

WYKŁADY FIZYKI

MARIAN GROTOWSKI

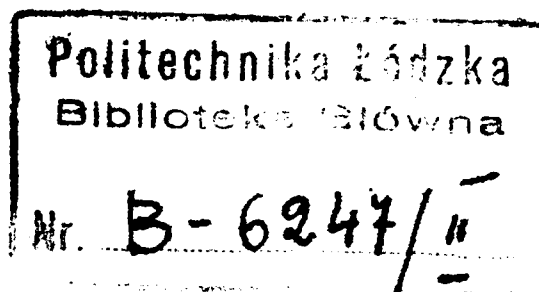
WYKŁADY FIZYKI

TOM II

ROZCHODZENIE SIĘ ODKSZTAŁCEN
W ŚRODOWISKACH SPRĘŻYSTYCH.
ELEKTRYCZNOŚĆ I MAGNETYZM

*Je ne dis pas: la science est
utile, parce qu'elle nous permet
de construire des machines; je
dis: les machines sont utiles,
parce qu'en travaillant pour
nous, elles nous laissent plus
de temps pour s'occuper de la
science.*

H. Poincaré



KSIEGARNIA ŁÓDZKA WYDAWNICZA »CZYTAJ«

ŁÓDŹ

1 9 5 0

**DRUKOWANO W NAKŁADZIE 3 000 EGZ. W FORMACIE B5
NA PAPIERZE DRUKOWYM SATYNOWANYM V KL. — 80 G,
W DRUKARNI WYDAWNICTWA „PRASA WOJSKOWA”
W J E L E N I E J G Ó R Z E. NR ZAM. 408/48. F 31323.**

OD AUTORA.

Podobnie, jak w tomie poprzednim, trudniejsze wywody matematyczne są zawarte w ustępach, wyodrębnionych od reszty tekstu innym drukiem. Czytelnik, nie władający w dostatecznej mierze rachunkiem wyższym, może je bez szkody dla zrozumienia całości książki opuścić.

SPIS RZECZY

	Str.
Od autora	V
ROZCHODZENIE SIĘ ODKSZTAŁCEŃ W ŚRODOWISKACH SPRĘŻYSTYCH. DRGANIA CIAŁ SPRĘŻYSTYCH	
Rozdział I. — Rozchodzenie się odkształceń w środowiskach sprężystych	1—105
1. — Odkształcenia w nieograniczonym środowisku sprężystym (1). 2. — Prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych (8). 3. — Pomiar prędkości rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w środowisku nieograniczonym (17). 4. — Energia przenoszona przez fale odkształcenia (29). 5. — Interferencja. — Składanie drgań o tej samej częstotliwości (44). 6. — Fale stojące (49). 7. — Składanie drgań o niejednakowym okresie. — Wzór Fouriera (53). 8. — Dudnienia (60). 9. — Składanie drgań, zachodzących w kierunkach prostopadłych (63). 10. — Zasada Huygensa-Fresnela (69). 11. — Uginanie się fal sprężystych (71). 12. — Odbijanie się fal (76). 13. — Załamywanie się fal (89). 14. — Zjawisko Dopplera-Fizeau (95). 15. — Zaburzenia, rozchodzące się z prędkością większą, niż prędkość głosu (100).	
Rozdział II. — Drgania ciał sprężystych. Źródła dźwięku	107—166
1. — Drgania struny (107). 2. — Drgania prętów i sztab (118). 3. — Drgania błon i płyt (128). 4. — Tłumienie drgań. — Drgania wymuszone (podniecane). — Rezonans (133). 5. — Sprężenie (148). 6. — Drgania ograniczonych mas gazu (154).	

ROZCHODZENIE SIĘ ODKSZTAŁCEŃ W ŚRODOWISKACH SPRĘŻYSTYCH DRGANIA CIAŁ SPRĘŻYSTYCH

ROZDZIAŁ I

ROZCHODZENIE SIĘ ODKSZTAŁCEŃ W ŚRODOWISKACH SPRĘŻYSTYCH.

1. — ODKSZTAŁCENIA W NIEOGRANICZONYM ŚRODOWISKU SPRĘŻYSTYM.

Działanie odkształcające sił zewnętrznych w wyjątkowych tylko przypadkach — ciał doskonale niesprężystych — ogranicza się do tego elementu objętości ciała, na który siły te działają bezpośrednio. Zazwyczaj działanie to powoduje, jak wiemy, powstanie sił sprężystości, naruszających istniejącą poprzednio równowagę sił, z jakimi wzajemnie działały na siebie elementy sąsiednie, co z kolei wywołuje odkształcenie tych elementów i wzbudza siły, odkształcające dalej położone elementy objętości ciała. W ten sposób odkształceniu ulegają stopniowo wszystkie elementy danego ciała, dopóki siły sprężystości, wywołane przez zmianę wzajemnego położenia tych elementów, nie zrównoważą działania sił zewnętrznych. W przypadkach takich, jak te, które rozpatrywaliśmy w rozdziale V i VI tomu pierwszego, gdy badane ciała były na ogół rozmiarów niewielkich i gdy siły działające miały wartość stałą, czas dojścia do tego stanu równowagi był dostatecznie mały, aby można było uważać w chwili pomiaru odkształcenie każdego elementu ciała za mające wartość stałą, nie zmieniającą się z czasem. Inaczej jednak sprawa się przedstawia, gdy siły odkształcające są siłami chwilowymi lub zmiennymi lub wreszcie, gdy odkształcane środowisko jest nieograniczone.

Przypuśćmy, że w nieograniczonym środowisku płynnym (ciekłym lub gazowym) umieściliśmy wydrążoną kulę rozcią-

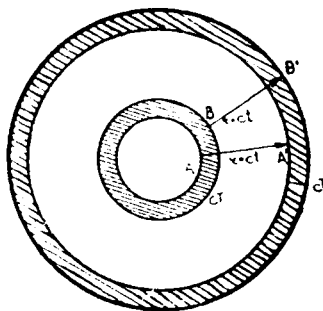
gliwą, której objętość zwiększymy nagle, wtlaczając do niej znacznie większą masę powietrza. Warstwa płynu bezpośrednio stykająca się z kulą dozna nagłego uderzenia i zostanie odepchnięta ku warstwie dalszej, co spowoduje nagły wzrost jej gęstości i wobec skończonej ściśliwości płynów odpowiedni wzrost ciśnienia. Wtedy warstwa sąsiednia, która uprzednio doznawała jednakowych ciśnień od obu stykających się z nią warstw, zewnętrznej i wewnętrznej, będzie poddana pewnej nadwyżce ciśnienia ze strony warstwy wewnętrznej, przesunie się zatem w stronę warstwy zewnętrznej, w której z kolei wywoła wzrost gęstości i ciśnienia. Zaburzenie, które początkowo ujawniało się jedynie w warstwie płynu, bezpośrednio przylegającej do kuli, stopniowo będzie się rozchodziło coraz dalej, tworząc falę zgęszczenia. Prędkość rozchodzenia się tej fali, zależna od własności fizycznych środowiska, będzie miała w środowiskach jednorodnych i równokierunkowych we wszystkich kierunkach jednakową wartość. Elementy zatem objętości środowiska, do których w danej chwili dojdzie odkształcenie (tzw. c z o ł o f a l i), będą leżały tym razem na powierzchni kulistej.

Gdyby jednak źródłem zaburzeń była nie kula, lecz nieograniczenie długi walec, którego promień uległby nagłemu zwiększeniu, jednakowemu na całej długości walca, warstwa, do której w danej chwili doszłoby zaburzenie, tworzyłaby powierzchnię cylindryczną, spółośiową do danego walca; kierunek rozchodzenia się zaburzenia wyznaczałyby w tym przypadku proste, prostopadłe do osi walca. Gdyby zaś zaburzenia były wywołane przez nagłe przesunięcie się w kierunku normalnej nieograniczenie rozciągłej płaszczyzny, fala zgęszczenia byłaby falą płaską, kierunek zaś rozchodzenia się zaburzeń byłby zgodny z kierunkiem normalnej do danej płaszczyzny.

Przebieg zjawiska nie ulegnie zmianie, gdy ciała, będące źródłem zaburzeń, zmniejszą swoją objętość (lub gdy płaszczyzna przesunie się w stronę przeciwną), gdy więc w warstwach bezpośrednio do nich przylegających nastąpi rozrzedzenie i spadek ciśnienia. Fala rozrzedzenia, która wtedy powstanie, będzie, podobnie jak fala zgęszczenia, stopniowo

przechodziła do coraz to dalszych warstw środowiska, przy czym, podobnie jak poprzednio, przesunięcia w warstwach zachodzić będą wzdłuż prostych, wyznaczających kierunek rozchodzenia się zaburzeń: w fali zgęszczenia w kierunku zgodnym z tym kierunkiem, w fali rozrzedzenia — w kierunku przeciwnym. Fale, powodującą przesunięcia leżące na prostych, wyznaczających kierunek rozchodzenia się zaburzeń, nazywamy podłużną; fale więc zgęszczenia i rozrzedzenia są falami podłużnymi.

Jakkolwiek nagle będzie zmiana objętości źródła zaburzeń (lub mówiąc ogólniej przesuwanie się jego powierzchni), czas, w ciągu którego zmiana ta będzie zachodziła, nie będzie nigdy równy zeru, wobec czego, zanim to przesunięcie osiągnie wartość ostateczną, zaburzenie, wywołane w chwili rozpoczynania się ruchu powierzchni źródła, przejdzie z warstwy bezpośrednio stykającej się ze źródłem do warstwy dalszej. Oznaczmy przez T czas trwania ruchu powierzchni źródła i założmy, że zmiany gęstości i ciśnienia są dostatecznie małe, abyśmy mogli pominąć wpływ ich na własności fizyczne środowiska i przyjąć, że prędkość rozchodzenia się zaburzeń zachowuje bez względu na odkształcenia, jakich doznały warstwy, w których zaburzenia się rozchodzą, stałą wartość c . Wtedy droga, jaką zaburzenie przejdzie w przeciągu czasu T , wyniesie cT , tyle więc wynosić będzie grubość warstwy AB , w której gęstość i ciśnienie posiadają wartości różne od normalnych. Po upływie czasu t zaburzenie z powierzchni B (rys. 1) dojdzie do powierzchni B' , oddległej od B w kierunku rozchodzenia się zaburzeń o ct , z powierzchni zaś A przesunie się na tę samą odległość do A' ; w przypadku zatem, w którym obowiązuje przyjęte przez nas założenie, grubość warstwy, w której zaburzenie jest umiejscowione, pozostaje podczas jego rozchodzenia się bez zmiany. Długość cT , równą grubości warstwy odkształcanej w ciągu czasu T , nazywamy długością fali danego zaburzenia.



rys. 1

Falom tym towarzyszą zmiany energii odkształcanych elementów środowiska. Zmiany te, zależne w danym środowisku od wartości i rodzaju odkształceń, przesuwają się razem z nimi z tą samą, co i one, prędkością do coraz to dalszych warstw środowiska.

Założmy, że odkształcenia, które przyjmujemy, jak była o tym mowa wyżej, za bardzo małe, zachodzą w sposób odwracalny; wtedy praca, wykonana przez źródło zaburzeń na przylegającej do niego bezpośrednio warstwie, równa jest pracy, wykonywanej przez tę warstwę podczas zanikania w niej odkształcenia na sąsiedniej z kolei odkształcanej warstwie. Energia zatem, udzielona środowisku przez źródło zaburzeń, jest w tym przypadku przenoszona bez zmian kolejno przez wszystkie odkształcane warstwy. Gdy mamy do czynienia z falami płaskimi, rozchodzącymi się w środowisku jednorodnym, masy warstw objętych odkształceniem są zawsze te same, wielkość więc wywołanych przez tę samą pracę odkształceń musi również pozostawać bez zmiany; każda przeto warstwa środowiska będzie podlegała identycznym odkształceniom.

Jeżeli zatem w warstwie bezpośrednio przylegającej do źródła zaburzeń odkształcenia zachodzić będą okresowo, osiągając co T sek pewną największą wartość Θ_0 , każda warstwa środowiska, do której dojdą fale odkształcenia, podlegać będzie również odkształceniu o tym samym okresie i o tej samej największej wartości.

Przypuśćmy, że te okresowe odkształcenia są wywołane przez drgania harmonijne proste elementów objętości danej warstwy koło swego położenia równowagi, tak że w warstwie płaskiej, bezpośrednio stykającej się ze źródłem zaburzeń, odchylenie s od położenia równowagi równe jest w chwili t

$$s = s_0 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

gdzie s_0 największa wartość odchylenia t.zn. amplituda lub obszerność drgania (por. tom I, str. 50). W warstwie płaskiej odległej o x od danej warstwy, gdzie x mierzone jest w kierunku rozchodzenia się fal, odkształcenia będą, w myśl tego, coś-

my mówili wyżej, spowodowane również przez drgania harmonijne proste punktów tej warstwy — drgania o tym samym okresie i tej samej amplitudzie s_0 ; fazy jednak tych drgań nie będą identyczne z fazami drgań w warstwie, stykającej się ze źródłem. Zaburzenie bowiem na przebycie drogi x cm zużyje czas $\frac{x}{c}$ sek, gdzie c — prędkość rozchodzenia się zaburzeń, wobec czego w chwili t do danej warstwy dojdzie to zaburzenie, które było w warstwie stykającej się ze źródłem w chwili o $\frac{x}{c}$ sek wcześniejszej, a więc w chwili $t_1 = t - \frac{x}{c}$. W warstwie x mamy zatem w chwili t odchylenie od położenia równowagi

$$s_x = s_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

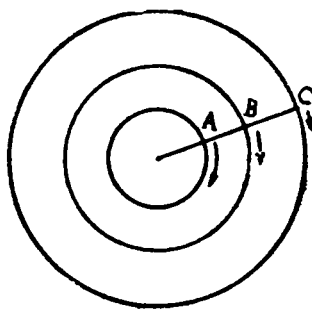
$$\text{lub} \quad s_x = s_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right) = s_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right). \quad (1)$$

Wzór ten jest często nazywany **równaniem promienia**. We wzorze tym długość fali λ oznacza, tak jak poprzednio, grubość warstwy (mierzoną w kierunku rozchodzenia się zaburzeń), w której umiejscowione jest odkształcenie, wzbudzone przez źródło w ciągu czasu T .

Wywody powyższe stosują się jedynie do fal płaskich. W przypadku fal kulistych różnica fazy w punkcie odległym o r od środka drgającej kuli, będącej źródłem zaburzeń, jest mniejsza od $2\pi \frac{r}{\lambda}$; w odległości r od źródła, znacznej w porównaniu z długością fali, zjawisko zachodzi tak, jak gdyby odległość danej warstwy była o ćwierć długości fali mniejsza od r tak, że między punktem A_1 , leżącym w pobliżu źródła w odległości r_1 , i punktem A_2 , leżącym w znacznej od źródła odległości r_2 , różnica faz wynosi nie $\frac{2\pi (r_2 - r_1)}{\lambda}$, lecz $\frac{2\pi (r_2 - r_1)}{\lambda} - \frac{\pi}{2}$. Odkształcenia w tym przypadku nie są w kolejnych warstwach identyczne, jak to można stwierdzić na następującym prostym przykładzie. Podzielmy środowisko na płaskie równoległe warstwy i przesunmy cząstki tych warstw w tej samej chwili na tę samą odległość w kierunku do warstw prostopadłym; odkształ-

chwili $t = nT + \frac{T}{4}$ otrzymamy, przesuwając krzywą bez zmiany jej kształtu w kierunku dodatnich x -ów o długość $c \cdot \frac{T}{4}$.

W płynach, posiadających jedynie sprężystość objętości, siły sprężyste powstają wyłącznie przy zmianach gęstości, wobec czego zaburzenia, rozchodzące się w środowiskach płynnych, posiadają zawsze cechy fal podłużnych. Inaczej jest w środowisku stałym, w którym siły sprężystości występują przy każdej zmianie wzajemnego położenia jego części, nawet takiej, której nie towarzyszy żadna zmiana gęstości. Wyodrębnijmy w takim środowisku kulisty element objętości i skrećmy go nagle dookoła jednej z jego średnic. Powstające przy tym odkształceniu siły sprężystości spowodują, że przylegająca do odkształcanej kuli warstwa B środowiska (rys. 3), na którą poprzednio warstwy sąsiednie działały siłami wzajemnie się równoważącymi, poddana będzie działaniu sił większych ze strony warstwy wewnętrznej, wobec czego cząstki jej przesuną się w tym samym kierunku, co punkty A odkształcanego elementu kulistego; to zaś spowoduje przesunięcie się w tym samym kierunku warstwy C . Odkształcenie więc i w tym przypadku będzie się stopniowo rozchodziło, powodując odchylenie od poprzedniego położenia równowagi coraz to dalszych warstw środowiska. Prędkość rozchodzenia się tej fali skrócenia jest, podobnie jak fali podłużnej, zależna od własności fizycznych środowiska, w nieograniczonym więc jednorodnym i równokierunkowym środowisku stałym będzie miała we wszystkich jego punktach tę samą wartość. W przykładzie przez nas rozpatrywanym fala skrócenia będzie falą kulistą, kierunkiem zaś jej rozchodzenia będą promienie kuli, stanowiącej źródło zaburzeń. W przypadku zaś, gdy odkształcenie powstaje przez rozciąganie nieograniczenie długiego cylindra lub przesuwanie elementów płaszczyzny w kierunku do tej płaszczyzny równoległym, otrzymujemy odpowiednio falę cylindryczną lub płą-



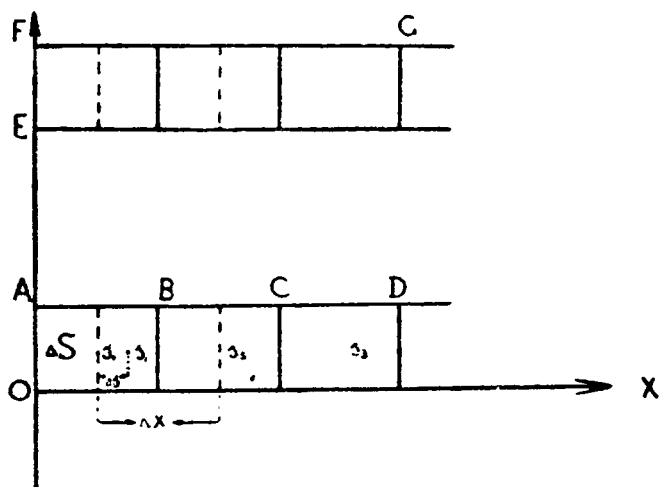
rys. 3

ską. Jakikolwiek jednak będzie kształt fali odkształcenia, kierunku przesunięcia cząstek warstw odkształcanych będzie zawsze prostopadły do kierunku rozchodzenia się zaburzeń. Tego rodzaju fale nazywamy **falami poprzecznymi**.

Zakładając, podobnie jak to czyniliśmy w przypadku fal podłużnych, że i tym razem odkształcenia środowiska nie zmieniają w znaczniejszym stopniu jego własności fizycznych, możemy, stosując analogiczne do poprzedniego rozumowanie, stwierdzić, że grubość warstwy odkształcanej nie ulega podczas rozchodzenia się zaburzeń zmianie, pozostając stale równą $\lambda = cT$, gdzie λ , c i T będą miały te same, co poprzednio znaczenie.

2. — PRĘDKOŚĆ ROZCHODZENIA SIĘ ZABURZEŃ SPRĘŻYSTYCH.

Z tych trzech wielkości, charakteryzujących dane zaburzenie, prędkość rozchodzenia się zaburzeń c jest, jak o tym już była mowa wyżej, zależna od własności fizycznych środowiska, a mianowicie, od jego sprężystości i gęstości. Zależność tę możemy wyznaczyć, rozpatrując dokładniej rozchodzenie się zaburzeń w środowisku. Przypuśćmy, że falą zaburzeń jest płaska fala zgęszczenia. Wyodrębnijmy w kierunku rozcho-



rys. 4

dzenia się tej fali Ox nieograniczenie długi cienki walec o przekroju ΔS i podzielimy go płaszczyznami prostopadłymi do Ox na dostatecznie małe elementy objętości, abyśmy mogli przyjąć, że w chwili przechodzenia zaburzenia przez dany element odchylenie

wszystkich jego punktów od położenia równowagi ma wartość jednakową, równą odchyleniu jego środka masy s . Dalej założmy, podobnie jak to czyniliśmy w ustępie poprzednim, że zgęszczenie, spowodowane przesunięciem się punktów

materialnych, stanowiących warstwę AB , o $s_1 s'_1 = \Delta s$ jest tak małe, że wzrost ciśnienia jest do zgęszczenia proporcjonalny, że więc mamy

$$\Delta p = - e \frac{\Delta V}{V}, \quad (a)$$

gdzie e jest odpowiednim współczynnikiem sprężystości, lub z uwagi, że

$$V = \Delta S \cdot \Delta x \text{ i } \Delta V = \Delta S (\Delta x - \Delta s) - \Delta S \Delta x = - \Delta S \cdot \Delta s,$$

$$\Delta p = e \frac{\Delta s}{\Delta x}. \quad (b)$$

Siła zatem, jaką na skutek tego zgęszczenia element AB działa na element BC , będzie równa

$$f = \Delta p \cdot \Delta S = e \frac{\Delta s}{\Delta x} \cdot \Delta S. \quad (c)$$

Pod działaniem tej siły punkty materialne elementu BC po upływie Δt sek odchyłą się od swych położeń równowagi na odległość Δs równą tej, na jaką o Δt sek wcześniej odchyliły się punkty elementu AB . Wobec tego, że odległość środków masy tych elementów wynosi Δx , prędkość rozchodzenia się zaburzenia będzie równa $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Czas Δt możemy wyznaczyć ze związku między impulsem, działającym na element BC , i nabytą przezeń ilością ruchu, zakładając, że czas Δt jest dostatecznie krótki, abyśmy mogli uważać wartość siły f za stałą,

$$f \cdot \Delta t = \rho \cdot \Delta S \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (d)$$

gdzie ρ — gęstość środowiska, $\rho \cdot \Delta S \cdot \Delta x$ — masa danego elementu, $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nabyta przez punkty materialne elementu BC przeciętna prędkość ruchu. Podstawiając do (d) wartość siły ze wzoru (c), będziemy mieli

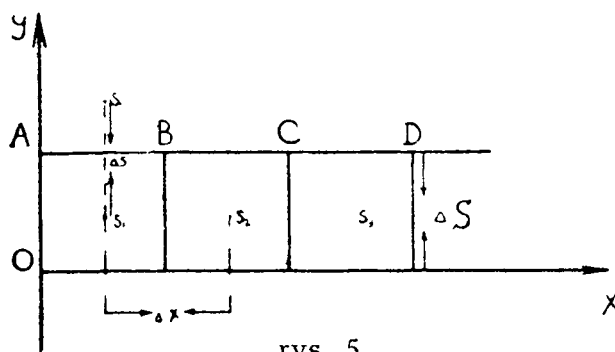
$$e \frac{\Delta s}{\Delta x} \cdot \Delta S \cdot \Delta t = \rho \cdot \Delta S \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

skąd
$$\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} = \frac{e}{\rho}$$

i ostatecznie
$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \sqrt{\frac{e}{\rho}}, \quad (2)$$

Z taką samą prędkością zaburzenia będą się rozchodziły w całej masie środowiska; zaburzenie bowiem będzie, w myśl założenia, dochodziło jednocześnie do wszystkich punktów warstwy płaskiej, prostopadłej do kierunku rozchodzenia się zaburzeń; prędkość więc c będzie miała tę samą wartość w walcu AD , co w jakimkolwiek innym do niego równoległym walcu FG .

