

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

JÓZEF ZAWADA

**WYBRANE
ZAGADNIENIA
Z PODSTAW
METROLOGII**



JÓZEF ZAWADA - WYBRANE ZAGADNIENIA Z PODSTAW METROLOGII * NR 1054

ŁÓDŹ 2002

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

JÓZEF ZAWADA

**WYBRANE ZAGADNIENIA
Z PODSTAW METROLOGII**

(wydanie drugie, zmienione i rozszerzone)

ŁÓDŹ 2002



Recenzenci: **doc. dr inż. Bogdan Meldner**
prof. dr hab. inż. Jan Szadkowski

KOMITET REDAKCYJNY
WYDAWNICTW POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

Przewodniczący: **prof. dr hab. Michał Tadeusiewicz**
Redaktor Naukowy Wydziału: **prof. dr hab. Tomasz Kapitaniak**

Projekt graficzny okładki: **dr inż. Ryszard Galczyński**

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
93-005 Łódź, ul. Wólczańska 223

ISBN 83-87198-18-8

Nakład 200 egz. Ark. wyd. 7.0. Ark. druk. 7.0. Papier offset 80 g 70x100
Druk ukończono w październiku 1997 r.
Zamówienie
Wykonano w Firmie Poligraficznej „ATOM”, Poznań, ul. Pasieka 27
Nr 920



SPIS TREŚCI

1. Wstęp	5
2. Wybrane zagadnienia teoretyczne	7
2.1. Modelowanie obiektów i zdarzeń	7
2.2. Podstawowe pojęcia metrologiczne	9
2.3. Układy wielkości. Układy jednostek. Układ SI.	20
2.4. Błędy pomiarów	28
2.4.1. Definicje i klasyfikacje błędów	28
2.4.2. Zasady szacowania wartości błędów wypadkowych	41
2.5. Ogólna charakterystyka środków pomiarowych	44
2.5.1. Klasyfikacja środków pomiarowych	44
2.5.2. Etalony	45
2.5.3. Użytkowe narzędzia pomiarowe	47
2.6. Metody pomiarowe	58
2.7. Pomiary wielokrotne	71
2.7.1. Pomiary wielokrotne – podstawy teoretyczne	71
2.7.2. Szacowanie wartości błędu przypadkowego	86
2.7.3. Szacowanie wartości błędu systematycznego	88
2.7.4. Szacowanie wartości błędu cząstkowego o charakterze przy- padkowym	89
2.7.5. Ocena celowości wielokrotnego powtarzania pomiarów	91
2.7.6. Określenie niezbędnej liczby powtórzeń	93
2.7.7. Identyfikacja wyników obciążonych błędem grubym	93
2.7.8. Opracowanie wyniku pomiaru wielokrotnego	95
2.8. Projektowanie pomiarów. Dobór metod i narzędzi pomiarowych	96
3. Ćwiczenia rachunkowe	106
3.1. Zadania przykładowe	106
3.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania	137
4. Testowe sprawdziany wiadomości	150
4.1. Sprawdzian nr 1	151
4.2. Sprawdzian nr 2	159
5. Wyniki zadań i poprawne odpowiedzi na pytania testowe	167
5.1. Wyniki zadań do samodzielnego rozwiązania	167
5.2. Poprawne odpowiedzi na pytania testowe	170
6. Literatura	171



1. W S T Ę P

„Narażeni jesteśmy na rozliczne złudzenia zmysłowe, a najlepszym środkiem przeciw temu jest mierzenie, liczenie i ważenie”

Sokrates (469 -399 p.n.e.) [11]

♦ o roli pomiarów w życiu człowieka

Metrologia to nauka o pomiarach. A pomiary, jak zauważa Erna Padelt [11], „towarzyszą człowiekowi od pierwszego do ostatniego tchnienia”. Już przy urodzeniu ustalany jest moment rozpoczęcia naszego życia, a także ciężar i długość naszego ciała. Później odmierzają nam objętość lub masę podawanych pokarmów, za pomocą termometru lekarskiego sprawdzają ciepłotę ciała, a za pomocą termometru pokojowego - temperaturę pomieszczenia. Jeszcze później sami zaczynamy mierzyć. Czynnością metrologiczną jest każde spojrzenie na zegarek. Pomiary są nierozłącznie związane z większością dokonywanych przez nas zakupów. Mierzy się ilość zużytej wody, gazu, energii elektrycznej. Mierzy się ciśnienie w oponach samochodu, jego prędkość i stopień wypełnienia zbiornika paliwa. Waży się listy i paczki, mierzy natężenie oświetlenia i poziom hałasu. W sporcie odmierza się czasy pokonania różnych dystansów, odległości skoków i rzutów. Itd., itd., itd. Mierzenie jest czynnością tak powszechną, że czasem niemal nie zdajemy sobie z niej sprawy. I trudno nie zgodzić się z autorką pracy [11], gdy stwierdza, że mierzenie stało się nieodłączną częścią ludzkiego życia, którego przebieg, choć sobie tego nie uświadamiamy, zależy w znacznym stopniu od wyników najrozmaitszych pomiarów.

♦ o celach, w jakich wykonuje się pomiary

Celem każdego pomiaru jest zdobycie pewnych informacji o właściwościach mierzonych obiektów czy zjawisk. Informacje te najczęściej są wykorzystywane do:

- lepszego poznania rzeczy lub zjawisk;
- sterowania różnymi procesami (kontroli przebiegu procesów);
- badania zgodności cech wyrobów z nałożonymi na te cechy wymaganiami (kontroli wyników procesów);

♦ o tym skrypcie

Celem niniejszego opracowania jest przedstawienie zagadnień dotyczących zarówno istoty pomiarów, jak i niektórych praktycznych aspektów związanych z ich przeprowadzaniem, w szczególności: projektowania pomiarów, analizy błędów, opracowania i interpretacji uzyskiwanych wyników. Zagadnienia te stanowią punkt wyjścia metrologii stosowanej - nauki o pomiarach wykonywanych w poszczególnych dziedzinach nauki i techniki. Ich znajomość będzie więc przydatna w każdych zajęciach laboratoryjnych, w części doświadczalnej pracy dyplomowej, a także, mam nadzieję, w przyszłej pracy zawodowej.



Zakres tematyczny niniejszego opracowania, a także rodzaje i układ zamieszczonych w nim treści, podporządkowane zostały programowi przedmiotu „Podstawy metrologii” realizowanemu na Wydziale Mechanicznym Politechniki Łódzkiej. Doświadczenia zdobyte w trakcie wieloletniej realizacji tego przedmiotu wskazują na to, że najlepsze wyniki nauczania można uzyskać stosując odpowiednie połączenie różnych form zajęć, w szczególności: wykładu, seminarium, ćwiczeń rachunkowych i zajęć laboratoryjnych. Z tego względu oprócz wybranych zagadnień teoretycznych (rozdział 2), które stanowią podstawę wykładu i zajęć seminaryjnych, zamieszczono w nim również materiały ułatwiające ćwiczenia rachunkowe oraz zajęcia laboratoryjne (zadania przykładowe i zadania do samodzielnego rozwiązania). Aby niniejsze opracowanie lepiej dostosować do roli pomocy dydaktycznej starano się nadać mu pewne cechy samouczka. W szczególności stworzono możliwość samooceny zdobytej wiedzy.

Do sprawdzania posiadanych wiadomości można wykorzystywać zarówno zadania do samodzielnego rozwiązywania (rozdział 3.2) jak i testy kontrolne (rozdział 4). Zadania można rozwiązywać w trakcie przerabiania poszczególnych partii materiału, sprawdzając wiedzę z aktualnie przerabianego fragmentu. Natomiast testy zaprojektowano do sprawdzenia wiadomości z całego zakresu. W celu dokonania oceny posiadanych wiadomości rozwiązania i odpowiedzi własne należy porównać z wynikami i odpowiedziami zamieszczonymi w rozdziale 5. Ocenę można uznać za pozytywną w przypadku uzyskania co najmniej 65% poprawnych odpowiedzi.

Ze względu na obszerność tematyki oraz ograniczoną objętość skryptu nie wszystkie poruszone w nim problemy mogły zostać wyjaśnione wystarczająco dokładnie. Z konieczności rezygnowano więc czasem z bardziej szczegółowego ich przedstawienia, obszerniejszych interpretacji i uzasadnień czy podania większej liczby przykładów. Zamiast tego zastosowano rozwiązanie niezbyt lubiane, lecz w tej sytuacji niestety konieczne - odesłanie do innych opracowań. Wykaz tych opracowań zawiera rozdział 6.

Niniejsze – drugie wydanie skryptu zawiera, w stosunku do pierwszego wydania, szereg istotnych różnic. Do najważniejszych zaliczyć można:

- rozszerzenie zakresu tematycznego o problematykę pomiarów wielokrotnych;
- wprowadzenie szeregu zmian (głównie w terminologii) w celu osiągnięcia większej zgodności z międzynarodowymi ustaleniami i zaleceniami przedstawionymi w [16, 17];
- zwiększenie liczby zamieszczonych przykładów i zadań;

Przedkładając uwagę Państwa niniejsze opracowanie chciałbym jednocześnie wyrazić nadzieję, że przyczyni się ono do lepszego zrozumienia istoty pomiarów, ułatwi ich projektowanie, przeprowadzanie i właściwą interpretację uzyskanych wyników.

Na zakończenie chciałbym serdecznie podziękować recenzentom tej pracy - panu doc. dr inż. Bogdanowi Meldnerowi i panu prof. dr hab. inż. Janowi Szadkowskiemu za szereg cennych uwag i sugestii, które przyczyniły się do podniesienia poziomu niniejszego opracowania.

Łódź, październik 2002 r.

Józef Zawada

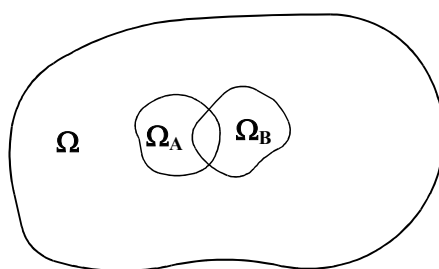


2. WYBRANE ZAGADNIENIA TEORETYCZNE

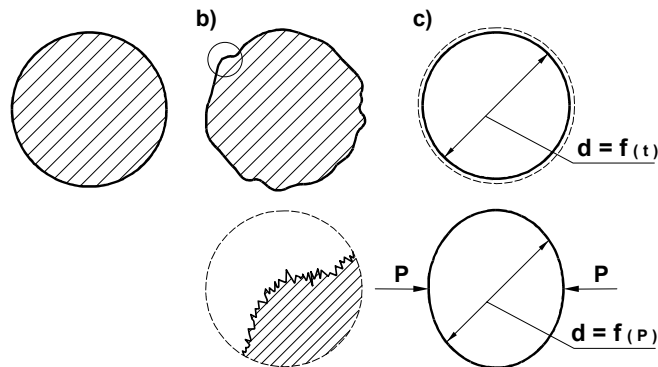
2.1. MODELOWANIE OBIEKTÓW I ZDARZEŃ

Otoczająca nas rzeczywistość jest niezwykle złożona. Z jednej strony składa się na nią praktycznie nieskończona liczba przedmiotów i zjawisk. Z drugiej - każdy element rzeczywistości jest sam w sobie również niezwykle skomplikowany, a pełny jego opis musiałby zawierać bardzo dużą ilość informacji. Zdobycie, czy choćby tylko przekazanie, tak dużej ilości informacji przekracza możliwości człowieka. Dlatego ogranicza się on przeważnie do pewnego niewielkiego podzbioru informacji najistotniejszych. Na podstawie tego podzbioru buduje w swej świadomości obraz zjawiska czy przedmiotu. Obraz ten w porównaniu ze swym rzeczywistym odpowiednikiem jest zawsze bardzo uproszczony.

Jeżeli kryterium istotności informacji o jakimś obiekcie nie będzie u poszczególnych obserwatorów tego obiektu jednakowe, to mogą oni utworzyć różne podzbiory informacji istotnych (rys. 1) i na ich podstawie zbudować różne obrazy tego samego obiektu. Przykładowo, różne obrazy odkurzacza powstaną w świadomości montera tych urządzeń, handlowca, który je sprzedaje i sprzątaczkę, która odkurzacza eksploatuje. Różnice te wynikać będą głównie z różnych punktów widzenia w/w osób. Ale i przy zbliżonym punkcie widzenia obrazy obiektów mogą być różne. Jako przykład można podać obrazy przekroju wałka mogące powstać w świadomości pracowników kontroli technicznej, którzy te wałki sprawdzają. Obrazy te przedstawiono na rys. 2.



Rys. 1. Różne podzbiory informacji istotnych Ω_A i Ω_B spowodowane brakiem wspólnego kryterium istotności informacji u obserwatorów A i B. Ω - pełny zbiór informacji o obiekcie.



Rys. 2. Różne obrazy przekroju wałka mogące powstać w świadomości pracowników kontroli technicznej

W przypadku "a" obraz wałka jest idealnym walcem o przekroju kołowym. Pracownik sprawdzający średnicę dokona pomiaru jednego wymiaru. W przypadku "b" obraz wałka jest już bardziej skomplikowany. Uwzględnia on odchyłki kształtu oraz falistość i chropowatość powierzchni. Pojęcie "średnica wałka" wymaga przy tym obrazie uściślenia, a pracownik w celu wyznaczenia jej wartości dokona prawdopodobnie pomiaru kilku wymiarów. W przypadku "c" obraz przekroju wałka jest tworem geometrycznym o kształcie zmiennym. Parametry określające ten kształt są funkcjami różnych wielkości, np. temperatury t czy siły nacisku pomiarowego P , co powinno zostać uwzględnione w trakcie opracowywania wyniku pomiaru.

W powyższym przykładzie różnice w obrazach obiektu wystąpiły mimo zbliżonego punktu widzenia poszczególnych obserwatorów. Ich przyczyną jest różny stopień przybliżenia rzeczywistości.

Występujące u poszczególnych ludzi różnice w obrazach tych samych obiektów określa się mianem subiektywności wrażeń. Subiektywność wrażeń rodzi możliwość nieporozumień i jest niedopuszczalna w naukach ścisłych. W celu jej wyeliminowania zaczęto tworzyć obrazy wzorcowe.

Utworzenie obrazu wzorcowego zwanego częściej modelem wzorcowym obiektu polega na zastąpieniu rzeczywistego obiektu (zdarzenia) określonym¹ zbiorem jego cech. Każda z tych cech musi być jednoznacznie zdefiniowana oraz musi być dla niej ustanowiony układ wartości odniesienia. Układ ten pozwala odwzorować cechę obiektu za pomocą zbioru liczbowego. Związki zachodzące pomiędzy poszczególnymi cechami obiektu mogą zostać odwzorowane za pomocą funkcji matematycznych. Z tych powodów modele wzorcowe nazywane są bardzo często modelami matematycznymi.

Proces tworzenia modeli wzorcowych rozpoczął się przed wiekami i trwa do chwili obecnej. Początkowo zajęto się zjawiskami najprostszymi jak czas, masa czy wymiary geometryczne. Obecnie liczba zdefiniowanych zjawisk dochodzi do kilku tysięcy [12], przy czym wzrostowi liczby modeli wzorcowych towarzyszy doskonalenie już istniejących (np. doskonalenie wzorców jednostek miar).

Dzięki wprowadzeniu modeli wzorcowych obiektów i zdarzeń wrażenia ludzkie zyskały na ścisłości i obiektywności, uniezależniły się w znacznym stopniu od obserwatora i stosowanych przez niego urządzeń. Stało się możliwe bardziej dokładne porównywanie podobnych zdarzeń zachodzących w różnych miejscach, w różnym czasie i obserwowanych przez różnych ludzi.

2.2. PODSTAWOWE POJĘCIA METROLOGICZNE

Zbiór pojęć metrologicznych, które można uznać za podstawowe, jest dość liczny. W niniejszym podrozdziale przedstawiono tylko te spośród nich, które mają charakter pojęć pierwotnych (wyjściowych). Do grupy tej zaliczono pojęcia wielkości mierzalnej, jednostki miary, skali pomiarowej i pomiaru.

Prezentację w/w pojęć rozpoczniemy od **wielkości mierzalnej**.

Wielkość mierzalna - każda właściwość ciała lub zjawiska, którą można wyznaczyć jakościowo i ilościowo [13].

¹ przez kryterium istotności informacji;



Jakościowe wyznaczenie właściwości uwarunkowane jest istnieniem ścisłej i jednoznacznej definicji tej właściwości. Utworzenie takiej definicji nie zawsze jest proste i oczywiste. Np. średnicę kulki posiadającej istotne odchyłki kształtu definiować można m.in. jako:

- średnicę idealnej kulki opisanej na rzeczywistej;
- średnicę idealnej kulki o tej samej co rzeczywista objętości;
- średnią odległość przeciwnych punktów powierzchni obliczoną na podstawie kilku pomiarów dokonanych w ściśle określonych kierunkach;

Mimo iż powyższe definicje dotyczą tej samej właściwości to jednak tworzą różne jej modele i mogą istotnie wpłynąć zarówno na przyjęty sposób pomiaru jak i na jego wynik.

Ilościowe wyznaczenie właściwości wymaga, aby:

- rozważana właściwość posiadała układ wartości odniesienia;
- istniała możliwość eksperymentalnego porównywania ze sobą różnych obiektów pod względem tej właściwości;

Mierzalność nie ma charakteru obiektywnego, tzn. nie zależy wyłącznie od właściwości, której dotyczy. O tym, czy dana właściwość jest wielkością mierzalną, czy nie, decyduje w dużym stopniu aktualny poziom nauki i techniki. Na przykład jeszcze nie tak dawno w grupie właściwości, których nie można zmierzyć, takich jak ból, radość, zapach czy wrażenia estetyczne, wymieniano inteligencję. Rozwój badań w tej dziedzinie, powstanie standardowych testów oceny i liczne ich zastosowania wykazały, że teza o niemierzalności inteligencji jest co najmniej dyskusyjna.

Pojęcia wielkość mierzalna można używać zarówno w odniesieniu do konkretnego, pojedynczego obiektu jak i w odniesieniu do całego zbioru obiektów. Wielkość mierzalna odniesiona do konkretnego obiektu jest nazywana **wielkością określoną**, natomiast użyta w odniesieniu do zbioru obiektów - **wielkością ogólną**. Jako przykład wielkości określonej służyć może długość danego pręta czy oporność elektryczna wskazanego przewodu, a jako przykłady wielkości ogólnych - długość, masa czy czas. Wielkości określone stanowią szczególne przypadki odpowiadających im wielkości ogólnych. Każdej z nich przypisuje się pewną wartość, zwaną dalej wartością rzeczywistą, która wynika z relacji zachodzących pomiędzy obiektami. Wynikałoby stąd, że wielkość w znaczeniu ogólnym należy interpretować jako zbiór hipotetycznie możliwych wartości wielkości określonych.



Wielkości ogólne nazywane są często wielkościami fizycznymi, a o ile nie budzi to nieporozumień, po prostu wielkościami. Liczba wielkości fizycznych jest praktycznie nieograniczona, a pomiędzy poszczególnymi wielkościami występują pewne, dość istotne różnice. Wyróżnia się np. wielkości addytywne i nieaddytywne, ekstensywne i intensywne, analogowe i dyskretne czy statyczne i dynamiczne.

Mówimy, że wielkość jest **addytywna** jeżeli jej wartość odpowiadająca całemu obiektowi równa jest sumie wartości odpowiadających poszczególnym częściom tego obiektu przy dowolnym jego podziale. Przykładowo, objętość całej bryły równa jest sumie objętości części, na które bryłę tę można podzielić. Jako przykłady innych wielkości addytywnych służyć mogą masa, długość czy energia. Wielkości nie posiadające tej właściwości nazywane są **wielkościami nieaddytywnymi**. Jako przykłady wielkości nieaddytywnych wymienić można temperaturę, twardość czy lepkość.

Do **wielkości ekstensywnych** zaliczane są te, których wartości są proporcjonalne do ilości materii obiektu (np. masa, objętość czy energia cieplna). Natomiast **wielkości intensywne** to te, których wartość od ilości materii obiektu nie zależy (np. ciśnienie, przewodność czy gęstość).

Wielkość nazywamy **analogową**, gdy wszystkie hipotetycznie możliwe wartości odpowiadających jej wielkości określonych tworzą zbiór ciągły (odcinek na osi wartości). Jeżeli natomiast wielkości określone mogą przyjmować tylko niektóre wartości (pojedyncze punkty na osi wartości) to wielkość taką określa się mianem **dyskretnej**. Jako przykłady wielkości analogowych wymienić można długość, objętość czy masę, a jako przykłady wielkości dyskretnych - ładunek elektryczny wyrażany liczbą elektronów, natężenie promieniowania korpuskularnego wyrażane liczbą cząstek czy wielkość produkcji określaną liczbą wyprodukowanych detali.

Już w starożytności wytworzyło się przekonanie¹, że każda wielkość określona z upływem czasu zmienia swoją wartość. Zmiany zachodzące w wartościach wielkości są jednak bardzo różne, od niewielkich i bardzo powolnych poczynając na dużych i bardzo szybkich kończąc. Z tego względu użytecznym w praktyce okazał się podział wielkości na statyczne i dynamiczne.

¹ jego wyrazem było m.in. słynne "panta rhei" Heraklita z Efezu;



Wielkość statyczna to wielkość, której zmiany wartości można uznać za nieistotne (z punktu widzenia celu prowadzonych rozważań). Konsekwencją uznania wielkości za statyczną jest przyjęcie założenia, że w rozpatrywanym okresie czasu jej wartość nie ulega żadnym zmianom, że jest po prostu stała ($x = \text{const}$). Natomiast w przypadku, gdy zmiany wartości wielkości są istotne, to określana jest ona mianem **wielkości dynamicznej**. Jako przykłady wielkości statycznych wymienia się masę ciała stałego czy powierzchnię gruntu, a jako przykłady wielkości dynamicznych - prędkość w ruchu zmiennym czy natężenie prądu przemiennego [2].

Podział wielkości na statyczne i dynamiczne nie ma charakteru obiektywnego, tj. nie zależy wyłącznie od samych wielkości. W pewnym stopniu zależy on również od celu prowadzonych rozważań i w zależności od tego celu dana wielkość raz może być zaliczona do jednej, a raz do drugiej grupy.

Jak już wspomniano wcześniej, każda wielkość określona posiada swoją wartość, która wynika z relacji zachodzących pomiędzy odpowiadającym jej obiektem a innymi obiektami. Wartość tą ustala się w drodze eksperymentalnego porównywania obiektów.

Jednym z warunków wyznaczenia wartości wielkości określonej jest istnienie układu wartości odniesienia. Postać tego układu oraz sposób jego wykorzystania zależy od rodzaju wielkości. Dla wielkości addytywnych wystarczy tylko jedna wartość odniesienia. Rolę tę pełni **jednostka miary**.

Jednostką miary danej wielkości nazywa się ściśle określoną wartość tej wielkości, której w drodze umowy nadano wartość liczbową równą jedności.

Określenie jednostki miary musi zapewnić jednoznaczne, powtarzalne i możliwie najdokładniejsze jej odtwarzanie. Zgodnie z tym określeniem wykonywane są obiekty odtwarzające wartość jednostki. Noszą one nazwę **wzorców tej jednostki**.

Z definicji wielkości addytywnych wynika, że obiekt uzyskany z połączenia dwóch wzorców jednostki będzie odtwarzał wartość wielkości równą dwu jednostkom, zaś podział wzorca jednostki na dwa obiekty równoważne pozwoli uzyskać obiekty odtwarzające wartość równą połowie jednostki. Przez odpowiedni podział i łączenie

można zatem uzyskać dowolny zbiór wartości odniesienia i odpowiadający mu zbiór obiektów wzorcowych.

Dzięki wprowadzeniu jednostki miary wartość każdej wielkości addytywnej można zapisać w postaci iloczynu

$$A_i = \{ A_i \} \cdot [A] \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

gdzie:

A_i - wartość wielkości określonej (i - wyróżnik obiektu);
 $\{A_i\}$ - wartość liczbowa tej wielkości;
 $[A]$ - jednostka miary tej wielkości;

Przykłady:

długość $L = 15,2$ metra, napięcie elektryczne $U = 18$ woltów czy okres czasu $T = 14$ dni

Z zależności (1) wynika, że jednostka miary umożliwia odwzorowanie wielkości za pomocą zbioru liczbowego. Funkcja odwzorowująca jest postaci:

$$\{A\} = \frac{A}{[A]} \quad (2)$$

gdzie:

A - dowolna wartość wielkości;
 $\{A\}$ - liczba odpowiadająca tej wartości;
 $[A]$ - jednostka miary;

Zbiór liczbowy¹ odwzorowujący wielkość mierzalną nosi nazwę **skali pomiarowej**. Skala utworzona przy pomocy funkcji określonej zależnością (2) nosi nazwę **skali pomiarowej addytywnej**. Poza nią istnieją jeszcze inne rodzaje skal jak np. skala pomiarowa interwałowa czy skala pomiarowa klasyfikacyjna².

Skala pomiarowa interwałowa, związana jest z pojęciem tzw. **interwału**.

Interwalem (przyrostem, odstępem) nazywa się różnicę dwóch wartości tej samej wielkości.

¹ w ogólnym przypadku może to być zbiór dowolnych symboli: liter, nazw, liczb, itp.

² termin ten jest odpowiednikiem angielskiego „ranking scale”, tłumaczonego również jako „skala uszeregowana” [15] lub „skala porządkowa” [9, 24];



Z punktu widzenia skalowania istotną cechą interwału jest jego addytywność. Szczególnie ważne jest przy tym, że addytywność ta nie zależy od charakteru wielkości, czyli że addytywne mogą być również interwały wielkości nieaddytywnych.

Jeżeli interwał wielkości nieaddytywnej ma sens fizyczny, to można dla niego utworzyć jednostkę miary. Wartość interwału określać będzie wtedy zależność:

$$\Delta A = \{\Delta A\} \cdot [\Delta A] \quad (3)$$

gdzie:

- ΔA - wartość interwału;
- $\{\Delta A\}$ - wartość liczbową interwału;
- $[\Delta A]$ - jednostka interwału przyjmowana najczęściej również za jednostkę wielkości ($[\Delta A] \equiv [A]$);

Równanie (3) wraz z równaniem definicyjnym interwału ($\Delta A = A_2 - A_1$) stanowią podstawę formowania **skali interwałowej**. Do utworzenia tej skali potrzebny jest układ wartości odniesienia zawierający dwa elementy. Mogą nimi być:

- wartość odniesienia A_0 (zwana wartością początkową) wraz z odpowiadającą jej wartością liczbową (najczęściej 0) i jednostka miary interwału $[A]$, lub
- dwie wartości odniesienia A_1 i A_2 wraz z odpowiadającymi im wartościami liczbowymi $\{A_1\}$ i $\{A_2\}$;

W przypadku pierwszym funkcja odwzorowująca wielkość jest postaci:

$$\{A\} = \{A_0\} + \frac{A - A_0}{[A]} \quad (4)$$

w drugim

$$\{A\} = \{A_1\} + \frac{A - A_1}{A_2 - A_1} \cdot (\{A_2\} - \{A_1\}) \quad (5)$$

Jako przykłady wielkości nieaddytywnych, których interwał ma sens fizyczny wymienić można czas, potencjał elektryczny, energię potencjalną czy współrzędną punktu na prostej. Interwały tych wielkości to odpowiednio - odstęp czasu, różnica potencjałów (napięcie), praca i przesunięcie (długość).

Jako przykład skali pomiarowej interwałowej służyć może skala temperatur Celsjusza. Oparta została ona na dwóch wartościach odniesienia - temperaturze



zamarzania wody, której przypisano wartość liczbową równą zero i temperaturze wrzenia wody, której przypisano wartość liczbową równą 100. Do porównywania temperatur obiektów wykorzystano zjawisko rozszerzalności cieplnej cieczy. Przyjęto mianowicie, że dwie temperatury t_1 i t_2 są sobie równoważne, jeżeli długość słupa cieczy jest w tych temperaturach jednakowa. W ten sposób skala temperatur została przez Celsjusza zamieniona w łatwiejszą do obserwacji skalę przyrostów długości pod wpływem temperatury. Wartość liczbową temperatury ustalano z zależności:

$$\{t\} = \frac{h - h_0}{h_{100} - h_0} \cdot 100 \quad (6)$$

gdzie:

$\{t\}$ - wartość liczbowa temperatury;

h - długość słupa cieczy w temperaturze T ;

h_0 - długość słupa cieczy w temperaturze 0°C ;

h_{100} - długość słupa cieczy w temperaturze 100°C ;

Zależność (6) umożliwia interpolację temperatury pomiędzy wartościami odniesienia, a także ekstrapolację na zewnątrz tych wartości. Jak łatwo zauważyć stanowi ona szczególny przypadek podanej wcześniej zależności (5).

Ze względu na pewną dowolność w przyjmowaniu wartości odniesienia skale interwałowe tej samej wielkości mogą mieć wiele różnych postaci. I tak w przypadku temperatury, poza wspomnianą już skalą Celsjusza funkcjonowały również inne rodzaje skal, np.: skala Fahrenheita czy skala Reaumura. Podobna sytuacja występuje w przypadku skal interwałowych innych wielkości, np. w przypadku skali współrzędnej czasu. Poza najpowszechniej używanym kalendarzem gregoriańskim używane są, lub były, inne, np. kalendarz egipski, kalendarz juliański, kalendarz muzułmański czy kalendarz Majów¹

Jeżeli interwał wielkości nie ma sensu fizycznego i niemożliwe jest utworzenie dla niego jednostki miary, ale istnieje doświadczenie umożliwiające porządkowanie obiektów pod względem wartości tej wielkości, to dla wielkości tej można utworzyć skalę pomiarową klasyfikacyjną.

¹ wg [23] najdokładniejszy z dotychczas używanych kalendarzy świata



W celu utworzenia **skali klasyfikacyjnej** należy określić zbiór obiektów wzorcowych dobranych tak, by wartości reprezentowanych przez te obiekty wielkości określonych tworzyły odpowiedni zakres. Następnie za pomocą wspomnianego wyżej doświadczenia ustawia się te obiekty w szereg uporządkowany wg wartości ich wielkości. Poszczególnym wzorcom przyporządkowuje się liczby, przy czym porządek liczb winien odpowiadać porządkowi w szeregu. Liczby te, najczęściej naturalne, określone są mianem stopni skali.

Jako przykład skali pomiarowej klasyfikacyjnej wymienić można skalę twardości Mohsa. Skala ta oparta jest na dziesięciu minerałach, które ustawiono w szereg w taki sposób, że każdy poprzedzający może być zarysowany następnym sam nie mogąc go zarysować. Poszczególnym minerałom przypisano liczby naturalne od 1 do 10. Skala ta wygląda następująco:

talk - 1	ortoklaz - 6
gips - 2	kwarc - 7
kalcyt - 3	topaz - 8
fluoryt - 4	korund - 9
apatyt - 5	diament - 10

W przypadku niektórych wielkości określenie obiektów wzorcowych potrzebnych do utworzenia skali klasyfikacyjnej jest trudne lub wręcz niemożliwe. W przypadkach takich stany wzorcowe wielkości definiuje się w sposób pośredni (np. poprzez określenie skutków, które stany te wywołują). W ten sposób utworzone zostały m.in. skala klasyfikacyjna siły wiatru (tzw. skala Beauforta), skala klasyfikacyjna natężenia trzęsienia ziemi (tzw. skala Mercallego-Sieberga) czy skala skażenia powietrza atmosferycznego dwutlenkiem węgla (tzw. skala porostowa).

Bardziej szczegółowe informacje na temat skal pomiarowych zawarte są w [7], [9] i [15].

Ostatnim z definiowanych w niniejszym podrozdziale pojęć metrologicznych jest **pomiar**.

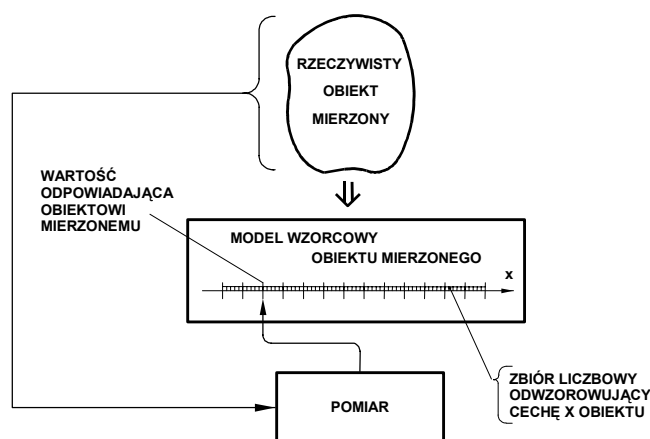
Pomiarem nazywamy zbiór operacji mających na celu wyznaczenie wartości wielkości określonej;



Pomiar składa się z dość licznej sekwencji czynności, które można pogrupować w pewne operacje. W szczególności wyróżnić należy:

- określenie wielkości mierzonej (polega na utworzeniu bądź przyjęciu już istniejącego modelu matematycznego tej wielkości; model ten tworzony jest w oparciu o posiadaną wiedzę dotyczącą mierzonego obiektu z uwzględnieniem wymagań wynikających z celu, w jakim chcemy wyznaczyć wartość wielkości);
- zaprojektowanie pomiaru (dobór metody i narzędzi pomiarowych);
- przeprowadzenie pomiaru (doprowadzenie obiektu mierzonego i ewentualnie jego otoczenia do stanu określonego przez przyjęty model matematyczny wielkości mierzonej, testowanie i ew. regulacja układu pomiarowego, doprowadzenie wielkości mierzonej do układu pomiarowego, odczyty bądź rejestracja wskazań);
- opracowanie uzyskanych informacji (w szczególności ustalenie wartości, którą można przypisać mierzonej wielkości i miary charakteryzującej dokładność przeprowadzonego pomiaru);

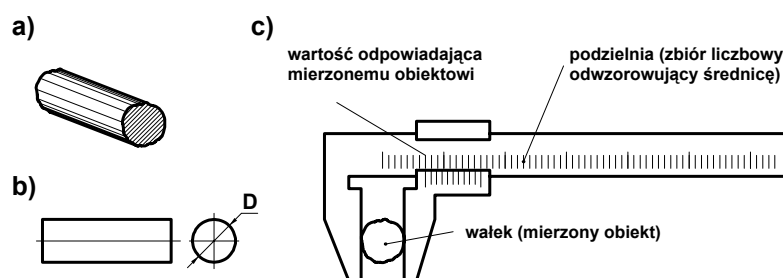
Należy podkreślić fakt, że każdy pomiar ma charakter empiryczny, tzn. opiera się na przeprowadzeniu pewnego eksperymentu. Warunkiem poprawnego przeprowadzenia tego eksperymentu jest uprzednie utworzenie modelu wzorcowego obiektu mierzonego.



Rys. 3. Istota pomiaru

Celem pomiaru jest obiektywne przyporządkowanie wartości określonej właściwości obiektu mierzonego. Istotę zależności pomiędzy obiektem, jego modelem i pomiarem przedstawiono na rys. 3.

Dla łatwiejszego zrozumienia zależności pokazanych na rys. 3 rozważmy przypadek konkretnego pomiaru. Niech przykładowo będzie nim pokazany na rys. 4 pomiar średnicy wałeczka za pomocą suwmiarki. W przypadku tym obiekt rzeczywisty (rys. 4a) jest bryłą materiału o kształcie zbliżonym do geometrycznego walca. Model wzorcowy (rys. 4b) jest idealnym walcem. Rozpatrywaną cechą jest średnica tego walca. Średnica to szczególny przypadek długości, wielkości ściśle zdefiniowanej i posiadającej swoją skalę wartości. W analizowanym przykładzie materialnym wyrazem tej skali jest podzielnia suwmiarki. Pomiar sprowadza się do odpowiedniego ustawienia szczęk suwmiarki względem mierzonego wałka. Po ustawieniu szczęk zespół kres noniusza wskazuje na podzielni (zbiór liczbowy odwzorowujący długość) wartość (element zbioru liczbowego) odpowiadającą mierzonemu wałkowi (obiekt).

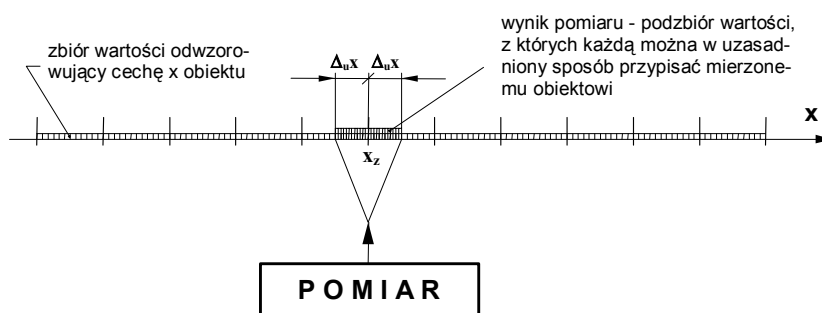


Rys. 4. Pomiar średnicy wałeczka za pomocą suwmiarki: a) wałek; b) model wzorcowy wałka; c) pomiar wałka;

W bardziej ogólnych rozważaniach zamiast pojedynczego obiektu występuje przeważnie zbiór obiektów. Może być to zbiór skończony (np. zbiór wałków wykonanych przez tokarza w ciągu tygodnia) lub zbiór nieskończony (np. zbiór wszystkich możliwych wyników określonego procesu technologicznego). Każdy z obiektów, niezależnie od ich liczności, musi jednak mieć cechę o wartości zawartej wewnątrz odniesieniowej skali wartości, w przeciwnym razie pomiar obiektu jest niemożliwy.

Różne przyczyny jak np.: niepewtarzalność wskazań przyrządów, ograniczona rozdzielczość wzroku obserwatorów czy przypadkowe zakłócenia zewnętrzne sprawiają, że pomiar nie pozwala na jednoznaczne ustalenie, która z wartości zbioru liczbowego

modelu odpowiada mierzonemu obiektowi. Umożliwia on jedynie wyznaczenie pewnego podzbioru wartości, z których każdą można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej. Podzbiór ten, charakteryzujący się odpowiednio dużym prawdopodobieństwem, że zawarta jest w nim rzeczywista wartość wielkości mierzonej, nosi nazwę **wyniku pomiaru**¹ (rys. 5).



Rys. 5. Wynik pomiaru – graficzna interpretacja pojęcia

Wartość środkową podzbioru (x_z) nazywać będziemy wartością zaobserwowaną², a połowę różnicy wartości granicznych podzbioru ($\Delta_u x$) – niepewnością pomiaru.

Wynik pomiaru zapisuje się najczęściej w postaci:

$$x_i = x_z \pm \Delta_u x \quad (7)$$

lub

$$a \leq x_i \leq b \quad (8)$$

gdzie:

- x_i - wynik pomiaru wielkości x i-tego obiektu;
- $a = x_z - \Delta_u x$ - kres dolny zbioru wartości prawdopodobnych;
- $b = x_z + \Delta_u x$ - kres górny tego zbioru;

Istotnym uzupełnieniem wyniku pomiaru mogą okazać się informacje dotyczące czasu przeprowadzenia pomiaru, warunków w jakich był on przeprowadzony oraz środków, które w tym celu wykorzystano.

¹ w bardziej zaawansowanych rozważaniach przyjmuje się, że wynik pomiaru jest zmienną losową, a zadanie pomiarowe sprowadza się do możliwie najlepszego oszacowania postaci i parametrów rozkładu prawdopodobieństwa tej zmiennej;

² wielu autorów, w tym autorzy prac [16 i 17] zamiast „wartość zaobserwowana” używa określenia „wynik pomiaru” przyznając jednocześnie, że „wynik pomiaru jest pełny tylko wtedy, gdy jest podany wraz z niepewnością” [17];



2.3. UKŁADY WIELKOŚCI. UKŁADY JEDNOSTEK. UKŁAD SI.

W każdej problematyce, zarówno naukowej jak i technicznej, występuje przeważnie nie jedna, ale cały zbiór wielkości wzajemnie ze sobą powiązanych. W zależności od charakteru tych powiązań wielkości dzieli się na podstawowe i pochodne.

Wielkościami podstawowymi nazywa się te, które w danym zbiorze wielkości przyjęto za niezależne. Charakteryzują się one definicjami jakościowymi, jak np: "masa - cecha ciał przejawiająca się w ich oporze przed zmianą prędkości pod wpływem sił zewnętrznych (bezwładności) oraz oddziaływaniu tych ciał na inne ciała (grawitacji)".

Z teoretycznego punktu widzenia wielkościami podstawowymi mogą być dowolne wielkości spełniające warunek wzajemnej niezależności¹. W praktyce za wielkości podstawowe przyjmuje się wielkości najprostsze, najlepiej znane, dające się stosunkowo łatwo i dokładnie pomierzyć.

Wielkościami pochodnymi są wielkości zależne. Definiuje się je w sposób ilościowy, jako określone funkcje wielkości podstawowych lub innych, uprzednio zdefiniowanych, wielkości pochodnych. Jako przykład wielkości pochodnej może służyć gęstość masy, którą definiuje się jako "stosunek masy ciała do jego objętości". Definicja ta może zostać zapisana w postaci funkcji matematycznej

$$\rho = m / V$$

gdzie:

ρ - gęstość masy; m - masa ciała; V - objętość

Zbiór wszystkich występujących w danej dziedzinie wielkości po odpowiednim uporządkowaniu, polegającym na wyborze wielkości podstawowych i zdefiniowaniu przy ich pomocy wielkości pochodnych nosi nazwę **układu wielkości**. Jeśli dla każdej wielkości układu zostanie określona odpowiednia jednostka, to powstanie w ten sposób **układ jednostek**, przy czym jednostki wielkości podstawowych noszą nazwę **jednostek podstawowych**, a jednostki wielkości pochodnych - **jednostek pochodnych**.

¹ wzajemna niezależność zbioru wielkości ma miejsce wtedy, gdy żadnej z nich nie można określić przy pomocy pozostałych; warunek ten ogranicza znacznie liczbę wielkości podstawowych



Ponieważ wartość wielkości przyjęta za jednostkową jest kwestią umowy więc dla każdej wielkości można utworzyć w zasadzie dowolną jednostkę miary. Konsekwencją powyższego jest możliwość utworzenia dla danego układu wielkości praktycznie nieskończenie wielu różnych układów jednostek. Ta różnorodność możliwości spowodowała, że i w praktyce powstało wiele różnych układów jednostek. Np. w dziedzinie mechaniki dość powszechnie stosowane były układy zestawione w tabeli 1.

TABELA 1. Zestawienie układów jednostek miar stosowanych w dziedzinie mechaniki	
Nazwa układu	Jednostki podstawowe układu
CGS	centymetr, gram, sekunda
MKS	metr, kilogram, sekunda
techniczny	metr, kilopond (kilogram siły), sekunda
MTS	metr, tona, sekunda
angielski	jard, funt angielski, sekunda

Każda dziedzina nauki i techniki posiada swoją specyfikę. Na specyfikę tę składają się m.in.:

- zbiór wielkości charakterystycznych dla tej dziedziny;
- zakresy występujących w praktyce wartości tych wielkości;
- określone, charakterystyczne dla danej dziedziny sposoby dokonywania pomiarów (technika pomiarowa);

Występujące w praktyce różne układy jednostek miar podporządkowane były specyfice poszczególnych dziedzin i z tego względu wygodne w stosowaniu. Przykładowo jednostka ciśnienia - tor (1 mm słupa rtęci) była bardzo użyteczna przy pomiarach ciśnienia za pomocą barometrów rtęciowych, a jednostka długości - rok świetlny bardzo wygodna przy pomiarach odległości ciał niebieskich.

W miarę rozwoju nauki i techniki charakteryzującego się m.in. daleko posuniętą integracją poszczególnych dziedzin, a także w miarę rozwoju naukowej, gospodarczej i technicznej współpracy międzynarodowej (kooperacja, licencje, itp.) wygodny



wynikające z przystosowania poszczególnych układów jednostek do specyfiki dziedzin, w których je stosowano, zaczęły być niewspółmierne do trudności i strat wynikających z konieczności ciągłej zamiany jednostek. Trudności te zrodziły ideę jednego, uniwersalnego i ogólnie stosowanego układu jednostek miar. Prace nad realizacją tej idei doprowadziły do stworzenia Międzynarodowego Układu Jednostek Miar określanego w skrócie układem SI.

Układ SI opracowany został przez organy wykonawcze Konwencji Metrycznej¹. Pierwszą jego wersję² przyjęto i zalecono do stosowania na XI-ej Generalnej Konferencji Miar w 1960 r.

Najważniejszymi charakterystycznymi cechami układu SI są:

- a) powszechność;
- b) uniwersalność;
- c) spójność;
- d) zasada jednej jednostki dla każdej wielkości;

O powszechności układu świadczy grono akceptujących i stosujących go stron. Układ SI uzyskał aprobatę praktycznie na całym świecie. Został już wprowadzony, względnie jest wprowadzany do stosowania w większości krajów. Nieliczne pozostałe kraje deklarują gotowość jego wprowadzenia w możliwie bliskiej przyszłości. Istotne jest również i to, że układ SI nie posiada aktualnie żadnego liczącego się konkurenta wśród innych układów jednostek miar.

¹ Konwencja Metryczna - międzynarodowa organizacja zajmująca się głównie unifikacją jednostek miar w skali międzynarodowej. Została zawiązana przez 18 państw w 1875 r w Paryżu. Obecnie (dane na koniec 2000r) należy do niej 48 państw, w tym Polska, która przystąpiła do Konwencji w 1925 r. Głównymi organami Konwencji są: Generalna Konferencja Miar, Międzynarodowy Komitet Miar i Międzynarodowe Biuro Miar;

Bardziej szczegółowe informacje na temat Konwencji Metrycznej można znaleźć w [2], [11] i [21];

² W miarę upływu czasu układ SI podlegał różnym modyfikacjom. W niniejszym opracowaniu przedstawiono jego wersję przyjętą przez 19-ą Generalną Konferencję Miar (październik 1991r);



W Polsce jednostki układu SI zostały uznane za legalne w 1966 r. Od tego czasu zaczyna się popularyzacja i stopniowe wprowadzanie układu. Największe natężenie prowadzonych w tym zakresie prac przypadło na lata siedemdziesiąte, a za termin ich zakończenia uważa się rok 1985 [2].

Uniwersalność układu jednostek polega na możliwości stosowania tego układu w różnych dziedzinach. Twórcy układu SI przyjęli założenie, że winien się on nadawać do stosowania w każdej dziedzinie nauki, techniki i gospodarki. Konsekwencją tego założenia było włączenie w ramy układu bardzo dużej liczby najrozmaitszych wielkości fizycznych. Zdefiniowanie wszystkich tych wielkości wymagało z kolei przyjęcia dużej liczby wielkości podstawowych. W układzie SI wielkości tych jest aż siedem. Zestawiono je w tabeli 2.

TABELA 2. Wielkości podstawowe układu SI i ich jednostki			
Lp.	Wielkość podstawowa	Jednostka miary	Oznaczenie jednostki
1	Długość	metr	m
2	Masa	kilogram	kg
3	Czas	sekunda	s
4	Prąd elektryczny	amper	A
5	Temperatura termodynamiczna	kelwin	K
6	Światłość	kandela	cd
7	Liczność materii	mol	mol

Wybór wielkości zestawionych w tabeli 2 podyktowany został głównie względami praktycznymi. Z jednej strony wielkości te dobierano tak, aby przy ich pomocy dało się zdefiniować wszystkie włączone do układu wielkości pochodne, z drugiej o wyborze wielkości decydowała łatwość i dokładność, z jaką można było odtwarzać jej wartości.

Jednostki podstawowe układu SI zostały wybrane spośród znanych i wcześniej stosowanych jednostek miar. Jednym z istotniejszych praktycznych problemów okazało się odtwarzanie i przekazywanie ich wartości. Ze względu na ciągły wzrost wymagań

odnośnie dokładności, zarówno definicje jednostek jak i metody odtwarzania ich wartości ulegały w czasie różnym zmianom, stawały się coraz bardziej precyzyjne. Zarysowała się przy tym tendencja do odchodzenia od sztucznych wzorców jednostek miar i opierania definicji jednostek na niezmiennych zjawiskach natury.

Jako dobry przykład zachodzenia w/w zmian i tendencji może służyć historia jednostki długości - metra. Pierwotna definicja tej jednostki oparta została na wymiarach Ziemi - metr określono bowiem jako jedną czterdziestomilionową część długości południka ziemskiego. Ponieważ kula ziemską jako wzorec nie nadawała się do bezpośredniego stosowania, więc na podstawie wyników odpowiednich pomiarów geodezyjnych¹ utworzono wzorec zastępczy. Wzorec ten, zwany archiwalnym, był wykonany z platyny i miał postać pręta o przekroju prostokątnym, a długość jednego metra odtwarzałą wzajemną odległością swoich powierzchni czołowych [6,19]. Powtórzone po pewnym czasie i wykonane dokładniejszą metodą pomiary długości południka wykazały jednak, że pomiędzy 1/40 000 000 częścią długości południka a wartością długości odtwarzaną przez w/w wzorec występuje istotna różnica. Dylemat, co wobec tego uznać za metr - nowo poznaną wartość jednej czterdziestomilionowej części długości południka czy długość odtwarzaną przez wzorec zastępczy, rozstrzygnięto ze względów praktycznych na korzyść tego ostatniego. W ten sposób wzorec zastępczy stał się wzorcem pierwotnym (prototypem jednostki). Nowy prototyp posiadał jednak dwie istotne wady. Po pierwsze był wzorcem sztucznym, który mógł zagiąć lub ulec uszkodzeniu. Po drugie, dokładność z jaką odtwarzano przy jego pomocy długość jednego metra była niewielka (graniczną wartość błędu odtwarzania oceniano na $\pm (0,01 \div 0,02) \text{ mm}$) [6].

Potrzeba wzorca umożliwiającego wyższą dokładność odtwarzania doprowadziła do zmiany prototypu. Kolejny, przyjęty w 1889 r, odtwarzał długość jednego metra wzajemną odległością dwu kres naniesionych na wykonanym ze stopu platyny i irydu pręcie o zapewniającym dużą sztywność przekroju w kształcie litery X. I chociaż zmiana sposobu odtwarzania pozwoliła na znaczny wzrost dokładności (graniczna wartość błędu odtwarzania szacowana była w tym przypadku na $0,1 \div 0,2 \text{ } \mu\text{m}$ [6]), to jednak po pewnym

¹ pomiary wykonane w latach 1790 - 1798 dotyczyły południka przechodzącego przez Paryż, a dokładniej części tego południka rozciągającej się pomiędzy Dunkierką (płn. Francja) i Barceloną (Hiszpania) [2].



czasie i ta dokładność okazała się niewystarczająca. Dlatego też, wykorzystując możliwości jakie stworzył rozwój interferencyjnych technik pomiarowych, zmieniono ponownie definicję metra opierając ją tym razem na długości fali promieniowania elektromagnetycznego emitowanego przez określony pierwiastek w ściśle określonych warunkach. Nowa definicja¹ określała metr jako długość równą 1 650 763,73 długości rozchodzącej się w próżni fali promieniowania powstającego przy przeskoiku elektronów pomiędzy poziomami 2p a 5d w atomie kryptonu 86 i umożliwiała odtworzenie jego wartości z błędem względnym nie przekraczającym $2 \cdot 10^{-8}$. Stanowiło to dziesięciokrotny wzrost dokładności w stosunku do wzorca kreskowego. Wielokrotność długości fali (1 650 763,73) dobrano tak, by wartość metra wg nowej definicji równa była wartości odtwarzanej przez wzorzec kreskowy.

