedzina funkcyjna zawiera w sobie wszystkie krzywe sąsiedztwa przynajmniej zerowego rzędu względem krzywej szukanej, wówczas ta ostatnia musi być krzywą Eulera, t. j. ekstremalną. Rzeczywiście, przypuśćmy, że $y = \varphi(x)$ jest rozwiązaniem naszego zagadnienia, przyczem punktami końcowymi tej krzywej są punkty M i N (p. rys. 16). We wszystkich rozważanych przypadkach krzywa nasza musi również dawać ekstremum w części dziedziny

funkcyjnej, składającej się z krzywych, przechodzących przez punkty M i N , ale wówczas nasza krzywa $y = \varphi(x)$, jeżeli należy ona do klasy $C^{(1)}$, musi być krzywą ekstremalną, albo, w wypadku rozwiązania nieciągłego, składać się z łuków krzywych ekstremalnych.

Podobnie muszą być spełnione wzdłuż naszej krzywej i pozostałe warunki niezbędne: Legendre'a, Jacobi'ego, Weierstrassa, gdyż w przeciwnym wypadku, w rozpatrywanej przed chwilą części dziedziny funkcyjnej krzywa nasza nie dawałaby ekstremum, a więc, tembardziej, nie dawałaby go w całej dziedzinie funkcyjnej.

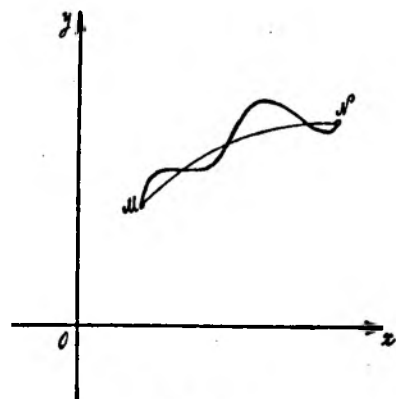
Lecz prócz tych niezbędnych warunków muszą być spełnione i pewne nowe, ponieważ rozszerzamy dziedzinę funkcyjną, w której szukamy rozwiązania.

Po tych uwagach ogólnych przejdziemy do szczegółowego rozpatrzenia wspomnianych przez nas zagadnień.

3. Rozpocniemy od zagadnienia: znaleźć funkcję klasy $C^{(1)}$, dającą ekstremum całki.

$$I = \int_a^{\xi} f(x, y, y') dx \quad (1)$$

gdzie ξ jest liczbą nieznaną, a szukana funkcja spełnia warunki



Rys. 16.

$$y(a) = y_a, \quad y(\xi) = \tau(\xi), \quad (2)$$

przyczem $\tau(x)$ jest funkcją klasy $C^{(1)}$ w pewnym przedziale. Niech równanie

$$y = \varphi(x)$$

przedstawia krzywą szukaną. Wiemy już, że ta ostatnia musi być krzywą Eulera t. j. mamy tożsamościowo

$$\frac{d}{dx} f_{\varphi'} - f_{\varphi} = 0, \quad (3)$$

przyczem, jeżeli spełniony jest silniejszy warunek Legendre'a, wówczas $\varphi(x)$ jest nie tylko klasy $C^{(1)}$ ale i $C^{(2)}$.

Za dziedzinę funkcyjną, w której będziemy badać całkę I , przyjmiemy rodzinę krzywych

$$y = \varphi(x) + k\eta(x), \quad (4)$$

gdzie $\eta(x)$ jest dowolną funkcją klasy $C^{(1)}$, spełniającą warunki

$$\eta(a) = 0, \quad \eta(\xi) \neq 0. \quad (5)$$

Pierwszy z tych warunków musi być spełniony na zasadzie tego, że wszystkie nasze krzywe przechodzą przez punkt (a, y_a) .

Co się tyczy parametru k , to on określa się z warunku, że dla dostatecznie małych wartości h mamy

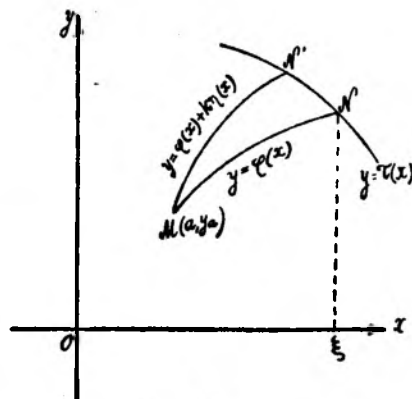
$$\varphi(\xi + h) + k\eta(\xi + h) = \tau(\xi + h)$$

t. j., że łuk krzywej (4) ma swój koniec na krzywej

$$y = \tau(x)$$

(p. rys. 17). Z warunku $\eta(\xi) \neq 0$ i warunku

$$\varphi(\xi) = \tau(\xi)$$



Rys. 17.

wnioskujemy, że dla $h = 0$ mamy również $k = 0$.

Podstawiając wartości (4) na y do całki (1), widzimy, że I staje się funkcją dwóch zmiennych h i k

$$I(h, k) = \int_a^{\xi + h} f(x, y + k\eta, y' + k\eta') dx,$$

związanych równaniem (5).

Jak wiadomo, pierwszym niezbędnym warunkiem istnienia extremum, jest istnienie takiego stałego czynnika l , dla którego będzie spełniony pierwszy niezbędny warunek extremum funkcji dwu zmiennych niezależnych

$$I_1(h, k) = I(h, k) + l[\varphi(\xi + h) + k\eta(\xi + h) - \tau(\xi + h)]$$

t. j. warunek

$$\left[\frac{\partial I_1(h, k)}{\partial h} \right]_{\substack{h=0 \\ k=0}} = 0, \quad \left[\frac{\partial I_1(h, k)}{\partial k} \right]_{\substack{h=0 \\ k=0}} = 0.$$

Pierwszy z tych warunków będzie, oczywiście

$$f[\xi, \varphi(\xi), \varphi'(\xi)] + l[\varphi'(\xi) - \tau'(\xi)] = 0, \quad (7)$$

a drugi

$$\int_a^{\xi} (f_{\varphi} \eta + f_{\varphi'} \eta') dx + l\eta(\xi) = 0.$$

Całkując przez części drugi wyraz ostatniej całki, co jest możliwem na zasadzie twierdzenia Du Bois Reymonda, i, uwzględniając, że $\eta(a) = 0$ oraz

$$f_{\varphi} - \frac{d}{dx} f_{\varphi'} = 0,$$

przyprowadzimy ten warunek do postaci

$$[f_{\varphi'}(\xi, \varphi(\xi), \varphi'(\xi)) + l]\eta(\xi) = 0,$$

albo, ponieważ $\eta(\xi) \neq 0$, do postaci

$$f_{\varphi'}(\xi, \varphi(\xi), \varphi'(\xi)) + l = 0.$$

Określając stąd l i podstawiając jego wartość do (7), otrzymamy warunek

$$f(\xi, \varphi(\xi), \varphi'(\xi)) + [\tau'(\xi) - \varphi'(\xi)] f_{\varphi'}(\xi, \varphi(\xi), \varphi'(\xi)) = 0. \quad (8)$$

Ostatnia równość jest właśnie szukany naszym warunkiem. Widzimy więc, że w punktach przecięcia naszej krzywej ekstremalnej z krzywą $y = \tau(x)$ współczynniki kątowe stycznych do tych krzywych muszą być związane równaniem (8). Inaczej mówiąc, krzywe te muszą się przecinać pod oznaczonym kątem.

Jeżeli dla krzywej $y = \tau(x)$ jest spełniony warunek (8), wówczas powiemy, że w punkcie $(\xi, \tau(\xi))$ krzywa ta przecina transversalnie krzywą ekstremalną

$$y = \varphi(x).$$

Zatem: jeżeli koniec krzywej, dającej ekstremum, musi znajdować się na pewnej danej krzywej klasy $C^{(1)}$, to w tym punkcie końcowym krzywa ekstremalna musi być przecięta transversalnie przez krzywą daną. Warunek (8) nazwiemy warunkiem transversalności.

Rozpatrzmy, jaką postać przyjmie warunek transversalności w tych zagadnieniach, które już rozważaliśmy.

W zagadnieniu linii najkrótszej odległości mamy

$$f = \sqrt{1 + y'^2},$$

a więc warunek transversalności będzie

$$\sqrt{1 + \varphi'^2} + (\tau' - \varphi') \frac{\varphi'}{\sqrt{1 + \varphi'^2}} = \frac{1 + \tau' \varphi'}{\sqrt{1 + \varphi'^2}} = 0,$$

a to jest warunek prostopadłości stycznych do krzywych $y = \varphi(x)$ oraz $y = \tau(x)$ w punkcie przecięcia.

W zagadnieniu brachistochrony mamy

$$f = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}},$$

a więc warunek transversalności będzie miał postać

$$\frac{\sqrt{1 + \varphi'^2}}{\sqrt{\varphi}} + \frac{(\tau' - \varphi') \varphi'}{\sqrt{\varphi} \sqrt{1 + \varphi'^2}} = \frac{1 + \tau' \varphi'}{\sqrt{\varphi} \sqrt{1 + \varphi'^2}} = 0,$$

czyli będzie znów warunkiem ortogonalności dwu krzywych.

W wypadku linii geodezyjnych na powierzchni przypuścmy, że koniec linii geodezyjnej $v = \varphi(u)$ musi się znajdować na krzywej

$$v = \tau(u).$$

W danym wypadku

$$f = \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2},$$

a więc warunek transversalności

$$\begin{aligned} \sqrt{E + 2F\varphi' + G\varphi'^2} + (\tau' - \varphi') \frac{(F + G\varphi')}{\sqrt{E + 2F\varphi' + G\varphi'^2}} = \\ = \frac{E + F(\varphi' + \tau') + G\varphi'\tau'}{\sqrt{E + 2F\varphi' + G\varphi'^2}} = 0 \end{aligned}$$

jest również warunkiem ortogonalności krzywych

$$v = \varphi(u) \quad \text{oraz} \quad v = \tau(u).$$

4. Sądząc z tych przykładów, można byłoby przypuścić, że wogóle warunek transversalności jest identyczny z warunkiem ortogonalności; zaraz wykażemy jednak, że tak nie jest.

Znajdziemy postać, jaką powinna mieć funkcja trzech zmiennych $f(x, y, y')$, ażeby warunki transversalności i ortogonalności, t. j. warunki

$$f + (\tau' - y') f_{y'} = 0, \quad 1 + y' \tau' = 0$$

były identyczne.

Oczywiście będzie to miało miejsce tylko wtedy, gdy

$$\frac{f - y' f_{y'}}{1} = \frac{f_{y'}}{y'},$$

t. j. gdy

$$\frac{f_{y'}}{f} = \frac{y'}{1 + y'^2}.$$

Całkując względem y' , otrzymamy

$$\log f = \log \sqrt{1 + y'^2} + \log \omega(x, y),$$

gdzie $\omega(x, y)$ jest dowolną funkcją x i y ; stąd, ostatecznie. znajdziemy, że warunki transversalności i ortogonalności są identyczne tylko w wypadku, gdy funkcja $f(x, y, y')$ posiada postać

$$f(x, y, y') \equiv \omega(x, y) \sqrt{1 + y'^2},$$

gdzie $\omega(x, y)$ oznacza dowolną funkcję x i y .

5. Jeżelibyśmy założyli, że końcowy punkt krzywej ekstremalnej jest niezmienny, a początkowy musi leżeć na krzywej klasy $C^{(1)}$

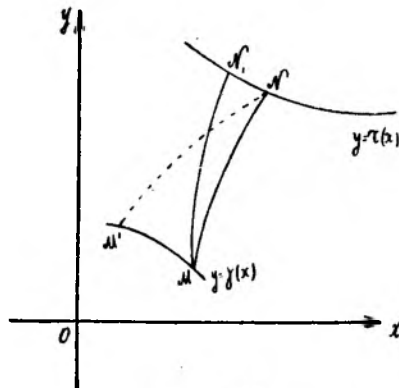
$$y = \gamma(x),$$

to rozumowanie analogiczne do poprzedniego pokazałoby, że krzywa $y = \gamma(x)$ musi przeciąć krzywą ekstremalną transversalnie.

Opierając się na tych wynikach, łatwo przyjść do wniosku, że jeżeli końce krzywej ekstremalnej, dającej ekstremum całki I , muszą leżeć odpowiednio na krzywych klasy $C^{(1)}$

$$y = \gamma(x), \quad y = \tau(x), \quad (9)$$

to te dwie ostatnie krzywe muszą przecinać krzywą ekstremalną transversalnie. Rzeczywiście, jeżeli nasza krzywa ekstremalna MN (p. rys. 18) daje ekstremum w dziedzinie funkcyjnej, składającej się z sąsiednich krzywych, posiadających końce na krzywych (9), to, w szczególności, musi ona dać ekstremum całki w dziedzinie funkcyjnej, składającej się z krzywych, przechodzących przez punkt M i posiadających końce na krzywej $y = \tau(x)$. Ale wówczas w punkcie N krzywa $y = \tau(x)$ musi przeciąć krzywą ekstremalną transversalnie. Analogicznie, rozpatrując częściową dziedzinę funkcyjną, składającą się z krzywych, które przechodzą przez punkt N i posiadają początki na krzywej $y = \gamma(x)$, widzimy, że ta ostatnia musi również przeciąć transversalnie krzywą ekstremalną.



Rys. 18.