W podobny sposób można wyznaczyć prędkość rozchodzenia się fal poprzecznych. Przyjmijmy, że, tak jak poprzednio, mamy do czynienia z falą płaską, rozchodzącą się w kierunku Ox i że AD jest wyodrębnionym z nieograniczonego środowiska walcem, rozbitym płaszczyznami prostopadłymi do Ox na dostatecznie małe elementy objętości $AB, BC \dots$ (rys. 5).



rys. 5

Środki mas tych elementów znajdujące się początkowo w tej samej odległości od osi Ox , przesuwać się będą na skutek doznanawanych odkształceń w kierunku do Ox prostopadłym. Niech w pewnej chwili, gdy środek masy ele-

mentu BC znajduje się jeszcze w położeniu równowagi, odchylenie środka masy elementu AB wyniesie $s_1, s'_1 = \Delta s$. Zakładając w dalszym ciągu, że odkształcenia są dostatecznie małe, możemy uważać napięcie, wzbudzone przez zmianę wzajemnego położenia elementów AB i BC , za równe $p = e_1 \cdot \frac{\Delta s}{\Delta x}$, gdzie e_1 oznacza współczynnik sprężystości danego odkształcenia; skąd na siłę, wywieraną na element BC , otrzymamy wartość

$$f = e_1 \cdot \frac{\Delta s}{\Delta x} \cdot \Delta S.$$

Jeżeli prędkość rozchodzenia się odkształceń równa jest c , to po upływie czasu $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$ na tę samą odległość Δs przesunie się w kierunku Oy środek masy s_2 elementu BC . Oznaczając przeciętną ilość ruchu, nabytą przez s_2 pod działaniem impulsu $f \cdot \Delta t$, przez $\rho \cdot \Delta S \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$ otrzymamy związek następujący:

$$f \cdot \Delta t = e_1 \frac{\Delta s}{\Delta x} \cdot \Delta t \cdot \Delta S = \rho \Delta S \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

i

$$\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} = \frac{e_1}{\rho},$$

skąd ostatecznie

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \sqrt{\frac{e_1}{\rho}}. \quad (2a)$$

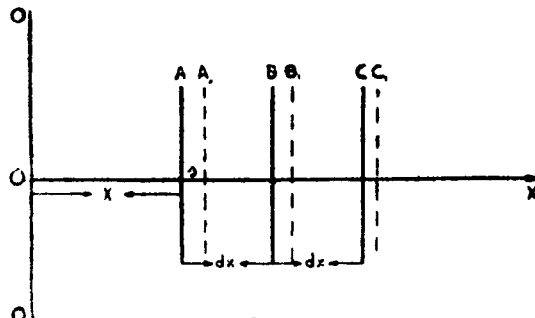
Otrzymane wzory (2) i (2a) możemy uogólnić na falę dowolnego kształtu a to z uwagi, że w dostatecznie wielkiej odległości od źródła część przynajmniej takiej fali możemy z wystarczającym przybliżeniem uważać za falę płaską i co za tym idzie stosować do niej wzór (2) lub (2a), i że, zgodnie z poczynionymi przez nas założeniami co do rodzaju odkształceń, prędkość rozchodzenia się zaburzeń ma we wszystkich punktach środowiska wartość jednakową.

Przyjmijmy tak, jak wyżej, kierunek rozchodzenia się w środowisku nieograniczonym podłużnej fali płaskiej za oś Ox i oznaczmy przez s odchylenie, jakiego w danej chwili doznaje elementarna warstwa o przekroju dS , znajdująca się w odległości x od źródła zaburzeń. W warstwie sąsiedniej B , odległej o $x+dx$ od płaszczyzny OO (rys. 6), odchylenie w tej samej chwili wynosić będzie

$$s + \frac{ds}{dx} \cdot dx; \text{ odległość zatem:}$$

dwu tych warstw, początkowo równa dx , na skutek zachodzącego odkształcenia stała się równa

$$dx + s - \frac{ds}{dx} dx - s - dx = \frac{ds}{dx} dx;$$



rys. 6

objętość elementu AB środowiska uległa więc zmianie o

$$dV = -dS \frac{ds}{dx} dx.$$

Odkształcenie objętościowe Θ otrzymamy ze wzoru

$$\Theta = \frac{dV}{V} = - \frac{dS \frac{ds}{dx} \cdot dx}{dS \cdot dx} = - \frac{ds}{dx}.$$

Odkształcenie więc ma wartość taką, jaką by miało, gdyby warstwa A pozostała w położeniu poprzednim, warstwa zaś B przesunęła się w kierunku odwrotnym do istotnego przesunięcia o $\frac{ds}{dx} dx$.

Zmiana ciśnienia, działającego na powierzchnię B elementu BC wyniesie, zgodnie z założeniem proporcjonalności między ciśnieniem i odkształceniem,

$$e \frac{\Delta V}{V} = -e\Theta = e \frac{ds}{dx},$$

gdzie e jest tak, jak wyżej, współczynnikiem sprężystości. Oznaczając przez p_0 wartość ciśnienia przed odkształceniem, otrzymamy na ciśnienie, działające w danej chwili na powierzchnię B elementu BC , wzór

$$p_1 = p_0 + e \frac{ds}{dx}. \quad (a)$$

Z drugiej strony odchylenie od położenia równowagi warstwy C , odległej od B o dx różnić się będzie od odchylenia warstwy B o

$$\frac{d}{dx} \left(s - \frac{ds}{dx} dx \right) dx = \left(\frac{ds}{dx} - \frac{d^2s}{dx^2} dx \right) dx;$$

ciśnienie zatem, działające na tę warstwę, będzie równe

$$p_2 = p_0 + e \frac{ds}{dx} - e \frac{d^2s}{dx^2} dx.$$

Wypadkowa zaś sił, działających na element BC , wyniesie

$$\begin{aligned} p \cdot dS &= p_1 dS - p_2 dS = p_0 dS + e \frac{ds}{dx} dS - p_0 dS - e \frac{ds}{dx} dS + \\ &+ e \frac{d^2s}{dx^2} dx \cdot dS = e \frac{d^2s}{dx^2} \cdot dx \cdot dS. \end{aligned}$$

Pod działaniem tej wypadkowej cząstki warstwy nabędą przyspieszeń, wobec czego będziemy mieli

$$p \cdot dS = e \frac{d^2 s}{dx^2} dx \cdot dS = \rho \cdot dS dx \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

i ostatecznie,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{e}{\rho} \cdot \frac{d^2 s}{dx^2} \quad (3)$$

Równanie (3), które, jak to można bez wielkiego trudu sprawdzić, obowiązuje również w przypadku odkształceń postaci, wyraża rozchodzenie się sprężystych fal płaskich. Równaniu temu czyni zadość następująca wartość s :

$$s = f(ct + x) + F(ct - x), \quad (4)$$

gdzie f i F są dowolnymi funkcjami, c zaś równe jest $\sqrt{\frac{e}{\rho}}$. Istotnie, biorąc pochodne s względem t przy stałym x , a następnie względem x przy stałym t , otrzymujemy, używając przyjętego znakowania dla tych tzw. pochodnych cząstkowych,

$$\frac{\partial s}{\partial t} = cf'(ct + x) + cF'(ct - x) \quad \text{ i } \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 f''(ct + x) + c^2 F''(ct - x)$$

oraz

$$\frac{\partial s}{\partial x} = f'(ct + x) - F'(ct - x) \quad \text{ i } \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = f''(ct + x) + F''(ct - x),$$

skąd po podstawieniu do równania (3) otrzymujemy tożsamość

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \{ f''(ct + x) + F''(ct - x) \} = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}.$$

W przypadku przez nas rozpatrywanym odkształcenia, rozchodzące się w kierunku dodatniej osi x -ów, a które dotychczas uważaliśmy za powstające dzięki przesunięciu się (w prawo lub w lewo) nieograniczonej płaszczyzny OO , możemy równie dobrze wyobrazić sobie, jako powstające w warstwach, leżących po stronie ujemnych x -ów i dochodzących w chwili $t = 0$ do warstwy OO , która przy takim ujęciu zagadnienia przestaje być dla nas źródłem zaburzeń (źródło to jest umieszczone tym razem w nieoznaczonej odległości) i służy jedynie do wyznaczenia chwili, od której zaczynamy liczyć czas. W tej właśnie chwili $t = 0$ we wszystkich warstwach, leżących od OO na prawo, a więc dla których x ma wartość dodatnią, wychylenie s jest równe zeru.

W tym szczególnym przypadku wzór (4) przybiera postać

$$s = F(ct - x). \quad (4a)$$

Istotnie przypuśćmy, że w chwili $t = 0$, odkształcenie było umiejscowione w warstwie o grubości x_0 , zawartej między płaszczyzną OO i płaszczyzną równoległą do niej i przecinającą oś Ox w punkcie $-x_0$; wszystkie zaś inne warstwy były w położeniu równowagi. Wtedy zarówno

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = cF'(-x), \quad (4b)$$

$$\text{jak i} \quad \Theta = \frac{\partial s}{\partial x} = F'(-x) \quad (4c)$$

mają wartość różną od zera jedynie dla wartości x zawartych między 0 i $-x_0$. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy $F'(ct-x)$ jest różne od zera jedynie dla wartości argumentu, zawartego w granicach

$$0 \geq ct - x \geq -x_0.$$

Po upływie zatem t sek temu warunkowi czynić będą zadość wartości x zawarte w granicach wyrażonych wzorami

$$ct - x' = 0; \quad x' = ct$$

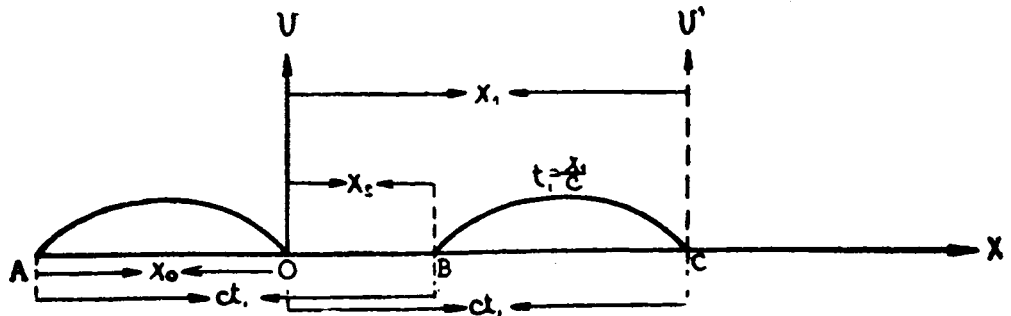
$$ct - x'' = -x_0; \quad x'' = ct + x_0.$$

Grubość zatem odkształcanej warstwy

$$x'' - x' = ct + x_0 - ct = x_0$$

pozostanie taka sama, jak poprzednio; warstwy skrajne, odgraniczające warstwy odkształcane od pozostałych części środowiska, przesuną

się w kierunku dodatnim x -ów o ct , c zatem, równe $\sqrt{\frac{e}{\rho}}$, jest prędkością rozchodzenia się zaburzeń. Niech krzywa AO (rys. 7) odtwarza



rys. 7

zależność prędkości cząstek od położenia w odkształcanej warstwie w chwili $t = 0$, krzywa zaś BC w chwili $t_1 = \frac{x_1}{c}$. Równanie krzywej AO ma, jak wiemy postać

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = cF'(-x), \quad (a)$$

równanie zaś krzywej BC

$$v = c F' (ct_1 - x). \quad (b)$$

Przenieśmy początek współrzędnych do punktu C ; nowe współrzędne x' będą związane z poprzednim i wzorem

$$x = x' + x_1 = x' + ct_1,$$

Wobec czego zamiast równania (b) możemy napisać

$$v = c F' (ct_1 - x' - ct_1) = c F' (-x'),$$

otrzymując tę samą co poprzednio zależność v od odległości, w jakiej dana cząstka materialna znajduje się od warstwy, odgraniczającej odkształcaną część środowiska.

Podobnie stwierdzimy, że zmiany, jakim ulega v w czasie T , w ciągu którego odkształcenie przechodzi przez daną warstwę, będą również w obu warstwach identyczne. Niech prędkości cząstek danej warstwy, równe zeru w chwili $t = 0$, w ciągu czasu T ulegają zmianom przedstawionym krzywą OA . Równanie tej krzywej otrzymamy, podstawiając do wzoru (4a) współrzędną danej warstwy $x = 0$ i wyznaczając $\frac{\partial s}{\partial t}$,

$$v = c F' (ct). \quad (c)$$

Po upływie $t = \frac{x_1}{c}$ sek zaburzenie dojdzie do warstwy, odległej o $x_1 = ct$ od warstwy rozpatrywanej uprzednio. Równanie krzywej BC będzie w tej warstwie miało postać

$$v = c F' (ct - x_1). \quad (d)$$

Przenieśmy początek współrzędnych do punktu C , odległego o $t = \frac{x_1}{c}$ od O . Związek między nowymi współrzędnymi t' i dawnymi t wyraża wzór

$$t = t' + \frac{x_1}{c},$$

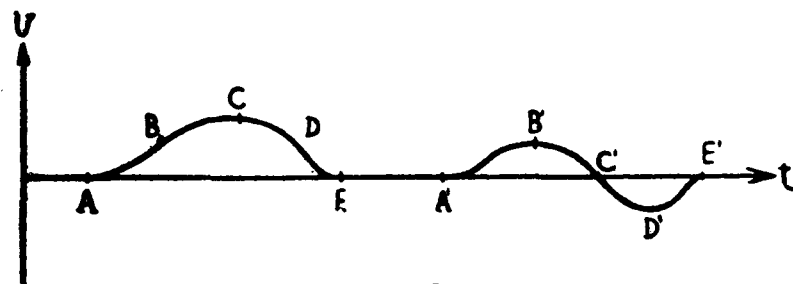
skąd po podstawieniu do równania (d) otrzymujemy

$$v = c F' (ct' + x_1 - x_1) = c F' (ct'),$$

taką samą więc zależność prędkości v od chwili nadejścia zaburzenia, jak w warstwie początkowej.

W falach kulistych będziemy mogli również przyjąć, że granice zaburzenia, wyznaczające warstwę odkształcenia, przesuwają się ze stałą prędkością, tak że grubość warstwy, podlegającej w danej chwili

odkształceniu, będzie miała zawsze wartość tę samą, rozmieszczenie jednak zaburzeń wewnątrz warstwy lub innymi słowy kształt krzywej, wyrażającej zależność odkształcenia od odległości danego punktu od granic warstwy, ulegać może na ogół daleko idącym zmianom. Nigdy jednak nie ulegnie zmianie znak odkształcenia — zgęszczenie pozostanie zawsze zgęszczeniem, rozrzedzenie — rozrzedzeniem, za to znak prędkości może się zmieniać: tak na przykład niech zaburzenie będzie tego rodzaju, że w pobliżu źródła cząstka odchyła się od położenia równowagi z prędkością coraz bardziej wzrastającą (rys. 8),



rys. 8

następnie malejącą i wreszcie stającą się równą zero, wtedy cząstka znajdująca się znacznie dalej będzie poruszała się i w przeciwnym kierunku, przybliżając się w pewnych chwilach do źródła zaburzeń i wykonując pewnego rodzaju wahania. Czas jednak zużyty na przejście przez wszystkie możliwe wartości prędkości będzie w obu warstwach ten sam; $AE = A'E'$.

Wyprowadzone wyżej wzory (2) i (2a) stosują się również do prędkości rozchodzenia się głosu, źródłem bowiem odczuwanych przez nas wrażeń głosowych są zaburzenia sprężyste dochodzące do naszych narządów słuchu. Zaburzenia te jednak muszą wtedy czynić zadość pewnym dodatkowym warunkom. W przypadku zaburzeń nieokresowych warunki te sprowadzają się do tego, aby energia fali zaburzenia była większa od pewnej wartości, którą nazywamy progiem słyszenia, w przypadku zaś zaburzeń okresowych dochodzi jeszcze jeden warunek, aby częstość zmian zawarta była w pewnych granicach (mniej więcej od 20 do 20000 drgań na sekundę). Doznawane przez nas wrażenia nazywamy w pierwszym przypadku hałasem, trzaskiem, szmerem, w drugim dźwiękiem (por. ust. 7). (Według Rzewkina i Masłowa (1928 r.) górna granica słyszenia wynosi dla dzieci 19700 drgań na sekundę, dla osób starszych 17100 drgań na sekundę). Jest rzeczą oczywistą, że

stosowanie wzorów (2) i (2a) do zaburzeń głosowych jest podane tym samym ograniczeniom, jakim poddaliśmy wyżej udowodnienie tych wzorów.

3. — POMIAR PRĘDKOŚCI ROZCHODZENIA SIĘ ZABURZEŃ SPRĘŻYSTYCH W ŚRODOWISKU NIEOGRANICZONYM.

Przy pomiarach prędkości rozchodzenia się zaburzeń warunek nieograniczoności danego środowiska nie jest, ściśle biorąc, nigdy spełniony. Nawet wtedy, gdy badane zaburzenie rozchodzi się w otaczającej nas atmosferze lub w wielkich masach wody oceanicznej, ukształtowanie powierzchni ziemi czy też dna oceanu wpływa, niewątpliwie, na przebieg zjawiska. W tych jednak przypadkach wprowadzenie do rachunku odpowiednich poprawek albo wykonanie pomiaru w warunkach, które by wpływ powierzchni ograniczających środowisko możliwie zmniejszały, jest rzeczą stosunkowo łatwą, tak, że wyniki tych pomiarów uważamy zazwyczaj za odpowiadające warunkowi nieograniczoności środowiska.

Przy obliczaniu prędkości rozchodzenia się zaburzeń ze wzoru (2) lub (2a) musimy wziąć pod uwagę, że odkształcenia, z jakimi mamy w tym przypadku do czynienia, zachodzą na ogół bardzo szybko, bez wymiany ciepła z otoczeniem, przemiany zatem, zachodzące w środowisku, są przemianami adiabatycznymi. Gdy badanym środowiskiem jest gaz doskonały, współczynnik e wzoru (2) równy jest, jak to bezpośrednio wynika z zestawienia wzoru (a) ust. 2 i wzoru (9d) str. 363 tomu I, kp , gdzie k oznacza stosunek c_p do c_v . Mamy zatem

$$c = \sqrt{\frac{kp}{\rho}}. \quad (5)$$

Jest to tak zwany wzór Laplace'a (1816 r.), o którym była już mowa poprzednio (t. I, str. 370).

Oznaczając przez ρ_0 gęstość gazu pod tym samym ciśnieniem p w temperaturze 0°C , na prędkość rozchodzenia się głosu w gazie o temperaturze $t^\circ \text{C}$ otrzymujemy wzór

$$c_t = \sqrt{\frac{kp(1+\alpha t)}{\rho_0}} = c_0 \cdot \sqrt{1+\alpha t}. \quad (5a)$$

Oznaczmy przez $e_t = \frac{1}{\gamma_t}$ współczynnik sprężystości objętościowej przy zgęszczaniu izotermicznym, a więc takim, jakie było rozpatrywane w tomie I-ym na str. 206 i 257, przez $e_Q = \frac{1}{\gamma_Q}$ przy zgęszczaniu adiabatycznym.

Wzór (2) możemy przepisać w postaci

$$c = \sqrt{\frac{e_Q}{\rho}},$$

lub oznaczając $\frac{e_Q}{e_t} = b$

$$c = \sqrt{\frac{b e_t}{\rho}},$$

Reech udowodnił, że $b = \frac{c_p}{c_v} = k$, gdzie c_p oznacza ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem, c_v — w stałej objętości; mamy zatem, wprowadzając $\gamma_t = \frac{1}{e_t}$,

$$c = \sqrt{\frac{k}{\gamma_t \cdot \rho}}. \quad (5b)$$

Dla gazów doskonałych $\gamma_t = \frac{1}{p}$ (por. tom I, str. 267); podstawiając tę wartość, otrzymujemy wzór Laplace'a.

Dla powietrza, o temperaturze 0°C , pod ciśnieniem I Atm, które w tych warunkach możemy z dużym przybliżeniem uważać za gaz doskonały, otrzymujemy po podstawieniu $p = 1013260 \text{ dyn/cm}^2$, $k = 1,4$; $\rho = 0,001293 \text{ g/cm}^3$, na prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych

$$c_0 = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 1013260}{0,001293}} = 331,3 \text{ m/sek.} \quad (5c)$$

Wzory (5) i (5a) były wielokrotnie sprawdzane doświadczalnie. Bardzo prostą metodę, używaną zazwyczaj przy pomiarach w otwartej przestrzeni, można ująć w następujący schemat. Niech źródło zaburzeń znajduje się w punkcie O_1 , obserwator zaś w O_2 . Mierzac czas, jaki upłynął od chwili t_0 wywołania za-

burzeń w O_1 (na skutek wybuchu lub wystrzału) do chwili t_1 , w której zaburzenie doszło do obserwatora w O_2 , i znając odległość $O_1O_2 = l$, prędkość c znajdujemy ze wzoru

$$c = \frac{l}{t_1 - t_0} = \frac{l}{t}. \quad (a)$$

Dla wyrugowania wpływu, jaki mógłby wywrzeć ruch powietrza na prędkość rozchodzenia się zaburzeń, sygnały wysyła się jednocześnie z punktów O_1 i O_2 i za t we wzorze (a) bierze się średnią arytmetyczną czasu t' , zużytego przez fale na przebycie drogi O_1O_2 , i czasu t'' , w ciągu którego zaburzenie z O_2 przechodzi do O_1 .

Gdy prędkość wiatru w jest znacznie mniejsza od prędkości głosu c , prędkości rozchodzenia się zaburzeń w kierunku O_1O_2 i O_2O_1 możemy w prosty sposób wyznaczyć, zakładając, że prędkość mierzona jest sumą geometryczną prędkości w i c . W kierunku O_1O_2 prędkość c_1 wyrazi się wzorem

$$c_1 = c + w \cos \alpha, \quad (b)$$

gdzie α kąt, jaki kierunek wiatru tworzy z kierunkiem O_1O_2 (rys. 9); prędkość zaś w kierunku przeciwnym

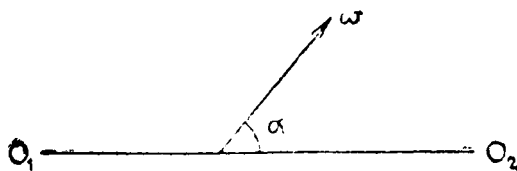
$$c_2 = c - w \cos \alpha, \quad (b)$$

stąd mamy

$$t' = \frac{l}{c_1} = \frac{l}{c + w \cos \alpha} \quad \text{i} \quad t'' = \frac{l}{c_2} = \frac{l}{c - w \cos \alpha}$$

$$\frac{t' + t''}{2} = \frac{lc - lw \cos \alpha + lc + lw \cos \alpha}{2(c^2 - w^2 \cos^2 \alpha)} \cdot \frac{l}{c} = t$$

Ten prosty rachunek nie wystarcza, gdy prędkość wiatru nie ma wartości stałej; w najprostszym jednak stosunkowo przypadku, gdy prędkość zmienia się z wysokością i gradient jej ma wartość stałą, można, jak to wykazali Angerer i R. Ladenburg (1921 r.), stosując wzory bardziej złożone, otrzymać wyniki zgodne z danymi pomiaru.



rys. 9

Prędkość nie ma jednak, jak to pierwszy stwierdził Rinck (1872 r.), nawet w przypadku całkowicie nieruchomego środowiska, na całej długości drogi O_1O_2 wartości niezmienniej. W pobliżu źródła zaburzeń prędkość ma wartość o wiele nie-raz większą od wyznaczonej przez wzory (5) i (5a); dopiero w pewnej odległości od źródła, tym większej, im silniejsze było zaburzenie, można uważać stosowanie tych wzorów za usprawiedliwione. Pomiar zatem należy wykonywać nie między dwoma źródłami zaburzeń O_1 i O_2 , lecz między punktami O'_1 i O'_2 , leżącymi w takiej od nich odległości, w jakiej zabu-
rzenia środowiska czynią zadość warunkom, przyjętym przy wyprowadzaniu wzoru (4).

We wspomnianych wyżej doświadczeniach Angerera i Laden-burga, gdzie zaburzenie było wywoływane przez wybuch 200 kg ciała eksplodującego, prędkość rozchodzenia się w bezpośrednim sąsiedztwie miejsca wybuchu przekraczała wielokroć wartość normalną; prędkość ta w miarę oddalania się od źródła zaburzeń szybko malała, tak że mniej więcej w odległości 200 m przybierała wartość stałą. Do podob-nych wniosków doszedł Reid (1930 r.) mierząc prędkość rozchodzenia się zaburzeń okresowych o częstości bardzo wielkiej, przekraczającej znacznie granice słyszenia.

Jeżeli jednak droga O_1O_2 jest dostatecznie długa, błąd, spo-wodowany przez nieuwzględnienie zmienności c , jest procento-wo niewielki. Tym się tłumaczy zadziwiająco zgodny z teore-tyczną wartością c (wzór 5b) wynik, otrzymany w słynnym doświadczeniu, wykonanym w 1822 r. pod Paryżem przez Ara-go, Bouvarda, Humboldta, Gay-Lussac'a, Mathieu i Prony'ego, którzy znaleźli na c w powietrzu o temperaturze 0^0 C wartość 331,5 m/sek.