Osiągnięcia w dziedzinie dokładnych pomiarów czasu (zegary atomowe z wzorcem cezowym) oraz uznanie prędkości światła za stałą fizyczną i międzynarodowe uzgodnienie wartości tej stałej stały się przesłankami do wprowadzenia kolejnej, aktualnie obowiązującej definicji jednostki długości. Wg niej metr jest to długość drogi przebytej w próżni przez światło w czasie równym $1/299\,792\,458$ części sekundy². Definicja ta umożliwia odtworzenie wartości metra z dokładnością względną rzędu $1 \cdot 10^{-10}$. Dodatkową jej zaletą w stosunku do definicji poprzedniej jest możliwość odtwarzania wartości metra kilku różnymi sposobami [2].

Spójność układu jednostek polega na tym, że jednostka każdej wielkości pochodnej wyrażona jest za pomocą jednostek podstawowych równaniem ze współczynnikiem liczbowym równym jedności. Aby uzyskać takie równanie należy wszystkie wielkości wchodzące do wzoru definicyjnego rozważanej wielkości pochodnej wyrazić za pomocą wielkości podstawowych. Następnie zamiast symboli wielkości podstawowych należy podstawić oznaczenia ich jednostek miar, a dowolny współczynnik równania definicyjnego zastąpić jednością.

Przykłady tworzenia spójnych jednostek pochodnych zamieszczono w rozdziale 3.1 (zadania 1.5 i 1.6).

¹ definicja przyjęta przez 11-ą Generalną Konferencję Miar w 1960 r;

² definicja przyjęta przez 17-ą Generalną Konferencję Miar w 1983 r;



Jeżeli wielkość pochodna definiowana jest stosunkiem dwóch wielkości posiadających takie same jednostki, to jej jednostka jest równa jedności. Wielkości tego rodzaju określa się mianem bezwymiarowych. Jako przykłady wielkości bezwymiarowych służyć mogą kąt płaski i bryłowy, sprawność, współczynnik załamania czy względna przenikalność elektryczna. We wszystkich pozostałych przypadkach jednostka pochodna jest określoną funkcją jednostek podstawowych. Funkcję tę określa się mianem **wymiaru jednostki**¹. Wymiar jednostki bywa czasem określany poprzez jej nazwę.

Nazwy jednostek układu SI można podzielić na proste i złożone. Do nazw prostych zalicza się nazwy własne, które posiadają wszystkie jednostki podstawowe, nazwy własne podniesione do potęgi (np. metr sześcienny (m^3)) oraz nazwy specjalne nadane niektórym jednostkom pochodnym.

Nazwy złożone mają postać wyrażeń utworzonych z nazw jednostek prostych, np.: metr na kwadrat sekundy (m/s^2), metr sześcienny na kilogram (m^3/kg), wat na metr i kelwin ($\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$). Można je utworzyć dla jednostek wszystkich wielkości pochodnych na podstawie równań definicyjnych tych wielkości.

Niechęć do posługiwania się długimi nazwami złożonymi sprawiła, że niektórym jednostkom pochodnym zostały nadane nazwy i oznaczenia specjalne. Przykładowo jednostkę siły, której nazwa złożona brzmiała kilogram razy metr na kwadrat sekundy, nazwano niutonem (N), jednostkę ciśnienia - niuton na metr kwadratowy - paskalem (Pa), jednostkę pracy - niutonometr - dżulem (J), itp.

Aktualnie nazwy i oznaczenia specjalne posiada dwadzieścia jednostek pochodnych [2]. Do ich nadawania upoważnione są wyłącznie Generalne Konferencje Miar.

Zasada, aby każda wielkość układu SI posiadała **tylko jedną jednostkę**, stwarzała pewne trudności w przypadkach wyrażania wartości wielkości bardzo dużych, albo bardzo małych w porównaniu z tą jednostką. Aby uniknąć kłopotów związanych z używaniem bardzo wielkich lub bardzo małych liczb twórcy układu zaproponowali stosowanie dziesiętnych wielokrotności i podwielokrotności przyjętych jednostek.

¹ W tym samym znaczeniu używa się również pojęcia **wymiar wielkości**



Nazwa krotności każdej jednostki składa się z nazwy tej jednostki i określającego krotność przedrostka. Podobnie jest w przypadku oznaczeń - oznaczenie krotności jednostki składa się z oznaczenia jednostki przed którym bezpośrednio umieszcza się oznaczenie przedrostka. Krotności jednostek, odpowiadające im przedrostki i oznaczenia tych przedrostków zestawiono w tabeli 3.

TABELA 3. Stosowane w układzie SI wielokrotności i podwielokrotności jednostek miar					
Wielo- krotność	Przedrostek	Oznaczenie przedrostka	Podwielo- krotność	Przedrostek	Oznaczenie przedrostka
10^1	deka-	da	10^{-1}	decy-	d
10^2	hekto-	h	10^{-2}	centy-	c
10^3	kilo-	k	10^{-3}	mili-	m
10^6	mega-	M	10^{-6}	mikro-	μ
10^9	giga-	G	10^{-9}	nano-	n
10^{12}	tera-	T	10^{-12}	piko-	p
10^{15}	peta-	P	10^{-15}	femto-	f
10^{18}	eksa-	E	10^{-18}	atto-	a
10^{21}	zetta-	Z	10^{-21}	zepto-	z
10^{24}	jotta-	Y	10^{-24}	jokto-	y

Zastosowanie przedrostków z tabeli 3 pozwala na wyrażenie każdej wartości wielkości za pomocą liczb z przedziału 1 - 1000. Przykładowo wartość mocy równą 23 700 000 000 W można wyrazić jako 23,7 GW, a wartość pojemności elektrycznej 0,000 000 000 25 F jako 250 pF. W razie potrzeby można wykorzystać inne przedziały o tej samej rozpiętości wartości, np. przedział 0,1 - 100 czy 0,001 - 1.

Szczególną uwagę należy zwracać przy tworzeniu dziesiętnych wielokrotności i podwielokrotności jednostki masy - kilograma. Ponieważ nazwa tej jednostki zawiera już przedrostek kilo-, więc żeby nie stosować podwójnych przedrostków, dziesiętne krotności jednostek masy tworzy się przez dołączanie przedrostków do słowa gram (oznaczenie g). Np. masa 1000 kg = 1 000 000 g = 1 Mg, a masa 0,000 000 45 kg = 0,000 45 g = 450 μ g.



Zasada jednej jednostki dla każdej wielkości nie sprawdziła się w pełni w praktyce. Podczas wprowadzania układu SI do nauki, techniki i gospodarki okazało się, że nie zawsze jego jednostki są w stanie zastąpić jednostki wcześniej stosowane.

Przykładowo naturalnych jednostek czasu jak dzień, tydzień, miesiąc czy rok nie dało się zastąpić dziesiętnymi wielokrotnościami sekundy, a używana w konstrukcji i technologii naturalna jednostka kąta - kąt pełny, okazała się znacznie bardziej wygodna aniżeli wynikający z zasady spójności radian.

Aby zasady układu SI nie kolidowały ze względami praktycznymi zdecydowano się na dopuszczenie do stosowania wybranych jednostek nie należących do tego układu. Określa się je mianem **legalnych jednostek pozaukładowych**. Przykłady takich jednostek zawiera tabela nr 4.

2.4. BŁĘDY POMIARÓW

2.4.1. Definicje i klasyfikacje błędów

Jak już wspomniano w rozdziale 2.2 celem każdego pomiaru jest wyznaczenie wartości odpowiadającej mierzonemu obiektowi. Wartości tej, którą określa się mianem **wartości rzeczywistej**, nie udaje się jednak ustalić jednoznacznie. Pomiary pozwalają jedynie na określenie pewnego zbioru wartości, takiego, że z odpowiednio dużym prawdopodobieństwem słuszności można założyć, iż zawarta jest w nim nieznana wartość rzeczywista. Zbiór ten (patrz rys. 5) nosi nazwę **wyniku pomiaru**.

Ponieważ posługiwanie się zbiorem wartości jest dość kłopotliwe, więc w praktyce wynik pomiaru reprezentowany jest za pomocą dwóch pojedynczych wartości. Pierwsza z nich, najczęściej wartość środkowa zbioru, określa miejsce grupowania się wartości stanowiących wynik pomiaru, druga stanowi miarę rozproszenia tych wartości, czyli określa tzw. **niepewność** wyniku pomiaru.

Pierwsza z w/w wartości nazywana bywa często również **wynikiem pomiaru**, choć przeważnie z zastrzeżeniem, że „całkowite wyrażenie wyniku pomiaru zawiera dane dotyczące niepewności pomiaru” [16] lub „wynik pomiaru jest pełny tylko wtedy, gdy jest podany wraz z niepewnością” [17].

W niniejszym opracowaniu pojęcie „wynik pomiaru” oznaczać będzie zawsze zbiór wartości, natomiast wartość charakteryzującą położenie tego zbioru nazywać będziemy **wartością zaobserwowaną**.



TABELA 4. Niektóre legalne jednostki pozaukładowe [8]			
Wielkość	Jednostka miary		Wartość wyrażona w jednostkach SI
	Nazwa	Oznaczenie	
długość	jedn. astron. długości parsek	UA, AU pc	149,6 Gm 30,857 Pm
masa	tona	t	1 Mg
czas	minuta godzina doba dzień tydzień miesiąc kwartał rok	min h d	60 s 3,6 ks 86,4 ks tzw. jednostki kalendarzowe - „ - - „ - - „ -
temperatura	stopień Celsjusza	°C	Interwał 1°C = 1K
kąt płaski	stopień minuta sekunda grad	—° —' —" — ^g	$\pi/180$ rad $\pi/10800$ rad $\pi/648000$ rad $\pi/200$ rad
powierzchnia	hektar	h	10 000 m ²
objętość	litr	l	10 ⁻³ m ³
prędkość liniowa	kilometr na godzinę	km/h	0,277(7) m/s
prędkość obrotowa	obrót na sekundę obrót na minutę	obr/s obr/min	2· π rad/s $\pi/30$ rad/s
energia	elektronowolt kilowatogodzina	eV kWh	~ 160,219 zJ 3,6 MJ

Prawie zawsze wartość zaobserwowana i wartość rzeczywista różnią się między sobą. Z różnicą tą związane są pojęcia dokładności pomiaru i błędu pomiaru.

Dokładność pomiaru to pojęcie, które w sposób ogólny (jakościowy) określa stopień przybliżenia uzyskanej w rezultacie pomiaru wartości zaobserwowanej do

rzeczywistej wartości mierzonej wielkości. Pomiar, narzędzie pomiarowe czy przyjęta metoda pomiaru są tym dokładniejsze, im bardziej wartość zaobserwowana jest zbliżona do rzeczywistej wartości mierzonej wielkości.

Błędem pomiaru nazywamy różnicę pomiędzy wartością zaobserwowaną i wartością rzeczywistą mierzonej wielkości:

$$\Delta_r x = x_z - x_r \quad (9)$$

gdzie:

$\Delta_r x$ - rzeczywista wartość błędu;
 x_z - wartość zaobserwowana;
 x_r - wartość rzeczywista;

Ponieważ rzeczywista wartość mierzonej wielkości pozostaje zawsze nieznana, więc nieznana jest również rzeczywista wartość błędu. Można jednak z praktycznie wystarczającym przybliżeniem wyznaczyć granice, w których się ona mieści. Granice te noszą nazwę **błędów granicznych** pomiaru.

$$\Delta_{\min} x \leq \Delta_r x \leq \Delta_{\max} x \quad (10)$$

gdzie:

$\Delta_{\min} x$, $\Delta_{\max} x$ - błędy graniczne pomiaru;

jeżeli $\Delta_{\max} x = -\Delta_{\min} x = \Delta x$, wtedy:

$$-\Delta x \leq \Delta_r x \leq \Delta x \quad (11)$$

W celu wyznaczenia wartości błędów granicznych stosuje się różne sposoby. Najważniejsze z nich to:

a) porównawczo-statystyczne wykorzystanie danych o błędach pomiarów wykonywanych w podobnych warunkach, przy zastosowaniu tych samych metod i sprzętu pomiarowego; wartość błędu określa się w tym przypadku w oparciu o własne doświadczenie, dane katalogowe czy znaną klasę niedokładności przyrządu. Sposób ten jest ogólnie przyjęty w pomiarach warsztatowych;

b) doświadczalne wyznaczanie błędu pomiaru. Polega na ponownym zmierzeniu uprzednio mierzonej wielkości inną, znacznie dokładniejszą metodą i przyjęciu wartości zaobserwowanej tego pomiaru jako odpowiednika wartości rzeczywistej. Zaleca się kilkakrotne powtórzenie pomiarów i zastosowanie do obróbki uzyskanych wyników



aparatu statystyki matematycznej. Sposób ten stosowany jest w niektórych pomiarach laboratoryjnych, zwłaszcza w przypadku stosowania nowych metod pomiarowych;

c) analityczno-doświadczalne wyznaczanie błędu. Polega na analitycznym ustaleniu przyczyn błędu, wyodrębnieniu błędów składowych i określeniu ich wartości granicznych obliczeniowo lub doświadczalnie. Następnie określa się wartość błędu wypadkowego poprzez zsumowanie błędów składowych z uwzględnieniem zasad rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Sposób ten ze względu na swoją złożoność i pracochłonność jest stosowany tylko w niektórych pomiarach laboratoryjnych, np.: przy metrologicznej ocenie nowych metod i sprzętu pomiarowego czy przy planowaniu nowych, nietypowych prac pomiarowych.

Na wynik pomiaru, a zatem i na jego błąd, wpływa wiele czynników. Ich różnorodność sprawia, że charakter błędu pomiaru jest złożony. Z tego względu w różnego rodzaju analizach traktuje się go często jako superpozycję (wypadkową) różnego rodzaju błędów cząstkowych.

Błędem cząstkowym nazywać będziemy składową błąd pomiaru pochodzącą z określonego źródła, spowodowaną określoną przyczyną czy pochodzącą z określonej operacji. Można go zdefiniować jako różnicę pomiędzy wynikiem uzyskanym a wynikiem, który zostałby uzyskany, gdyby przyczyna błędu cząstkowego nie wystąpiła. Np. błąd odtwarzania wzorca stanowiący składową błąd pomiaru w pomiarach metodą różnicową czy zerową (patrz rozdział 3.6) jest różnicą pomiędzy wartością rzeczywiście odtwarzaną przez wzorzec, a wartością, którą wzorzec powinien odtwarzać czyli wartością nominalną wzorca. Podobnie błąd opracowania wyniku spowodowany przyjęciem przybliżonej metody obliczeń jest różnicą pomiędzy uzyskanym wynikiem tych obliczeń a wynikiem obliczeń dokładnych.

Błędy cząstkowe mają charakter przechodni. Oznacza to, że suma błędów cząstkowych odpowiada sumie przyczyn powstania każdego z nich i może być traktowana jako błąd cząstkowy wyższego rzędu. I odwrotnie, jeśli przyczynę powstania błędu cząstkowego można rozłożyć na bardziej elementarne składowe, to błędy spowodowane poszczególnymi składowymi stanowiąc będą błędy cząstkowe niższego rzędu.

W odróżnieniu od błędu pomiaru, który jest spowodowany wieloma bardzo różnymi przyczynami, poszczególne błędy cząstkowe, jako skutki ściśle określonej przyczyny (lub znacznie ograniczonej liczby przyczyn) mają charakter bardziej



jednorodny, w związku z czym łatwiej poddają się różnego rodzaju analizom i łatwiej wyznaczyć można ich wartości graniczne.

Już w dotychczasowych rozważaniach pojęcie „błąd” było używane w różnych znaczeniach. Była mowa o błędzie pomiaru, błędach granicznych czy błędach cząstkowych. W dalszej części opracowania będziemy mieć do czynienia jeszcze z wieloma innymi rodzajami (i postaciami) błędów. Dlatego w celu ułatwienia dalszych rozważań zostanie teraz przedstawiona ich klasyfikacja.

Przy klasyfikacji błędów wykorzystywane są różne kryteria. Do najczęściej stosowanych należą:

- postać, w jakiej błąd jest podawany;
- charakter (natura) błędu;
- operacja (etap procesu pomiarowego), w trakcie której błąd powstaje;
- warunki pomiaru;
- przyczyna powstania błędu;

Ze względu na postać, w jakiej błędy są podawane dzieli się je na bezwzględne i względne.

Błąd bezwzględny jest to różnica pomiędzy wartością uzyskaną a wartością, która zostałaby uzyskana, gdyby przyczyna błędu nie wystąpiła

$$\Delta x = x - x_e \quad (12)$$

gdzie:

Δx - błąd bezwzględny

x - wartość uzyskana;

x_e - wartość, która zostałaby uzyskana, gdyby przyczyna błędu nie wystąpiła;

Błąd bezwzględny wyrażany jest w tych samych jednostkach co wielkość mierzona.

Błąd względny jest to błąd w postaci bezwymiarowej, określony przy pomocy stosunku:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_e} \cong \frac{\Delta x}{x} \quad (13)$$

gdzie δx oznacza błąd względny.

Błąd względny podaje się najczęściej w procentach. Jego zastosowanie umożliwia porównywanie dokładności pomiarów różnych wielkości fizycznych.



Charakter (naturę) błędu określa jego zachowanie przy kolejnym powtarzaniu doświadczenia pomiarowego. Ze względu na to kryterium wyróżnia się:

- a) błędy systematyczne;
- b) błędy przypadkowe;
- c) błędy grube (nadmierne);

Błędem systematycznym jest błąd, którego wartość, przy wielokrotnym powtarzaniu pomiarów tej samej wielkości określonej w warunkach praktycznie niezmiennych, jest stała lub zmienia się wg ściśle określonego prawa wraz ze zmianą tych warunków.

Jako przykłady błędów systematycznych wymienić można błędy spowodowane zjawiskiem rozszerzalności cieplnej, błędy wynikające z ugięć sprężystych mierzonych elementów pod wpływem nacisku pomiarowego, błędy spowodowane odchyłkami położenia kres podzielnicy przyrządu, itp.

Ze względu na deterministyczny charakter błędów systematycznych ich wartości można często obliczyć bądź wyznaczyć doświadczalnie. W takich przypadkach błędy te nie muszą obciążać wyniku pomiaru ponieważ można się od nich uwolnić poprzez odpowiednią korektę wartości zaobserwowanej.

Błąd przypadkowy to błąd, którego wartość, przy wielokrotnym powtarzaniu pomiarów tej samej wielkości określonej w warunkach praktycznie niezmiennych, zmienia się w sposób nieprzewidywany na skutek różnych zjawisk przypadkowych.

Jako przykłady błędów przypadkowych wymienić można błąd kwantowania (zaokrąglania) wartości odczytywanej z przyrządu, błędy wynikające z luzów przyrządu, błąd paralaksy, itp.

Wartość błędu przypadkowego charakteryzuje się poprzez podanie wartości granicznych, wewnątrz których z odpowiednio dużym prawdopodobieństwem jest ona zawarta¹.

¹ przy bardziej zaawansowanych technikach analizy zakłada się, że błąd przypadkowy jest zmienną losową o określonym rozkładzie statystycznym (najczęściej normalnym) i charakteryzuje się go za pomocą parametrów tego rozkładu



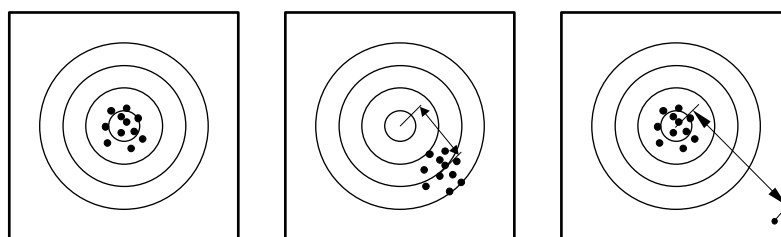
Należy podkreślić, że błędy, zarówno systematyczne jak i przypadkowe, są z procesem pomiaru nierozłącznie związane, a ich występowanie nie zależy od poprawności przeprowadzenia tego procesu. Z poprawnością przeprowadzenia procesu pomiaru związane są natomiast błędy grube.

Błędy grube (nadmierne) są to błędy wynikające z nieprawidłowego wykonania pomiaru. Ich przyczynami najczęściej są:

- nieujawnione pomyłki przy odczycie (zapisie) wskazań przyrządu;
- niezauważone wystąpienie nieprzewidzianych zjawisk zakłócających istotnie przebieg pomiaru;
- usterki w układzie pomiarowym;
- niewłaściwe zastosowanie narzędzi lub metod pomiarowych

Wynik obarczony błędem grubym jest niewiarygodny i nie powinien być brany pod uwagę. Niestety, wykrycie błędu grubego umożliwiają najczęściej tylko pomiary wielokrotne.

Dobry przykład, przystępnie objaśniający naturę błędu systematycznego, przypadkowego i grubego zamieszczono w [3]. W przykładzie tym odpowiednikiem czynności pomiarowych jest strzelanie do tarczy. Środek tej tarczy symbolizuje rzeczywistą wartość wielkości mierzonej, a odległość przestrzeliny od środka - błąd pomiaru. Na pierwszej tarczy (rys 6) przestrzeliny zagęszczone wokół jej środka symbolizują wyniki pomiarów obarczone wyłącznie błędami przypadkowymi. Na drugiej przesunięcie środka rozrzutu przestrzelin względem środka tarczy ilustruje błąd systematyczny (spowodowany np. źle wyregulowanym urządzeniem celowniczym). Na trzeciej przestrzelina w dolnym prawym rogu symbolizuje wynik pomiaru obarczony błędem grubym (spowodowanym istotnym zakłóceniem, które wystąpiło w chwili oddawania tego właśnie strzału).

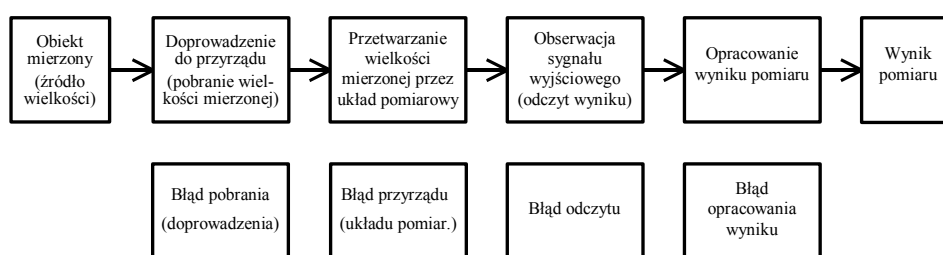


Rys. 6. Ilustracja błędów: a) przypadkowych; b) systematycznego; c) grubego

Jak już wspomniano wyznaczanie wartości wielkości mierzonej odbywa się poprzez realizację sekwencji czynności, które można pogrupować w pewne operacje. Operacje te, nazywane też niekiedy etapami procesu pomiarowego, stanowią kolejne kryterium podziału błędów. Przy klasyfikacji błędów bierze się najczęściej pod uwagę następujące operacje:

- pobieranie wielkości mierzonej (przekazanie wielkości mierzonej z obiektu do układu pomiarowego);
- przetworzenie wielkości mierzonej przez układ pomiarowy;
- obserwacja sygnału wyjściowego układu pomiarowego (np. odczyt wskazania przyrządu, obserwacja zachowania detektora, itp.) i jego rejestracja;
- opracowanie wyniku pomiaru;

Punktem wyjścia dla uzyskania informacji o wartości wielkości jest obiekt mierzony. Zanim informacja ta osiągnie postać wyniku muszą zostać zrealizowane wszystkie etapy procesu pomiarowego. Ilustruje to schemat zamieszczony na rys. 7



Rys. 7. Schemat przebiegu informacji o wartości wielkości mierzonej

W trakcie poszczególnych operacji informacja o wartości wielkości mierzonej ulega różnym zakłóceniom. Pociąga to za sobą powstanie określonych błędów. W zależności od operacji, w trakcie której powstały, błędy te dzieli się na:

- a) błędy pobrania (doprowadzenia);
- b) błędy przyrządu (układu pomiarowego);
- c) błędy odczytu;
- d) błędy opracowania wyniku pomiaru;

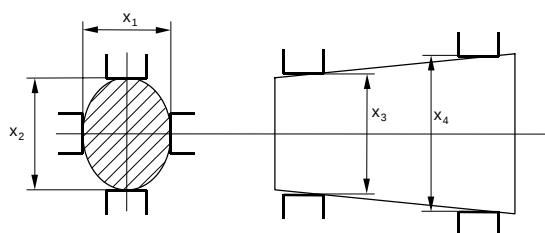
Jako przykłady **błędów pobrania** wymienić można:

- błędy wynikające z niemożności osiągnięcia idealnego kontaktu pomiędzy obiektem mierzonym a układem pomiarowym (np. z powodu zanieczyszczenia powierzchni

czy ograniczonej dokładności ustawienia końcówek pomiarowych przy pomiarach wielkości geometrycznych);

- błędy wynikające z oddziaływania przyrządu na obiekt mierzony, np. odkształcenia sprężyste mierzonych elementów pod wpływem nacisku pomiarowego, zmiana natężenia prądu w obwodzie po podłączeniu amperomierza, itp.);

Do błędów pobrania zalicza się niekiedy również błędy wynikające z operacji wcześniejszych, tj. modelowania obiektu mierzonego i zaprojektowania pomiaru (doboru metody i narzędzi pomiarowych). Jako przykład można podać błędy spowodowane rozbieżnościami pomiędzy modelem wzorcowym a obiektem rzeczywistym (przykładowo: jeśli model wzorcowy wałka jest idealnym walcem, a wałek rzeczywisty posiada istotne odchyłki kształtu, to wynik pobrania zależy od miejsca przyłożenia końcówek pomiarowych, rys. 8).



Rys. 8. Wpływ usytuowania końcówek pomiarowych na wynik „pobrania” średnicy wałka ($x_1 \neq x_2$; $x_3 \neq x_4$)

Jako przykłady **błędów przyrządu** służyć mogą:

- błędy wzorcowania (błędy położenia kres podziałki wynikające z błędów użytego wzorca, ograniczonej dokładności procesu wzorcowania oraz ograniczonej dokładności wykonania podziałki);
- błąd histerezy (różnica wskazań przyrządu przy pomiarze tej samej wartości wielkości, uzyskanych raz poprzez zwiększanie, a raz poprzez zmniejszanie wskazań);
- błędy wynikające z wpływu warunków otoczenia na charakterystykę przyrządu (np. wskazania przyrządu mogą zależeć od temperatury czy ciśnienia);
- błędy wynikające ze zmiennych sił tarcia pomiędzy ruchomymi elementami przyrządu oraz luzów w układzie mechanicznym, np. niepowtarzalność wskazań;

Błędy odczytu wynikają najczęściej z zaokrągleń (błąd kwantowania), ograniczonych możliwości oceny położenia wskazówki pomiędzy kresami (błąd interpolacji) czy też patrzenia na element wskazujący pod niewłaściwym kątem (błąd paralaksy).

Przyczyną błędu odczytu może być również pomyłka; bardzo często jest to wtedy błąd gruby.

Błędy opracowania wyniku mają miejsce w przypadku korzystania z uproszczonych zależności pomiędzy wielkościami mierzonymi (ma to miejsce zwłaszcza przy pomiarach metodami pośrednimi) oraz przybliżonych danych odnośnie właściwości fizycznych mierzonych obiektów czy narzędzi pomiarowych (np. współczynników rozszerzalności cieplnej przy obliczaniu błędów temperaturowych, modułów sprężystości przy obliczaniu odkształceń sprężystych, gęstości mas, przyspieszenia ziemskiego w miejscu pomiaru, itp.).

Ze względu na warunki pomiaru błędy dzieli się na:

- a) podstawowe;
- b) dodatkowe;

Błąd podstawowy jest to błąd popełniony przez przyrząd przy pomiarze w warunkach odniesienia.

Warunkami odniesienia nazywa się zespół umownie przyjętych wartości wielkości fizycznych, które mają często istotny wpływ na wyniki pomiarów. Do wielkości tych zalicza się przede wszystkim temperaturę - wartość odniesienia 293,15 K (20°C), ciśnienie - wartość odniesienia 101,325 kPa (760 mm Hg) i wilgotność - wartość odniesienia 55 %.

Błędem dodatkowym nazywa się zmianę wskazań przyrządu spowodowaną różnicą pomiędzy warunkami pomiaru a warunkami odniesienia.

Z definicji błędu dodatkowego wynika, że jego wartość określona jest zależnością:

$$\Delta_d x = x - x_o \quad (14)$$

gdzie:

- $\Delta_d x$ - wartość błędu dodatkowego;
- x - wynik pomiaru w warunkach różnych od warunków odniesienia;
- x_o - wynik tego samego pomiaru w warunkach odniesienia;



Z definicji błędu pomiaru wynika, że:

$$x = x_r + \Delta x \quad \text{oraz} \quad (15)$$

$$x_o = x_r + \Delta_o x \quad (16)$$

gdzie:

x_r - rzeczywista wartość wielkości mierzonej;

Δx - błąd pomiaru w warunkach różnych od warunków odniesienia;

$\Delta_o x$ - błąd pomiaru w warunkach odniesienia;

uwzględniając (15) i (16) w (14) otrzymuje się:

$$\Delta_d x = \Delta x - \Delta_o x ; \quad \text{skąd ostatecznie:}$$

$$\Delta x = \Delta_o x + \Delta_d x \quad (17)$$

Z zależności (17) wynika, że przy pomiarze w warunkach różnych od warunków odniesienia błąd pomiaru jest równy sumie błędu podstawowego i błędu dodatkowego.

Przyczyn powstawania błędów jest w zasadzie nieskończenie wiele, dlatego podział błędów w zależności od przyczyny ich powstania ma charakter otwarty. Jako przykłady błędów wyodrębnionych wg tego kryterium wymienić można:

- błędy interpolacji;
- błędy kwantowania;
- błędy paralaksy;
- błędy temperaturowe (odkształceń termicznych);
- błędy odkształceń sprężystych, itd, itd.

Błąd interpolacji występuje w przypadkach, gdy podczas odczytu działka elementarna podziałki jest dzielona na części. Wynika on z ograniczonych możliwości oceny położenia wskazówki pomiędzy dwoma sąsiednimi kreskami. Wg [6] można przyjąć, że w większości przypadków wartość tego błędu mieści się w granicach ± 0.1 wartości działki elementarnej.

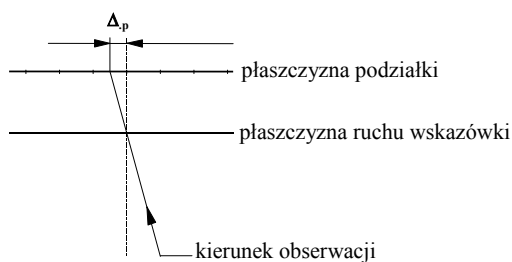
Błąd kwantowania jest to błąd wynikający z zaokrąglania wartości wskazywanej przez przyrząd pomiarowy. W przyrządach cyfrowych¹ proces zaokrąglania realizowany jest przez układ wskazujący przyrządu, a wielkość kwantu (różnicy

¹ patrz rozdział 2.5



sąsiednich wskazań) wynika z konstrukcji tego układu. W przyrządach analogowych zaokrąglania dokonuje osoba odczytująca wskazanie, a wielkość kwantu (różnicy sąsiednich odczytów) zależy od jej uznania. W praktyce wielkości kwantów wartości odczytywanych z przyrządów analogowych wynoszą 0.1, 0.2, 0.5 lub 1 wartości działki elementarnej. Można przyjąć, że wartość błędu kwantowania Δ_k nie przekracza połowy wartości kwantu k , czyli $\Delta_k \leq \pm 0,5 k$

Błąd paralaksy jest to błąd występujący wyłącznie w przyrządach analogowych i wynikający z patrzenia na element wskazujący pod niewłaściwym kątem. Błąd ten występuje wtedy, gdy płaszczyzna ruchu wskazówki (rys. 9) nie pokrywa się z płaszczyzną podziałki, a obserwator dokonuje odczytu patrząc na te płaszczyzny pod kątem różnym od 90° .



Rys. 9. Powstanie błędu paralaksy

Błędy temperaturowe powstają przy pomiarach długości i wielkości pochodnych od niej zależnych jak powierzchnia czy objętość. Spowodowane są faktem, że na skutek zjawiska rozszerzalności cieplnej wymiary liniowe obiektów są funkcjami temperatury. Przykładowo, długość L pręta określa zależność:

$$L = L_0 \cdot [1 + \alpha (t - t_0)] \quad (18)$$

gdzie:

- L - długość pręta w temperaturze t ;
- L_0 - długość pręta w temperaturze t_0 (np. w temperaturze odniesienia);
- α - współczynnik rozszerzalności liniowej materiału, z którego wykonany jest rozważany pręt;

Należy zwrócić również uwagę na fakt, że zjawisku rozszerzalności cieplnej podlega także przyrząd pomiarowy. W przypadku pomiarów długości może to być nawet

korzystne, ponieważ odkształcenia cieplne przyrządu i mierzonego przy jego pomocy obiektu mogą się częściowo kompensować.

Wartości błędów temperaturowych określa zależność:

$$\Delta_t L = L \cdot [(\alpha_p - \alpha_n) \cdot (t_n - 20^\circ \text{C}) + \alpha_p \cdot (t_p - t_n)] \quad (19)$$

gdzie:

- α_p - współczynnik rozszerzalności liniowej materiału mierzonego przedmiotu;
- α_n - współczynnik rozszerzalności liniowej materiału narzędzia pomiarowego;
- t_p - temperatura mierzonego przedmiotu;
- t_n - temperatura narzędzia pomiarowego;

Analiza powyższej zależności prowadzi do wniosku, że błąd temperaturowy może mieć dwie różne składowe. Pierwsza z nich, istotniejsza, powstaje w przypadku, gdy pomiędzy przedmiotem mierzonym a narzędziem pomiarowym wystąpi różnica temperatur. Druga, przeważnie mniej groźna, wynika z prowadzenia pomiaru w temperaturze różnej od temperatury odniesienia, a jej wartość jest proporcjonalna do różnicy wartości współczynników rozszerzalności liniowej materiałów przedmiotu i narzędzia.

W praktyce wartość pierwszej składowej ogranicza się poprzez odpowiednio długie przetrzymanie mierzonego przedmiotu w pomieszczeniu, w którym znajduje się narzędzie pomiarowe, a drugiej poprzez stabilizację temperatury w tym pomieszczeniu na poziomie zbliżonym do poziomu odniesienia.

Błędy odkształceń sprężystych. Przy pomiarach wielkości geometrycznych jest bardzo ważne, by końcówka pomiarowa przyrządu zajmowała właściwe położenie względem mierzonego przedmiotu. Jednym z warunków osiągnięcia tego celu jest odpowiednie dociśnięcie do siebie obu tych elementów. Siła tego dociśnięcia, czyli tzw. **nacisk pomiarowy** spełnia w procesie pomiaru szereg pożytecznych funkcji. W szczególności pozwala na przebicie otaczającej mierzone przedmioty cienkiej warstewki tłuszczów, umożliwia odsunięcie na bok drobnych zanieczyszczeń i likwiduje ewentualną szczelinę powietrzną na powierzchni styku. Dodatkowo nacisk pomiarowy powoduje pokonanie oporów tarcia oraz kasowanie luzów występujących w ruchomych częściach przyrządu. Niestety, poza spełnianiem w/w pożytecznych funkcji nacisk pomiarowy powoduje jeszcze odkształcenia stykających się elementów. Odkształcenia te mają charakter odkształceń sprężystych i występują najczęściej w postaci spłaszczeń lub ugięć. Powodują one powstanie kolejnego składnika błędu pomiaru - tzw. błędu odkształceń sprężystych.

Ze względu na systematyczny charakter, błędy odkształceń sprężystych można, przy dysponowaniu odpowiednim zestawem danych, obliczyć i poprzez odpowiednią korekcję wartości zaobserwowanej wyeliminować. Przykładowo, przy pomiarze średnicy kulki za pomocą mikrometru (rys. 10) wystąpi spłaszczenie, które zmniejszy mierzony wymiar. Powstały z tego powodu błąd (będzie to składnik błędu pobrania) można obliczyć z zależności¹:

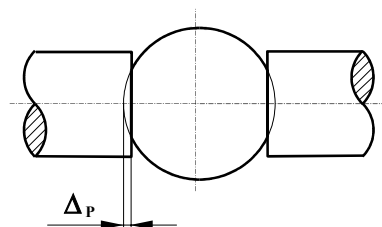
$$\Delta_{pd} = -0,415 \sqrt[3]{\frac{P^2}{d}} \quad (20)$$

gdzie:

Δ_{pd} - błąd odkształcenia sprężystego w μm ;

P - nacisk pomiarowy w N;

d - średnica kulki w mm;



Rys. 10. Przykład błędu odkształceń sprężystych

Poza naciskiem pomiarowym przyczyną powstania błędów sprężystych może być również ciężar własny mierzonych obiektów.

Bardziej szczegółowe informacje na temat błędów odkształceń sprężystych zawarte są w [6], [18] i [21].

2.4.2. Zasady szacowania wartości błędów wypadkowych

Błędem wypadkowym nazywać będziemy sumę dwu lub więcej błędów częściowych, przy założeniu, że suma tych błędów ma sens fizyczny.

Błędy częściowe sumują się zgodnie z zasadami algebry, co oznacza, że rzeczywista wartość ich sumy jest równa sumie ich wartości rzeczywistych.

¹ zależność ta, przytoczona za [6], obowiązuje w przypadku, gdy zarówno mierzony przedmiot jak i końcówka pomiarowa, wykonane są ze stali o module sprężystości wzdłużnej $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$

$$\Delta_r x = \sum_i (\Delta_{r,i} x) \quad (21)$$

gdzie:

$\Delta_r x$ – rzeczywista wartość błędu wypadkowego;

$\Delta_{r,i} x$ – rzeczywista wartość i-tego błędu cząstkowego;

Ponieważ rzeczywiste wartości błędów cząstkowych są nieznane, nie możemy obliczyć rzeczywistej wartości błędu wypadkowego w oparciu o zależność 21. Możemy jednak z praktycznie wystarczającym przybliżeniem oszacować wartości graniczne błędów cząstkowych. A znajomość wartości granicznych błędów cząstkowych pozwala na obliczenie wartości granicznych błędu wypadkowego. Zaleca się w tym celu następujące postępowanie:

- 1) dla każdego z błędów cząstkowych $\Delta_i x$ określamy jego wartości graniczne $\Delta_{\min,i} x$ i $\Delta_{\max,i} x$ (gdzie i- wyróżnik błędu cząstkowego);
- 2) każdy z błędów cząstkowych zapisujemy w postaci scentralizowanej¹:

$$\Delta_i x = \Delta_{m,i} x \pm \Delta_{u,i} x \quad (22)$$

gdzie:

$\Delta_{m,i} x$ – szacowana wartość średnia błędu cząstkowego:

$$\Delta_{m,i} x = \frac{\Delta_{\min,i} x + \Delta_{\max,i} x}{2} \quad (23)$$

$\Delta_{u,i} x$ – niepewność oszacowania wartości średniej błędu cząstkowego

$$\Delta_{u,i} x = \frac{\Delta_{\max,i} x - \Delta_{\min,i} x}{2} \quad (24)$$

- 3) obliczamy szacowaną wartość średnią błędu wypadkowego $\Delta_m x$

$$\Delta_m x = \sum_{i=1}^n (\Delta_{m,i} x) \quad (25)$$

gdzie n - ilość sumowanych błędów cząstkowych

- 4) obliczamy niepewność oszacowania wartości średniej błędu wypadkowego. Stosujemy w tym celu zależność

¹ zapis ten, niezbyt poprawny z matematycznego punktu widzenia, należy rozumieć jako:

$\Delta_i x \in (\Delta_{m,i} x - \Delta_{u,i} x, \Delta_{m,i} x + \Delta_{u,i} x)$;



$$\Delta_u x = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\Delta_{u,i} x)^2} \quad (26)$$

gdzie $\Delta_u x$ oznacza niepewność oszacowania wartości średniej błędu wypadkowego;

5) obliczamy wartości graniczne błędu wypadkowego:

$$\Delta_{\min} x = \Delta_m x - \Delta_u x \quad (27a)$$

$$\Delta_{\max} x = \Delta_m x + \Delta_u x \quad (27b)$$

i ostatecznie możemy zapisać, że wartość błędu wypadkowego:

$$\Delta x \in (\Delta_{\min} x, \Delta_{\max} x) \quad (28)$$

Podana wyżej procedura obliczania błędu wypadkowego ma charakter uproszczonego. Opiera się ona na założeniu, że poszczególne błędy cząstkowe są wzajemnie niezależne oraz że wartości graniczne tych błędów szacowano w taki sposób, aby prawdopodobieństwa zdarzeń, iż $\Delta_i x \in (\Delta_{i,\min} x, \Delta_{i,\max} x)$ były dla wszystkich błędów cząstkowych jednakowe (zbliżone). Ten sam poziom prawdopodobieństwa ma zdarzenie określone zależnością 28.

W przypadku bardziej zaawansowanych analiz zakłada się, że poszczególne błędy cząstkowe są zmiennymi losowymi o określonych rozkładach i parametrach. Obliczanie błędu wypadkowego sprowadza się do określenia rozkładu i parametrów sumy tych zmiennych przy wykorzystaniu aparatu statystyki matematycznej. Więcej informacji na ten temat można znaleźć w [17] i [22].

Błąd wypadkowy może być błędem cząstkowym wyższego rzędu lub, w przypadku uwzględnienia wszystkich przewidywanych przyczyn, całkowitym błędem pomiaru. W tym drugim przypadku szacowaną wartość średnią błędu wykorzystuje się do skorygowania wartości zaobserwowanej. Korekcy dokonuje się zgodnie z zależnością:

$$x_{z,p} = x_z - \Delta_m x \quad (29)$$

gdzie:

$x_{z,p}$ – skorygowana wartość zaobserwowana zwana najczęściej **wartością zaobserwowaną poprawną**;

x_z – nieskorygowana wartość zaobserwowana zwana najczęściej **wartością zaobserwowaną surową**;

W przypadku, gdy obliczany błąd wypadkowy jest całkowitym błędem pomiaru niepewność oszacowania jego wartości średniej jest równa niepewności pomiaru. Wynik pomiaru można wtedy zapisać w tradycyjnej postaci:

$$x_r = x_{z,p} \pm \Delta_u x \quad (30)$$



choć z matematycznego punktu widzenia bardziej poprawny jest zapis:

$$x_{z,p} - \Delta_u x \leq x_r \leq x_{z,p} + \Delta_u x \quad (31)$$

W ostatecznej postaci wyniku pomiaru wartość niepewności $\Delta_u x$ należy zaokrąglić do pierwszej cyfry znaczącej. Wartość zaobserwowana poprawna (lub wartości podawane w zależności 31) powinny być podane z tym samym co niepewność rzędem dokładności.

Uwaga!

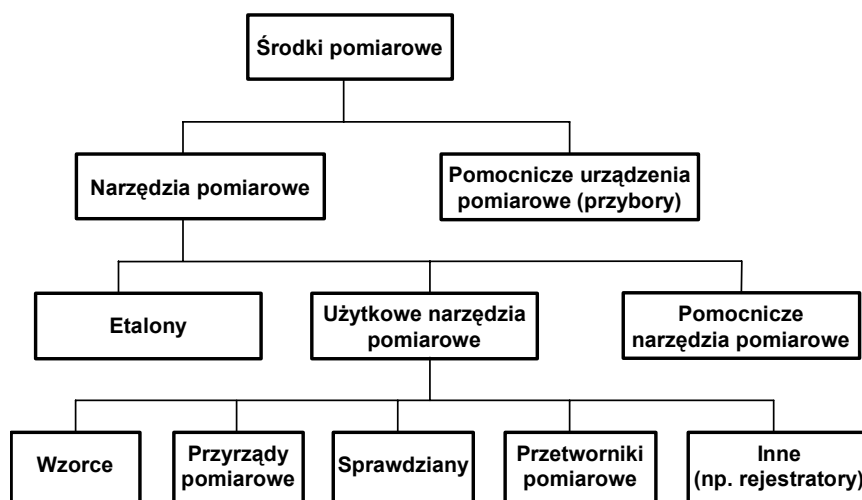
Podana wyżej zasada zaokrąglania nie dotyczy wyników przejściowych, które należy podawać z dokładnością przynajmniej o jeden rząd wyższą.

2.5. OGÓLNA CHARAKTERYSTYKA ŚRODKÓW POMIAROWYCH

2.5.1. Klasyfikacja środków pomiarowych

Przy pomiarach wykorzystywane są różne urządzenia techniczne. Określa się je wspólną nazwą **środki pomiarowe**.

Funkcje pełnione przez poszczególne środki pomiarowe są zróżnicowane i stanowią najczęściej przyjmowane kryterium klasyfikacji tych środków. Podział środków pomiarowych w zależności od pełnionych przez nie funkcji pokazano na rys. 11.



Rys. 11. Klasyfikacja środków pomiarowych



W zależności od pełnionych funkcji wszystkie środki pomiarowe można podzielić na takie, które w procesie pomiaru pełnią rolę podstawową (służą do ustalenia miary wielkości) i takie, które w procesie pomiaru pełnią rolę pomocniczą (np. zapewniają właściwe warunki pomiaru, ustalają odpowiednie położenie mierzonego przedmiotu, chronią aparaturę pomiarową przed wstrząsami, itp.). Pierwsza grupa środków nosi nazwę **narzędzi pomiarowych**, druga - **pomocniczych urządzeń pomiarowych**. Jako przykłady pomocniczych urządzeń pomiarowych, zwanych również niekiedy **przyborami pomiarowymi**, wymienić można stoły pomiarowe, uchwyty, przyrządy, statywy, klimatyzatory, urządzenia zasilające, itp.

Narzędzia pomiarowe dzieli się zazwyczaj na etalony, narzędzia pomiarowe użytkowe i narzędzia pomiarowe pomocnicze.

Zadaniem **etalonów** jest realizowanie, przechowywanie lub odtwarzanie jednostki miary wielkości fizycznej, a także wielokrotności lub podwielokrotności tej jednostki, w celu przekazywania jej poprzez porównanie innym narzędziom pomiarowym. Etalonów używa się więc nie do pomiarów, lecz do sprawdzania innych narzędzi pomiarowych. Bardziej szczegółowe informacje na ich temat zamieszczono w podrozdziale 2.5.2.

Narzędzia pomiarowe użytkowe przeznaczone są do wykonywania pomiarów różnych wielkości określonych. W ich skład wchodzi głównie wzorce miar i przyrządy pomiarowe. Niektóre źródła wyróżniają ponadto sprawdziany [6], przetworniki pomiarowe [13] i rejestratory [18]. Bardziej szczegółowe informacje na temat użytkowych narzędzi pomiarowych zamieszczono w podrozdziale 2.5.3.

Narzędzia pomiarowe pomocnicze służą do pomiaru wielkości wpływowych (tzn. innych wielkości, które mogą mieć istotny wpływ na wynik pomiaru) lub wielkości charakteryzujących własności metrologiczne narzędzi pomiarowych użytkowych. Jako przykłady narzędzi pomiarowych pomocniczych wymienić można termometr, higrometr i barometr zastosowane w celu określenia warunków otoczenia, w jakim przeprowadzono pomiary bądź poziomnicę użytą w celu wypoziomowania wagi przy pomiarach masy [6, 13].

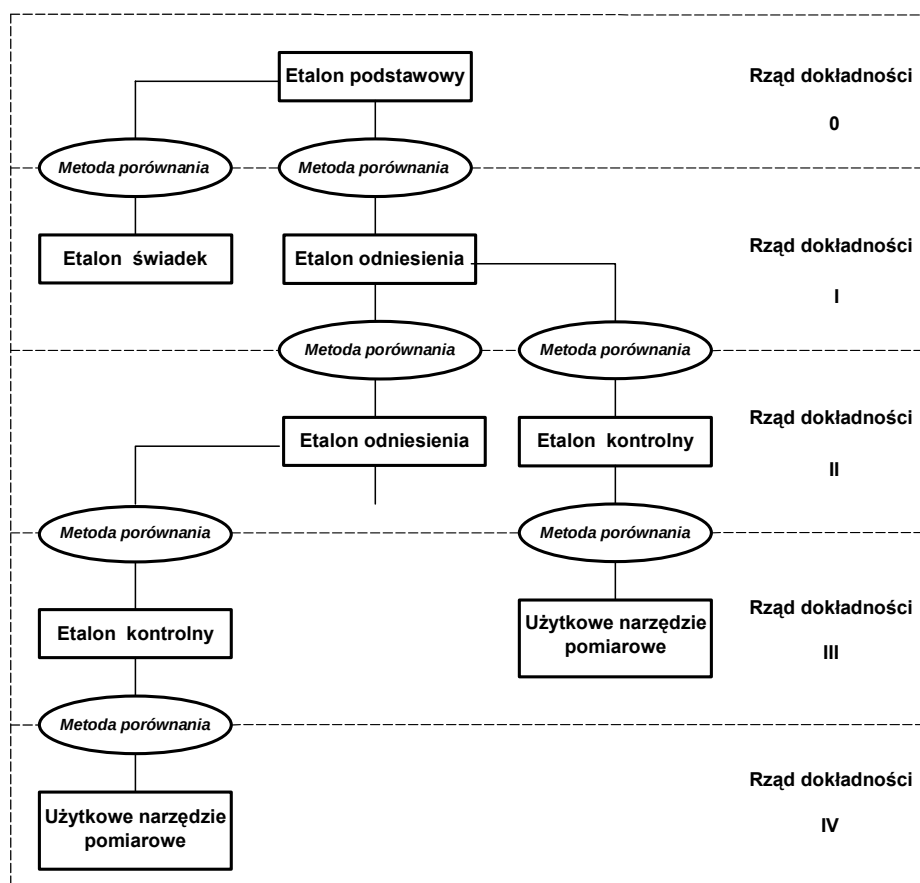
2.5.2. Etalony

Jak już wspomniano w poprzednim podrozdziale etalony służą do dokładnego odtwarzania jednostki miary, jej wielokrotności lub podwielokrotności. Odtwarzana wartość wykorzystywana jest do sprawdzania i ew. adjustacji innych narzędzi pomiarowych.



Etalony posiadają swoją hierarchię. Ilustruje ją przedstawiony na rys. 12. układ sprawdzian narzędzi pomiarowych. Na czele tej hierarchii stoi **etalon podstawowy**, tj. etalon o najwyższych dla danej wielkości fizycznej właściwościach metrologicznych. Przez porównanie z etalonem podstawowym tworzone są etalony odniesienia pierwszego rzędu dokładności oraz etalon świadek.

Etalon świadek służy do kontrolowania niezmienności etalonu podstawowego lub do zastąpienia tego etalonu w przypadku jego uszkodzenia lub zaginięcia. Jego rola jest szczególnie istotna w przypadkach, gdy etalon podstawowy nie jest oparty na niezmiennych właściwościach materii, jak to ma miejsce np. w przypadku jednostki



Rys. 12. Układ sprawdzian narzędzi pomiarowych

masy. Etalonu świadka nie używa się nigdy do realizacji innych zadań metrologicznych, w tym do sprawdzania etalonów innych niż podstawowy.

Etalony odniesienia pierwszego rzędu wykorzystywane są do tworzenia etalonów odniesienia II-go rzędu oraz etalonów kontrolnych zwanych również etalonami roboczymi.