6. Zwróćmy jeszcze uwagę na następującą okoliczność. Gdy szukamy ekstremum całki

$$I = \int_a^{\xi} f(x, y, y') dx$$

przy warunku, że krzywa szukana musi przechodzić przez punkt (a, y_a) i posiadać drugi koniec na krzywej $y = \tau(x)$, wówczas wartość ξ t. j. górnej granicy całkowania, jest nam nieznana. Jeżeli jest spełniony silniej-

szy warunek Legendre'a, to krzywa ta musi być krzywą całkową równania

$$\frac{d}{dx} f_{y'} - f_y = 0.$$

Całka ogólna tego równania

$$y = \omega(x, \alpha, \beta)$$

zawiera dwie stałe dowolne. Zatem w celu określenia naszej krzywej ekstremalnej musimy wyznaczyć trzy nieznane parametry α , β , ξ . Dla ich wyznaczenia posiadamy trzy warunki: 1) warunek przechodzenia krzywej ekstremalnej przez punkt (a, y_a)

$$\omega(a, \alpha, \beta) = y_a,$$

2) warunek przecięcia danej krzywej $y = \tau(x)$, z krzywą ekstremalną w punkcie o odciętej ξ

$$\omega(\xi, \alpha, \beta) = \tau(\xi),$$

i, wreszcie, 3) warunek transversalności

$$f(\xi, \omega(\xi, \alpha, \beta), \omega'(\xi, \alpha, \beta)) + [\tau'(\xi) - \omega'(\xi, \alpha, \beta)] f_{\omega'}(\xi, \omega(\xi, \alpha, \beta), \omega'(\xi, \alpha, \beta)) = 0.$$

Jeżeli ani początek ani koniec krzywej ekstremalnej nie są dane, ale muszą się znajdować na dwóch danych krzywych klasy $C^{(1)}$

$$y = \gamma(x), \quad y = \tau(x),$$

to w całce

$$I = \int_{\xi_0}^{\xi} f(x, y, y') dx$$

obie granice ξ_0 i ξ są nieznane.

Ponieważ i w tym wypadku, jeżeli jest spełniony silniejszy warunek Legendre'a, krzywa, mająca dać ekstremum, jest krzywą całkową równania Eulera, przeto, znajdując całkę ogólną równania Eulera

$$y = \omega(x, \alpha, \beta),$$

widzimy, że dla zupełnego wyznaczenia krzywej ekstremalnej musimy

określić cztery parametry $\xi_0, \xi, \alpha, \beta$. Dla ich określenia mamy cztery warunki: 1) warunek, że krzywa ekstremalna oraz krzywa $y = \gamma(x)$ przecinają się w punkcie o odciętej ξ_0

$$\omega(\xi_0, \alpha, \beta) = \gamma(\xi_0),$$

2) warunek, że krzywa $y = \gamma(x)$ przecina krzywą ekstremalną transversalnie

$$f(\xi_0, \omega(\xi_0, \alpha, \beta), \omega'(\xi_0, \alpha, \beta)) + (\gamma'(\xi_0) - \omega'(\xi_0, \alpha, \beta)) f_{\omega'}(\xi_0, \omega(\xi_0, \alpha, \beta), \omega'(\xi_0, \alpha, \beta)) = 0;$$

3) warunek, że krzywa ekstremalna oraz krzywa $y = \tau(x)$ przecinają się w punkcie o odciętej ξ

$$\omega(\xi, \alpha, \beta) = \tau(\xi),$$

i, wreszcie, 4) warunek, że krzywa $y = \tau(x)$ przecina krzywą ekstremalną transversalnie

$$f(\xi, \omega(\xi, \alpha, \beta), \omega'(\xi, \alpha, \beta)) + (\tau'(\xi) - \omega'(\xi, \alpha, \beta)) f_{\omega'}(\xi, \omega(\xi, \alpha, \beta), \omega'(\xi, \alpha, \beta)) = 0.$$

Jak łatwo widzieć, te cztery warunki, co do liczby, wystarczają dla określenia niewiadomych stałych $\alpha, \beta, \xi_0, \xi$.

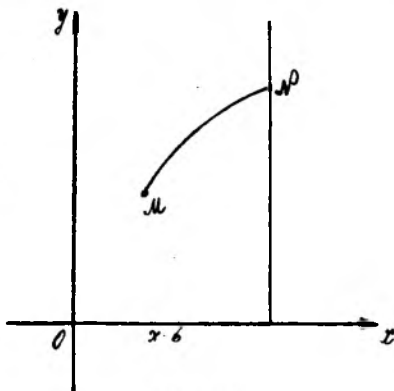
7. Nieco inaczej rozwiązuje się następujące zagadnienie: znaleźć krzywą, dającą ekstremum całki I przy założeniu, że jeden koniec tej krzywej znajduje się w punkcie $M(a, y_a)$, a drugi na prostej $x = b$ (p. rys. 19).

W tym wypadku nieznaną jest rzędna punktu końcowego. Niech krzywa

$$y = \varphi(x)$$

daje rozwiązanie naszego zagadnienia.

Odpowiednia dziedzina funkcyjna składa się z krzywych klasy $C^{(1)}$, sąsiednich względem krzywej $y = \varphi(x)$ i przechodzących przez punkt $M(a, y_a)$. Wiemy już, że funkcja $\varphi(x)$ musi tożsamościowo spełniać równanie



Rys. 19.

$$\frac{d}{dx} f_{\varphi'} - f_{\varphi} = 0. \quad (10)$$

Chcąc wyprowadzić dalszy warunek niezbędny, weźmy dziedzinę funkcyjną, składającą się z krzywych

$$y = \varphi(x) + h \eta(x), \quad (11)$$

gdzie $\eta(x)$ jest dowolną funkcją klasy $C^{(1)}$, spełniającą warunki

$$\eta(a) = 0, \quad \eta(b) \neq 0. \quad (12)$$

Pierwszy z tych warunków, wynika z tego, że krzywa (11) musi przechodzić przez punkt $M(a, y_a)$. Oczywiście dla $h = 0$ krzywa (11) przechodzi w krzywą $y = \varphi(x)$, a więc całka

$$I = I(h) = \int_a^b f(x, y, y') dx,$$

w którą na miejsce y podstawiliśmy wartość, daną przez wzór (11), jest różniczkowalną dla dostatecznie małych wartości $|h|$ i prócz tego posiada ekstremum dla $h = 0$. Zatem musi być

$$I'(0) = 0,$$

albo

$$I'(0) = \int_a^b (f_{\varphi'} \eta + f_{\varphi''} \eta') dx = f_{\varphi'} \eta \Big|_a^b + \int_a^b (f_{\varphi} - \frac{d}{dx} f_{\varphi'}) dx = 0.$$

Na zasadzie (10) i pierwszego z warunków (12) ta ostatnia równość da się przepisać w postaci

$$f_{\varphi'}(b, \varphi(b), \varphi'(b)) = 0, \quad (13)$$

gdyż $\eta(b) \neq 0$.

A więc, jeżeli prócz tego przypuścimy, że $\varphi(x)$ jest klasy $C^{(2)}$, co ma miejsce, na przykład, przy spełnieniu silniejszego warunku Legendre'a, wówczas rozwiązanie naszego zagadnienia możemy przeprowadzić w sposób następujący: znajdujemy całkę ogólną równania Eulera

$$y = \omega(x, \alpha, \beta)$$

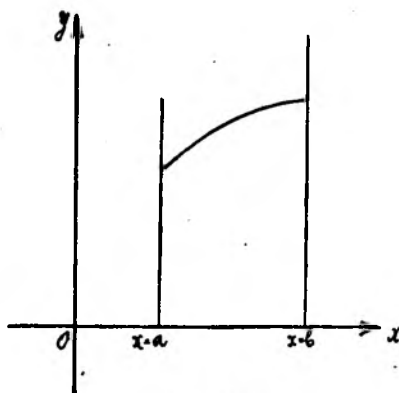
i określamy stałe dowolne całkowania α i β z warunków

$$\omega(a, \alpha, \beta) = y_a, \quad f_{\omega'}(b, \omega(b, \alpha, \beta), \omega'(b, \alpha, \beta)) = 0.$$

Jeżeli byłyby dane tylko granice całkowania, ale nie rzędne punktów końcowych t. j. gdyby trzeba było między prostymi $x = a$ i $x = b$ (p. rys. 20), przeprowadzić krzywą, mogącą dać ekstremum całki I , to rozumowania, analogiczne do poprzednich, doprowadzą nas do wniosku, że muszą być spełnione dwa warunki

$$f_{\varphi'}(a, \varphi(a), \varphi'(a)) = 0,$$

$$f_{\varphi'}(b, \varphi(b), \varphi'(b)) = 0.$$

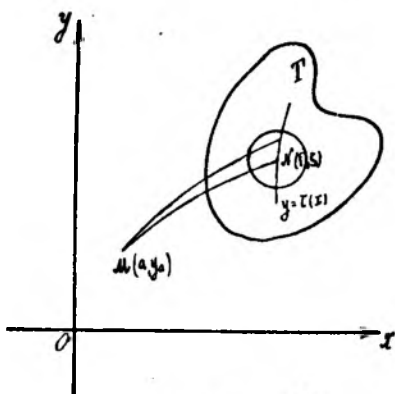


Rys. 20.

8. Rozpatrzmy, wreszcie, następujące zagadnienie: dany jest punkt $M(a, y_a)$; znaleźć punkt $N(\xi, \zeta)$, leżący wewnątrz pewnego obszaru T , oraz krzywą, łączącą punkty M i N i leżącą w obszarze R , zawierającym obszar T , ażeby całka

$$I = \int_a^{\xi} f(x, y, y') dx,$$

wzięta dla tej krzywej pomiędzy punktami M i N , posiadała wartość ekstremalną w stosunku do całek, wziętych dla krzywych sąsiednich, (p. rys. 21).



Rys. 21.

Stosując rozumowania, z których już niejednokrotnie korzystaliśmy w rozdziale niniejszym, dochodzimy do wniosku, że szukana krzywa $y = \varphi(x)$ musi być krzywą Eulera. Za dziedzinę funkcyjną przyjmujemy zbiór krzywych sąsiednich względem krzywej $y = \varphi(x)$, przechodzących przez punkt $M(a, y_a)$ i posiadających końce wewnątrz koła o dostatecznie małym promieniu, tak, aby ono całkowicie leżało w T , i o środku w $N(\xi, \zeta)$. Częścią wspomnianej dziedziny funkcyjnej będą krzywe sąsiednie względem $y = \varphi(x)$, przechodzące przez punkt M i posiadające końce wewnątrz koła

na dowolnej krzywej $y = \tau(x)$ klasy $C^{(1)}$, na której leży punkt N . Ale wówczas, na zasadzie poprzedniego, wnioskujemy, iż ta krzywa musi prze-

cinąć naszą krzywą ekstremalną w punkcie N transversalnie; inaczej mówiąc, w tym punkcie musi być spełniony warunek transversalności

$$f(\xi, \varphi(\xi), \varphi'(\xi)) + [\tau'(\xi) - \varphi'(\xi)] f_{\varphi'}(\xi, \varphi(\xi), \varphi'(\xi)) = 0.$$

Ponieważ jednak krzywa $y = \tau(x)$ jest dowolną, przeto ostatni warunek musi być spełniony tożsamościowo przy wszelkich wartościach $\tau'(\xi)$, a więc musi być

$$f(\xi, \varphi(\xi), \varphi'(\xi)) - \varphi'(\xi) f_{\varphi'}(\xi, \varphi(\xi), \varphi'(\xi)) = 0,$$

$$f_{\varphi'}(\xi, \varphi(\xi), \varphi'(\xi)) = 0.$$

Te dwa związki mogą być zastąpione przez następujące

$$f(\xi, \varphi(\xi), \varphi'(\xi)) = 0, \quad f_{\varphi'}(\xi, \varphi(\xi), \varphi'(\xi)) = 0. \quad (14)$$

Stąd wnioskujemy, że jeżeli funkcja podcałkowa będzie w całym obszarze T stale dodatnią (ewent. stale ujemną), wówczas postawione przez nas zagadnienie nie posiada rozwiązania. Wypadek, gdy $f(x, y, y')$ w rozpatrywanym obszarze zachowuje swój znak, nie przyjmując wartości 'zerowych', nazywamy wypadkiem oznaczonym (definit.).

Zatem w wypadku oznaczonym zagadnienie nasze nie posiada rozwiązań. N. p. jeżeli

$$f = \sqrt{1 + y'^2},$$

wówczas mamy do czynienia z wypadkiem oznaczonym, a więc rozwiązanie nie istnieje.

W wypadku zagadnienia minimalnej powierzchni obrotowej

$$f = y \sqrt{1 + y'^2}.$$

Jak łatwo spostrzec, warunki (14) sprowadzają się do warunku

$$\varphi(\xi) = 0,$$

który znów sprowadza się (p. § 10 rozdz. I.) do postaci

$$e^{\frac{2(\xi - \beta)}{\alpha}} + 1 = 0,$$

to zaś równanie nie posiada rozwiązań rzeczywistych.

W wypadku, gdy

$$f(x, y, y') = \psi(x, y) \sqrt{1 + y'^2},$$

warunki (14) sprowadzają się do

$$\psi(\xi, \zeta) = 0,$$

t. j. koniec naszej krzywej musi leżeć na krzywej

$$\psi(x, y) = 0.$$

Wracając do wypadku ogólnego, widzimy, że dla określenia stałych dowolnych, wchodzących do całki ogólnej równania Eulera i odciętej ξ końca naszej krzywej mamy dostateczną ilość równań, mianowicie: jeden warunek, że krzywa szukana przechodzi przez punkt (a, y_a) oraz dwa warunki (14).

Jeżeli założymy, że ani początkowy, ani końcowy punkt nie są dane, lecz powinny się znajdować wewnątrz pewnych obszarów T i T_1 , to, rozumując zupełnie analogicznie, znajdziemy, że dla określenia stałych dowolnych całkowania oraz wartości ξ_0 i ξ , t. j. odciętych punktów początkowego i końcowego, mamy cztery równania

$$f(\xi_0, \omega(\xi_0, \alpha, \beta), \omega'(\xi_0, \alpha, \beta)) = 0, \quad f_{\omega'}(\xi_0, \omega(\xi_0, \alpha, \beta), \omega'(\xi_0, \alpha, \beta)) = 0,$$

$$f(\xi, \omega(\xi, \alpha, \beta), \omega'(\xi, \alpha, \beta)) = 0, \quad f_{\omega'}(\xi, \omega(\xi, \alpha, \beta), \omega'(\xi, \alpha, \beta)) = 0,$$

gdzie $\omega(x, \alpha, \beta)$ oznacza całkę ogólną odpowiedniego równania Eulera.