Odległość między punktami obserwacyjnymi wynosiła $l = 18622,27$ m. Czas, zużyty przez zaburzenie na przebycie tej drogi, wynosił przeciętnie: w jedną stronę 54,84 sek, w drugą 54,43 sek, stąd średnia arytmetyczna $t = 54,63$ sek. Prędkość głosu była zatem równa

$$c = \frac{l}{t} = \frac{18622,27}{54,63} = 340,87 \text{ m. sek.}$$

Temperatura powietrza w czasie pomiaru wynosiła 16^0 C. Wobec tego

$$c_0 = \frac{c}{\sqrt{1 + \alpha t^0}} = \frac{340,87}{\sqrt{1 + 0,00366 \cdot 16}} = 331,5 \text{ m. sek.}$$

Według Angerera i Ladenburga, którzy poddali pomiar ten krytycznemu rozbiorowi, otrzymana na podstawie tych danych prędkość jest nieco mniejsza, równa 330,5 m/sek.

W doświadczeniu tym we wzorze (a) za czas t przyjmowano czas, jaki upłynął od chwili zobaczenia przez obserwatora, umieszczonego w końcowym pukcie drogi, błysku, towarzyszącego wybuchowi, do chwili, w której do niego doszedł huk wybuchu. Ten sposób pomiaru czasu nie pozwala jednak osiągnąć dokładności większej od 0,1 sek. Jedynie więc w przypadkach takich stosunkowo długich przeciągów czasu, jak w danym doświadczeniu, można na tego rodzaju pomiarze poprzestać.

Regnault wskazał (1868 r.), że można osiągnąć znacznie większą dokładność (dochodzącą ostatnio do 0,001 sek), używając przyrządów, które automatycznie notują czas wybuchu i czas dojścia fali odkształcenia do obserwatora.

Regnault posługiwał się następującym urządzeniem. Trzy obok siebie znajdujące się ostrza dotykały powierzchni zaczernionego walca, obracającego się ze znaną prędkością ruchem jednostajnym. Jedno z tych ostrzy A było przymocowane do jarzma elektromagnesu, drugie — połączone z kamertonem o znanej częstotliwości drgań, trzecie — z wahadłem sekundowym. Wystrzał lub wybuch przerywał obwód prądu, wzbudzającego elektromagnes, wobec czego ostrze A przestawało dotykać walca, tak że linia kreślona przez to ostrze na walcu nagle w chwili wybuchu się urywała; gdy zaburzenie dochodziło do punktu końcowego drogi, działało na płytkę sprężystą, która, wyginając się, zamykała z powrotem obwód i wprowadzała znów ostrze A w zetknięcie z powierzchnią walca. Czas, w którego ciągu ostrze A nie dotykało walca, mógł być bez trudu wyznaczony z obliczenia ilości kresek, jakie na walcu nakreśliło ostrze, połączone z wahadłem, oraz fal, nakreślonych przez drgający kamerton. We wspomnianych wyżej pomiarach Angerera i Ladenburga światło, odbite od lusterka galwanometru, padało na nawiniętą na obracającym się jednostajnym ruchem walcu błonę fotograficzną, kreśląc na niej, przy stałym odchyleniu galwanometru, linię prostą; na błonę padało również światło od zwierciadła umieszczonego na jednej z gałęzi drgającego kamertonu, kreśląc na błonie linię sinusoidalną. W obwód galwanometru były włączone dwa mikrofony (p. ust. 4), umieszczone w początkowym i końcowym punkcie mierzonego odcinka, mającego długość mniej więcej 1000 m; fale zaburzenia, padając kolejno na te mikrofony, powodowały gwałtowne wychylenia galwanometru, czas zaś, jaki upłynął między tymi dwoma wychyleniami, wyznaczano z ilości drgań, które kamerton wykonał w ciągu tego czasu.

Od opisanej wyżej metody tzw. sygnałowej różni się nieco metoda, opracowana (1854 r.) przez Bosscha. Wyobraźmy sobie dwa zasilane tym samym prądem dzwonki elektryczne, które są jednocześnie uderzane przez młotki dziesięć np. razy na sekundę. Początkowo dzwonki znajdują się w tej samej odległości od obserwatora, tak że słyszy on jednocześnie uderzenia obu młotków; stopniowo jednak jeden z dzwonków odsuwany jest na coraz to większą odległość, wobec czego dźwięk jego dochodzi do obserwatora później, niż dźwięk dzwonka nieruchomego. Dopiero, gdy opóźnienie wyniesie, jak w naszym przykładzie $\frac{1}{10}$ sek, odległość zatem dzwonków $d = 0,1c$, słyszy on znowu obydwie uderzenia jednocześnie; podobna zgodność uderzeń powtarza się przy różnicy odległości 0,2c, 0,3c itd. Mierząc zatem odległości d , można wyznaczyć c . W ten właśnie sposób wielkość tę wyznaczył (1877 r.) Szatmari, otrzymując, jako przeciętną, z bardzo jednak nieraz różniących się pomiarów, $c = 331, 57$ m/sek.

Częściej jednak mierzy się prędkość rozchodzenia się nie w otwartej przestrzeni, lecz w rurze, zawierającej badany gaz. Ta metoda, zapoczątkowana przez Regnaulta (1866 r.), pozwala wykonywać pomiary w różnych gazach, nie tylko w powietrzu, w różnych temperaturach i pod różnymi ciśnieniami, nie czyni jednak zadość podstawowemu warunkowi — nieograniczoności środowiska. Zgęszczeniom i rozrzedzeniom, które w środowisku gazowym nieograniczonym, o przewodnictwie niewielkim, można było uważać za adiabatyczne, w elementach objętości gazu, stykających się bezpośrednio ze ścianami rury, towarzyszy niewątpliwie dość szybkie wyrównywanie temperatury, co powoduje zmniejszanie się współczynnika k we wzorze (5) (por. tom I, str. 364), a więc i zmniejszenie prędkości c . Do tego dochodzi jeszcze większy, niż w środowisku nieograniczonym, wpływ tarcia wewnętrznego, który również powoduje zmniejszanie się wartości c . Zakłóceń tych można uniknąć, biorąc rury dostatecznie szerokie — według Regnaulta wystarczy używać rur o średnicy 1,1 m — lub wprowadzając do wyników odpowiednie poprawki.

Uwzględniając jedynie wpływ tarcia wewnętrznego, Helmholtz (1863 r.) dał na prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w gazie, znajdującym się w rurze o promieniu r , wzór następujący

$$c_r = c_\infty \left(1 - \frac{\eta}{2r \sqrt{\pi \nu}} \right), \quad (5c)$$

gdzie c_∞ oznacza prędkość w nieograniczonym środowisku, η — współczynnik tarcia wewnętrznego gazów, ν — częstość drgań danego zaburzenia. Biorąc pod uwagę również wymianę ciepła ze ścianami rury, Kirchhoff zastąpił we wzorze tym współczynnik η dość złożoną funkcją γ tarcia wewnętrznego, gęstości gazu, jego ciepła właściwego i wreszcie przewodnictwa cieplnego. Kładąc $\gamma = 0,65$ dla powietrza w temperaturze 0°C , otrzymamy wzór Helmholtza — Kirchhoffa w postaci

$$c_r = c_\infty \left(1 - \frac{0,65}{2r \sqrt{\pi \nu}} \right). \quad (5d)$$

Wzór ten niewątpliwie nie jest dokładny i czyni zadość danym doświadczenia jedynie w pewnych granicach temperatur. Według Bussa (1930 r.) i Rechela (1931 r.) może on być używany przy pomiarach w temperaturach bliskich 0°C ; według Kaye'a i Sherrata (1933 r.) można go stosować również w granicach od 18°C do 100°C . W temperaturach jednak wyższych, gdy zależność γ od temperatury wyraża się wzorem, jaki rozwijając teorię Kirchhoffa wyprowadzili Cornish i Eastman (1929 r.), rozbieżności przekraczają granice błędu doświadczenia. Vance (1932 r.) z pomiarów prędkości drgań o wielkiej częstości wyprowadził wniosek, że wystarczy uzupełnić wzór Kirchhoffa dodatkowym wyrazem $\frac{k}{2r \sqrt{\nu}}$, gdzie $k = 0,174$, aby otrzymać wystarczającą zgodność z doświadczeniem w szerokich granicach częstości drgań. W rurach o małym promieniu, rzędu I mm, odgrywa również rolę, jak to wykazał Schulze (1904 r.), i materiał, z którego rura jest zrobiona.

Zestawiając otrzymane przez różnych badaczy wyniki (przy uwzględnieniu jednak tylko najważniejszych pomiarów, wykonanych w 19 i 20 stuleciu), otrzymujemy na przeciętną prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w suchym powietrzu o temperaturze 0°C pod ciśnieniem jednej atmosfery wartość

$$331,45 \text{ m/sek}, \quad (6)$$

bardzo mało różniącą się od teoretycznej.

Dla innych gazów odstępstwa od wartości teoretycznej, wyznaczone w warunkach, w których gaz można było uważać za doskonały, są na ogół nieco większe. Tak np. dla tlenu o temperaturze 0°C powinno być według wzoru Laplace'a $c = 314,8\text{ m/sek}$, Dulong zaś, mierząc prędkość rozchodzenia się w rurze napełnionej tlenem, otrzymał (1829 r.) $c = 317,2$.

Według Kaye'a i Sherrata (1933 r.) w temperaturze 18°C c w wodorze wynosi 1301 m/sek , w bezwodniku węgla — $265,8\text{ m/sek}$.

Założenie o niezależności c od częstości drgań znalazło częściowo przynajmniej — dla większych częstości — potwierdzenie w doświadczeniu.

Pierce w pomiarach, obejmujących bardzo obszerny zakres częstości od 1000 do 1 500 000 drgań na sekundę, stwierdził (1925 r.), że w tych granicach prędkość c w powietrzu zmienia się nie więcej, niż o 0,3%. Przy częstościach drgań, powyżej 100 000 drgań na sekundę, wielokrotnie przewyższających granice słyszenia, stąd często nazywanych ultradźwiękami, zmiana c wyraża się wartościami, wynoszącymi co najwyżej 0,04%.

Według Pielemeira (1930 r.), w tlenie o temperaturze 20°C prędkość rozchodzenia się drgań o częstości 1215000 drgań na sekundę wynosi $317,1\text{ m/sek}$, o częstości 655000 drgań na sekundę — $317,4\text{ m/sek}$, różniąc się zatem przy podwojeniu częstości, nie więcej, niż o 0,1%. Do tych samych wniosków prowadzą pomiary Pan Tcheng Kao, który na prędkość fal ultradźwięków w powietrzu otrzymał (1931 r.) wartość $331,85\text{ m/sek}$, a więc w granicach błędu doświadczenia równą przeciętnej wartości otrzymanej dla fal głosowych. Według Roy'a i Rose'go, którzy mierzyli (1935 r.) prędkość c w wodorze, prędkość ta jest niezależna od częstości drgań przynajmniej do częstości rzędu 1 000 000 drgań na sekundę.

Tak jednak jest tylko w przypadkach rozchodzenia się drgań w środowiskach nieograniczonych lub w rurach o średnicy znacznej w porównaniu z długością fali; w rurach o średnicy niewielkiej prędkość jest na ogół funkcją częstości. Tak np. w powietrzu, znajdującym się w rurze szklanej o średnicy $0,935\text{ cm}$, prędkość przy częstości drgań 256 na sek wynosi $320,6\text{ m/sek}$, przy częstości 512 drgań na sek — $323,6\text{ m/sek}$, przy częstości 1023 drgań na sek — 325 m/sek (Low, 1894 r.).

Zależność prędkości c od temperatury, wyrażona wzorem (5a), sprawdza się, rzecz prosta, w tych tylko granicach, w jakich środowisko możemy uważać za gaz doskonały. Pod ciśnieniem 1 Atm w temperaturach bliskich 0°C otrzymujemy, przyjmując $\alpha = 0,00366$, z przybliżonego wzoru

$$c = c_0 \sqrt{1 + \alpha t} \doteq c_0 \left(1 + \frac{1}{2} \alpha t\right)$$

na wzrost Δc prędkości przy wzroście temperatury o 1°C

$$\Delta c = 0,00183 c_0; \quad (7)$$

dla powietrza zatem

$$\Delta c = 0,00183 \cdot 331,3 = 0,61 \frac{\text{m}}{\text{sek stop}}$$

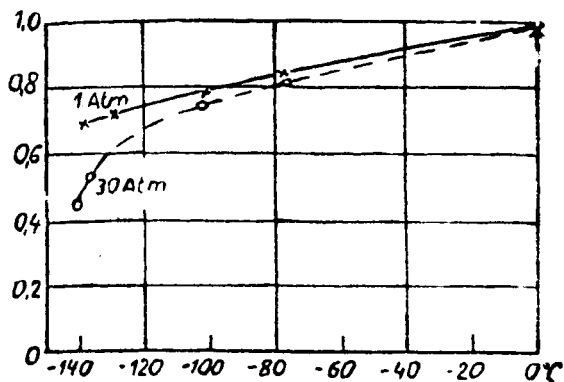
Z pomiarów c , wykonanych przez Witkowskiego (1899 r.), Stevensa (1902 r.) i następnie przez Schillinga i Partingtona (1928 r.), wynika, że zmiana c jest większa w temperaturach niskich, mniejsza w wysokich. Tak na przykład w temperaturach między -140°C i $-103,5^{\circ}\text{C}$ zmiana prędkości w powietrzu, odniesiona do 1°C przyrostu temperatury, wynosi, według Witkowskiego, około $0,93 \text{ m/sekstop}$, w temperaturach zaś powyżej 1100°C równa jest, według Shillinga i Partingtona, mniej więcej $0,24 \text{ m/sekstop}$.

Zestawiając pomiary Witkowskiego oraz Shillinga i Partingtona otrzymujemy dla powietrza pod ciśnieniem 1 Atm

temperatura:	-181°C	140°C	$-103,5^{\circ}\text{C}$	35°C	10°C	0°C
prędkość w m/sek	185	226	260	300	325,1	331,3
temperatura:	100°C	300°C	500°C	700°C	900°C	1100°C
prędkość w m/sek	387,2	478,9	551,1	612,5	680,8	734,4
temperatura:	1300°C					
prędkość w m/sek	783,2					

Od tych danych niewiele odbiegają wyniki pomiarów Dixona, Campbella i Parkera (1921 r.), którzy znaleźli na c w powietrzu o temperaturze 0°C $331,8 \text{ m/sek}$, o temperaturze zaś 700°C — $621,6 \text{ m/sek}$. Himsted i Widder (1921 r.) otrzymali na wartość stosunku prędkości głosu w powietrzu o temperaturze $-78,73^{\circ}\text{C}$ i o temperaturze -20°C wartość — $0,8147$, podczas gdy ze wzoru Laplace'a otrzymuje się $0,8142$.

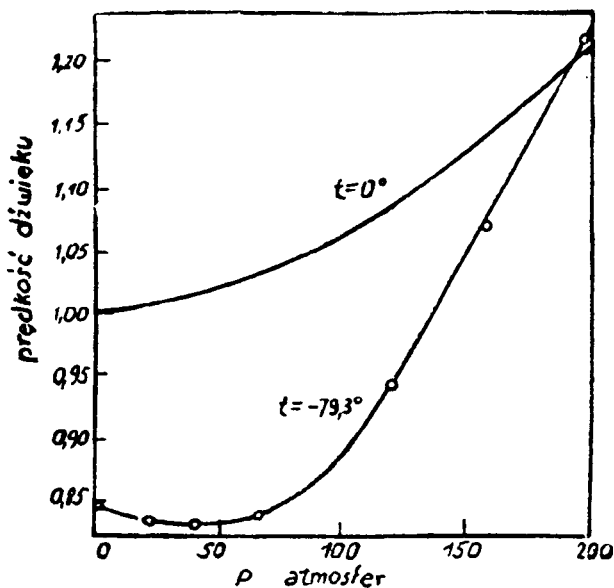
W niższych temperaturach zależność od ciśnienia jest wyraźniejsza (rys. 10). Przy wzroście ciśnienia prędkość w danej temperaturze, jak to zdaje się wynikać z pomiarów Witkowskiego (1899 r.) i Kocha (1908 r.), początkowo maleje, a następnie wzrasta (rys. 11). Temu minimum prędkości odpowiadają w różnych temperaturach różne ciśnienia.



rys. 10

W przypadku środowiska ciekłego wzór (2) przybierze postać następującą:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\gamma \rho}}, \quad (8)$$



rys. 11

gdzie γ jest współczynnikiem ściśliwości danej cieczy (por. tom I, str. 206). Po podstawieniu

$$\gamma = \frac{0,0000481}{1013260} \text{ cm}^2/\text{dyn}$$

$$\text{ i } \rho = 0,9982303 \text{ g/cm}^3$$

mamy dla wody chemicznie czystej w temperaturze 20°

$$c = 1452 \text{ m/sek.}$$

I w tym przypadku współczynnik γ wzoru (8) nie jest tym współczynnikiem ściśliwości, o którym była mowa w tomie I na str. 243, lecz współczynnikiem ściśliwości adiabatycznej. Dla wody w temperaturach bliskich 0° C różnice tych dwu współczynników można bez znacniejszego błędu pominąć, dla innych jednak cieczy przy obliczaniu c ze wzoru (8) należy wprowadzić odpowiednią poprawkę (por. wzór 5b).

Z pomiarów, w których był uwzględniony zasadniczy warunek nieograniczoności środowiska, należy wymienić przede wszystkim pomiar Sturma i Colladona (1827 r.), którzy mierzyli prędkość rozchodzenia się głosu dzwonu w wodzie jeziora Genewskiego. Na prędkość c w temperaturze $8,1^{\circ}\text{C}$ otrzymali oni wartość 1435 m/sek . Marti (1919 r.), wykonując pomiary na otwartym morzu, otrzymał $c = 1503,5\text{ m/sek}$ dla wody o gęstości $1,0245\text{ g/cm}^3$ i temperaturze $14,5^{\circ}\text{C}$.

Podobnie jednak jak w przypadku gazów i z tych samych powodów, zazwyczaj c wyznacza się z pomiarów w cieczy, zawartej w rurze, lub też przy użyciu metod pośrednich. Sądząc z danych, otrzymanych przez Boyle'a R. W. i Taylora G. B. (1927 r.), prędkość rozchodzenia się drgań w środowisku ciekłym nie zależy, przynajmniej w pewnych granicach, od częstości drgań.

Badacze ci otrzymali przy częstości, zmienianej w granicach od 40 000 do 600 000 drgań na sekundę, w wodzie o temperaturze $18,5^{\circ}\text{C}$ c równe 1480 m/sek . Wartość ta niewiele się różni od otrzymanej przez Dörsinga (1908 r.) dla wody destylowanej o temperaturze 19°C wartości 1461 m/sek , jak również od wyniku Sturma i Colladona, gdy przyjmiemy za Woodem (1923 r.), że ze wzrostem temperatury o 1°C (w granicach od 6° do 17°C) prędkość wzrasta o $3,3\text{ m/sek}$, lub za Stephensonem (1923 r.), że wzrost ten (w granicach od 0° do 20°C) wynosi $2,8\text{ m/sek}$.

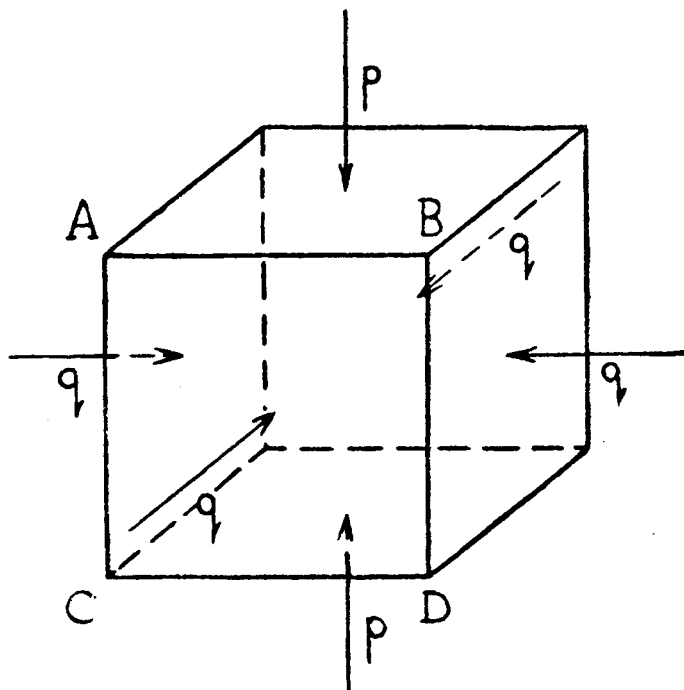
Bardzo zbliżoną wartość c równą $1484,2$ otrzymali Hubbard i Loomis (1928 r.) dla częstości 500 000 drgań na sekundę.

W oleju rycynowym c równe jest 1430 m/sek (Boyle i Taylor), w rtęci 1451 m/sek (Hubbard i Loomis).

Przy pomiarach w środowisku stałym warunek nieograniczoności środowiska nigdy na ogół nie jest spełniony: najczęściej mierzy się prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych w sztabach z badanego materiału. Gdy fala zaburzenia jest falą podłużną, wtedy współczynnikiem sprężystości e we wzorze (2) jest moduł Younga (współczynnik sprężystości przy wydłużaniu, por. tom I, str. 201), tak że na prędkość c otrzymujemy wzór

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (9)$$

W ten sposób wyznaczona wartość c nie jest jednak bynajmniej równa prędkości c_0 w środowisku nieograniczonym. Istotnie, w środowisku nieograniczonym nie może pod działaniem ciśnień odkształcających zachodzić tak, jak w sztabie, zmiana wymiarów, prostopadłych do kierunku działającego ciśnienia (por. tom I, str. 203); elementy bowiem są przeciwdziałają tej zmianie, działając na element odkształcany ciśnieniem bocznym q . Oznaczmy długość boku AB (rys. 12), prostopadłego do kierunku działania ciśnienia odkształcającego przez l_0 , zmianę zaś jej przez Δl_0 . Z warunku niezmienności wymiarów poprzecznych



rys. 12

środowisku nieograniczonym nie może pod działaniem ciśnień odkształcających zachodzić tak, jak w sztabie, zmiana wymiarów, prostopadłych do kierunku działającego ciśnienia (por. tom I, str. 203); elementy bowiem są przeciwdziałają tej zmianie, działając na element odkształcany ciśnieniem bocznym q . Oznaczmy długość boku AB (rys. 12), prostopadłego do kierunku

działania ciśnienia odkształcającego przez l_0 , zmianę zaś jej przez Δl_0 . Z warunku niezmienności wymiarów poprzecznych

$$-\Delta l_0 = \frac{l_0}{E} (-q + \sigma q + \sigma p) = 0$$

otrzymujemy $(1 - \sigma) q = \sigma p$,

$$\frac{q}{p} = \frac{\sigma}{1 - \sigma} \quad \text{i} \quad q = \frac{\sigma}{1 - \sigma} p. \quad (9a)$$

Zmiana zaś długości boku AC , równoległego do kierunku działania ciśnienia,

$$-\Delta l_0 = \frac{l_0}{E} (-p + \sigma q + \sigma q).$$

Otrzymujemy zatem na skrócenie w kierunku działającego ciśnienia

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta l_0}{l_0} &= -\frac{1}{E} p + \frac{1}{E} 2\sigma q = -\frac{p}{E} \left(1 - \frac{2\sigma^2}{1 - \sigma} \right) = \\ &= -\frac{p}{E} \frac{1 - \sigma - 2\sigma^2}{1 - \sigma} = -\frac{p}{E} \frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{1 - \sigma}. \end{aligned}$$

Związek więc między ciśnieniem i odkształceniem wyrazi się wzorem

$$p = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\Delta l_0}{l_0} = E' \cdot \frac{\Delta l_0}{l_0} \quad (9b)$$

Tę więc wartość E' współczynnika sprężystości należałoby podstawić do wzoru (9) zamiast E , aby otrzymać prędkość c . Zazwyczaj jednak poprawki tej się nie uwzględnia i w tablicach najczęściej podawana jest wartość c . W cieczy $q = p$, σ zatem równa jest 0,5.

Na prędkość rozchodzenia się fal poprzecznych otrzymujemy wzór

$$c_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\sigma)\rho}} \quad (10)$$

gdzie μ jest współczynnikiem sztywności (por. tom I, str. 210).

4. — ENERGIA PRZENOSZONA PRZEZ FALE ODKSZTAŁCENIA.

Falom odkształceń, rozchodzącym się w danym środowisku, towarzyszą, jak o tym była wyżej mowa (ust. 1), zmiany energii elementów objętości środowiska, podlegających danym odkształceniom. Zmiany te, zależne w danym środowisku od wartości i rodzaju odkształceń, przesuwiają się razem z nimi z tą samą, co i one, prędkością do dalszych warstw środowiska.