Etalony kontrolne drugiego rzędu służą do sprawdzania użytkowych narzędzi pomiarowych III-go rzędu dokładności. Natomiast etalony odniesienia II-go rzędu przeznaczone są do tworzenia etalonów kontrolnych III-go rzędu, służących do sprawdzania mniej dokładnych narzędzi pomiarowych (IV-go rzędu dokładności).

Przedstawiony na rys. 12 układ sprawdzania narzędzi pomiarowych ma strukturę otwartą i w razie potrzeby można go rozbudować dla dalszych rzędów dokładności.

2.5.3. Użytkowe narzędzia pomiarowe

Ze względu na pełnione funkcje narzędzia pomiarowe użytkowe można podzielić na kilka różnych grup. Wyróżnia się m.in. wzorce miar, przyrządy pomiarowe, sprawdziany, przetworniki pomiarowe i rejestratory. Zadania poszczególnych grup zilustrowano na rys. 13.

Wzorcem miary nazywa się narzędzie pomiarowe odtwarzające jedną lub więcej znanych wartości danej wielkości. Wzorce odtwarzające jedną wartość wielkości określa się mianem wzorców jednomiarowych, a wzorce odtwarzające więcej niż jedną wartość wielkości - wzorców wielomiarowych. Jako przykłady wzorców jednomiarowych wymienić można płytkę wzorcową długości, odważnik czy pojemnik bez podziałki, a wzorców wielomiarowych - kreskowy wzorzec długości (przymiar), pojemnik wzorcowy z podziałką (menzurka) czy wzorcowy opornik dekadowy.

Wymagane cechy wzorców to niezmienność własności w czasie oraz łatwość i możliwie wysoka dokładność odtwarzania.

Do podstawowych parametrów charakteryzujących określony wzorzec zaliczane są:

- nominalna wartość wzorca - W_n ;
- niedokładność miary wzorca (graniczna dopuszczalna wartość błędu wzorca) - ΔW (ewentualnie $\Delta_{\min} W$, $\Delta_{\max} W$);
- okres wiarygodności wzorca - T ;



Nominalna wartość wzorca W_n - to wartość, którą wzorzec winien odtwarzać. Jest to stanowiąca element odniesienia teoretyczna wartość, którą nanosi się bezpośrednio na wzorcu, ewentualnie podaje w jego metryczce. Wartość nominalną określa się niekiedy jako "**wskazanie wzorca**".

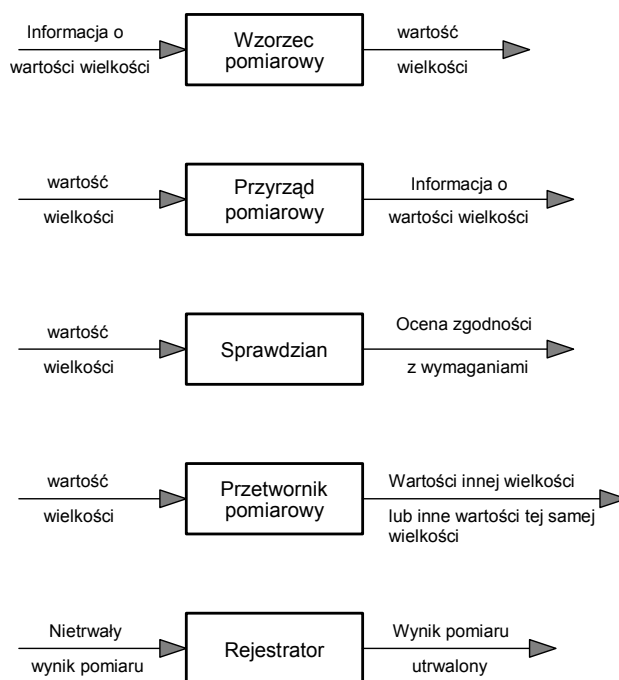
Na wskutek różnych przyczyn wartość rzeczywiście odtwarzana przez wzorzec - W_r różni się od jego wartości nominalnej, przy czym różnicę $\Delta_r W = W_n - W_r$ nazywa się **błędem (wskazania) wzorca** miary [13].

Ze względu na dokładność prowadzonych pomiarów wartość błędu wzorca nie może być zbyt duża, dlatego nakłada się na nią ograniczenie:

$$\Delta_{\min} W \leq \Delta_r W \leq \Delta_{\max} W \quad (32)$$

gdzie:

$\Delta_{\min} W, \Delta_{\max} W$ - graniczne dopuszczalne wartości błędu wzorca;



Rys. 13. Funkcje poszczególnych rodzajów użytkowych narzędzi pomiarowych

W zdecydowanej większości przypadków $\Delta_{\max} W = -\Delta_{\min} W = \Delta W$. Zależność (32) przyjmuje wtedy prostszą postać:

$$|\Delta_r W| \leq \Delta W \quad (33)$$

Ponieważ wartość rzeczywiście odtwarzana przez wzorzec, podobnie jak wartości wszystkich innych wielkości określonych, ulega w czasie pewnym zmianom, więc zmianom ulega również wartość błędu wzorca. Można to ująć zależnością:

$$\Delta_r W = f(t) \quad (34)$$

gdzie:

$f(t)$ - bliżej nieokreślona funkcja czasu;

Jak wykazuje praktyka, prawdopodobieństwo zdarzenia, że:

$$|f(t)| \leq \Delta W \quad (35)$$

maleje ze wzrostem czasu używania wzorca. Dlatego konieczne jest okresowe sprawdzanie wzorców w celu stwierdzenia, czy powyższa zależność pozostaje zachowana.

Okresowe sprawdzanie wzorców¹, poza aspektem merytorycznym może mieć również aspekt prawny. Określa się je wtedy mianem **legalizacji okresowej**. Legalizacji tej dokonują wyspecjalizowane organy państwowej służby metrologii prawnej², a okresy wiarygodności poszczególnych wzorców zostają określone poprzez stosowne zarządzenia tych służb.

Przedstawione wyżej parametry charakteryzujące wzorce miar bywają często uzupełniane parametrami określającymi warunki użytkowania i przechowywania wzorca.

Przyrządem pomiarowym nazywa się narzędzie pomiarowe służące do przetwarzania wielkości mierzonej (lub innej wielkości z nią związanej) na informację o wartości tej wielkości. W zależności od metody przetwarzania wielkości mierzonej przyrządy pomiarowe można podzielić na trzy grupy:

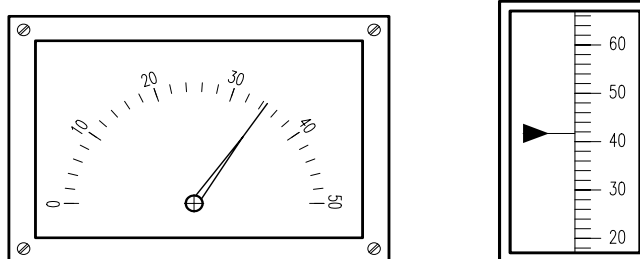
¹ dotyczy to również innych narzędzi pomiarowych;

² w Polsce - wyspecjalizowane laboratoria Głównego Urzędu Miar;



- przyrządy wskazujące bezpośrednio wartość wielkości mierzonej, jak amperomierz, suwmiarka czy termometr. Określa się je mianem **przyrządów z bezpośrednim odczytem**;
- przyrządy umożliwiające pomiar małej różnicy między wartością wielkości mierzonej i znaną wartością tej samej wielkości. Przyrządy te noszą ogólną nazwę **różnicowych przyrządów pomiarowych**. Charakterystyczną cechą różnicowych przyrządów pomiarowych są niewielkie z reguły zakresy pomiarowe. Jako przykłady przedstawicieli tej grupy można wymienić m.in. wszystkie odmiany czujników mechanicznych;
- przyrządy wskazujące, że wartość wielkości mierzonej jest równa znanej wartości odtwarzanej w procesie pomiaru przez zespół wzorców. Przyrządy tej grupy nazywane są **przyrządami porównawczymi**. Jako przykłady przyrządów porównawczych wymienić można wagę dźwigniową (laboratoryjną) i galwanometr zerowy.

W zależności od sposobu wskazywania wyniku przyrządy pomiarowe dzielą się na analogowe (rys. 14) i cyfrowe (rys 15).



Rys. 14. Pola odczytowe przyrządów analogowych

W **przyrządach analogowych** (rys. 14) miarę wielkości mierzonej określa położenie wskazówki względem podzielnicy. Ilość możliwych położenia wskazówki, a więc i ilość różnych wskazań przyrządu jest nieskończenie liczna. Ograniczona rozdzielczość wzroku ludzkiego nie pozwala jednak na rozróżnienie położenia bardzo mało różniących się między sobą. W celu ułatwienia odczytu na podzielnicy nanoszone są zespoły wskazówek, najczęściej w postaci kres, tworzące tzw. **podziałkę**. Każdej z kres odpowiada

określona wartość mierzonej wielkości. Dwie sąsiednie kresy określają tzw. **działkę elementarną**, którą charakteryzują dwa parametry: długość i wartość.

Długością działki elementarnej nazywa się liniową odległość pomiędzy wyznaczającymi ją kresami mierzona wzdłuż linii przechodzącej przez środki najkrótszych kres podziałki.

Wartością działki elementarnej nazywa się różnicę wartości odpowiadających wyznaczającym działkę wskazom.

Jeżeli wszystkie działki elementarne podziałki mają jednakową długość to podziałka taka jest nazywana **jednostajną**. Natomiast podziałka, której wszystkie działki elementarne mają tę samą wartość nosi nazwę **równomiernej**. Podziałka spełniająca oba w/w warunki jest określana mianem **regulanej** [13, 21].

Jako odczyt z przyrządu analogowego przyjmuje się najczęściej wartość odpowiadającą znajdującej się najbliższej wskazówki kresie. Przy takim postępowaniu zbiór możliwych odczytów z przyrządu jest równoważny zbiorowi wartości odpowiadających poszczególnym kresom podziałki, a **zdolność rozdzielcza odczytu**, czyli najmniejsza możliwa różnica pomiędzy dwoma różnymi odczytami [14], jest równa wartości działki elementarnej.

Istotną wadą przyrządów analogowych są kłopoty z uzyskaniem wysokiej rozdzielczości. **Rozdzielczość**, którą określa stosunek zakresu pomiarowego do wartości działki elementarnej [14], wpływa bowiem na długość podziałki. Obowiązuje zależność:

$$L = l_e \cdot z / w_e \quad (36)$$

gdzie:

- L** - całkowita długość podziałki;
- l_e** - długość działki elementarnej;
- z** - zakres wskazań (wskazanie maksymalne minus wskazanie minimalne);
- w_e** - wartość działki elementarnej;

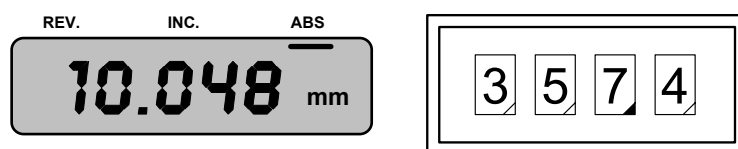
Długości działki elementarnej nie można dowolnie zmieniać. Ze względu na właściwości oka ludzkiego nie powinna być ona mniejsza od $0,8 \div 1$ mm. W tej sytuacji przyrząd o zakresie wskazań 25 mm i wartości działki elementarnej 0,01 mm musiałby mieć podziałkę długości co najmniej $2 \div 2,5$ m.



Rozdzielczość przyrządu analogowego można podwyższyć poprzez interpolację położenia wskazówki względem sąsiadujących z nią kres podziałki. Interpolacji tej można dokonywać "na oko" bądź z zastosowaniem urządzeń wspomagających. W pierwszym przypadku działka elementarna jest przeważnie dzielona na dwie, pięć lub, przy większej długości działki, na dziesięć części. Jeśli długość działki elementarnej jest niewielka w celu ułatwienia interpolacji można wykorzystać proste układy optyczne, np. lupkę czy wyposażony w dodatkową podziałkę okular. Innym przykładem urządzeń wspomagających odczyt są różnego rodzaju noniusze (np. suwmiarkowe).

Najefektywniejszym sposobem zwiększenia zdolności rozdzielczej przyrządów analogowych jest stosowanie podwójnych podziałek. Pierwsza z nich - zgrubna, o dużej wartości działki elementarnej umożliwia zachowanie większego zakresu pomiarowego. Druga - o małej wartości działki elementarnej, służy do precyzyjnego określenia położenia wskazówki w granicach jednej tylko działki podziałki zgrubnej. Rozwiązania tego typu wykorzystuje się m.in. w przyrządach mikrometrycznych i czujnikach zegarowych.

W **przyrządach cyfrowych** (rys 15) wynik pomiaru podawany jest przy pomocy kilku cyfr tworzących układ dziesiętny oraz znaku określającego początek tego układu. Wskazania przyrządów cyfrowych tworzą zbiór dyskretny zawierający 10^n elementów, gdzie n oznacza liczbę wyświetlanych bądź wskazywanych cyfr. Zdolność rozdzielcza odczytu jest równa różnicy dwóch sąsiednich wskazań $x_{i+1} - x_i$. Natomiast rozdzielczość przyrządu równa jest liczbie elementów zbioru wskazań (10^n) i w odróżnieniu od przyrządów analogowych można ją bardzo łatwo zwiększyć. Dziesięciokrotne zwiększenie zdolności rozdzielczej uzyskuje się poprzez zwiększenie o jeden liczby wyświetlanych cyfr. Naturalną barierą wzrostu rozdzielczości, podobnie jak w przyrządach analogowych jest powtarzalność wskazań.



Rys. 15. Pola odczytowe przyrządów cyfrowych

Do istotniejszych parametrów charakteryzujących własności przyrządów pomiarowych należą:

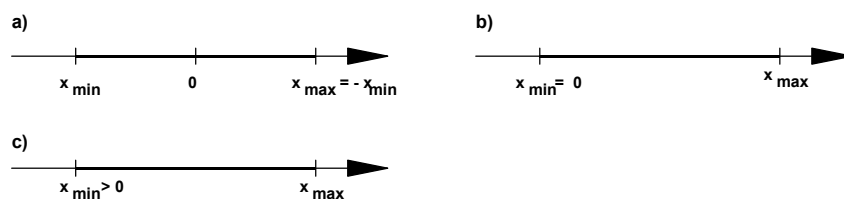
- zakres pomiarowy;
- klasa dokładności;
- czułość;
- czułość na wielkości wpływające;
- rezystancja;
- parametry charakteryzujące własności dynamiczne przyrządu;
- parametry charakteryzujące cechy użytkowe przyrządu (niezawodność, trwałość, naprawialność,...);
- inne (masa, gabaryty, parametry zasilania, itp...);

Zakresem pomiarowym przyrządu nazywa się zbiór wartości wielkości mierzonej, dla których wskazania przyrządu pomiarowego przy pomiarze w warunkach odniesienia, nie powinny być obciążone błędem większym od dopuszczalnego [13]. Zbiór ten ograniczony jest dwoma wartościami - minimalną, którą określa się mianem **granicy dolnej zakresu pomiarowego**, i maksymalną, nazywaną **granica górną zakresu pomiarowego**.

Z pojęciem zakresu pomiarowego związane jest dość ściśle pojęcie zakresu wskazań.

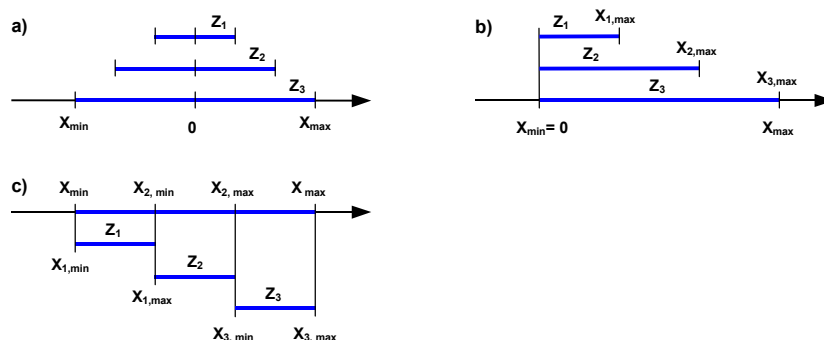
Zakresem wskazań nazywa się zbiór wartości wskazywanych przez urządzenie odczytowe przyrządu. Zbiór ten ograniczony jest dwoma wartościami skrajnymi zwanymi odpowiednio **granica dolną i granica górną zakresu wskazań**.

Ze względu na wzajemną relację zachodzącą pomiędzy wartościami granicznymi zakresów oraz zerem wyróżnia się zakresy symetryczne względem zera, zakresy jednostronne oraz zakresy bezzerowe. Przykłady takich zakresów pokazano na rysunku 16.



Rys. 16. Różne rodzaje zakresów pomiarowych (zakresów wskazań): a) symetryczny względem zera, b) jednostronny, c) bezzerowy;

Niektóre przyrządy posiadają po kilka przełączalnych zakresów pomiarowych lub też cały zakres złożony z kilku przełączalnych podzakresów.



Rys. 17. Zakresy przyrządów pomiarowych: a),b) przyrządy wielozakresowe, c) zakres złożony z przełączalnych podzakresów.

W niektórych dziedzinach, np. w elektrotechnice, często używane jest pojęcie klasy dokładności przyrządu.

Klasa dokładności przyrządu jest to wyrażony w procentach stosunek dopuszczalnego błędu tego przyrządu do jego zakresu pomiarowego. Definicję tą można wyrazić zależnością:

$$k = \frac{\Delta_{dop}}{z} \cdot 100 \% \quad (37)$$

gdzie:

- k - klasa dokładności przyrządu;
- Δ_{dop} - dopuszczalny błąd przyrządu;
- z - zakres pomiarowy (różnica wartości granicznych);

Wyznaczoną z zależności (30) wartość k zaokrągla się do najbliższej większej liczby z szeregu R5 (0.1, 0.16, 0.25, 0.4,...). Ze względu na to zaokrąglenie mamy:

$$k^* \geq \frac{\Delta_{dop}}{z} \cdot 100 \% \quad (38)$$

gdzie: k^* - klasa dokładności z szeregu R5;

Z zależności (38) wynika, że błąd przyrządu o klasie k^* i zakresie pomiarowym z , przy pomiarze w warunkach odniesienia winien spełniać zależność:

$$\Delta_0 \leq \Delta_{dop} \leq k^* \cdot z / 100 \quad (39)$$

gdzie: Δ_0 - błąd przyrządu o klasie k^* i zakresie z przy pomiarze w warunkach odniesienia;



Przy pomiarze w warunkach różnych od warunków odniesienia, z powodu pojawienia się błędu dodatkowego Δ_d , może zdarzyć się, że:

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta_d > \Delta_{dop} \quad (40)$$

gdzie: Δ - błąd przyrządu przy pomiarze w warunkach różnych od warunków odniesienia;

Klasa dokładności przyrządu zdefiniowana zależnością (37) jest parametrem mającym zastosowanie tylko w tych przypadkach, kiedy wartość dopuszczalnego błędu przyrządu nie zależy od jego wskazania (jest jednakowa dla każdego punktu zakresu pomiarowego). Dla przyrządów, dla których wartość dopuszczalnego błędu zależy od wskazania α , czyli $\Delta_{dop} = f(\alpha)$ rolę klasy dokładności przejmuje funkcja $f(\alpha)$. Przykładowo, dla pewnej odmiany woltomierzy cyfrowych, o urządzeniu wyjściowym wyświetlającym cztery cyfry, dopuszczalny błąd pomiaru określony jest zależnością:

$$\Delta_{dop} = \pm (0,05 \% \text{ zakresu pomiarowego} + 0,1 \% \text{ wskazania} + \text{wartość dz. elementarnej})$$

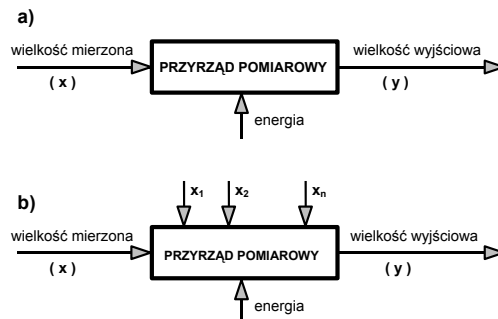
Mierząc takim woltomierzem na zakresie 100 V (0,00 ÷ 99,99 V) i uzyskując wskazanie $\alpha = 44,62$ V znajdujemy, że dopuszczalna wartość błędu przyrządu, przy pomiarze w warunkach odniesienia, wynosi:

$$\Delta_{dop} = \pm (0,0005 \cdot 100 \text{ V} + 0,001 \cdot 44,62 \text{ V} + 0,01 \text{ V}) = \pm 0,10462 \text{ V} \approx 0,1 \text{ V} \quad [19]$$

W związku z powyższym pojęcie „klasa dokładności przyrządu” bywa używane również w innym, bardziej ogólnie sformułowanym zakresie znaczeniowym. Wg [16] pojęcie to oznacza „klasę przyrządów pomiarowych, spełniających określone wymagania metrologiczne, których błędy zawarte są w wyznaczonych granicach”. Definicja ta dopuszcza inne niż zależność (37) sposoby określania klasy dokładności.

W znacznym uproszczeniu każdy przyrząd pomiarowy można przedstawić w postaci bloku, do którego doprowadzona jest wielkość mierzona i ewentualnie energia, natomiast wyprowadzona informacja o wartości wielkości mierzonej (rys. 18a). Nośnikiem tej informacji jest jakaś **wielkość wyjściowa**, jak np. kąt wychylenia wskazówki lub długość łuku, który zatoczył jej koniec, wysokość słupka rtęci (w termometrze czy barometrze), czy wartość ukazująca się w polu odczytowym (w przyrządach cyfrowych). Zależność wielkości wyjściowej y od wielkości mierzonej x , czyli funkcja $y = f(x)$ nosi nazwę charakterystyki przyrządu (równania przetwarzania).





Rys. 18. Schemat blokowy przyrządu pomiarowego: a) uproszczony, b) uwzględniający także inne niż mierzona wielkości wejściowe;

Czułość przyrządu pomiarowego nazywa się stosunek zmiany wielkości wyjściowej do wywołującej ją zmiany wielkości mierzonej, czyli :

$$C = dy / dx \quad (41)$$

gdzie:

C - czułość przyrządu;
 dx - zmiana wielkości mierzonej;
 dy - zmiana wielkości wyjściowej;

W przyrządach analogowych wielkością wyjściową jest wychylenie wskazówki. Zmiana wielkości mierzonej o wartość działki elementarnej (w_e) powinna spowodować przemieszczenie wskazówki o długość tej działki (l_e), czyli czułość przyrządu analogowego można określać jako stosunek długości działki elementarnej do jej wartości ($C = l_e / w_e$).

W przypadku, gdy przyrząd posiada charakterystykę liniową, jego czułość jest stała w każdym punkcie zakresu pomiarowego. Przy charakterystyce nieliniowej czułość przyrządu zmienia się wraz ze zmianą wskazania co uniemożliwia stosowanie podziałki regularnej.

Jeżeli wielkość wyjściowa i wielkość mierzona są tego samego rodzaju, to czułość wyraża się liczbą oderwaną (bez jednostki). Określa się ją wtedy mianem **przełożenia**.

Schemat przedstawiony na rys. 18a jest właściwy dla przyrządu idealnego, tj. reagującego tylko na wielkość mierzoną i zupełnie odizolowanego od otoczenia (niewrażliwego na warunki zewnętrzne). W rzeczywistości zarówno źródło wielkości mierzonej, jak i otoczenie, generują różnego rodzaju bodźce (temperatura, ciśnienie,

wilgotność, drgania, pola elektryczne i magnetyczne, itp.), które oddziałują na całokształt zjawisk fizycznych zachodzących w przyrządzie pomiarowym. Zakłócają one proces przetwarzania informacji i, chociaż w przyrządzie nie ma dla nich wejść fizycznych, jak gniazda czy zaciski, należy traktować je jako wielkości wejściowe, mające wpływ na ostateczną wartość wielkości wyjściowej. Sytuację tą uwzględniono na schemacie przedstawionym na rysunku 18b.

Model przyrządu pomiarowego przedstawionego na rys. 18b posiada charakterystykę w postaci funkcji wielu zmiennych, a mianowicie $y = f(x, x_1, \dots, x_n, e)$. Charakterystyka ta pozwala określić czułość przyrządu na poszczególne wielkości wejściowe.

Czułością przyrządu na określoną wielkość wejściową nazywa się stosunek zmiany wielkości wyjściowej do wywołującej ją zmiany określonej wielkości wejściowej, czyli

$$c_i = \partial y / \partial x_i \quad (42)$$

gdzie:

c_i - czułość przyrządu na i-tą wielkość wejściową;

$\partial y / \partial x_i$ - pochodna cząstkowa zmiennej y względem zmiennej x_i

Wartości czułości przyrządu na wielkości wejściowe, mające istotny wpływ na wynik pomiaru, winny być zamieszczone w jego dokumentacji i uwzględniane przy opracowywaniu wyników pomiaru (np. przy dokładnych pomiarach hałasu należy uwzględniać wartość ciśnienia atmosferycznego. Aby to było możliwe musimy jednak znać wartość tego ciśnienia w chwili dokonywania pomiaru hałasu oraz czułość układu mierzącego hałas na ciśnienie atmosferyczne).

Rezystancja przyrządu - parametr charakteryzujący oddziaływanie przyrządu pomiarowego na źródło wielkości mierzonej.

W trakcie pomiaru pomiędzy źródłem wielkości mierzonej (mierzonym obiektem) a przyrządem pomiarowym ma miejsce przepływ energii. Zmiany stanu energetycznego obiektu powodują najczęściej zmianę samej wielkości mierzonej, przy czym zmiana ta jest tym mniejsza, im mniejsza ilość energii przepływa z obiektu do przyrządu (lub odwrotnie), czyli im mniejsza jest moc ich wzajemnego oddziaływania.

Moc pobierana przez przyrząd pomiarowy zależy od jego rezystancji. Charakter tej zależności związany jest z rodzajem wielkości mierzonej. W przypadku **wielkości typu siła** (tj. wielkości starających się zmienić istniejący stan, jak np. siła mechaniczna, siła

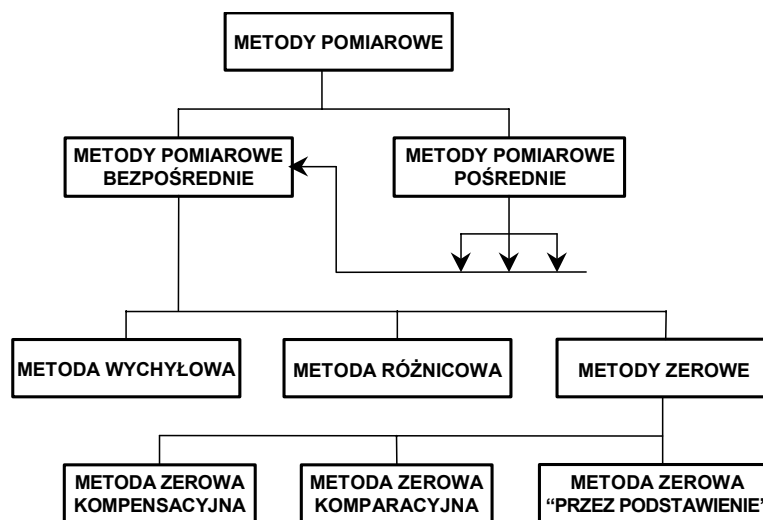


pola grawitacyjnego, różnica temperatur, różnica ciśnień, napięcie elektryczne, itp.) jest to zależność odwrotnie proporcjonalna. Natomiast w przypadku **wielkości typu prędkość** (tj. wielkości będących skutkiem działania wielkości typu siła, jak np. natężenie przepływu cieczy, natężenie prądu elektrycznego, prędkość liniowa, prędkość kątowa, itp.) moc pobierana przez przyrząd jest wprost proporcjonalna do jego rezystancji. Z powyższego wynika, że chcąc zmniejszyć oddziaływanie przyrządu na obiekt mierzony (zmniejszając tym samym błąd pobrania), powinniśmy dobierać przyrządy o odpowiednio dużej rezystancji w przypadku wielkości typu siła i odpowiednio małej rezystancji, w przypadku pomiaru wielkości typu prędkość (problem ten przedstawiono bliżej w zadaniach 1.17 ÷ 1.19).

2.6. METODY POMIAROWE

Istota każdego pomiaru sprowadza się do eksperymentalnego porównywania nieznannej wartości wielkości ze znanymi wartościami wielkości tego samego rodzaju. Zastosowany przy pomiarze sposób tego porównywania nosi nazwę **metody pomiarowej**.

Istnieje wiele różnych metod pomiarowych. Istnieją także różne ich klasyfikacje. Jedną z nich pokazano na rysunku 19. Zgodnie z tą klasyfikacją wszystkie metody pomiarowe dzielą się na dwie grupy: metody pomiarowe bezpośrednie i metody pomiarowe pośrednie.



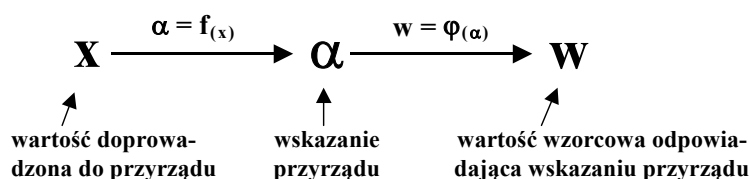
Rys. 19. Klasyfikacja metod pomiarowych

Metody pomiarowe bezpośrednie charakteryzują się tym, że nieznana wartość wielkości mierzonej porównywana jest ze znanymi wartościami wielkości tego samego rodzaju. Wartość tą ustala się bezpośrednio, bez wykonywania dodatkowych obliczeń opartych na funkcyjnej zależności pomiędzy wielkością mierzoną a innymi wielkościami. Natomiast w **metodach pomiarowych pośrednich** wartość wielkości mierzonej oblicza się na podstawie wyników pomiarów innych wielkości związanych z wielkością mierzoną znaną zależnością. Zależność ta jest określana mianem **równania definicyjnego pomiaru**.

Przy pomiarach metodami bezpośrednimi wartość wielkości odtwarzana przez obiekt mierzony porównywana jest z wartościami odtwarzanymi przez wzorzec (wzorce). Wzorce mogą uczestniczyć w pomiarze bezpośrednio lub pośrednio. W pierwszym przypadku, którego przykładem może być pomiar długości za pomocą wzorca kreskowego (przymiaru) bądź też pomiar objętości cieczy za pomocą menzurki, mamy do czynienia z tzw. **metodą bezpośredniego porównania**. W przypadku drugim rola wzorców ogranicza się do przekazania odtwarzanych przez nie wartości przyrządowi pomiarowemu. Czynność ta nosi nazwę **wzorcowania**.

Celem wzorcowania jest wyznaczenie zależności zachodzącej pomiędzy wartościami wielkości mierzonej a odpowiadającymi im wskazaniem przyrządu. Oznaczając wartość wielkości mierzonej przez x , a wskazanie przyrządu przez α , można zależność tą zapisać w postaci $\alpha = f(x)$. Funkcję $f(x)$ można wyznaczyć doświadczalnie podstawiając zamiast x znane wartości wzorcowe w (czyli mierząc wzorce). Znając funkcję $\alpha = f(w)$ można każdej wartości α przypisać odpowiadającą jej wartość w zgodnie z równaniem $w = \varphi(\alpha)$, gdzie φ oznacza funkcję odwrotną do funkcji f .

Po wywzorcowaniu przyrządu możliwe jest już porównywanie wielkości mierzonej z wielkością wzorcową. Odbywa się ono wg schematu:



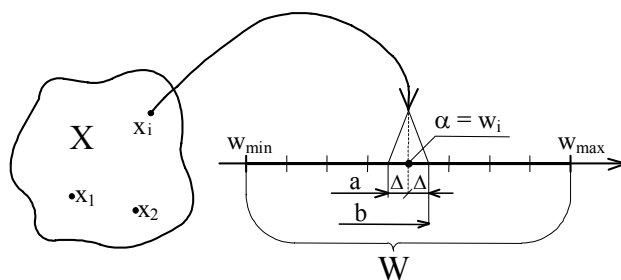
Zależność pomiędzy wartościami wielkości mierzonej i wskazaniem przyrządu można przedstawić w postaci funkcji matematycznej, wykresu, tabeli lub, co ma miejsce najczęściej, poprzez naniesienie na podzielnik przyrządu wskazów odpowiadających odpowiednio dobranym wartościom w . W tym ostatnim przypadku przyrząd zostaje wyskalowany w jednostkach miary wielkości mierzonej.



Metody pomiarowe bezpośrednie można podzielić na wychyłowe (wychyleniowe), różnicowe i zerowe.

Metoda wychyłowa to taki sposób pomiaru, w którym wartość wielkości mierzonej x wyznacza się poprzez ustalenie miejsca x w uporządkowanym według wartości zbiorze wielkości w . W przyrządach analogowych miejsce to określone jest położeniem wskazówki względem podzielnicy, a w przyrządach cyfrowych przez wartość ukazującą się w polu odczytowym przyrządu. Istotę metody wychyłowej wyjaśnia schemat zamieszczony na rys. 20, a jako jej przykłady wymienić można:

- pomiar ciśnienia za pomocą manometru ze wskazówką;
- pomiar napięcia woltomierzem uniwersalnym;
- pomiar ciepłoty ciała termometrem lekarskim (rtęciowym);
- pomiar masy ciała na wadze łazienkowej (sprężynowej);



Rys. 20. Istota metody pomiarowej wychyłowej

Wyniki pomiarów dokonanych metodą wychyłową podajemy w postaci $x_{z,p} \pm \Delta_u x$ przy czym:

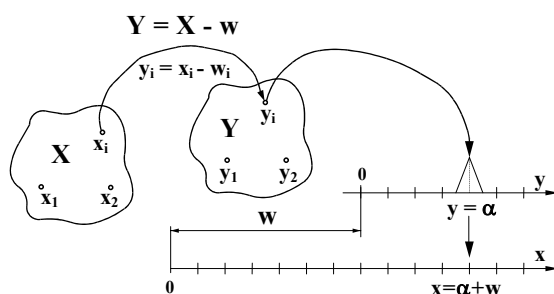
$$x_{z,p} = \alpha - \Delta_m \alpha \quad (43a)$$

$$\Delta_u x = \Delta_u \alpha \quad (43b)$$

gdzie:

- $x_{z,p}$ - wartość zaobserwowana poprawna;
- $\Delta_u x$ - niepewność pomiaru;
- α - odczyt wskazania przyrządu (układu) pomiarowego;
- $\Delta_m \alpha$ - szacowana wartość średnia całkowitego błędu pomiaru;
- $\Delta_u \alpha$ - niepewność oszacowania wartości średniej błędu pomiaru;

Metoda różnicowa charakteryzuje się tym, że ustalenie wartości wielkości mierzonej x poprzedzone zostaje bezpośrednim pomiarem różnicy tej wartości i zbliżonej do niej, znanej wartości wzorcowej w . Idea metody różnicowej polega na znacznym obniżeniu wartości poddawanych bezpośrednim pomiarom, co pociąga za sobą wzrost ich dokładności.



Rys. 21. Istota metody pomiarowej różnicowej

Istotę metody różnicowej przedstawiono na rys. 21, a jako przykłady pomiaru tą metodą służyć mogą:

- pomiar średnicy wałka za pomocą czujnika i stosu płytek wzorcowych;
- pomiar napięcia za pomocą woltomierza różnicowego;

Przy opracowaniu wyników pomiarów dokonanych metodą różnicową obowiązują zależności:

$$x_{z,p} = w_n - \Delta_m w + \alpha - \Delta_m \alpha - \Delta_m z \quad (44a)$$

$$\Delta_u x = \sqrt{(\Delta_u \alpha)^2 + (\Delta_u w)^2 + (\Delta_u z)^2} \quad (44b)$$

gdzie:

- $x_{z,p}$ - wartość zaobserwowana poprawna wielkości mierzonej;
- $\Delta_u x$ - niepewność pomiaru;
- α - odczyt wskazania przyrządu (układu) pomiarowego przy bezpośrednim pomiarze różnicy $x - w$;
- $\Delta_m \alpha$ - szacowana wartość średnia błędu pomiaru różnicy $x - w$;
- $\Delta_u \alpha$ - niepewność pomiaru różnicy $x - w$;
- w_n - nominalna wartość wzorca;
- $\Delta_m w$ - szacowana wartość średnia błędu wskazania wzorca;
- $\Delta_u w$ - niepewność wzorca;
- $\Delta_m z$ - szacowana wartość średnia błędu zerowania (najczęściej równa zero);
- $\Delta_u z$ - niepewność zerowania;



Aby zastosowany przy pomiarze metodą różnicową przyrząd mierzył rzeczywiście różnicę $x - w$ musi dla $x = w$ wskazywać $\alpha = 0$. Osiąga się to poprzez odpowiednią regulację właściwych elementów przyrządu w trakcie pomiaru wybranej wartości wzorcowej w . Zabieg ten nosi nazwę zerowania. Ponieważ idealne wyregulowanie przyrządu jest niemożliwe powstaje z tego powodu błąd Δz zwany błędem zerowania.

Aby uwzględnić błąd zerowania przy opracowywaniu wyniku pomiaru musimy oszacować jego wartości graniczne i przedstawić go w postaci scentralizowanej: $\Delta z = \Delta_m z \pm \Delta_u z$. Najczęściej czynność zerowania przeprowadzamy w taki sposób, aby wartość średnia błędu zerowania była równa zero. Wtedy $\Delta z = \pm \Delta_u z$. Może się jednak zdarzyć, zwłaszcza w przypadku pojedynczego pomiaru i trudnego lub pracochłonnego zerowania, że rezygnuje się z precyzyjnego przeprowadzenia tej czynności. Zamiast tego wyznacza się wartość średnią błędu zerowania $\Delta_m z = \alpha_{x=w}$ i fakt ten uwzględnia przy opracowywaniu wyniku (zależność 44a). Wartość średnia $\Delta_m z$ określona zostaje z niepewnością $\Delta_u z$, która zwiększa odpowiednio niepewność pomiaru (zależność 44b).

Metody zerowe to taka grupa metod pomiarowych, w których różnicę wartości dwóch wielkości: jednej, zależnej od wielkości mierzonej x , i drugiej, zależnej od wielkości wzorcowej w , sprowadza się do zera. Do badania wartości różnicy $f(x) - g(w)$ służy element funkcjonalny przyrządu zwany **detektorem**. Najczęściej rozróżnia on i sygnalizuje trzy stany: 1) $f(x) < g(w)$, 2) $f(x) > g(w)$ i 3) $f(x) = g(w)$, przy czym ten ostatni stan nosi nazwę **stanu równowagi**. Z definicji metod zerowych wynika więc, że bezpośrednim celem czynności pomiarowych jest w ich przypadku doprowadzenie detektora do stanu równowagi.

Sprowadzanie wartości $f(x) - g(w)$ do zera dokonywane jest najczęściej odpowiednimi zmianami wielkości wzorcowej w realizowanymi przy pomocy tzw. **urządzenia równoważącego**. Zdarza się, że rolę detektora, bądź urządzenia równoważącego, bądź też obu tych urządzeń równocześnie, pełni osoba dokonująca pomiaru. Ze względu na ograniczone możliwości zarówno człowieka (np. ograniczona rozdzielczość wzroku), jak i detektora (luzy, tarcie, odkształcenia, itp.) sprowadzenie różnicy $f(x) - g(w)$ dokładnie do zera nie jest możliwe. W praktyce czynność sprowadzania do zera zostaje zakończona w momencie, gdy:

$$|f(x) - g(w)| \leq \Delta_D \quad (45)$$

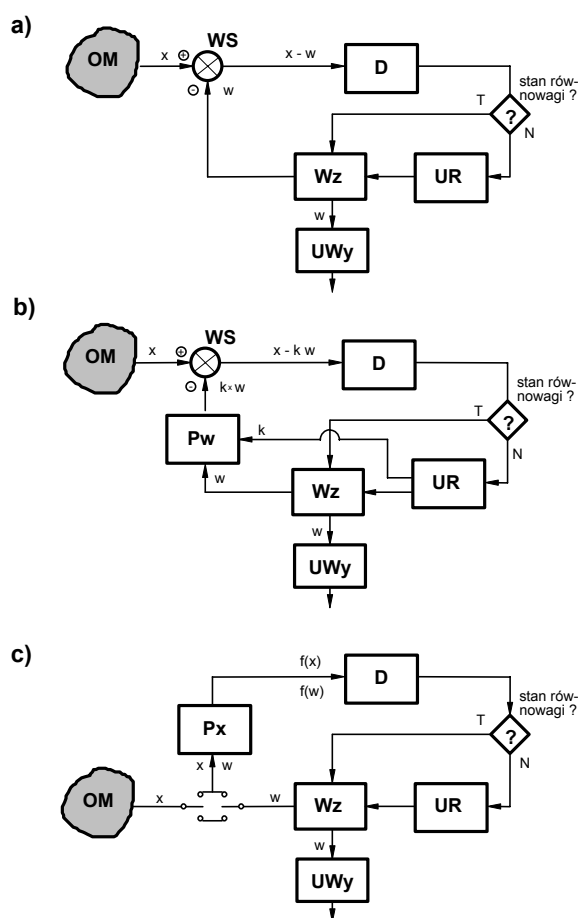
gdzie Δ_D oznacza tzw. **próg nieczułości detektora**, czyli najmniejszą wartość wytrącającą detektor ze stanu równowagi.



Do najczęściej stosowanych metod zerowych należą:

- a) metoda zerowa kompensacyjna ($f(x) = x$, $g(w) = w$);
- b) metoda zerowa komparacyjna ($f(x) = x$, $g(w) = k \cdot w$);
- c) metoda zerowa „przez podstawienie” ($f \equiv g$);

Zasady poszczególnych odmian metod zerowych przedstawiają schematy funkcjonalne zamieszczone na rys. 22.

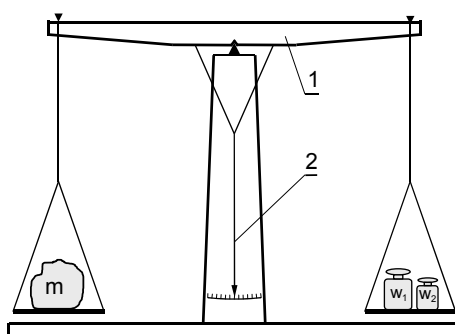


Rys. 22. Schematy funkcjonalne metod zerowych: a) kompensacyjnej, b) komparacyjnej, c) „przez podstawienie” (OM - obiekt mierzony; WS - węzeł sumacyjny; D - detektor; UR - urządzenie równoważące; Wz - źródło wielkości wzorcowej; Px, Pw - przetworniki wielkości mierzzonej, wzorcowej; UWy - urządzenie wyjściowe)



W przypadku pomiaru **metodą zerową kompensacyjną** (rys. 22a) obie wielkości, mierzona x i wzorcowa w , oddziałują na detektor jednocześnie i przeciwnie. W efekcie następuje kompensacja tego oddziaływania (i stąd nazwa metody). Pomiar sprowadza się do regulacji wartości wzorcowej w tak, aby detektor osiągnął stan równowagi. Ma to miejsce, gdy $|x - w| \leq \Delta_D$.

Jako przykład pomiaru metodą zerową kompensacyjną służyć może pomiar masy na wadze szalkowej (p. rys. 23). W trakcie tego pomiaru na belkę poziomą „1” wagi działa siła ciężkości obiektu mierzzonego, która stara się obrócić belkę w lewo. Przeciw- działa temu siła ciężkości odważników, która stara się obrócić belkę w stronę przeciwną. Funkcję detektora pełni wskazówka „2”, a funkcję urządzenia równoważącego - osoba dokonująca pomiaru.



Rys. 23. Przykład pomiaru metodą zerową kompensacyjną

Wynik pomiaru przeprowadzonego metodą zerową kompensacyjną określają zależności:

$$x_{z,p} = w_n - \Delta_m w \quad (46a)$$

$$\Delta_u x = \sqrt{(\Delta_u w)^2 + (\Delta_D)^2} \quad (46b)$$

gdzie:

$x_{z,p}$ – wartość zaobserwowana poprawna wielkości mierzonej;

$\Delta_u x$ - niepewność pomiaru;

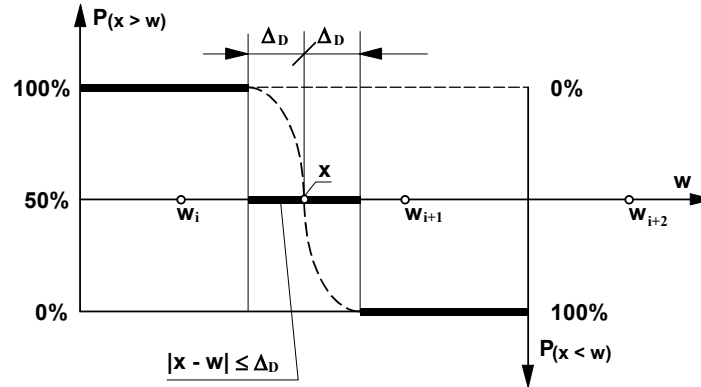
w_n - nominalna wartość wzorca, przy którym osiągnięty został stan równowagi;

$\Delta_m w$ – szacowana wartość średnia błędu wskazania wzorca;

$\Delta_u w$ – niepewność wzorca;

Δ_D - próg niezrównowagi detektora;

Może się zdarzyć, że detektor rozróżni i zasygnalizuje tylko dwa stany: $x < w$ i $x > w$. Sytuacja taka może np. mieć miejsce w przypadku, gdy źródło wielkości wzorcowej generuje wartości zmieniające się skokowo, a wartość skoku $w_{i+1} - w_i$ (p. rys. 24) jest większa od $2 \cdot \Delta_D$



Rys. 24. Charakterystyka operacyjna detektora ($P_{(r)}$ - prawdopodobieństwo wystąpienia relacji r ; w_i, w_{i+1}, w_{i+2} - wartości generowane przez źródło wielkości wzorcowej)

W przypadku detekcji dwustanowej celem czynności pomiarowych staje się wyznaczenie dwóch wartości wzorcowych w_1 i w_2 , takich aby:

- a) wartości te były sobie jak najbliższe;
- b) $x > w_1$ i $x < w_2$;

Wyznaczone wartości w_1 i w_2 określają wynik przeprowadzonego pomiaru. Obowiązują następujące zależności:

$$x_{z,p} = (w_1 - \Delta_m w_1 + w_2 - \Delta_m w_2) / 2 \quad (47a)$$

$$\Delta_u x = \sqrt{(\Delta_u w)^2 + (\Delta_{DI})^2} \quad (47b)$$

gdzie:

$\Delta_u w$ - niepewność wzorca równa większej z wartości $\Delta_u w_1$ i $\Delta_u w_2$;
 Δ_{DI} - błąd detekcji równy $(w_2 - w_1) / 2$;
 pozostałe oznaczenia jak przy poprzednich metodach;

lub przy zastosowaniu alternatywnego sposobu zapisu wyniku pomiaru:

$$w_1 - \Delta_m w_1 - \Delta_u w_1 \leq x_r \leq w_2 - \Delta_m w_2 + \Delta_u w_2 \quad (47c)$$



W metodzie zerowej komparacyjnej (rys. 22b) wielkość mierzona x porównywana jest z wielkością w^* będącą efektem wcześniejszego przetworzenia wielkości wzorcowej w . Przetworzenie wielkości wzorcowej zachodzi zgodnie z zależnością $w^* = k \cdot w$, gdzie k oznacza współczynnik wzmocnienia („przełożenie”) członu przetwarzającego. W metodzie tej, osiągnięcie stanu równowagi detektora, który ma miejsce gdy $|x - k \cdot w| \leq \Delta_D$, możliwe jest zarówno poprzez zmiany wartości wielkości wzorcowej w , jak i poprzez zmiany wartości współczynnika k . Idea i praktyczne znaczenie metody sprowadza się do tego, że w zamian za zastosowanie najczęściej prostego urządzenia, pozwalającego na uzyskiwanie różnych wartości k , można znacznie ograniczyć ilość odtwarzanych wartości wzorcowych. W szczególności może to być nawet jedna wartość.

Po osiągnięciu stanu równowagi, dla którego $|x - k \cdot w| \leq \Delta_D$, spełniające ten warunek wartości k i w stanowią podstawę opracowania wyniku pomiaru. Obowiązują zależności:

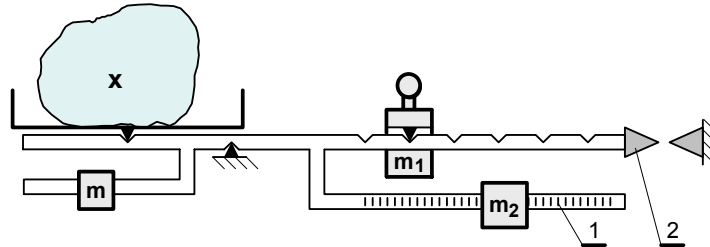
$$x_{z,p} = (w_n - \Delta_m w) \cdot (k - \Delta_m k) \quad (48a)$$

$$\Delta_u x = \sqrt{(w \cdot \Delta_u k)^2 + (k \cdot \Delta_u w)^2 + (\Delta_D)^2} \quad (48b)$$

gdzie:

- k - nominalna wartość współczynnika wzmocnienia;
- $\Delta_m k$ – szacowana wartość średnia błędu współczynnika wzmocnienia;
- $\Delta_u k$ – niepewność oszacowania wartości średniej błędu współczynnika wzmocnienia;
- pozostałe oznaczenia identyczne, jak w przypadku metody zerowej kompensacyjnej;

Jako przykład przyrządu pomiarowego działającego zgodnie z metodą zerową komparacyjną może służyć dźwigniowa waga kuchenna, której schemat zamieszczono na rys. 25. Pomiar na tej wadze sprowadza się do zrównoważenia momentu siły pochodzącego od ciężaru mierzonego obiektu, przez moment pochodzący od ciężaru odważników o masach wzorcowych m_1 i m_2 . Wartość tego momentu można regulować poprzez przesuwanie odważników po odpowiednich prowadnicach. Odważnik o masie m_1 przemieszcza się skokowo, a najmniejsza różnica jego położeń jest równoważna zmianie wartości wielkości mierzonej o 500 g. Odważnik o masie m_2 może być przesuwany w sposób ciągły. Maksymalna różnica jego położeń odpowiada zmianie wartości wielkości mierzonej również o 500 g. Interpolację wewnątrz przedziału możliwych położeń i odpowiadającego mu zakresu $0 \div 500$ g umożliwia podziałka kreskowa 1. Zrównoważenie obu momentów sygnalizuje odpowiednie położenie wskaźnika 2. Masa m służy do tarowania (równoważenia) wagi przed pomiarem.



Rys. 25. Schemat przyrządu pomiarowego działającego zgodnie z metodą zerową komparacyjną.

W metodzie zerowej „przez podstawienie” (rys. 22c) wielkość mierzona x porównuje się z wielkością wzorcową w nie bezpośrednio, lecz po uprzednim ich przetworzeniu. W trakcie pomiaru najpierw przetworzona zostaje wielkość mierzona. Wynik tego przetworzenia - $f(x)$, zostaje zapamiętany przez detektor. Następnie, w identyczny sposób, przetwarza się arbitralnie dobraną wartość wielkości wzorcowej, a wynik tego przetworzenia - $f(w)$ również trafia do detektora. Detektor porównuje obie przetworzone wartości i jeżeli $|f(x) - f(w)| > \Delta_D$ sygnalizuje brak równowagi. Równoważenie przyrządu dokonuje się poprzez odpowiednie zmiany wartości wielkości wzorcowej. Po osiągnięciu stanu równowagi, dla którego $|f(x) - f(w)| \leq \Delta_D$ spełniająca ten warunek wartość w stanowi podstawę opracowania wyniku pomiaru.