9. Widzieliśmy poprzednio, jak ważną rolę odgrywa warunek transwersalności przy rozwiązywaniu zagadnienia ekstremum całki I w wypadku zmiennych punktów końcowych.

Wprowadzimy obecnie pojęcie krzywych transwersalnych. Niech będzie dana dowolna rodzina krzywych Eulera, tworzących pole,

$$y = \psi(x, \alpha),$$

t. j. krzywych całkowych równania Eulera, zależnych od jednego parametru i tworzących pole. Krzywymi transwersalnymi względem tej rodziny nazwiemy krzywe, przecinające transwersalnie wszystkie krzywe danej rodziny. Łatwo utworzyć równanie różniczkowe krzywych transwersalnych. Niech

$$p = p(x, y)$$

będzie funkcją danego pola. Przypuśćmy, że krzywa

$$y = y(x),$$

przechodząca przez punkt (x, y) rozważanego pola, przecina transversalnie krzywą Eulera, należącą do danej rodziny i przechodzącą przez ten punkt. Ponieważ współczynnik kątowy krzywej Eulera jest równy $p(x, y)$, przeto warunek transversalności możemy napisać w postaci

$$f(x, y, p(x, y)) + (y' - p(x, y)) f_p(x, y, p(x, y)) = 0. \quad (15)$$

To ostatnie równanie jest względem y równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu. Całkując je, otrzymamy rodzinę krzywych transversalnych

$$y = \chi(x, c)$$

względem danej rodziny krzywych ekstremalnych

$$y = \phi(x, \alpha).$$

Widzimy więc, że dla każdej rodziny krzywych ekstremalnych istnieje, wogóle, odpowiednia rodzina krzywych transversalnych. Oczywiście, zdanie to jest prawdziwe tylko w tym wypadku, gdy istnieje całka równania (15).

10, Przypuśćmy obecnie, że mamy pewną krzywą

$$y = \gamma(x)$$

klasy $C^{(1)}$ w przedziale $a \leq x \leq b$. Rozpatrzmy, kiedy można będzie znaleźć rodzinę krzywych ekstremalnych całki

$$I = \int f(x, y, y') dx,$$

którą dana krzywa przecinałaby transversalnie.

Niech

$$y = \omega(x, \alpha, \beta)$$

będzie całką ogólną równania Eulera dla całki I .

Odcięte punktów na krzywej $y = \gamma(x)$ będziemy oznaczali przez ξ . Wówczas krzywe Eulera, przecięte transversalnie przez krzywą $y = \gamma(x)$,

otrzymamy, jeżeli wyrazimy przez ξ stałe dowolne całkowania α i β z równań

$$\omega(\xi, \alpha, \beta) = \gamma(\xi), \quad (16)$$

$$f(\xi, \omega(\xi, \alpha, \beta), \omega'(\xi, \alpha, \beta)) + (\gamma'(\xi) - \omega'(\xi, \alpha, \beta)) f_{\omega'}(\xi, \omega(\xi, \alpha, \beta), \omega'(\xi, \alpha, \beta)) = 0.$$

Pierwszy z tych warunków jest warunkiem przecięcia się w punkcie o odciętej ξ danej krzywej oraz krzywej ekstremalnej

$$y = \omega(x, \alpha, \beta);$$

drugi jest warunkiem transwersalności.

Niech dla pewnej wartości $\xi = \xi_0$ równania (16) dają rozwiązania α_0 i β_0 , wówczas, dla wartości ξ dostatecznie bliskich ξ_0 , równania te będą również rozwiązywalne względem α i β i określą je jako funkcję ξ klasy $C^{(1)}$, jeżeli tylko wyznacznik Jacobi'ego tych równań względem α i β , który, jak łatwo spostrzec, da się napisać w postaci

$$\Delta = f_{\omega'\omega'}(\xi, \omega, \omega') [\gamma'(\xi) - \omega'(\xi, \alpha, \beta)] \begin{vmatrix} \omega_\alpha(\xi, \alpha, \beta) & \omega_\beta(\xi, \alpha, \beta) \\ \omega'_\alpha(\xi, \alpha, \beta) & \omega'_\beta(\xi, \alpha, \beta) \end{vmatrix},$$

będzie różnym od zera, przyczem znaczek ' u góry, określa pochodną cząstkową względem ξ . Wyznacznik ten będzie różnym od zera dla wartości α, β, ξ , dostatecznie bliskich α_0, β_0, ξ_0 , jeżeli tylko jest on różnym od zera dla tych ostatnich wartości. Załóżmy, że wzdłuż krzywej ekstremalnej

$$y = \omega(x, \alpha_0, \beta_0)$$

jest spełniony silniejszy warunek Legendre'a, t. j., że

$$f_{\omega'\omega'}(\xi_0, \omega(\xi_0, \alpha_0, \beta_0), \omega'(\xi_0, \alpha_0, \beta_0)) = R(\xi_0)$$

jest różne od zera; wyznacznik

$$\begin{vmatrix} \omega_\alpha(\xi_0, \alpha_0, \beta_0) & \omega_\beta(\xi_0, \alpha_0, \beta_0) \\ \omega'_\alpha(\xi_0, \alpha_0, \beta_0) & \omega'_\beta(\xi_0, \alpha_0, \beta_0) \end{vmatrix}$$

jest nierównym zeru, gdyż całka $\omega(x, \alpha, \beta)$ jest całką ogólną. Wreszcie, ażeby Δ było różne od zera, potrzeba ażeby była różną od zera różnica $\gamma'(\xi_0) - \omega'(\xi_0, \alpha_0, \beta_0)$, t. j. aby krzywa ekstremalna $y = \omega(x, \alpha_0, \beta_0)$ nie

była styczną do krzywej $y = \gamma(x)$. Ostatnia okoliczność zachodzi zawsze, gdy $f(\xi_0, \omega(\xi_0, \alpha_0, \beta_0), \omega'(\xi_0, \alpha_0, \beta_0))$ jest różnym od zera, gdyż jeżeli

$$\gamma'(\xi_0) - \omega'(\xi_0, \alpha_0, \beta_0) = 0,$$

wówczas z warunku transversalności otrzymalibyśmy

$$f(\xi_0, \omega(\xi_0, \alpha_0, \beta_0), \omega'(\xi_0, \alpha_0, \beta_0)) = 0.$$

W szczególności, ta ostatnia równość nie może mieć miejsca w wypadku zagadnienia oznaczonego. Po określeniu z (16) parametrów (16) i (17) w zależności od ξ , otrzymamy rodzinę krzywych ekstremalnych

$$y = \omega(x, \alpha(\xi), \beta(\xi)), \quad (17)$$

które krzywa

$$y = \gamma(x)$$

przecina transversalnie. Do tych krzywych ekstremalnych dla $\xi = \xi_0$ należy również i nasza krzywa ekstremalna

$$y = \omega(x, \alpha_0, \beta_0). \quad (18)$$

11. Zbadamy, kiedy wspomniana rodzina tworzy pole, otaczające tę ostatnią krzywą ekstremalną. Ażeby to miało miejsce, potrzeba i wystarcza, aby dla punktów x, y , naszego pola równanie

$$y = \omega(x, \alpha(\xi), \beta(\xi)), \quad (19)$$

określało ξ jako jednoznacznie funkcję x i y klasy $C^{(1)}$. Na zasadzie (18) wnioskujemy, że równanie (19), posiada dla punktów, leżących na naszej krzywej ekstremalnej, rozwiązanie $\xi = \xi_0$. Zbadamy obecnie, przy jakich warunkach dla $\xi = \xi_0$ funkcja

$$\frac{\partial \omega(x, \alpha(\xi), \beta(\xi))}{\partial \xi} = \omega_\alpha(x, \alpha(\xi), \beta(\xi)) \alpha'(\xi) + \omega_\beta(x, \alpha(\xi), \beta(\xi)) \beta'(\xi), \quad (20)$$

jest różną od zera. Przypuśćmy przytem, że krzywa $y = \gamma(x)$ należy do klasy $C^{(2)}$. Dla krótkości będziemy pisali α' i β' zamiast $\alpha'(\xi)$ i $\beta'(\xi)$ i, prócz tego, jeżeli mamy dowolną funkcję $\phi(x, \alpha(\xi), \beta(\xi))$, posiadającą określone skończone pochodne względem α i β , wówczas za pomocą symbolu $\frac{\partial \phi(x)}{\partial \xi}$ będziemy oznaczali funkcję

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial \xi} = \psi_{\alpha}(x, \alpha, \beta) \alpha' + \psi_{\beta}(x, \alpha, \beta) \beta',$$

a więc symbol $\frac{\partial \psi(\xi)}{\partial \xi}$ oznaczać będzie funkcję

$$\frac{\partial \psi(\xi)}{\partial \xi} = \psi_{\alpha}(\xi, \alpha, \beta) \alpha' + \psi_{\beta}(\xi, \alpha, \beta) \beta'.$$

Dla wyrugowania z (20) pochodnych α' i β' mamy dwa równania, które otrzymamy, różniczkując względem ξ równania (16).

Po łatwych rachunkach otrzymamy równania

$$\omega' - \gamma' + \omega_{\alpha} \alpha' + \omega_{\beta} \beta' = 0,$$

$$\begin{aligned} f_{\xi} + f_{\omega} \omega' + f_{\omega'} \gamma'' + (\gamma' - \omega') (f_{\xi \omega'} + f_{\omega \omega'} \omega' + f_{\omega' \omega'} \omega'') + \\ + [f_{\omega} \omega_{\alpha} + (\gamma' - \omega') (f_{\omega' \omega} \omega_{\alpha} + f_{\omega' \omega'} \omega'_{\alpha})] \alpha' + \\ + [f_{\omega} \omega_{\beta} + (\gamma' - \omega') (f_{\omega' \omega} \omega_{\beta} + f_{\omega' \omega'} \omega'_{\beta})] \beta' = 0. \end{aligned}$$

Wszędzie tu argumentem jest ξ . Rugując obecnie za pomocą tych równań α' i β' z (20), otrzymamy

$$\begin{aligned} [\gamma(\xi) - \omega'(\xi)] f_{\omega' \omega'}(\xi) \begin{vmatrix} \omega_{\alpha}(\xi) & \omega_{\beta}(\xi) \\ \omega'_{\alpha}(\xi) & \omega'_{\beta}(\xi) \end{vmatrix} \frac{\partial \omega(x)}{\partial \xi} = \lambda_{\gamma}(\xi) \begin{vmatrix} \omega_{\alpha}(\xi) & \omega_{\beta}(\xi) \\ \omega_{\alpha}(x) & \omega_{\beta}(x) \end{vmatrix} - \\ - f_{\omega' \omega'}(\xi) [\gamma'(\xi) - \omega'(\xi)]^2 \begin{vmatrix} \omega'_{\alpha}(\xi) & \omega'_{\beta}(\xi) \\ \omega_{\alpha}(x) & \omega_{\beta}(x) \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (21)$$

przyczem przez $\lambda_{\gamma}(\xi)$ oznaczyliśmy funkcję

$$\begin{aligned} \lambda_{\gamma}(\xi) = -[f_{\xi} - \omega' f_{\omega' \xi} - \omega' \omega'' f_{\omega' \omega'} + (f_{\omega} + f_{\omega' \xi} + \omega'' f_{\omega' \omega'} - \omega' f_{\omega' \omega}) \gamma' + \\ + \gamma'^2 f_{\omega' \omega} + \gamma'' f_{\omega'}]. \end{aligned} \quad (22)$$

Jak już zaznaczyliśmy, argumentem w powyższych wzorach jest ξ . Kładąc w (21) $\xi = \xi_0$ i uwzględniając, że

$$f_{\omega' \omega'}(\xi_0, \omega(\xi_0, \alpha_0, \beta_0), \omega'(\xi_0, \alpha_0, \beta_0)) = R(\xi_0),$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} & [\gamma'(\xi_0) - \omega'(\xi_0)] R(\xi_0) \begin{vmatrix} \omega_\alpha(\xi_0) & \omega_\beta(\xi_0) \\ \omega'_\alpha(\xi_0) & \omega'_\beta(\xi_0) \end{vmatrix} \left(\frac{\partial \omega(x, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0} = \\ & = \lambda_\gamma(\xi_0) u_2(x) - R(\xi_0) [\gamma'(\xi_0) - \omega'(\xi_0)]^2 u_1(x), \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie przez $u_1(x)$ oraz $u_2(x)$ oznaczyliśmy funkcje

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \omega'_\alpha(\xi_0) \omega_\beta(x, \alpha_0, \beta_0) - \omega'_\beta(\xi_0) \omega_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0), \\ u_2(x) &= \omega_\alpha(\xi_0) \omega_\beta(x, \alpha_0, \beta_0) - \omega_\beta(\xi_0) \omega_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0). \end{aligned} \quad (24)$$

Jak dawniej, zakładamy, że $R(\xi_0)$ i $\gamma'(\xi_0) - \omega'(\xi_0)$ są różne od zera.

Ponieważ $\omega_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0)$, $\omega_\beta(x, \alpha_0, \beta_0)$ są całkami szczególnymi równania Jacobi'ego, a więc $u_1(x)$ i $u_2(x)$ są również całkami szczególnymi tego równania, przeto i prawa strona równości (23) jest całką równania Jacobi'ego. Całkę tą oznaczmy przez $u_3(x)$ t. j.

$$u_3(x) = \lambda_\gamma(\xi_0) u_2(x) - R(\xi_0) [\gamma'(\xi_0) - \omega'(\xi_0)]^2 u_1(x). \quad (25)$$

Ponieważ

$$u_1(\xi_0) \neq 0, \quad u_2(\xi_0) = 0, \quad (26)$$

a więc całki $u_1(x)$ i $u_2(x)$ są linjowo niezależne. Zwróćmy uwagę na to, że $u_2(x)$ może być przyjęte za całkę, którą oznaczaliśmy w rozdziale III przez $\Delta(x, \xi_0)$, gdyż ona znika dla $x = \xi_0$.