Przypuśćmy, że środowisko jest siedliskiem płaskich fal sinusoidalnych. Wyodrębnijmy w nim wałek o podstawie 1 cm^2 i długości, mierzonej w kierunku rozchodzenia się zaburzeń, równej długości fali λ . Po upływie T sek odkształcenia, którym podlegały w pewnej chwili elementy objętości walca, przesuną się bez zmiany (por. ust. 1) do elementów walca sąsiedniego o tej samej długości. Przez powierzchnię, rozdzielającą te dwa walce, przejdzie zatem w ciągu tego czasu energia potrzebna do odkształcenia elementów walca drugiego, energia, która zgodnie z założeniem odwracalności zjawisk, zachodzących w danym środowisku, równa jest energii, o którą na skutek doznanych odkształceń wzrosła uprzednio energia walca pierwszego. Ten przyrost energii, który w myśl założenia, przechodzi bez straty od jednego elementu do drugiego, składa się na ogół z dwóch części: energii ruchu i energii potencjalnej, których suma posiada w każdej chwili tę samą stałą wartość.

Gdy dany element przechodzi przez swe położenie równowagi, zmiana jego energii, równa wykonanej na nim pracy, wyraża się we wzroście jego energii ruchu, która wtedy ma wartość największą; w położeniach najbardziej oddalonych od położenia równowagi, gdy prędkość ruchu elementu równa jest zeru, energia odkształcenia równa jest zmianie energii potencjalnej.

Niech v_0 będzie amplitudą prędkości elementu cylindrycznego o podstawie 1 cm^2 i o wysokości Δx dostatecznie małej, abyśmy mogli uważać w każdej chwili odchylenia i prędkości jego punktów za równe odchyleniu i prędkości jego środka masy. Największa wartość jego energii ruchu równa, zgodnie z tym, cośmy mówili wyżej, przyrostowi energii, nabytej na skutek odkształcenia, wyrazi się wzorem

$$\Delta U = \frac{1}{2} \Delta m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot v_0^2 \cdot \Delta x$$

lub z uwagi, że

$$v_0 = \frac{2\pi s_0}{T}$$

(por. tom I, str. 54)

$$\Delta U = \frac{2\pi^2 s_0^2}{T^2} \rho \cdot \Delta x.$$

W rozpatrywanym przez nas przypadku fali płaskiej amplituda drgań s_0 i, co za tym idzie, i amplituda prędkości v_0 mają we wszystkich elementach wartość jednakową (por. ust. I), wobec czego wzrost energii walca będzie równy

$$U_\lambda = \frac{2\pi^2 s_0^2}{T^2} \rho \Sigma \Delta x = \frac{2\pi^2 s_0^2}{T^2} \cdot \rho \cdot \lambda. \quad (11)$$

Taka też ilość energii przejdzie w ciągu T sek przez dowolny przekrój 1 cm^2 , prostopadły do kierunku rozchodzenia się zaburzeń. Ilość ta jest niezależna od odległości danego przekroju od źródła zaburzeń, fale płaskie przenoszą bowiem przez wszystkie jednostki przekroju stale tę samą ilość energii.

Najczęściej jednak oblicza się przyrost energii, przypadający nie na λ cm³, lecz na 1 cm³ środowiska, tzw. gęstość energii, oraz ilość energii, przechodzącej przez jednostkę przekroju nie w ciągu T sek, lecz 1 sek, tzw. natężenie danego zaburzenia, często nazywane też natężeniem akustycznym (gr. akuejn-słyszeć). Dzieląc U_λ przez λ , otrzymujemy na gęstość energii

$$U_1 = \frac{2\pi^2 s_0^2}{T^2} \cdot \rho; \quad (11a)$$

dzieląc zaś przez T , znajdujemy na wartość natężenia

$$I = \frac{U_\lambda}{T} = \frac{2\pi^2 s_0^2}{T^3} \rho \lambda = \frac{2\pi^2 s_0^2}{T^2} c \rho = 2\pi^2 \nu^2 s_0^2 c \rho = \frac{1}{2} \rho c \nu_0^2, \quad (12)$$

gdzie $\nu = \frac{1}{T}$ jest częstością drgań.

W przypadku więc fal płaskich natężenie, mające w całym objętych przez odkształcenie środowisku wartość stałą, jest proporcjonalne do kwadratu częstości drgań i kwadratu ich amplitudy. Wymiarem natężenia jest

$$[I] = M T^{-3}$$

i zazwyczaj używaną jednostką $\frac{\text{erg}}{\text{sek cm}^2}$. Obecnie jednak można coraz częściej spotkać się z inną jej jednostką

$$\frac{\text{mikrowatt}}{\text{cm}^2} = 10 \frac{\text{erg}}{\text{sek cm}^2}$$

Według Wiena (1903) najmniejsza wartość natężenia o częstości 50 drgań na sekundę, przy której słyszymy jeszcze głos (próg słyszenia) wynosi $3,2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{erg}}{\text{sek cm}^2}$. Tej wartości odpowiada w powietrzu o temperaturze 0° C pod ciśnieniem 1 Atm ($c = 33130$ cm/sek, $\rho = 0,001293$ g/cm³) amplituda drgań, którą możemy obliczyć ze wzoru (12)

$$s_0 = \sqrt{\frac{I}{2\pi^2 \nu^2 c \rho}} = \sqrt{\frac{3,2 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot (3,14)^2 \cdot 2500 \cdot 33130 \cdot 0,001293}} = 1,22 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$$

Na zmianę ciśnienia, wywołaną w środowisku przez rozchodzące się odkształcenie, mamy

$$\Delta p = -e \frac{ds}{dx}$$

lub z uwagi, że

$$s = s_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

a więc

$$\frac{ds}{dx} = -s_0 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\Delta p = e \frac{2\pi s_0}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Ciśnienie zmienia się przeto również okresowo w ciągu tego samego czasu T , pozostając zawsze w tej samej fazie, co prędkość v . Największą wartość Δp_m otrzymamy, kładąc

$$\Delta p_m = e \cdot \frac{2\pi s_0}{\lambda}. \quad (a)$$

W danym przypadku

$$e = kp_0 = 1,4 \cdot 10^{13} 260 \text{ dyn/cm}^2 \doteq 1,4 \cdot 10^6 \text{ dyn/cm}^2$$

$$\lambda = cT \doteq 33000 \cdot \frac{1}{50} = 660 \text{ cm}.$$

Podstawiając te liczby oraz wyżej wyznaczoną wartość s_0 do wzoru (a) otrzymujemy

$$\Delta p_m = \frac{1,4 \cdot 10^6 \cdot 6,28 \cdot 1,22 \cdot 10^{-5}}{660} \doteq 0,16 \text{ dyn/cm}^2.$$

Taka więc zmiana ciśnienia działa jeszcze na nasz organ słuchu. Amerykańscy fizycy (Fletcher i Wegel, 1922 oraz Kranz, 1923) znaleźli, że próg słyszenia może mieć u różnych ludzi bardzo różniące się wartości, stosunek ich może sięgać 1 : 1000.

W przypadku fal kulistych zjawisko staje się o wiele bardziej złożone. Dopiero w znacznej — w porównaniu z długością fali — odległości od źródła zaburzeń odkształcane warstwy przekazują całą otrzymaną energię warstwom dalej położonym. Poczynając od tej odległości, natężenie, wobec wzrostu powierzchni warstw odkształcanych, zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu promienia danej warstwy. Przyjmując, że i w tym przypadku obowiązuje wzór (12), dochodzimy do wniosku, że tym razem amplituda odchyień nie zachod-

wuje wartości stałej, lecz zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do promienia, gdyż wszystkie pozostałe wielkości wzoru (12) zachowują w całym środowisku wartości niezmiennie.

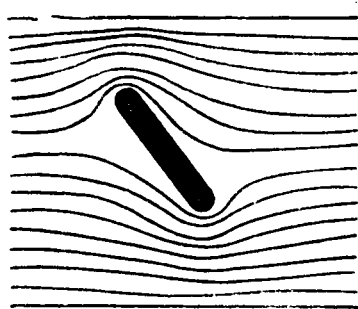
W pobliżu źródła zaburzeń natężenie zmniejsza się o wiele szybciej, tak że drobna jedynie część energii drgań źródła przechodzi do warstw położonych dalej; część ta jest tym mniejsza, im większa jest długość fali, tym w większej bowiem odległości od źródła ustala się prawidłowe przenoszenie energii z jednej warstwy do drugiej.

Stąd wynika, że w tych samych pozostałych warunkach energia przenoszona z najbliższego otoczenia źródła do danego środowiska jest tym mniejsza, im większa jest w danym środowisku prędkość rozchodzenia się zaburzeń.

Doświadczalne sprawdzenie wyżej przytoczonych twierdzeń nastęrcza na ogół duże trudności. Nawet przy pomiarach w środowiskach bardzo rozległych, jak np. w powietrzu atmosferycznym lub w wielkich zbiornikach wody, wpływ ukształtowania terenu jest w tym przypadku o wiele większy, niż przy pomiarach prędkości. Toteż otrzymane w tych warunkach wyniki wymagają zawsze pewnych poprawek, niełatwych zresztą do obliczenia. Ze wzoru (12) wynika, że do wyznaczenia wartości wystarczy zmierzyć amplitudę s_0 lub prędkość v_0 drgającego elementu środowiska. Pomiar amplitudy s_0 jest na ogół bardzo trudny, wychylenia bowiem są zazwyczaj bardzo małe. W dodatku, ponieważ nie można bezpośrednio obserwować ruchu cząstek środowiska, trzeba wprowadzać do środowiska obce ciała o możliwie małej masie, które by były wprawiane w ruch przez drgania środowiska. Do tego celu przy pomiarach w powietrzu mogą służyć, jak to wykazał Gellhoff (1920 r.), rozpylane kropelki oliwy o promieniu mniej więcej 10^{-4} cm. Krople te są wdmuchiwane pod niewielkim ciśnieniem do badanego środowiska w kierunku prostopadłym do kierunku rozchodzenia się głosu. Odchylenia, jakich doznają w swym ruchu pod działaniem fal głosowych, a które można obserwować przy pomocy silnego ultramikroskopu, pozwalają zdać sobie sprawę z amplitudy drgania cząstek środowiska.

Według Königa (1891 r.) amplitudy odchyień tego rodzaju kropli różnią się od amplitud cząstek środowiska zaledwie o 1%, gdy częstość drgań wynosi 2000 drgań na sekundę; przy częstościach większych rozbieżność wzrasta. Wywody Königa są jednak oparte na założeniach, bardzo upraszczających dane zjawisko, tak że nie wiadomo, czy wnioski jego są istotnie zgodne z rzeczywistością.

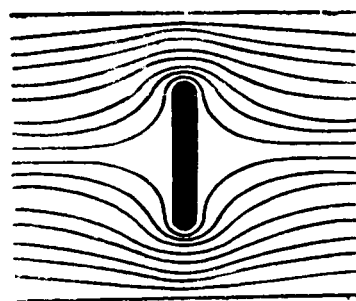
Do wyznaczenia amplitudy prędkości v_0 służy tzw. tarcza Rayleigha (1882 r.). Jest to niewielka okrągła płytką zawieszona pionowo na sprężystej nici.



rys. 13

Płytką taką wprowadzona do strumienia poruszającego się płynu ukośnie do jego prędkości, zakłóca symetrię rozmieszczenia linii prądu, co znów powoduje niejednakowy rozkład ciśnienia na jej powierzchni. Powstająca wskutek tego para sił — w przypadku, przedstawionym na rys. 13, o momencie skierowanym za płaszczyznę rysunku — obraca płytkę dookoła osi pionowej, dążąc do ustawienia jej prostopadle do kierunku prędkości i przywrócenia w ten sposób symetrii linii prądu przed i za płytką (rys. 14).

Przy zmianie kierunku prądu rozkład linii prądu zmianie nie ulega, wobec czego płytką jest obracana stale w tym samym kierunku, równie więc dobrze w prądzie o stałym kierunku prędkości, jak i o zmieniającym się okresowo. Momentowi tej pary sił przeciwdziała moment sił sprężystości, proporcjonalny do kąta α obrotu płytki.



rys. 14

W położeniu równowagi będziemy mieli równość

$$M = D\alpha$$

gdzie D — moment kierujący sił sprężystości, M zaś moment pary sił proporcjonalny do v_0^2 .

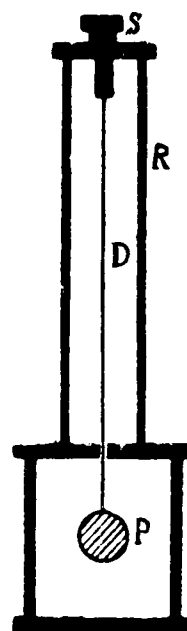
Według Königa, który opracował (1891 r.) teorię płytki Rayleigha

$$M = \frac{2}{3} \rho v_0^2 r^3 \sin 2\alpha, \quad (a)$$

gdzie r — promień płytki, α — kąt, jaki płytka tworzy z kierunkiem rozchodzenia się zaburzeń. Wzór ten obowiązuje jednak dopóty tylko, dopóki r jest mniejsze od $\frac{\lambda}{2\pi}$.

Z pomiarów wykonanych przez Zernowa (1908 r.) wynika, że wzór Königa dobrze na ogół odpowiada danym doświadczalnym. Do tego samego wniosku prowadzą i pomiary późniejsze (Malletta i Daltona, 1925 r. oraz Barnes'a i Westa, 1927 r.).

Z różnych dość licznych przyrządów mierniczych, w których płytka Rayleigha jest stosowana, podamy jedynie przyrząd używany przez E. Meyera (1926 r.). Płytkę P o średnicy 5 mm i grubości 0,05 mm zawieszona jest na cienkim drucie D o długości 10 cm. Odpowiednia śruba umieszczona ponad rurą, w której znajduje się drut, pozwala ustawiać płytkę w dowolnym kierunku. Płytkę znajduje się jakby w skrzyneczce otwartej z przodu i z tyłu, z boku zaś zabezpieczonej przez cienką gazę (rys. 15).



rys. 15

Powyższa metoda jest jedyną, przy której pomocy można w nieograniczonym płynie wyznaczyć natężenie akustyczne, nie znając ani częstotliwości odkształcenia ani jego zmienności w czasie. W pomiarach jednak natężenia fal podłużnych, z jakimi najczęściej w praktyce mamy do czynienia, wyznacza się nie v_0 , lecz ciśnienie, wzbudzone w danym elemencie przez zachodzące w nim odkształcenie. Znając bowiem tę wielkość, będziemy mogli również wyznaczyć natężenie. Istotnie, niech Θ oznacza względną zmianę objętości danego elementu środowiska o przekroju 1 cm^2 i długości $\Delta x \text{ cm}$, P zaś największą wartość nadwyżki ciśnienia ponad jego wartość normalną w środowisku nie odkształconym. Praca, potrzebna do wykonania tego odkształcenia, wyniesie

$$W = \frac{1}{2} P \cdot \Delta V = \frac{1}{2} P \cdot \Theta \cdot \Delta x, \quad (b)$$

gdzie ΔV oznacza zmianę objętości. Praca ta, zgodnie z naszym założeniem o odwracalności zachodzących w środowisku

przemian, równa jest wzrostowi energii, nabytemu przez element na skutek odkształcenia; na jednostkę więc objętości przypadać będzie wzrost energii

$$U_1 = \frac{1}{2} P \cdot \Theta = \frac{1}{2} \frac{P^2}{e \cdot \rho} = \frac{1}{2} \frac{P^2}{c^2 \rho}.$$

W jednostkę czasu przez powierzchnię 1 cm^2 , prostopadłą do kierunku rozchodzenia się zaburzeń, przejdzie energia, zawarta w walcu o przekroju 1 cm^2 i wysokości c cm. Natężenie zatem wyrazi się wzorem

$$I = U_1 \cdot c = \frac{1}{2} \frac{P^2}{c \rho}. \quad (13)$$

Wzór (13) obowiązuje również i w przypadku fal kulistych.

Zestawiając ten wzór ze wzorem (12), obowiązującym jedynie w przypadku fal płaskich, znajdujemy następujące związki między trzema podstawowymi w tym przypadku wielkościami s_0 , v_0 , i P :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{P^2}{c \rho} &= 2\pi^2 v^2 s_0^2 \cdot c \rho, \\ \text{skąd} \quad \frac{P}{s_0} &= 2\pi v \cdot c \rho. \end{aligned} \quad (14)$$

Z drugiej zaś strony

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{P^2}{c \rho} &= \frac{1}{2} c \rho \cdot v_0^2, \\ \text{skąd} \quad \frac{P}{v_0} &= c \rho. \end{aligned} \quad (15)$$

Wielkość $c \cdot \rho$ wyznaczająca stosunek między nadwyżką ciśnienia i amplitudą prędkości ruchu cząstek elementu, nosi często nazwę oporu akustycznego danego środowiska; im opór jest większy, tym większa musi być nadwyżka ciśnienia, aby amplituda prędkości ruchu cząstek osiągnęła wymaganą wartość. Wielkość $2\pi v \cdot c \rho$, zależną nie tylko od rodzaju środowiska, lecz również i od częstości drgań, i wyznaczającą stosunek między nadwyżką ciśnienia i amplitudą drgań, nazywamy za Hahnemannem i Hechtem (1916 r.), *twardością akustyczną*.

Podstawiając $c = \sqrt{\frac{e}{\rho}}$ otrzymujemy na opór akustyczny często używany wzór $\sqrt{\frac{e}{\rho}}$.

Wzór (15) jest pod wielu względami analogiczny do prawa Ohma w elektryczności, tym się też tłumaczy nazwa oporu akustycznego dla stosunku P i v . Analogia, całkowicie zresztą formalna, między zjawiskami akustycznymi i elektrycznymi, nieraz bardzo użyteczna przy badaniu przypadków bardziej złożonych, sięga dalej. Tak np. ze wzoru (15) wynika, że natężenie 1 fali płaskiej możemy wyrazić wzorem

$$I = \frac{1}{2} P v_0, \quad (16)$$

gdzie P i v_0 są największymi wartościami ciśnienia i prędkości, analogicznym do wzoru na moc prądu elektrycznego

$$U = (V_1 - V_2) \cdot i$$

gdzie $V_1 - V_2$ oznacza różnicę potencjału na końcach danego przewodnika, i — natężenie prądu (por. rozdz. V, ust. 1).

W falach płaskich związek między ciśnieniem i prędkością ruchu odkształcanych elementów wyraża się więc wzorami analogicznymi do wzorów wiążących różnicę potencjału z natężeniem prądu stałego. Falom kulistym odpowiadają wzory, analogiczne do wzorów dla prądów zmiennych. Wzorów tych jednak nie będziemy tutaj wyprowadzali.

Metody oparte na pomiarze ciśnienia mają węższy zakres stosowania, jakkolwiek pod względem czułości przewyższają na ogół metodę Rayleigha. Sprowadzają się najczęściej do umieszczenia w badanej przestrzeni błony lub płyty i do zmierzenia wywieranego przez odkształcane środowisko ciśnienia. Wzorem tego rodzaju metody jest metoda Wiena (1889 r.), w której ciśnienie wywierane na napiętą błonę (manometr błonowy) jest wyznaczane z wychylenia się błony z położenia równowagi. Stosunek jednak wychylenia do działającego ciśnienia jest w tym przypadku dla każdej częstości drgań inny, tak że wyznaczenie z odchylenia błony wartości działającego ciśnienia możliwe jest dopiero wtedy, gdy znamy częstość drgania i odpowiadający jej czynnik proporcjonalności między ciśnieniem i wychyleniem. Jedynie w przypadku, gdy częstość mierzonego drgania jest o wiele wyższa od częstości drgań własnych błony (patrz rozdz. II ust. 4), odchylenie wywołane przez dane ciśnienie zachowuje przy wszystkich częstościach drgań wartość tę samą. Wtedy jednak czułość przyrządu znacznie się zmniejsza.

Odchylenie błony czy płyty od położenia równowagi można wyznaczyć albo metodą optyczną, mierząc np. przesunięcie się podziałki skali, odbitej w lusterku umieszczonym na błonie (por. tom I, str. 322), albo też o wiele dokładniej, metodą elektryczną, mierząc zmiany natężenia prądu lub siły elektrobodźczej w związanym w ten lub inny sposób z płytką obwodzie elektrycznym.

W tym ostatnim przypadku przyrządy można sprowadzić do dwóch zasadniczych typów: 1. przyrządy, w których działania fal odkształcenia zmieniają warunki przepływu prądu w danym obwodzie; pomiary przy użyciu tych przyrządów nie dają bezpośredniego związku między natężeniem akustycznym i zmianą energii elektrycznej; 2. przyrządy, przekształcające energię akustyczną w inne postacie energii. Do przyrządów pierwszego typu należą wszelkiego rodzaju mikrofony (gr. fonos — głos), z których niewątpliwie najważniejszy jest mikrofon węglowy (Hughes, 1878 r.). Składa się on zazwyczaj z dwóch nie stykających się bezpośrednio płytek węglowych, z których jedna cieńsza wystawiona jest na działanie fal odkształcenia; przestrzeń między płytkami wypełniona jest luźno stykającymi się z nimi i między sobą kulkami węglowymi lub też miałem węglowym. Mikrofon włączony jest w obwód prądu, przy czym elektrodami są płytki węglowe. Pod działaniem ciśnienia zmienia się opór mikrofonu, a więc przy stałym natężeniu przepływającego przez mikrofon prądu — różnica potencjałów na płytkach, przy stałej zaś sile elektrobodźczej w obwodzie — natężenie prądu.

Niech R oznacza początkowy opór mikrofonu, r_0 amplitudę zmiany oporu, spowodowanej przez ciśnienie akustyczne sinusoidalne o częstości drgań ν , E — siłę elektrobodźczą w obwodzie, natężenie prądu i wyrazi się wtedy wzorem

$$i = \frac{E}{R + r_0 \sin 2\pi \nu t}.$$

Znając związek między ciśnieniem i zmianą oporu mikrofonu, można ze zmierzonego natężenia prądu wyznaczyć ciśnienie i natężenie akustyczne. Związek ten nie jest bynajmniej prosty. Przede wszystkim wartość oporu, koło której waha się w ciągu pomiaru wartość r , zazwyczaj nie jest równa oporowi R , jaki mikrofon posiada wtedy, gdy nie podlega ciśnieniu fal akustycznych, lecz jest od niego większa; następnie w miarę dłuższego działania mikrofonu stosunek $\frac{r_0}{R}$ zmienia się okresowo, przy czym różnica największej i najmniejszej jego wartości może być dość znaczna (według Schuberta, 1927 r.; dla częstości 800 drgań na sekundę może zmniejszać się do połowy). Poza tym czułość mikrofonu, której miarą jest zmiana oporu, przypada-

dająca na jednostkę ciśnienia akustycznego, zależy nie tylko od częstotliwości drgań, lecz również od natężenia. Ta ostatnia zależność, wyrażająca się szybkim stosunkowo wzrostem czułości przy wzroście natężenia sprawia, że dźwięki złożone (patrz. ust. 7) nie są przez mikrofon dokładnie odtwarzane, tony bowiem o mniejszym natężeniu powodują nieproporcjonalnie mniejsze zmiany oporu mikrofonu. Zjawisko to jest tym wyraźniejsze, im w większej odległości od mikrofonu znajduje się źródło dźwięku. Teoria mikrofonu węglowego, mimo licznych prac, z których najobszerniejsze i najgruntowniejsze są, jak się zdaje, prace Holma (1922 r., 1927 r.), tak jakby nie istnieje.

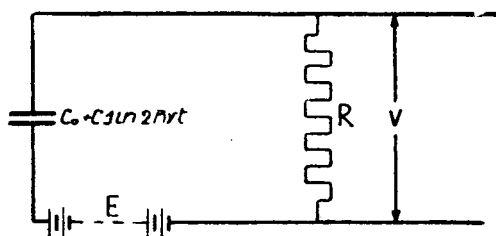
Toteż mikrofon węglowy, który, ze względu na prostotę swej budowy nie prędko chyba będzie przy przenoszeniu głosu na odległość zastąpiony przez inny przyrząd, w pomiarach natężenia musiał ustąpić miejsca mikrofonowi-kondensatorowemu — (Wente, 1917 i 1922 r.). Mikrofon ten jest kondensatorem (patrz. rozdz. III ust. 6), którego jedną zbroję tworzy silnie napięta cienka (o grubości 0,05 — 0,07 mm) płytka stalowa, znajdująca się w niewielkiej (około 0,02 mm) odległości od drugiej normalnej zbroi. Kondensator ten połączony jest ze źródłem stałej siły elektrobodźczej; ciśnienie akustyczne, zmieniając odległość zbroi kondensatora, zmienia jego pojemność, tak że dla tonów o częstotliwości ν będziemy mieli

$$C_1 = C_0 + C \sin 2\pi \nu t.$$

Ta zmiana pojemności powodować będzie zmianę naboju na zbrojach kondensatora o stałym potencjale, co znów wywoła przepływanie przez obwód prądu elektryzowania i rozbrajania; na końcach oporu R otrzymamy w ten sposób zmienną różnicę potencjałów $V = i \cdot R$ gdzie i — natężenie chwilowe przepływającego prądu.