Wynik pomiaru przeprowadzonego metodą zerową przez podstawienie określają zależności:

$$x_{z,p} = w_n - \Delta_m w \quad (49a)$$

$$\Delta_u x = \sqrt{(\varphi'_{(y)} \cdot \Delta_D)^2 + (\varphi'_{(y)} \cdot \Delta_n)^2 + (\Delta_u w)^2} \quad (49b)$$

gdzie:

$\varphi_{(y)}$ - funkcja odwrotna względem funkcji przetwarzania $y = f(x)$;

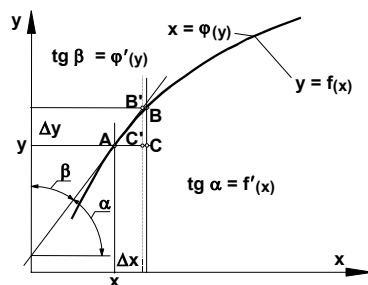
$\varphi'_{(y)}$ - pochodna (różniczka) funkcji $\varphi(y)$;

Δ_n - błąd niestałości przetwarzania;

pozostałe oznaczenia identyczne jak w przypadku poprzednich metod;

W odróżnieniu od przedstawionych wcześniej metod zerowych, w metodzie zerowej „przez podstawienie” obie porównywane wielkości $f(x)$ i $f(w)$ nie oddziałują na detektor jednocześnie. W czasie równoważenia przyrządu charakterystyka przetwornika P_x może pod wpływem zakłóceń zewnętrznych ulec pewnym zmianom. Powstały z tego powodu błąd określa się mianem błędu niestałości przetwarzania.

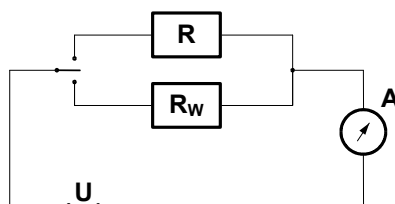
Należy zwrócić uwagę, że wartości błędu niestałości przetwarzania oraz błędu detekcji określa się dla wartości przetworzonych. Aby dokonać konwersji błędu wielkości przetworzonej na błąd wielkości mierzonej należy przemnożyć go przez pochodną funkcji odwrotnej do funkcji przetwarzania. Wyjaśnia to poniższy rysunek.



$$\Delta x = AC \approx AC' = \Delta y \cdot \operatorname{tg} \beta = \Delta y \cdot \varphi'(y)$$

Rys. 26. Zasada konwersji błędu wielkości przetworzonej na błąd wielkości mierzonej

Jako przykład metody zerowej „przez podstawienie” może służyć metoda pomiaru rezystancji oporników, której zasadę przedstawiono na rys. 27.



Rys. 27. Przykład pomiaru metodą zerową „przez podstawienie”.

W celu wyznaczenia rezystancji r_x mierzonego opornika R podłącza się go do obwodu i odczytuje wartość i_x prądu wskazywaną przez znajdujący się w obwodzie amperomierz A . Następnie wyłącza się mierzony opornik i w jego miejsce podłącza wzorcowy opornik dekadowy R_w . Na oporniku tym ustawia się taką wartość rezystancji r_w , aby uzyskać wskazanie i_w amperomierza identyczne jak poprzednio, czyli ujmując rzecz dokładniej, by różnica pomiędzy i_x oraz i_w była pomijalnie mała. Z równości prądów wynika wniosek o równości rezystancji.

W podanym wyżej przykładzie wielkością mierzoną jest rezystancja, wielkością przetworzoną prąd, równanie przetwarzania ma postać $I = U / R$, funkcja odwrotna

$R = U / I$, jej pochodna $\frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{U}{I^2}$. Niestalość przetwarzania mogą powodować wahania napięcia (ΔU), a błąd z tego powodu wynikający $\Delta_n I = \Delta U / R$.

Porównując ze sobą przedstawione wyżej odmiany metod pomiarowych bezpośrednich można stwierdzić, że:

- ◆ metoda pomiarowa wychyłowa jest przeważnie najprostsza (najłatwiejsza w realizacji), natomiast jej dokładność jest stosunkowo niewielka;
- ◆ metoda różnicowa jest zazwyczaj bardziej złożona od wychyłowej, gdyż poza przyrządem pomiarowym występuje przy niej jeszcze wzorzec i czynność zerowania, ale jest również bardziej dokładna. Wyższa dokładność metody różnicowej wynika z faktu, że przyrząd o dużym zakresie pomiarowym, i dużej w związku z tym niepewności $\Delta_u \alpha$, zastąpiony jest w niej wzorcem, którego niepewność $\Delta_u w$ jest zazwyczaj znacznie mniejsza, oraz przyrządem pomiarowym o małym zakresie i małej w związku z tym niepewności $\Delta_u \alpha$. Wartość niepewności zerowania jest związana z niepewnością przyrządu i przy starannym wyzerowaniu spełniać winna warunek $\Delta_u z \leq \Delta_u \alpha$. W ostatecznym efekcie, mimo iż w metodzie różnicowej występują trzy różne źródła błędów (przyrząd - $\Delta_u \alpha$, wzorzec - $\Delta_u w$ i zerowanie - $\Delta_u z$) ogólna niepewność pomiaru jest na ogół mniejsza niż w metodzie wychyłowej;
- ◆ metody zerowe są najczęściej jeszcze bardziej złożone niż różnicowe z powodu występowania dodatkowych urządzeń (źródło wielkości wzorcowych, urządzenie równoważące, detektor) oraz czynności (równoważenie). Jednocześnie są również bardziej dokładne. Wynika to z:
 - zastąpienia występującego w metodzie różnicowej przyrządu pomiarowego przez detektor. W pewnym uproszczeniu detektor można traktować jako przyrząd o zerowym zakresie pomiarowym i bardzo małej, w związku z tym niepewności ($\Delta_D \ll \Delta_u \alpha$);
 - małej wrażliwości metod zerowych na zmiany wartości wielkości wpływowych (powstałe z tego powodu błędy przeważnie kompensują się);

Reasumując, można stwierdzić, że najłatwiejsza w realizacji jest metoda wychyłowa, następnie metoda różnicowa, a na końcu metody zerowe. Natomiast jeśli chodzi o dokładność pomiaru, to kolejność w/w metod jest dokładnie odwrotna.



Metoda pośrednia to taki sposób pomiaru, w którym wartość wielkości mierzonej wyznacza się na podstawie bezpośrednich pomiarów innych wielkości związanych z wielkością mierzoną znaną zależnością. Zależność ta bywa nazywana **równaniem definicyjnym pomiaru**.

Jeżeli wielkość x jest związana z wielkościami $a, b, \dots$ zależnością:

$$x = f(a, b, \dots)$$

to pomiar metodą pośrednią polegać będzie na uprzednim pomiarze wartości wielkości $a, b, \dots$ i obliczeniu na podstawie równania definicyjnego wartości wielkości x .

Wynik pomiaru przeprowadzonego metodą pośrednią określają zależności:

$$x_{z,p} = f(a_{z,p}, b_{z,p}, \dots) \quad (50a)$$

$$\Delta_u x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial a} \Delta_u a\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial b} \Delta_u b\right)^2 + \dots} \quad (50b)$$

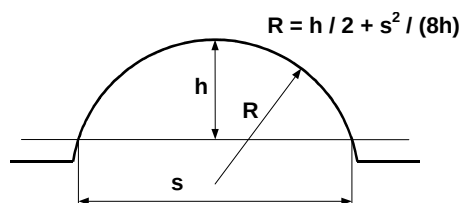
gdzie:

$x_{z,p}$ - wartość zaobserwowana poprawna wielkości mierzonej metodą pośrednią;
 $a_{z,p}, b_{z,p}, \dots$ - wartości zaobserwowane poprawne wielkości określających wielkość mierzoną, które zostały ustalone na drodze uprzednich pomiarów;
 $\Delta_u x$ - niepewność pomiaru pośredniego;
 $\Delta_u a, \Delta_u b, \dots$ - niepewności pomiaru wielkości określających wielkość mierzoną
 $\left|\frac{\partial x}{\partial a} \Delta_u a\right|, \left|\frac{\partial x}{\partial b} \Delta_u b\right|, \dots$ - niepewności cząstkowe, tj. składowe niepewności pomiaru wielkości x wynikające z niepewności pomiarów wielkości $a, b, \dots$;

Jako przykłady pomiaru metodą pośrednią służyć mogą:

- pomiar średniej prędkości pojazdu poprzez bezpośrednie pomiary drogi i czasu, w jakim droga ta została przez pojazd przebyta;
- pomiar gęstości ciała na podstawie uprzednich pomiarów jego masy i objętości;
- pomiar oporu właściwego przewodnika poprzez uprzednie pomiary jego oporu elektrycznego i wymiarów geometrycznych (długość, pole przekroju);
- pomiar promienia łuku poprzez bezpośrednie pomiary długości jego strzałki i cięciwy (rys. 28).





Rys. 28. Pomiar promienia wycinka koła metodą pośrednią

Jeżeli równanie definicyjne pomiaru jest jednocześnie równaniem definicyjnym wielkości mierzonej, to metodę pomiaru określa się mianem **metody podstawowej** lub **metody bezwzględnej** [1, 3, 10]. Ponieważ do definiowania wielkości pochodnych używa się najczęściej wielkości odtwarzalnych najdokładniej, więc dokładność pomiaru metodą bezwzględną jest z reguły najwyższa.

2.7. POMIARY WIELOKROTNE

2.7.1. Pomiar wielokrotny – podstawy teoretyczne

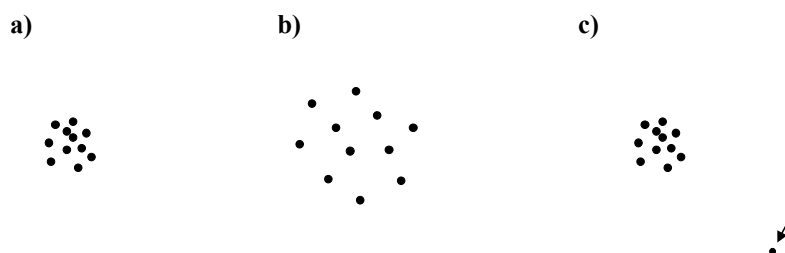
Wielokrotny pomiar tej samej wielkości określonej dostarcza szeregu cennych informacji i zdaniem J. Taylor'a [20] jest jedną z najlepszych metod oceny wiarygodności prowadzonych pomiarów.

Ze względu na błędy przypadkowe (p. rozdział 2.4) wyniki poszczególnych pomiarów tej samej wielkości określonej różnią się pomiędzy sobą. Statystyczna analiza tych wyników pozwala na uzyskanie szeregu cennych informacji. W szczególności pozwala ona na:

- wyznaczenie wartości wielkości mierzonej z mniejszą niepewnością niż niepewność wyniku pojedynczego pomiaru tej wielkości;
- określenie niepewności sumy wszystkich błędów cząstkowych o charakterze przypadkowym, a także niepewności poszczególnych błędów cząstkowych o tym samym charakterze;
- wykrycie ewentualnych wyników pomiaru obarczonych błędami grubymi, co pozwala na ich odrzucenie;

Statystyczna analiza wyników pomiarów wielokrotnych nie dostarcza, niestety, żadnych danych na temat błędów o charakterze systematycznym. Dlaczego tak się dzieje? Popatrzmy przez chwilę na rys. 6 (str. 34).

Zdaniem wspomnianego już J. Taylor'a metoda ilustracji błędów na przykładzie tarczy strzeleckiej, mimo iż doskonale ilustruje skutki błędów systematycznych, przypadkowych i grubych, ma jednak jedną, bardzo istotną wadę. Ponieważ rysunki pokazują położenie tarczy, więc już na pierwszy rzut oka można ocenić celność strzału (rzeczywistą wartość błędu). Znajomość położenia tarczy odpowiada w przyjętej analogii znajomości rzeczywistej wartości mierzonej wielkości. A przecież wartości tej nie znamy. Więc aby przybliżyć analogię przedstawioną na rys. 6 do przypadków rzeczywistych należy narysować przestrzeliny bez tarczy (p. rys. 29)



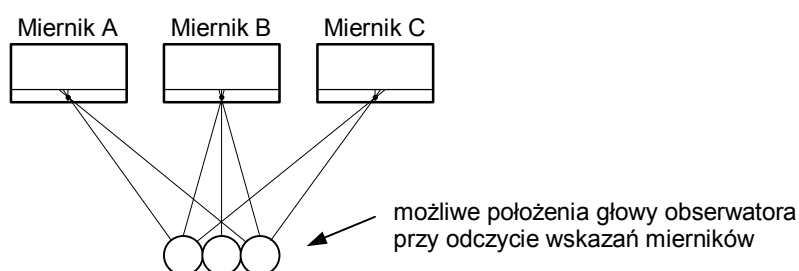
Rys. 29. Ilustracja błędów pomiaru:

- a) rozrzut wyników spowodowany błędami przypadkowymi;
- b) rozrzut wyników spowodowany błędami przypadkowymi większymi niż w przypadku a);
- c) wynik pomiaru obciążony błędem grubym;

Zasady analogii: strzelanie do tarczy $\Leftrightarrow$ czynności pomiarowe
 położenie przestrzeliny $\Leftrightarrow$ wartość zaobserwowana
 niewidoczny środek tarczy $\Leftrightarrow$ nieznaną rzeczywistą wartość wielkości mierzonej
 niewidoczna odległość przestrzeliny od środka tarczy $\Leftrightarrow$ nieznaną rzeczywistą wartość błędu pomiaru

Analiza rysunku 29 prowadzi do wniosku, że nie zawiera on żadnych informacji pozwalających na ocenę wartości błędu systematycznego. Można natomiast na jego podstawie, kierując się rozrzutem przestrzelin, wnioskować na temat wielkości błędów przypadkowych (np. to, że w przypadku b są one większe niż w przypadku a, a także identyfikować wyniki obciążone błędami grubymi (przypadek c). Z taką właśnie sytuacją mamy do czynienia w przypadku realnych pomiarów. Badając rozrzut wartości uzyskanych wyników możemy ocenić wielkość błędów przypadkowych czy zauważyć wystąpienie błędu grubego, nie możemy natomiast uzyskać żadnych informacji dotyczących błędów systematycznych.

Należy mocno podkreślić, że granica pomiędzy błędami przypadkowymi i systematycznymi nie zawsze jest ostra, a przyczyna błędu systematycznego w jednym pomiarze może wywoływać błędy o charakterze przypadkowym w innym pomiarze. Przykład takiego przypadku pokazano na rys. 30. Mając miernik umieszczony na wprost siebie (miernik B) i odczytując kilka razy jego wskazania będziemy prawdopodobnie patrzeć na niego pod różnymi kątami, co spowoduje powstanie błędu paralaksy o charakterze przypadkowym. Umieszczając natomiast mierniki po lewej lub prawej stronie swego stanowiska i patrząc na nie z tych samych pozycji, co na miernik B, wprowadzimy do wszystkich swoich odczytów z tych przyrządów błędy o charakterze systematycznym.



Rys. 30. Błędy paralaksy przy odczycie wskazań mierników

Wniosek: ta sama przyczyna (efekt paralaksy) może powodować raz błędy o charakterze przypadkowym a innym razem błędy o charakterze systematycznym.

Wielokrotne pomiary tej samej wielkości określonej umożliwiają ograniczenie niepewności pomiaru wynikającej z błędów przypadkowych. Nie pozwalają natomiast ograniczyć niepewności wynikającej z błędów systematycznych. Ponieważ całkowita niepewność pomiaru jest określona zależnością:¹

$$\Delta_u x = \sqrt{(\Delta_u^s x)^2 + (\Delta_u^p x)^2} \quad (51)$$

gdzie:

$\Delta_u^s x$ - niepewność pomiaru wynikająca z błędów systematycznych;

$\Delta_u^p x$ - niepewność pomiaru wynikająca z błędów przypadkowych;

więc pomiary wielokrotne są szczególnie efektywne wtedy, gdy $\Delta_u^p x$ jest duże w stosunku do $\Delta_u^s x$.

¹ zależność przybliżona; dokładniejsze metody określania niepewności całkowitej przedstawiono w [17] i [22]

Zwiększenie stosunku $\Delta_u^p x / \Delta_u^s x$ można osiągnąć poprzez wprowadzanie zmian w trakcie realizacji kolejnych pomiarów. Kolejne powtórzenia nie powinny więc być identyczne, lecz należy w nich zmieniać możliwie najwięcej czynników.

Należy powtarzać od początku wszystkie czynności prowadzące do uzyskania wyniku. Należy, jeśli to możliwe, zmieniać stosowane przyrządy, kolejność wykonywanych czynności, osoby dokonujące pomiaru, daty wykonania pomiaru. Gdy przedmiotem badań i związanych z nimi pomiarów jest jakiś materiał, to można stosować próbki o różnych kształtach, różnej wielkości, itp. Można zmieniać sposób i miejsce pobierania wielkości mierzonej, np. przy pomiarze średnicy wałka za pomocą suwmiarki należy wybierać różne miejsca wałka, na nowo ustawiać i dociskać szczęki suwmiarki. Celem wprowadzanych zmian, które zwiększają rozrzut uzyskiwanych wyników (np. zmiana osoby mierzącej zwiększa rozrzut wyników wskutek różnic indywidualnych reakcji) jest zwiększenie przypadkowości powstających błędów. Przykładowo, w doświadczeniu przedstawionym na rys. 30, każdorazowa zmiana kolejności ustawienia mierników spowodowałaby, że błędy paralaksy przy odczycie z mierników A i C straciłyby systematyczny charakter. Podobnie może stać się z innymi błędami systematycznymi.

W przypadku pomiarów wielokrotnych uzyskujemy pewną liczbę (często dość dużą) wyników pomiarów. Problemem staje się prezentacja uzyskanych wartości.

Najprostszą metodą, niestety zawierającą stosunkowo niedużą ilość informacji, jest prezentowanie zbioru wyników za pomocą miary wartości średniej (wartości, wokół której grupują się uzyskane czy możliwe do uzyskania wartości zaobserwowane) i miary rozrzutu (charakteryzującej wielkość odstępstw poszczególnych wartości zaobserwowanych od ich wartości średniej). Istnieje wiele miar wartości średniej (np. średnia arytmetyczna, średnia geometryczna, średnia harmoniczna, mediana, wartość modalna) i wiele miar rozrzutu (np. rozstęp, odchylenie pojedynczego wyniku, średnie odchylenie bezwzględne, średnie odchylenie kwadratowe). Spośród wyżej wymienionych miar najczęściej w praktyce używane są średnia arytmetyczna i średnie odchylenie kwadratowe. Określają je następujące zależności:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (52)$$

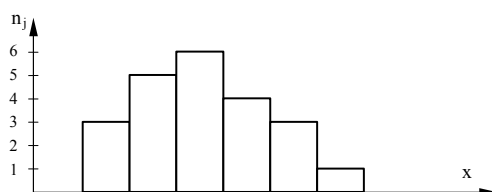
gdzie:

- $\bar{x}$ - średnia arytmetyczna;
- s - średnie odchylenie kwadratowe (zwane też odchyleniem standardowym z próby);
- x_i - wartość zaobserwowana i-tego pomiaru;
- N - liczba wykonanych pomiarów (powtórzeń);



Większą ilość informacji o zbiorze uzyskanych (lub możliwych do uzyskania) wyników zawierają ich histogramy i rozkłady.

Histogram jest to wykres słupkowy, w którym cały zakres uzyskanych wartości został podzielony na przedziały. Liczba wyników trafiających do poszczególnych przedziałów decyduje o wysokości słupka wystawionego w danym przedziale (rys. 31).

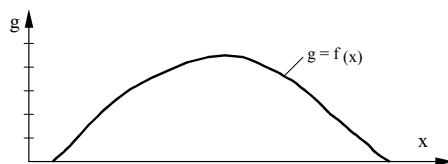


Rys. 31. Wyniki pomiaru prezentowane w postaci histogramu (n_j – liczność wyników w j -tym przedziale)

Zamiast liczności n_j można użyć liczności względnej $f_j = n_j/N$, czyli tzw. częstości (j oznacza w tym przypadku wyróżnik przedziału). Przy odpowiednim wyskalowaniu wykresy liczności i częstości posiadają identyczne kształty.

Należy zwrócić uwagę, że częstość występowania jest jedną z definicji prawdopodobieństwa. Zgodnie z tą definicją wysokość słupka wystawionego w określonym przedziale histogramu częstości można interpretować jako prawdopodobieństwo zdarzenia, że uzyskana wartość zaobserwowana będzie należała do tego przedziału.

Rozkład jest granicą do jakiej dąży histogram, gdy liczba wyników pomiarów dąży do nieskończoności, liczba przedziałów histogramu również, a szerokość tych przedziałów maleje do zera. Na osi pionowej odkłada się wtedy wartość stosunku $g_j = f_j/b$, gdzie b oznacza szerokość przedziału ($b \rightarrow 0$). Przykładowy rozkład pokazano na rys. 32.



Rys. 32. Przykładowy rozkład możliwych wyników pomiaru

Istnieje wiele różnych rozkładów teoretycznych. W naszych dalszych rozważaniach wykorzystane zostaną dwa spośród nich – rozkład normalny i rozkład Studenta.

Rozkład normalny należy do najważniejszych rozkładów teoretycznych. Jego rola i znaczenie wynikają z faktu, że jest on rozkładem granicznym, do którego dąży suma zmiennych losowych (o dowolnych w zasadzie rozkładach), przy liczbie składników tej sumy dążącej do nieskończoności. A ponieważ w praktyce bardzo często spotykamy wielkości stanowiące wypadkowe wielu innych wielkości o charakterze zmiennych losowych więc rozkłady tych wielkości wypadkowych są zbliżone do rozkładu normalnego. Dotyczy to również błędów pomiarów, które są sumą wielu błędów cząstkowych, a poszczególne błędy cząstkowe, jak już wspomniano wcześniej (str. 43) można traktować jako zmienne losowe.

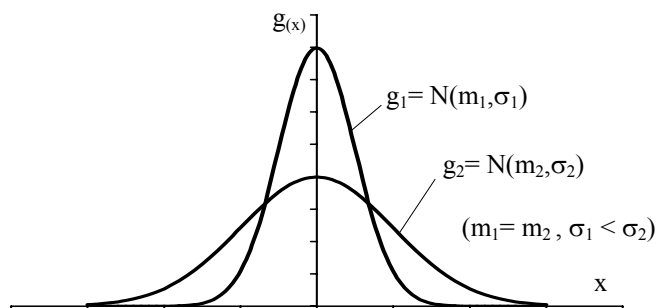
Gęstość rozkładu normalnego zwanego również rozkładem Gauss'a (p. rys. 33) opisuje zależność:

$$g(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-(x-m)^2 / 2 \cdot \sigma^2} \quad (53)$$

gdzie:

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot g(x) \cdot dx \quad \text{- miara wartości średniej zwana wartością oczekiwaną;}$$

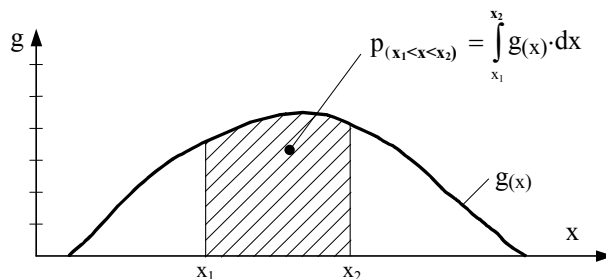
$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 \cdot g(x) \cdot dx} \quad \text{- miara rozrzutu zwana odchyleniem standardowym;}$$



Rys. 33. Krzywe gęstości rozkładów normalnych o różnych odchyleniach standardowych

Wspomniano już, że wysokość słupka w określonym przedziale histogramu częstości można interpretować jako prawdopodobieństwo zdarzenia, że wynik pomiaru znajdzie się w tym przedziale. W przypadku rozkładu (p. rys. 34) prawdopodobieństwo zdarzenia, że wynik trafi do przedziału (x_1, x_2) określa zależność:

$$P_{(x_1 < x < x_2)} = \int_{x_1}^{x_2} g(x) \cdot dx \quad (54)$$



Rys. 34. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wynik pomiaru znajdzie się w przedziale (x_1, x_2)

Dla wielu różnych rozkładów teoretycznych $\int_{x_1}^{x_2} g(x) \cdot dx$ liczy się dość łatwo.

W przypadku rozkładu normalnego obliczanie tej całki jest dość skomplikowane. Z tego powodu całka funkcji gęstości rozkładu normalnego została stabelaryzowana.

Podawane w tablicach wartości całek funkcji gęstości rozkładu normalnego obliczane są dla zmiennej losowej standaryzowanej, tj. zmiennej, której wartości zostały przekształcone w taki sposób, aby jej rozkład posiadał parametry $m = 0$ i $\sigma = 1$

Aby doprowadzić dowolną zmienną do postaci standaryzowanej należy przekształcić jej wartości zgodnie z zależnością:

$$t = \frac{x - m}{\sigma} \quad (55)$$

gdzie:

- x – wartość dowolnej zmiennej losowej (np.: błędu pomiaru czy wartości zaobserwowanej);
- t – wartość tej zmiennej po standaryzacji;
- m – wartość oczekiwana zmiennej;
- σ – odchylenie standardowe;

W praktyce nieznaną wartość m zastępuje się najczęściej średnią arytmetyczną uzyskanych wartości zaobserwowanych, a nieznanne odchylenie standardowe – średnim odchyleniem kwadratowym s .

W literaturze spotyka się trzy rodzaje całek funkcji gęstości rozkładu normalnego:

- 1) tzw. dwustronna funkcja Laplace'a (p. rys. 35a)

$$\Phi(t) = \int_{-t}^{+t} g(t) \cdot dt \quad (56)$$

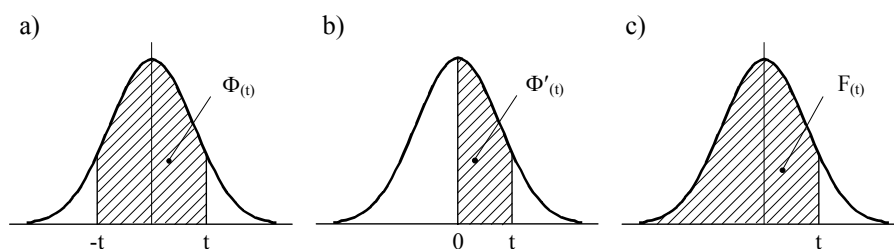


2) tzw. jednostronna funkcja Laplace'a (p. rys. 35b)

$$\Phi'(t) = \int_0^t g(t) \cdot dt \quad (57)$$

3) dystrybuanta (p. rys 35c)

$$F(t) = \int_{-\infty}^t g(t) \cdot dt \quad (58)$$



Rys. 35. Różne postaci stabelaryzowanych całek po gęstości rozkładu normalnego

Spośród w/w funkcji najbardziej uniwersalny charakter ma dystrybuanta. Dlatego w dalszych rozważaniach ograniczono się tylko do niej. Dystrybuanta rozkładu normalnego jest standardową funkcją arkusza kalkulacyjnego Excel (funkcja rozkład. normalny.s)

Jeżeli korzystamy z tablic zawierających funkcje Laplace'a obliczenie wartości dystrybuanty jest bardzo proste. Obowiązują następujące zależności:

$$F(t) = 0.5 - 0.5 \cdot \Phi_{(-t)} \quad \text{dla } t < 0; \quad (59a)$$

$$F(t) = 0.5 + 0.5 \cdot \Phi(t) \quad \text{dla } t > 0; \quad (59b)$$

$$F(t) = 0.5 - \Phi'_{(-t)} \quad \text{dla } t < 0; \quad (59c)$$

$$F(t) = 0.5 + \Phi'(t) \quad \text{dla } t > 0; \quad (59d)$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wartość zmiennej losowej X będzie zawarta w przedziale (x_1, x_2) równe $\int_{x_1}^{x_2} g(x) \cdot dx$ (rys. 34) jest równe prawdopodobieństwu zdarzenia, że odpowiadająca jej wartość zmiennej standaryzowanej będzie zawarta w przedziale (t_1, t_2) , a to z kolei jest równe różnicy dystrybuant $F(t_2) - F(t_1)$.

Wartości dystrybuant rozkładu normalnego zamieszczono w tablicy 5.

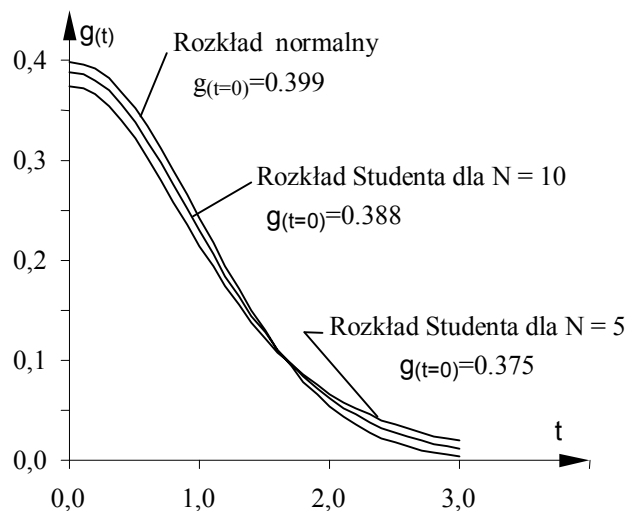
TABELA 5. Wartości gęstości prawdopodobieństwa $g(t)$ i dystrybuanty $F(t)$ rozkładu normalnego standaryzowanego ($m = 0, \sigma = 1$)								
t	$g(t)$	$F(t)$	t	$g(t)$	$F(t)$	t	$g(t)$	$F(t)$
0,00	0,3989	0,5000	1,00	0,2420	0,8413	2,00	0,0540	0,9772
0,05	0,3984	0,5199	1,05	0,2299	0,8531	2,05	0,0488	0,9798
0,10	0,3970	0,5398	1,10	0,2179	0,8643	2,10	0,0440	0,9821
0,15	0,3945	0,5596	1,15	0,2059	0,8749	2,15	0,0396	0,9842
0,20	0,3910	0,5793	1,20	0,1942	0,8849	2,20	0,0355	0,9861
0,25	0,3867	0,5987	1,25	0,1826	0,8944	2,25	0,0317	0,9878
0,30	0,3814	0,6179	1,30	0,1714	0,9032	2,30	0,0283	0,9893
0,35	0,3752	0,6368	1,35	0,1604	0,9115	2,35	0,0252	0,9906
0,40	0,3683	0,6554	1,40	0,1497	0,9192	2,40	0,0224	0,9918
0,45	0,3605	0,6736	1,45	0,1394	0,9265	2,45	0,0198	0,9929
0,50	0,3521	0,6915	1,50	0,1295	0,9332	2,50	0,0175	0,9938
0,55	0,3429	0,7088	1,55	0,1200	0,9394	2,55	0,0154	0,9946
0,60	0,3332	0,7257	1,60	0,1109	0,9452	2,60	0,0136	0,9953
0,65	0,3230	0,7422	1,65	0,1023	0,9505	2,65	0,0119	0,9960
0,70	0,3123	0,7580	1,70	0,0940	0,9554	2,70	0,0104	0,9965
0,75	0,3011	0,7734	1,75	0,0863	0,9599	2,75	0,0091	0,9970
0,80	0,2897	0,7881	1,80	0,0790	0,9641	2,80	0,0079	0,9974
0,85	0,2780	0,8023	1,85	0,0721	0,9678	2,85	0,0069	0,9978
0,90	0,2661	0,8159	1,90	0,0656	0,9713	2,90	0,0060	0,9981
0,95	0,2541	0,8289	1,95	0,0596	0,9744	2,95	0,0051	0,9984
1,00	0,2420	0,8413	2,00	0,0540	0,9772	3,00	0,0044	0,9987

Zasady obliczania prawdopodobieństwa zdarzenia, że zmienna losowa o rozkładzie normalnym (np. wynik pomiaru) będzie zawarta w określonym przedziale przedstawiono bliżej w zadaniach 1.25 – 1.26 zamieszczonych w rozdziale 3.1.

Drugim z teoretycznych rozkładów zmiennych losowych powszechnie używanym w analizie wyników pomiarów jest rozkład Studenta. Duże znaczenie i przydatność rozkładu Studenta wynikają z dwóch powodów:

- 1° Jest to rozkład zmiennej losowej: $t = \frac{\bar{x} - m}{s} \cdot \sqrt{n}$, która wiąże nieznaną wartość oczekiwaną zmiennej losowej X o rozkładzie normalnym, ze zmiennymi losowymi $\bar{x}$ i s określonymi w oparciu o zależności 52.
- 2° Jest to rozkład niezależny od odchylenia standardowego σ zmiennej losowej X , dzięki czemu przy analizach prowadzonych w oparciu o rozkład Studenta nie musimy szacować wartości tego parametru.

Funkcja gęstości rozkładu Studenta ma bardzo skomplikowaną postać analityczną i w praktyce raczej się z niej nie korzysta. Wykres tej funkcji (p. rys. 36) jest podobny do wykresu gęstości rozkładu normalnego z tą różnicą, że krzywa rozkładu Studenta jest nieco bardziej spłaszczona. Wielkość tego spłaszczenia zależy od liczności N próby, którą reprezentują zmienne $\bar{x}$ i s . Im większa liczność tej próby, tym rozkład Studenta jest bardziej podobny do rozkładu normalnego i zdaniem wielu autorów przy $N > 30$ różnice pomiędzy obu rozkładami można uznać za mało istotne.



Rys. 36. Porównanie wykresów gęstości wybranych rozkładów Studenta i rozkładu normalnego

Rozkład Studenta jest stabilizowany. W tablicach podawane są wartości graniczne t_g zmiennej t , obliczone tak, aby prawdopodobieństwo zdarzenia, że zmienna losowa t przyjmie wartość w przedziale $(-t_g, t_g)$ było równe założonym wartościom p_i (tabela 6). Z definicji zmiennej t wynika, że zdarzenie określone nierównością $-t_g \leq t \leq t_g$ jest równoważne zdarzeniu określonemu nierównością:

$$\bar{x} - \frac{t_g \cdot s}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + \frac{t_g \cdot s}{\sqrt{n}} \quad (60)$$

TABELA 6. Rozkład Studenta. Wartości graniczne t_g $P(-t_g < t < t_g) = p_i$								
N-1 ↓	$p_i = 50\%$	$p_i = 60\%$	$p_i = 70\%$	$p_i = 80\%$	$p_i = 90\%$	$p_i = 95\%$	$p_i = 98\%$	$p_i = 99\%$
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
50	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
100	0,677	0,845	1,042	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
1000	0,675	0,842	1,037	1,282	1,646	1,962	2,330	2,581

Nierówność 60 interpretujemy w ten sposób, że losowy przedział¹ wartości $\left(\bar{x} - \frac{t_g \cdot s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{t_g \cdot s}{\sqrt{n}}\right)$ obejmuje nieznaną wartość oczekiwaną m zmiennej losowej X .

Prawdopodobieństwo tego zdarzenia

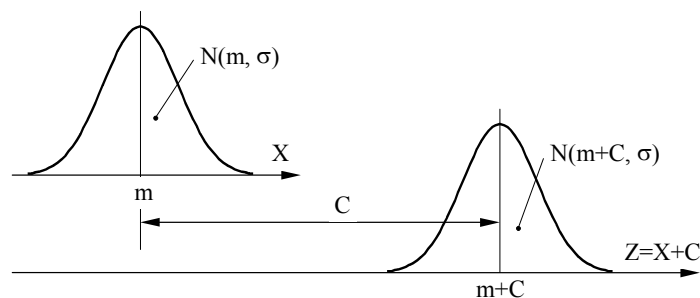
$$P\left(\bar{x} - \frac{t_g \cdot s}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + \frac{t_g \cdot s}{\sqrt{n}}\right) = P(-t_g \leq t \leq t_g) = p_i$$

nosi nazwę poziomu ufności

W analizie wyników pomiarów wielokrotnych wykorzystuje się szereg twierdzeń statystyki matematycznej. Poniżej przypomniano niektóre z nich.

Twierdzenie I

Jeżeli zmienna losowa podlega rozkładowi normalnemu o parametrach (m, σ) , to suma tej zmiennej i dowolnej wartości stałej C podlega rozkładowi normalnemu o parametrach $(m+C, \sigma)$.



Uwaga!

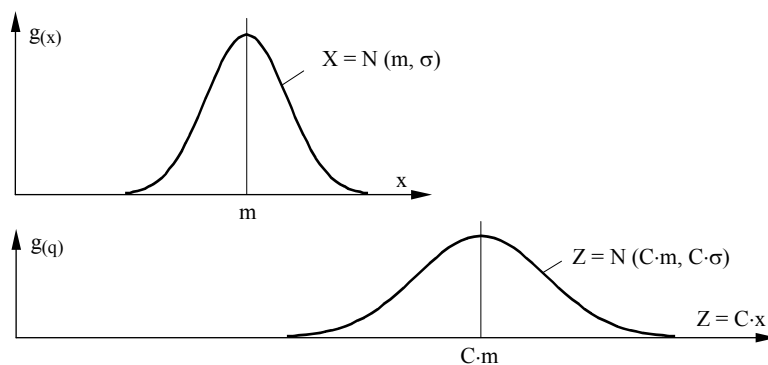
Twierdzenie I można uogólnić na dowolny rozkład.

Twierdzenie II

Jeżeli zmienna losowa podlega rozkładowi normalnemu o parametrach (m, σ) , to iloczyn tej zmiennej i dowolnej wartości stałej C podlega rozkładowi normalnemu o parametrach $(C \cdot m, C \cdot \sigma)$.

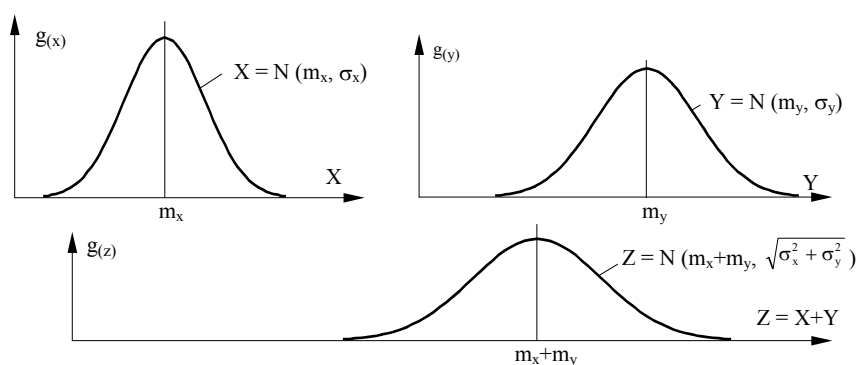
¹ przedział ten, nazywany przedziałem ufności wartości oczekiwanej, ma charakter losowy, bo jego granice określają funkcje zmiennej losowej;





Twierdzenie III

Jeżeli zmienna losowa X podlega rozkładowi normalnemu o parametrach (m_x, σ_x) , a zmienna losowa Y - rozkładowi normalnemu o parametrach (m_y, σ_y) , to suma tych zmiennych $Z=X+Y$ podlega rozkładowi normalnemu o parametrach $(m_x+m_y, \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2})$



Twierdzenie III można uogólnić na dowolną ilość zmiennych

Prowadzone dalej analizy oparto na założeniu, że rzeczywistą wartość błędu pomiaru można traktować jako sumę dwu składowych:

- wypadkowej błędów cząstkowych o charakterze systematycznym;
- wypadkowej błędów cząstkowych o charakterze przypadkowym;

czyli:

$$\Delta_r x = \Delta_r^s x + \Delta_r^p x \quad (61)$$

gdzie:

$\Delta_r x$ - rzeczywista wartość błędu pomiaru;

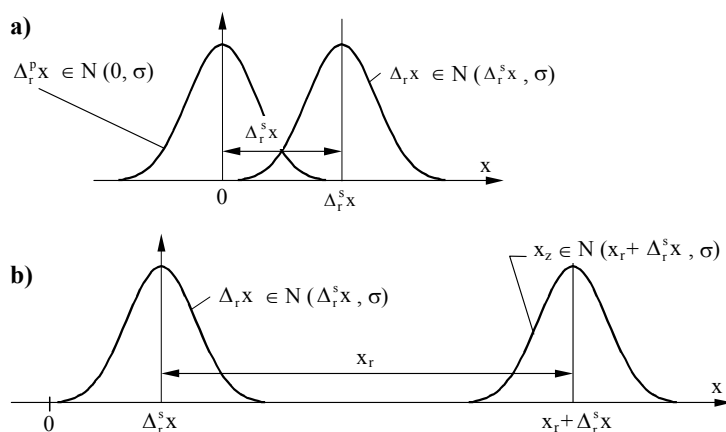
$\Delta_r^s x$ - rzeczywista wartość sumy błędów cząstkowych o charakterze systematycznym;

$\Delta_r^p x$ - rzeczywista wartość sumy błędów cząstkowych o charakterze przypadkowym;

Zgodnie z definicją błędu systematycznego, błędy cząstkowe o charakterze systematycznym mają w każdym pomiarze z serii pomiarów tą samą wartość. W takim razie stałą wartość posiada również ich suma $\Delta_r^s x$. Natomiast wartości błędów cząstkowych o charakterze przypadkowym mogą się zmieniać i być dla każdego z pomiarów serii inne. W związku z powyższym błędy te można traktować jako zmienne losowe. A ponieważ najczęściej jest ich wiele, działają w różnych kierunkach (tzn. ich wartości różnią się znakami) i są przeważnie wzajemnie niezależne, więc ich suma $\Delta_r^p x$ zgodnie z centralnym twierdzeniem rachunku prawdopodobieństwa, posiada rozkład zbliżony do normalnego o parametrach $m = 0$ i σ .

Rzeczywista wartość błędu pomiaru $\Delta_r x$ jako suma stałej ($\Delta_r^s x$) i zmiennej losowej ($\Delta_r^p x$), zgodnie z przytoczonym wcześniej twierdzeniem I, będzie również zmienną losową o rozkładzie pokazanym na rys. 37a.

Z definicji błędu pomiaru (str. 34) wynika, że wartość zaobserwowana x_z jest równa sumie: $x_r + \Delta_r x$. Wartość x_r można traktować jako stałą (zależy wyłącznie od stanu mierzonego obiektu, jeżeli w trakcie kolejnych pomiarów stan ten nie ulega zmianie to wartość x_r również się nie zmienia). W takim razie zgodnie z twierdzeniem I, wartość zaobserwowana posiada taką samą postać rozkładu jak błąd pomiaru, z tym, że rozkłady obu tych zmiennych są przesunięte względem siebie o wartość rzeczywistą (rys. 37b).



Rys. 37. Rozkłady błędu pomiaru i wartości zaobserwowanej

a) rozkład błędu pomiaru; b) rozkład wartości zaobserwowanej;

Dokonując wielokrotnego pomiaru wielkości mierzonej uzyskujemy zbiór wyników, które zawsze mniej lub więcej różnią się między sobą. Stajemy wtedy przed dylematem, które z uzyskanych wyników są najbliższe wartości rzeczywistej, które z nich zawierają rzetelną informację o mierzonym obiekcie. Odpowiedź na tak postawione pytanie brzmi: najrzetelniejszą, bo najpełniejszą informację o mierzonym obiekcie zawiera pełny zbiór wyników, a najlepszym przybliżeniem nieznannej wartości rzeczywistej jest średnia arytmetyczna uzyskanych wartości zaobserwowanych.

Aby udowodnić, że średnia arytmetyczna dobrze przybliża nieznaną wartość rzeczywistą policzmy niepewność tego przybliżenia. Obliczenia przeprowadzimy dla przypadku, kiedy błędy systematyczne są pomijalnie małe.

Przeprowadzając serię doświadczeń, z których każde polegałoby na wykonaniu N pomiarów tej samej wielkości określonej i obliczeniu średniej arytmetycznej ich wyników stwierdzilibyśmy, że wartości średniej arytmetycznej w poszczególnych seriach różnią się pomiędzy sobą, czyli że średnia też jest zmienną losową. W oparciu o podane wyżej twierdzenia II i III można określić rozkład średniej. Wystarczy zauważyć, że średnia arytmetyczna jest sumą zmiennych losowych (wartość zaobserwowana pierwszego pomiaru, wartość zaobserwowana drugiego pomiaru, ..., wartość zaobserwowana N -tego pomiaru) pomnożoną przez stałą $C = 1 / N$. Dodatkowo każda zmienna (wartość zaobserwowana pierwszego pomiaru, wartość zaobserwowana drugiego pomiaru, itd.) posiada rozkład normalny o tych samych parametrach (x_r , σ). W takim razie stosując najpierw twierdzenie III, a następnie twierdzenie II, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} m_{\Sigma x} &= m_{x_1} + m_{x_2} + \dots + m_{x_N} = x_r + x_r + \dots + x_r = N \cdot x_r \\ \sigma_{\Sigma x} &= \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \dots + \sigma_{x_N}^2} = \sqrt{\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2} = \sqrt{N \cdot \sigma^2} = \sigma \cdot \sqrt{N} \\ m_{\bar{x}} &= \frac{m_{\Sigma x}}{N} = \frac{N \cdot x_r}{N} = x_r \\ \sigma_{\bar{x}} &= \frac{\sigma_{\Sigma x}}{N} = \frac{\sigma \cdot \sqrt{N}}{N} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \end{aligned}$$

Niepewność pojedynczego pomiaru określa zależność $\Delta_u^p x = t \cdot \sigma$, natomiast niepewność średniej arytmetycznej $\Delta_u^p \bar{x} = t \cdot \sigma_{\bar{x}}$, gdzie t jest parametrem wynikającym z przyjętego poziomu ufności. Porównując te niepewności mamy:

$$\frac{\Delta_u^p \bar{x}}{\Delta_u^p x} = \frac{t \cdot \sigma_{\bar{x}}}{t \cdot \sigma} = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sigma} = \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (62)$$



Z powyższych obliczeń wynika, że niepewność średniej arytmetycznej jest $\sqrt{N}$ razy mniejsza od niepewności każdego pojedynczego pomiaru, z zastrzeżeniem, że dotyczy to przypadków, kiedy błędy systematyczne są pomijalnie małe.

W praktyce podstawowymi problemami związanymi z pomiarami wielokrotnymi są:

- szacowanie wartości błędu przypadkowego (sumy błędów cząstkowych o charakterze przypadkowym);
- szacowanie wartości błędu systematycznego;
- szacowanie wartości błędu cząstkowego o charakterze przypadkowym;
- ocena celowości dokonywania pomiarów wielokrotnych;
- określenie niezbędnej liczby powtórzeń;
- identyfikacja wyników obarczonych błędem grubym;
- opracowanie wyniku pomiaru wielokrotnego;

Sposoby rozwiązania w/w problemów zostaną przedstawione w kolejnych podrozdziałach

2.7.2. Szacowanie wartości błędu przypadkowego

Błąd przypadkowy, o którym mowa w niniejszym podrozdziale stanowi sumę tych wszystkich składowych błędów pomiaru, które mają charakter przypadkowy.

W niniejszym opracowaniu przyjęto (p. rozdz. 2.4.2), że oszacowanie wartości każdego błędu można przedstawić w postaci:

$$\Delta_i x = \Delta_{m,i} x \pm \Delta_{u,i} x$$

gdzie:

i – wyróżnik błędu;

$\Delta_{m,i} x$ – szacowana wartość średnia i -tego błędu cząstkowego;

$\Delta_{u,i} x$ – niepewność oszacowania wartości średniej i -tego błędu cząstkowego (zwana krócej niepewnością);

W przypadku sumy wielu błędów o charakterze przypadkowym zakłada się, że jej wartość średnia jest równa zeru. Wyznaczenie wartości błędu przypadkowego sprowadzać się będzie zatem do wyznaczenia jego niepewności.

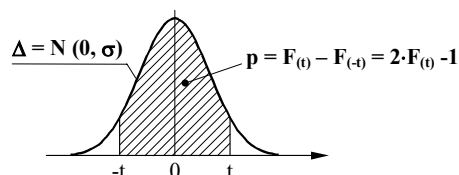
Niepewnością przypadkową pojedynczego pomiaru nazywamy wartość graniczną $\Delta_u^p x$ dobraną tak, aby prawdopodobieństwo zdarzenia, że wypadkowa wszystkich błędów cząstkowych o charakterze przypadkowym będzie zawarta w przedziale $\pm \Delta_u^p x$ było równe przyjętemu poziomowi ufności p .

Przy określaniu niepewności przypadkowej $\Delta_u^p x$ mogą wystąpić dwa przypadki:

1. Błąd przypadkowy posiada rozkład normalny o znanym odchyleniu standardowym σ ;
2. Błąd przypadkowy posiada rozkład normalny o nieznanym odchyleniu standardowym

W przypadku pierwszym, przy założeniu że wypadkowa wszystkich błędów cząstkowych o charakterze przypadkowym posiada rozkład normalny o parametrach ($m = 0, \sigma = \sigma$), wartość $\Delta_u^p x$ wyznacza się następująco:

1. Przyjmujemy właściwy dla rozwiązywanego problemu poziom ufności p ;
2. Obliczamy wartość dystrybucyjną rozkładu normalnego odpowiadającego przyjętemu poziomowi ufności



Z rysunku powyżej wynika, że $F(t) = (p + 1)/2$

3. Na podstawie tabeli rozkładu normalnego (tabela 5) znajdujemy taką wartość zmiennej standaryzowanej t , dla której wartość dystrybucyjnej $F(t) = (p + 1)/2$;
4. Obliczamy wartość niepewności przypadkowej

$$\Delta_u^p x = t \cdot \sigma \quad (63)$$

W przypadku drugim, przy założeniu że wypadkowa wszystkich błędów cząstkowych o charakterze przypadkowym posiada rozkład normalny o parametrach ($m = 0, \sigma = ?$) wartość $\Delta_u^p x$ wyznacza się następująco:

1. Przyjmujemy właściwy dla rozwiązywanego problemu poziom ufności p ;
2. Ustalamy liczbę N wykonanych pomiarów oraz obliczamy średnie odchylenie kwadratowe s uzyskanych wartości zaobserwowanych x_i

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} ;$$

3. Dla przyjętego poziomu ufności p (i ustalonej liczby pomiarów N) określamy na podstawie tablic rozkładu Studenta (tabela 6) odpowiadającą mu wartość graniczną t_g zmiennej t . Wartość ta winna spełniać warunek: $p_{(-t_g \leq t \leq t_g)} = p$
4. Obliczamy wartość niepewności przypadkowej

$$\Delta_u^p x = t_g \cdot s \quad (64)$$



2.7.3. Szacowanie wartości błędu systematycznego

Należy mocno podkreślić, że nie ma jednej prostej i łatwej teorii dotyczącej identyfikacji i szacowania wartości błędów systematycznych. Najlepszą metodą identyfikacji jest szczegółowa analiza procesu pomiarowego. Analiza ta winna być ukierunkowana na poszukiwanie najbardziej istotnych źródeł błędów systematycznych oraz oszacowanie wartości błędów pochodzących z tych źródeł (błędów cząstkowych). Analiza ta winna być na tyle staranna i rzetelna, aby nie pominąć źródeł błędów cząstkowych o potencjalnie największych wartościach (pominięcie błędów cząstkowych o mniejszych w stosunku do innych błędów wartościach praktycznie nie pociąga za sobą poważniejszych konsekwencji).