W następnych §§ poznamy dobrze własności tych całek, a obecnie zwróćmy uwagę, iż warunek, że $u_3(x)$ jest różne od zera, jest identyczny z warunkiem, że jest różną od zera pochodna $\left(\frac{\partial \omega(x, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0}$. Zauważymy jeszcze, że przy $R(\xi_0)$ i $\gamma'(\xi_0) - \omega'(\xi_0)$ różnych od zera

$$u_3(\xi_0) = - R(\xi_0) [\gamma'(\xi_0) - \omega'(\xi_0)]^2 u_1(\xi_0),$$

jest różne od zera.

Obecnie łatwo wywnioskować, że jeżeli na łuku naszej krzywej ekstremalnej między punktem przecięcia z krzywą $y = \gamma(x)$ i punktem $N(b, y_b)$ niema punktu, dla którego odciętej $u_3(x) = \left(\frac{\partial \omega(x)}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0}$ przyjmowałaby wartość zero, wówczas można będzie dobrać taką liczbę δ , żeby dla wszystkich punktów, dla których

$$\xi_0 - \delta \leq x \leq b + \delta, \quad |y - \omega(x, \alpha_0, \beta_0)| < \varepsilon$$

równanie (19) było rozwiązalne względem ξ i dawało rozwiązanie klasy $C^{(1)}$, przechodzące w ξ_0 gdy y przechodzi w $\omega(x, \alpha_0, \beta_0)$. Inaczej mówiąc, krzywa ekstremalna MN będzie otoczona przez pole krzywych ekstremalnych, względem których krzywa $y = \gamma(x)$ będzie transwersalną. Dowód byłby powtórzeniem dowodu podanego w § 6 rozdziału IV, przeto nie będziemy go podawać.

Udowodnimy dalej, że nieznikanie całki $u_3(x)$ w żadnym punkcie przedziału $\xi_0 \leq x \leq b$ jest warunkiem koniecznym istnienia ekstremum. Obecnie wskażemy tylko na geometryczną interpretację tego warunku.

12. Rozpatrzmy rodzinę krzywych ekstremalnych, względem której krzywa $y = \gamma(x)$ będzie transwersalną. Rodzina ta posiada równanie

$$y = \omega(x, \alpha(\xi), \beta(\xi)), \quad (27)$$

przyczem α i β określamy z równań (16). Obwiednię tej rodziny otrzymamy rugując ξ z równania (27) i równania

$$\frac{\partial \omega(x, \alpha, \beta)}{\partial \xi} = \omega_\alpha \alpha' + \omega_\beta \beta' = 0.$$

Stąd wnioskujemy że punkt, dla którego odciętej $u_3(x) = 0$, jest punktem styczności krzywej ekstremalnej MN z obwiednią rozpatrywanej rodziny krzywych ekstremalnych.

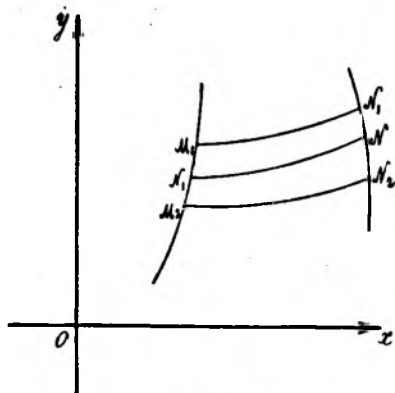
Punkty krzywej $y = \omega(x, \alpha_0, \beta_0)$, których odcięte spełniają równanie

$$u_3(x) = 0,$$

nazwiemy punktami sprzężonymi z krzywą $y = \gamma(x)$. Punkty te, jak wiemy z § 2 rozdziału III, są punktami izolowanymi. Punkty sprzężone z krzywą $y = \gamma(x)$, których odcięte są mniejsze niż ξ_0 , nazwiemy punktami sprzężonymi lewymi, zaś punkty o odciętych większych od ξ_0 , punktami sprzężonymi prawymi (ewentualnie punktami sprzężonymi z lewej lub prawej strony). Zatem otrzymany wynik może być wypowiedziany w sposób następujący.

Krzywa ekstremalna MN będzie otoczona przez pole ekstremalnych, względem których krzywa $y = \gamma(x)$ będzie transwersalną, jeżeli na łuku (zamkniętym) MN naszej ekstremalnej nie ma punktów sprzężonych z krzywą $y = \gamma(x)$.

13. Zakładając istnienie wspomnianego pola, zajmiemy się następującym zagadnieniem:



Rys. 22.

Niech

$$y = \omega(x, \alpha, (\xi), \beta(\xi)) \quad (28)$$

jest równaniem rodziny krzywych ekstremalnych, względem których krzywa $y = \gamma(x)$ będzie transwersalną i tworzących pewne pole, przyczem MN jest krzywą ekstremalną, przechodzącą przez punkty M i N i odpowiadającą wartości $\xi = \xi_0$, a więc $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$. Będziemy rozpatrywali krzywe naszego pola, bliskie do krzywej MN .

Niech A oznacza całkę

$$\int_{\xi_0}^{x_0} f(x, \omega(x, \alpha_0, \beta_0), \omega'(x, \alpha_0, \beta_0)) dx = A,$$

przyczem $\xi_0 < x_0 \leq b$.

Na każdej krzywej ekstremalnej (28) weźmy taki punkt o odciętej x , ażeby miała miejsce równość

$$\int_{\xi}^x (f(x, \omega(x, \alpha, \beta), \omega'(x, \alpha, \beta))) dx = A, \quad (29)$$

gdzie całkę bierzemy dla krzywej ekstremalnej, odpowiadającej wartości ξ parametru.

Przypuśćmy, iż $f(x_0, \omega(x_0, \alpha_0, \beta_0), \omega'(x_0, \alpha_0, \beta_0))$ jest różne od zera. Wówczas z równania (29), posiadającego dla $\xi = \xi_0$ rozwiązanie $x = x_0$, określimy x jako jednoznaczną funkcję ξ , klasy $C^{(1)}$ dla wartości ξ bliskich do ξ_0 .

Rozpatrzmy teraz krzywą, której równania w postaci parametrycznej będą

$$\bar{y} = \omega(x, \alpha(\xi), \beta(\xi)), \quad \int_{\xi}^x [f(x, \omega(x, \alpha(\xi), \beta(\xi)), \omega'(x, \alpha(\xi), \beta(\xi)))] dx = A \quad (30)$$

i wykażemy, że zmieniając A , otrzymamy rodzinę krzywych transwersalnych względem krzywych ekstremalnych (28). W tym celu trzeba wykazać, że

spółczynnik kątowy stycznej do krzywej (30) t. j. $\frac{d\bar{y}}{dx}$ spełnia warunek transwersalności

$$f(x, \omega, \omega') + \left(\frac{d\bar{y}}{dx} - \omega'\right) f_{\omega'}(x, \omega, \omega') = 0.$$

Ponieważ z równań (30) możemy określić x i y jako jednoznaczne i różniczkowalne funkcje ξ , przeto

$$\frac{d\bar{y}}{d\xi} = \frac{d\bar{y}}{dx} \cdot \frac{dx}{d\xi}. \quad (31)$$

Różniczkując względem ξ drugie z równań i pamiętając o znaczeniu, które nadaliśmy symbolowi $\frac{\partial \psi(x, \alpha, \beta)}{\partial \xi}$, znajdziemy

$$f(x, \omega(x), \omega'(x)) \frac{dx}{d\xi} - f(\xi, \omega(\xi), \omega'(\xi)) + \int_{\xi}^x (f_{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + f_{\omega'} \frac{\partial \omega'}{\partial \xi}) dx = 0,$$

albo, całkując przez części drugi wyraz, stojący pod znakiem całki, i pamiętając, że

$$\frac{\partial \omega'(x)}{\partial \xi} = \frac{d}{dx} \frac{\partial \omega(x)}{\partial \xi},$$

oraz, że dla funkcji $\omega(x, \alpha, \beta)$ tożsamościowo

$$f_{\omega} - \frac{d}{dx} f_{\omega'} = 0,$$

przepiszemy związek (31) w postaci

$$\begin{aligned} & f(x, \omega(x), \omega'(x)) \frac{dx}{d\xi} + f_{\omega'}(x, \omega(x), \omega'(x)) \frac{\partial \omega(x)}{\partial \xi} - \\ & - f(\xi, \omega(\xi), \omega'(\xi)) - f_{\omega'}(\xi, \omega(\xi), \omega'(\xi)) \frac{\partial \omega(\xi)}{\partial \xi} = 0. \end{aligned}$$

Ponieważ jednak z pierwszego z równań (30) mamy

$$\frac{\partial \omega(x)}{\partial \xi} = \frac{d\bar{y}}{d\xi} - \omega'(x) \frac{dx}{d\xi},$$

zaś z równania

$$\omega(\xi, \alpha, \beta) = \gamma(\xi)$$

otrzymujemy

$$\frac{\partial \omega(\xi)}{\partial \xi} = \gamma'(\xi) - \omega'(\xi),$$

więc po podstawieniu tych wartości do naszego związku, nadamy mu postać

$$\begin{aligned} f(x, \omega(x), \omega'(x)) \frac{dx}{d\xi} + f_{\omega'}(x, \omega(x), \omega'(x)) \left(\frac{d\bar{y}}{d\xi} - \omega'(x) \frac{dx}{d\xi} \right) = \\ = f(\xi, \omega(\xi), \omega'(\xi)) + f_{\omega'}(\xi, \omega(\xi), \omega'(\xi)) (\gamma'(\xi) - \omega'(\xi)). \end{aligned}$$

Wskutek transversalności krzywej $y = \gamma(x)$ prawa część tej równości jest równa zero, przeto, zakładając, że punkt $x, \bar{y}$ nie jest punktem osobliwym krzywej (30), przychodzimy na skutek (31) do warunku

$$f(x, \omega(x), \omega'(x)) + f_{\omega'}(x, \omega(x), \omega'(x)) \left(\frac{d\bar{y}}{dx} - \omega'(x) \right) = 0.$$

Ostatnia równość właśnie wskazuje, że krzywa (30) przecina transversalnie odpowiednią krzywą ekstremalną

$$y = \omega(x, \alpha(\xi), \beta(\xi)).$$

14. Jako przykład rozpatrzmy zagadnienie linii geodezyjnych na powierzchni. Zagadnienie to, jak wiemy, sprowadza się do znalezienia minimum całki

$$\int_{\xi}^v \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2} dv$$

dającej długość krzywej. Wiemy również, że w tym wypadku warunek transversalności sprowadza się do warunku ortogonalności; zatem w rozpatrywanym przypadku otrzymane wyniki doprowadzają nas do twierdzenia, udowodnionego poraz pierwszy przez Gaussa: Jeżeli na krzywych geodezyjnych, przecinających pod kątem prostym pewną krzywą, odłożymy, licząc od punktów przecięcia, jednakowe długości, wówczas miejsce geometryczne końców przetnie dane krzywe geodezyjne również pod kątem prostym.

15. Przypuścimy obecnie, że krzywa dana $y = \gamma(x)$ redukuje się do punktu $M(a, y_a)$ i rozpatrzmy rodzinę krzywych ekstremalnych przechodzących przez punkt dany i tworzących pole, co jest możliwem, jeżeli warunek Jacobi'ego jest spełniony.

Jeżeli na każdej z ekstremalnych, przechodzących przez punkt $M(a, y_a)$, znajdziemy takie x , żeby całka

$$\int_a^x f(x, \omega, \omega') dx$$

miała stałą wartość, to krzywa

$$\bar{y} = \omega(x, \alpha, \beta), \quad \int_a^x f(x, \omega, \omega') dx = C \quad (33)$$

będzie krzywą transwersalną względem naszej rodziny; C jest wartością całki

$$\int_a^{x_0} f(x, \omega(x, \alpha_0, \beta_0), \omega'(x, \alpha_0, \beta_0)) dx.$$

Zauważmy, iż w rozważanym wypadku jeden z parametrów, np. β , da się określić w zależności od drugiego zapomocą równania

$$\omega(a, \alpha, \beta) = y_a,$$

jeżeli tylko założymy (co jest zawsze możliwe), że $\omega_\beta(a, \alpha, \beta) \neq 0$ i że ostatnie równanie dla $\alpha = \alpha_0$ posiada określone rozwiązanie $\beta = \beta_0$. Wówczas

$$\frac{d\omega(a, \alpha, \beta)}{d\alpha} = \omega_\alpha(a, \alpha, \beta) + \omega_\beta(a, \alpha, \beta) \frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

Różniczkując względem α drugie z równań (33), otrzymamy po łatwych przekształceniach

$$\begin{aligned} f(x, \omega(x), \omega'(x)) \frac{dx}{d\alpha} + \int_a^x (f_\omega \frac{d\omega}{d\alpha} + f_{\omega'} \frac{d\omega'}{d\alpha}) dx = \\ = f(x, \omega(x), \omega'(x)) \frac{dx}{d\alpha} + f_{\omega'}(x, \omega(x), \omega'(x)) \frac{d\omega(x)}{d\alpha} = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

albo, uwzględniając, że na zasadzie (33)

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \omega'(x) \frac{dx}{da} + \frac{\partial \omega(x)}{\partial a}$$

oraz, że dla krzywej (33)

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{d\bar{y}}{da} : \frac{dx}{da}$$

przepiszemy związek (34) w postaci

$$f(x, \omega(x), \omega'(x)) + \left(\frac{d\bar{y}}{dx} - \omega'(x)\right) f_{\omega'}(x, \omega(x), \omega'(x)) = 0,$$

co dowodzi, że krzywa (33) przecina transversalnie naszą rodzinę krzywych ekstremalnych. Stosując ten wynik do teorii linii geodezyjnych, otrzymujemy drugie twierdzenie Gaussa: Jeżeli na każdej z linii geodezyjnych, wychodzących z danego punktu, odłożymy odcinki jednakowej długości, to otrzymane miejsce geometryczne, zwane kołem geodezyjnym, przetnie wszystkie rozpatrywane linie geodezyjne pod kątem prostym!