I w tym przypadku musi być, oczywiście, uprzednio wyznaczona zależność między ciśnieniem akustycznym i amplitudą C zmiany pojemności, posiadającą dla różnych częstotliwości różną na ogół wartość.

W drugim typie przyrządów, w których energia akustyczna przetwarza się w inną postać energii, wielkością mierzona jest, ściśle biorąc, prędkość v ruchu cząstek środowiska. Najprostszym przyrządem tego typu jest zwykły telefon elektromagnetyczny (Bell, 1876 r.), w którym fale głosowe padają na cienką blaszkę żelazną, umieszczoną przed biegunem elektromagnesu. Drgania płytki indukują w obwodzie prądy; siła elektrobodźcza indukowana zależy nie od wartości wychylenia blaszki, lecz od prędkości jej ruchu. Pomiar jednak natężenia akustycznego takim przyrządem nastęrczałby wiele



rys. 16

trudności. W praktyce używany jest mikrofon wstęgowy Gerlacha i Schottky'ego (1924 r.). Pomiedzy biegunami magnesu umieszczona jest — włączona w obwód prądu — wstążka metalowa (zazwyczaj glinowa) o szerokości paru milimetrów i grubości około 3μ . Fale głosowe, padając na tę nienapiętą wstążkę, wprawiają ją w ruch o tej samej częstotliwości drgań, co powoduje powstanie w obwodzie siły elektrobodźczej indukowanej również o tej samej częstotliwości. Możemy jednak i tego przyrządu użyć do pomiaru amplitudy ciśnienia akustycznego, włączając w obwód wstęgi siłę elektrobodźczą zmienną o częstotliwości równej częstotliwości danej fali i o tak dobranej fazie i natężeniu, aby działająca na wstęgę siła elektromagnetyczna (por. rozdz. VII, ust. 3) była równa i przeciwnie skierowana do siły, spowodowanej przez ciśnienie akustyczne. Wstęga wtedy będzie w spoczynku. Ten piękny i prosty sposób, pozwalający z dużą dokładnością zmierzyć ciśnienie akustyczne, można jednak stosować tylko w przypadku drgań niezłożonych.

W pomiarach ciśnienia akustycznego można też posługiwać się tzw. piezoelektrycznymi własnościami ciał takich, jak kwarc, turmalin, sól Seignette'a (p. rozdz. III ust. 12).

Na zmianach temperatury, towarzyszących odkształceniom środowiska oparte są metody pomiaru, użyte po raz pierwszy przez Neuschelera (1911 r.), a następnie wielokrotnie stosowane i ulepszone. Gdy w przestrzeni, podlegającej odkształceniom sprężystym, umieścimy ogrzany przewodnik z prądem, który służy nam za termometr oporowy, jego normalne ostygnięcie będzie zakłócone przez adyabatyczne zmiany ciśnienia oraz przez zmianę krążących koło niego prądów unoszenia, wywołaną przez ruch drgający cząstek środowiska. W pewnych przypadkach (fale stojące, p. ust. 6) można każde z tych działań wyodrębnić. Teorię tego typu przyrządów dał v. Hippel (1924 i 1925 r.).

Pomiary, wykonane na otwartym powietrzu, przez Allarda (1882 r.) i Wiena (1889 r.), ustaliły bezspornie, że zmniejszanie się natężenia fal kulistych (lub mało różniących się od kulistych) zachodzi znacznie szybciej, niżby to wynikało z wyżej przytoczonych rozważań teoretycznych. Ta niezgodność ma swe źródło niewątpliwie w tym, że warunki, w jakich istotnie zachodzą obserwowane odkształcenia sprężyste, częściowo tylko czynią zadość przyjętym przez nas przy wyprowadzeniu wzoru (12) założeniom. Ani bowiem odkształcenia nie są całkowicie adyabatyczne, ani też środowisko nie jest płynem doskonałym; przechodzenie ciepła z odkształcanego elementu objętości do elementów sąsiednich czy to w postaci energii promieniowania czy też bezpośrednio przez przewodzenie, za-

miana na skutek tarcia wewnętrznego części energii ruchu na energię cieplną powodują stopniowo zmniejszanie się energii akustycznej, przekazywanej kolejno przez odkształcane warstwy.

Z dostatecznym przybliżeniem można przyjąć, że w przypadku fal kulistych natężenie wyraża się wzorem

$$I_2 = I_1 \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot e^{-b(r_2 - r_1)} \quad (17a)$$

gdzie I_1 natężenie w takiej odległości r_1 od źródła, w której rozchodzenie się energii możemy uważać za prawidłowe (p. wyżej, str. 33), r_1 i r_2 — odległości w kierunku promienia miejsca pomiaru od źródła, b — współczynnik pochłaniania (absorbcji), zależny jedynie od rodzaju środowiska i od częstości drgań, na ogół tym większy, im częstość drgań jest większa. Oznaczając $I_1 \cdot r_1^2$ przez I możemy wtedy, gdy r_2 jest dostatecznie wielkie, wzór (17a) przepisać w postaci

$$I_r = I \cdot \frac{1}{r^2} \cdot e^{-br} \quad (17)$$

Z badań Stokesa (1845 r.) nad promieniowaniem ogrzanego powietrza oraz ze wspomnianych wyżej prac Helmholtza i Kirchhoffa (p. str. 23) wynika, że współczynnik b można wyrazić następującym wzorem

$$b = \frac{2\pi^2 \nu^2}{c^3 \rho} \left(\frac{4}{3} \eta + \frac{k-1}{c_p} \cdot k_p \right), \quad (18)$$

gdzie η jest współczynnikiem tarcia wewnętrznego, k — stosunkiem $\frac{c_p}{c_v}$ i k_p współczynnikiem przewodnictwa cieplnego. Uwzględniając jedynie wpływ tarcia wewnętrznego, otrzymujemy wzór prostszy (Aigner 1922)

$$b = \frac{8\pi^2 \nu^2}{3c^3 \rho} \eta, \quad (18a)$$

z którego dla powietrza o temperaturze 0°C i prężności 760 mm rt. otrzymujemy po podstawieniu $\eta = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ g/cmsek}$; $\rho = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ $c = 3,3 \cdot 10^4 \text{ cm/sek}$

$$b_p = 1,01 \cdot 10^{-13} \nu^2;$$

dla wody zaś, kładąc $\eta = 17 \cdot 10^{-2} \text{ g/cmsek}$, $c = 14 \cdot 10^4 \text{ cm/sek}$,

$$b_w = 1,6 \cdot 10^{-16} \nu^2.$$

Dla tej samej przeto częstości drgań współczynnik b ma w wodzie wartość mniej więcej 1000 razy mniejszą, niż w powietrzu. Zmniejszenie więc natężenia, jakie na skutek pochłaniania zachodzi w powietrzu w odległości r , w wodzie zachodzi dopiero w odległości 1000 razy większej.

Z pomiarów Neklepajewa (1911 r.) nad pochłanianiem drgań o bardzo wielkiej częstości (od 130 000 do 400 000 drgań na sekundę) wynika, że w powietrzu w miarę zmniejszania się długości fali zanikanie energii akustycznej szybko wzrasta (prawie 10 razy szybciej przy trzykrotnym zmniejszeniu długości fali). P. Lebediew, ekstrapolując dane Neklepajewa, obliczył długości dróg, na jakich natężenie spada do 0,01 początkowej wartości. Oto wyniki jego obliczeń, które podajemy za Lübckem („Handbuch der Physik“, 1927 r.).

długość fali w mm	0,8	0,4	0,2	0,1
długość danego odcinka w cm	40	10	2,5	0,6

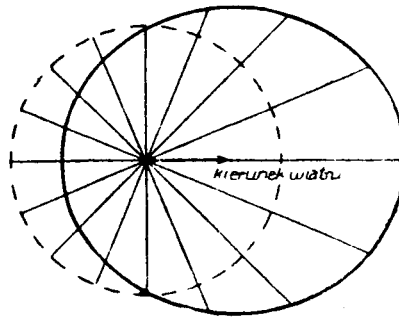
Przy długości zatem fali 10^{-2} cm, której w powietrzu odpowiada częstość 3 000 000 drgań na sekundę, energia akustyczna jest pochłonięta już w najbliższym sąsiedztwie źródła. Ten wniosek potwierdziły (1925 r.) pomiary Pierce'a z falami o częstości zbliżonej do tej granicznej wartości.

W tym wzrastaniu pochłaniania w miarę zmniejszania się długości fal szukać, być może, należy wyjaśnienia niewielkiej donośności grzmotu, nie przekraczającej zazwyczaj 15 km. Według Schmidta (1912 r. i 1914 r.), największą energię posiadają w grzmocie fale długie o częstości 5 do 2 drgań na sekundę, a więc leżące poniżej granicy słyszenia; fale akustyczne w ścisłym tego słowa znaczeniu, mają energię o wiele mniejszą. Te właśnie fale, jak to wykazał Schrödinger (1917 r.), są pochłaniane silniej. Do podobnego wniosku prowadzą również pomiary Rittera (1925 r.).

Należy jednak zaznaczyć, że próg słyszenia nie posiada tej samej wartości dla wszystkich częstości drgań. Maximum czułości, której miarą jest odwrotność najmniejszej wartości energii akustycznej, jaka jeszcze może wywołać wrażenie głosu, odpowiada drganiom o częstości od 2000 do 3000 drgań na sekundę. (Według Riesza, 1928 r., drganiom o częstości 2500 drgań na sekundę). Czułość ta jest wielokrotnie większa od czułości odpowiadającej drganiom o częstości niższej. Według pomiarów Wiena, zresztą dość spornych, jest ona 1 000 000 razy większa, niż przy częstości 100 drgań na sekundę. (Na podstawie jednak nowszych danych (Fletcher i Wegel, 1922) można, jak się zdaje sądzić, że stosunek ten nie jest tak wielki). Z tym należy się liczyć w sygnalizacji akustycznej (np. przy użyciu syren alarmowych), dobierając zależnie od odległości, na jaką sygnał ma być słyszany, taką częstość drgania, która

by dała najlepsze warunki słyszenia. Według Allarda, który szczegółowo zbadał (1882 r.) to zagadnienie, przy odległości 10 km najoszczędniejszym (o ile chodzi o energię, dostarczaną przez źródło) byłby sygnał o częstotliwości 1020 drgań na sekundę, przy odległości 100 km — o częstotliwości dwa razy mniejszej.

Nazwijmy z a s i ę g i e m fali odkształcenia tę największą odległość, w której możemy jeszcze zmierzyć natężenie akustyczne. W środowisku jednorodnym, odkształcanym przez punktowe (lub kuliste) źródło zaburzeń, zasięg jest we wszystkich kierunkach jednakowy; punkty o tym samym natężeniu leżą na powierzchni kulistej. Tak mniej więcej zachodzi zjawisko w spokojnym powietrzu. Podczas wiatru zasięg wzrasta w kierunku wiatru, wobec czego przecięcie płaszczyzną przechodzącą przez źródło zaburzeń i kierunek wiatru, powierzchni, na której leżą punkty o jednakowym natężeniu, daje elipsę, wydłużoną w kierunku wiatru. (rys. 17).



rys. 17

Zasięg zależy również od ciśnienia: w miarę wzrostu ciśnienia wzrasta i zasięg, przechodząc jednak, jak się zdaje, przez minimum pod ciśnieniem od 100 do 300 mm rt. Pochłanianie zwiększa się przy wzroście zawartości dwutlenku węgla w powietrzu. Podobnie działa mgła i dym. Wtedy jednak nie mamy już ściśle biorąc do czynienia ze środowiskiem jednorodnym.

O własnościach akustycznych cieczy można wnioskować jedynie z nielicznych pomiarów rozchodzenia się zaburzeń w wodzie. Wyniki tych pomiarów, wykonywanych zazwyczaj w zbiornikach wody o niewielkiej głębokości (jeziorach, rzekach, płytkich morzach), powinny czynić zadość wzorom obowiązującym w przypadku fal cylindrycznych; zmiana przeto natężenia akustycznego powinna wyrażać się wzorem

$$I_r = \frac{I_0}{r} e^{-br} \quad (19)$$

Doświadczenia jednak Colladona i Sturma (1827 r.) oraz Lukasa (1872 r.) prowadzą raczej do wniosku, sformułowanego (1920 r.) przez

Barkhausena i Lichtego, którzy poparli go pomiarami, wykonanymi na Morzu Bałtyckim, że zmiana napięcia jest wywołana jedynie przez pochłanianie, tak, że mamy

$$I_r = I_0 e^{-br} \quad (19a)$$

przy czym współczynnik b ma większą znacznie wartość, niż to można przewidywać na podstawie rozważań teoretycznych.

5. — INTERFERENCJA. — SKŁADANIE DRGAŃ O TEJ SAMEJ CZĘSTOŚCI.

Z licznych zastrzeżeń, jakimi zmuszeni byliśmy opatrzyć wywody ustępów poprzednich, wynika, że prosty stosunkowo obraz rozchodzenia się w nieograniczonym środowisku zaburzeń, wysyłanych przez jedno źródło, w wyjątkowym tylko przypadku odpowiada rzeczywistości. Zazwyczaj przez dany element środowiska przechodzi w danej chwili nie jedna, lecz dwie lub więcej fal odkształceń, zawdzięczających swe powstanie czy to zmianom, jakich doznaje rozchodzenie się zaburzeń na granicy środowiska, czy też istnieniu w danym środowisku większej ilości źródeł zaburzeń. Zgodnie z poczynionymi przez nas w ust. I założeniami, przejścia tych poszczególnych zaburzeń przez dany element środowiska nie powodują żadnych dostrzegalnych zmian własności fizycznych środowiska. Analogicznie więc możemy przyjąć, że w przypadku wielu zaburzeń, przechodzących przez dany element, każde z nich rozchodzi się tak, jak gdyby innych zaburzeń nie było. Wobec czego zaburzenie, którego siedliskiem staje się wtedy dany element objętości, jest zaburzeniem wypadkowym, sumą geometryczną (lub w szczególnym niżej rozpatrywanym przypadku algebraiczną) poszczególnych zaburzeń składowych. To założenie, postawione przez Huygensa w 1678 r., prowadzi do wniosków, na ogół zgodnych z doświadczeniem jedynie w przypadku zaburzeń niewielkich (niewielkich odchyłeń od położenia równowagi lub niewielkich zmian ciśnienia), zawodzi jednak całkowicie, gdy zaburzenia są znaczne (wtedy jednak nie można również stosować i podstawowego założenia ust. I). Stąd nazwa zasady zachowania małych odchyłeń, jaką często nadaje się temu założeniu Huygensa.

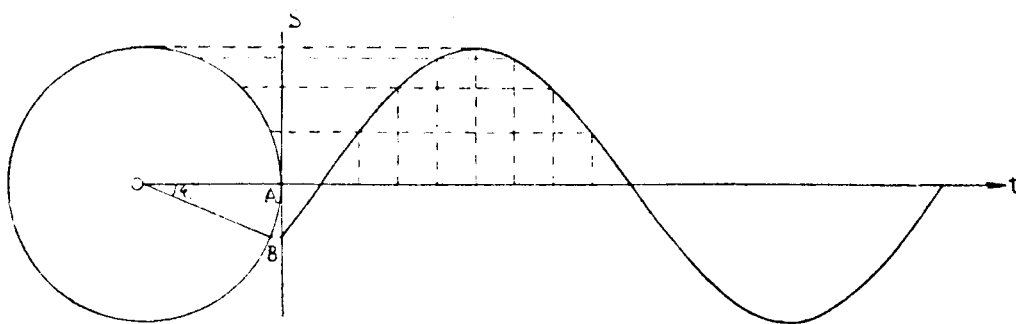
Zacznijmy od rozpatrzenia prostego przypadku, gdy w danym elemencie środowiska spotykają się dwie lub więcej fal okresowych, powodujących odchylenie cząstek od położenia równowagi wzdłuż tej samej prostej, która dla fal podłużnych będzie prostą, wyznaczającą kierunki rozchodzenia się fal, dla fal poprzecznych — prostą prostopadłą do tych kierunków. Wtedy, przy zachowaniu warunków, jakimi wyżej ograniczyliśmy rozpatrywane przez nas zjawiska, odchylenie wypadkowe będzie sumą algebraiczną odchyleni składowych. Tego rodzaju zjawiska noszą nazwę *zjawiska interferencji*.

Gdy odchylenia są spowodowane przez drgania harmonijne proste o tym samym okresie, lecz różnej amplitudzie i różnej fazie początkowej, będziemy mieli dla dwóch spotykających się fal

$$s = s' + s'' = s'_0 \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi_1 \right) + s''_0 \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi_2 \right). \quad (20)$$

Drgania wypadkowe będą wtedy również harmonijne proste, jak to można bezpośrednio udowodnić przy pomocy konstrukcji danej przez Fresnela. Opiszmy koła o promieniach s'_0 i s''_0 i wykreślmy sinusoidy, posługując się regułą, podaną na str. 55 tomu I-go.

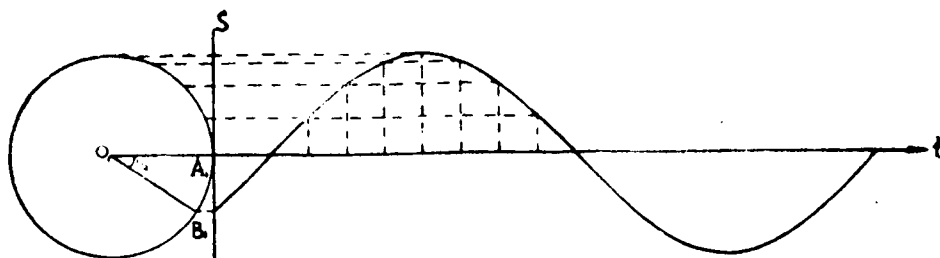
Otrzymamy w ten sposób dwie krzywe o tych samych okresach, lecz różnych amplitudach i fazach początkowych,



rys. 18a

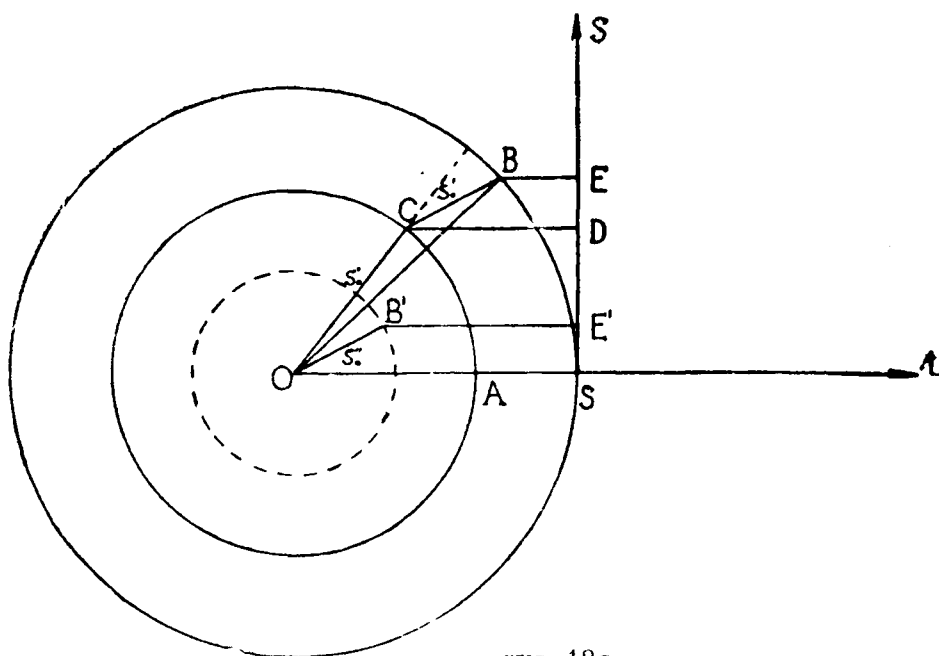
przy czym $\angle AOB = \varphi_1$, $\angle A_1 O_1 B_1 = \varphi_2$. Każdorazowe odchylenie od położenia równowagi, spowodowane przez jedno z tych drgań jest równe rzutowi na oś s promieni kół $OB = s'_0$, lub

$O_1 B_1 \dots s''_0$, obracających się ruchem jednostajnym z prędkością kątową $\frac{2\pi}{T}$. Odchylenie zatem wypadkowe równe, w myśl



rys. 18b

założenia, sumie tych rzutów, otrzymamy, rzutując na oś s , sumę geometryczną promieni s'_0 i s''_0 w położeniu, jakie w danej chwili zajmują.



rys. 18c

Niech w chwili t promień s'_0 zajmuje położenie OC , tworząc z osią t kąt $COA = \frac{2\pi t}{T} - \varphi_1$, w tej samej chwili promień s''_0 tworzy z osią t kąt $\frac{2\pi t}{T} - \varphi_2$, z promieniem więc s'_0 kąt

$$\frac{2\pi t}{T} - \varphi_2 - \frac{2\pi t}{T} + \varphi_1 = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Odłóżmy z punktu C odcinek CB równy s_0'' i tworzący z promieniem OC kąt $\varphi_1 - \varphi_2$. Rzut prostej OB , będącej sumą geometryczną tych dwu odcinków, jest równy odchyleniu wypadkowemu, jak to bezpośrednio wynika z rysunku, gdzie $SD = s'$, $DE = s''$. Kąt OCB równy $\pi - (\varphi_1 - \varphi_2)$ zachowuje stale tę samą wartość, przy obrocie zatem prostej OC prosta CB obraca się razem z nią tak, jak gdyby była z nią sztywnie związana; koniec przeto wypadkowej OB opisuje okrąg koła QS w ciągu tego samego czasu T . Drganie wypadkowe s wyrazi się wzorem

$$s = OB \cdot \sin BOS = s_0 \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi \right). \quad (20a)$$

Z ΔOCB znajdujemy

$$s_0^2 = s_0'^2 + s_0''^2 + 2s_0' s_0'' \cos (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (20b)$$

oraz

$$\frac{s_0'}{\sin (\varphi - \varphi_2)} = \frac{s_0''}{\sin (\varphi_1 - \varphi)} \text{ lub } s_0' \sin (\varphi_1 - \varphi) = s_0'' \sin (\varphi - \varphi_2).$$

Otwierając nawiasy otrzymujemy

$$s_0' \sin \varphi_1 \cos \varphi - s_0' \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi = s_0'' \sin \varphi \cdot \cos \varphi_2 - s_0'' \cos \varphi \cdot \sin \varphi_2,$$

skąd

$$s_0' \sin \varphi_1 - s_0' \cos \varphi_1 \cdot \tan \varphi = s_0'' \cos \varphi_2 \cdot \tan \varphi - s_0'' \sin \varphi_2$$

i ostatecznie

$$\tan \varphi = \frac{s_0' \sin \varphi_1 + s_0'' \sin \varphi_2}{s_0' \cos \varphi_1 + s_0'' \cos \varphi_2}. \quad (20c)$$

Gdy zarówno amplitudy, jak i różnica faz drgań składowych mają w danym punkcie wartość stałą, drganie wypadkowe ma również w danym elemencie objętości stałą amplitudę i stałą fazę początkową. Wartość amplitudy jest najmniejsza, gdy $\varphi_1 - \varphi_2 = (2n + 1)\pi$, gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$, gdy przeto jedno z drgań składowych jest w stosunku do drugiego opóźnione o połowę okresu drgania, a więc gdy fazy drgań są przeciwne. Mamy wtedy

$$s_0^2 = (s_0' - s_0'')^2, \text{ skąd } s_0 = s_0' - s_0'';$$

gdy $\varphi_1 - \varphi_2 = 2n\pi$, gdzie tak, jak poprzednio, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, a więc gdy fazy drgań są zgodne

$$s_0 = s'_0 + s''_0.$$

Jeżeli falami składowymi są fale płaskie, rozchodzące się w tym samym kierunku, lecz z pewną stałą różnicą faz początkowych, drganie wypadkowe ma we wszystkich punktach środowiska tę samą obszerność drgań i stałą różnicę faz względem każdego z drgań składowych. Takie dwie fale rozchodzić się więc będą jak jedna fala, której równaniem promienia w punkcie, odległym o x od źródła zaburzeń będzie

$$s_x = s_0 \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} - \varphi \right), \quad (21)$$

gdzie s i φ wyznaczają wzory (20b) i (20c). Twierdzenie to możemy uogólnić na dowolną ilość fal płaskich o tym samym okresie, dodając odpowiednio po dwie fale składowe, a następnie dodając ich wypadkowe.