Po ustaleniu najważniejszych źródeł należy oszacować wartości pochodzących z nich błędów systematycznych pamiętając, że mogą być one asymetryczne względem zera.

$$\Delta_1^s x = \Delta_{m,1}^s x \pm \Delta_{u,1}^s x$$

$$\Delta_2^s x = \Delta_{m,2}^s x \pm \Delta_{u,2}^s x$$

.....

gdzie:

$\Delta_j^s x$ - wartość błędu systematycznego pochodzącego z j-tego źródła;

$\Delta_{m,j}^s x$ - szacowana wartość średnia błędu systematycznego pochodzącego z j-tego źródła;

$\Delta_{u,j}^s x$ - niepewność oszacowania wartości średniej błędu pochodzącego z j-tego źródła;

Następnie obliczamy wartość średnią i niepewność wypadkowego błędu systematycznego:

$$\Delta_m^s x = \sum_{j=1}^k (\Delta_{m,j}^s x) \quad (65)$$

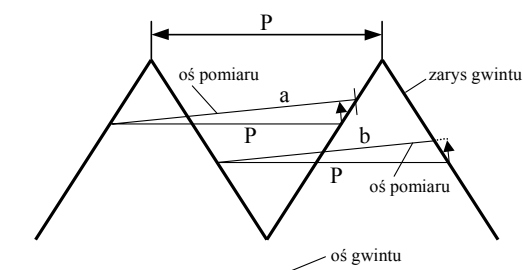
$$\Delta_u^s x = \sqrt{\sum_{j=1}^k (\Delta_{u,j}^s x)^2} \quad (66)$$

gdzie k – ilość uwzględnionych w analizie źródeł błędów systematycznych

Identyfikacja źródeł błędów systematycznych pozwala niekiedy na eliminację tych błędów bądź też na znaczne ograniczenie ich wartości. Błąd systematyczny można wyeliminować lub ograniczyć likwidując bądź maksymalnie ograniczając jego przyczynę (np. ograniczenie wartości błędów temperaturowych poprzez wprowadzenie klimatyzacji pomieszczeń laboratoryjnych). Inną metodą eliminacji błędu systematycznego



jest takie zaprojektowanie pomiaru, aby powstający w jego trakcie błąd systematyczny został skompensowany drugim błędem systematycznym o zbliżonej wartości i przeciwnym znaku (np. podwójne ważenie na wadze szalkowej z kładzeniem odważników raz na jednej, raz na drugiej szalce, czy podwójny pomiar skoku gwintu na mikroskopie każdorazowo po innej stronie zarysu zwoju, eliminujący błąd systematyczny związany z nierównoległością osi pomiaru i osi gwintu (p. rys. poniżej).



Rys.38. Sposób eliminacji błędu systematycznego spowodowanego nierównoległością osi gwintu i osi pomiaru ($a > P$, $b < P$, $(a+b)/2 = P$)

Należy również wspomnieć o możliwości wyznaczenia wartości błędu systematycznego bez identyfikacji przyczyn jego powstania. Polega ona na wielokrotnym pomiarze znanej wartości odtwarzanej przez odpowiednio dokładny wzorzec. Parametry błędu systematycznego wyznaczanego tą metodą określają zależności:

$$\Delta_m^s x = \bar{x} - w \quad (67)$$

$$\Delta_u^s x = \sqrt{(\Delta_u w)^2 + (\Delta_u^p \bar{x})^2} \quad (68)$$

gdzie:

$\bar{x}$ - średnia arytmetyczna wyników pomiaru znanej wartości;

w - znana wartość odtwarzana przez wzorzec;

$\Delta_u w$ - niepewność wzorca;

$\Delta_u^p \bar{x}$ - niepewność przypadkowa średniej arytmetycznej;

2.7.4. Szacowanie wartości błędu cząstkowego o charakterze przypadkowym

Doświadczalne wyznaczenie wartości błędu cząstkowego o charakterze przypadkowym jest możliwe tylko wtedy, jeżeli potrafimy powtórzyć pomiary z wyłączeniem przyczyny powstania tego błędu, przy czym wyłączenie przyczyny nie może wpływać na wartości pozostałych błędów cząstkowych.

Wyznaczenie wartości błędu cząstkowego opiera się na następujących założeniach:

- 1) składową przypadkową błędu pomiaru $\Delta_r^p x$ rozkładamy na dwa błędy cząstkowe:
 $\Delta_{r,1}^p x$ - błąd spowodowany określoną przyczyną, którego wartość chcemy oszacować;
 $\Delta_{r,2}^p x$ - wypadkowa wszystkich pozostałych błędów cząstkowych;

przy czym:

$$\Delta_r^p x = \Delta_{r,1}^p x + \Delta_{r,2}^p x \quad (69)$$

- 2) wartość błędu $\Delta_r^p x$ szacujemy w oparciu o wyniki pomiaru wielokrotnego zgodnie z procedurą przedstawioną w podrozdziale 2.7.2.
- 3) wartość błędu $\Delta_{r,2}^p x$ szacujemy analogicznie, w oparciu o wyniki pomiaru wielokrotnego przeprowadzonego po wyeliminowaniu przyczyny występowania błędu cząstkowego $\Delta_{r,1}^p x$;
- 4) wartość błędu $\Delta_{r,1}^p x$ szacujemy w oparciu o równanie (69);

W celu określenia wartości błędu cząstkowego $\Delta_r^p x$ należy wykonać serię N' pomiarów i obliczyć średnie odchylenie kwadratowe s' ich wartości zaobserwowanych. Następnie należy przyjąć właściwy dla rozwiązywanego problemu poziom ufności p i ustalić odpowiadającą mu wartość graniczną t_g' zmiennej t posiadającej rozkład Studenta o $N'-1$ stopniach swobody. Ostatecznie, zgodnie z wynikami obliczeń zamieszczonych w podrozdziale 2.7.2 mamy;

$$\Delta_u^p x = \pm t_g' \cdot s' \quad (70)$$

Następnie wykonujemy serię N'' pomiarów przeprowadzonych tak, aby przyczyna błędu cząstkowego $\Delta_{r,1}^p x$ została wyeliminowana, a pozostałe warunki były identyczne jak w pierwszej serii. Obliczamy średnie odchylenie kwadratowe uzyskanych wartości zaobserwowanych s'' . W tablicach rozkładu Studenta dla przyjętego wcześniej poziomu ufności p i liczby stopni swobody $N''-1$ znajdujemy wartość graniczną t_g'' zmiennej t . Ostatecznie wartość błędu

$$\Delta_{u,2}^p x = \pm t_g'' \cdot s'' \quad (71)$$

Z równania (69) wynika, że niepewność błędu wypadkowego (p. podrozdział 2.4.2)

$$\Delta_u^p x = \sqrt{(\Delta_{u,1}^p x)^2 + (\Delta_{u,2}^p x)^2}$$

Uwzględniając w powyższym równaniu zależności (70) i (71) oraz dokonując odpowiednich przekształceń otrzymujemy:

$$\Delta_{u,1}^p x = \sqrt{(t'_g \cdot s')^2 - (t''_g \cdot s'')^2} \quad (72)$$

Jeżeli liczności pomiarów w obu seriach są sobie równe, czyli $N' = N'' = N$, to równe są również wartości graniczne $t'_g = t''_g = t_g$. W takim przypadku zależność (72) przyjmuje nieco prostszą postać:

$$\Delta_{u,1}^p x = t_g \cdot \sqrt{(s')^2 - (s'')^2} \quad (73)$$

Przedstawiona wyżej metoda szacowania wartości błędu cząstkowego o charakterze przypadkowym jest metodą przybliżoną. Jej dokładność rośnie wraz ze wzrostem liczby wykonywanych pomiarów. Dlatego zaleca się, aby liczność powtórzeń w każdej z obu serii pomiarów wynosiła co najmniej 10. Zastosowanie tej metody w praktyce przedstawiono w treści zadania 1.28.

2.7.5. Ocena celowości wielokrotnego powtarzania pomiarów

Aby ocenić celowość przeprowadzania pomiarów wielokrotnych należy określić ich efektywność. W tym celu całkowitą niepewność pomiaru wielokrotnego porównuje się z całkowitą niepewnością pomiaru pojedynczego.

Na całkowitą niepewność pojedynczego pomiaru $\Delta_u x$ składa się niepewność dotycząca wartości błędu systematycznego $\Delta_u^s x$ i niepewność dotycząca wartości błędu przypadkowego $\Delta_u^p x$. Obowiązuje zależność:

$$\Delta_u x = \sqrt{(\Delta_u^s x)^2 + (\Delta_u^p x)^2} \quad (74)$$

Jak wynika z podrozdziału 2.7.1 powtarzanie pomiarów umożliwia zmniejszenie niepewności dotyczącej wartości błędu przypadkowego. Nie ma natomiast żadnego wpływu na niepewność dotyczącą wartości błędu systematycznego, która przy pomiarach wielokrotnych jest taka sama, jak w przypadku pojedynczego pomiaru. W związku z powyższym całkowita niepewność pomiaru wielokrotnego, którego wartość zaobserwowana jest równa średniej arytmetycznej wartości zaobserwowanych wszystkich powtórzeń, będzie równa:

$$\Delta_u \bar{x} = \sqrt{(\Delta_u^s \bar{x})^2 + (\Delta_u^p \bar{x})^2} = \sqrt{(\Delta_u^s x)^2 + \left(\frac{\Delta_u^p x}{\sqrt{N}}\right)^2} \quad (75)$$

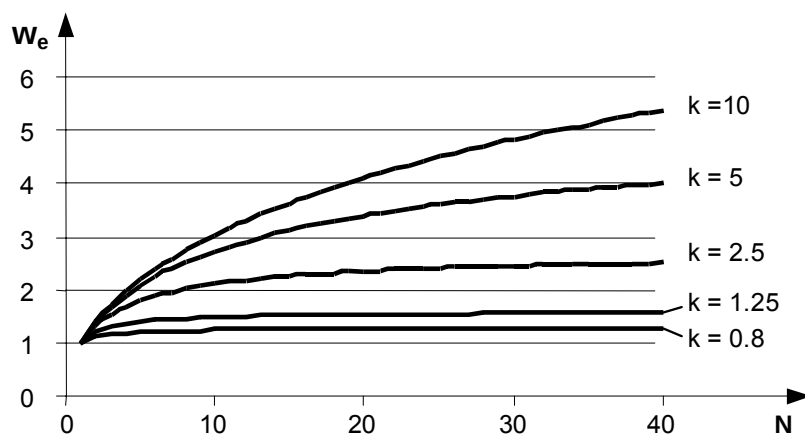


Jako miarę efektywności pomiarów wielokrotnych przyjmujemy stosunek całkowitej niepewności wyniku pojedynczego pomiaru do całkowitej niepewności wyniku pomiaru wielokrotnego. Wartość tego stosunku określać będziemy dalej wskaźnikiem efektywności i oznaczać symbolem w_e . Zgodnie z tą definicją:

$$w_e = \frac{\Delta_u x}{\Delta_u \bar{x}} = \frac{\sqrt{(\Delta_u^s x)^2 + (\Delta_u^p x)^2}}{\sqrt{(\Delta_u^s x)^2 + \left(\frac{\Delta_u^p x}{\sqrt{N}}\right)^2}} = \sqrt{\frac{N \cdot ((\Delta_u^s x)^2 + (\Delta_u^p x)^2)}{N \cdot (\Delta_u^s x)^2 + (\Delta_u^p x)^2}} = \sqrt{\frac{N \cdot (1 + k^2)}{N + k^2}}$$

gdzie k oznacza stosunek $\Delta_u^p x / \Delta_u^s x$.

Zależność współczynnika efektywności pomiarów wielokrotnych od stosunku niepewności przypadkowej do niepewności systematycznej k i liczby pomiarów N pokazano na rys. 39.



Rys. 39. Współczynnik efektywności pomiarów wielokrotnych w funkcji stosunku niepewności przypadkowej do niepewności systematycznej k i liczby powtórzeń N

Z wykresu zamieszczonego na rys. 39 wynika, ilokrotnie można obniżyć całkowitą niepewność pomiaru i jaką cenę (ilość powtórzeń) trzeba za to zapłacić. Jeżeli cena ta wydaje nam się zbyt wysoka, należy rozważyć zmniejszenie niepewności pomiaru poprzez zastosowanie innych metod i narzędzi pomiarowych.

2.7.6. Określenie niezbędnej liczby powtórzeń

Liczbę powtórzeń pomiaru wielokrotnego należy dobrać tak, aby wartość całkowitej niepewności tego pomiaru była równa (lub mniejsza) od wartości wymaganej. Oznaczając wymaganą wartość niepewności przez $\Delta_w x$, możemy zatem napisać:

$$\Delta_u \bar{x} \leq \Delta_w x$$

Uwzględniając, że:

$$\Delta_u \bar{x} = \sqrt{\left(\Delta_u^s x\right)^2 + \left(\frac{\Delta_u^p x}{\sqrt{N}}\right)^2}$$

i dokonując odpowiednich przekształceń, otrzymujemy:

$$N \geq \frac{\left(\Delta_u^p x\right)^2}{\left(\Delta_w x\right)^2 - \left(\Delta_u^s x\right)^2} \quad (76)$$

Wartość niepewności przypadkowej $\Delta_u^p x$ ustalamy na podstawie wyników serii pomiarów wstępnych, zgodnie z procedurą opisaną w rozdziale 2.7.2.

Wartość niepewności systematycznej $\Delta_u^s x$ ustalamy na podstawie szczegółowej analizy procesu pomiarowego (p. rozdz. 2.7.3).

Jeżeli prawa strona nierówności jest ujemna, nieokreślona (mianownik równy zero) lub bardzo duża należy zastosować inną (dokładniejszą) metodę pomiaru bądź inne (dokładniejsze) narzędzia pomiarowe.

2.7.7. Identyfikacja wyników obarczonych błędem grubym

W przypadku przeprowadzania pomiarów wielokrotnych zdarza się czasami, że wartość jednego z uzyskanych wyników wyraźnie różni się od wartości pozostałych. Rodzi to podejrzenie, że wyróżniający się wynik jest obciążony błędem grubym i jako taki powinien zostać odrzucony (nieuwzględniony przy opracowaniu wyniku pomiaru wielokrotnego).

Należy w tym miejscu zwrócić uwagę na to, że odrzucanie danych pomiarowych jest zagadnieniem kontrowersyjnym i stanowiska ekspertów nie są w tej sprawie zupełnie jednoznaczne. Wynika to z faktu, że odrzucenie „odbiegającego” wyniku może istotnie zmienić wartość średniej arytmetycznej (zwłaszcza, gdy ilość powtórzeń jest niewielka). A ponieważ decyzja o odrzuceniu wyniku jest w zasadzie subiektywna, można w takich przypadkach postawić zarzut, że tym sposobem „poprawiono” (czytaj „naciągnięto”) uzyskane wyniki.



Z drugiej strony „odbiegający” wynik może zawierać informację o zaistnieniu jakiegoś ważnego, nieprzewidzianego w trakcie pomiaru, zjawiska. Wiele ważnych odkryć naukowych objawiło się po raz pierwszy w postaci wyniku różniącego się wyraźnie od pozostałych, wyniku, który wyglądał na zwykłą pomyłkę. Odrzucając taki wynik możemy odrzucić automatycznie najciekawszą, najbardziej wartościową część danych. Dlatego każdorazowe odrzucenie jakiegokolwiek wyniku powinno zostać poprzedzone staranną analizą przyczyn jego uzyskania.

W zasadzie jedynym rzetelnym sposobem postępowania w przypadku wystąpienia „odbiegającego” wyniku jest znaczne zwiększenie liczby powtórzeń. Jeżeli „odbiegający” wynik powtórzy się, znacznie łatwiej będzie wtedy ustalić przyczynę jego wystąpienia (niezależnie od tego, czy będzie nią nieprawidłowość przy dokonywaniu pomiaru, czy wystąpienie nieprzewidzianych zjawisk). Dodatkowo zwiększenie liczby pomiarów powoduje, że średnia arytmetyczna nie będzie już istotnie zależeć od tego, czy „odbiegający” wynik zostanie uwzględniony czy też odrzucony.

Nie zawsze jednak w przypadkach, gdy wystąpi „odbiegający” wynik, mamy możliwość znacznego zwiększania liczby powtórzeń. Ze względów praktycznych (ograniczenia czasowe, ograniczenia ekonomiczne) potrzebne jest kryterium oceny podejrzanego wyniku, pozwalające na podjęcie decyzji bez zwiększania liczby powtórzeń. Opracowano kilka takich kryteriów. Jednym z nich jest kryterium Chauvenet’a¹. W celu jego zastosowania należy:

- po wykonaniu N pomiarów i uzyskaniu $x_1, x_2, \dots, x_N$ wartości zaobserwowanych obliczyć średnią arytmetyczną $\bar{x}$ i średnie odchylenie kwadratowe s korzystając ze wszystkich uzyskanych wyników;
- dla odbiegającej wartości zaobserwowanej x_{odb} obliczyć odpowiadającą jej wartość standaryzowaną t_{odb} zgodnie z zależnością:

$$t_{odb} = \frac{x_{odb} - \bar{x}}{s}$$

- na podstawie tablicy dystrybucyj rozkładu normalnego (np. tabl. 5) obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że kolejna wartość zaobserwowana różni się od wartości średniej więcej, aniżeli wartość poddawana ocenie.

$$\begin{aligned} P(|x - \bar{x}| > |x_{odb} - \bar{x}|) &= P(x - \bar{x} < -t_{odb} \cdot s \text{ lub } x - \bar{x} > t_{odb} \cdot s) = P(t < -t_{odb} \text{ lub } t > t_{odb}) = \\ &= P(t < -t_{odb}) + P(t > t_{odb}) = 2 \cdot (1 - F(t_{odb})) \end{aligned}$$

¹ Kryterium to przytoczono za autorem pracy [20]



- obliczyć spodziewaną liczbę pomiarów, których wyniki będą odległe od średniej co najmniej tak samo, jak x_{odb} , w serii N pomiarów

$$n = p(|x - \bar{x}| > |x_{odb} - \bar{x}|) \cdot N$$

- jeżeli $n < 0.5$, to x_{odb} nie spełnia kryterium Chauvenet'a i powinno zostać odrzucone; (kryterium Chauvenet'a opiera się na założeniu, że jeśli oczekiwana liczba pomiarów, dających co najmniej tak „złe wyniki” jak pomiar poddawany ocenie, jest mniejsza od 0.5, to wynik analizowanego pomiaru należy odrzucić. Wartość kryterialna 0.5 została dobrana arbitralnie).

Po odrzuceniu wyniku nie spełniającego kryterium Chauvenet'a ponownie oblicza się średnią arytmetyczną i średnie odchylenie kwadratowe, wykorzystując w tym celu pozostałe wartości zaobserwowane. Nowe wartości $\bar{x}$ i s stanowią podstawę ostatecznego opracowania wyniku.

2.7.8. Opracowanie wyniku pomiaru wielokrotnego

Opracowanie wyniku pomiaru wielokrotnego można podzielić na trzy etapy. Są to:

- analiza statystyczna uzyskanych wyników;
- oszacowanie wartości błędu systematycznego;
- ustalenie ostatecznej postaci wyniku pomiaru wielokrotnego;

Na analizę statystyczną uzyskanych wyników składają się następujące działania:

- ocena, czy żaden z uzyskanych wyników nie jest obciążony błędem grubym; w przypadku stwierdzenia wystąpienia „odbiegającego” wyniku przeprowadzenie działań przedstawionych w rozdz. 2.7.7.
- obliczenie wartości średniej arytmetycznej $\bar{x}$ i średniego odchylenia kwadratowego s uzyskanych wyników;
- przyjęcie właściwego dla rozwiązywanego problemu poziomu ufności (o ile cel, dla którego przeprowadzamy pomiary nie wymaga innej wartości, zaleca się przyjmowanie $p = 95\%$);
- obliczenie niepewności przypadkowej pojedynczego pomiaru (zgodnie z zasadami podanymi w rozdz. 2.7.2);
- obliczenie niepewności przypadkowej średniej arytmetycznej:

$$\Delta_{u\bar{x}}^p = \frac{\Delta_{ux}^p}{\sqrt{N}}$$



Oszacowania wartości błędu systematycznego należy dokonać zgodnie z zasadami przedstawionymi w podrozdziale 2.7.3. W wyniku przeprowadzonych analiz (ew. eksperymentów) winniśmy oszacować wartość średnią błędu systematycznego $\Delta_m^s x$ oraz niepewność $\Delta_u^s x$.

W ramach ustalania ostatecznej postaci wyniku pomiaru wielokrotnego należy:

- obliczyć wartość zaobserwowaną poprawną:

$$x_{z,p} = \bar{x} - \Delta_m^s x$$

- obliczyć niepewność całkowitą średniej arytmetycznej, która jest jednocześnie niepewnością pomiaru wielokrotnego:

$$\Delta_u \bar{x} = \sqrt{(\Delta_u^s x)^2 + (\Delta_u^p \bar{x})^2}$$

Obliczoną wartość niepewności całkowitej należy zaokrąglić do pierwszej cyfry znaczącej, a jeżeli tą cyfrą jest jeden, to do dwóch cyfr znaczących. Do tego samego rzędu należy zaokrąglić wartość zaobserwowaną poprawną. Oznaczając wartości zaokrąglone znacznikiem ('), mamy ostatecznie:

$$x_r = x'_{z,p} \pm \Delta_u x' \quad \text{lub} \\ (x_{z,p} - \Delta_u x)' \leq x_r \leq (x_{z,p} + \Delta_u x)'$$

2.8. PROJEKTOWANIE POMIARÓW. DOBÓR METOD I NARZĘDZI POMIAROWYCH.

Wykonanie każdego pomiaru musi zostać poprzedzone wyborem metody i narzędzia pomiarowego. Decyzje w tym względzie winny uwzględniać szereg różnych czynników. W szczególności wymienić można:

- właściwą dokładność pomiaru;
- oczekiwaną wartość (zakres wartości) mierzonej wielkości;
- możliwość zastosowania określonego narzędzia w analizowanym przypadku (możliwość pobrania wielkości mierzonej z obiektu);
- względy ekonomiczne (koszt narzędzia, pracochłonność pomiaru, itp.);
- dostępność (posiadanie) określonych narzędzi pomiarowych;

Projektowanie pomiaru winno rozpocząć się od ustalenia modelu mierzonego obiektu, w szczególności zaś od przyjęcia ścisłej i jednoznacznej definicji wielkości mierzonej. Następnym krokiem jest ustalenie, z jaką dokładnością pomiar należy przeprowadzić, czyli jaka może być wartość niepewności tego pomiaru.



Dopuszczalną wartość niepewności pomiaru określa się poprzez analizę celu, w jakim rozpatrywany pomiar ma być przeprowadzony. Najogólniej rzecz ujmując, winna ona zapewniać odpowiednią rozróżnialność stanów mierzonych obiektów bądź zjawisk.

Zdecydowana większość wykonywanych w praktyce pomiarów, to pomiary, których celem jest badanie zgodności mierzonych obiektów z nałożonymi na te obiekty wymaganiami. Taka sytuacja ma miejsce zarówno w przypadku nadzoru przebiegu procesów technologicznych, jak i w przypadku kontroli technicznej produkowanych wyrobów. Ograniczmy dalsze rozważania do tego ostatniego przypadku.

Właściwości wyrobu kształtowane są w trakcie określonego procesu technologicznego. Na proces ten oddziałują wiele różnych, przeważnie wzajemnie niezależnych, zakłóceń. Z ich powodu właściwości poszczególnych egzemplarzy wyrobu różnią się pomiędzy sobą a występujące różnice mają najczęściej charakter przypadkowy. Dlatego, jeśli powstała w procesie technologicznym określona właściwość wyrobu jest wielkością mierzalną, można traktować ją jako zmienną losową, tzn. jako zbiór wartości, z których każda ma określone prawdopodobieństwo realizacji. Rozkład tych prawdopodobieństw, którego przykład pokazano na rys. 40a zależy od parametrów procesu technologicznego i może wraz z nimi ulegać zmianom w czasie.

Zbiór wartości wielkości określany będzie dalej mianem wymiaru wielkości¹, przy czym zbiór wartości powstałych (lub mogących powstać) w procesie technologicznym będzie nazywany wymiarem rzeczywistym i oznaczany symbolem X , a zbiór wartości dopuszczalnych - wymiarem wymaganym i oznaczany symbolem X_W .

W odróżnieniu od wymiaru rzeczywistego, który ma charakter zmiennej losowej, wymiar wymagany jest zbiorem wartości określonym wartościami granicznymi - dolną A i górną B . Różnica tych wartości $B - A = T$ nosi nazwę tolerancji wymiaru wymaganego. Na osi liczbowej (rys 40b) wymiar wymagany przyjmuje postać odcinka AB . Długość tego odcinka odpowiada wartości tolerancji.

Pomiędzy wymiarem rzeczywistym X a wymiarem wymaganym X_W winna zachodzić relacja $X \subset X_W$. Zapis ten oznacza, że zbiór możliwych wartości wymiaru rzeczywistego zawarty jest w zbiorze wartości dopuszczalnych, czyli dla każdego i powinno zachodzić:

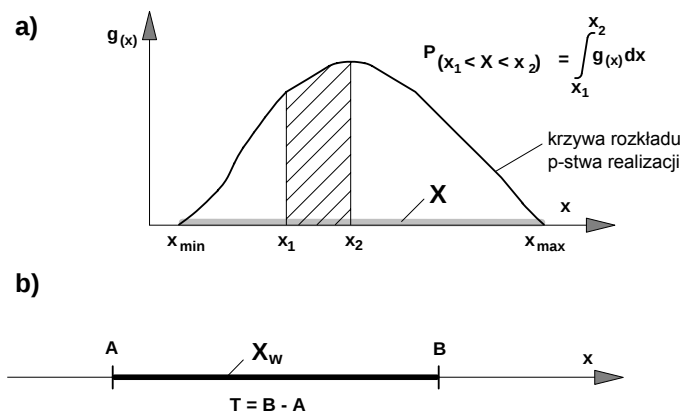
$$A \leq x_{r,i} \leq B \quad (78)$$

gdzie:

$x_{r,i}$ - rzeczywista wartość wielkości odpowiadająca i -temu obiektowi mierzonemu;

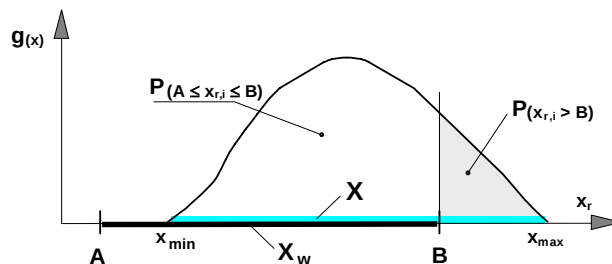
¹ przez analogię do wymiarów liniowych i kątowych;





Rys. 40. Ilustracja graficzna wymiarów: a) rzeczywistego; b) wymaganego

W praktyce prawdopodobieństwo spełnienia warunku (78), które oznaczono symbolem $P(A \leq x_{r,i} \leq B)$, jest najczęściej mniejsze od jedności. Możliwa jest np. sytuacja pokazana na rysunku 41.



Rys. 41. Przykład możliwej relacji pomiędzy wymiarem rzeczywistym i wymiarem wymaganym: $P(A \leq x_{r,i} \leq B) < 1$

Ponieważ istnieje pewne prawdopodobieństwo, że rozważana właściwość wyrobu nie będzie spełniała narzuconych na nią wymagań, w procesach wytwarzania przewidyje się operacje kontroli technicznej. Ich celem jest identyfikacja tych egzemplarzy wyrobu, które nie spełniają narzuconych wymagań, i nie dopuszczenie ich do udziału w dalszym ciągu procesu technologicznego.

Oceny poprawności wykonania poszczególnych egzemplarzy wyrobu dokonuje się najczęściej w oparciu o wyniki przeprowadzanych pomiarów. Warunkiem przepuszczenia, czyli uzyskania oceny „zgodny z wymaganiami” jest:

$$A \leq x_z \leq B \quad (79)$$

gdzie:

x_z - wartość zaobserwowana mierzonej wielkości;

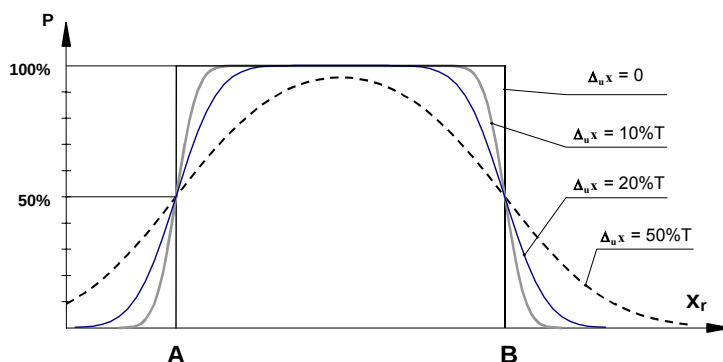
Ponieważ pomiędzy wartością zaobserwowaną x_z i wartością rzeczywistą x_r mierzonej wielkości zachodzi zależność:

$$x_z = x_r + \Delta_r x \quad (80)$$

gdzie:

$\Delta_r x$ - rzeczywista wartość błędu pomiaru;

więc warunek (79) nie jest jednoznaczny z warunkiem (78). Z tego powodu charakterystyka operacyjna¹ kontroli technicznej odbiega od idealnego prostokątnego przebiegu, przy czym odstępstwo to jest tym większe, im większe są błędy pomiaru. Ilustruje to rys. 42.



Rys. 42. Zależność prawdopodobieństwa uznania wyrobu za zgodny z wymaganiami od rzeczywistej wartości mierzonej wielkości i dokładności pomiaru.

Z rys. 42. wynika, że ze wzrostem niepewności pomiaru rośnie prawdopodobieństwo przepuszczenia wyrobu o wartości rzeczywistej kontrolowanej wielkości nie należącej do przedziału $\langle A, B \rangle$, czyli niezgodnego, oraz maleje prawdopodobieństwo przepuszczenia wyrobu o wartości rzeczywistej należącej do tego przedziału, czyli zgodnego.

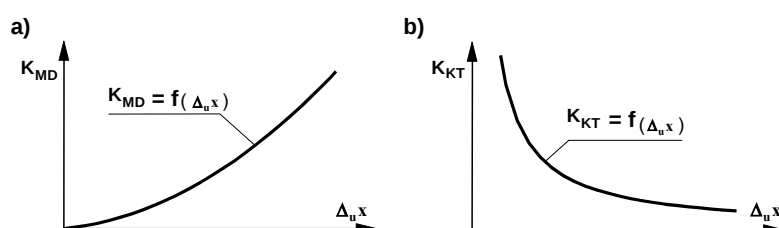
Przepuszczając wymiar rzeczywisty (rys. 40a) przez „filtr” kontroli technicznej (rys. 42) otrzymuje się rezultat pokazany na rys. 43.

¹ krzywa przedstawiająca prawdopodobieństwo uznania sprawdzanej wielkości za zgodną z wymaganiami, w funkcji wartości rzeczywistej tej wielkości.

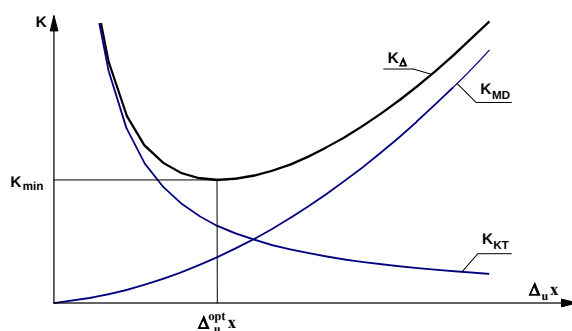


Wymienione wyżej czynniki powodują wzrost kosztów samej operacji kontroli technicznej. Wynika stąd, że wpływ dokładności pomiarów na koszty kontroli technicznej (rys. 44b) jest odwrotny, niż w przypadku kosztów mylnych decyzji. W tej sytuacji należy rozpatrzyć wpływ dokładności pomiarów na koszt sumaryczny $K_{\Delta} = K_{MD} + K_{KT}$. Wpływ ten pokazano na rys. 45.

Z rys. 45 wynika, że krzywa $K_{\Delta} = f(\Delta_u x)$ posiada minimum. Niepewność $\Delta_u x$, dla której krzywa kosztów osiąga minimum określa tzw. optymalną dokładność kontroli.



Rys. 44. Wpływ dokładności pomiarów: a) na koszty mylnych decyzji (K_{MD}); b) na koszty operacji kontroli technicznej (K_{KT}); $\Delta_u x$ - wartość niepewności pomiaru



Rys. 45. Zależność kosztów związanych z pomiarami od dokładności tych pomiarów

Ustalenie wartości niepewności, dla której koszty związane z pomiarami osiągają minimum, na podstawie analizy przebiegu funkcji $K_{\Delta} = f(\Delta_u x)$ jest w konkretnych przypadkach albo bardzo trudne, ze względu na konieczność przeprowadzania bardzo złożonych analiz, albo wręcz niemożliwe z powodu braku wszystkich niezbędnych do tego celu danych. Dlatego w praktyce wartość $\Delta_u^{opt} x$ szacuje się w oparciu o znacznie prostsze metody. Np. w przypadku wymiarów liniowych i kątowych udało się na podstawie stosownych badań i doświadczeń praktycznych sformułować bardzo prostą wytyczną [6, 18]. Zgodnie z nią:

$$\Delta_u^{\text{opt}} x \approx c \cdot T \quad (81)$$

gdzie:

T - tolerancja sprawdzanego wymiaru;
c - współczynnik liczbowy zależny od trudności pomiaru;

Dla pomiarów charakteryzujących się wysokim stopniem trudności zaleca się przyjmować $c = 0.2$; przy średnim stopniu trudności przyjmuje się $c = 0.1$, zaś dla pomiarów łatwych można przyjąć $c = 0.05$.

Wydaje się, że podobny sposób szacowania optymalnej niepewności pomiaru można wykorzystać przy pomiarach innych właściwości kontrolowanych wyrobów.

Po ustaleniu wartości niepewności pomiaru można przystąpić do wyboru metody i narzędzi pomiarowych. W tym celu rozważa się przeważnie kilka wariantów, przy czym każdy z nich winien spełniać warunek:

$$\Delta_u x = \Delta_u^{\text{opt}} x \quad (82)$$

gdzie:

$\Delta_u x$ – niepewność pomiaru dla rozważanej metody;

Analiza zależności (82) pozwala na uzyskanie informacji umożliwiających właściwy dobór narzędzi pomiarowych dla poszczególnych metod. I tak, przyjmując oznaczenia identyczne jak w rozdziale 2.6, mamy:

- w przypadku metody wychyłowej, dla której $\Delta_u x = \Delta_u \alpha$, z zależności (82) wynika:

$$\Delta_u \alpha = \Delta_u^{\text{opt}} x \quad (83)$$

- w przypadku metody różnicowej, dla której $\Delta_u x = \sqrt{(\Delta_u w)^2 + (\Delta_u z)^2 + (\Delta_u \alpha)^2}$, z zależności (82) i założenia o równości poszczególnych składowych¹ błędu pomiaru wynika:

$$\Delta_u w \approx \frac{\Delta_u^{\text{opt}} x}{\sqrt{3}} \quad (84a)$$

$$\Delta_u \alpha \approx \frac{\Delta_u^{\text{opt}} x}{\sqrt{3}} \quad (84b)$$

¹ równość poszczególnych składowych jest dość powszechnie uważana za pewne optimum, ponieważ w przypadku dysproporcji wartości poszczególnych składowych element układu pomiarowego dający mniejszą składową nie jest w pełni wykorzystany; w przypadkach uzasadnionych można przyjąć inne proporcje składowych;



- w przypadku metody zerowej kompensacyjnej, dla której $\Delta_u x = \sqrt{(\Delta_u w)^2 + (\Delta_D)^2}$, przy analogicznym założeniu j.w. otrzymuje się:

$$\Delta_u w \approx \frac{\Delta_u^{\text{opt}} x}{\sqrt{2}} \quad (85a)$$

$$\Delta_D \approx \frac{\Delta_u^{\text{opt}} x}{\sqrt{2}} \quad (85b)$$

- w przypadku metody zerowej komparacyjnej, dla której graniczną wartość błędu pomiaru określa zależność $\Delta_u x = \sqrt{(k \cdot \Delta_u w)^2 + (w \cdot \Delta_u k)^2 + (\Delta_D)^2}$, przy założeniach j.w. otrzymuje się:

$$\Delta_u w \approx \frac{\Delta_u^{\text{opt}} x}{\sqrt{3} \cdot k} \quad (86a)$$

$$\Delta_u k \approx \frac{\Delta_u^{\text{opt}} x}{\sqrt{3} \cdot w} \quad (86b)$$

$$\Delta_D \approx \frac{\Delta_u^{\text{opt}} x}{\sqrt{3}} \quad (86c)$$

- w przypadku metody zerowej „przez podstawienie”, dla której:

$\Delta_u x = \sqrt{(\varphi'_{(y)} \cdot \Delta_D)^2 + (\varphi'_{(y)} \cdot \Delta_n)^2 + (\Delta_u w)^2}$, analogiczne jak w poprzednich przypadkach postępowanie doprowadza do uzyskania następujących rezultatów:

$$\Delta_u w \approx \frac{\Delta_u^{\text{opt}} x}{\sqrt{3}} \quad (87a)$$

$$\Delta_D \approx \frac{\Delta_u^{\text{opt}} x}{\sqrt{3} \cdot \varphi'_{(y)}} \quad (87b)$$

$$\Delta_n \approx \frac{\Delta_u^{\text{opt}} x}{\sqrt{3} \cdot \varphi'_{(y)}} \quad (87c)$$

- w przypadku metody pośredniej, dla której $\Delta_u x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial a} \Delta_u a\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial b} \Delta_u b\right)^2 + \dots}$ stosuje się najczęściej zasadę równości poszczególnych błędów cząstkowych, tzn. przyjmujemy



je się, że $\left| \frac{\partial x}{\partial a} \cdot \Delta_u a \right| \approx \left| \frac{\partial x}{\partial b} \cdot \Delta_u b \right| \approx \dots$ itd. Obliczone po przyjęciu tej zasady wartości dopuszczalne niepewności pomiarów wielkości $a, b, \dots$ wynoszą:

$$\Delta_u a \approx \frac{\Delta_u^{\text{opt}} x}{\left| \frac{\partial x}{\partial a} \right| \cdot \sqrt{n}}; \quad \Delta_u b \approx \frac{\Delta_u^{\text{opt}} x}{\left| \frac{\partial x}{\partial b} \right| \cdot \sqrt{n}}; \dots \text{itd.} \quad (88)$$

gdzie n oznacza ilość wielkości występujących w równaniu definicyjnym pomiaru;

Rzadziej stosuje się zasadę jednakowych niepewności względnych, tzn. założenie, że $\frac{\Delta_u a}{a} \approx \frac{\Delta_u b}{b} \approx \dots$ itd. Przy przyjęciu tej zasady dopuszczalne wartości błędów pomiarów wielkości $a, b, \dots$ określa zależność (89):

$$\Delta_u a \approx \frac{\Delta_u^{\text{opt}} x \cdot a}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial a} \cdot a \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial b} \cdot b \right)^2 + \dots}}; \quad \Delta_u b \approx \frac{\Delta_u^{\text{opt}} x \cdot b}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial a} \cdot a \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial b} \cdot b \right)^2 + \dots}}; \dots$$

obliczone na podstawie zależności (88) lub (89) wartości niepewności $\Delta_u a, \Delta_u b, \dots$ stanowią z kolei punkt wyjścia do zaprojektowania pomiarów wielkości $a, b, \dots$ itd.

Zależności (83) ÷ (89) umożliwiają ustalenie klasy dokładności dobieranych przyrządów, wzorców, detektorów, itp. pozwalając na eliminację narzędzi zbyt mało dokładnych bądź za dokładnych.

Po uwzględnieniu podstawowego wymogu, jakim jest odpowiednia dokładność projektowanego pomiaru należy jeszcze zwrócić uwagę na inne czynniki, które mogą uniemożliwić jego przeprowadzenie. W szczególności należy sprawdzić, czy wybrane narzędzie posiada odpowiedni zakres pomiarowy (w przypadku przyrządu) bądź zakres odtwarzanych wartości (w przypadku wzorca), czy da się ono wykorzystać w rozpatrywanym przypadku (np. ze względu na możliwość pobrania wielkości z mierzonego obiektu), czy w czasie planowanego pomiaru będzie dla nas dostępne.

Jeżeli po uwzględnieniu wszystkich przedstawionych wyżej warunków pozostanie nam więcej niż jeden wariant projektu, to do ostatecznego wyboru można zastosować kryterium ekonomiczne.



Na zakończenie niniejszych rozważań należy stwierdzić, że każda wielkość mierzona posiada swoją specyfikę, do której m.in. zalicza się najczęściej i najchętniej stosowane metody pomiaru tej wielkości. Uwzględnienie tej specyfiki pozwala na znaczne ograniczenie liczby analizowanych wariantów. W szczególności może to być tylko jeden arbitralnie przyjęty wariant, który w ramach projektowania pomiaru weryfikuje się pod kątem spełnienia przedstawionych wyżej warunków. Taki sposób postępowania nie zapewnia jednak osiągnięcia optymalnego rezultatu.



3. ĆWICZENIA RACHUNKOWE

3.1. ZADANIA PRZYKŁADOWE

Zadanie 1.1.

Wyprowadzić funkcję odwzorowującą wartość wielkości liczbą rzeczywistą w przypadku skali interwałowej określonej za pomocą układu wartości odniesienia składającego się z:

- wartości początkowej A_0 wraz z odpowiadającą jej wartością liczbową $\{A_0\}$
- jednostki miary interwału będącego jednocześnie jednostką wielkości $[\Delta A] \equiv [A]$

Rozwiązanie

Tworzymy interwał

$$\Delta A = A - A_0$$

Ponieważ nasz interwał ma jednostkę miary, więc jego wartość możemy zapisać w postaci:

$$\Delta A = \{\Delta A\} \cdot [\Delta A] = \{\Delta A\} \cdot [A]$$

Wartość liczbowa interwału jest równa różnicy wartości liczbowych wielkości interwał ten określających, czyli w naszym przypadku:

$$\{\Delta A\} = \{A\} - \{A_0\}$$

Uwzględniając powyższe możemy zapisać

$$A - A_0 = (\{A\} - \{A_0\}) \cdot [A]$$

wymnażając przez jednostkę i zamieniając stronami dostajemy

$$\{A\} \cdot [A] - \{A_0\} \cdot [A] = A - A_0 \quad \text{skąd}$$

$$\{A\} \cdot [A] = \{A_0\} \cdot [A] + A - A_0 \quad \text{i ostatecznie}$$

$$\{A\} = \{A_0\} + \frac{A - A_0}{[A]}$$

Zadanie 1.2

Obliczyć nadciśnienie panujące w komorze technologicznej, jeżeli wskaźnik ciśnienia bezwzględnego komory pokazuje wartość 1116,28 hPa, a manometr rtęciowy mierzący aktualne ciśnienie atmosferyczne wskazuje $h = 758,7$ mmHg.

Wskazówka

Ciśnienie hydrostatyczne określone jest wzorem $p = \rho \cdot g \cdot h$, gdzie:



ρ – masa właściwa (gęstość); w przypadku rtęci wynosi ona 13,5457 g/cm³;
 g – przyspieszenie ziemskie ($g = 9,80665 \text{ m/s}^2$);
 h - wysokość słupa cieczy;

Rozwiązanie

Nadciśnienie panujące w komorze technologicznej jest różnicą ciśnienia bezwzględnego komory p_k i ciśnienia atmosferycznego p_a

$$\Delta p = p_k - p_a$$

$$p_a = \rho \cdot g \cdot h$$

$$\rho = 13,5457 \text{ g/cm}^3 = 13,5457 \cdot 10^{-3} \cdot \text{kg}/(10^{-2} \cdot \text{m})^3 = 13,5457 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6 \cdot \text{kg/m}^3 = 13\,545,7 \text{ kg/m}^3$$

$$p_a = \rho \cdot g \cdot h = 13\,545,7 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,80665 \text{ m/s}^2 \cdot 0,7587 \text{ m} = 100\,784,1442 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{m}^3 \cdot \text{s}^2} = 100\,784,1442 \text{ Pa} \approx 100\,784 \text{ Pa}$$

$$p_k = 1116,28 \text{ hPa} = 1116,28 \cdot 10^2 \cdot \text{Pa} = 111\,628 \text{ Pa}$$

W takim razie $\Delta p = p_k - p_a = 111\,628 \text{ Pa} - 100\,784 \text{ Pa} = 10\,844 \cdot \text{Pa} = 10,844 \text{ kPa}$

Zadanie 1.3

Moc silnika elektrycznego wynosi $P = 2,20 \text{ KM}$ (koni mechanicznych). Obliczyć wartość momentu obrotowego M tego silnika, jeśli prędkość obrotowa jego wału wynosi $\omega = 1470 \text{ obr/min}$. Wynik obliczeń wyrazić w jednostkach układu SI.

Wprowadzenie:

Moc silnika P oblicza się z zależności $P = \frac{2 \cdot \pi}{\Omega} \cdot M \cdot \omega$, gdzie Ω oznacza kąt pełny

$$\Omega = 1 \text{ obr} = 360^\circ = 2 \cdot \pi \text{ rad}$$

$$1 \text{ KM} = 75 \text{ kG} \cdot \text{m} / \text{s} \quad 1 \text{ kG} = 9,80665 \text{ N (niutona)}$$

Rozwiązanie

$$P = \frac{2 \cdot \pi}{\Omega} \cdot M \cdot \omega \quad \Rightarrow \quad M = \frac{P \cdot \Omega}{2 \cdot \pi \cdot \omega}$$

$$M = \frac{P \cdot \Omega}{2 \pi \cdot \omega} = \frac{2,2 \text{ KM} \cdot 1 \text{ obr}}{2 \pi \cdot 1470 \text{ obr/min}} = \frac{2,2 \text{ KM} \cdot \text{min}}{2 \pi \cdot 1470} = \frac{2,2 \cdot (75 \frac{\text{kGm}}{\text{s}}) \cdot (60 \text{s})}{2 \cdot \pi \cdot 1470} = \frac{2,2 \cdot 75 \cdot 60 \cdot \text{kGm}}{2 \cdot \pi \cdot 1470} = \frac{2,2 \cdot 75 \cdot 60 \cdot (9,80665 \cdot \text{N}) \cdot \text{m}}{2 \cdot \pi \cdot 1470} = \frac{2,2 \cdot 75 \cdot 9,80665 \cdot 60 \cdot \text{N} \cdot \text{m}}{2 \cdot \pi \cdot 1470} = 10,511 \cdot \text{N} \cdot \text{m}$$

Odp.: Wartość momentu obrotowego tego silnika wynosi 10,5 N·m

Zadanie 1.4



Podane niżej wartości wielkości wyrazić w jednostkach układu SI:

- a) prędkość liniową $V = 72 \text{ km/godz}$;
- b) prędkość obrotową $n = 50 \text{ obr/min}$;
- c) pracę $L = 5 \text{ KMh}$ (koniogodzin);

Rozwiązanie

ad a) $72 \text{ km/godz} = 72 \cdot (1000 \text{ m}) / (3600 \text{ s}) = 20 \text{ m/s}$;

ad b) $50 \text{ obr/min} = 50 \cdot (2 \cdot \pi \text{ rd}) / (60 \text{ s}) = 5,236 \text{ rd/s}$

ad c) $5 \text{ KMh} = 5 \cdot (75 \text{ kGm/s}) \cdot (3600 \text{ s}) = 1\,350\,000 \text{ kGm} = 1\,350\,000 \cdot (9,80665 \text{ N}) \cdot \text{m}$
 $\approx 13\,239\,000 \text{ J} = 13,239 \cdot 10^6 \text{ J} = 13,239 \text{ MJ}$

Zadanie 1.5.

Określić spójne jednostki:

- a) prędkości;
- b) przyspieszenia;
- c) energii kinetycznej w ruchu prostoliniowym.

Rozwiązanie

a) jednostka prędkości

Prędkością nazywamy stosunek drogi L do czasu T , w którym droga ta została przebyta.

W równaniu definicyjnym prędkości $V = \frac{L}{T}$ występują same wielkości podstawowe. Można zatem od razu w miejsce oznaczeń wielkości podstawić oznaczenia ich jednostek. Otrzymujemy wtedy $[V] = 1 \cdot \frac{[L]}{[T]}$. Uwzględniając, że $[L] = \text{m}$ oraz $[T] = \text{s}$ mamy ostatecznie $[V] = 1 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$

b) jednostka przyspieszenia

Przyspieszeniem a nazywamy stosunek przyrostu prędkości $\Delta V = V_2 - V_1$ do czasu T , w którym ten przyrost nastąpił.

W równaniu definicyjnym przyspieszenia $a = \frac{\Delta V}{T} = \frac{V}{T}$ należy prędkość, która jest wielkością pochodną, zastąpić odpowiednią funkcją wielkości podstawowych.



Uzyskuje się wtedy $a = \frac{L}{T^2}$. Zastępując oznaczenia wielkości oznaczeniami ich jednostek otrzymujemy $[a] = 1 \cdot \frac{[L]}{[T]^2}$, skąd ostatecznie $[a] = 1 \text{ m} / \text{s}^2$.

c) jednostka energii kinetycznej

Energią kinetyczną E ciała poruszającego się ruchem prostoliniowym nazywamy połowę iloczynu jego masy M przez kwadrat prędkości V .

W równaniu definicyjnym energii kinetycznej $E = 0,5 M V^2$ należy prędkość, która jest wielkością pochodną zastąpić odpowiednią funkcją wielkości podstawowych.

Uzyskuje się wtedy: $E = 0,5 \cdot M \cdot \frac{L^2}{T^2}$. Podstawiając zamiast oznaczeń wielkości oznaczenia ich jednostek miar i zastępując współczynnik 0,5 jednością otrzymujemy $[E] = 1 \cdot [M] \cdot \frac{[L]^2}{[T]^2}$, skąd ostatecznie $[E] = 1 \cdot \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$.

Zadanie 1.6

Uwzględniając obowiązującą w układzie SI zasadę spójności wyznaczyć jednostkę przewodności elektrycznej.

Wprowadzenie:

Przewodność elektryczna G jest to odwrotność oporu elektrycznego $G = \frac{1}{R}$

Opór elektryczny – wielkość charakteryzująca przewodnik, której miarą jest stosunek napięcia przyłożonego do końców przewodnika do natężenia przepływającego przezeń prądu.

Napięcie elektryczne między dwoma punktami jest to różnica potencjałów elektrycznych tych punktów.

Potencjał elektryczny punktu pola elektrostatycznego jest to stosunek energii potencjalnej ładunku elektrycznego umieszczonego w tym punkcie do wielkości tego ładunku. Energia potencjalna ładunku jest równa pracy wykonanej przez siły pola przy przeniesieniu tego ładunku z danego punktu do punktu o potencjale równym zeru.

Prąd – uporządkowany ruch ładunków elektrycznych charakteryzowany wielkością zwaną natężeniem. Natężenie prądu jest równe stosunkowi ładunku elektrycznego przepływającego przez przekrój poprzeczny przewodnika do czasu przepływu tego ładunku.