16. Dotychczas wykazaliśmy konieczność następujących dwóch warunków dla istnienia minimum całki

$$I = \int_{\xi}^b f(x, y, y') dx, \quad (35)$$

przy założeniu, że funkcja szukana y spełnia warunki

$$y(\xi) = \gamma(\xi), \quad y(b) = y_b,$$

przyczem $\gamma(x)$ jest daną funkcją klasy $C^{(2)}$, zaś y_b daną liczbą:

1) szukana krzywa $y = \varphi(x)$ spełnia równanie Eulera, inaczej mówiąc, jest krzywą ekstremalną;

2) w punkcie $(\xi_0, \gamma(\xi_0))$ t. j. w punkcie przecięcia tej krzywej ekstremalnej z krzywą

$$y = \gamma(x)$$

spełniony jest warunek transversalności

$$f(\xi_0, \varphi(\xi_0), \varphi'(\xi_0)) + (\gamma'(\xi_0) - \varphi'(\xi_0)) f_{\varphi'}(\xi_0, \varphi(\xi_0), \varphi'(\xi_0)) = 0. \quad (36)$$

Niech MN (p. rys. 23) będzie łukiem krzywej ekstremalnej, dającym rozwiązanie naszego zagadnienia. Ponieważ część naszego obszaru funkcyjnego stanowią krzywe klasy $C^{(1)}$, przechodzące przez punkty M i N , przeto, jak już dawniej mówiliśmy, wzdłuż łuku MN muszą być spełnione warunki Legendre'a, Jacobi'ego i Weierstrassa, t. j. w razie minimum

$$R'(x) = f_{\varphi'\varphi'}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \geq 0 \quad (\xi_0 \leq x \leq b), \quad (\text{warunek Legendre'a})$$

$$\Delta(x, \xi_0) \neq 0 \quad \xi_0 < x < b, \quad (\text{warunek Jacobi'ego})$$

$$E(x, \varphi(x), k, \varphi'(x)) \geq 0 \quad (\xi_0 \leq x \leq b), \quad (\text{warunek Weierstrassa})$$

przyczem $\Delta(x, \xi_0)$ jest całką równania Jacobi'ego, znikającą dla $x = \xi_0$, zaś k dowolną skończoną liczbą rzeczywistą. Wiemy, że ostatni warunek jest niezbędnym tylko dla istnienia silnego minimum. Prócz tego zakładamy, że $\gamma'(\xi_0) - \varphi'(\xi_0) \neq 0$.

Przejdziemy obecnie do wyprowadzenia pozostałych warunków niezbędnych dla istnienia ekstremum, będących uogólnieniami warunków Jacobi'ego.

Weźmy dowolny punkt M_1 na krzywej $y = \gamma(x)$, leżący dostatecznie blisko punktu M i połączmy M_1 z N łukiem krzywej ekstremalnej. Jeżeli przez $y = \omega(x, \alpha, \beta)$ oznaczmy całkę ogólną równania różniczkowego Eulera, to dla określenia stałych α i β posiadamy dwa warunki

$$\omega(\xi, \alpha, \beta) = \gamma(\xi) \quad \omega(b, \alpha, \beta) = y_b. \quad (37)$$

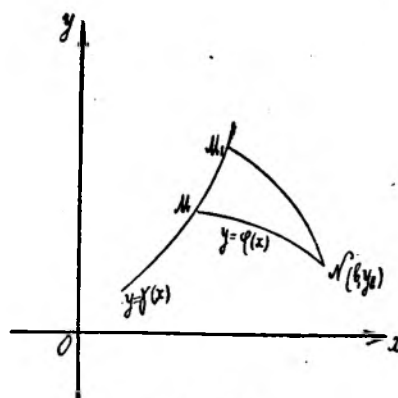
Niech łuk MN krzywej ekstremalnej (p. rys. 23) odpowiada wartości $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, wówczas równania (37) posiadają rozwiązanie

$$\xi = \xi_0, \quad \alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0.$$

Prócz tego, przypuszczając, że jest spełniony silniejszy warunek Jacobi'ego, wnioskujemy, że wyznacznik

$$\omega_\alpha(\xi_0, \alpha_0, \beta_0) \omega_\beta(b, \alpha_0, \beta_0) - \omega_\alpha(b, \alpha_0, \beta_0) \omega_\beta(\xi_0, \alpha_0, \beta_0)$$

jest różny od zera, a więc dla wartości ξ dostatecznie bliskich ξ_0 znajdziemy rozwiązanie



Rys. 23.

$$\alpha = \alpha(\xi), \quad \beta = \beta(\xi)$$

równań (37), przyczem

$$\alpha_0 = \alpha(\xi_0), \quad \beta_0 = \beta(\xi_0).$$

Funkcje $\alpha(\xi)$ i $\beta(\xi)$ są klasy $C^{(1)}$.

Różniczkując równania (37) względem ξ znajdziemy

$$\begin{aligned} \omega'(\xi) + \omega_\alpha(\xi) \alpha' + \omega_\beta(\xi) \beta' &= \gamma'(\xi), \\ \omega_\alpha(b) \alpha' + \omega_\beta(b) \beta' &= 0. \end{aligned} \quad (38)$$

W tych wzorach, jak zwykle, $\omega'(\xi)$ oznacza pochodną cząstkową $\omega(x, \alpha, \beta)$ względem x dla $x = \xi$, zaś α' i β' pochodne funkcji $\alpha(\xi)$ i $\beta(\xi)$ względem ξ .

Zatem równanie krzywej ekstremalnej, łączącej punkty M_1 i N , będzie miało postać

$$y = (x, \alpha(\xi), \beta(\xi)), \quad (39)$$

gdzie $\alpha(\xi)$ i $\beta(\xi)$ oznaczają funkcje, które przed chwilą określiliśmy. Dla $\xi = \xi_0$ równanie (39) przyjmuje kształt

$$y = \omega(\xi, \alpha_0, \beta_0), \quad (40)$$

t. j. staje się równaniem krzywej ekstremalnej MN .

Weźmy obecnie całkę (35) dla krzywej (39); całka ta stanie się pewną funkcją różniczkowalną ξ

$$I(\xi) = \int_{\xi}^b f(x, \omega(x, \alpha(\xi), \beta(\xi)), \omega'(x, \alpha(\xi), \beta(\xi))) dx, \quad (41)$$

posiadającą ekstremum dla $\xi = \xi_0$. Musi być przeto spełniony warunek

$$I'(\xi_0) = 0.$$

Różniczkując funkcję $I(\xi)$ względem ξ , otrzymamy

$$I'(\xi) = -f(\xi, \omega(\xi, \alpha, \beta), \omega'(\xi, \alpha, \beta)) + \int_{\xi}^b [f_{\omega}(\omega_{\alpha} \alpha' + \omega_{\beta} \beta') + f_{\omega'}(\omega'_{\alpha} \alpha' + \omega'_{\beta} \beta')] dx,$$

albo, całkując przez części i uwzględniając, że, po pierwsze, funkcja $\omega(x, \alpha, \beta)$ spełnia równanie Eulera

$$f_{\omega} - \frac{d}{dx} f_{\omega'} = 0 \quad (42)$$

i, że, po drugie, spełnione są warunki (38), dostaniemy

$$I'(\xi) = -f(\xi, \omega(\xi, \alpha, \beta), \omega'(\xi, \alpha, \beta)) - (\gamma'(\xi) - \omega'(\xi)) f_{\omega'}(\xi, \omega(\xi, \alpha, \beta), \omega'(\xi, \alpha, \beta)). \quad (43)$$

Dla $\xi = \xi_0$ wyrażenie to przyjmuje wartość zero wskutek warunku transversalności. Wiadomo z teorii maximów i minimów, że, jeżeli $I'(\xi_0) = 0$, to warunkiem wystarczającym istnienia ekstremum dla $\xi = \xi_0$ jest $I''(\xi_0) \neq 0$, zaś warunkiem koniecznym jest ażeby funkcja $I''(\xi)$ nie zmieniała swego znaku przy przejściu przez $\xi = \xi_0$.

Zauważymy jeszcze, iż przy uczynionych założeniach, jak to widać z (43), $I''(\xi)$ istnieje.

Różniczkując (43) i rugując z otrzymanego w ten sposób wyrażenia dla $I''(\xi)$ i równań (38) funkcje $\alpha'(\xi)$ i $\beta'(\xi)$, dostaniemy związek

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \omega_{\alpha}(\xi) & \omega_{\beta}(\xi) \\ \omega_{\alpha}(b) & \omega_{\beta}(b) \end{vmatrix} I''(\xi) &= \lambda_{\gamma}(\xi) \begin{vmatrix} \omega_{\alpha}(\xi) & \omega_{\beta}(\xi) \\ \omega_{\alpha}(b) & \omega_{\beta}(b) \end{vmatrix} - \\ &- f_{\omega' \omega'}(\xi, \omega, \omega') [\gamma'(\xi) - \omega'(\xi)]^2 \begin{vmatrix} \omega'_{\alpha}(\xi) & \omega'_{\beta}(\xi) \\ \omega_{\alpha}(b) & \omega_{\beta}(b) \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (44)$$

gdzie $\lambda_{\gamma}(\xi)$ oznacza funkcję (22).

Używając tych samych oznaczeń, co i w § 11, otrzymamy z (44) dla $\xi = \xi_0$

$$u_2(b) I''(\xi_0) = \lambda_{\gamma}(\xi_0) u_2(b) - R(\xi_0) [\gamma'(\xi_0) - \omega'(\xi_0)]^2 u_1(b) = u_3(b). \quad (45)$$

Powracając do wyrażań (24) dla $u_1(x)$ i $u_2(x)$, łatwo znajdziemy

$$u'_1(\xi_0) = 0, \quad u_2(\xi_0) = 0$$

i prócz tego

$$u'_2(\xi_0) = -u_1(\xi_0).$$

Stąd wnioskujemy, że dla dostatecznie małych dodatnich wartości h , ponieważ

$$u_1(\xi_0 + h) = u_1(\xi_0) + \varepsilon, \quad u_2(\xi_0 + h) = -h(u_1(\xi_0) + \varepsilon_1),$$

gdzie ε i ε_1 oznaczają wielkości, dążące do zera wraz z h , mamy

$$\frac{u_1(\xi_0 + h)}{u_2(\xi_0 + h)} < 0,$$

a więc dla wartości b dostatecznie bliskich ξ_0

$$I''(\xi_0) > 0.$$

Rzeczywiście, wyrażenie (45) możemy napisać w postaci

$$I''(\xi_0) = \lambda_\gamma(\xi_0) - R(\xi_0) [\gamma'(\xi_0) - \omega'(\xi_0)]^2 \frac{u_1(b)}{u_2(b)}.$$

Przy zbliżaniu się b do ξ_0 , drugi wyraz prawej części, ponieważ $u_2(\xi_0) = 0$, na zasadzie wyżej powiedzianego będzie dążył do $+\infty$, podczas, gdy pierwszy wyraz pozostaje bez zmiany. Oznaczmy przez ξ''_0 pierwsze zero całki $u_3(x)$, większe od ξ_0 . Jeżeli nie będzie spełniony warunek Jacobi'ego, wówczas zero to, na zasadzie twierdzenia Sturma, musi leżeć wewnątrz przedziału (ξ_0, b) . Odwrotnie, jeżeli całka $u_3(x)$ jest różną od zera w całym przedziale $\xi_0 \leq x \leq b$, to silniejszy warunek Jacobi'ego jest spełniony, jak to wynika z twierdzenia Sturma.

Z ogólnej teorii zwyczajnych równań różniczkowych linjowych wiemy, że przy przejściu przez wartość zerową całka $u_3(x)$ zmienia swój znak (jeżeli tylko są spełnione zwykłe założenia co do współczynników równania Jacobi'ego). Stąd, na zasadzie (45) wnioskujemy, że jeżeli $b < \xi''_0$ wówczas

$$I''(\xi_0) > 0,$$

jeżeli zaś $\xi''_0 < b < \xi'_0$, przyczem ξ'_0 jest zerem całki

$$u_2(x) = \Delta(x, \xi_0),$$

najbliższem z prawej strony ξ_0 , wówczas

$$I''(\xi_0) < 0.$$

Jak już mówiliśmy, punkty ekstremalnej MN , których odcięte czynią

zadość równaniu $u_3(x) = 0$, noszą nazwę punktów sprzężonych z krzywą $y = \gamma(x)$.

Streszczając otrzymane wyniki, dochodzimy do wniosku, że, jeżeli na łuku MN krzywej ekstremalnej niema punktów sprzężonych z krzywą

$$y = \gamma(x), \quad (46)$$

wówczas spełnienie warunków Eulera, Legendre'a, Weierstrassa a również i silniejszego warunku Jacobi'ego, który jest konsekwencją nieistnienia na łuku MN punktów sprzężonych z krzywą $y = \gamma(x)$, wystarcza, aby cała wzięta dla krzywej MN dawała (dla $R(\xi_0) > 0$) minimum w obszarze funkcyjnym, składającym się z krzywych ekstremalnych, łączących punkty krzywej (46) z punktem N i dostatecznie bliskich MN ; odwrotnie, jeżeli punkt N leży na krzywej ekstremalnej MN z a punktem sprzężonym z krzywą (46), wówczas w tym obszarze funkcyjnym wartość $I(\xi_0)$ będzie maximum, przy czem zakładamy, że silniejszy warunek Legendre'a i słabszy Jacobi'ego mają miejsce. Rzeczywiście, w pierwszym wypadku mamy

$$I'(\xi_0) = 0 \quad I''(\xi_0) > 0,$$

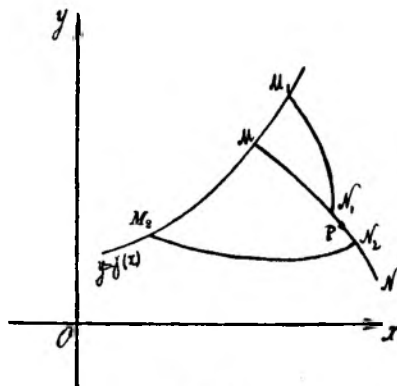
a w drugim, przyjmując pod uwagę, że na mocy twierdzenia Sturma na łuku MN leży tylko jedno zero całki $u_3(x)$, otrzymujemy, że

$$I'(\xi_0) = 0 \quad I''(\xi_0) < 0.$$

17. Teraz już łatwo wyprowadzić następujący nowy warunek konieczny, który możemy nazwać uogólnionym warunkiem Jacobi'ego.