Mamy wtedy ostatecznie

$$s_0 \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi \right) = \sum_{i=1}^n s_0^{(i)} \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi_i \right).$$

Otwierając nawiasy i przyrównując współczynniki wyrazów, zawierających $\sin \frac{2\pi t}{T}$ i $\cos \frac{2\pi t}{T}$,

$$\text{otrzymamy} \quad s_0 \sin \varphi = \sum_{i=1}^n s_0^{(i)} \sin \varphi_i,$$

$$s_0 \cos \varphi = \sum_{i=1}^n s_0^{(i)} \cos \varphi_i,$$

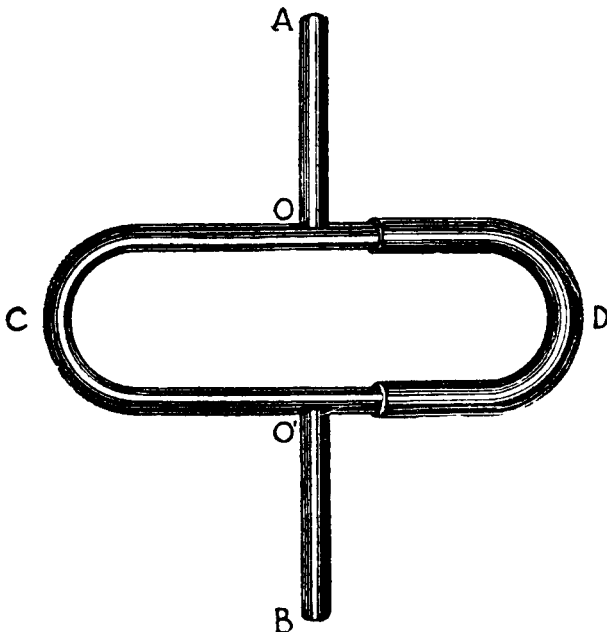
$$\text{skąd} \quad s_0^2 = \left(\sum_{i=1}^n s_0^{(i)} \sin \varphi_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n s_0^{(i)} \cos \varphi_i \right)^2 \quad (21a)$$

$$\text{i} \quad \sin \varphi = \frac{1}{s_0} \sum_{i=1}^n s_0^{(i)} \sin \varphi_i \quad (21b)$$

$$\text{lub} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum_{i=1}^n s_0^{(i)} \sin \varphi_i}{\sum_{i=1}^n s_0^{(i)} \cos \varphi_i} \quad (21c)$$

Stąd wynika, że i odwrotnie każdą falę, powodującą powstawanie drgań harmonijnych prostych, możemy uważać za wypadkową dwu lub więcej fal składowych o tym samym okresie drgania, różniących się amplitudą oraz fazą początkową.

Do wykazania zjawiska interferencji, zachodzącego w tym przypadku, służyć może prosty przyrząd Quinckego, wyobrażony schematycznie na rys. 19. Źródło dźwięku, umieszczone w pobliżu otworu A, wprawia w drganie otaczające powietrze. Zaburzenie od punktu O rozchodzi się dwiema drogami, wzdłuż rury C i rury D, której długość może być przez wsuwanie i wysuwanie (tak jak w puzonach) odpowiednio zmieniana. W punkcie O' obie te fale spotykają się, rozchodząc się dalej jak jedna fala o amplitudzie i fazie, wyznaczonej przez różnicę faz, jakiej nabyły przebywając drogi niejednakowe. Różnica między fazą w punkcie O i punkcie O' dla fali, która przeszła



rys. 19

drogę OCO' będzie równa $2\pi \frac{x_c}{\lambda}$, dla fali, która przeszła drogę ODO' — $2\pi \frac{x_d}{\lambda}$, różnica zatem ich faz w chwili interferencji $2\pi \frac{x_c}{\lambda} - 2\pi \frac{x_d}{\lambda}$.

Z tą różnicą faz będą się one przesuwają wzdłuż rury O'B do ucha obserwatora. Zmieniając odpowiednio długość rury D, otrzymamy kolejno różnice faz równe $0, \pi, 2\pi, \dots$, którym odpowiadać będą amplitudy drgań wypadkowych $2s'_0, 0, 2s'_0, \dots$; będą zatem zachodziły kolejne wzmocnienia i zanikania dźwięku.

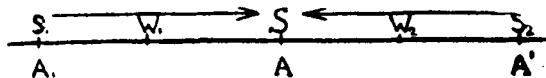
6. — FALE STOJĄCE.

Zastosujmy otrzymane wyniki do rozpatrzenia ważnego przypadku interferencji dwu ciągów fal płaskich sinusoidalnych o tym samym okresie drgania, rozchodzących się w kierunkach przeciwnych, przy czym założmy, że obszerności drgań są w obu falach jednakowe, tak że $s'_0 = s''_0$. Wybierzmy taki

punkt S , do którego w danej chwili drgania dochodzą w tej samej fazie. Jest rzeczą oczywistą, że drgania zawsze będą miały w tym punkcie fazy zgodne, na drgania przeto wypadkowe otrzymujemy ze wzorów (20), w których $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$,

$$s = 2s'_0 \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi \right). \quad (22)$$

Drgania zatem w tym punkcie będą, podobnie jak drgania składowe, drganiami harmonijnymi prostymi. W punkcie, od-



rys. 20a

ległym o x od S w kierunku rozchodzenia się fali pierwszej, faza drgania będzie w chwili t taka, jaka odpowiada fazie w S w chwili o $\frac{x}{c}$

wcześniej. Kładąc dla uproszczenia $\varphi = 0$, otrzymamy na odpowiednie drganie składowe wzór

$$s' = s'_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right);$$

faza drgania drugiego będzie w tym samym punkcie odpowiadała chwili o $\frac{x}{c}$ późniejszej, dla tego więc drgania składowego otrzymamy

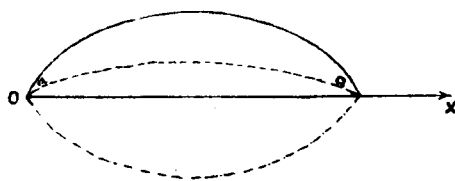
$$s'' = s'_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right),$$

stąd drganie wypadkowe

$$s_x = s' + s'' = 2s'_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}. \quad (22a)$$

Drgania więc tego punktu są również drganiami harmonijnymi prostymi o tej samej częstości drgań i o amplitudzie równej $2s'_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$; w punkcie W_2 zatem, odległym od S o $\frac{\lambda}{4}$, obszerność drgań jest stale równa zeru: drgania składowe posiadają stale fazy przeciwne; różnica ich faz, równa $\frac{4\pi x}{\lambda}$, posiada w tym

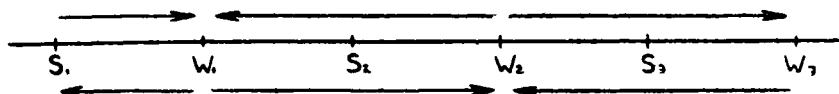
punkcie wartość π . Podobnie rzecz się będzie miała w punkcie W_1 , odległym od S o $\frac{\lambda}{4}$ w kierunku rozchodzenia się fali drugiej, jak również we wszystkich punktach, odległych od S w jedną i drugą stronę o nieparzystą liczbę ćwiartek fali, dla których więc $x = \pm (2n+1) \frac{\lambda}{4}$. W punktach S_1, S_2 odległych od S o $\frac{\lambda}{2}$, amplituda będzie równa $-2s_0$, co znaczy, że jakkolwiek w tych punktach w chwilach $t = (2n+1) \frac{T}{4}$ odchylenia będą podobnie, jak w punkcie S , osiągały tę samą wartość $2s'_0$, kierunek ich będzie przeciwny do kierunku odchylen w S . Snując dalej te rozważania, stwierdzimy bez trudu, że w punktach odległych od S o $2n \cdot \frac{\lambda}{2}$, odchylenia będą miały zawsze ten sam kierunek, co w punkcie S , w punktach zaś odległych o $(2n+1) \frac{\lambda}{2}$ zawsze kierunek przeciwny. Niech OX będzie prostą, na której leżą kierunki rozchodzenia się fal (rys. 20b); odkładajmy w kierunku osi rzędnych odchylenia od położenia równowagi środków masy elementów objętości środowiska. Odchylenie wypadkowe w chwili $(2n+1) \frac{T}{4}$ odtworzy wtedy sinusoida pełna, odchylenie w chwili o $\frac{T}{2}$ późniejszej — sinusoida przerywana. Wszystkie elementy objętości przechodzić będą jednocześnie przez położenie równowagi, wobec czego w chwili, zawartej między $(2n+1) \frac{T}{4}$ i $(2n+3) \frac{T}{4}$, odchylenia elementów będzie wyobrażała krzywa aa . Zjawisko zatem zachodzi tak, jak gdyby fala wcale się nie przesuwiała. Z tego też powodu nazywamy otrzymaną w tym przypadku falę wypadkową falą stojącą; punkty o największej amplitudzie $s_0 = 2s'_0$ noszą nazwę strzałek fali stojącej, punkty o am-



rys. 20b

plitudzie 0 — węzłów fali stojącej. Prędkości cząstek, zawartych między węzłami (np. W_1 i W_2) mają zawsze kierunek przeciwny do prędkości cząstek, zawartych w warstwie sąsiedniej (np. W_2 W_3).

Przypuśćmy, że rozpatrywana przez nas fala jest falą podłużną; wtedy zgodnie z tym, o czym była mowa wyżej, w pewnej dowolnej zresztą chwili t kierunek ruchu cząstek środowiska będzie np. taki, jaki wskazują górne strzałki na rys. 21. Gdy cząstki, poruszające się w ten sposób, osiągną



rys. 21

największe odchylenie od położenia równowagi, koło węzłów W_1 , W_3 . . . powstaną zgęszczenia, powodujące w tych miejscach wzrost ciśnienia ponad wartość normalną, koło węzłów zaś W_2 , W_4 (nie oznaczonego na rysunku) — rozrzedzenia, którym towarzyszy spadek ciśnienia. Cząstki następnie zmieniają kierunek swego ruchu na odwrotny (poruszać się będą w kierunku strzałek dolnych), w pewnej chwili przejdą wszystkie jednocześnie przez swoje położenie równowagi, tak że środowisko wróci do swego stanu normalnego i, poruszając się dalej w tym samym kierunku, wytworzą zgęszczenia w węzłach W_2 , W_4 , — rozrzedzenia w węzłach W_1 , W_3 . Największe zatem zmiany ciśnienia zachodzić będą w węzłach, najmniejsze — w danych warunkach równe zero — w strzałkach. Uogólniając wyżej wprowadzoną terminologię, możemy punkty W_1 , W_2 , W_3 , W_4 nazwać strzałkami ciśnień, punkty zaś S_1 , S_2 , S_3 , S_4 — węzłami ciśnień. Węzły ciśnień są zatem przesunięte względem węzłów odchyżeń o ćwierć długości fali.

Zmiana ciśnienia jest, jak o tym była mowa w ust. 2, proporcjonalna do $\frac{ds}{dx}$, gdzie x oznacza odległość, mierzoną w kierunku rozchodzenia się fal. Ze wzoru (22a) otrzymujemy

$$\Delta p = -e \frac{ds}{dx} = e \frac{4\pi}{\lambda} s'_0 \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

W punktach więc, w których $x = 2 \cdot \frac{\lambda}{4}, 4 \cdot \frac{\lambda}{4}, 6 \cdot \frac{\lambda}{4} \dots$ a więc ogólnie $2n \cdot \frac{\lambda}{4}$, Δp jest stale równe zero, w punktach zaś, w których $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda \dots$ ogólnie $(2n+1) \frac{\lambda}{4}$,

$$\Delta p = e \frac{4\pi}{\lambda} s'_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad (22b)$$

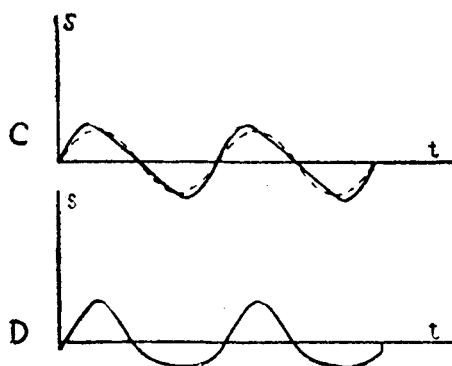
osiągając w chwilach $t = (2n+1) \frac{T}{4}$ wartości największe $\pm e \cdot \frac{4\pi s_0}{\lambda}$.

Należy zaznaczyć, że wszystkie te wywody dotyczą interferencji fal o równych amplitudach. Gdy amplitudy są nierówne, falę o amplitudzie większej $s'_0 > s''_0$ możemy uważać za wypadkową dwu fal (p. wyżej) o amplitudach, równych odpowiednio s''_0 i $s'_0 - s''_0$. Składowa o amplitudzie s''_0 wytworzy z falą, poruszającą się w kierunku przeciwnym, falę stojącą, na którą nakładać się będzie fala o amplitudzie $s'_0 - s''_0$, przesuwaną się w kierunku tej fali, której jest składową. Podobnie, jak poprzednio, i tym razem będziemy mieli elementy objętości o największej i najmniejszej amplitudzie drgania, rozmieszczone w odległościach $\frac{\lambda}{4}$ jeden od drugiego. Wartość amplitudy największej wynosić będzie $s'_0 + s''_0$, najmniejszej $s'_0 - s''_0$, tak że, ściśle biorąc, nie będzie w tym przypadku węzłów i strzałek takich, jak w fali stojącej. Cząstki drgające nie będą przechodziły jednocześnie przez położenie równowagi.

7. SKŁADANIE DRGAŃ O NIEJEDNAKOWYM OKRESIE. — WZÓR FOURIERA.

Gdy fale, spotykające się w danym elemencie objętości, powodują drgania harmonijne proste, o częstości niejednakowej, drganie wypadkowe nie jest już na ogół drganiem harmonijnym prostym.

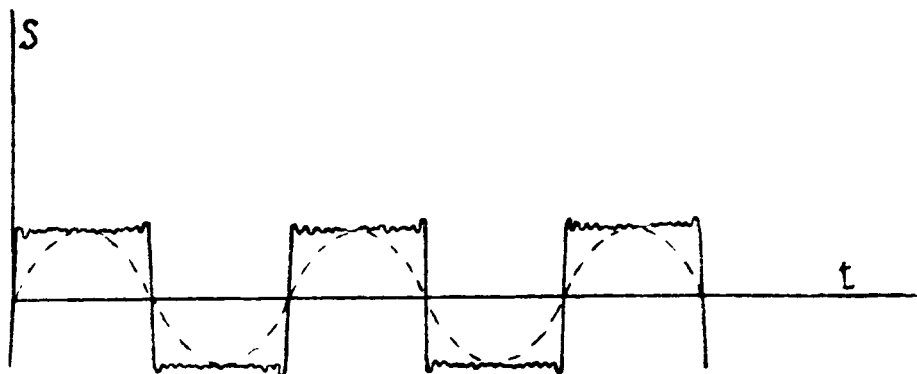
W przypadku np. dwu fal o okresach drgań, będących w stosunku wzajemnym takim, jak 2:1 (rys. 22), zależność odchylenia od czasu odtwarza, krzywa C, gdy różnica faz drgań



rys. 22

składowych równa jest zeru, i krzywa D , gdy różnica faz wynosi $\frac{\pi}{4}$. Żadna z tych krzywych nie jest sinusoidą. Wrażenie słuchowe, jakie otrzymujemy tym razem — o ile rzecz prosta, częstotści drgań leżą w granicach słyszenia — nazywamy **dźwiękiem**, w ściślejszym tego słowa znaczeniu, w odróżnieniu od **tonu**, wywołanego przez drgania harmonijne proste. Wrażenie to, jak wykazał Helmholtz, i jak to potwierdzili Cosens i Hartridge (1922 r.), nie zależy bynajmniej od różnicy faz tonów składowych, tak że drgania, odtworzone przez krzywe C i D , odpowiadają temu samemu dźwiękowi.

W miarę zwiększania się ilości drgań składowych, a więc ilości różnych fal, spotykających się w danym elemencie objętości, odchylenie wypadkowe może, pozostając jednak ciągle okresowym, jeszcze bardziej różnić się od drgania harmonijnego prostego. Tak np. krzywa rys. 23, odtwarzająca drganie,



rys. 23

złożone z piętnastu drgań składowych harmonijnych prostych, o tej samej fazie początkowej, o okresach zaś drgania i amplitudach, malejących w stosunku $1 : 3 : 5 : 7 : 9 \dots$, jedynie swoją okresowością przypomina sinusoidę.

Zaburzenie, będące wypadkową bardzo wielu drgań harmonijnych prostych o różnych amplitudach, często, jak to wykazał Stumpf (1926 r.), wywiera wrażenie nie dźwięku, lecz szmeru lub hałasu. Na ogół trudno dokładnie ustalić, jakie fizyczne cechy odróżniają dźwięk od szmeru lub hałasu, którego okresowość i barwa (p. niżej) w wielu przypadkach może być dokładnie wyznaczona. Według Weissa i Sokołowskiego (1920 r.) hałas cechuje zmienna okresowość i zmienna amplituda drgań.

Jeżeli spotykające się w danym elemencie objętości fale są falami płaskimi, rozchodzącymi się w tym samym kierunku, drgania wypadkowe wszystkich elementów środowiska są identyczne (por. ust. I). Wtedy wystarczy na wykresach rys. 22 i 23 zastąpić zmienną t przez x — odległość od pewnego wybranego przez nas dowolnie punktu — aby krzywe te odtwarzały dla danej chwili t odchylenie od położenia równowagi srodków masy elementów, leżących na prostej, wyznaczającej kierunek rozchodzenia się fali.

Z rozważań tych wynika, że i odwrotnie, każdą okresową falę zaburzeń można uważać za wypadkową odpowiednio dobranych fal sinusoidalnych o różnych okresach drgania i amplitudach, stanowiących tzw. widmo danego zaburzenia. Ten wniosek udowodnił (1807 r. i 1822 r.) Fourier stwierdzając, że każdą dowolną funkcję argumentu t , zmieniającą się w sposób ciągły w granicach od $t_1 = 0$ do $t_2 = T$ i przybierającą okresowo, co T sek, wartość tę samą, można przedstawić wzorem

$$s = f(t) = s_0 + s_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + \\ + s_2 \sin(2\omega t - \varphi_2) + s_3 \sin(3\omega t - \varphi_3) + \dots \quad (23)$$

gdzie $\omega = \frac{2\pi}{T}$; a $s_0, s_1, s_2, \dots$ są współczynnikami stałymi; w szczególnych przypadkach niektóre z tych współczynników mogą być równe zeru.

Wielkość $\omega = \frac{2\pi}{T}$ jest zazwyczaj nazywana częstością kółową; jest to prędkość kątowna, z jaką obraca się wektor, łączący środek koła z punktem, poruszającym się po kole o promieniu s ruchem jednostajnym z prędkością $\frac{2\pi s}{T}$ (tom I str. 49).

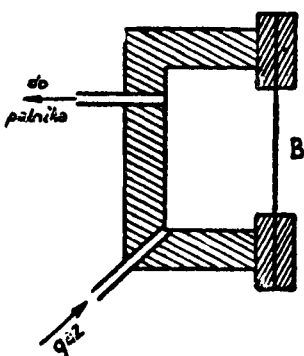
Każde więc okresowe odchylenie może być rozpatrywane, jako suma mniejszej lub większej ilości drgań harmonijnych prostych, o różnych na ogół amplitudach i o częstościach drgań, wzrastających w stosunku takim, jak stosunki liczb całkowitych $1:2:3:4:5 \dots$. Wrażenie dźwięku, wywołane przez takie drganie złożone, jest, zgodnie z tym, cośmy mówili wyżej, zależne jedynie od amplitud i częstości drgań tonów składowych, niezależne zaś całkowicie od różnicy ich faz. Ton skła-

dowy o największym okresie drgania, równym okresowi drgania złożonego, nazywamy **tonem zasadniczym**, tony zaś o okresach mniejszych, a więc o częstościach większych — wyższymi **harmonijnymi**; one to warunkują tzw. **barwę dźwięku**, odróżniającą dźwięki o tej samej amplitudzie i tej samej częstości drgań tonu zasadniczego. Nazw tych, początkowo używanych jedynie w nauce o głosie, obecnie coraz częściej używamy i w tych przypadkach, gdy drgania leżą poza granicami słyszenia.

W przypadku fal głosowych często jednak ważniejszą jest rzeczą zbadanie nie odchyłeń od położenia równowagi, lecz wahań ciśnienia, spowodowanych przez rozchodzące się w środowisku fale odkształceń. Z twierdzenia Fouriera wynika, że te wahania złożone można również uważać za sumę wahań harmonijnych prostych, tak że mamy

$$p - F(t) = p_0 + p_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + p_2 \sin(2\omega t - \varphi_2) + p_3 \sin(3\omega t - \varphi_3) + \dots \quad (23a)$$

Do badań czy to drgania cząstek środowiska, czy też wahania ciśnienia w środowisku używa się tych samych metod, jakie służą do wyznaczenia natężenia akustycznego i o których była mowa wyżej w ust. 4. Podobnie więc, jak tam, przyrządy, służące do tego celu, można podzielić na takie, które odtwarzają



rys. 24

wychylenia cząstek, i takie, które odtwarzają wahania ciśnienia. W częstszym użyciu są przyrządy tego drugiego typu, tak że mówiąc o **obrazie dźwięku**, mamy zazwyczaj na myśli obrazy, otrzymane przy pomocy przyrządów, odtwarzających zmiany ciśnienia.

W przyrządach tego typu zasadniczą częścią jest, podobnie jak w manometrze błonowym Wiena, napięta błona, którą zmienne ciśnienie akustyczne pobudza do drgań wymuszonych (p. rozdz. II, ust. 4). W manometrze Königa (1872 r.) drgania te powodują zmianę ciśnienia gazu, doprowadzanego do palnika (rys. 24), wobec czego płomień skraca się i wydłuża

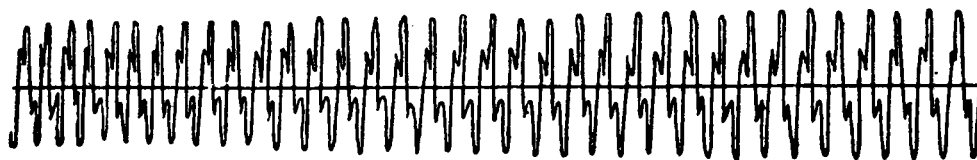
Gdy światło płomienia pada na wirujące zwierciadło, obrazy odbite, odpowiadające kolejnym stanom płomienia, układają się jeden za drugim w szereg taki, jak na rys. 25, stanowiącym obraz dźwięku, będącego sumą dwóch tonów o stosunku częstości, równym stosunkowi 1 : 2.



rys. 25

Nichols i Meritt ulepszyli (1898 r.) następnie przyrząd Königa i zastąpili subiektywną obserwację obrazów odbitych przez fotografowanie drgań płomienia. Marbe i Déguisne uprościli (1906 r. i lata późniejsze) jeszcze bardziej pomiar, przesuwając nad płomieniem wstęgę papieru, na której płomień przy każdym drgnięciu osadzał pierścień sadzy; z wielkości tych pierścieni i ich odległości wzajemnej można wnioskować o rodzaju dźwięku.

Ta metoda jednak coraz bardziej ustępuje miejsca metodom, za których pierwowzór można uważać fonautograf Scotta (1859 r.) (gr. fonos — dźwięk, autos sam). W przyrządzie Scotta ostrze, przymocowane do błony, dotyka przy jej wychyleniu z położenia równowagi poczernionego walca, poruszającego się ruchem śrubowym w kierunku swej osi geometrycznej, i kreśli na nim linię odtwarzającą zmiany ciśnienia akustycznego. Tytułem przykładu podajemy tutaj krzywą, wykreśloną



rys. 26

sposobem analogicznym i odtwarzającą dźwięk złożony z tonów ν i 3ν (rysunek ten bierzemy z „Handbuch der Physik” Müller - Pouilleta).