Rozwiązanie



Przyjmijmy następujące oznaczenia:

G – przewodność; R – rezystancja; U – napięcie, I – prąd (natężenie); V – potencjał;
 E_p – energia potencjalna; q – ładunek elektryczny; F – siła; t – czas; L – długość
 a – przyspieszenie; v – prędkość; m – masa;

Wyrażmy teraz przewodność jako funkcję wielkości podstawowych:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{R} = \frac{1}{\frac{U}{I}} = \frac{I}{U} = \frac{I}{\Delta V} = \frac{I}{V} = \frac{I}{\frac{E_p}{q}} = \frac{I \cdot q}{E_p} = \frac{I \cdot I \cdot t}{F \cdot L} = \frac{I^2 \cdot t}{m \cdot a \cdot L} = \\ &= \frac{I^2 \cdot t}{m \cdot \frac{\Delta v}{t} \cdot L} = \frac{I^2 \cdot t^2}{m \cdot v \cdot L} = \frac{I^2 \cdot t^2}{m \cdot \frac{L}{t} \cdot L} = \frac{I^2 \cdot t^3}{m \cdot L^2} \end{aligned}$$

W takim razie

$$[G] = 1 \cdot \frac{[I]^2 \cdot [t]^3}{[m] \cdot [L]^2} = 1 \cdot \frac{A^2 \cdot s^3}{kg \cdot m^2}$$

Zadanie 1.7

Dla podanych niżej wartości wielkości dobrać krotności jednostek głównych tak, aby ich wartości liczbowe mieściły się w przedziale 1 ÷ 1000.

- a) długość L = 6 430 000 metrów;
- b) długość L = 1850 mikrometrów;
- c) ciśnienie p = 1013 hektopaskali;
- d) pojemność C = 0,0645 nanofarada;

Rozwiązanie

ad a) 6 430 000 metrów [m] = $6,43 \cdot 10^6$ metrów [m] = 6,43 megametrów [Mm]

ad b) 1850 mikrometrów [μ m] = $1850 \cdot 10^{-6}$ metra [m] = $1,85 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}$ metra [m] =
 = $1,85 \cdot 10^{-3}$ metra = 1,85 milimetra [mm]

ad c) 1013 hektopaskali [hPa] = $1013 \cdot 10^2$ paskali [Pa] = $101,3 \cdot 10 \cdot 10^2$ paskali [Pa] =
 = $101,3 \cdot 10^3$ paskali [Pa] = 101,3 kilopaskali [kPa]

ad d) 0,0645 nanofarada [nF] = $0,0645 \cdot 10^{-9}$ farada [F] = $64,5 \cdot 10 \cdot 10^{-9}$ farada [F] =
 = $64,5 \cdot 10^{-12}$ farada [F] = 64,5 pikofarada [pF]



Zadanie 1.8

Przy wyznaczaniu gęstości pewnego ciała uzyskano wynik $\rho = 12,5 \text{ g/cm}^3$. Gęstość wyznaczono z niepewnością względną $\delta_u \rho = \pm 3 \text{ ‰}$. Podać wynik pomiaru w postaci bezwzględnej w jednostkach głównych układu SI.

Rozwiązanie

$$\delta_u \rho = \frac{\Delta_u \rho}{\rho} \Rightarrow \Delta_u \rho = \rho \cdot \delta_u \rho = 12,5 \text{ g/cm}^3 \cdot 3 \text{ ‰} = 12,5 \text{ g/cm}^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 37,5 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

$$12,5 \text{ g/cm}^3 = 12,5 \cdot \frac{10^{-3} \cdot \text{kg}}{(10^{-2} \cdot \text{m})^3} = 12,5 \cdot \frac{10^{-3} \cdot \text{kg}}{10^{-6} \cdot \text{m}^3} = 12\,500 \cdot \text{kg/m}^3$$

$$37,5 \cdot 10^{-3} \cdot \text{g/cm}^3 = 37,5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{10^{-3} \cdot \text{kg}}{(10^{-2} \cdot \text{m})^3} = 37,5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{10^{-3} \cdot \text{kg}}{10^{-6} \cdot \text{m}^3} = 37,5 \cdot \text{kg/m}^3$$

Uwzględniając zasady zaokrąglania błędów przyjmujemy $\Delta_u \rho \approx 40 \text{ kg/m}^3$ i ostatecznie wynik pomiaru przyjmie postać:

$$\rho = (12\,500 \pm 40) \cdot \text{kg/m}^3$$

Zadanie 1.9

Przy pomiarze ładunku elektrycznego uzyskano wartość zaobserwowaną $x_z = 3,21 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Szacując błąd pomiaru uzyskano:

$$\Delta_m x = 0 \text{ oraz } \Delta_u x = 2,67 \cdot 10^{-20} \text{ C}$$

Przedstawić ostateczną postać wyniku pomiaru w postaci bezwzględnej i względnej

Rozwiązanie

$$x_z = 3,21 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 3,21 \cdot 10^2 \cdot 10^{-21} \text{ C} = 321 \cdot 10^{-21} \text{ C} = 321 \cdot \text{zC}$$

$$\Delta_u x = 2,67 \cdot 10^{-20} \text{ C} = 2,67 \cdot 10 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-20} \text{ C} = 26,7 \cdot 10^{-21} \text{ C} = 26,7 \cdot \text{zC}$$

$$\delta_u x = \frac{\Delta_u x}{x} = \frac{26,7 \text{ zC}}{321 \cdot \text{zC}} = 0,083178 = 8,3178 \%$$

$$x_{z,p} = x_z - \Delta_m x = 321 \text{ zC} - 0 = 321 \text{ zC}$$

Uwzględniając zasadę zaokrąglania błędu do jednej cyfry znaczącej mamy $\Delta_u x \approx 30 \text{ zC}$ (wtedy $x_{z,p} \approx 320 \text{ zC}$) oraz $\delta_u x = 8 \%$ i ostatecznie wynik pomiaru zapiszemy w postaci:

$$x = 320 \text{ zC} \pm 30 \text{ zC} \text{ lub } x = 320 \text{ zC} \pm 8 \%$$



Zadanie 1.10

W izbie pomiarów o temperaturze $t_L = 21^\circ\text{C}$ zmierzono długość stalowego wałka bezpośrednio po przyniesieniu go z magazynu o temperaturze $t_M = 12^\circ\text{C}$. Uzyskano wskazanie $L = 199,98 \text{ mm}$. Zakładając, że w chwili pomiaru temperatura wałka była równa temperaturze magazynu oraz że współczynniki rozszerzalności cieplnej przedmiotu mierzonego i narzędzia są równe i wynoszą $\alpha_p \approx \alpha_n \approx 11,5 \cdot 10^{-6} (\text{C}^\circ)^{-1}$, obliczyć wartość błędu temperaturowego.

Rozwiązanie

Do obliczenia wartości systematycznego błędu temperaturowego Δ_t można wykorzystać zależność (19):

$$\Delta_t = L [(\alpha_p - \alpha_n) \cdot (t_n - 20^\circ\text{C}) + \alpha_p \cdot (t_p - t_n)]$$

gdzie:

t_p, t_n - temperatury, odpowiednio przedmiotu i narzędzia pomiarowego;

Ze względu na fakt, że pomiaru wałka dokonano bezpośrednio po przyniesieniu go z magazynu, można przyjąć, że jego temperatura była równa temperaturze magazynu. Natomiast temperatura narzędzia pomiarowego była równa temperaturze panującej w laboratorium. Uwzględniając powyższe, oraz równość współczynników rozszerzalności cieplej, mamy:

$$\begin{aligned}\Delta_t &= L [(\alpha_p - \alpha_n) \cdot (t_n - 20^\circ\text{C}) + \alpha_p \cdot (t_p - t_n)] = L \cdot \alpha_p \cdot (t_M - t_L) = \\ &= 199,98 \text{ mm} \cdot 11,5 \cdot 10^{-6} (\text{C}^\circ)^{-1} \cdot (12^\circ\text{C} - 21^\circ\text{C}) = -0,021 \text{ mm}\end{aligned}$$

Zadanie 1.11

W izbie pomiarów o temperaturze $t_L = (20 \pm 1)^\circ\text{C}$ zmierzono długość stalowego wałka wkrótce po przyniesieniu go z magazynu o temperaturze $t_M = 12^\circ\text{C}$. Uzyskano wskazanie $L = 199,98 \text{ mm}$. Zakładając, że w chwili pomiaru temperatura wałka t_W nie przekraczała 15°C ($12^\circ\text{C} \leq t_W \leq 15^\circ\text{C}$) oraz że współczynniki rozszerzalności cieplnej przedmiotu mierzonego i narzędzia są równe i wynoszą $\alpha_p \approx \alpha_n \approx 11,5 \cdot 10^{-6} (\text{C}^\circ)^{-1}$, obliczyć wartość błędu temperaturowego.

Rozwiązanie

Przyjmujemy, że błąd temperaturowy ΔL jest wypadkową dwu błędów częściowych:

ΔL_N – błędu spowodowanego rozszerzalnością cieplną narzędzia;

ΔL_P - błędu spowodowanego rozszerzalnością cieplną przedmiotu;

czyli:

$$\Delta L = \Delta L_N + \Delta L_P$$



Błąd spowodowany rozszerzalnością cieplną narzędzia jest równy:

$$\Delta L_N = - (L_N - L_{N,0}) = L_{N,0} - L_N$$

gdzie:

L_N – wymiar narzędzia o temperaturze posiadanej w chwili pomiaru (t_N);

$L_{N,0}$ – wymiar narzędzia o temperaturze odniesienia (t_0)

Znak minus wynika z faktu, że powiększanie wymiaru narzędzia powoduje spadek jego wskazań

Z równania opisującego zjawisko rozszerzalności liniowej (zależność 18) wynika, że:

$$\Delta L_N = L_{N,0} - L_N = - L_{N,0} \cdot \alpha_N \cdot (t_N - t_0) \approx L_N \cdot \alpha_N \cdot (t_0 - t_N)$$

W takim razie:

$$\Delta_{\min} L_N = L_N \cdot \alpha_N \cdot (t_0 - t_{N,\max}) = 199,98 \text{ mm} \cdot 11,5 \cdot 10^{-6} \cdot \text{K}^{-1} \cdot (20^\circ\text{C} - 21^\circ\text{C}) = -2,3 \text{ }\mu\text{m}$$

$$\Delta_{\max} L_N = L_N \cdot \alpha_N \cdot (t_0 - t_{N,\min}) = 199,98 \text{ mm} \cdot 11,5 \cdot 10^{-6} \cdot \text{K}^{-1} \cdot (20^\circ\text{C} - 19^\circ\text{C}) = 2,3 \text{ }\mu\text{m}$$

czyli $\Delta L_N = \pm 2,3 \text{ }\mu\text{m}$

Błąd spowodowany rozszerzalnością cieplną wałka wynosi:

$$\Delta L_P = L_P - L_{P,0} = L_{P,0} \cdot \alpha_P \cdot (t_P - t_0) \approx L_P \cdot \alpha_P \cdot (t_P - t_0)$$

gdzie:

L_P – długość wałka o temperaturze posiadanej w chwili pomiaru (t_P);

L_0 – długość wałka o temperaturze odniesienia (t_0);

W takim razie:

$$\Delta_{\min} L_P = L_P \cdot \alpha_P \cdot (t_{P,\min} - t_0) = 199,98 \text{ mm} \cdot 11,5 \cdot 10^{-6} \cdot \text{K}^{-1} \cdot (12^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) = -18,4 \text{ }\mu\text{m}$$

$$\Delta_{\max} L_P = L_P \cdot \alpha_P \cdot (t_{P,\max} - t_0) = 199,98 \text{ mm} \cdot 11,5 \cdot 10^{-6} \cdot \text{K}^{-1} \cdot (15^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) = -11,5 \text{ }\mu\text{m}$$

$$\Delta_m L_P = (\Delta_{\min} L_P + \Delta_{\max} L_P) / 2 = (-18,4 \text{ }\mu\text{m} - 11,5 \text{ }\mu\text{m}) / 2 = -14,95 \text{ }\mu\text{m}$$

$$\Delta_u L_P = (\Delta_{\max} L_P - \Delta_{\min} L_P) / 2 = (-11,5 \text{ }\mu\text{m} + 18,4 \text{ }\mu\text{m}) / 2 = 3,45 \text{ }\mu\text{m}$$

czyli:

$$\Delta L_P = (-14,95 \pm 3,45) \text{ }\mu\text{m}$$

Przy sumowaniu obu błędów cząstkowych przyjmujemy założenie o ich wzajemnej niezależności. Wprawdzie temperatura wałka jest ściśle powiązana z temperaturą panującą w laboratorium i związek ten można nawet wyrazić za pomocą funkcji, ale podstawowym parametrem tej funkcji jest czas, jaki upłynął od przyniesienia



wałka do chwili dokonania jego pomiaru. A ponieważ w treści zadania brak na ten temat danych więc możemy ten czas traktować jako niezależną zmienną losową. W konsekwencji charakteru losowego (i niezależności) nabiera również temperatura wałka, a także wynikający z niej błąd odkształceń termicznych.

Uwzględniając powyższe można zapisać że:

$$\Delta_m L = \Delta_m L_N + \Delta_m L_P = 0 - 14,95 \mu\text{m} = -14,95 \mu\text{m}$$

$$\Delta_u L = \sqrt{(\Delta_u L_N)^2 + (\Delta_u L_P)^2} = \sqrt{(2,3 \mu\text{m})^2 + (3,45 \mu\text{m})^2} = 4,15 \mu\text{m}$$

i ostatecznie po dokonaniu niezbędnych zaokrągleń mamy:

$$\Delta L = (-15 \pm 4) \mu\text{m}$$

Zadanie 1.12

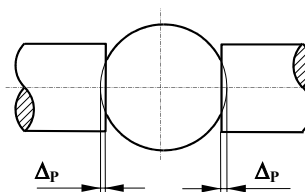
Obliczyć wartość błędu odkształceń sprężystych przy pomiarze średnicy kulki stalowej za pomocą mikrometru. W trakcie pomiaru kulka obejmowana jest dwoma stalowymi płaskimi końcówkami mierniczymi.

Dane:

Orientacyjna wartość średnicy kulki $d \approx 8 \text{ mm}$.

Nacisk pomiarowy mikrometru wg wymagań PN

$P = 5 \div 10 \text{ N}$,



Rozwiązanie

Błąd odkształceń sprężystych $\Delta_p d$ równy jest sumie odkształceń Δ_p występujących po obydwu stronach kulki. Ponieważ zmniejsza on wskazanie przyrządu przypisujemy mu znak ujemny, czyli: $\Delta_p d = -2 \cdot \Delta_p$

Na podstawie [6] (tablica 2.2, str. 52) lub niniejszego skryptu (str.41) mamy:

$$\Delta_p = 0,415 \cdot \sqrt[3]{\frac{P^2}{d}}$$

gdzie:

Δ_p - spłaszczenie sprężyste w μm ;

P - siła nacisku pomiarowego w N;

d - średnica kulki w mm;

W takim razie:

$$\Delta_{pd} = -2 \cdot \Delta_p = -0,83 \cdot \sqrt[3]{\frac{p^2}{d}}$$

Obliczmy wartości graniczne błędu:

$$\Delta_{\min, pd} = -0,83 \cdot \sqrt[3]{\frac{10^2}{8}} \mu\text{m} = -1,93 \mu\text{m}$$

$$\Delta_{\max, pd} = -0,83 \cdot \sqrt[3]{\frac{5^2}{8}} \mu\text{m} = -1,21 \mu\text{m}$$

w takim razie

$$\Delta_{m, pd} = \frac{\Delta_{\min, pd} + \Delta_{\max, pd}}{2} = \frac{-1,93 \mu\text{m} - 1,21 \mu\text{m}}{2} = -1,57 \mu\text{m}$$

$$\Delta_{u, pd} = \frac{\Delta_{\max, pd} - \Delta_{\min, pd}}{2} = \frac{-1,21 \mu\text{m} - (-1,93) \mu\text{m}}{2} = 0,36 \mu\text{m}$$

i ostatecznie

$$\Delta_{pd} = (-1,57 \pm 0,36) \mu\text{m}$$

Zadanie 1.13

Przy dokładnym pomiarze średnicy wałka uzyskano odczyt $x_z = 31,995$ mm. Przeprowadzona analiza procesu pomiarowego wykazała, że w trakcie pomiaru wystąpiło przynajmniej pięć istotnych błędów cząstkowych, a mianowicie: błąd odkształceń sprężystych, błąd odkształceń termicznych, błąd wskazań przyrządu, błąd pobrania wielkości mierzonej i błąd odczytu. Oszacowano wartości poszczególnych błędów cząstkowych uzyskując następujące wyniki:

- błąd odkształceń sprężystych $\Delta_1 d = (-0,003 \pm 0,002)$ mm;
- błąd odkształceń termicznych $\Delta_2 d = (0,005 \pm 0,003)$ mm;
- błąd wskazań przyrządu: $\Delta_3 d = (-0,007 \pm 0,004)$ mm;
- błąd pobrania wielkości mierzonej $\Delta_4 d = \pm 0,003$ mm;
- błąd odczytu $\Delta_5 d = \pm 0,003$ mm;

Opracować wynik pomiaru przy założeniu, że w/w błędy są wzajemnie niezależne, a pozostałe błędy cząstkowe, które wystąpiły w procesie pomiaru miały wartości pomijalnie małe.



Rozwiązanie

Obliczamy średnią wartość błędu pomiaru:

$$\begin{aligned}\Delta_m d &= \Delta_{m,1} d + \Delta_{m,2} d + \Delta_{m,3} d + \Delta_{m,4} d + \Delta_{m,5} d = \\ &= (-0,003 \text{ mm}) + 0,005 \text{ mm} + (-0,007 \text{ mm}) + 0 \text{ mm} + 0 \text{ mm} = -0,005 \text{ mm}\end{aligned}$$

Przy założeniu wzajemnej niezależności błędów cząstkowych niepewność oszacowania wartości średniej błędu pomiaru wynosi:

$$\begin{aligned}\Delta_u d &= \sqrt{(\Delta_{u,1} d)^2 + (\Delta_{u,2} d)^2 + (\Delta_{u,3} d)^2 + (\Delta_{u,4} d)^2 + (\Delta_{u,5} d)^2} = \\ &= \sqrt{(0,002 \text{ mm})^2 + (0,003 \text{ mm})^2 + (0,004 \text{ mm})^2 + (0,003 \text{ mm})^2 + (0,003 \text{ mm})^2} = 0,00624 \text{ mm}\end{aligned}$$

Obliczoną wartość niepewności zaokrąglamy do pierwszej cyfry znaczącej: $\Delta_u d \approx 0,006 \text{ mm}$

W takim razie:

$$d_{z,p} = d_z - \Delta_m d = 31,995 \text{ mm} - (-0,005 \text{ mm}) = 32,000 \text{ mm}$$

I ostatecznie:

$$d = (32,000 \pm 0,006) \text{ mm}$$

Zadanie 1.14

Obliczyć całkowitą długość podziałki termometru rtęciowego o zakresie pomiarowym $(0 \div 50)^\circ\text{C}$, jeżeli wartość jego działki elementarnej wynosi $0,2^\circ\text{C}$, a czułość jest równa $5 \text{ mm} / ^\circ\text{C}$.

Rozwiązanie

Całkowita długość podziałki termometru $L_c = n \cdot l_e$

Liczbę działek podziałki n obliczamy z zależności:

$$n = z / w_e = (w_{\max} - w_{\min}) / w_e = (50^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}) / 0,2^\circ\text{C} = 250$$

Długość działki elementarnej l_e obliczamy z zależności $C = dy / dx \approx l_e / w_e$, stąd:

$$l_e = w_e \cdot C = 0,2^\circ\text{C} \cdot 5 \text{ mm} / ^\circ\text{C} = 1 \text{ mm}$$

W takim razie długość całkowita podziałki:

$$L_c = n \cdot l_e = 250 \cdot 1 \text{ mm} = 250 \text{ mm}$$



Zadanie 1.15

Przystępując do pomiaru wartości natężenia prądu elektrycznego wiemy, że nie przekracza ona 12 A. Mamy do wyboru dwa amperomierze:

- 1) o zakresie $0 \div 50 \text{ A}$ i klasie dokładności 0,5;
- 2) o zakresie $0 \div 15 \text{ A}$ i klasie dokładności 1;

Który z w/w przyrządów należy wybrać, aby niepewność wyniku pomiaru była mniejsza ?

Rozwiązanie

Błąd przyrządu jest jedną ze składowych błędów pomiaru a niepewność odnośnie wartości tego błędu stanowi składową niepewności wyniku pomiaru. Zakładamy, że wartości pozostałych składowych niepewności wyniku pomiaru nie zależą od wyboru amperomierza. W takim przypadku mniejszą niepewność wyniku pomiaru uzyskamy wybierając ten amperomierz, dla którego dopuszczalna wartość jego błędu jest mniejsza.

Wartość dopuszczalną błędów przyrządu o klasie dokładności k i zakresie z określa zależność:

$$|\Delta_{\text{dop}} x| \leq k \cdot z / 100$$

W takim razie dopuszczalna wartość błędów przyrządu dla pierwszego amperomierza wynosi:

$$\Delta_{\text{dop},1} x = k_1 \cdot z_1 / 100 = 0,5 \cdot (50 \text{ A} - 0 \text{ A}) / 100 = 0,25 \text{ A},$$

natomiast dla drugiego:

$$\Delta_{\text{dop},2} x = k_2 \cdot z_2 / 100 = 1 \cdot (15 \text{ A} - 0 \text{ A}) / 100 = 0,15 \text{ A}$$

Z powyższych obliczeń wynika, że mniejszą niepewność wyniku pomiaru uzyskamy wybierając amperomierz drugi, chociaż jego klasa dokładności jest niższa.

Zadanie 1.16

Jaką klasę dokładności winien posiadać manometr o zakresie pomiarowym $0 \div 6 \text{ MPa}$, aby jego błąd przy pomiarze w warunkach odniesienia nie przekraczał wartości 25 kPa? Znormalizowany ciąg wartości klas w manometrach to: 0,16; 0,25; 0,4; 0,6; 1; 1,6; ...

Rozwiązanie

Klasę przyrządu określa zależność $k = (\Delta_{\text{dop}} / z) \cdot 100$. W takim razie:

$$k = (25 \text{ kPa} / 6 \text{ MPa}) \cdot 100 = 0,4166$$

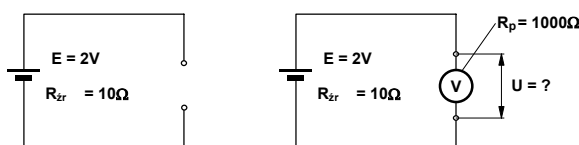


Aby błąd przyrządu nie przekroczył określonej w treści zadania wartości musi być $k^* \leq 0,4166$. Najbliższa wartość znormalizowana spełniająca ten warunek to 0,4.

Zadanie 1.17

W oparciu o zamieszczony niżej schemat obliczyć, jaki spadek napięcia na zaciskach ogniwa spowodowało podłączenie woltomierza, jeżeli:

- siła elektromotoryczna ogniwa $E = 2 \text{ V}$;
- oporność wewnętrzna ogniwa $R_{zt} = 10 \Omega$;
- rezystancja woltomierza $R_p = 1000 \Omega$



Rozwiązanie

1. Wyznaczamy rezystancję całkowitą R_Σ obwodu z woltomierzem

$$R_\Sigma = R_{zt} + R_p = 10 \Omega + 1000 \Omega = 1010 \Omega$$

2. Wyznaczamy wartość I prądu płynącego w tym obwodzie

$$I = E / R_\Sigma = 2 \text{ V} / 1010 \Omega = 0,001980 \text{ A}$$

3. Wyznaczamy napięcie na zaciskach woltomierza

$$U = I \cdot R_p = 0,001980 \text{ A} \cdot 1000 \Omega = 1,98 \text{ V}$$

4. Wyznaczamy spadek napięcia spowodowany podłączeniem woltomierza

$$\Delta U = U - E = 1,98 \text{ V} - 2 \text{ V} = -0,02 \text{ V}$$

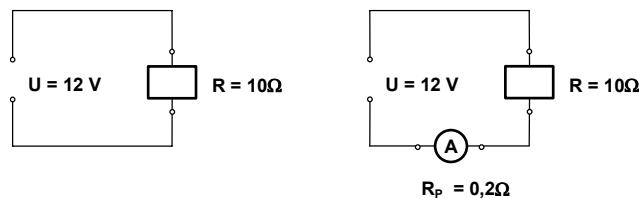
5. W przypadku ogólnym

$$\Delta U = U - E = I \cdot R_p - E = \frac{E}{R_\Sigma} \cdot R_p - E = E \cdot \left(\frac{R_p}{R_\Sigma} - 1 \right) = -E \cdot \frac{R_{zt}}{R_{zt} + R_p}$$

czyli spadek napięcia będzie tym mniejszy, im większa będzie rezystancja woltomierza.

Zadanie 1.18

Obliczyć zmianę prądu spowodowaną podłączeniem amperomierza do obwodu elektrycznego pokazanego na poniższym szkicu:



Rozwiązanie

Natężenie prądu w obwodzie bez amperomierza

$$I = U / R = 12 \text{ V} / 10 \Omega = 1,2 \text{ A}$$

Natężenie prądu po podłączeniu amperomierza

$$I_A = U / (R + R_p) = 12 \text{ V} / (10 \Omega + 0,2 \Omega) \approx 1,1765 \text{ A}$$

Zmiana prądu w obwodzie

$$\Delta I = I_A - I = 1,1765 \text{ A} - 1,2 \text{ A} = -0,0235 \text{ A}$$

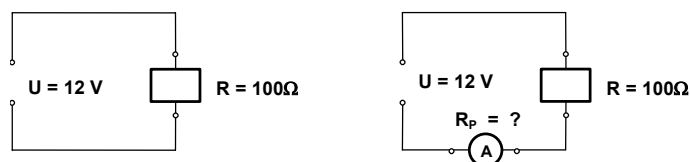
W przypadku ogólnym

$$\Delta I = I_A - I = \frac{U}{R + R_p} - \frac{U}{R} = U \cdot \frac{R - (R + R_p)}{R \cdot (R + R_p)} = -U \cdot \frac{R_p}{R \cdot (R + R_p)}$$

czyli zmiana prądu będzie tym mniejsza, im mniejsza będzie rezystancja amperomierza.

Zadanie 1.19

Dobrać rezystancję amperomierza tak, aby zmiana prądu, wywołana jego podłączeniem do pokazanego niżej obwodu elektrycznego, nie przekroczyła 0,2%



Rozwiązanie

Oznaczmy prąd płynący w obwodzie bez amperomierza przez I , a prąd płynący w obwodzie po podłączeniu amperomierza przez I_A . Rezystancja przyrządu musi być dobrana tak, aby spełniony został warunek:

$$\left| \frac{\Delta I}{I} \right| \leq 0,2\% = 0,002 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{I_A - I}{I} \right| \leq 0,002$$

uwzględniając, że $I_A = U / (R + R_p)$ oraz $I = U / R$ otrzymujemy:

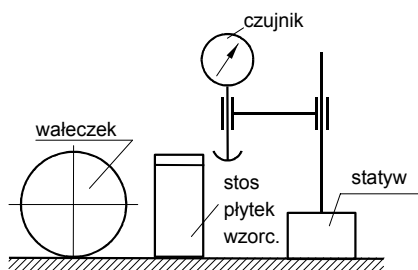


$$\left| \frac{\frac{U}{R+R_p} - \frac{U}{R}}{\frac{U}{R}} \right| \leq 0,002 \quad \Rightarrow \quad \left| U \cdot \left(\frac{1}{R+R_p} - \frac{1}{R} \right) \cdot \frac{R}{U} \right| \leq 0,002$$

rozwiązując powyższą nierówność względem R_p uzyskujemy $R_p \leq 0,002004 \cdot R$, a po podstawieniu podanych w treści zadania danych $R_p \leq 0,2004 \, \Omega$.

Zadanie 1.20

Metodę pomiaru średnicy wałka pokazano na zamieszczonym niżej rysunku. Na płycie mierniczej (wzorec płaskości) umieszczono statyw z zamocowanym w nim



czujnikiem zegarowym. Pod stopkę czujnika podsunęto stos płytek wzorcowych o wysokości dobranej tak, by jej wartość była zbliżona do wartości mierzonej średnicy. Za pomocą elementów regulacyjnych statywu i czujnika ustawiono wskazanie czujnika na zero. Następnie pod stopkę czujnika wsunęto wałek i tak go ustawiono, aby uzyskać maksymalne wychylenie wskazówki. Opracować wynik pomiaru, jeżeli:

- stos płytek wzorcowych składał się z dwóch płytek o długościach nominalnych $w_1 = 14 \, \text{mm}$ i $w_2 = 1,28 \, \text{mm}$ oraz wartościach błędów: $\Delta w_1 = (-0,001 \pm 0,0006) \, \text{mm}$ i $\Delta w_2 = \pm 0,0005 \, \text{mm}$;
- maksymalne wskazanie czujnika wynosiło $\alpha = 0,063 \, \text{mm}$, a niepewność tego wskazania wynikająca z błędów pobrania, błędów czujnika i błędów odczytu wynosiła $\Delta_u \alpha = \pm 0,001 \, \text{mm}$

Rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że pomiaru dokonano metodą różnicową. W takim razie wartość zaobserwowaną średnicy należy obliczyć w oparciu o zależność (44a).

$$d = w - \Delta_m w + \alpha - \Delta_m \alpha - \Delta_m z$$

$$w = w_1 + w_2 = 14 \, \text{mm} + 1,28 \, \text{mm} = 15,28 \, \text{mm}$$

$$\Delta_m w = \Delta_m w_1 + \Delta_m w_2 = -0,001 \, \text{mm} + 0 \, \text{mm} = -0,001 \, \text{mm}$$

Ponieważ w treści zadania brak jakichkolwiek danych odnośnie wartości średnich błęd pomiaru różnicy $x - w$ oraz błędu zerowania przyjmujemy $\Delta_m \alpha = 0$ oraz $\Delta_m z = 0$. Uwzględniając powyższe otrzymujemy:

$$d = w - \Delta_m w + \alpha - \Delta_m \alpha - \Delta_m z = 15,28 \text{ mm} - (-0,001 \text{ mm}) + 0,063 \text{ mm} = 15,344 \text{ mm}$$

Niepewność pomiaru średnicy obliczamy korzystając z zależności (44b).

$$\Delta_u d \approx \sqrt{(\Delta_u w)^2 + (\Delta_u \alpha)^2 + (\Delta_u z)^2}$$

Niepewność wzorca jest wypadkową niepewności obu płytek i wynosi:

$$\Delta_u w = \sqrt{(\Delta_u w_1)^2 + (\Delta_u w_2)^2}$$

Jeśli chodzi o niepewność zerowania, to w przypadku braku jakichkolwiek danych przyjmuje się, że $\Delta_u z \approx \Delta_u \alpha$. Uwzględniając powyższe mamy:

$$\begin{aligned} \Delta_u d &\approx \sqrt{(\Delta_u w_1)^2 + (\Delta_u w_2)^2 + 2 \cdot (\Delta_u \alpha)^2} = \sqrt{(0,0006 \text{ mm})^2 + (0,0005 \text{ mm})^2 + 2 \cdot (0,001 \text{ mm})^2} = \\ &= 0,0016155 \text{ mm} \end{aligned}$$

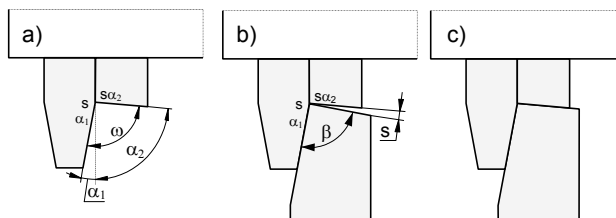
Obliczoną wartość należy zaokrąglić do pierwszej cyfry znaczącej. Ponieważ jest nią jeden zostawiamy drugą cyfrę znaczącą. Ostatecznie otrzymujemy:

$$d = (15,3440 \pm 0,0016) \text{ mm}$$

Możliwe jest również podanie wyniku w postaci $d = (15,344 \pm 0,002) \text{ mm}$

Zadanie 1.21

Z płytek wzorcowych kąta Johanssona utworzono wzorcowy kąt ω (rys. a). Po przyłożeniu do płytek przedmiotu mierzonego (rys. b), stwierdzono wystąpienie szczeliny s . Następnie, poprzez odpowiednią wymianę płytek tak dobrano wartości kątów wzorcowych α_1 i α_2 , że szczelina s przestała być widoczna (rys. c).



Opracować wynik tego pomiaru, jeżeli:

$$\alpha_1 = 10^\circ 45'; \quad \Delta_u \alpha_1 = \pm 12''; \quad \alpha_2 = 57^\circ; \quad \Delta_u \alpha_2 = \pm 12''$$

szacowana wartość błędu detekcji szczeliny wynosiła $\Delta_D = \pm 0,5'$

Rozwiązanie

Jak wynika z treści zadania pomiar sprowadzał się do takiej regulacji wartości kąta wzorcowego ω , aby różnicę pomiędzy nim i kątem mierzonym β (która

uwidaczniała się w postaci szczeliny) sprowadzić do zera. Z powyższego wynika, że zastosowaną metodę pomiaru można uznać za metodę zerową kompensacyjną. W takim razie miarę wielkości mierzonej należy obliczyć w oparciu o zależność (46a):

$$\begin{aligned}\beta &= \omega - \Delta_m \omega \\ \omega &= \alpha_1 + \alpha_2 = 10^\circ 45' + 57^\circ = 67^\circ 45' \\ \Delta_m \omega &= \Delta_m \alpha_1 + \Delta_m \alpha_2 = 0^\circ + 0^\circ = 0^\circ \\ \beta &= \omega - \Delta_m \omega = 67^\circ 45' - 0^\circ = 67^\circ 45'\end{aligned}$$

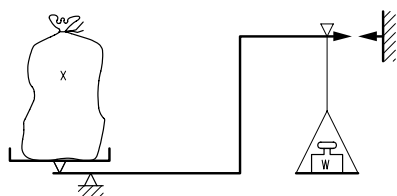
a niepewność pomiaru w oparciu o zależność (46b):

$$\begin{aligned}\Delta_u \beta &= \sqrt{(\Delta_u \omega)^2 + (\Delta_D)^2} \\ \text{ale } \Delta_u \omega &= \sqrt{(\Delta_u \alpha_1)^2 + (\Delta_u \alpha_2)^2} = \sqrt{(12'')^2 + (12'')^2} = 17'' \\ \text{więc } \Delta_u \beta &= \sqrt{(\Delta_u \omega)^2 + (\Delta_D)^2} = \sqrt{(17'')^2 + (30'')^2} = 34,47'' = 0,5745'\end{aligned}$$

Obliczoną wartość zaokrąglamy do jednej cyfry znaczącej, czyli $\Delta \beta \cong 0,6'$ i ostatecznie wynik pomiaru przyjmuje postać $\beta = 67^\circ 45' \pm 0,6'$

Zadanie 1.22

Opracować wynik pomiaru masy na wadze dziesiętnej (rys. poniżej), jeżeli:



- nominalne przełożenie wagi $k = 10$;
- błąd przełożenia $\Delta k = 0,02 \pm 0,01$
- odważniki równoważące mierzoną masę:
 $w_1 = 5 \text{ kg}$ i $w_2 = 0,02 \text{ kg}$
- błędy odważników:
 $\Delta w_1 = -3 \text{ g} \pm 1 \text{ g}$;
 $\Delta w_2 = 0,5 \text{ g} \pm 0,5 \text{ g}$;
- błąd detekcji: $\Delta_D = \pm 0,03 \text{ kg}$

Rozwiązanie

Przedstawiona wyżej metoda pomiaru jest metodą zerową komparacyjną. W celu opracowania wyniku należy:

a) ustalić wartość wzorcową w równoważącą wartość mierzoną

$$\begin{aligned}w &= w_1 + w_2 = 5 \text{ kg} + 0,02 \text{ kg} = 5,02 \text{ kg} \\ \Delta_m w &= \Delta_m w_1 + \Delta_m w_2 = -0,003 \text{ kg} + 0,0005 \text{ kg} = -0,0025 \text{ kg}\end{aligned}$$

$$\Delta_u w_1 = \sqrt{(\Delta_u w_1)^2 + (\Delta_u w_2)^2} = \sqrt{(0,001 \text{ kg})^2 + (0,0005 \text{ kg})^2} = 0,001118 \text{ kg}$$

b) obliczyć wartość zaobserwowaną poprawną

$$x_{z,p} = (w - \Delta_u w) \cdot (k - \Delta_u k) = (5,02 \text{ kg} + 0,0025 \text{ kg}) \cdot (10 - 0,02) = 50,12455 \text{ kg}$$

c) obliczyć niepewność wyniku pomiaru

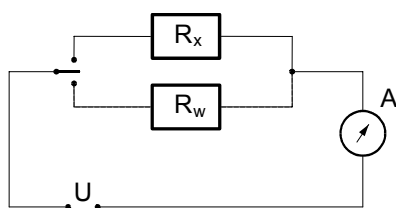
$$\begin{aligned} \Delta_u x &= \sqrt{(w \cdot \Delta_u k)^2 + (k \cdot \Delta_u w)^2 + (\Delta_D)^2} = \\ &= \sqrt{(5,02 \text{ kg} \cdot 0,01)^2 + (10 \cdot 0,001118 \text{ kg})^2 + (0,03 \text{ kg})^2} = 0,059540 \text{ kg} \end{aligned}$$

obliczoną wartość zaokrąglamy do jednej cyfry znaczącej, czyli $\Delta_u x \cong 0,06 \text{ kg}$. Z tym samym rzędem dokładności podajemy wartość zaobserwowaną. Ostatecznie mamy:

$$x = (50,12 \pm 0,06) \text{ kg}$$

Zadanie 1.23

W celu wyznaczenia oporności elektrycznej produkowanych wyrobów zastosowano metodę pomiarową, której zasadę przedstawia poniższy schemat:



Po podłączeniu do obwodu badanej wielkości R_x obserwowano wskazania amperomierza. Następnie w miejsce sprawdzanego opornika podłączano wzorcowy opornik dekadowy i tak go ustawiano, aby uzyskać identyczne wskazania amperomierza.

Zakładając, że błąd wzorcowego opornika dekadowego w całym zakresie odtwarzanych wartości nie przekracza $\pm 0,1 \%$, wyznaczyć wartość mierzonej wielkości, jeżeli:

- identyczne wskazania amperomierza, $I = 384 \text{ mA}$, uzyskano przy ustawieniu na oporniku dekadowym rezystancji $R_w = 148 \Omega$;
- błąd detekcji prądu (niepowtarzalność wskazań amperomierza plus błędy odczytu obu jego wskazań) oszacowano na $\pm 5 \text{ mA}$;
- wahania napięcia źródła zasilającego nie przekraczają $\pm 0,2\%$ nastawionej wartości znamionowej, czyli $\Delta U = \pm 0,002 \cdot U$;

Rozwiązanie

Z opisu sposobu przeprowadzenia pomiaru wynika, że dokonano go metodą zerową "przez podstawienie". W takim razie wynik pomiaru określają zależności (49).

$$\begin{cases} x_{z,p} = w - \Delta_m w \\ \Delta_u x = \sqrt{(\varphi'_{(y)} \cdot \Delta_{u,D})^2 + (\varphi'_{(y)} \cdot \Delta_n)^2 + (\Delta_u w)^2} \end{cases}$$

W naszym przypadku $x = R_x$, $w = R_w$, $y = I$, równanie przetwarzania: $I = U / R$, funkcja odwrotna: $R = U / I$, pochodna funkcji odwrotnej: $\varphi'_{(y)} = - U / I^2 = - R / I$, zależności (49) przyjmą zatem postać

$$\begin{cases} R_x = R_w - \Delta_m R_w \\ \Delta_u R_x = \sqrt{\left(-\frac{R}{I} \cdot \Delta_D I\right)^2 + \left(-\frac{R}{I} \cdot \Delta_n I\right)^2 + (\Delta_u R_w)^2} \end{cases}$$

Uwzględniając, że:

$$\Delta_n I = \Delta U / R = \pm 0,002 \cdot U / R = \pm 0,002 \cdot I \quad \text{oraz} \quad \Delta R_w = \pm 0,1 \% R_w = \pm 0,001 \cdot R_w$$

i podstawiając wartości liczbowe, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} R_x &= 148 \, \Omega - 0 \, \Omega = 148 \, \Omega \\ \Delta_u R_x &= \sqrt{\left(-\frac{148 \, \Omega}{384 \, \text{mA}} \cdot 5 \, \text{mA}\right)^2 + \left(-\frac{148 \, \Omega}{384 \, \text{mA}} \cdot 0,002 \cdot 384 \, \text{mA}\right)^2 + (0,001 \cdot 148 \, \Omega)^2} = \\ &= 1,9553 \, \Omega \end{aligned}$$

Obliczoną wartość błędu zaokrąglamy do jednej cyfry znaczącej i ostatecznie:

$$R_x = (148 \pm 2) \, \Omega$$

Zadanie 1.24

Pomiar średniej prędkości pojazdu polegał na zmierzeniu czasu, w którym pojazd ten pokonał odcinek drogi o długości $L = 1200 \, \text{m}$, przy czym długość tą wyznaczono z niepewnością $\Delta_u L = 1 \, \text{m}$. W wyniku pomiaru czasu uzyskano $T = 63,4 \, \text{s}$ z niepewnością $\Delta_u T = 0,1 \, \text{s}$. Opracować wynik pomiaru prędkości.

Rozwiązanie

Pomiaru prędkości dokonano metodą pośrednią o równaniu definicyjnym $v = \frac{L}{T}$

W takim razie zgodnie z zależnościami (50) mamy:

$$\begin{aligned} v &= \frac{L}{T} = \frac{1200 \, \text{m}}{63,4 \, \text{s}} = 18,9274 \, \text{m/s} \\ \Delta_u v &= \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial L} \Delta_u L\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial T} \Delta_u T\right)^2} \end{aligned}$$

Ponieważ:



$$\frac{\partial v}{\partial L} = \frac{1}{T} \quad \text{ i } \quad \frac{\partial v}{\partial T} = -\frac{L}{T^2}$$

więc

$$\Delta_u v = \sqrt{\left(\frac{\Delta_u L}{T}\right)^2 + \left(-\frac{L}{T^2} \Delta_u T\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1 \text{ m}}{63,4 \text{ s}}\right)^2 + \left(-\frac{1200 \text{ m}}{(63,4 \text{ s})^2} \cdot 0,1 \text{ s}\right)^2} = 0,0338 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Obliczoną wartość niepewności należy zaokrąglić do jednej cyfry znaczącej. Po wykonaniu tego zabiegu mamy:

$$\Delta_u v = 0,03 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Do tego samego rzędu dokładności zaokrąglamy obliczoną wcześniej wartość prędkości i ostatecznie:

$$v = (18,93 \pm 0,03) \text{ m/s}$$

Zadanie 1.25

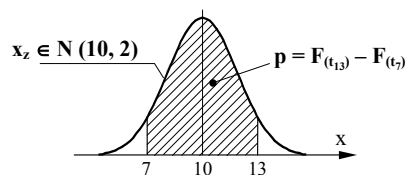
Na podstawie dużej liczby pomiarów pewnej wielkości określonej ustalono, że wartość zaobserwowana posiada rozkład normalny o parametrach $m = 10$ i $\sigma = 2$. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że pojedynczy wynik pomiaru będzie posiadał wartość zaobserwowaną zawartą w przedziale $x \in (7, 13)$. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że pojedynczy wynik pomiaru będzie miał wartość zaobserwowaną większą od 14?

Rozwiązanie

Dokonujemy standaryzacji zmiennej x

$$t = \frac{x - m}{\sigma}$$

$$t_7 = \frac{7 - 10}{2} = -1,5; \quad t_{13} = \frac{13 - 10}{2} = 1,5$$



Prawdopodobieństwo, że zmienna x będzie zawarta w przedziale $(7, 13)$ jest równe prawdopodobieństwu zdarzenia, że zmienna t będzie zawarta w przedziale $(-1,5, 1,5)$. W takim razie:

$$P(-1,5 < t < 1,5) = F_{(1,5)} - F_{(-1,5)}$$



Ze względu na symetrię rozkładu normalnego $F_{(-t)} = 1 - F_{(t)}$. W takim razie:

$$p_{(-1,5 < t < 1,5)} = F_{(1,5)} - F_{(-1,5)} = F_{(1,5)} - (1 - F_{(1,5)}) = 2 \cdot F_{(1,5)} - 1$$

Na podstawie tabeli 5 (str. 79)

$$F_{(1,5)} = 0,9332$$

czyli

$$p_{(-1,5 < t < 1,5)} = 2 \cdot 0,9332 - 1 = 0,8664 = 86,64\%$$

Analogicznie ustalamy odpowiedź na drugie pytanie

$$t_{14} = \frac{14-10}{2} = 2$$

$$P(x > 14) = P(t > 2)$$

$$p_{(t > 2)} = 1 - F_{(2)} = 1 - 0,9772 = 0,0228 = 2,28\%$$

Zadanie 1.26

Dokonując wielu pomiarów pewnej wielkości ściśle określoną metodą pomiarową stwierdzono, że wartość zaobserwowana podlega rozkładowi normalnemu o odchyleniu standardowym $\sigma = 0,5$ mm. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że wartość zaobserwowana kolejnego pomiaru tej wielkości dokonana za pomocą tej samej metody, będzie się różniła od wartości oczekiwanej nie więcej, niż $\pm 0,6$ mm. Jak duży powinien być przedział ufności, aby prawdopodobieństwo to wynosiło 99% ?

Rozwiązanie

Oznaczmy graniczne wartości różnicy $x_z - m_x$ przez $\Delta_{G,min}$ i $\Delta_{G,max}$ i obliczmy odpowiadające tym wartościom zmienne standaryzowane $t_{G,min}$ i $t_{G,max}$

Ponieważ $t = \frac{x - m}{\sigma}$, więc

$$t_{G,min} = \frac{\Delta_{G,min}}{\sigma} = \frac{-0,6 \text{ mm}}{0,5 \text{ mm}} = -1,2$$

$$t_{G,max} = \frac{\Delta_{G,max}}{\sigma} = \frac{0,6 \text{ mm}}{0,5 \text{ mm}} = 1,2$$

$$p_{(-0,6 < x_z - m_x < 0,6)} = p_{(-1,2 < t < 1,2)} = F_{(1,2)} - F_{(-1,2)} = F_{(1,2)} - (1 - F_{(1,2)}) = 2 \cdot F_{(1,2)} - 1$$

W tablicy 5 (str. 79) znajdujemy, że $F_{(1,2)} = 0,8849$;



W takim razie: $p_{(-0,6 < x_z - m_x < 0,6)} = 2 \cdot 0,8849 - 1 = 0,7698 \approx 77\%$

Aby prawdopodobieństwo $p_{(\Delta_{G,\min} < x_z - m_x < \Delta_{G,\min})}$ wynosiło 99% musi być spełniona zależność:

$$F_{(t_{G,\max})} - F_{(t_{G,\min})} = F_{(t_{G,\max})} - (1 - F_{(t_{G,\max})}) = 2 \cdot F_{(t_{G,\max})} - 1 = 0,99$$

W takim razie:

$$F_{(t_{G,\max})} = (1 + 0,99)/2 = 0,995$$

W tablicy 5 dla $F_{(t)} = 0,995$ znajdujemy: $t = 2,58$

W takim razie:

$$\Delta_{G,\min} = t_{G,\min} \cdot \sigma = -t_{G,\max} \cdot \sigma = -2,58 \cdot 0,5 \text{ mm} = -1,29 \text{ mm}$$

$$\Delta_{G,\max} = t_{G,\max} \cdot \sigma = 2,58 \cdot 0,5 \text{ mm} = 1,29 \text{ mm}$$

Dla poziomu ufności $p = 99\%$ przedział ufności $\Delta_G = \pm 1,29 \text{ mm}$ (w praktyce można zaokrąglić do $\pm 1,3 \text{ mm}$)

Zadanie 1.27

Studentka osiem razy zmierzyła czas opadania kulki wiskozymetru uzyskując następujące wyniki (wszystkie w sekundach): 7,5; 7,6; 7,5; 8,0; 7,6; 7,9; 7,6 i 7,9. Zakładając, że wartość zaobserwowana czasu opadania kulki posiada rozkład normalny o nieznanym odchyleniu standardowym σ , oraz że błędy systematyczne są pomijalnie małe oszacować:

- rzeczywistą wartość czasu opadania kulki, przyjmując poziom ufności $p = 95\%$;
- prawdopodobieństwo zdarzenia, że w kolejnym (dziewiątym) pomiarze wartość zaobserwowana będzie nie mniejsza od 8,1 s.

Rozwiązanie

ad a) w celu oszacowania rzeczywistej wartości czasu opadania kulki należy:

- obliczyć wartość średnią i odchylenie standardowe uzyskanych wartości zaobserwowanych;

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7,5 \text{ s} + 7,6 \text{ s} + 7,5 \text{ s} + 8,0 \text{ s} + 7,6 \text{ s} + 7,9 \text{ s} + 7,6 \text{ s} + 7,9 \text{ s}}{8} = 7,70 \text{ s}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} = 0,20 \text{ s}$$



- dla danego poziomu ufności $p = 95\%$ i liczby wykonanych pomiarów $N = 8$ określić na podstawie tablic rozkładu Studenta (str. 81) odpowiadającą im wartość graniczną t_g zmiennej t . Wynosi ona:

$$t_g = 2,365$$

- obliczyć wartość niepewności przypadkowej pojedynczego pomiaru

$$\Delta_u^p x = t_g \cdot s = 2,365 \cdot 0,2s = 0,473s$$

- obliczyć wartość niepewności przypadkowej średniej arytmetycznej

$$\Delta_u^p \bar{x} = \frac{\Delta_u^p x}{\sqrt{N}} = \frac{0,473s}{\sqrt{8}} = 0,167231s$$

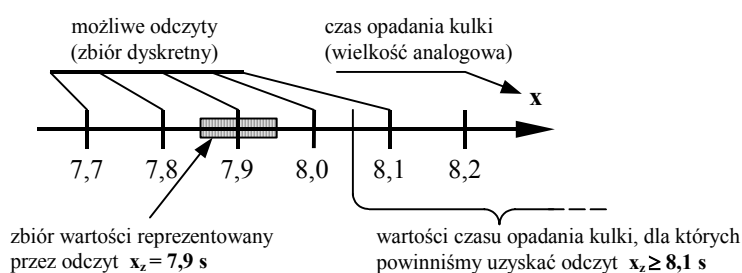
- obliczyć wartość całkowitej niepewności średniej arytmetycznej; wykorzystując zależność (51) oraz uwzględniając fakt, że wg danych zadania błędy systematyczne są pomijalnie małe, uzyskujemy

$$\Delta_u \bar{x} = \Delta_u^p \bar{x} = 0,167231s$$

- zaokrąglając obliczoną wartość niepewności do dwóch cyfr znaczących (do dwóch, bo pierwszą cyfrą znaczącą jest 1) podać oszacowaną wartość czasu opadania kulki. Wynosi ona:

$$x = (7,70 \pm 0,17)s$$

ad b) zauważmy, że wielkość mierzona jest wielkością analogową, natomiast zbiór wyników ma charakter dyskretny. Analiza uzyskanych przez studentkę wartości zaobserwowanych prowadzi do wniosku, że zdolność rozdzielcza odczytu wynosi w tym przypadku 0,1s. W takim razie każdy odczyt x_z reprezentuje sobą przedział wartości $x_z \pm 0,05s$ (p. rys. poniżej)



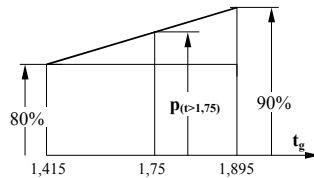
W takim razie graniczna wartość czasu opadania kulki, dla której powinniśmy uzyskać wskazanie $x_z \geq 8,1s$ wynosi 8,05 s, a odpowiadająca jej wartość zmiennej standaryzowanej

$$t_g = \frac{x_g - \bar{x}}{s} = \frac{8,05 \text{ s} - 7,7 \text{ s}}{0,2 \text{ s}} = 1,75$$

Prawdopodobieństwo, że kolejna wartość zaobserwowana będzie spełniać warunek $t_z \geq 8,1 \text{ s}$ jest równe prawdopodobieństwu, że zmienna standaryzowana t będzie spełniać warunek $t \geq 1,75$. Aby obliczyć prawdopodobieństwo spełnienia tego warunku na podstawie danych zawartych w tabeli 6 (str. 81) musimy skorzystać z zależności:

$$p_{(t > 1,75)} = \frac{1 - p_{(-1,75 < t < 1,75)}}{2}$$

Dla $N=8$ wartość $t_g = 1,75$ w tabeli 6 nie występuje. W związku z tym odpowiadające jej prawdopodobieństwo możemy wyznaczyć tylko w przybliżeniu stosując metodę interpolacji liniowej. W tym celu wybieramy dwie najbliższe wartości graniczne pomiędzy którymi jest ona zawarta. Są to $t_g = 1,415$ dla którego $p_{(-t_g < t < t_g)} = 80\%$ i $t_g = 1,895$ dla którego $p_{(-t_g < t < t_g)} = 90\%$



Zgodnie z zasadą interpolacji liniowej (patrz rysunek powyżej), mamy:

$$p_{(-1,75 < t < 1,75)} = 80\% + (90\% - 80\%) \cdot \frac{1,75 - 1,415}{1,895 - 1,415} = 86,98\%$$

W takim razie

$$p_{(t > 1,75)} = \frac{1 - p_{(-1,75 < t < 1,75)}}{2} = \frac{1 - 0,8698}{2} = 0,0651 \cong 6,5\%$$

Jak już wspomniano obliczona tą metodą wartość prawdopodobieństwa ma charakter przybliżony, dokładna wartość $p_{(t > 1,75)}$ obliczona za pomocą standardowej funkcji arkusza kalkulacyjnego Excel wynosi 6,18%.