Warunkiem koniecznym, ażeby łuk MN krzywej ekstremalnej mógł dawać ekstremum całki I , jest (zakładając, że pozostałe, wspomniane wyżej warunki konieczne są spełnione) ażeby między punktami M i N nie leżał punkt sprzężony z krzywą $y = \gamma(x)$.

Rzeczywiście, przypuśćmy, że punkt P , sprzężony z krzywą $y = \gamma(x)$, leży pomiędzy punktami M i N . Taki punkt przy spełnieniu warunku Jacobi'ego, będzie jeden (p. rys. 24). Weźmy na łuku MN krzywej ekstremalnej, którą będziemy oznaczali przez L , dwa punkty N_1 i N_2 , leżące z różnych stron punktu P



Rys. 24.

(punkt N_1 z lewej, N_2 z prawej strony) i zbudujmy dwie krzywe, które oznaczmy odpowiednio przez L_1 i L_2 ; pierwsza z nich składa się z łuku krzywej ekstremalnej $M_1 N_1$ i łuku $N_1 N$ krzywej L , zaś druga z łuku krzywej ekstremalnej $M_2 N_2$ i łuku $N_2 N$ linii L .

Zauważymy, iż możliwość zbudowania krzywych ekstremalnych $M_1 N_1$ oraz $M_2 N_2$ wynika ze spełnienia warunku Jacobi'ego.

Istotnie, ponieważ w myśl założeń, całka Jacobi'ego

$$u_2(x) = \omega_\alpha(\xi_0, \alpha_0, \beta_0) \omega_\beta(x, \alpha_0, \beta_0) - \omega_\beta(\xi_0, \alpha_0, \beta_0) \omega_\alpha(x, \alpha_0, \beta_0)$$

jest różną od zera dla wszystkich wartości x , należących do przedziału $\xi_0 \leq x < b$ przeto na zasadzie rozumowań, przeprowadzonych na początku § 16, przekonujemy się o istnieniu krzywych ekstremalnych, posiadających końce w dowolnym punkcie łuku MN , dowolnie bliskich linii MN i przecinających w otoczeniu punktu M krzywą $y = \gamma(x)$.

Oznaczmy dalej symbolem $I_{AB}^{(K)}$ całkę I , wziętą dla krzywej K pomiędzy punktami A i B . Wówczas, na zasadzie przed chwilą powiedzianego, mamy

$$I_{M_1 N}^{(L_1)} - I_{MN}^{(L)} = I_{M_1 N_1}^{(L_1)} + I_{N_1 N}^{(L)} - I_{MN_1}^{(L)} - I_{N_1 N}^{(L)} = I_{M_1 N_1}^{(L_1)} - I_{MN_1}^{(L)} > 0$$

oraz

$$I_{M_2 N}^{(L_2)} - I_{MN}^{(L)} = I_{M_2 N_2}^{(L_2)} + I_{N_2 N}^{(L)} - I_{MN_2}^{(L)} - I_{N_2 N}^{(L)} = I_{M_2 N_2}^{(L_2)} - I_{MN_2}^{(L)} < 0.$$

Stąd wnioskujemy, że

$$I(\xi_0) = I_{MN}^{(L)},$$

nie jest wartością ekstremalną całki I .

18. W zupełnie podobny sposób rozwiązujemy zagadnienie o warunkach niezbędnych istnienia ekstremum całki

$$I = \int_a^\xi f(x, y, y') dx$$

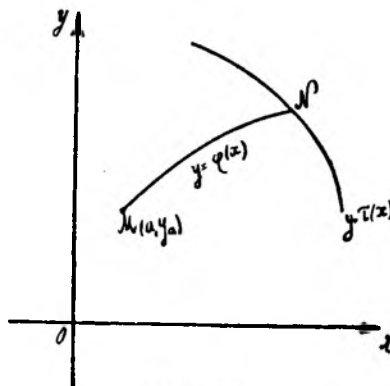
w obszarze funkcyjnym, składającym się z funkcji klasy $C^{(1)}$, spełniających warunki

$$y(a) = y_a, \quad y(\xi) = \tau(\xi),$$

gdzie y_a oznacza daną liczbę rzeczywistą, zaś $\tau(\xi)$ funkcję klasy $C^{(2)}$ w pewnym przedziale. Warunki konieczne, które musi spełniać funkcja $y = \varphi(x)$, dająca ekstremum, są następujące: krzywa $y = \varphi(x)$ musi być krzywą Eulera, wzdłuż której powinien być spełniony warunek Legendre'a; wewnątrz jej łuku nie może leżeć punkt sprzężony z punktem (a, y_a) , t. j. musi być spełniony warunek Jacobi'ego; wreszcie, w wypadku silnego ekstremum, musi być wzdłuż tej krzywej spełniony warunek Weierstrassa, zawierający w sobie warunek Legendre'a; w punkcie N (p. rys. 25), krzywa

$$y = \tau(x) \quad (47)$$

musi przecinać krzywą ekstremalną transversalnie, i, ostatni warunek, wewnątrz łuku MN nie mogą leżeć punkty sprzężone z krzywą (47). Ostatni warunek zawiera w sobie silniejszy warunek Jacobi'ego.



Rys. 25.

Punktem sprzężonym z krzywą (47) nazywamy punkt styczności krzywej ekstremalnej MN z obwiednią krzywych ekstremalnych, przeciętych transversalnie przez krzywą (47). Oczywiście ten punkt leży na lewo od krzywej (47). Zauważymy jeszcze, że, jak w poprzednim wypadku, zakładamy, że jeżeli ξ_0 oznacza odciętą punktu N przecięcia krzywej $y = \tau(x)$ z naszą krzywą ekstremalną, to $R(\xi_0)$ oraz $\tau'(\xi_0) - \omega'(\xi_0)$ są różne od zera. Ta ostatnia okoliczność ma miejsce, gdy jest spełniony silniejszy warunek Legendre'a i gdy mamy do czynienia z zagadnieniem oznaczonym.

19. Obecnie przejdziemy do rozpatrzenia warunków wystarczających istnienia silnego ekstremum w wypadku, gdy rozważany obszar funkcyjny składa się z krzywych, których jeden koniec jest umocniony, a drugi znajduje się na danej krzywej.

Przypuśćmy, że punkt początkowy ma leżeć na danej krzywej

$$y = \gamma(x) \quad (48)$$

klasy $C^{(2)}$, zaś koniec w punkcie $N(b, y_b)$.

Zakładając, że wszystkie wspomniane wyżej warunki konieczne są spełnione, możemy wywnioskować, że nasza krzywa ekstremalna MN da się otoczyć przez pole krzywych ekstremalnych, przeciętych transversalnie przez krzywą (48). Oznaczmy przez $p(x, y)$ funkcję tego pola. Na skutek warunku transversalności na całym łuku krzywej (48), leżącym w rozważanym polu, mamy tożsamościowo

$$f(x, \gamma(x), p) + (\gamma'(x) - p) f_p(x, \gamma(x), p) = 0,$$

a zatem całka Hilbertowska

$$\int [f(x, y, p) + (y' - p) f_p(x, y, p)] dx,$$

wzięta dla tego łuku krzywej $y = \gamma(x)$ między jego dowolnymi dwoma punktami, tożsamościowo równa się zeru.

Stąd można otrzymać bardzo ważny wniosek, który doprowadzi nas do szukanego warunku dostatecznego.

W myśl twierdzenia Beltrami'ego-Hilberta całka

$$\int [f(x, y, y') + (y' - p) f_p(x, y, p)] dx,$$

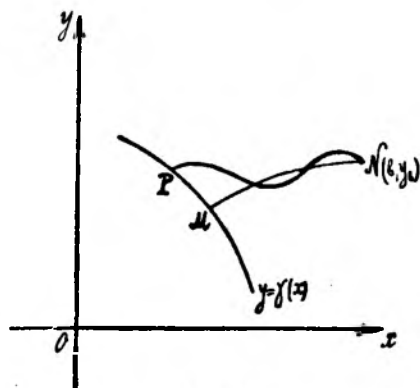
wzięta pomiędzy dwoma dowolnymi punktami, dla dwóch dowolnych krzywych, przechodzących przez te punkty i leżących całkowicie w polu, posiada tę samą wartość. Jeżeli za jedną z tych krzywych weźmiemy krzywą ekstremalną naszej rodziny, to ponieważ wzdłuż niej

$$y' = p,$$

przeto całka Hilberta wzięta dla tej krzywej, zmieni się na całkę

$$I = \int f(x, y, y') dx.$$

Obecnie porównamy między sobą wartość całki, wziętej dla dowolnej krzywej ekstremalnej MN , którą oznaczmy przez E i która należy do rodziny, tworzącej pole, a więc przeciętej transversalnie przez krzywą (48), z wartościami całki, wziętej dla różnych krzywych klasy $C^{(1)}$, leżących w polu i łączących dowolne punkty krzywej (48) z punktem N . Niech jedną z takich krzywych, którą nazwiemy L , będzie krzywa PN (p. rys. 26).



Rys. 26.

Na zasadzie poprzedniego całka Hilbertowska, wzięta dla krzywej, składającej się z łuku MP krzywej $y = \gamma(x)$ i krzywej L , jest równa całce I , wziętej dla krzywej ekstremalnej MN ; ponieważ jednak całka Hilbertowska,

wzięta dla łuku MP , jest równa zero, przeto całka I wzięta dla krzywej ekstremalnej MN jest równa całce Hilbertowskiej, wziętej dla krzywej L , t. j. jeżeli ξ_0 i ξ oznaczają odpowiednio odcięte punktów M i P , wówczas

$$I = \int_{\xi_0(E)}^b f(x, y, y') dx = \int_{\xi(L)}^b [f(x, y, p) + (y' - p) f_p(x, y, p)] dx,$$

a więc różnica całek I , wziętych dla krzywych (L) i (E) będzie

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_{\xi(L)}^b f(x, y, y') dx - \int_{\xi_0(E)}^b f(x, y, y') dx = \\ &= \int_{\xi(L)}^b [f(x, y, y') - f(x, y, p) - (y' - p) f_p(x, y, p)] dx = \int_{\xi(L)}^b E(x, y, y', p) dx, \end{aligned} \quad (49)$$

gdzie $E(x, y, y', p)$ jest funkcją Weierstrassa.

Stąd widzimy, iż dla istnienia silnego extremum wystarcza, ażeby w całym rozpatrywanym polu funkcja $E(x, y, y', p)$ dla wszystkich skończonych wartości y' nie zmieniała swego znaku.

Łatwo widzieć (por. rozdział poprzedni), że w wypadku zagadnienia regularnego warunek Weierstrassa będzie spełniony a fortiori. Analogicznie łatwo spostrzec, że przy spełnieniu pozostałych warunków niezbędnych dla istnienia słabego extremum wystarcza spełnienie silniejszego warunku Legendre'a wzdłuż krzywej $y = \varphi(x)$.

20. Rozpatrzmy obecnie wypadek, gdy końce szukanej krzywej znajdują się na dwu danych krzywych klasy $C^{(2)}$

$$y = \gamma(x), \quad y = \tau(x).$$

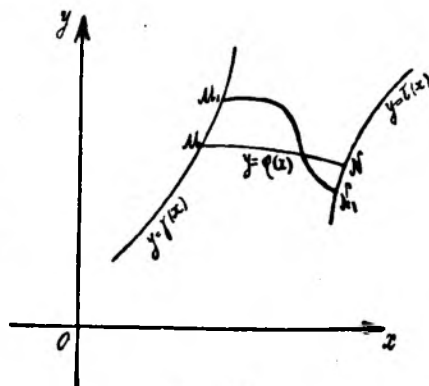
Oczywiście niezbędnymi warunkami istnienia extremum będą następujące: 1) krzywa, dająca extremum,

$$y = \varphi(x)$$

musi być krzywą Eulera; 2) musi być spełniony warunek Legendre'a, t. j. wyrażenie

$$f_{\varphi' \varphi'}(x, \varphi, \varphi') = R(x)$$

wzdłuż niej nie może zmieniać znaku;



Rys. 27.

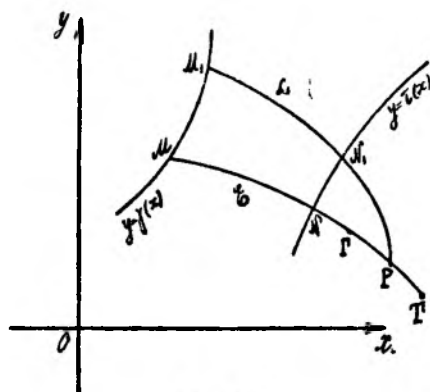
3) łuk MN (p. rys. 27) krzywej $y = \varphi(x)$ nie zawiera wewnątrz punktów sprzężonych z krzywymi

$$y = \gamma(x) \quad (48) \quad \text{oraz} \quad y = \tau(x). \quad (50)$$

Prócz tego zakładamy, że wielkości $R(\xi_0)$, $R(\zeta_0)$, $\gamma'(\xi_0) - \omega'(\xi_0)$, $\tau'(\zeta_0) - \omega'(\zeta_0)$, gdzie ξ_0 i ζ_0 oznaczają odpowiednio odcięte punktów M i N , są różne od zera.