Edison pokrył (1877 r.) obracający się walec cienką warstwą staniolu, na której ostrze przymocowane do płytki mikowej lub metalowej wyciskało zagłębienia, o głębokości zależnej od wychylenia płytki. Tego rodzaju fonografy były później wielokrotnie udoskonalane, przy czym mechaniczne sposoby zapisywania dźwięku zostały zastąpione przez elektryczne.

Do odtwarzania obrazu dźwięku mogą służyć po niewielkich i nieistotnych zmianach wszystkie prawie przyrządy, których się używa do wyznaczania wielkości akustycznych i o jakich była mowa w ust. 4. I w tym przypadku przewaga jest po stronie przyrządów, wyznaczających ciśnienie.

Do odtworzenia wychylenia służyć może strunowy fonograf Einthovena i Hooggerwerfa (1924 r.), w którym fale głosowe wprowadzają w drganie wymuszone nitkę kwarcową, napiętą między dwoma mikroskopami. Otrzymana przy ich pomocy fotografia różnych położzeń drgającej nitki pozwala odtworzyć obraz ruchu cząstek powietrza, w tych tylko jednak granicach częstości, w jakich zachodzi stałość stosunku między amplitudami drgań powietrza i struny; drgania składowe, o częstości wyższej lub niższej od tych granic, zależnych od długości, napięcia i masy nitki, są odtwarzane na mikro-fotografii na ogół w skalach różnych, co, rzecz prosta, znacznie ogranicza zakres stosowania tego przyrządu.

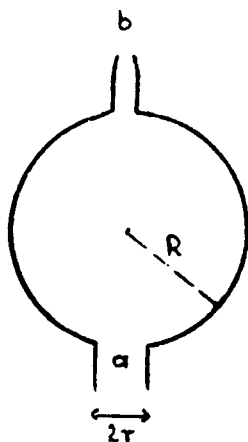
Do tego samego typu należy, jak można wnioskować na podstawie badań E. Meyera (1929 r.), katodofon zbudowany przez Massolle'a, Vogta i Engla (1924 r. i lata późniejsze). Przyrząd ten, którego działanie nie jest jeszcze dostatecznie wyjaśnione, składa się z zaostromej katody, pokrytej tlenkiem jakiejś ziemi alkalicznej i ogrzewanej prądem elektrycznym; katoda ta umieszczona jest naprzeciwko anody, stanowiącej podziurkowane dno lejka. Anoda i katoda włączone są do obwodu elektrycznego o stałej sile elektrobodźczej. Zjonizowanie powietrza między anodą i katodą, spowodowane przez ogrzewanie katody, umożliwia przepływ prądu elektrycznego, o mniej więcej stałym natężeniu. Natężenie ulega zmianie, gdy na lejek padają fale głosowe; zmiany natężenia o częstości tej samej, co drgania powietrza, są na ogół niewielkie, mogą jednak w prosty stosunkowo sposób być znacznie wzmocnione. Katodofon znalazł swe główne zastosowanie w pewnych typach filmu dźwiękowego. Wzmocnione zmiany natężenia prądu w obwodzie katodofonu powodują drgania natężenia światła w odpowiednio zbudowanej lampie, te zaś drgania z kolei ujawniają się w słabszym lub silniejszym zacernieniu obrazu wąskiej szczeliny, przez którą światło lampy pada na przesuwaną przed nią błonę fotograficzną. Jeżeli teraz między oświetloną szczeliną i komórką fotoelektryczną przesunąć się będzie zacernioną w ten sposób błonę, zmiany natężenia przechodzącego przez błonę światła spowodują zmiany natężenia prądu elektrycznego w obwodzie komórki, te zaś znów po odpowiednim wzmocnieniu wywołają drgania płytki sprężystej i w ten sposób z powrotem wzbudzą w powietrzu te drgania akustyczne, jakie wywołało zacernienie błony.

Ta „odwrotność”, pozwalająca wzbudzić z powrotem drgania środowiska, których obraz otrzymany został przy pomocy danego

przrządu, że jest właściwa większości omawianych tutaj i w ust. 4 przrządów. Najdawniej znanym przrządem tego rodzaju jest gramofon, stanowiący jak gdyby odwrócenie fonografu. Ostrze, umocowane na sprężystej płytce lub błonie, poruszając się po wyżłobieniach walca lub tarczy „nagranej” tzn. poddanej poprzednio działaniu danych fal głosowych, wprawia płytkę lub błonę w drgania mniej więcej analogiczne do tych, jakie wytworzyły odkształcenia walca czy tarczy. Ważne ulepszenie do tej metody odtwarzania dźwięków wprowadził Poulson (1900 r.). Prądy mikrofonu (p. ust. 4) przepływają przez mały elektromagnes, przed którym przesuwają się długi drut stalowy. Części drutu, znajdujące się w danej chwili przed elektromagnesem, magnetyzują się tym silniej, im większe jest natężenie prądu. Odpowiednio więc do zmian natężenia prądu w elektromagnecie zmienia się namagnesowanie części drutu. Jeżeli teraz tak namagnesowany drut przesuwać będziemy z tą samą prędkością przed elektromagnesem, włączonym w obwód telefonu, niejednostajne namagnesowanie drutu powodować będzie powstawanie prądów indukowanych o natężeniu, zależnym od namagnesowania danej części drutu, i wzbudzać odpowiednie drgania płytki telefonu.

Tony składowe danego dźwięku, o ile, rzecz prosta, częstość drgań nie przekracza granic słyszenia, można przynajmniej częściowo wyznaczać bezpośrednio uchem. Istotnie, jak to pierwszy stwierdził Ohm, a następnie potwierdził Helmholtz, każdy złożony ruch okresowy cząstek środowiska, działający na ucho, jest przez nie rozkładany na drgania harmonijne proste, wywołujące, jak o tym wyżej była mowa, wrażenie tonu. W ten sposób wprawne ucho może ze złożonego dźwięku wyodrębnić kilka lub nawet kilkanaście tonów składowych. Na tej drodze przeprowadzona analiza dźwięku często jednak okazuje się niewystarczająca, a mianowicie wtedy, gdy ilość tonów składowych jest znaczna, oraz gdy chodzi nam o wyznaczenie ich natężenia. Jak bowiem wykazują pomiary, odczuwane przez nas natężenie tonu, wchodzącego w skład dźwięku, jest zawsze mniejsze od natężenia tego samego tonu (o tym samym, obiektywnie biorąc, natężeniu), który słyszymy oddzielnie. Najczęściej przeto do analizy dźwięków służą tzw. rezonatory, tj. ciała, których drgania wtedy tylko przybierają znacniejszą wartość, gdy pobudzająca je fala posiada oznaczoną częstość, zależną od rozmiarów, kształtu i materiału rezonatora (p. rozdz. II ust. 4). Rozporządzając odpowiednio dobranym układem takich rezonatorów, można obserwując na

nich działanie danego dźwięku stwierdzić, które z nich w tych warunkach drgają, i stąd wyznaczyć tony składowe. Jest rzeczą oczywistą, że tego rodzaju metoda może być przy nie-



rys. 27

wielkich zmianach w budowie przyrządu używana i przy badaniu dźwięków w szerszym tego słowa znaczeniu tzn. znajdujących się poza granicą słyszenia. W badaniach głosowych często stosowany jest powietrzny rezonator Helmholtza, gdzie ciałem drgającym jest powietrze zawarte w kuli zaopatrzonej w dwa otwory: mniejszy (b), który przystawia się do ucha, i większy (a), na drugim końcu tej samej średnicy, przez który powietrze rezonatora łączy się z zewnętrznym środowiskiem drgającym (rys. 27).

Częstość tzw. drgań własnych rezonatora (p. rozdz. II ust. 4) jest, według Helmholtza, równa

$$\nu = c \sqrt{\frac{3r}{8\pi^3 R^3}}, \quad (24)$$

gdzie R — promień kuli, r — promień otworu (a).

Zanalizować dźwięk, innymi słowy, znaleźć jego widmo, można również na podstawie krzywej, będącej jego obrazem (p. wyżej). Metod jednak, których się w tym celu używa, rozpatrywać tutaj nie będziemy.

8. — DUDNIENIA.

Rozpatrzmy nieco bardziej szczegółowo przypadek interferencji dwu drgań harmonijnych prostych, o mało różniących się częstościach. Przypuśćmy np. że drgania te posiadają amplitudy jednakowe, częstości zaś równe odpowiednio 499 i 500 drganiom na sekundę. Przypuśćmy dalej, że w pewnej chwili t , którą przyjmujemy za początkową, drgania interferujące posiadają w danym elemencie środowiska tę samą fazę, odchylenia zaś przez nie wywołane wartość największą. Amplituda drgania wypadkowego będzie wtedy jak wiemy, (ust. 5), po prostu sumą arytmetyczną amplitud składowych. Ta zgodność faz drgań składowych nie będzie jednak stała, drgania bowiem posiadają,

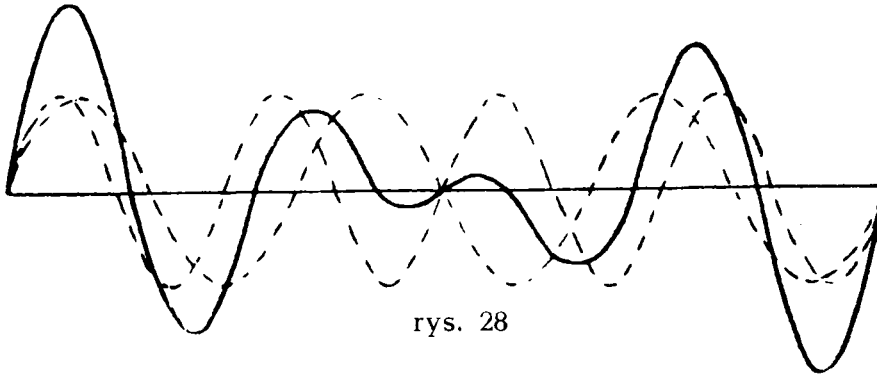
w myśl założenia, częstości różne. Różnica faz będzie stopniowo wzrastała, tak że po upływie 0,5 sek drgania będą w fazach przeciwnych. Istotnie faza drgania o okresie 500 drgań na sekundę różnić się będzie w chwili $t + \frac{1}{2}$ od fazy w chwili t o

$$\varphi_1 = \frac{2\pi(t + \frac{1}{2})}{T} - \frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{500}} = 500\pi,$$

faza zaś drgania o okresie 499 drgań na sekundę o

$$\varphi_2 = 499\pi,$$

$\varphi_1 - \varphi_2$ jest zatem wtedy równe π . Po upływie więc 0,5 sek amplituda drgania wypadkowego spadnie w przypadku równości amplitud drgań składowych do wartości zera. Fazy staną się znów zgodzie po upływie 1 sek, wtedy bowiem $\varphi_1 - \varphi_2$ będzie równe 2π . W ciągu 1 sek amplituda drgania wypadkowego zmieniać się będzie od wartości $2s_0$, gdzie s_0 amplituda drgań składowych, do wartości zero, przechodząc przez maximum i minimum raz na sekundę (maximum początkowego nie bierzemy pod uwagę).



rys. 28

Gdyby częstości drgań składowych były równe odpowiednio 500 i 498, amplituda drgania wypadkowego przechodziłaby, jak to łatwo można sprawdzić, przez maximum i minimum dwa razy na sekundę. Oznaczając więc przez ν_1 i ν_2 częstości drgań składowych, na częstość zmian amplitudy drgania wypadkowego otrzymujemy wzór

$$\nu = \nu_1 - \nu_2. \quad (25)$$

Tak np. w przypadku, gdy $\nu_1 = 400$, $\nu_2 = 300$, $\nu = 100$; odchylenie wypadkowe przechodzi okresowo przez wartości, utworzone na krzywej rys. 28.

Krzywą, odtwarzającą tego rodzaju drgania wypadkowe, można otrzymać w prosty sposób, biorąc dwa kamertony (widełki strojowe), o niewiele różniących się częstościach drgań. Do pręta jednego z nich, drgającego w płaszczyźnie poziomej, przymocowana jest zaczerniona płytka szklana. Nad nią umieszczony jest również poziomo drugi kamerton, zaopatrzony w ostrze, dotykające płytki. Wprawiamy oba kamertony w drgania i przesuwamy powoli górny kamerton równolegle do płytki. Przy stosunku częstości 24 : 25 otrzymujemy krzywą taką, jak na rys. 29, którą podajemy za Chwolsonem. Należy jednak zaznaczyć, że w tym przypadku największe wychylenia krzywej otrzymujemy wtedy, gdy fazy prętów kamertonu są przeciwne.



rys. 29

Tym wahaniom wypadkowej amplitudy towarzyszą wahania natężenia, powodujące w przypadku, gdy częstości drgań nie przekraczają granicy słyszenia, wrażenie dudnienia, znikające stopniowo w miarę wzrostu ν (gdy ν , jak to wynika z niepewnych zresztą pomiarów, jest większe od 400). Stąd też ten przypadek interferencji zazwyczaj nazywamy (nawet gdy częstość drgań leży poza granicami słyszenia) **dudnieniem**.

Gdy drgania składowe, interferujące w danym elemencie objętości, są spowodowane przez płaskie fale odkształcenia, rozchodzące się w tym samym kierunku, odkształcenia wszystkich elementów objętości środowiska będą identyczne. Odkładając przeto na osi odciętych nie czas t , lecz odległość x od pewnej, dowolnie zresztą wybranej płaszczyzny, prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fal, na osi rzędnych odpowiednie odchylenia warstw odkształcanych w chwili $t = t_1$, otrzymamy w przypadkach interferowania fal o częstości 400 i 300 drgań na sekundę krzywą identyczną do krzywej rys. 28. W środowisku, w którym, jakśmy to założyli, prędkość rozchodzenia się zaburzeń nie zależy od częstości drgań, zaburzenia o największej i najmniejszej amplitudzie będą się przesuwały z tą samą prędkością c , co każde z zaburzeń składowych, po upływie zatem t sek przesuną się na odległość $c \cdot t$.

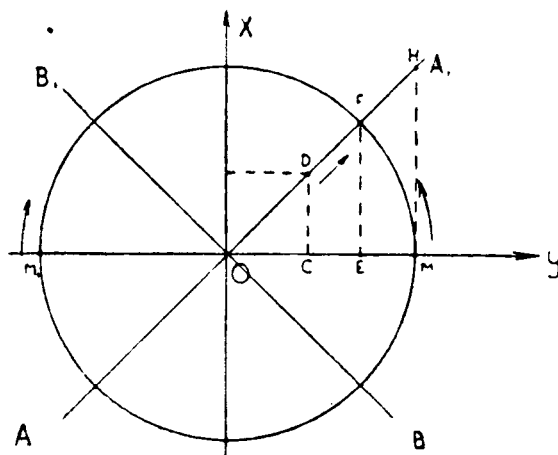
9. — SKŁADANIE DRGAŃ, ZACHODZĄCYCH W KIERUNKACH PROSTOPADŁYCH.

W przypadku, gdy kierunki drgań składowych harmonijnych prostych nie leżą na tej samej prostej, zjawisko interferencji nie zachodzi: jakakolwiek byłaby różnica amplitud i faz drgań składowych, odchylenie wypadkowe nigdy nie będzie miało wartości zero.

W najprostszym przypadku dwu drgań o tej samej amplitudzie i tej samej częstości drgania, zachodzących w kierunkach wzajemnie prostopadłych, ruch wypadkowy będzie ruchem po kole, gdy różnica faz drgań składowych wynosić będzie $\frac{\pi}{2}$ lub $\frac{3}{2}\pi$, albo ruchem wzdłuż prostych, tworzących kąt 45° z kierunkami drgań x i y , gdy różnica faz równa jest zeru lub π . Istotnie, ze wzorów

$$x = s_0 \sin 2\pi \frac{t}{T} \text{ i } y = s_0 \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi \right),$$

gdzie φ jest różnicą faz drgań składowych, wynika, że gdy φ równe jest zeru, punkt drgający po przejściu przez położenie równowagi przesunie się w ciągu czasu t sek na odległość OC w kierunku Oy i na równą jej odległość CD w kierunku Ox , przechodząc w ten sposób do punktu D ; po upływie zaś $2t$ sek przesunie się o OE w kierunku Oy i EF w kierunku Ox i dojdzie do punktu F . Z podobieństwa trójkątów OCD i OEF wynika, że punkty O , D i F leżą na prostej OA tworzącej z osią y kąt α , którego styczna równa jest $DC : OC = FE : OE = 1$, a więc który równy jest 45° . Punkt drgający przesunąć się będzie zatem wzdłuż prostej AA_1 ; odległość jego od położenia równowagi będzie w chwili t równa



rys. 30

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = s_0 \sqrt{2} \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Ruch punktu będzie więc ruchem drgającym harmonijnym prostym, o tej samej częstotliwości drgań, co częstotliwości drgań składowych, i o amplitudzie $\sqrt{2} = 1,41$ razy większej.

Gdy φ wzrośnie do $\frac{\pi}{2}$, w chwili $t = 0$, $x = 0$, $y = OM$. Będziemy mieli do czynienia z przypadkiem, rozpatrzonym już w tomie I na str. 53. Ruch wypadkowy będzie okresowym ruchem kołowym, o okresie równym okresowi drgań składowych; kierunek ruchu będzie przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara. Gdy φ stanie się równe π , punkt drgający w chwili $t = 0$ będzie podobnie, jak w przypadku pierwszym, przechodził przez położenie równowagi, przesuając się jednak tym razem w kierunku ujemnych y -ów. Drgania punktu zachodzić będą wzdłuż prostej BB_1 z tą samą, co poprzednio, amplitudą i z tą samą, co poprzednio, częstotliwością. I wreszcie, gdy φ stanie się równe $\frac{3}{2}\pi$, otrzymamy znów ruch po kole o promieniu równym s_0 , lecz o kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, w chwili bowiem $t = 0$ punkt znajdować się będzie w położeniu M_1 i stąd będzie się przesuwał ku górze w kierunku Ox i na prawo w kierunku Oy .

Przy wszystkich innych wartościach φ punkt poruszać się będzie po elipsie.

W przypadku ogólniejszym, gdy amplitudy drgań składowych nie są jednakowe, mamy

$$x = s_x \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad \text{ i } \quad y = s_y \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi \right)$$

lub

$$\frac{x}{s_x} = \sin 2\pi \frac{t}{T}; \quad \frac{y}{s_y} = \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi \right) = \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos \varphi + \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin \varphi.$$

Rugując z tych równań $\sin \frac{2\pi t}{T}$ i $\cos \frac{2\pi t}{T}$, otrzymujemy

$$\frac{x^2}{s_x^2} \cos^2 \varphi + \frac{y^2}{s_y^2} - \frac{2xy}{s_x \cdot s_y} \cos \varphi = \sin^2 \varphi - \frac{x^2}{s_x^2} \sin^2 \varphi,$$

skąd po uproszczeniu mamy

$$\frac{x^2}{s_x^2} + \frac{y^2}{s_y^2} - \frac{2xy}{s_x \cdot s_y} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (26)$$

Jest to równanie elipsy, której środek znajduje się w punkcie O , przyczem wobec tego, że największą wartością x może być s_x , największą wartością y — s_y , elipsa ta jest wpisana do prostokąta o bokach równych odpowiednio s_x i s_y . Gdy $\varphi = 0$ lub π , równanie to przybiera kształt

$$\left(\frac{x}{s_x} \mp \frac{y}{s_y} \right)^2 = 0,$$

gdzie znak — odpowiada $\varphi = 0$, znak + odpowiada $\varphi = \pi$. W pierwszym przypadku mamy

$$x = \frac{s_x}{s_y} y, \quad (26a)$$

równanie prostej leżącej w ćwierci koła, zawartej między dodatnimi kierunkami osi Ox i Oy , w drugim

$$x = -\frac{s_x}{s_y} y, \quad (26b)$$

równanie prostej, leżącej w ćwierci koła, zawartej między dodatnim kierunkiem osi Ox i ujemnym osi Oy .

Gdy $\varphi = \frac{\pi}{2}$ lub $\frac{3}{2}\pi$, mamy

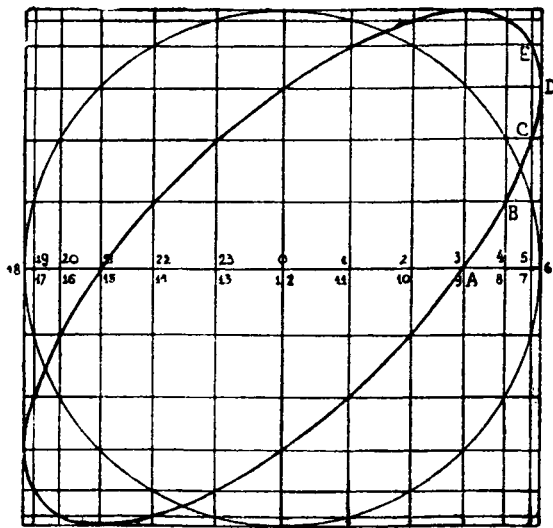
$$\frac{x^2}{s_x^2} + \frac{y^2}{s_y^2} = 1, \quad (26c)$$

równanie elipsy, której osie są osiami Ox i Oy . Gdy $s_x = s_y = s_0$, równanie to przechodzi w równanie koła

$$x^2 + y^2 = s_0^2 \quad (26d)$$

o promieniu równym s_0 .

Tory te możemy wykreślić, posługując się metodą, daną przez Lissajous (1857 r.). Obwód koła (rys. 31), opisanego promieniem równym amplitudzie s_0 , dzielimy na pewną ilość równych części, tym większą, im dokładniej chcemy wykonać nasz rysunek i im mniejsza jest różnica faz drgań składowych; na naszym rysunku obwód podzielony jest na dwadzieścia cztery części. Przez otrzymane w ten sposób punkty podziału prowadzimy pionowe



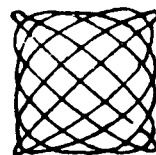
rys. 31

i poziome linie, równoległe do pionowej i poziomej średnicy koła. Przecięcia tych prostych ze średnicami wyznaczają nam położenia, jakie punkt drgający wzdłuż danej średnicy zajmowałby po upływie $0, \frac{1}{24}T, \frac{2}{24}T \dots$ od chwili rozpoczęcia ruchu. Przypuśćmy np. że drganie w kierunku poziomym wyprzedza drganie w kierunku pionowym, tak że w chwili $t = 0$, położenie punktu drgającego wyznacza np. punkt A , innymi słowy, że jedno z drgań wyprzedza drugie o $\frac{1}{8}T$ lub że różnica faz wynosi $\frac{\pi}{4}$. Po upływie $\frac{1}{24}T$ punkt drgający przesunie się o jedną podziałkę ku górze i o jedną podziałkę w prawo, zajmie więc położenie B ; po upływie $\frac{2}{24}T$ przesuwając się w ten sam sposób znajdzie się w C , po upływie zaś $\frac{3}{24}T$ w D , osiągając największe możliwe wychylenie w kierunku poziomym; w następną zatem $\frac{1}{24}$ część okresu odchylenie jego poziome zmniejszy się o jedną podziałkę, odchylenie zaś pionowe o jedną podziałkę wzrośnie: punkt drgający przejdzie do E . W ten sposób znajdując kolejne położenia punktu i łącząc je następnie linią krzywą, wykreślimy tor punktu, który, jak o tym wyżej była mowa, będzie elipsą.

W miarę wzrastania różnicy faz elipsa staje się coraz bardziej „wydęta”, jej osi główne zbliżają się do pionowej i poziomej osi rysunku. Przy $\varphi = \frac{\pi}{2}$ „wydęcie” jest największe, jedna z osi elipsy jest pionowa, druga — pozioma. Gdy φ przekracza $\frac{\pi}{2}$, elipsa zaczyna się spłaszczać, osi jej odchylają się od kierunków poziomego i pionowego w przeciwną stronę, niż poprzednio. Przy $\varphi = \pi$ elipsa przechodzi w linię prostą. Przy dalszym wzroście φ prosta przechodzi w elipsę, początkowo bardzo spłaszczoną i „wydymającą się” stopniowo. Jednocześnie zmienia się kierunek ruchu punktu drgającego. Dopóki $\varphi \leq \pi$ punkt porusza się po elipsie w kierunku przeciwnym

kierunkowi ruchu wskazówek zegarka (elipsa prawa), gdy $\varphi \geq \pi$, w kierunku zgodnym z kierunkiem tego ruchu (elipsa lewa).