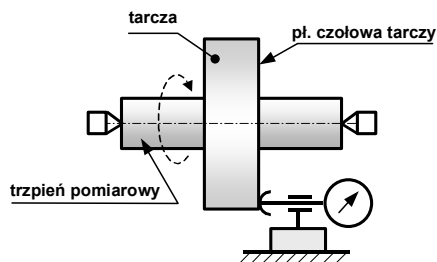
Podsumowując przeprowadzone obliczenia można stwierdzić:

- rzeczywista wartość czasu opadania kulki wynosi $(7,70 \pm 0,17) \text{ s}$;
- prawdopodobieństwo zdarzenia, że w kolejnym (dziewiątym) pomiarze wartość zaobserwowana będzie nie mniejsza od 8,1 s wynosi ok. 6,5% (dokładnie 6,18%);

Zadanie 1.28



Przy pomiarze bicia osiowego¹ tarczy występuje błąd cząstkowy wynikający ze sposobu ustalenia położenia tarczy na trzpieniu pomiarowym. Aby umożliwić bezluzowe osadzenie tarczy na trzpieniu wykonuje się go bowiem nie w kształcie walca, lecz stożka o bardzo małej zbieżności. W związku z powyższym po osadzeniu tarczy na trzpieniu oś jej otworu osadczego może nie pokrywać się z osią trzpienia, która jest jednocześnie osią obrotu. Powstałe z tego powodu przekoszenie płaszczyzny czołowej względem osi obrotu powoduje zwiększenie (lub zmniejszenie) mierzonej wielkości.



Aby doświadczalnie wyznaczyć niepewność pomiaru bicia wynikającą wyłącznie ze sposobu ustalania tarczy na trzpieniu dokonano dziesięciu pomiarów bicia, każdorazowo zdejmując tarczę z trzpienia i zakładając ją ponownie, a następnie również dziesięciu pomiarów powtarzając wszystkie czynności za wyjątkiem zdejmowania tarczy z trzpienia i ponownego jej zakładania.

Uzyskano następujące wyniki pomiarów bicia (wszystkie w μm)

- z każdorazowym zdejmowaniem i zakładaniem tarczy

86,78,83,80,88,90,77,79,82,86;

- bez zdejmowania tarczy z trzpienia

85,83,86,82,85,87,80,79,80,83;

Określić niepewność ustalenia tarczy na trzpieniu przyjmując poziom ufności $p = 95\%$

Rozwiązanie

Wyznaczamy średnie arytmetyczne i średnie odchylenia kwadratowe dla obu serii pomiarów:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

W przypadku pierwszej serii $\bar{x}' = 82,9 \mu\text{m}$, $s' = 4,458 \mu\text{m}$

W przypadku drugiej serii $\bar{x}'' = 83,0 \mu\text{m}$, $s'' = 2,749 \mu\text{m}$

¹ Bicie osiowe – różnica maksymalnego i minimalnego wskazania czujnika spowodowana głównie nieprostokątnością płaszczyzny czołowej tarczy do osi jej obrotu, a także odchyłkami kształtu tej płaszczyzny.

Ponieważ w treści zadania brak danych odnośnie wariancji błędu ustalenia wartość graniczną t_g zmiennej standaryzowanej t ustalamy na podstawie tablic rozkładu Studenta (tabela 6).

Ponieważ w obu seriach pomiarów ilość powtórzeń była jednakowa, więc:

$$t_g' = t_g'' = t_g$$

Z tabeli 6 (str. 81) dla $p = 95\%$ i $N = 10$ odczytujemy wartość $t_g = 2,262$

W takim razie:

$$\Delta_{n,1}^p x = t_g \cdot \sqrt{(s')^2 - (s'')^2} = 2,262 \cdot \sqrt{(4,458 \mu\text{m})^2 - (2,749 \mu\text{m})^2} = 7,9396 \mu\text{m} \approx 8 \mu\text{m}$$

Odp.: Błąd cząstkowy wynikający ze sposobu ustalenia tarczy na trzpieniu posiada wartość $\pm 8 \mu\text{m}$

Zadanie 1.29

Przy projektowaniu pewnego zadania pomiarowego zdecydowano się podwyższyć dokładność poprzez zastosowanie pomiarów wielokrotnych. Analiza procesu pomiarowego wykazała, że niepewność systematyczna nie powinna przekroczyć wartości $\pm 3\text{mV}$. Wyniki pomiarów wstępnych (wszystkie w mV): $x_1 = 284$, $x_2 = 290$, $x_3 = 286$, $x_4 = 290$, $x_5 = 287$, $x_6 = 285$, $x_7 = 288$, $x_8 = 289$, $x_9 = 284$, $x_{10} = 288$;

Przyjmując poziom ufności $p = 95\%$ obliczyć, jaką ilość powtórzeń trzeba zastosować, aby uzyskać całkowitą niepewność pomiaru równą: a) 4 mV; b) 2 mV.

Rozwiązanie

Niezbędną liczbę powtórzeń obliczymy w oparciu o zależność (76)

$$N \geq \frac{(\Delta_u^p x)^2}{(\Delta_w x)^2 - (\Delta_u^s x)^2}$$

Niepewność przypadkową pojedynczego pomiaru wyznaczmy na podstawie wyników pomiarów wstępnych.

$$\Delta_u^p x = t_g \cdot s$$

Dla $p = 95\%$ i liczby powtórzeń $N = 10$ wartość graniczna zmiennej standaryzowanej $t_g = 2,262$ (tabela 6)

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = 2,28\text{mV}$$



W takim razie wartość niepewności przypadkowej pojedynczego pomiaru wynosi:

$$\Delta_u^p x = t_g \cdot s = 2,262 \cdot 2,28 \text{ mV} = 5,15736 \text{ mV}$$

a niezbędna liczba powtórzeń:

- w przypadku a

$$N \geq \frac{(\Delta_u^p x)^2}{(\Delta_w x)^2 - (\Delta_u^s x)^2} = \frac{(5,15736 \text{ mV})^2}{(4 \text{ mV})^2 - (3 \text{ mV})^2} = 3,7997$$

- w przypadku b

$$N \geq \frac{(\Delta_u^p x)^2}{(\Delta_w x)^2 - (\Delta_u^s x)^2} = \frac{(5,15736 \text{ mV})^2}{(2 \text{ mV})^2 - (3 \text{ mV})^2} = -5,3197$$

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń można stwierdzić, że:

- w przypadku a) wymaganą dokładność pomiaru można osiągnąć poprzez czterokrotne wykonanie pomiaru;
- w przypadku b) wymaganej dokładności nie uda się osiągnąć poprzez pomiary wielokrotne; jedynym sposobem rozwiązania problemu jest zastosowanie innej (dokładniejszej) metody i/lub innego (dokładniejszego) narzędzia pomiarowego;

Zadanie 1.30

Aby określić gęstość (masę właściwą) pewnego materiału zaplanowano zważyć jego masę oraz wyznaczyć objętość. Z jaką dokładnością należy ważyć ($\Delta_u m = ?$) oraz mierzyć objętość ($\Delta_u V = ?$), aby niepewność wyznaczenia gęstości nie przekroczyła wartości $0,002 \text{ g/cm}^3$.

Orientacyjna wartość masy próbki materiału wynosi ok. 200 g, a orientacyjna objętość ok. 32 cm^3 . Gęstość materiału określa stosunek $\rho = m / V$.

Rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że pomiar gęstości zostanie dokonany metodą pośrednią. W takim razie niepewności wyników pomiaru masy i objętości można wyznaczyć z zależności (88) lub (89), przy założeniu, że $\Delta_u^{\text{opt}} \rho = 0,002 \text{ g / cm}^3$.

Wybierając zależność (88) mamy:



$$\Delta_u m = \frac{\Delta_u^{\text{opt}} \rho}{\left| \frac{\partial \rho}{\partial m} \right| \cdot \sqrt{2}} \quad \text{i} \quad \Delta_u V = \frac{\Delta_u^{\text{opt}} \rho}{\left| \frac{\partial \rho}{\partial V} \right| \cdot \sqrt{2}}$$

Ponieważ

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{1}{V} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial \rho}{\partial V} = -\frac{m}{V^2}$$

więc

$$\Delta_u m = \frac{\Delta_u^{\text{opt}} \rho}{\left| \frac{\partial \rho}{\partial m} \right| \cdot \sqrt{2}} = \frac{\Delta_u^{\text{opt}} \rho}{\sqrt{2}} \cdot V = \frac{0,002 \text{ g/cm}^3}{\sqrt{2}} \cdot 32 \text{ cm}^3 = 0,0453 \text{ g}$$

$$\Delta_u V = \frac{\Delta_u^{\text{opt}} \rho}{\left| \frac{\partial \rho}{\partial V} \right| \cdot \sqrt{2}} = \frac{\Delta_u^{\text{opt}} \rho}{\sqrt{2} \cdot m} \cdot V^2 = \frac{0,002 \text{ g/cm}^3}{\sqrt{2} \cdot 200 \text{ g}} \cdot (32 \text{ cm}^3)^2 = 0,0072 \text{ cm}^3$$

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że należy tak dobrać metody i narzędzia pomiarowe, aby błąd pomiaru masy nie przekraczał wartości $\pm 0,045 \text{ g}$, a błąd pomiaru objętości wartości $\pm 0,007 \text{ cm}^3$.

Zadanie 1.31

Dla metody pomiarowej przedstawionej w zadaniu 1.23 dobrać sprzęt pomiarowy (opornik wzorcowy, amperomierz i stabilizator napięcia) o takiej dokładności, aby niepewność pomiaru rezystancji nie przekroczyła wartości $\pm 1 \Omega$.

Rozwiązanie

Z treści zadania 1.23 wynika, że pomiar dokonywany jest metodą zerową „przez podstawienie”. W związku z powyższym do ustalenia dokładności poszczególnych elementów układu pomiarowego należy wykorzystać zależności (87) przyjmując, że $\Delta_u^{\text{opt}} R = \Delta_u R = 1 \Omega$. W takim razie mamy:

$$\Delta_u R_w \approx \frac{\Delta_u R}{\sqrt{3}} = \frac{1 \Omega}{\sqrt{3}} = 0,58 \Omega$$

$$\delta_u R_w \approx \frac{\Delta_u R_w}{R_w} = \frac{0,58 \Omega}{148 \Omega} = 0,004 = 0,4\%$$

$$\Delta_D I \approx \frac{\Delta_u R}{\sqrt{3} \cdot |\varphi'_{(y)}|}$$



Ponieważ w naszym przypadku:

$$x \Leftrightarrow R; \quad y \Leftrightarrow I; \quad f(x) \Leftrightarrow U / R; \quad \varphi(y) \Leftrightarrow U / I; \quad \varphi'(y) \Leftrightarrow - U / I^2$$

więc

$$\Delta_D I \approx \frac{\Delta_u R \cdot I^2}{\sqrt{3} \cdot U} = \frac{\Delta_u R \cdot I}{\sqrt{3} \cdot R} = \frac{1 \Omega \cdot 384 \text{ mA}}{\sqrt{3} \cdot 148 \Omega} \cong 1,5 \text{ mA}$$

$$\Delta_n I \approx \frac{\Delta_u R \cdot I^2}{\sqrt{3} \cdot U} = \frac{\Delta_u R \cdot I}{\sqrt{3} \cdot R} = \frac{1 \Omega \cdot 384 \text{ mA}}{\sqrt{3} \cdot 148 \Omega} \cong 1,5 \text{ mA}$$

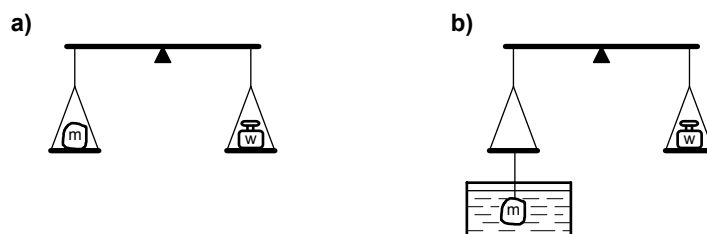
$$\Delta U = \Delta I \cdot R$$

$$\delta U = \Delta U / U = \Delta I \cdot R / U = \Delta I / I = 1,5 \text{ mA} / 384 \text{ mA} \approx 0,004$$

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że do pomiaru rezystancji można użyć opornika wzorcowego o błędzie względnym nie przekraczającym 0,4 %, amperomierza umożliwiającego wykrycie różnicy prądów większej od 1,5 mA oraz stabilizatora gwarantującego, że wahania napięcia zasilającego nie będą przekraczać 0,4 % wartości znamionowej.

Zadanie 1.32

W celu dokładnego wyznaczenia gęstości pewnego materiału postanowiono zastosować metodę dwukrotnego ważenia - raz normalnie (rys. a), a drugi raz po zanurzeniu go w wodzie destylowanej (rys. b).



Z jaką dokładnością należy ważyć próbkę tego materiału, jeżeli:

- chcemy wyznaczyć gęstość materiału z niepewnością $\Delta_{up} \leq 0,003 \text{ g/cm}^3$;
- masa próbki wynosi ok. 200g;
- orientacyjna gęstość materiału wynosi ok. 5 g/cm^3 ;
- masa właściwa wody o temperaturze 20°C wynosi $\rho_w = (0,9982 \pm 0,0005) \text{ g/cm}^3$

Rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że pomiar gęstości materiału próbki będzie wykonany metodą pośrednią. Wyznamy równanie definicyjne tego pomiaru. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

ρ – gęstość materiału próbki;

V – objętość próbki;

m_a – masa rzeczywista próbki (wynik „normalnego” ważenia – rys. a);

m_b – masa pozorna próbki (wynik ważenia próbki zanurzonej w wodzie – rys. b);

Wartość masy rzeczywistej próbki:

$$m_a = V \cdot \rho$$

Wartość masy pozornej obliczamy na podstawie twierdzenia, że ciało zanurzone w wodzie traci na wadze tyle, ile waży woda wyparta przez to ciało

$$m_b = m_a - V \cdot \rho_w$$

Uwzględniając pierwszą zależność w drugiej dostajemy

$$m_b = V \cdot \rho - V \cdot \rho_w = V \cdot (\rho - \rho_w)$$

W takim razie

$$\frac{m_b}{m_a} = \frac{V \cdot (\rho - \rho_w)}{V \cdot \rho} = \frac{\rho - \rho_w}{\rho}$$

skąd po odpowiednich przekształceniach dostajemy równanie definicyjne pomiaru

$$\rho = \rho_w \cdot \frac{m_a}{m_a - m_b}$$

W takim razie niepewność wyznaczenia gęstości próbki

$$\begin{aligned} \Delta_u \rho &= \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho_w} \cdot \Delta_u \rho_w \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial m_a} \cdot \Delta_u m_a \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial m_b} \cdot \Delta_u m_b \right)^2} \\ \frac{\partial \rho}{\partial \rho_w} &= \frac{m_a}{m_a - m_b} = \frac{m_a}{V \cdot \rho_w} = \frac{m_a}{\frac{m_a}{\rho} \cdot \rho_w} = \frac{\rho}{\rho_w} \approx \frac{5 \cdot \text{g/cm}^3}{1 \cdot \text{g/cm}^3} = 5 \\ \frac{\partial \rho}{\partial m_a} &= \rho_w \cdot \frac{1 \cdot (m_a - m_b) - m_a \cdot 1}{(m_a - m_b)^2} = \frac{-\rho_w \cdot m_b}{(m_a - m_b)^2} = \frac{-\rho_w \cdot V \cdot (\rho - \rho_w)}{V^2 \cdot \rho_w^2} = -\frac{\rho - \rho_w}{V \cdot \rho_w} \\ &= -\frac{\rho - \rho_w}{\frac{m_a}{\rho} \cdot \rho_w} = -\frac{\rho \cdot (\rho - \rho_w)}{m_a \cdot \rho_w} \approx -\frac{5 \cdot \text{g/cm}^3 \cdot (5 \cdot \text{g/cm}^3 - 1 \cdot \text{g/cm}^3)}{200 \cdot \text{g} \cdot 1 \cdot \text{g/cm}^3} = -0,1 \cdot \text{cm}^{-3} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial m_b} = \rho_w \cdot \frac{-m_a \cdot (-1)}{(m_a - m_b)^2} = \frac{\rho_w \cdot m_a}{(m_a - m_b)^2} = \frac{\rho_w \cdot m_a}{V^2 \cdot \rho_w^2} = -\frac{m_a}{\left(\frac{m_a}{\rho}\right)^2 \cdot \rho_w} = -\frac{\rho^2}{m_a \cdot \rho_w} \approx$$

$$\approx \frac{(5 \cdot \text{g/cm}^3)^2}{200 \text{g} \cdot 1 \text{g/cm}^3} = 0,125 \cdot \text{cm}^{-3}$$

Uwzględniając powyższe obliczenia mamy

$$\Delta_u \rho = \sqrt{(5 \cdot \Delta_u \rho_w)^2 + (-0,1 \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \Delta_u m_a)^2 + (0,125 \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \Delta_u m_b)^2}$$

Powyższa zależność stanowi jedno równanie z dwoma niewiadomymi: $\Delta_u m_a$ i $\Delta_u m_b$. Aby wyznaczyć te niepewności musimy arbitralnie przyjąć dodatkowy warunek. W praktyce (p. rozdział 2.8, str. 103) najczęściej przyjmuje się:

- równość niepewności cząstkowych wyniku pomiaru pochodzących od obliczanych niepewności (w naszym przypadku $\frac{\partial \rho}{\partial m_a} \cdot \Delta_u m_a = \frac{\partial \rho}{\partial m_b} \cdot \Delta_u m_b$);
- równość niepewności względnych (w naszym przypadku $\delta_u m_a = \delta_u m_b$);
- w przypadku, gdy obliczane niepewności dotyczą wielkości tego samego rodzaju, można również przyjąć równość niepewności bezwzględnych (w naszym przypadku $\Delta_u m_a = \Delta_u m_b$)

Przy założeniu, że oba ważenia odbędą się na tej samej wadze, przy użyciu tego samego kompletu odważników oraz uwzględnienia faktu, że wartości zaobserwowane obu wżeń są tego samego rzędu (ok. 200g i ok. 160g) uzasadnionym warunkiem wydaje się równość niepewności bezwzględnych. Przyjmując ten warunek, mamy:

$$\Delta_u m_a = \Delta_u m_b = \Delta_u m$$

Uwzględniając powyższe w wyprowadzonej zależności na niepewność pomiaru gęstości mamy

$$\Delta_u \rho = \sqrt{(5 \cdot \Delta_u \rho_w)^2 + (-0,1 \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \Delta_u m)^2 + (0,125 \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \Delta_u m)^2}$$

Rozwiązując powyższe równanie względem $\Delta_u m$ dostajemy ostatecznie

$$\Delta_u m = \sqrt{\frac{(\Delta_u \rho)^2 - (5 \cdot \Delta_u \rho_w)^2}{(-0,1 \cdot \text{cm}^{-3})^2 + (0,125 \cdot \text{cm}^{-3})^2}} = \sqrt{\frac{(0,003 \cdot \text{g/cm}^3)^2 - (5 \cdot 0,0005 \cdot \text{g/cm}^3)^2}{(-0,1 \cdot \text{cm}^{-3})^2 + (0,125 \cdot \text{cm}^{-3})^2}} =$$

$$= 0,010359 \text{g}$$

Z powyższych obliczeń wynika, że aby spełnić warunek $\Delta_u \rho \leq 0,003 \cdot \text{g/cm}^3$ należy tak dobrać wagę i odważniki, aby niepewność wyników pomiaru masy nie przekroczyła wartości 10 mg.



3.2. ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

Zadanie 2.1.

Wyprowadzić funkcję odwzorowującą wartość wielkości liczbą rzeczywistą w przypadku skali interwałowej określonej za pomocą układu wartości odniesienia składającego się z dwóch wartości wielkości A_1 i A_2 wraz z odpowiadającymi im wartościami liczbowymi $\{A_1\}$ i $\{A_2\}$.

Podpowiedź:

Wartość liczbową interwału jest równa różnicy wartości liczbowych wielkości interwał ten określających (patrz rozwiązanie zadania 1.1).

Zadanie 2.2.

Przy jakiej prędkości obrotowej wyrażonej w obr/min silnik napędzający wał momentem obrotowym równym 27 kGm osiągnie moc znamionową równą 105 KM (koni mechanicznych).

Wprowadzenie

Moc w ruchu obrotowym jest równa iloczynowi momentu obrotowego i prędkości obrotowej;

1 KM (koń mechaniczny) jest równy 75 kGm/s (kilogramometrów na sekundę)

1 kG (kilogram siła) jest równy 9,80665 N (niutonów)

Zadanie 2.3.

Z jaką mocą pracuje silnik napędzający wał momentem obrotowym równym 48 kGm, jeżeli wał ten obraca się z prędkością równą 392 obr/min. Obliczoną moc wyrazić w jednostkach układu SI.

Zadanie 2.4

Wydajność pompy równą 5 400 hektolitrów na godzinę (hl / godz) wyrazić w jednostkach układu SI.

Informacje pomocnicze

Wydajność pompy - stosunek objętości wypompowanej cieczy do czasu, w którym została ona wypompowana

hektolitr = 100 litrów;

litr $\cong$ 1 decymetr sześcienny (dm^3);



Zadanie 2.5.

Określić spójne jednostki miar następujących wielkości fizycznych:

- a) energii potencjalnej;
- b) zdolności skupiającej układu optycznego;
- c) udarności;

Informacje pomocnicze

- ad a) energia potencjalna jest to praca, którą mogą wykonać siły pola sił przy zmianie położenia układu materialnego w tym polu;
praca $\Leftrightarrow$ siła razy przesunięcie;
siła $\Leftrightarrow$ masa razy przyspieszenie;
- ad b) zdolność skupiająca układu optycznego $\Leftrightarrow$ odwrotność długości ogniskowej
- ad c) udarność $\Leftrightarrow$ stosunek pracy potrzebnej na złamanie znormalizowanej próbki z karbem do pola przekroju poprzecznego tej próbki
udarność $\Leftrightarrow$ praca przez powierzchnię
praca $\Leftrightarrow$ siła x przesunięcie
siła $\Leftrightarrow$ masa x przyspieszenie
powierzchnia $\Leftrightarrow$ stała bezwymiarowa x długość x długość

Zadanie 2.6.

Uwzględniając obowiązującą w układzie SI zasadę spójności wyznaczyć jednostkę ciepła właściwego.

Wprowadzenie:

Ciepło właściwe jest to stosunek pojemności cieplnej ciała do masy tego ciała;
Pojemność cieplna określana jest stosunkiem ilości ciepła dostarczonej (odebranej) danemu ciału do zmiany temperatury tego ciała.

Zadanie 2.7.

Uwzględniając obowiązującą w układzie SI zasadę spójności wyznaczyć jednostkę oporu elektrycznego.

Wprowadzenie:

Opór elektryczny – wielkość charakteryzująca przewodnik, której miarą jest stosunek napięcia przyłożonego do końców przewodnika do natężenia przepływającego przezeń prądu.



Napięcie elektryczne między dwoma punktami jest to różnica potencjałów elektrycznych tych punktów.

Potencjał elektryczny punktu pola elektrostatycznego jest to stosunek energii potencjalnej ładunku elektrycznego umieszczonego w tym punkcie do wielkości tego ładunku. Energia potencjalna ładunku jest równa pracy wykonanej przez siły pola przy przeniesieniu tego ładunku z danego punktu do punktu o potencjale równym zeru.

Prąd – uporządkowany ruch ładunków elektrycznych charakteryzowany wielkością zwaną natężeniem. Natężenie prądu jest równe stosunkowi ładunku elektrycznego przepływającego przez przekrój poprzeczny przewodnika do czasu przepływu tego ładunku.

Zadanie 2.8.

Uwzględniając obowiązującą w układzie SI zasadę spójności wyznaczyć jednostkę oporu właściwego.

Wprowadzenie:

Opór elektryczny – wielkość charakteryzująca przewodnik, której miarą jest stosunek napięcia przyłożonego do końców przewodnika do natężenia przepływającego przezeń prądu. Dla jednorodnych przewodników o stałym przekroju S i długości l , oporność elektryczna $R = \rho \cdot l / S$, gdzie ρ oznacza wielkość charakteryzującą materiał przewodnika zwaną oporem właściwym.

Napięcie i natężenie prądu oraz wielkości z nimi związane zdefiniowano we wprowadzeniu do zadania 2.7

Zadanie 2.9.

Uwzględniając obowiązującą w układzie SI zasadę spójności wyznaczyć jednostkę pojemności elektrycznej kondensatora.

Wprowadzenie:

Pojemność elektryczna kondensatora – wielkość charakteryzująca zdolność kondensatora do gromadzenia ładunków elektrycznych pod wpływem przyłożonego doń napięcia elektrycznego. Pojemność określana jest stosunkiem ładunku zgromadzonego na jednej z okładek kondensatora do różnicy potencjałów pomiędzy tymi okładkami.

Pojęcia potencjał elektryczny punktu pola elektrostatycznego i prąd zdefiniowano we wprowadzeniu do zadania 2.7.



Zadanie 2.10

Dla podanych niżej wartości wielkości dobrać jednostki (krotności jednostek głównych) tak, aby wartości liczbowe tych wielkości mieściły się w przedziale $1 \div 1000$

- a) masa $M = 2,4 \cdot 10^7$ kilograma (kg);
- b) ciśnienie $p = 10\,200$ hektopaskali (hPa);
- c) powierzchnia $S = 0,0000456$ metrów kwadratowych (m^2);
- d) długość $L = 3\,250\,000$ nm;
- e) objętość $V = 0,000\,000\,63$ dm^3
- f) napięcie elektryczne $V = 26\,400\,000$ mV

Podać nazwy i oznaczenia dobranych jednostek.

Zadanie 2.11

Przy pomiarze czasu trwania pewnego zjawiska uzyskano wartość zaobserwowaną $t_z = 5,33 \cdot 10^{-7}$ s. Szacując błąd pomiaru uzyskano:

$$\Delta_m t = -3,62 \cdot 10^{-8} \text{ s} \text{ oraz } \Delta_u t = 0,98 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Przedstawić ostateczną postać wyniku pomiaru w postaci bezwzględnej i względnej. Dobrać krotność jednostki (przedrostek) tak, aby w przedstawionym wyniku nie występował mnożnik dziesiętny, a wartość liczbową mieściła się w przedziale $1 \div 1000$.

Zadanie 2.12

Przy pomiarze długości fali promieniowania elektromagnetycznego uzyskano wartość zaobserwowaną $\lambda_z = 0,0000005638$ m. Szacując błąd przeprowadzonego pomiaru uzyskano:

$$\Delta_m \lambda = 0,000\,000\,012\,7 \text{ m} \text{ oraz } \Delta_u \lambda = 0,000\,000\,019\,4 \text{ m}$$

Przedstawić ostateczną postać wyniku pomiaru w postaci bezwzględnej i względnej. Dobrać krotność jednostki (przedrostek) tak, aby wartość liczbową mieściła się w przedziale $1 \div 1000$.

Zadanie 2.13

Podczas pomiaru masy uzyskano wartość zaobserwowaną równą $0,000\,013\,84$ kg. Szacując błąd przeprowadzonego pomiaru uzyskano:

$$\Delta m = (0,000\,000\,072 \pm 0,000\,000\,058) \text{ kg.}$$

Przedstawić ostateczną postać wyniku pomiaru w postaci bezwzględnej i względnej. Dobrać krotność jednostki (przedrostek) tak, aby wartość liczbową mieściła się w przedziale $1 \div 1000$.



Zadanie 2.14

Przy wyznaczaniu gęstości pewnego ciała uzyskano wynik $\rho = 9,51 \text{ g/cm}^3$. Gęstość wyznaczono z niepewnością bezwzględną $\Delta_{\text{u}}\rho = 0,073 \text{ g/cm}^3$. Jaka była niepewność względna tego pomiaru?

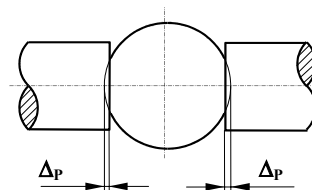
Zadanie 2.15

Obliczyć wartość błędu wynikającego z odkształceń sprężystych przy pomiarze kulki stalowej objęto-wanej w trakcie pomiaru dwoma stalowymi płaskimi końcówkami mierniczymi (rys obok).

Dane:

Nacisk pomiarowy - $P = 8 \text{ N}$, średnica kulki $d \approx 10 \text{ mm}$.

Podpowiedź: Patrz rozwiązanie zadania 1.12



Zadanie 2.16

Do pomiaru średnicy tarczy wykonanej z mosiądzu Ms60 wykorzystana zostanie maszyna pomiarowa działająca w oparciu o stalowy wzorzec kreskowy. Wartość mierzonej średnicy jest zbliżona do 200 mm. Tarczę przyniesiono do laboratorium dzień wcześniej, można więc przyjąć, że jej temperatura jest równa temperaturze wzorca. Określić zakres temperatur laboratorium, dla których błąd temperaturowy nie przekroczy wartości $\pm 5 \mu\text{m}$.

Informacje pomocnicze:

Wartość współczynnika rozszerzalności liniowej stali wynosi $11,5 \cdot 10^{-6} \cdot \text{K}^{-1}$, a wartość współczynnika rozszerzalności liniowej mosiądzu Ms60 - $21 \cdot 10^{-6} \cdot \text{K}^{-1}$

Zadanie 2.17

Do pomiaru średnicy tarczy wykonanej z mosiądzu Ms60 wykorzystana zostanie maszyna pomiarowa działająca w oparciu o stalowy wzorzec kreskowy. Wartość mierzonej średnicy jest zbliżona do 200 mm. Tarcza zostanie przyniesiona do laboratorium tuż przed pomiarem, a więc jej temperatura może się różnić od temperatury panującej w laboratorium (temperatury wzorca). Obliczyć zakres temperatur tarczy, dla których błąd temperaturowy nie przekroczy wartości $\pm 5 \mu\text{m}$ przy założeniu, że temperatura w laboratorium jest równa dokładnie 20°C . Wartość współczynnika rozszerzalności liniowej mosiądzu Ms60 - jak w zadaniu poprzednim.

Zadanie 2.18

Zadanie 2.17 rozwiązać przy założeniu, że o temperaturze panującej w laboratorium w trakcie pomiaru wiadomo tylko tyle, że mieściła się w przedziale $(20 \pm 1)^\circ\text{C}$.

Uwaga pomocnicza

Odchylenie temperatury panującej w laboratorium od temperatury odniesienia spowoduje powstanie błędu temperaturowego wzorca. Błąd temperaturowy wypadkowy będzie zatem sumą błędu temperaturowego wzorca i błędu temperaturowego przedmiotu mierzonego. Przyjąć, że oba błędy składowe są wzajemnie niezależne (patrz komentarz do rozwiązania zadania 1.11)

Zadanie 2.19

Przy dokładnym pomiarze długości wałka uzyskano wynik $L = 211,375 \text{ mm}$. Analizując proces pomiarowy stwierdzono wystąpienie dwóch istotnych błędów cząstkowych o charakterze systematycznym:

- błąd nacisku pomiarowego $\Delta_{px} = (-0,009 \pm 0,006) \text{ mm}$;
- błąd odkształceń termicznych $\Delta_{tx} = (0,013 \pm 0,003) \text{ mm}$;

Ile wynosi wypadkowy błąd systematyczny popełniony przy tym pomiarze ?

Zadanie 2.20

Przy dokładnym pomiarze średnicy wałka uzyskano odczyt $\alpha = 31,9932 \text{ mm}$. W trakcie pomiaru wystąpiły trzy błędy systematyczne, których wartości oszacowano. Były to: systematyczny błąd temperatury $\Delta_{1d} = (0,0014 \pm 0,0005) \text{ mm}$, błąd odkształceń sprężystych $\Delta_{2d} = (-0,0003 \pm 0,0002) \text{ mm}$ oraz systematyczny błąd wskazań przyrządu $\Delta_{3d} = (-0,0004 \pm 0,0002) \text{ mm}$. Obliczyć wartość zaobserwowaną poprawną.

Zadanie 2.21

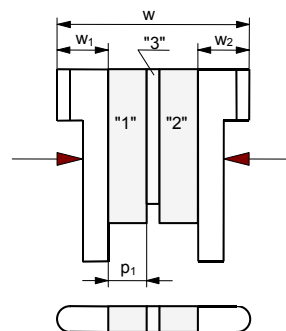
Do kontroli średnicy tulei zbudowano wzorzec długości składający się (p. rys. obok) z dwu wkładek płaskowalcowych i umieszczonych pomiędzy nimi trzech płytek wzorcowych. Na błąd tego wzorca składają się błędy obu wkładek, błędy płytek i wynikający z pozostałości smaru i zanieczyszczeń błąd złożenia.

Błędy poszczególnych płytek wynoszą:

$$\Delta_{p1w} = (-0,0008 \pm 0,0006) \text{ mm};$$

$$\Delta_{p2w} = (-0,0007 \pm 0,0006) \text{ mm};$$

$$\Delta_{p3w} = \pm 0,0005 \text{ mm};$$



Wartość błędu złożenia wzorca oszacowano na $\Delta_{zw} = (0,0004 \pm 0,0004) \text{ mm}$;

Jak duża może być niepewność odtwarzania wymiaru przez każdą z obu wkładek płaskowalcowych, aby wypadkowa niepewność wzorca spełniała warunek:

$$\Delta_u w \leq 0,0013 \text{ mm}$$

Uwaga!

Założyć, że niepewność odtwarzania wymiaru przez obie wkładki jest taka sama, oraz że wszystkie wymienione w niniejszym zadaniu błędy są wzajemnie niezależne.

Zadanie 2.22

Ile wynosi graniczna wartość błędu paralaksy w przypadku woltomierza pracującego na zakresie $0 \div 300 \text{ V}$, jeżeli jego podziałka składa się z 60 działek elementarnych o długości 2 mm każda, odległość płaszczyzny ruchu wskazówki (p. rys. 9) od płaszczyzny podziałki wynosi 1,2 mm, a odchylenie kierunku obserwacji od prostopadłej do płaszczyzny podziałki nie przekracza $\pm 20^\circ$.

Zadanie 2.23

Termometr posiada zakres pomiarowy od -40°C do $+60^\circ\text{C}$. Jego podziałka składa się z dwustu działek elementarnych o długości 1 mm każda, a maksymalny błąd wskazań w dowolnym punkcie zakresu pomiarowego nie przekracza wartości $\pm 0,6^\circ\text{C}$. Określić klasę dokładności i czułość tego termometru.

Zadanie 2.24

Obliczyć graniczną dopuszczalną wartość błędu woltomierza o zakresie pomiarowym $0 \div 600 \text{ V}$ i klasie dokładności przyrządu $k = 0,5$, przy założeniu, że przyrząd używany będzie w warunkach odniesienia.

Zadanie 2.25

Ile wynosi graniczna dopuszczalna wartość błędu woltomierza przy pomiarze w warunkach odniesienia, jeżeli:

- klasa woltomierza $k = 0,5$;
- długość jego działki elementarnej $l_e = 1,2 \text{ mm}$;
- ilość działek podziałki $n = 100$;
- czułość woltomierza $C = 0,48 \text{ mm/V}$

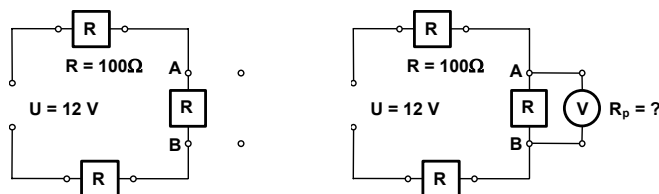


Zadanie 2.26

Tachometr (przyrząd do pomiaru prędkości obrotowej) posiada podziałkę składającą się ze 100 działek elementarnych o długości 2,4 mm każda. Jego czułość wynosi 0,12 mm·min / obrót, a nominalna klasa niedokładności $k^* = 1,5$. Obliczyć graniczny dopuszczalny błąd tego przyrządu przy pomiarze w warunkach odniesienia.

Zadanie 2.27

Dobrać rezystancję woltomierza tak, aby po podłączeniu go do pokazanego niżej obwodu elektrycznego, zmiana wielkości mierzonej (różnicy potencjałów w punktach A i B) nie przekroczyła 0,1 %.



Zadanie 2.28

Opracować wynik pomiaru średnicy kulki przy pomocy mikrometru, jeżeli odczytane wskazanie przyrządu wynosiło $\alpha = 42,483$ mm, a szacowane wartości błędów:

- a) błąd wskazania przyrządu $\Delta_1 d = (-0,002 \pm 0,004)$ mm;
- b) błąd odczytu $\Delta_2 d = \pm 0,006$ mm;
- c) błąd spowodowany naciskiem pomiarowym $\Delta_3 d = (-0,012 \pm 0,004)$ mm;
- d) błąd spowodowany rozszerzalnością cieplną $\Delta_4 d = 0,003$ mm;

Zadanie 2.29

Za pomocą optimetru pionowego (czujnik optyczny) o błędzie wskazań pojedynczego pomiaru równym $\pm 0,25$ działki elementarnej i wartości tej działki $w_e = 2$ μ m dokonano pomiaru średnicy wałka uzyskując wskazanie $\alpha = -3,5$ działki. Do wyzerowania optimetru wykorzystano płytkę wzorcową o wymiarze nominalnym $w = 20$ mm i niepewności tego wymiaru $\Delta_w w = 0,3$ μ m. Opracować wynik pomiaru i ocenić, czy wałek wykonany jest prawidłowo, jeżeli zbiór wartości dopuszczalnych średnicy określał wymiar wymagany $\varnothing 20_{-0,008}$.

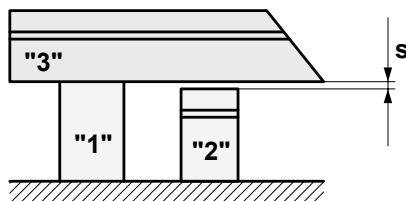
Zadanie 2.30

Porównać dokładność pomiarów prowadzonych metodami:

- wychyłową - przyrządem o zakresie $0 \div 25$ mm i klasie $k = 0,1$;
- różnicową, jeżeli niepewność miary wzorca wynosi $0,001$ mm, a przyrząd wskazujący różnicę posiada zakres $0 \div 200$ μm i klasę $k = 1$;

Zadanie 2.31

Pomiaru wysokości x przedmiotu "1" dokonano poprzez porównanie ze stosem płytek wzorcowych "2" przy pomocy liniału krawędziowego "3". Wysokość stosu płytek dobierano w ten sposób, aby szczelina s była niedostrzegalna. Podczas pomiaru otrzymano stos płytek o wysokości $w = 29,995$ mm. Na podstawie metryczek płytek wzorcowych ustalono wartość średnią błędu stosu płytek $\Delta_m w = -0,001$ mm.



Niepewność odtwarzania wymiaru przez stos płytek oszacowano na $\Delta_u w = 0,002$ mm. Szczelina s , która może wystąpić zarówno nad stosem płytek jak i nad przedmiotem, zaczyna być widoczna dopiero wtedy, gdy jej wartość przekroczy $0,002$ mm. Opracować wynik pomiaru.

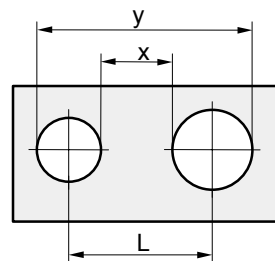
Zadanie 2.32

W celu wyznaczenia rozstawu osi otworów L pomierzono pokazane na szkicu odległości x i y uzyskując:

$$x = (12,64 \pm 0,012) \text{ mm}$$

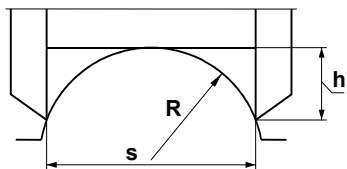
$$y = (46,56 \pm 0,015) \text{ mm}$$

Opracować wynik pomiaru rozstawu osi otworów.



Zadanie 2.33

Zasadę pomiaru promienia łuku za pomocą suwmiarki modułowej przedstawia poniższy schemat. Opracować wynik tego pomiaru, jeżeli:



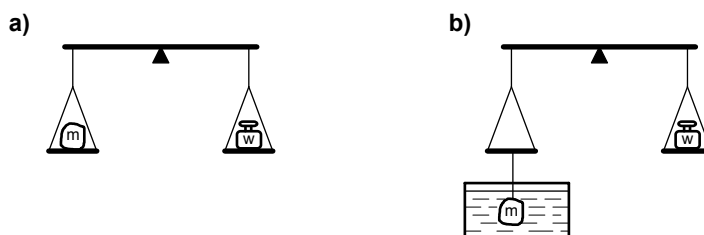
$$h = 16,00 \text{ mm}, \Delta_m h = 0,02 \text{ mm}, \Delta_u h = \pm 0,02 \text{ mm};$$

$$s = 40,06 \text{ mm}, \Delta_m s = 0, \Delta_u s = \pm 0,02 \text{ mm};$$

Zadanie 2.34

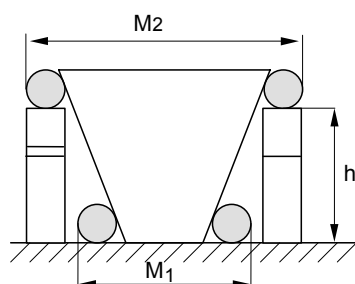
W celu wyznaczenia gęstości pewnego materiału zważono go dwukrotnie - raz normalnie (rys. a), a drugi raz po zanurzeniu w wodzie destylowanej o temperaturze ok. 20°C (rys. b), uzyskując wyniki: $m_a = 125,2 \pm 0,05$ g i $m_b = 101,9 \pm 0,05$ g;

Opracować wynik pomiaru przyjmując masę właściwą wody $\rho_w = (0,998 \pm 0,001)$ g/cm³



Zadanie 2.35

Opracować wynik pomiaru zbieżności stożka metodą pokazaną na szkicu obok (metoda dwóch wałeczków), jeżeli w trakcie pomiarów bezpośrednich uzyskano następujące wyniki:



$$M_1 = 40,23 \pm 0,01 \text{ mm};$$

$$M_2 = 60,07 \pm 0,01 \text{ mm};$$

$$h = 50 \pm 0,001 \text{ mm};$$

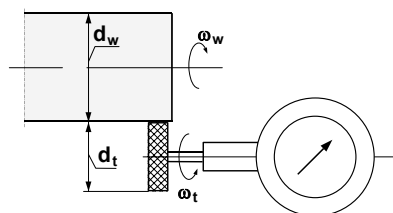
$$z = ? \quad \Delta_u z = ?$$

Równanie definicyjne pomiaru:

$$\text{zbieżność } z = (M_2 - M_1) / h$$

Zadanie 2.36

Opracować wynik pomiaru prędkości obrotowej wału dokonanego przy pomocy tachometru z końcówką tarczową, jeżeli:



- średnica tarczy tachometru $d_t = (40 \pm 0,1)$ mm;

- wskazanie tachometru $\omega_t = 750$ obr/min;

- przyrząd pracował na zakresie 0 - 1600 obr/min;

- klasa przyrządu $k = 1,5$;

- średnica wału w miejscu styku z końcówką tarczową tachometru wynosiła $d_w = (80 \pm 0,1)$ mm;

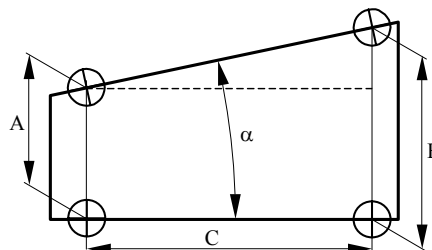
Zadanie 2.37

W celu określenia kąta rozwarcia klina α (rys. obok) pomierzono wymiary A, B i C uzyskując następujące wyniki:

$$A = (24,320 \pm 0,008) \text{ mm};$$

$$B = (37,160 \pm 0,012) \text{ mm};$$

$$C = (50,00 \pm 0,02) \text{ mm}.$$



Opracować wynik pomiaru ($\alpha = ?$; $\Delta_u \alpha = ?$)

Zadanie 2.38

W katalogu narzędzi pomiarowych znajdujemy informację, że dla poziomu ufności $p = 95\%$ niepewność określonego przyrządu (graniczna wartość jego błędu) wynosi $\pm 0,003 \text{ mm}$. Przyjmując założenie, że błąd przyrządu można traktować jako realizację zmiennej losowej o rozkładzie normalnym obliczyć, jak duża będzie niepewność tego przyrządu dla poziomu ufności $p = 99\%$

Zadanie 2.39

Dokonano dziesięciu pomiarów ciepła wydzielającego się w pewnym procesie uzyskując następujące wyniki (wszystkie w kcal):

0,51; 0,49; 0,45; 0,44; 0,46; 0,50; 0,57; 0,47; 0,45; 0,48;

Przeprowadzić analizę uzyskanych wyników pod kątem wystąpienia błędu grubego. Zastosować kryterium Chauvenet'a.

Zadanie 2.40

Przy ocenie nowej metody pomiaru temperatury z wykorzystaniem pirometru optycznego pomierzono dziesięciokrotnie temperaturę wzorcową $t_w = (1089 \pm 1)^\circ\text{C}$ uzyskując następujące wyniki:

$$t_1 = 1083^\circ\text{C}; \quad t_2 = 1082^\circ\text{C}; \quad t_3 = 1090^\circ\text{C}; \quad t_4 = 1085^\circ\text{C}; \quad t_5 = 1084^\circ\text{C};$$

$$t_6 = 1087^\circ\text{C}; \quad t_7 = 1083^\circ\text{C}; \quad t_8 = 1087^\circ\text{C}; \quad t_9 = 1089^\circ\text{C}; \quad t_{10} = 1083^\circ\text{C}$$

Oszacować wartość błędu systematycznego ocenianej metody pomiaru temperatury dla poziomu ufności $p = 95\%$

Zadanie 2.41

Dokonać pełnego opracowania wyniku pomiaru wielokrotnego średnicy wałka, jeżeli:

- a) przy ośmiokrotnym pomiarze tej średnicy uzyskano następujące wskazania:

53,095 mm; 53,080 mm; 53,095 mm; 53,080 mm;
53,100 mm; 53,075 mm; 53,080 mm; 53,075 mm;

- b) wartość błędu systematycznego pomiaru oszacowano na $\Delta^s d = (0,005 \pm 0,006) \text{ mm}$

Zadanie 2.42

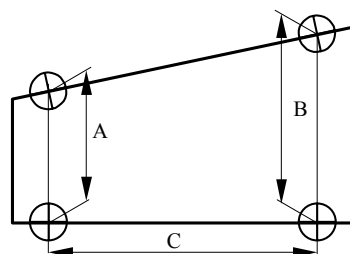
W celu określenia zbieżności klina (rys. obok) będą mierzone wymiary A, B i C. Ich orientacyjne wartości wynoszą:

$A \approx 25 \text{ mm}$; $B \approx 40 \text{ mm}$; $C \approx 50 \text{ mm}$;

Z jaką dokładnością należy mierzyć wymiary A, B i C aby niepewność wyniku pomiaru zbieżności klina nie przekroczyła wartości 0,0002

Zbieżność klina jest zdefiniowana zależnością: $z = \frac{B - A}{C}$;

($\Delta_u A = ?$; $\Delta_u B = ?$; $\Delta_u C = ?$)



Zadanie 2.43

Na laboratorium z fizyki studenci wyznaczają doświadczalnie wartość przyspieszenia ziemskiego. W tym celu w kolumnie próżniowej jest upuszczana kulka, która spada z wysokości $h = (1,250 \pm 0,001) \text{ m}$ i mierzony jest czas tego spadania. Z jaką niepewnością należy mierzyć czas spadania kulki, aby niepewność względna pomiaru przyspieszenia nie przekroczyła 1%? Orientacyjna wartość przyspieszenia ziemskiego wynosi 10 m/s^2 . Drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej określa zależność $L = a \cdot t^2 / 2$ (L – droga; a – przyspieszenie; t – czas).

Zadanie 2.44

Na laboratorium z fizyki studenci mają wyznaczyć doświadczalnie wartość przyspieszenia ziemskiego używając w tym celu wahadła matematycznego (punkt materialny zawieszony na nieważkiej i nierozciągliwej nici). Z jaką dokładnością powinni oni pomierzyć długość wahadła L oraz okres jego wahań T, aby wyznaczyć wartość przyspieszenia ziemskiego g z niepewnością względną nie przekraczającą 1%. Orientacyjna długość wahadła $L \approx 1,6 \text{ m}$; orientacyjna wartość przyspieszenia ziemskiego $g \approx 10 \text{ m/s}^2$.

Podpowiedź: wzór na okres wahań wahadła matematycznego ma postać: $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$

Zadanie 2.45

W celu dokładniejszego wyznaczenia współczynnika rozszerzalności liniowej pewnego stopu, o którym to współczynniku wstępnie wiadomo, że mieści się w przedziale $(10 \div 15) \cdot 10^{-6} \cdot K^{-1}$ zaplanowano pomiary długości L_1 i L_2 pręta wykonanego ze wspomnianego stopu w dwóch różnych temperaturach $t_1 \approx 10^\circ C$ i $t_2 \approx 30^\circ C$. Z jaką dokładnością należy mierzyć długości oraz temperatury, aby niepewność wyniku pomiaru współczynnika rozszerzalności nie przekroczyła wartości $0,5 \cdot 10^{-6} \cdot K^{-1}$. Orientacyjna długość pręta wynosi 1000 mm.