Pokażemy, że dla istnienia ekstremum konieczne jest jeszcze spełnienie następującego warunku, otrzymanego po raz pierwszy przez Bliss'a:

Najbliższy z prawej strony punkt sprzężony z krzywą (50) (p. rys. 27) nie może leżeć więcej na prawo od najbliższego prawego punktu sprzężonego z krzywą (48) i analogicznie: najbliższy z lewej strony punkt sprzężony z krzywą (48) nie może leżeć więcej na lewo od najbliższego lewego punktu sprzężonego z krzywą (50).



Rys. 28.

Rzeczywiście: niech najbliższy z prawej strony punkt Γ sprzężony z krzywą $y = \gamma(x)$ poprzedza (p. rys. 28) punkt T , który jest najbliższym z prawej strony sprzężonym z krzywą $y = \tau(x)$.

Weźmy dowolny punkt P , leżący pomiędzy Γ i T . Ponieważ leży on za punktem sprzężonym z krzywą $y = \gamma(x)$, przeto zawsze znajdziemy taką krzywą $M_1 N_1 P$, którą nazwiemy L , że całka I wzięta dla krzywej L , jest mniejszą, niż wzięta dla krzywej MNP (nazwijmy ją krzywą E) t. j.

$$I_{M_1 P}^{(L)} < I_{MP}^{(E)}. \quad (51)$$

Ponieważ z drugiej strony P leży przed punktem T sprzężonym z prawej strony z krzywą $y = \tau(x)$, przeto całka I , wzięta dla krzywej ekstremalnej E między punktami N i P , będzie mniejszy niż całka, wzięta dla krzywej L między punktami N_1 i P t. j.

$$I_{NP}^{(E)} < I_{N_1 P}^{(L)}. \quad (52)$$

Z nierówności (51) i (52) mamy

$$I_{M_1 N_1}^{(L)} = I_{M_1 P}^{(L)} - I_{N_1 P}^{(L)} < I_{MP}^{(E)} - I_{NP}^{(E)} = I_{MN}^{(E)}.$$

Analogicznie dowodzi się drugą część twierdzenia Bliss'a.

Zauważymy jeszcze tylko, że zostawiamy na uboczu wypadek, gdy najbliższe punkty sprzężone z krzywymi (48) i (50) pokrywają się.

21. Obecnie łatwo będzie otrzymać warunki dostateczne istnienia ekstremum w wypadku końcowych zmiennych.

Przypuśćmy, że są spełnione wszystkie warunki konieczne, wspomniane wyżej. Wówczas można będzie znaleźć taki obszar funkcyjny krzywych sąsiednich względem linii ekstremalnej $y = \varphi(x)$, że w tym obszarze ta ostatnia krzywa nadaje ekstremalną wartość rozważanej całce.

Rozpatrzmy rodzinę krzywych ekstremalnych, przecinających transversalnie w pobliżu punktu M (p. rys 29) krzywą $y = \gamma(x)$ (48). Jeżeli tylko są spełnione postawione przez nas warunki, wówczas rodzina taka istnieje. Jak zwykle odcięta punktu M oznaczmy przez ξ_0 , a odcięte punktów krzywej (48) przez ξ . Równanie rozważanej rodziny krzywych ekstremalnych będzie miało, jak wiadomo, (p. § 10) postać

$$y = \omega(x, \alpha(\xi), \beta(\xi)), \quad (53)$$

przyczem krzywa $y = \varphi(x)$ odpowiada wartości $\xi = \xi_0$ t. j.

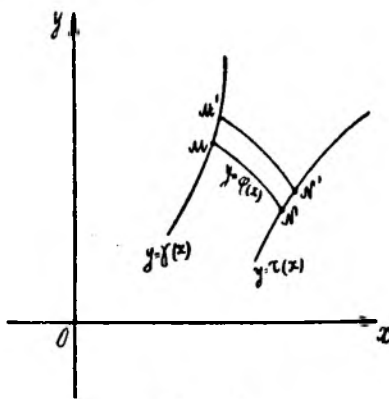
$$\varphi(x) = \omega(x, \alpha(\xi_0), \beta(\xi_0)).$$

Z określenia samego mamy

$$\omega(\xi, \alpha(\xi), \beta(\xi)) = \gamma(\xi). \quad (54)$$

Jak widzieliśmy w § 11, jeżeli są tylko spełnione wszystkie warunki niezbędne, rodzina krzywych ekstremalnych (54) tworzy pole dla wszystkich wartości x i ξ , spełniających nierówności

$$\xi_0 < x < \xi'_0, \quad |\xi - \xi_0| < a$$



Rys. 29.

gdzie ξ'_0 oznacza odciętą pierwszego punktu sprzężonego (z prawej strony) z krzywą $y = \gamma(x)$, zaś ε dostatecznie małą liczbę dodatnią. Ponieważ, w myśl założeń, punkt N krzywej $y = \tau(x)$ leży wewnątrz naszego pola, a więc to samo da się powiedzieć i o całym łuku tej krzywej dostatecznie małym i zawierającym punkt N .

Będziemy oznaczać przez ζ odciętą punktu przecięcia N' (p. rys. 29) krzywej ekstremalnej (53) z krzywą $y = \tau(x)$, a więc

$$\omega(\zeta, \alpha(\xi), \beta(\xi)) = \tau(\zeta). \quad (55)$$

Odciętą punktu przecięcia N krzywej ekstremalnej $y = \varphi(x)$ z krzywą $y = \tau(x)$ oznaczmy przez ζ_0 , a więc równanie (55) dla $\xi = \xi_0$ posiada rozwiązanie $\zeta = \zeta_0$. Ponieważ $\omega'(\zeta_0, \alpha(\xi_0), \beta(\xi_0)) - \tau'(\zeta_0)$ jest różne od zera, przeto dla wartości ξ , bliskich ξ_0 , określimy ζ jako jednoznaczną funkcję ξ klasy $C^{(1)}$, przyjmującą wartość $\zeta = \zeta_0$ dla $\xi = \xi_0$.

Obszar funkcyjny, utworzony z łuków krzywych ekstremalnych (53), sąsiednich względem krzywej ekstremalnej $y = \varphi(x)$ i tworzących pole, nazwiemy obszarem E .

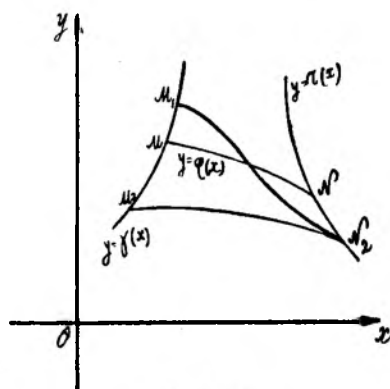
Obszar funkcyjny, składający się z łuków krzywych klasy $C^{(1)}$, leżących w tym polu i posiadających końce na krzywych $y = \gamma(x)$ i $y = \tau(x)$, nazwiemy obszarem Y .

Udowodnimy teraz następujące ważne twierdzenie.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby krzywa ekstremalna $y = \varphi(x)$ dawała ekstremum całki

$$I = \int f(x, y, y') dx$$

w obszarze Y , jest, aby dawała go w obszarze E .



Rys. 30.

Rzeczywiście, weźmy całkę naszą dla dowolnej krzywej L , należącej do Y i łączącej punkty M_1 i N_2 (p. rys. 30). Jeżeli przez punkt N_2 poprowadzimy krzywą ekstremalną $M_2 N_2$, należącą do rodziny (53), wówczas na zasadzie poprzednich rozważań całka I , wzięta dla tej krzywej będzie posiadała minimum w porównaniu z wartościami dla innych krzywych, leżących w polu i posiadających koniec w N_2 i początek na krzywej $y = \gamma(x)$. Oznaczając przez ξ odciętą punktu M_2 i oznaczając przez $I(\xi)$ wartość naszej całki, wziętej dla krzywej

extremalnej $M_2 N_2$, mamy

$$I(\xi) < I_{M_1 N_2}^{(L)}.$$

Jeżeli zatem całka wzięta dla krzywej ekstremalnej MN posiada wartość minimalną w obszarze E t. j. jeżeli

$$I(\xi_0) < I(\xi),$$

to tembardziej

$$I(\xi_0) < I_{M_1 N_2}^{(L)}.$$

A więc udowodniliśmy dostateczność warunku.

Niezbędność warunku wynika z tego, że obszar funkcyjny E jest częścią obszaru Y .

Dla znalezienia więc, warunków dostatecznych istnienia minimum trzeba zbadać własności funkcji $I(\xi)$.

Z określenia tej funkcji mamy

$$I(\xi) = \int_{\xi}^{\zeta} f(x, \omega, \omega') dx,$$

a zatem, biorąc pod uwagę, że ζ jest jednoznaczłą funkcją ξ klasy $C^{(1)}$, określoną z równania (55), znajdziemy

$$I'(\xi) = f(\zeta, \omega, \omega') \frac{d\zeta}{d\xi} - f(\xi, \omega, \omega') + \int_{\xi}^{\zeta} (f_{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + f_{\omega'} \frac{\partial \omega'}{\partial \xi}) dx, \quad (56)$$

przyczem w pierwszym składniku argumentami są

$$\zeta, \omega(\zeta, \alpha(\xi), \beta(\xi)), \omega'(\zeta, \alpha(\xi), \beta(\xi)),$$

w drugim

$$\xi, \omega(\xi, \alpha(\xi), \beta(\xi)), \omega'(\xi, \alpha(\xi), \beta(\xi)),$$

i wreszcie, symbole $\frac{\partial \omega}{\partial \xi}$ i $\frac{\partial \omega'}{\partial \xi}$ oznaczają funkcje

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \omega_{\alpha} \alpha' + \omega_{\beta} \beta', \quad \frac{\partial \omega'}{\partial \xi} = \omega'_{\alpha} \alpha' + \omega'_{\beta} \beta'. \quad (57)$$

Całkując przez części drugi wyraz podcałkowy, stojący po prawej stronie równości (56), i pamiętając, że $\omega(x, \alpha, \beta)$ jest całką równania Eulera, znajdziemy

$$I'(\xi) = f \frac{d\zeta}{d\xi} \Big|_{\xi}^{\zeta} + f_{\omega'} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \Big|_{\xi}^{\zeta} - f \Big|_{\xi}^{\xi} - f_{\omega'} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \Big|_{\xi}^{\xi}. \quad (58)$$

Łatwo zauważyć, że suma ostatnich dwóch wyrazów równa się zeru, ponieważ z (54) mamy

$$\omega'(\xi) + \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \tau'(\xi),$$

a więc suma ostatnich dwóch wyrazów da się przepisać w postaci

$$f(\xi, \omega(\xi), \omega'(\xi)) + (\tau'(\xi) - \omega'(\xi)) f_{\omega'}(\xi, \omega(\xi), \omega'(\xi)),$$

zaś otrzymane wyrażenie równa się zeru, gdyż krzywa $y = \tau(x)$ przecina transwersalnie rodzinę (53).

Ze związku (55) z łatwością otrzymamy

$$\omega'(\zeta) \frac{d\zeta}{d\xi} + \frac{\partial \omega(\zeta)}{\partial \xi} = \tau'(\zeta) \frac{d\zeta}{d\xi}. \quad (59)$$

Określając stąd wartość $\frac{\partial \omega(\zeta)}{\partial \xi}$ i podstawiając ją do (58) otrzymamy

$$I'(\xi) = [f(\zeta, \omega, \omega') + (\tau'(\zeta) - \omega'(\zeta)) f_{\omega'}(\zeta, \omega, \omega')] \frac{d\zeta}{d\xi}. \quad (60)$$

Kładąc tu $\xi = \xi_0$, a więc $\zeta = \zeta_0$, i, pamiętając, że krzywa $y = \tau(x)$ przecina transwersalnie krzywą ekstremalną

$$y = \varphi(x) = \omega(x, \alpha(\xi_0), \beta(\xi_0)),$$

dostajemy, jak tego i należało oczekiwać,

$$I'(\xi_0) = 0.$$

Ta ostatnia równość jest pierwszym warunkiem istnienia ekstremum.

Przejdziemy do obliczenia $I''(\xi_0)$.

Różniczkując (60) względem ξ , łatwo znajdziemy

$$\begin{aligned}
 I''(\xi) = & [f_{\zeta}(\zeta) + \omega'(\zeta) f_{\omega}(\zeta) + \tau''(\zeta) f_{\omega'}(\zeta) + (\tau'(\zeta) - \omega'(\zeta)) (f_{\omega'\zeta}(\zeta) + \\
 & + \omega'(\zeta) f_{\omega'\omega}(\zeta) + \omega''(\zeta) f_{\omega'\omega'}(\zeta))] \left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right)^2 + [f_{\omega}(\zeta) \frac{\partial \omega(\zeta)}{\partial \xi} + \\
 & + (\tau'(\zeta) - \omega'(\zeta)) (f_{\omega'\omega}(\zeta) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + f_{\omega'\omega'}(\zeta) \frac{\partial \omega'}{\partial \xi})] \frac{d\zeta}{d\xi} + \\
 & + [f(\zeta) + (\tau'(\zeta) - \omega'(\zeta)) f_{\omega'}(\zeta)] \frac{d^2 \zeta}{d\xi^2}. \quad (61)
 \end{aligned}$$

W tym wzorze, dla krótkości, $f_{\zeta}(\zeta)$, $f_{\omega'\zeta}(\zeta)$ oznaczają funkcje $f_{\zeta}(\zeta, \omega(\zeta, \alpha(\xi), \beta(\xi))$, $\omega'(\zeta, \alpha(\xi), \beta(\xi))$, $f_{\omega'\zeta}(\zeta, \omega(\zeta, \alpha(\xi), \beta(\xi))$, $\omega'(\zeta, \alpha(\xi), \beta(\xi))$. Prócz tego, jak zwykle, symbole $\frac{\partial \omega(\zeta)}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \omega'(\zeta)}{\partial \xi}$ oznaczają odpowiednio funkcje $\omega_{\alpha} \alpha'(\xi) + \omega_{\beta} \beta'(\xi)$, $\omega'_{\alpha} \alpha'(\xi) + \omega'_{\beta} \beta'(\xi)$.