Informacje pomocnicze:

- współczynnik rozszerzalności liniowej $\alpha = \frac{2}{t_2 - t_1} \cdot \frac{L_2 - L_1}{L_2 + L_1}$;

- w celu ułatwienia obliczeń przyjmować $L_1 \approx L_2 \approx L = 1000 \text{ mm}$ oraz $L_2 - L_1 \approx \alpha_{sr} \cdot L \cdot (t_2 - t_1)$;

Zadanie 2.46

Zadanie poprzednie rozwiązać przy założeniu, że w trakcie eksperymentu mającego na celu wyznaczenie współczynnika rozszerzalności cieplnej mierzone będą bezpośrednio długość początkowa pręta L oraz spowodowany zmianą temperatur przyrost tej długości - P .

Informacja pomocnicza:

W przypadku tym współczynnik rozszerzalności cieplnej wyznaczany będzie z zależności $\alpha = \frac{2 \cdot P}{(2 \cdot L + P) \cdot (t_2 - t_1)} \approx \frac{P}{L \cdot (t_2 - t_1)}$, a orientacyjną wartość przyrostu długości P obliczamy z zależności: $P = L \cdot \alpha_{sr} \cdot (t_2 - t_1)$

Zadanie 2.47

W celu wyznaczenia gęstości materiału kulki łożyskowej pomierzona zostanie jej średnica oraz masa. Z jakimi niepewnościami względnymi należy mierzyć średnicę i masę, aby:

- niepewności te miały jednakowe wartości;
- niepewność względna pomiaru gęstości nie przekroczyła wartości 1% (0,01);

Zadanie 2.48

Rozwiązać zadanie 1.32 przyjmując jako dodatkowy warunek:

- równość niepewności częściowych;
- równość niepewności względnych;

Porównać uzyskane wyniki.



4. TESTOWE SPRAWDZIANY WIADOMOŚCI

Poniżej zamieszczono dwa testy kontrolne umożliwiające dokonanie samooceny posiadanych wiadomości. Każdy z nich obejmuje cały wyłożony w skrypcie materiał teoretyczny. Z tego powodu do testów należy przystępować w końcowej fazie przygotowań do zaliczenia przedmiotu, po uprzednim przerobieniu całego materiału teoretycznego, przestudiowaniu rozwiązań zadań przykładowych oraz rozwiązaniu wybranych zadań z grupy zadań przeznaczonych do samodzielnego rozwiązania.

Każdy z poniżej zamieszczonych testów składa się z 25 pytań oznaczonych odpowiednio 1, 2, ..., 25. Do każdego pytania dołączono od czterech do sześciu odpowiedzi oznaczonych małymi początkowymi literami alfabetu a, b, ... Spośród zamieszczonych przy każdym pytaniu odpowiedzi należy wskazać tylko jedną (jedyną poprawną lub najlepszą).

Za wskazanie poprawnej odpowiedzi przydzielamy sobie jeden punkt, za wskazanie złej odpowiedzi, więcej niż jednej odpowiedzi bądź niewskazanie żadnej - zero punktów. Norma na ocenę dostateczną wynosi 16 punktów, na ocenę dobrą - 20 punktów i na ocenę bardzo dobrą - 23 punkty.

Na początku analizujemy tylko pierwszy z zamieszczonych niżej zestawów pytań. Po wyborze i zaznaczeniu właściwych, naszym zdaniem, odpowiedzi sprawdzamy poprawność tego wyboru w oparciu o dane zawarte w rozdziale 5 skryptu. Określamy liczbę zdobytych punktów i tylko wtedy, gdy nas ona satysfakcjonuje ma sens przystępowanie do sprawdzianu nr 2.

W przypadku, gdy liczba zdobytych punktów nas nie satysfakcjonuje (ocena niedostateczna lub zbyt niska, jak na nasze aspiracje), przed przystąpieniem do sprawdzianu nr 2 należy powtórnie przerobić przynajmniej te fragmenty materiału, z których uzyskaliśmy najmniej punktów.

Uwaga!

Przedwczesne wykorzystanie sprawdzianów prowadzi do utraty możliwości samooceny posiadanych wiadomości we właściwej, tzn. końcowej fazie przygotowań. Ich wyniki są bowiem miarodajne tylko za pierwszym razem.



4.1. SPRAWDZIAN NR 1

1. Które z poniższych zdań są prawdziwe ?

- 1) mierzalność ma charakter obiektywny, tzn. zależy wyłącznie od właściwości, której dotyczy;
- 2) o tym czy dana wielkość jest mierzalna, czy nie, może decydować aktualny poziom nauki i techniki;
- 3) warunkiem mierzalności danej właściwości jest możliwość eksperymentalnego porównywania ze sobą różnych obiektów pod względem tej właściwości;

Odpowiedzi:

- | | | |
|------------------------------|----------------------------|--------------------|
| a) tylko pierwsze; | b) tylko drugie; | c) tylko trzecie; |
| d) tylko pierwsze i trzecie; | e) tylko drugie i trzecie; | f) wszystkie trzy; |

2. Wielkość nazywamy analogową, gdy:

- a) jej wartość jest proporcjonalna do ilości materii obiektu;
- b) zmiany jej wartości w czasie można uznać za nieistotne;
- c) jej wartość odpowiadająca całemu obiektowi równa jest sumie wartości odpowiadających poszczególnym częściom tego obiektu;
- d) jej wartość nie zależy od ilości materii obiektu;
- e) wszystkie jej możliwe wartości tworzą zbiór ciągły (odcinek na osi wartości);
- f) zmiany jej wartości w czasie są istotne (z punktu widzenia prowadzonych rozważań);

3. Które z niżej wymienionych warunków muszą być spełnione, aby dla danej wielkości można było utworzyć skalę pomiarową klasyfikacyjną (uszeregowaną) ?

- I) wielkość ta musi być wielkością addytywną;
- II) wielkość ta musi być wielkością analogową;
- III) wielkość ta musi mieć określoną jednostkę miary;
- IV) interwał tej wielkości musi mieć sens fizyczny;
- V) musi istnieć doświadczenie umożliwiające porównywanie ze sobą różnych obiektów pod względem tej właściwości;

Odpowiedzi:

- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------|--------------------|
| a) wszystkie; | b) wszystkie poza drugim; | c) trzeci i piąty; |
| d) wszystkie poza drugim i czwartym; | e) tylko piąty; | f) tylko trzeci |



4. Aktualnie obowiązujący, podstawowy wzorzec jednostki długości jest:

- a) wzorcem kreskowym (odległość dwóch kres wygrawerowanych na płaskiej powierzchni sztaby wykonanej z platyny i irydu przechowywanej w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag w Sevres pod Paryżem);
- b) wzorcem końcowym (odległość płaszczyzn pomiarowych specjalnej płytki wzorcowej, wykonanej ze stopu platyny i irydu, przechowywanej w w/w biurze);
- c) wzorcem falowym (1 650 763.73 długości fali promieniowania elektromagnetycznego emitowanego przez izotop kryptonu o liczbie masowej 86, pobudzany do świecenia wyładowaniem elektrycznym);
- d) wzorcem opartym na prędkości światła jako stałej fizycznej ($1 / 299\,792\,458$ drogi przebytej przez spójną wiązkę światła w czasie jednej sekundy).

5. Międzynarodowy układ jednostek SI oparty jest na:

- a) trzech; b) czterech; c) pięciu;
- d) sześciu; e) siedmiu; f) ośmiu;

jednostkach podstawowych.

6. Z pojęciem „układ jednostek” (np. SI) jest ściśle związane pojęcie „układ wielkości”. Oznacza ono:

- a) zbiór wszystkich występujących w danej dziedzinie wielkości pogrupowanych wg rodzajów (np. wielkości typu energia, wielkości typu siła, itp.);
- b) zbiór wszystkich występujących w danej dziedzinie wielkości po odpowiednim uporządkowaniu polegającym na wyborze wielkości podstawowych i zdefiniowaniu przy ich pomocy wielkości pochodnych;
- c) zbiór wszystkich występujących w danej dziedzinie wielkości addytywnych;
- d) podzbiór zbioru wielkości składający się wyłącznie z wielkości podstawowych;
- e) podzbiór zbioru wielkości składający się wyłącznie z wielkości pochodnych;

7. Uniwersalność układu SI to jego cecha polegająca na:

- a) możliwości stosowania w każdej dziedzinie nauki, techniki i gospodarki;
- b) stosowaniu nazw własnych jednostek dla każdej wielkości;
- c) powszechnej akceptacji i stosowaniu w większości krajów świata;
- d) zastosowaniu spójnych jednostek miar;
- e) wykorzystaniu zasady jednej jednostki dla każdej wielkości;
- f) wykorzystaniu systemu przedrostków do określania krotności jednostek miar;



8. Które z poniższych jednostek są jednostkami podstawowymi układu SI ?

- 1) metr kwadratowy; 2) kelwin; 3) wolt; 4) paskal; 5) dżul;

Odpowiedzi:

- a) wszystkie; b) tylko druga; c) tylko druga i czwarta;
d) tylko pierwsze trzy; e) druga, trzecia i piąta; f) tylko trzecia i piąta;

9. Rzeczywista wartość błędu pomiaru jest to:

- a) różnica pomiędzy wartością zaobserwowaną surową i wartością zaobserwowaną poprawną;
- b) różnica pomiędzy wartością zaobserwowaną a wartością rzeczywistą;
- c) różnica granicznych wartości zbioru wartości, wśród których z odpowiednio dużym prawdopodobieństwem mieści się nieznana wartość rzeczywista;
- d) zmiana wskazań przyrządu spowodowana różnicą pomiędzy warunkami pomiaru a warunkami odniesienia;
- e) wartość błędu popełnionego przy pomiarze w warunkach odniesienia;

10. Ze względu na postać, w jakiej błąd jest podawany wyróżnia się:

- a) błędy bezwzględne i względne;
- b) błędy paralaksy, histerezy i kwantowania;
- c) błędy systematyczne, przypadkowe i grube;
- d) błędy podstawowe i dodatkowe;
- e) błędy pobrania, przyrządu i odczytu;
- f) błędy zera i błędy czułości;

11. „Błąd dodatkowy” jest to:

- a) błąd spowodowany niewłaściwym (niepoprawnym) przeprowadzeniem pomiaru;
- b) błąd popełniony przy odczycie wskazania przyrządu pomiarowego (dotyczy tylko przyrządów analogowych);
- c) błąd popełniony w trakcie opracowywania wyniku pomiaru, spowodowany np. korzystaniem z uproszczonych zależności pomiędzy wielkościami mierzonymi;
- d) błąd wynikający z faktu, że pomiaru dokonano w warunkach różnych od warunków odniesienia;
- e) błąd spowodowany zakłóceniem procesu pomiaru przez różnego rodzaju zjawiska przypadkowe;
- f) błąd spowodowany oddziaływaniem przyrządu na wielkość mierzoną (np. błąd wynikający z odkształceń sprężystych występujących pod wpływem nacisku pomiarowego);



12. Narzędzia pomiarowe są to:

- a) środki pomiarowe, które w procesie pomiaru pełnią rolę podstawową, tzn. służą do ustalenia miary wielkości;
- b) środki pomiarowe, które w procesie pomiaru pełnią rolę pomocniczą, np.: zapewniają właściwe warunki pomiaru, ustalają odpowiednie położenie mierzonego przedmiotu, itp.
- c) wszystkie środki techniczne wykorzystywane przy pomiarach;
- d) tylko te środki pomiarowe, których zadaniem jest przechowywanie i odtwarzanie jednostki miary wielkości fizycznej, lub krotności tej jednostki;
- e) tylko te środki pomiarowe, które służą do przetworzenia wielkości mierzonej, lub innej wielkości z nią związanej, na informację o wartości tej wielkości;

13. Które z poniższych sformułowań jest nieprawdziwe?

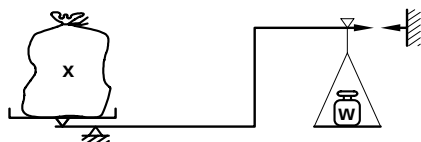
- a) ilość możliwych różnych wskazań przyrządu analogowego jest nieskończenie liczna;
- b) ilość możliwych różnych odczytów z przyrządu analogowego jest skończona i zależy od zastosowanej rozdzielczości odczytu;
- c) długością działki elementarnej nazywa się liniową odległość pomiędzy wyznaczającymi ją kresami;
- d) wartością działki elementarnej nazywa się średnią arytmetyczną wartości odpowiadających wyznaczającym działkę kresom;
- e) jeżeli wszystkie działki elementarne podziałki mają jednakową długość to podziałka taka jest nazywana podziałką jednostajną;

14. Klasa dokładności przyrządu pomiarowego jest to:

- a) maksymalny błąd względny występujący w dowolnym punkcie zakresu pomiarowego przyrządu przy pomiarze w warunkach odniesienia, wyrażony w procentach;
- b) liczba wyrażająca w procentach zakresu pomiarowego maksymalny rozrzut wskazań przyrządu, mogący wystąpić w dowolnym miejscu zakresu przy pomiarze w warunkach odniesienia;
- c) wyrażony w procentach stosunek maksymalnego błędu bezwzględnego przyrządu przy pomiarze w warunkach odniesienia do pełnego zakresu pomiarowego tego przyrządu;
- d) liczba określająca w procentach stosunek czułości przyrządu do jego zakresu pomiarowego;
- e) stosunek maksymalnego błędu bezwzględnego przyrządu przy pomiarze w warunkach odniesienia do wartości jego działki elementarnej;
- f) stosunek zakresu pomiarowego przyrządu do wartości maksymalnego błędu bezwzględnego przy pomiarze w warunkach odniesienia, podzielony przez 100.



15. Pomiar na wadze dziesiętnej (p. rys. poniżej) dokonywany jest metodą:



- a) zerową kompensacyjną;
- b) wychyłową (klasyczną);
- c) różnicową;
- d) pośrednią;
- e) zerową komparacyjną;
- f) zerową "przez podstawienie";

16. Przy jakiej metodzie niepewność wyniku pomiaru $\Delta_u x$ wyznacza się z zależności:

$$\Delta_u x = \sqrt{(k \cdot \Delta_u w)^2 + (w \cdot \Delta_u k)^2 + (\Delta_D)^2}$$

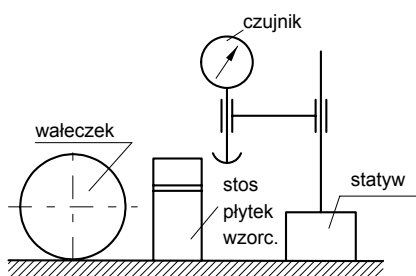
gdzie:

- w - nominalna wartość wzorca;
- k - przełożenie (wzmocnienie) wzorca;
- $\Delta_u w$ - niepewność wzorca;
- $\Delta_u k$ - niepewność przełożenia;
- Δ_D - próg czułości detektora;

Odpowiedzi:

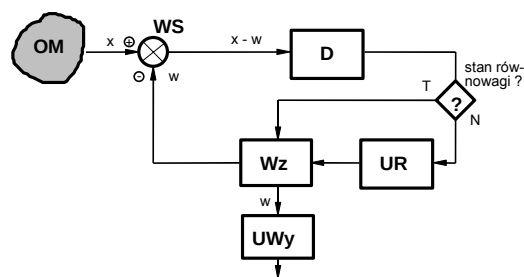
- a) zerowej "przez podstawienie" b) wychyłowej; c) różnicowej;
- d) zerowej komparacyjnej; e) pośredniej; f) zerowej kompensacyjnej;

17. Pomiar średnicy wałeczka za pomocą czujnika zegarowego i stosu płytek (rys. poniżej) dokonywany jest metodą:



- a) pośrednią;
- b) zerową kompensacyjną;
- c) zerową komparacyjną;
- d) zerową „przez podstawienie”;
- e) różnicową;
- f) wychyłową;

18. Pokazany niżej schemat jest schematem funkcjonalnym metody



- a) pośredniej;
- b) zerowej kompensacyjnej;
- c) zerowej komparacyjnej;
- d) różnicowej;
- e) zerowej „przez podstawienie”;
- f) wychyłowej

19. Przy jakiej metodzie pomiaru miarę wielkości mierzonej x wyznacza się z zależności: $x = f(A, B, C)$

gdzie A, B, C - wielkości związane z wielkością x znaną zależnością;

- a) zerowej "przez podstawienie" b) wychyłowej; c) różnicowej;
- d) zerowej komparacyjnej; e) pośredniej; e) zerowej kompensacyjnej;

20. Poniżej zamieszczono cztery sformułowania charakteryzujące w sposób ogólny metody bezpośrednie. Które z poniższych sformułowań są prawdziwe ?

- I) metody różnicowe są przeważnie bardziej złożone i pracochłonne od metod wychyłowych;
- II) metody zerowe są zazwyczaj jeszcze bardziej złożone od metod różnicowych z powodu występowania dodatkowych urządzeń (urządzenie równoważące, detektor) oraz czynności (równoważenie);
- III) metody wychyłowe są przeważnie mniej dokładne od metod zerowych;
- IV) wyższa dokładność metod różnicowych w porównaniu z wychyłowymi wynika z faktu, że w przypadku metod różnicowych stosuje się przyrządy o znacznie mniejszych zakresach pomiarowych;

Odpowiedzi:

- a) tylko pierwsze i trzecie; b) wszystkie oprócz pierwszego;
- c) wszystkie oprócz drugiego; d) wszystkie poza trzecim;
- e) wszystkie poza czwartym; f) wszystkie sformułowania są prawdziwe;

21. Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe?

1. Analiza statystyczna wyników pomiaru wielokrotnego pozwala na znalezienie takiej wartości zaobserwowanej, która jest obciążona mniejszą niepewnością, niż wynik pojedynczego pomiaru.
2. Analiza statystyczna wyników pomiaru wielokrotnego pozwala na oszacowanie wartości niepewności wypadkowej pochodzącej od błędów cząstkowych o charakterze przypadkowym.
3. Powtarzanie pomiarów pozwala na zmniejszenie tej składowej niepewności pomiaru, która pochodzi od błędów systematycznych.
4. Analiza statystyczna wyników pomiaru wielokrotnego pozwala na wykrycie wyniku pomiaru obciążonego błędem grubym.

Odpowiedzi

- a) wszystkie; b) wszystkie poza pierwszym; c) wszystkie poza drugim;
d) wszystkie poza trzecim; e) wszystkie poza czwartym; f) tylko pierwsze i drugie;

22. Przy pomiarach wielokrotnych niezbędną liczbę powtórzeń określamy korzystając z zależności

$$N \geq f(t, s, \Delta_w x, \Delta_u^s x)$$

gdzie:

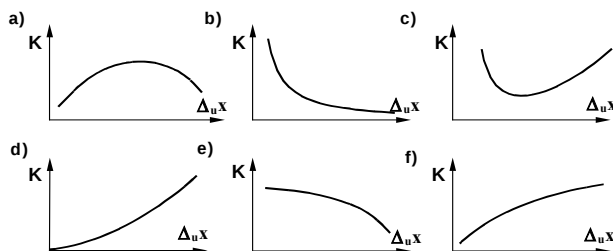
- t – zmienna standaryzowana odpowiadająca przyjętemu poziomowi ufności;
s – średnie odchylenie kwadratowe wyników serii pomiarów wstępnych;
 $\Delta_w x$ – wymagana wartość niepewności pomiaru;
 $\Delta_u^s x$ – wartość niepewności systematycznej pojedynczego pomiaru;

Jaki wniosek należy wyciągnąć w przypadku, gdy wartość funkcji $f(t, s, \Delta_w x, \Delta_u^s x)$ jest mniejsza od zera?

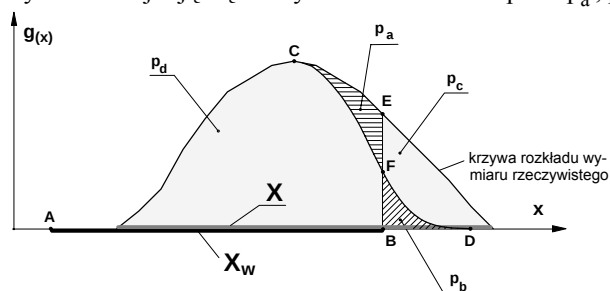
- a) że przyjęto niewłaściwy poziom ufności;
- b) że przy obliczaniu wartości funkcji popełniono błąd rachunkowy;
- c) że przeprowadzono zbyt krótką serię pomiarów wstępnych;
- d) że dla osiągnięcia wymaganej niepewności pomiaru wystarczy wykonać jeden pomiar;
- e) że wymaganej wartości niepewności nie jesteśmy w stanie osiągnąć poprzez pomiar wielokrotny;
- f) że źle oszacowaliśmy wartość niepewności systematycznej i należy dokonać ponownej analizy procesu pomiarowego;



23. Projektując kontrolę techniczną określonego wymiaru należy tak dobrać metodę i narzędzia pomiarowe, aby graniczna wartość błędu pomiaru była zbliżona do:
- dolnej wartości granicznej kontrolowanego wymiaru;
 - górnej odchyłki granicznej kontrolowanego wymiaru;
 - tolerancji kontrolowanego wymiaru;
 - wartości nominalnej kontrolowanego wymiaru;
 - jednej dziesiątej tolerancji kontrolowanego wymiaru;
 - dolnej odchyłki granicznej kontrolowanego wymiaru;
24. Który z poniższych wykresów najlepiej ilustruje zależność pomiędzy dokładnością przeprowadzanych przez KT pomiarów, a kosztami podejmowanych na podstawie tych pomiarów mylnych decyzji? ($\Delta_u x$ – niepewność wyniku pomiaru; gdy $\Delta_u x \uparrow$ to dokładność pomiaru $\downarrow$)



25. Pokazany poniżej wykres przedstawia rozkłady wymiaru rzeczywistego i wymiaru odebranego. Zakładamy, że jest on znormalizowany względem wymiaru rzeczywistego, co oznacza, że pole pod krzywą rozkładu wymiaru rzeczywistego jest równe jedności. Na wykresie znajdują się cztery różne oznaczone pola: p_a , p_b , p_c i p_d .



Które z w/w pól, względnie ich sum, jest równe prawdopodobieństwu zdarzenia, że pracownik kontroli uzna sprawdzany wymiar za poprawny (przepuści sprawdzany detal) ?

- p_a
- p_d
- $p_a + p_d$
- $p_b + p_d$
- $p_b + p_c$
- $p_c + p_d$

1. Które z niżej wymienionych czynności są niezbędne dla utworzenia modelu wzorcowego (modelu matematycznego) obiektu mierzonego ?

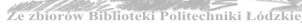
- Odpowiedzi:

2. Które z podanych niżej warunków muszą być spełnione, aby określoną właściwość (cechę) obiektów można uznać za mierzalną ?

- Odpowiedzi:

3. Wielkość nazywamy addytywną, gdy:

- 159



4. Megagram jest to:

- a) miliard kilogramów; b) milion kilogramów; c) tysiąc kilogramów;
- d) dziesięć ton e) jedna milionowa kilograma; f) jedna miliardowa kilograma;

5. Zastosowana w układzie SI zasada jednej jednostki dla każdej wielkości jest możliwa do stosowania dzięki:

- a) uniwersalności układu;
- b) przyjęciu dużej liczby wielkości podstawowych;
- c) wprowadzeniu tzw. "jednostek uzupełniających";
- d) wykorzystaniu krotności jednostek miar określanych za pomocą systemu przedrostków;
- e) określonemu sposobowi definiowania wielkości pochodnych;

6. Które z poniższych jednostek są jednostkami podstawowymi układu SI ?

- 1) radian; 2) stopień Celsjusza; 3) amper; 4) minuta; 5) niuton;

Odpowiedzi:

- a) żadna b) tylko pierwsze trzy; c) tylko druga i czwarta;
- d) tylko trzecia; e) pierwsza, trzecia i piąta; f) tylko trzecia i piąta;

7. Spójność układu SI to jego cecha polegająca na:

- a) stosowaniu nazw własnych jednostek dla każdej wielkości;
- b) powszechnej akceptacji i stosowaniu w większości krajów świata;
- c) wyrażaniu jednostek wielkości pochodnych za pomocą jednostek podstawowych równaniem definicyjnym ze współczynnikiem liczbowym równym jedności;
- d) możliwości stosowania w każdej dziedzinie nauki, techniki i gospodarki;
- e) wykorzystaniu zasady jednej jednostki dla każdej wielkości;
- f) wykorzystaniu systemu przedrostków do określania krotności jednostek miar;

8. Które z poniższych sformułowań są prawdziwe ?

- I) błąd paralaksy jest to błąd wynikający z patrzenia na element wskazujący pod niewłaściwym kątem;
- II) błędy wynikające z oddziaływania przyrządu na obiekt mierzony określa się mianem błędów pobrania;



- III) błędy grube są to błędy wynikające z nieprawidłowego wykonania pomiaru;
- IV) błąd podstawowy jest to błąd, którego wartość w serii pomiarów wykonywanych w tych samych warunkach jest stała lub zmienia się w ściśle określony sposób wraz ze zmianą tych warunków;
- V) błąd dodatkowy jest to błąd, którego wartość w serii pomiarów wykonywanych w tych samych warunkach zmienia się w sposób niemożliwy do przewidzenia;

Odpowiedzi:

- a) wszystkie; b) wszystkie poza piątym; c) wszystkie poza pierwszym;
- d) pierwsze trzy; e) tylko pierwszy i drugi; f) wszystkie oprócz trzeciego;

9. Ze względu na warunki pomiaru wyróżnia się:

- a) błędy systematyczne, przypadkowe i grube;
- b) błędy podstawowe i dodatkowe;
- c) błędy paralaksy, histerezy i kwantowania;
- d) błędy bezwzględne i względne;
- e) błędy pobrania, przyrządu i odczytu;
- f) błędy zera i błędy czułości;

10. Które z poniższych określeń najlepiej charakteryzuje pojęcie błędu bezwzględnego?

- a) błąd wynikający z niewłaściwego przeprowadzenia pomiaru;
- b) różnica wskazań przyrządu spowodowana różnicą pomiędzy warunkami pomiaru a warunkami odniesienia;
- c) błąd popełniony przy pomiarze metodą bezwzględną;
- d) błąd, którego wartość nie zależy od warunków pomiaru;
- e) różnica pomiędzy wartością uzyskaną a wartością, która powinna być uzyskana, wyrażony w tych samych jednostkach co wielkość mierzona;
- f) błąd, którego wartość w serii pomiarów przeprowadzonych w tych samych warunkach jest stała;

11. Etalony są to:

- a) środki pomiarowe, które w procesie pomiaru pełnią rolę pomocniczą, np.: zapewniają właściwe warunki pomiaru, ustalają odpowiednie położenie mierzonego przedmiotu, itp.
- b) wszystkie środki techniczne wykorzystywane przy pomiarach;



- c) tylko te środki pomiarowe, których zadaniem jest przechowywanie i odtwarzanie jednostki miary wielkości fizycznej, lub krotności tej jednostki, w celu przekazania jej przez porównanie innym narzędziom pomiarowym;
- d) tylko te środki pomiarowe, które służą do przetworzenia wielkości mierzonej, lub innej wielkości z nią związanej, na informację o wartości tej wielkości;
- e) środki pomiarowe, które służą do zmiany wartości wielkości mierzonej lub też do zamiany jej na inną wielkość fizyczną;
- f) środki pomiarowe oceniające zgodność wartości wielkości mierzonej z nałożonymi na nią wymaganiami

12. Czułość przyrządu pomiarowego jest to:

- a) stosunek zakresu pomiarowego przyrządu do wartości jego działki elementarnej;
- b) rozrzut wartości wskazywanych przez przyrząd przy wielokrotnym pomiarze tej samej wielkości określonej;
- c) największa zmiana wielkości mierzonej nie wywołująca jeszcze zauważalnej zmiany wskazania przyrządu;
- d) stosunek zmiany wielkości wyjściowej (np. wychylenia wskazówki) do wywołującej ją zmiany wielkości mierzonej;
- e) współczynnik, przez który należy przemnożyć wskazanie przyrządu, aby uzyskać wartość wielkości mierzonej;
- f) przedział czasu pomiędzy chwilą, w której następuje nagła zmiana wartości wielkości mierzonej, a chwilą ustalenia się nowego, odpowiadającego tej zmianie, położenia wskazówki;

13. Nominalna wartość wzorca jest to:

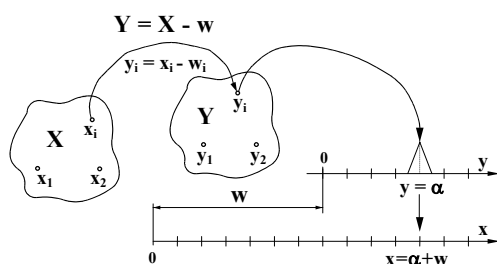
- a) wartość, którą wzorzec winien odtwarzać;
- b) nieznaną wartość, którą wzorzec rzeczywiście odtwarza;
- c) wartość, którą wzorzec odtwarza ustalona podczas jego sprawdzania (wartość zaobserwowana podczas pomiaru wzorca odpowiednio dokładną metodą);
- d) wartość, którą wzorzec winien odtwarzać $\pm$ graniczna dopuszczalna wartość błędu wzorca;
- e) wartość zaobserwowana podczas pomiaru wzorca $\pm$ graniczna dopuszczalna wartość błędu wzorca;
- f) wartość zaobserwowana podczas pomiaru wzorca $\pm$ graniczna wartość błędu tego pomiaru;



14. Miliamperomierz posiada podziałkę o całkowitej długości $L_c = 150 \text{ mm}$, zakres pomiarowy $0 \div 600 \text{ mA}$ i wartość działki elementarnej 10 mA . Jaka jest jego czułość ?

- a) 60;
- b) 15 mm/mA
- c) 4 mA/mm
- d) 0.25 mm/mA ;
- e) nie daje się określić jej wartości, ponieważ nieznana jest klasa dokładności przyrządu;
- f) nie daje się określić jej wartości, ponieważ nieznana jest długość działki elementarnej;

15. Poniższy rysunek przedstawia model matematyczny pomiaru dokonywanego metodą:



- a) zerową kompensacyjną;
- b) pośrednią;
- c) zerową "przez podstawienie";
- d) wychyłową;
- e) zerową komparacyjną;
- f) różnicową;

16. Przy jakiej metodzie pomiaru wartość zaobserwowaną wielkości mierzonej x wyznacza się z zależności:

$$x = (w - \Delta_m w) \cdot (k - \Delta_m k)$$

gdzie: w - wartość nominalna wzorca;
 k - przełożenie (wzmocnienie) wzorca;
 $\Delta_m w$ i $\Delta_m k$ - szacowane wartości średnie błędów wielkości w i k ;

Odpowiedzi:

- a) zerowej "przez podstawienie"
- b) wychyłowej;
- c) różnicowej;
- d) zerowej kompensacyjnej;
- e) pośredniej;
- f) zerowej komparacyjnej;

17. Pomiar na wadze sprężynowej (np. waga łazienkowa) dokonywany jest metodą:

- a) wychyłową;
- b) zerową kompensacyjną;
- c) różnicową
- d) zerową "przez podstawienie";
- e) pośrednią;
- f) zerową komparacyjną;



18. Przy jakiej metodzie niepewność wyniku pomiaru $\Delta_u x$ wyznacza się z zależności:

$$\Delta_u x = \sqrt{(\Delta_u \alpha)^2 + (\Delta_u w)^2 + (\Delta_u z)^2}$$

gdzie:

$\Delta_u \alpha$ - niepewność pomiaru wielkości α ;

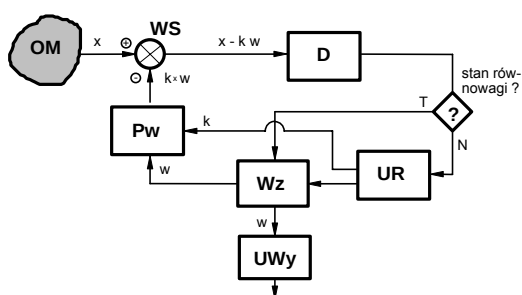
$\Delta_u w$ - niepewność wzorca;

$\Delta_u z$ - niepewność zerowania;

Odpowiedzi:

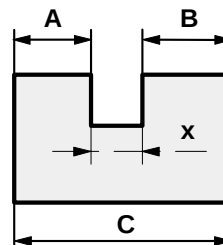
- a) zerowej "przez podstawienie" b) wychyłowej; c) różnicowej;
d) zerowej komparacyjnej; e) pośredniej; e) zerowej kompensacyjnej;

19. Pokazany niżej schemat jest schematem funkcjonalnym metody



- a) pośredniej;
b) różnicowej;
c) zerowej kompensacyjnej;
d) zerowej komparacyjnej;
e) zerowej „przez podstawienie”;

20. Z braku odpowiedniego przyrządu szerokość x kanałka wyznaczono poprzez pomiary wymiarów A , B i C , dokonane za pomocą mikrometrów zewnętrznych. Jeżeli niepewność wyniku pomiaru wielkości A oznaczmy przez $\Delta_u A$, wielkości B przez $\Delta_u B$ i wielkości C przez $\Delta_u C$ to niepewność wyniku pomiaru $\Delta_u x$ powinniśmy wyznaczać z zależności:



- a) $\Delta_u x = \sqrt{(\Delta_u A)^2 + (\Delta_u B)^2 + (\Delta_u C)^2}$; b) $\Delta_u x = \sqrt{(\Delta_u C)^2 - (\Delta_u A)^2 - (\Delta_u B)^2}$
c) $\Delta_u x = \sqrt{(\Delta_u C)^2 - (\Delta_u A + \Delta_u B)^2}$ d) $\Delta_u x = \frac{\Delta_u A + \Delta_u B + \Delta_u C}{3}$
e) $\Delta_u x = \Delta_u C - \frac{\Delta_u A + \Delta_u B}{2}$ f) $\Delta_u x = \Delta_u C - \Delta_u A - \Delta_u B$

21. Poniżej zamieszczono trzy sformułowania charakteryzujące w sposób ogólny metody bezpośrednie. Które z poniższych sformułowań są prawdziwe ?

- I) wyższa dokładność metod różnicowych w porównaniu z zerowymi wynika z faktu, że w przypadku metod różnicowych można stosować przyrządy pomiarowe o znacznie mniejszych zakresach oraz nie występuje przy nich błąd detekcji zera;
- II) metody zerowe są w porównaniu z wychyłowymi mniej wrażliwe na zmiany wielkości wpływowych (w metodach zerowych powstałe z tego powodu błędy przeważnie się kompensują);
- III) metody różnicowe są mniej dokładne od wychyłowych, ponieważ poza błędem przyrządu występuje w nich jeszcze błąd wzorca i błąd zerowania;

Odpowiedzi:

- a) tylko pierwsze; b) tylko pierwsze i drugie; c) tylko pierwsze i trzecie;
- d) tylko drugie; e) tylko drugie i trzecie; f) wszystkie;

22. Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe?

- 1. Powtarzanie pomiarów pozwala na zmniejszenie tej składowej niepewności pomiaru, która pochodzi od błędów systematycznych.
- 2. Wzrost liczby powtórzeń powoduje zmniejszenie całkowitej niepewności wyniku pomiaru wielokrotnego
- 3. Analiza statystyczna wyników pomiaru wielokrotnego pozwala na znalezienie rzeczywistej wartości błędu pomiaru.
- 4. Analiza statystyczna wyników pomiaru wielokrotnego pozwala na wykrycie wyniku pomiaru obciążonego błędem grubym.

Odpowiedzi

- a) tylko pierwsze; b) tylko drugie; c) pierwsze i drugie;
- d) wszystkie poza pierwszym; e) tylko drugie i trzecie; f) tylko drugie i czwarte;

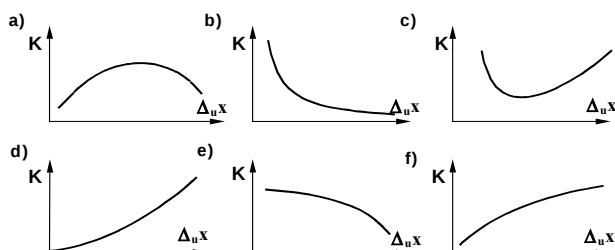
23. Niepewność systematyczna średniej arytmetycznej jest:

- a) N razy większa od niepewności systematycznej pojedynczego pomiaru;
- b) $\sqrt{N}$ razy większa od niepewności systematycznej pojedynczego pomiaru;
- c) taka sama jak niepewność systematyczna pojedynczego pomiaru;
- d) $\sqrt{N}$ razy mniejsza od niepewności systematycznej pojedynczego pomiaru;

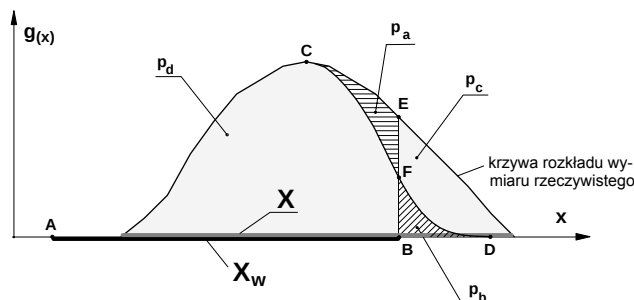


- e) $(N-1)$ razy mniejsza od niepewności systematycznej pojedynczego pomiaru;
 f) N razy mniejsza od niepewności systematycznej pojedynczego pomiaru;
 gdzie N oznacza liczbę pomiarów w serii

24. Który z poniższych wykresów najlepiej ilustruje wpływ dokładności pomiarów na koszty kontroli technicznej? (Δ_{ux} – niepewność wyniku pomiaru; gdy $\Delta_{ux} \uparrow$ to dokładność pomiaru $\downarrow$)



25. Pokazany poniżej wykres przedstawia rozkłady wymiaru rzeczywistego i wymiaru odebranego. Zakładamy, że jest on znormalizowany względem wymiaru rzeczywistego, co oznacza, że pole pod krzywą rozkładu wymiaru rzeczywistego jest równe jedności. Na wykresie znajdują się cztery różnie oznaczone pola: p_a , p_b , p_c i p_d .



Które z w/w pól, względnie ich sum, jest równe prawdopodobieństwu zdarzenia, że pracownik kontroli oceni wymiar prawidłowo (nie popełni pomyłki)

- a) p_c b) p_d c) $p_a + p_d$ d) $p_b + p_d$; e) $p_b + p_c$; f) $p_c + p_d$

5. WYNIKI ZADAŃ I POPRAWNE ODPOWIEDZI NA PYTANIA TESTOWE

5.1. WYNIKI ZADAŃ DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

- 2.1. $\{A\} = \{A_1\} + \frac{A - A_1}{A_2 - A_1} \cdot (\{A_2\} - \{A_1\})$;
- 2.2. Przy prędkości obrotowej równej 46,42 obr/s ≈ 2785 obr/min;
- 2.3. Silnik posiada moc 19 323 W $\approx 19,3$ kW;
- 2.4. Wydajność pompy wynosi 150 dm³/s = 0,15 m³/s;
- 2.5. a) $1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$; b) $\frac{1}{\text{m}}$; c) $1 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$;
- 2.6. Jednostką ciepła właściwego jest 1 m²·s⁻²·K⁻¹
- 2.7. Jednostką oporu elektrycznego jest 1 m²·kg·s⁻³·A⁻²; jednostka ta posiada nazwę własną om;
- 2.8. Jednostką oporu elektrycznego właściwego jest 1 m³·kg·s⁻³·A⁻²;
- 2.9. Jednostką pojemności elektrycznej jest 1 m⁻²·kg⁻¹·s⁴·A²; jednostka ta posiada nazwę własną farad;
- 2.10. a) masa M = 24 gigagramy (Gg);
b) ciśnienie p = 1,02 megapaskala (Mpa);
c) powierzchnia S = 45,6 milimetrów kwadratowych (mm²);
d) długość L = 3,25 mm;
e) objętość V = 630 (10⁻⁴m)³; ponieważ mnożnik 1·10⁻⁴ nie ma przedrostka więc zadanie nie ma rozwiązania; najbliższe spełnienia warunku jest V = 0,63 mm³;
f) napięcie elektryczne U = 26,4 kilowolta (kV);
- 2.11. $t = (570 \pm 10) \text{ ns}$ lub $t = 570 \text{ ns} \pm 2\%$;
- 2.12. $\lambda = (550 \pm 20) \text{ nm}$ lub $\lambda = 550 \text{ nm} \pm 4\%$;
- 2.13. $m = (13,77 \pm 0,06) \text{ mg}$ lub $m = 13,77 \text{ mg} \pm 4\text{‰}$
- 2.14. Niepewność względna pomiaru gęstości wynosiła ok. 8‰ (dokładnie 0,00767613)
- 2.15. Błąd odkształceń sprężystych posiada w tym przypadku wartość $\Delta d = -1,54 \mu\text{m}$
- 2.16. Temperatura w laboratorium winna zawierać się w przedziale $17,4^\circ\text{C} \leq t_n \leq 22,6^\circ\text{C}$



- 2.17. Temperatura tarczy winna spełniać warunek: $18,8\text{ }^{\circ}\text{C} < t_p < 21,2\text{ }^{\circ}\text{C}$
- 2.18. $18,9\text{ }^{\circ}\text{C} < t_p < 21,1\text{ }^{\circ}\text{C}$
- 2.19. $\Delta^s x = (0,004 \pm 0,007)\text{ mm}$
- 2.20. $x_{z,p} = 31,9925\text{ mm}$
- 2.21. Niepewność odtwarzania wymiaru przez każdą z wkładek płaskowalcowych nie może przekroczyć wartości $0,00053\text{ mm}$
- 2.22. Graniczna wartość błędu paralaksy woltomierza wynosi $1,1\text{ V}$
- 2.23. $k = 0,6$; $c = 2\text{ mm}/^{\circ}\text{C}$;
- 2.24. $\Delta_{\text{dop}} = 3\text{ V}$;
- 2.25. $\Delta_{\text{dop}} = 1,25\text{ V}$
- 2.26. $\Delta_{\text{dop}} = 30\text{ obr/min}$
- 2.27. Rezystancja woltomierza winna spełniać warunek $R_p \geq 66,6\text{ k}\Omega$;
- 2.28. $d = (42,494 \pm 0,008)\text{ mm}$;
- 2.29. $x = (19,9930 \pm 0,0008)\text{ mm}$; sprawdzany wymiar jest zgodny z wymaganiami;
- 2.30. W analizowanym przypadku niepewność pomiaru metodą wychyłową jest ponad 8 razy większa;
- 2.31. $x = (29,996 \pm 0,003)\text{ mm}$;
- 2.32. Równanie definicyjne pomiaru: $L = (x+y)/2$; wynik: $L = (29,60 \pm 0,01)\text{ mm}$;
- 2.33. Równanie definicyjne pomiaru $R = \frac{h}{2} + \frac{s^2}{8 \cdot h}$;
wynik pomiaru: $R = (20,543 \pm 0,014)\text{ mm}$;
- 2.34. Równanie definicyjne pomiaru $\rho = \frac{m_a \cdot \rho_w}{m_a - m_b}$;
wynik pomiaru: $\rho = (5,363 \pm 0,016)\text{ g/cm}^3$;
- 2.35. $z = 0,3968 \pm 0,0003$;
- 2.36. Równanie definicyjne pomiaru $\omega_w = \omega_t \cdot d_t / d_w$;
wynik pomiaru: $\omega_w = (375 \pm 12)\text{ obr/min}$;
- 2.37. Równanie definicyjne pomiaru: $\alpha = \arctg((B-A)/C)$; wynik: $\alpha = 14^{\circ}24' \pm 1'$
- 2.38. Dla poziomu ufności 99% niepewność wskazań tego przyrządu wynosi $0,003943\text{ mm} \approx 0,004\text{ mm}$



- 2.39. Wynik pomiaru $x = 0,57$ kcal nie spełnia kryterium Chauvenet'a i powinien zostać odrzucony
- 2.40. Oszacowana wartość błędu systematycznego wynosi $(-3,7 \pm 2,6)^\circ\text{C} \approx (-4 \pm 3)^\circ\text{C}$
- 2.41. Żaden z uzyskanych wyników nie jest obciążony błędem grubym; wynik pomiaru wielokrotnego wynosi $x = (53,08 \pm 0,01)\text{mm}$
- 2.42. Aby niepewność wyniku pomiaru zbieżności nie przekroczyła wartości 0,0002 wymiary A, B i C należy mierzyć z niepewnościami nie przekraczającymi:
- przy założeniu jednakowych wpływów:
 $\Delta_u A = \Delta_u B = 0,006\text{mm}$, $\Delta_u C = 0,020\text{mm}$
 - przy założeniu jednakowych niepewności względnych
 $\Delta_u A = 0,005\text{ mm}$; $\Delta_u B = 0,008\text{mm}$; $\Delta_u C = 0,010\text{mm}$
 - przy założeniu jednakowych niepewności bezwzględnych:
 $\Delta_u A = \Delta_u B = \Delta_u C = 0,007\text{ mm}$
- 2.43. Niepewność wyniku pomiaru czasu spadania kulki nie może przekroczyć 2,5 ms
- 2.44. Przy założeniu jednakowych wpływów niepewność pomiaru długości wahadła nie powinna przekraczać 11 mm, a niepewność pomiaru okresu jego wahań – 9 milisekund
- 2.45. Niepewności wyników pomiaru długości nie mogą przekraczać 5 μm , a niepewności wyników pomiaru temperatury - 0,4 $^\circ\text{C}$
- 2.46. $\Delta_u L \leq 20\text{ mm}$!!!; $\Delta_u p \leq 5\text{ }\mu\text{m}$; $\Delta_u t_1 = \Delta_u t_2 \leq 0,4\text{ }^\circ\text{C}$
- Przedstawiona w zadaniu 2.46 zmiana sposobu wyznaczania współczynnika rozszerzalności cieplnej znacznie ułatwia wykonanie pomiarów długości. O ile w zadaniu poprzednim dopuszczalne wartości niepewności wynosiły zaledwie $\delta_u L_1 \approx \delta_u L_2 \approx 0,005\text{mm}/1000\text{ mm} = 5 \cdot 10^{-6}$, to obecnie wynoszą one;
 $\delta_u L = \Delta_u L / L = 20\text{ mm}/1000\text{ mm} = 2 \cdot 10^{-2}$
 oraz $\delta_u P = \Delta_u P / P = 0,005\text{ mm} / 0,25\text{ mm} = 2 \cdot 10^{-2}$;
- 2.47. Niepewności względne pomiaru średnicy i masy nie powinny przekraczać wartości 0,003 (3‰)
- 2.48. Aby spełnić warunek $\Delta_u \rho \leq 0,003\text{ g/cm}^3$ należy tak zaprojektować proces ważenia, aby:
- przy założeniu jednakowych wpływów: $\Delta_u m_a \leq 11,7\text{ mg}$; $\Delta_u m_b \leq 9,4\text{ mg}$
 - przy założeniu jednakowych niepewności względnych: $\delta_u m_a = \delta_u m_b \leq 5,86 \cdot 10^{-5}$,
 co daje $\Delta_u m_a \leq 11,7\text{ mg}$; $\Delta_u m_b \leq 9,4\text{ mg}$
- Wynika stąd, że przy obu założeniach uzyskano identyczne wyniki



5.2. POPRAWNE ODPOWIEDZI NA PYTANIA TESTOWE

Test nr 1

1e; 2e; 3e; 4d; 5e; 6b; 7a; 8b; 9b; 10a;
11d; 12a; 13d; 14c; 15e; 16d; 17e; 18b; 19e; 20f;
21d; 22e; 23e; 24d; 25d;

Test nr 2

1e; 2d; 3e; 4c; 5d; 6d; 7c; 8d; 9b; 10e;
11c; 12d; 13a; 14d; 15f; 16f; 17a; 18c; 19d; 20a;
21d; 22f; 23c; 24b; 25f;

6. L I T E R A T U R A

- [1]. Adamczak St., Sender E. „Ćwiczenia laboratoryjne z podstaw metrologii”, skrypt Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 1996 r.;
- [2]. Chodak Bogumił i in. „Wybrane zagadnienia metrologii ogólnej, prawnej i probierstwa”, ODKT RS NOT, W-wa, 1989 r.;
- [3]. Chwaleba A., Poniński M., Siedlecki A. „Metrologia elektryczna”, WNT, Warszawa, 1991 r.;
- [4]. Cieplucha Jan „Podstawy metrologii. Ćwiczenia audytoryjne”, skrypt PŁ, Łódź 1994 r.;
- [5]. Gundlach W., Cieplucha J. Kozanecka D. „Podstawy metrologii”, skrypt PŁ, Łódź, 1988 r.;
- [6]. Jakubiec W., Malinowski J. „Metrologia wielkości geometrycznych”, WNT, Warszawa 1999 r.;
- [7]. Jaworski Janusz „Matematyczne podstawy metrologii”, WNT, Warszawa, 1979 r.;
- [8]. Kałużko D., Szamotulski J. „SI. Legalne jednostki miar. Podstawowe przepisy prawne ...”, Wyd. Normalizacyjne, W-wa, 1977 r.;
- [9]. Kubisa Stefan „Podstawy metrologii”, skrypt Politechniki Szczecińskiej, Szczecin 1995 r.;
- [9a] Malinowski Jan „Międzynarodowy układ jednostek miar SI” WSiP, Warszawa 2000 r.;
- [10]. Meldner Bogdan „Metrologia techniczna. Podstawy”, skrypt Politechniki Łódzkiej, Łódź 1977 r.;
- [11]. Padelt Erna „Człowiek mierzy czas i przestrzeń”, WNT, 1977 r.;
- [12]. Piotrowski Janusz „Podstawy metrologii”, PWN, Warszawa, 1976 r.;
- [13]. PN - 71 / M - 02050 „Metrologia. Nazwy i określenia”;
- [14]. Praca zbiorowa „Mała Encyklopedia Metrologii”, WNT, W-wa, 1989 r.;
- [15]. Praca zbiorowa pod red. P.H.Syndeama „Podręcznik metrologii. Podstawy teoretyczne”, WKiŁ, Warszawa, 1988 r.;
- [16]. Praca zbiorowa „Międzynarodowy słownik podstawowych i ogólnych terminów metrologii”, wyd. GUM, W-wa 1996 r.;



- [17]. Praca zbiorowa „Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik”, wyd. GUM, Warszawa 1999 r.;
- [18]. Sadowski A., Miernik E. „Metrologia długości i kąta”, WNT, W-wa 1978 r.; Sobol J.
- [19]. Skierczyński Janusz .. „Wstęp do metrologii”, skrypt WSI, Lublin, 1984 r;
- [20]. Taylor John R. „Wstęp do analizy błęd pomiarowego”, PWN, Warszawa 1999;
- [21]. Tomaszewski A. „Podstawy nowoczesnej metrologii”, WNT, Warszawa 1978 r;
- [22]. Turzeniecka Danuta „Ocena niepewności wyniku pomiaru”; Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1997 r.;
- [23]. Wielka Internetowa Encyklopedia Multimedialna
- [24]. Zakrzewski Jan „Podstawy metrologii”, skrypt Politechniki Śląskiej, Gliwice 1991 r.;
- [25]. Zawada Józef „Wpływ operacji kontroli technicznej na statystyczne rozkłady powstających wymiarów. Optymalna dokładność kontroli”, „Pomiary, Automatyka, Kontrola”, nr 10/1991;



ISBN 83-7283-076-2