Dla obliczenia $\frac{\partial \omega(\zeta)}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \omega'(\zeta)}{\partial \xi}$, $\frac{d\zeta}{d\xi}$ dla $\xi = \xi_0$, możemy skorzystać z równań

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \omega(\xi)}{\partial \xi} &= \gamma'(\xi) - \omega'(\xi), \\
 \frac{d}{d\xi} [f(\xi) + (\gamma'(\xi) - \omega'(\xi)) f_{\omega'}(\xi)] &= 0,
 \end{aligned}$$

z których można określić $\alpha'(\xi)$ i $\beta'(\xi)$.

Wprowadzając znakowanie, podane w § 11, łatwo znajdziemy

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \omega(\zeta)}{\partial \xi} \right)_{\substack{\xi=\xi_0 \\ \zeta=\zeta_0}} &= - \frac{u_3(\zeta_0)}{(\gamma'(\xi_0) - \omega'(\xi_0)) R(\xi_0) u_1(\xi_0)} \\
 \left(\frac{\partial \omega'(\zeta)}{\partial \xi} \right)_{\substack{\xi=\xi_0 \\ \zeta=\zeta_0}} &= - \frac{u'_3(\zeta_0)}{(\gamma'(\xi_0) - \omega'(\xi_0)) R(\xi_0) u_1(\xi_0)}, \quad (62)
 \end{aligned}$$

a więc

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_0} = - \frac{u_3(\zeta_0)}{[\tau'(\zeta_0) - \omega'(\zeta_0)] [\gamma'(\xi_0) - \omega'(\xi_0)] R(\xi_0) u_1(\xi_0)}. \quad (63)$$

Kładąc w (61) $\xi = \xi_0$ i pamiętając, że wskutek warunku transwersalności

$$f(\zeta_0) + (\tau'(\zeta_0) - \omega'(\zeta_0)) f_{\omega'}(\zeta_0) = 0$$

i że na zasadzie (59)

$$\frac{\partial \omega(\zeta)}{\partial \xi} = (\tau'(\zeta) - \omega'(\zeta)) \frac{d\zeta}{d\xi},$$

dostaniemy

$$I''(\xi_0) = -\lambda_\tau(\zeta_0) \left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right)^2_{\xi=\xi_0} + (\tau'(\zeta) - \omega'(\zeta)) R(\zeta) \left(\frac{\partial \omega'(\zeta)}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0} \quad (64)$$

gdzie $\lambda_\tau(\zeta)$ jest funkcją analogiczną do funkcji (22), w której tylko $\gamma(\zeta)$ zostało zastąpione przez $\tau(\zeta)$.

Teraz już, podstawiając do (64) wartości, wzięte z (62) i (63), znajdziemy bez trudności, że

$$I''(\xi_0) = \frac{-u_3(\zeta_0) [\lambda_\tau(\zeta_0) u_3(\zeta_0) - R(\zeta_0) (\tau'(\zeta_0) - \omega'(\zeta_0))^2 u'_3(\zeta)]}{R^2(\zeta_0) [\tau'(\zeta_0) - \omega'(\zeta_0)]^2 [\gamma'(\xi_0) - \omega'(\xi_0)]^2 u_1^2(\xi_0)}. \quad (65)$$

Z ostatniego wyrażenia widać, że ponieważ $u_3(\zeta_0) \neq 0$, $I''(\xi_0)$ może być równe zero tylko wtedy, gdy

$$\lambda_\tau(\zeta_0) u_3(\zeta_0) - R(\zeta_0) [\tau'(\zeta_0) - \omega'(\zeta_0)]^2 u'_3(\zeta_0) = 0.$$

22. Postaramy się zbadać bliżej ten warunek. Z (25), pamiętając, że

$$u_2(\xi_0) = 0, \quad u'_2(\xi_0) = -u_1(\xi_0), \quad u'_1(\xi_0) = 0,$$

znajdujemy

$$u_3(\xi_0) = -R(\xi_0) [\gamma'(\xi_0) - \omega'(\xi_0)]^2 u_1(\xi_0),$$

$$u'_3(\xi_0) = -\lambda_\gamma(\xi_0) u_1(\xi_0),$$

a więc mamy tożsamościowo

$$\lambda_\gamma(\xi_0) u_3(\xi_0) - R(\xi_0) [\gamma'(\xi_0) - \omega'(\xi_0)]^2 u'_3(\xi_0) = 0. \quad (66)$$

Przypomnijmy sobie, że $u_3(x)$ jest całką równania Jacobi'ego, przyjmującą wartość zero dla odciętej pierwszego punktu sprzężonego z prawej strony z krzywą $y = \gamma(x)$ i leżącego na krzywej $y = \omega(x, \alpha_0, \beta_0)$, oczywiście, jeżeli ten punkt istnieje.

Oznaczmy teraz przez $v_3(x)$ całkę równania Jacobi'ego będącą

w takim stosunku do krzywej $y = \tau(x)$, w jakim $u_3(x)$ jest do krzywej $y = \gamma(x)$ t. j.

$$v_3(x) = \lambda_\tau(\zeta_0) v_2(x) - R(\zeta_0) [\tau'(\zeta_0) - \omega'(\zeta_0)]^2 v_1(x),$$

przyczem $v_1(x)$ i $v_2(x)$ są całkami równania Jacobi'ego, posiadającymi własności

$$v'_1(\zeta_0) = 0, \quad v_2(\zeta_0) = 0, \quad v'_2(\zeta_0) = -v_1(\zeta_0).$$

Wówczas całka $v_3(x)$ będzie spełniać tożsamość analogiczną do tożsamości (66), a mianowicie:

$$\lambda_\tau(\zeta_0) v_3(\zeta_0) - R(\zeta_0) [\tau'(\zeta_0) - \omega'(\zeta_0)]^2 v'_3(\zeta_0) = 0. \quad (67)$$

Przypuśćmy wreszcie, że $I''(\xi_0) = 0$; jak widzieliśmy wyżej, może to zachodzić tylko wtedy, gdy

$$\lambda_\tau(\zeta_0) u_3(\zeta_0) - R(\zeta_0) [\tau'(\zeta_0) - \omega'(\zeta_0)]^2 u'_3(\zeta_0) = 0.$$

Porównując tą równość z równością (67), otrzymujemy

$$R(\zeta_0) [\tau'(\zeta_0) - \omega'(\zeta_0)]^2 [v_3(\zeta_0) u'_3(\zeta_0) - u_3(\zeta_0) v'_3(\zeta_0)] = 0. \quad (68)$$

Ponieważ z założenia wielkości $R(\zeta_0)$ i $\tau'(\zeta_0) - \omega'(\zeta_0)$ są różne od zera, przeto z (68) wnioskujemy, że

$$v_3(\zeta_0) u'_3(\zeta_0) - u_3(\zeta_0) v'_3(\zeta_0) = 0.$$

Ostatnia równość, jak to wynika z twierdzenia Abela, może zachodzić tylko wtedy, gdy całki u_3 i v_3 równania Jacobi'ego są zależne, t. j. różnią się tylko stałym czynnikiem. Zatem z naszego przypuszczenia, że

$$I''(\xi_0) = 0,$$

wynika, że odcięte punktów sprzężonych z krzywymi $y = \gamma(x)$ oraz $y = \tau(x)$, określają się z jednego i tego samego równania

$$u_3(x) = 0,$$

inaczej mówiąc, $I''(\xi_0)$ znika tylko wtedy, gdy punkty sprzężone z krzywymi $y = \gamma(x)$ i $y = \tau(x)$ i leżące na krzywej ekstremalnej $y = \omega(x, \alpha_0, \beta_0)$, pokrywają się. Stąd wynika, że

jeżeli są spełnione: warunek Eulera, uogólnione warunki Jacobi'ego, warunek Blissa, warunek dostateczny Weierstrassa i jeżeli przytem wielkości: $R(\xi_0)$, $R(\zeta_0)$, $\gamma'(\xi_0) - \omega'(\xi_0)$, $\tau'(\zeta_0) - \omega'(\zeta_0)$, są różne od zera, wówczas funkcja $I(\xi)$ posiada ekstremum dla $\xi = \xi_0$, a więc krzywa ekstremalna $y = \omega(x, \alpha_0, \beta_0)$ daje ekstremum całki I w rozpatrywanym obszarze funkcyjnym Y .

23. Jeżeli punkty, sprzężone z krzywami $y = \gamma(x)$ i $y = \tau(x)$, pokrywają się, wówczas, jak już wiemy, $I''(\xi_0) = 0$, a ponieważ warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienie ekstremum całki I w polu E jest istnienie ekstremum funkcji $I(\xi)$, przeto, zakładając, że ta ostatnia funkcja posiada pochodne dowolnie wysokiego rzędu, co, oczywiście, nakłada pewne ograniczenia na funkcję podcałkową $f(x, y, y')$ oraz na funkcje $\gamma(x)$ i $\tau(x)$, dochodzimy do wniosku, że warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienie ekstremum funkcji $I(\xi)$ dla $\xi = \xi_0$ jest, aby pierwsza pochodna funkcji $I(\xi)$, nieznikająca dla $\xi = \xi_0$, była rzędu parzystego. Nie będziemy się jednak zatrzymywali nad rozpatrywaniem wynikających stąd warunków.

Również nie będziemy rozpatrywali dalszych warunków istnienia ekstremum całki I , gdy końce rozważanych krzywych leżą w pewnych obszarach.

WAŻNIEJSZE OMYŁKI DRUKU.

str.:	wiersz:	zamiast:	ma być:
6	7 od góry	I	1
10	13 " "	określone	określonym
10	22 " "	$\frac{a}{dx}$	$\frac{d}{dx}$
13	3 od dołu	istnienie	istnienia
21	2 " "	$\frac{a}{dx}f$	$\frac{d}{dx}f$
27	19 od góry	południkami	południkiem MP
32	9 " "	$2 s k_n \omega_{n-1}$	$2 s k_n \omega$
32	2 od dołu	$p^{n-2}(x)$	$p_{n-2}(x)$
35	9, 11 i 12 od dołu	$4 k \omega$	$4 s k \omega$
48	we wzorze (43)	$\psi(\xi) = \phi(\xi)$	$\psi(\xi) = \omega(\xi)$
51	2 od góry	$\frac{d}{dx} \frac{\bar{y}' n_1}{\sqrt{1+y'^2}}$	$\frac{d}{dx} \frac{\bar{y}' n_1}{\sqrt{1+\bar{y}'^2}}$
53	14 " "	$C^{(1)}$	$C^{(0)}$
61	4 od dołu	R, R', Q i P	R, R', Q, Q' i P
63	10 " "	$\frac{\int_{\alpha}^{\beta} y'^2 dx}{\int_{\alpha}^{\beta} y^2 dx} > \frac{\pi^2}{(\beta - \alpha)^2}$	$\frac{\int_{\alpha}^{\beta} y'^2 dx}{\int_{\alpha}^{\beta} y^2 dx} \geq \frac{\pi^2}{(\beta - \alpha)^2}$
64	7 od góry	$\int_{\alpha}^{\beta} \omega^2 \phi z w^2 dx$	$\int_{\alpha}^{\beta} \omega^2 \phi z^2 w^2 dx$
64	2 i 3 od dołu	dodatnią	nieujemną
65	8 od dołu	$z'' = z(x, y)$	$z = z(x, y)$
71	4 od góry	$ \omega'(x) A_1$	$ \omega'(x) < A_1$

str.:	wiersz:	zamiast:	ma być:
71	11 od góry	$N \omega^2$	$N \omega'^2$
76	13 " "	$y = (x, \alpha)$	$y = \psi(x, \alpha)$
78	11 " "	$\psi(\alpha_1, \alpha + \delta)$	$\psi(x_1, \alpha + \delta)$
90	1 " "	(27)	(26)
90	10 od dołu	(27)	(26)
91	1 " "	$y' = 0$	$y' = p$
92	4 od góry	na początku wiersza postawić 4	
92	4 od dołu	całkę,	całkę (1),
100	5 od góry	warunków	warunków koniecznych
120	1 " "	$\left(\frac{\partial \omega(\xi, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \xi} \right)_{\xi = \xi_0}$	$\left(\frac{\partial \omega(\xi, \alpha, \beta)}{\partial \xi} \right)_{\xi = \xi_0}$
120	19 " "	$\left(\frac{\partial \omega(\xi, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \xi} \right)_{\xi = \xi_0}$	$\left(\frac{\partial \omega(\xi, \alpha, \beta)}{\partial \xi} \right)_{\xi = \xi_0}$
125	1 od dołu	$f_{\omega'}(x', \omega(x), \omega'(x))$	$f_{\omega'}(x, \omega(x), \omega'(x))$
128	wzór (39)	$y = (x, \alpha(\xi), \beta(\xi))$	$y = \omega(x, \alpha(\xi), \beta(\xi))$

SPIS TREŚCI.

	Str.
Wstęp	1—10
Rozdział I. Warunek Eulera-Lagrange'a	11—28
Rozdział II. Rozwiązania nieciągłe	29—51
Rozdział III. Pewne własności całki	
$\int_a^b (Py^2 + 2Qyy' + Ry'^2) dx.$	
Twierdzenia Jacobi'ego, Legendre'a, Sturma	52—65
Rozdział IV. Warunki Legendre'a i Jacobi'ego	66—87
Rozdział V. Warunek Weierstrassa. Warunki dostateczne	88—101
Rozdział VI. Najprostsze zagadnienie rachunku warjacyjnego w wypadku zmiennych punktów końcowych	102—144