Gdy częstości drgań składowych nie są jednakowe, zjawisko staje się o wiele bardziej złożone. Tak np. w przypadku, gdy częstości drgań (o równych amplitudach) są w stosunku takim jak 5 : 6, tor punktu drgającego (przy różnicy faz $\frac{\pi}{2}$) przedstawia krzywa rys. 32. Systematyczne badania tego rodzaju drgań złożonych przeprowadził Lissajous (1855 i 1857 r.), stąd też nazwa krzywych lub figur Lissajous, jaką zazwyczaj oznaczamy otrzymane w ten sposób krzywe.

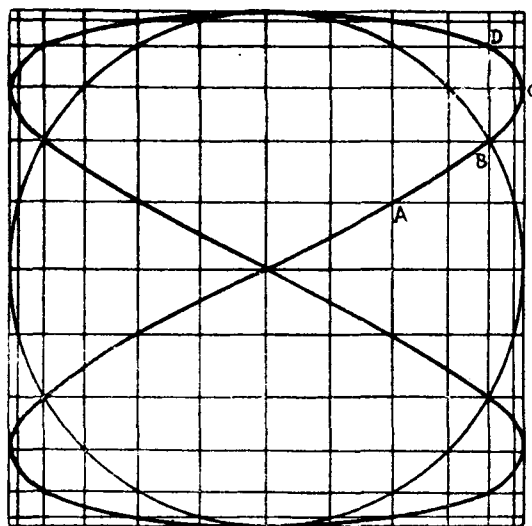


rys. 32

Lissajous posługiwał się tym zjawiskiem do badania drgań strun, co na ogół ze względu na wielką szybkość ich ruchu nastręcza duże trudności doświadczalne. Badana struna, napięta pionowo, była obserwowana przez poziomy mikroskop, przymocowany do jednego z prętów również poziomego kamertonu, który mógł drgać w płaszczyźnie pionowej. Gdy kamerton jest w spoczynku, obraz w mikroskopie oświetlonej silnie części drgającej struny opisuje linię poziomą; gdy struna jest w spoczynku, a drga kamerton i wraz z nim mikroskop, obraz oświetlonej części struny opisuje linię pionową; gdy wreszcie drga i struna i kamerton, obraz opisuje jedną z krzywych Lissajous. Gdy stosunek częstości drgań jest równy stosunkowi liczb całkowitych, obraz opisuje okresowo zawsze tę samą krzywą, z której kształtu możemy wnioskować o stosunku częstości drgań kamertonu i struny. Helmholtz udoskonalił następnie (1863 r.) ten tak zwany mikroskop wibracyjny (łac. vibrare — drgać).

Przy wykreślaniu krzywych Lissajous dla różnych stosunków częstości drgań i różnych faz posługujemy się tą samą metodą, o jakiej była mowa wyżej. Tym razem jednak przesunięciom o n podziałek w kierunku jednej ze średnic odpowiadać będzie przesunięcie o m podziałek w kierunku średnicy drugiej, zależnie od stosunku częstości drgań. Tak np. w przy-

padku, gdy $n : m = 1 : 2$, różnica zaś faz równa jest zeru, punkt drgający znajdzie się po upływie $\frac{1}{16}T$, gdzie T okres drgania

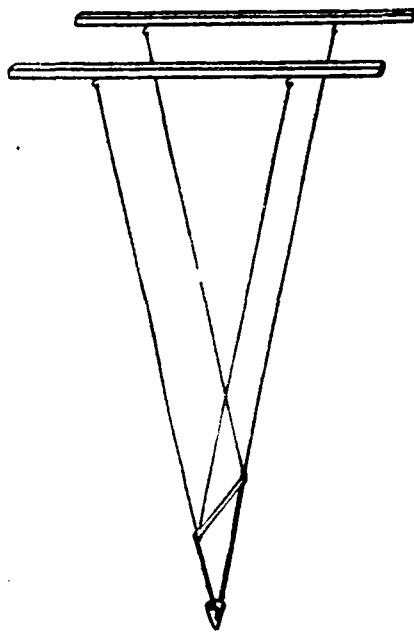


rys. 33

o mniejszej częstości, w punkcie A (rys. 33), odchylając się w kierunku poziomym o dwie podziałki, w kierunku pionowym o 1 podziałkę, po upływie następnych $\frac{1}{16}T$ — w punkcie B , dalej w punkcie C i D opisując w ten sposób krzywą, taką, jak na rysunku.

Prosty sposób otrzymywania krzywych Lissajous dał Abendroth. Poziomy drążek wisi na

dwóch parach sznurków, przechodzących przez wycięte w drążku wąskie otwory (rys. 34). Drążek ten można przesuwając wyżej lub niżej, zwiększając lub zmniejszając w ten sposób długość znajdujących się nad nim sznurków. Na dolnych końcach sznurków wisi lejek, wypełniony piaskiem. Górna część przyrządu może wahać się swobodnie w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez drążek, przy czym okres jej wahania wyznaczony jest przez pionową odległość drążka od punktów zawieszenia sznurków. Dolna część przyrządu może, niezależnie zupełnie od górnej, wahać się w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny wahań części górnej, okres jej wahania jest wyznaczony przez pionową odległość lejka od drążka. Gdy wprowadzimy w ruch wahadłowy górną i dolną część przyrządu, koniec lejka wykonywać będzie wahań złożone; tor jego ruchu nakreśli wysypujący się z niego piasek. Krzywą, otrzymaną w ten sposób, przy stosunku pionowych odle-



rys. 34

głości drążka i lejka od odpowiednich punktów zawieszenia równym $16:9$ i przy różnicy faz $\frac{\pi}{6}$, wyobraża krzywa rysunku 35.

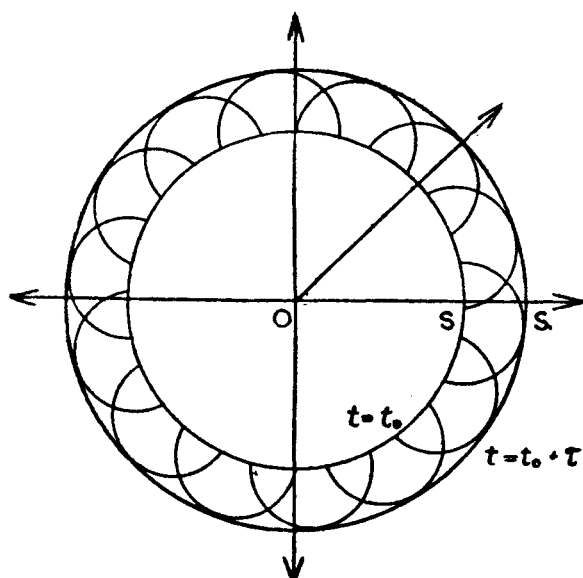
10. — ZASADA HUYGENSA-FRESNELA.

Z dotychczasowych naszych rozważań, dotyczących rozchodzenia się fal odkształcenia wynika, że element objętości A środowiska, do którego w danej chwili odkształcenie dochodzi, przekazuje je w chwili następnej elementom sąsiednim, leżącym w kierunku rozchodzenia się fali, tak że dla tych części środowiska element A staje się jak gdyby samodzielnym źródłem zaburzeń. To rozumowanie, dotyczące, rzecz prosta, wszystkich elementów objętości, przez które w danej chwili przechodzi fala odkształcenia i których miejscem geometrycznym jest czoło fali (p. ust. 1), jest punktem wyjścia twierdzenia, sformułowanego



rys. 35

przez Huygensa (1690 r.), a następnie uzupełnionego przez Fresnela (1816 r. i lata późniejsze) i nazywanego zasadą Huygensa-Fresnela.

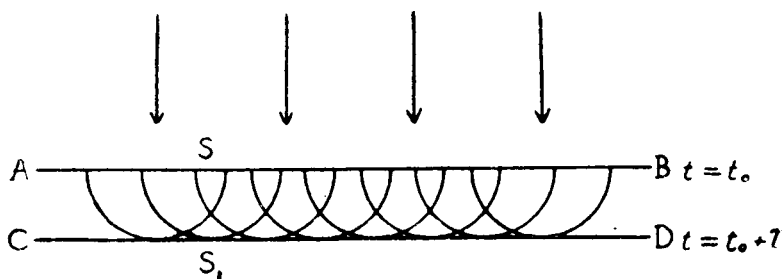


rys. 36

Przypuśćmy, że źródłem zaburzeń jest kula lub punkt materialny, wobec czego czoło fali tworzy w chwili t_0 powierzchnię kulistą (rys. 36). Każdy z punktów tej powierzchni możemy, zgod-

nie z założeniem Huygensa, uważać za samodzielne źródło zaburzeń, różniące się jednak od źródła istotnego tym, że zaburzenia, przezeń wysyłane, rozchodzą się tylko w kierunku pierwotnego rozchodzenia się fali, że więc, zgodnie zresztą z istotnie obserwowanym przebiegiem zjawiska, fala powrotna nie istnieje. W ciągu więc czasu τ zaburzenia wysyłane przez każdy z elementów S , dojdą do punktów, leżących na powierzchniach półkul, opisanych ze środka tych elementów, promieniem $r = c \cdot \tau$. Te tak zwane fale cząstkowe będą w punktach, leżących wewnątrz warstwy SS_1 , w chwili $t = t_0 + \tau$ interferowały. Tym razem interferencji będą, ściśle biorąc, podlegały zgęszczenia i rozrzedzenia środowiska.

W wyniku interferencji odkształcenia w warstwie będą, według Fresnela, w danej chwili równe zero, tak że wartość od zera różną zachowają jedynie w punktach powierzchni S_1 , stycznej do powierzchni fal cząstkowych, gdyż w tych punktach fale cząstkowe się nie spotykają. Po upływie zatem τ sek czoło fali przesunie się istotnie o $c \cdot \tau$ cm. Podobnie rozchodzić się będzie fala płaska; w tym przypadku powierzchnią styczną do powierzchni fal cząstkowych (obwiednią tych fal) będzie płaszczyzna (rys. 37). Opierając się na zasadzie



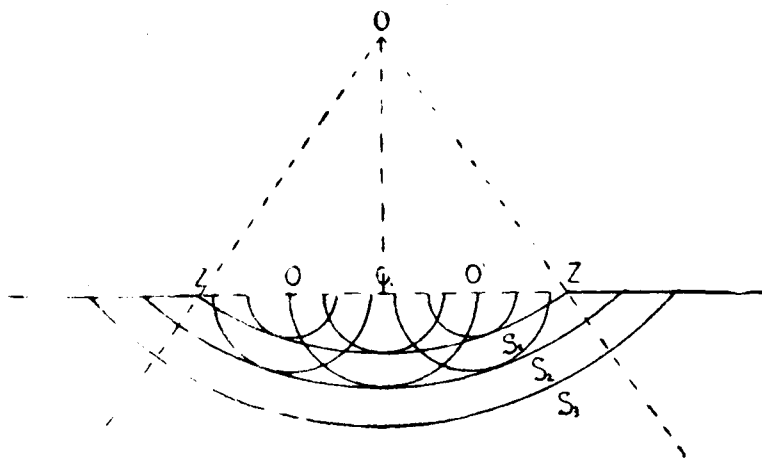
rys. 37

Huygensa-Fresnela, możemy, nieco inaczej, niż poprzednio, rozpatrywać odkształcenie, jakiego w danej chwili doznaje dowolny element środowiska, przez które przechodzi fala odkształcenia, a mianowicie, uważać je jako odkształcenie wypadkowe, spowodowane przez interferencję zaburzeń, wysyłanych przez poszczególne elementy czoła fali i dochodzących jednocześnie do rozważanego elementu.

Poprzestajemy tutaj na tym prostym i bardzo zresztą niewystarczającym wyprowadzeniu zasady Huygensa-Fresnela, która przy głębszej analizie nasuwa niejedną trudność. Do nieco bardziej szczegółowego rozpatrzenia tej zasady i wynikających z niej wniosków powrócimy przy omawianiu zjawisk świetlnych.

11. — UGINANIE SIĘ FAŁ SPRĘŻYSTYCH.

Ten sposób pojmowania rozchodzenia się fali sprężystych pozwoli nam zdać sobie sprawę ze zjawisk, zachodzących wtedy, gdy rozchodzenie się fali napotyka w pewnym miejscu na przeszkodę, zakłócającą dalszy bieg fali. Niech przeszkodą tą będzie np. zaopatrzona w otwór przesłona nieprzezroczysta, tzn. taka, która nie przenosi dochodzących do niej zaburzeń do warstw leżących poza nią. Zaburzenia powstające w środowisku będą wtedy przenoszone do tej jego części, która znajduje się poza przesłoną, jedynie przez otwór w przesłonie. Niech O będzie punktowym (lub kulistym) źródłem zaburzeń, znajdującym się w jednakowej odległości od obu brzegów przesłony ZZ (rys. 38). W pewnej chwili t zaburzenie

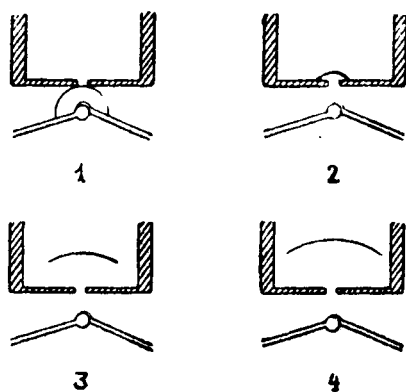


rys. 38

wysłane przez O , dojdzie do elementu O_1 środowiska, znajdującego się w środku otworu. Element ten, zgodnie z zasadą Huygensa-Fresnela, stanie się samodzielnym źródłem zaburzeń, wysyłającym fale odkształceń w kierunku pierwotnego rozchodzenia się, tak że w chwili $t + t_1$, gdy zaburzenie wysłane przez O dojdzie do elementów O' i elementy te ze swej strony staną się nowymi źródłami zaburzeń, zaburzenie, wycho-

dzące z O_1 zdąży dojść do elementów, znajdujących się poza płaszczyzną ZZ i leżących na powierzchni półkuli, opisanych z O_1 , jak ze środka, promieniem równym $c\tau_1$. Podobnie w chwili $t + \tau_1 + \tau_2$, gdy zaburzenia wychodzące z O dojdą do skrajnych punktów otworu ZZ , fale cząstkowe, wysłane przez O_1 i O' , będą tworzyły półkule o promieniach, równych odpowiednio $c(\tau_1 + \tau_2)$ i $c\tau_2$. Odległości wszystkich punktów obwiedni tych fal od punktu O będą jednakowe i równe $c(t + \tau_1 + \tau_2)$; fala zatem przechodząca przez otwór będzie częścią fali kulistej, wychodzącej z punktu O . Z biegiem czasu promienie fal cząstkowych będą stopniowo wzrastały, obwiednia ich będzie się odsuwała od otworu, przyjmując położenie $S_2, S_3 \dots$. Fala odkształcenia będzie dochodziła do coraz to dalej położonych za przesłoną elementów środowiska, ogarniając swoim działaniem nawet te elementy, które leżą poza granicami stożka ZOZ , a więc do których zaburzenie, wysyłane przez źródło, nie mogłoby dojść, gdyby, tak jak to przyjmowaliśmy uprzednio, rozchodziło się wzdłuż linii prostych, wychodzących promienisto ze źródła zaburzeń. To odstępstwo od prostoliniowego rozchodzenia się nazywamy uginaniem się fali lub dyfrakcją (łac. *diffrangere* — łamać).

Stopniowe przekształcanie się obwiedni fal cząstkowych, wychodzących z otworów w przesłonie, na falę coraz bardziej zbliżoną



rys. 39

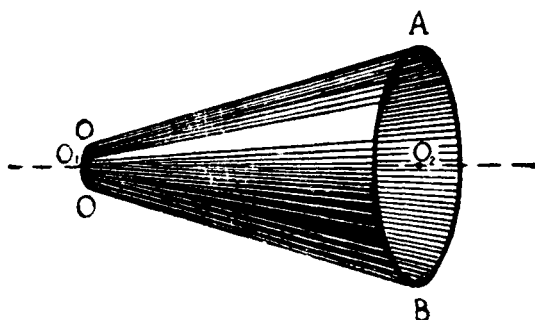
do fali kulistej wykazał (1899 r.) doświadczalnie Wood, fotografując przy użyciu metody, opracowanej przez Toepplera, falę zgęszczenia wysyłaną przez iskrę elektryczną i przechodzącą przez niewielki otwór w przesłonie, umieszczonej w pewnej odległości od iskiernika. Rys. 39, będące schematycznym odtworzeniem fotografii Wooda, wykazują dostatecznie wyraźnie zachodzące w tym przypadku zjawisko.

Uginanie to jest tym wyraźniejsze, im większa jest długość fali danego odkształcenia. Załóżmy dla uproszczenia, że fala odkształceń jest nie tylko falą płaską, lecz że w dodatku

się zaburzeń stawać się będzie coraz mniejsze. W przypadku granicznym $\lambda = 0$ uginania nie będzie zupełnie.

Fale głosowe, w ściślejszym tego słowa znaczeniu, posiadają dość znaczną stosunkowo długość — w powietrzu zawartą w granicach od mniej więcej 1600 cm do 1,6 cm — wobec czego zazwyczaj silnie się uginają, obchodząc jak gdyby przeszkody, umieszczone na drodze ich rozchodzenia się. Zjawisko cienia geometrycznego, tak charakterystyczne dla zjawisk świetlnych, stanowi w zjawiskach głosowych rzadko stosunkowo spotykany wyjątek. Gdy przesłona posiada nie jeden, lecz kilka lub kilkanaście, dość blisko rozmieszczonych otworów, w niewielkiej już odległości poza nimi głos dochodzić będzie na ogół do wszystkich elementów środowiska. Przesłona jednak będzie i tym razem wywierała pewien wpływ na rozchodzenie się fali, rozkład bowiem energii akustycznej w przestrzeni leżącej poza przesłoną będzie inny, niż w przypadku fali niezakłóconej, przy czym zmiany będą tym większe, im mniejsza jest długość danej fali.

W prostym przypadku rury, lekko rozszerzonej (rys. 41), używanej często do wzmacniania odbioru fal głosowych



rys. 41

(mniejszy otwór przystawiany jest do ucha lub do przyrządu mierniczego), sinusoidalna fala płaska, dochodząca do szerszego otworu AB, wysyła do punktu, leżącego na osi $O_1 O_2$ rury, zaburzenia o zgodnych mniej więcej fazach, jeżeli tylko odległości skrajnych elementów AB

od punktu O_1 nie przekraczają odległości $O_1 O_2$ więcej, niż o $\frac{\lambda}{2}$.

W tym przeto przypadku natężenie w punkcie O_1 będzie największe. W punktach, leżących również w wąskim otworze, lecz z boku od osi, natężenie będzie na ogół mniejsze, zgodność bowiem faz będzie mniejsza, niż w O_1 ; może się nawet zdarzyć, że natężenie to spadnie do zera, jeżeli odległość danego punktu od otworu będzie taka, że za-

burzenia, wysyłane przez elementy jednej połowy fali zawartej w otworze powierzchni, będą zawsze miały, dochodząc do danego punktu, fazę przeciwną do zaburzeń, wysyłanych przez elementy drugiej połowy. Rachunek, którego tu nie będziemy przytaczali, doprowadza do wniosku, że przy tych samych rozmiarach otworu, odległość od osi punktu o natężeniu zerowym jest tym większa, im większa jest długość fali. W przypadku zatem, gdy długość padającej fali będzie dostatecznie wielka w porównaniu z wymiarami liniowymi otworu AB , żaden punkt przekroju OO nie będzie czynił zadość temu warunkowi, co więcej zmniejszanie się natężenia akustycznego w miarę oddalania się od osi może być wtedy tak małe, że będzie można uważać je za mniej więcej stałe w całym przekroju OO ; ograniczenie fali przez otwór AB ujawni się więc tym razem jedynie we wzmacnieniu natężenia w przekroju OO .

W tych przypadkach, gdy zależy, aby fale biegły prostoliniowo, a więc aby uginanie było możliwie małe, używa się fal o częstości znacznie większej od częstości fal głosowych, w ściślejszym tego słowa znaczeniu. Te ultradźwięki, o których wspominaliśmy już wyżej, są zazwyczaj wytwarzane w sposób, wskazany przez Langevina (1915 r.), a mianowicie przez umieszczenie w drgającym obwodzie elektrycznym płytki kwarcowej. Płytką tą, poddawana okresowym zmianom napięcia elektrycznego, kurczy się i wydłuża, stanowiąc źródło drgań akustycznych o częstości równej częstości drgań elektrycznych obwodu. Na tej drodze można otrzymać wielkie częstości, sięgające 3000000 drgań na sek, o których mowa była wyżej. W praktyce, gdy chodzi o przyrządy, służące do zgłębiania morza i wykrywania nierówności dna morskiego (p. ust. 12), częstości używane są o wiele niższe, około 50000 drgań na sek, czemu odpowiada w wodzie długość fali około 3 cm, pochłanianie bowiem energii akustycznej jest w przypadku fal krótszych zbyt duże (p. ust. 4).

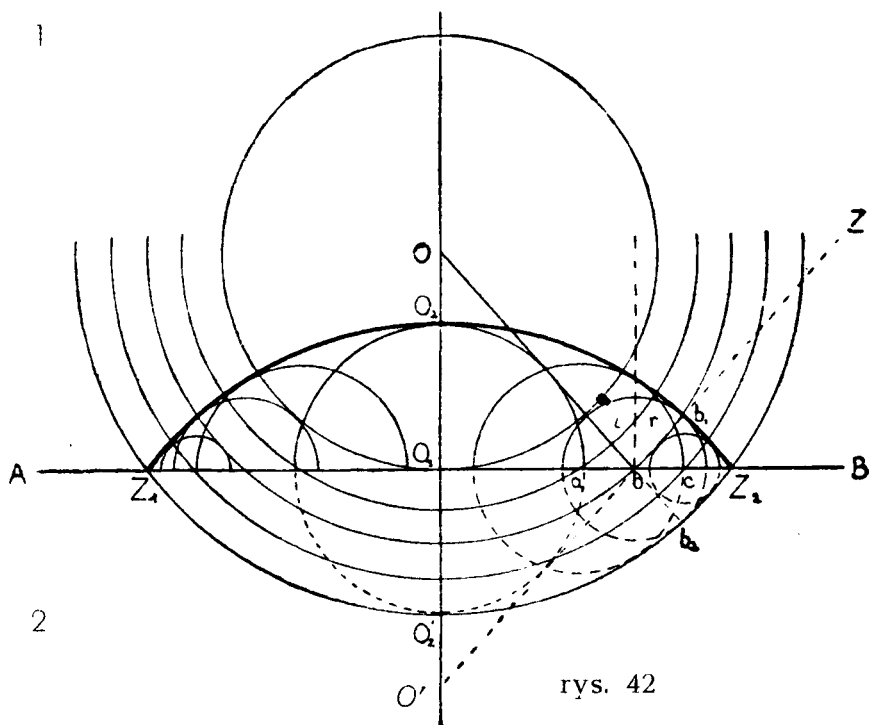
Te wnioski, oparte na zastosowaniu zasady Huygensa-Fresnela do zjawisk akustycznych a których teoretyczne uzasadnienie dał Rayleigh (1880 r. i lata późniejsze) zostały niejednokrotnie potwierdzone przez doświadczenie.

Istnienie cienia geometrycznego w przypadku fali, wzbudzonej przez wybuch w wodzie, a której długość jest na ogół niewielka, stwierdził (1882 r.) Le Conte. Stevard i Stilles dokładnie zbadali (1914 r.) uginanie przy przechodzeniu przez szczelinę, otrzymując wyniki, zgodne na ogół z wywodami teoretycznymi. Altberg, pracując

z bardzo krótkimi falami (około 0,8 mm), wysyłanymi przez rozbrojenia iskrowe, stwierdził (1907 r.) w przestrzeni poza siatką, utworzoną z szeregu równoległych drążków, istnienie maximów i minimów ciśnienia, rozmieszczonych w oznaczonych odległościach, zależnie od długości fali, a więc zjawisko analogiczne do wyżej pokrótce omówionego zjawiska, zachodzącego w lejkowatej rurze. Podobnie Humby otrzymał (1927 r.) zjawiska akustyczne, analogiczne do znanych z optyki zjawisk dyfrakcji, używając drgań o częstotliwości 4000 drgań na sekundę.

12. — ODBIJANIE SIĘ FAL.

Gdy fala odkształcenia dochodzi do powierzchni, rozgraniczającej dwa środowiska o różnych własnościach fizycznych, część tylko przenoszanej przez nią energii przechodzi do środo-



rys. 42

wiska drugiego, pozostała energia wraca z powrotem do środowiska pierwszego, powodując w nim powstanie fali odbitej.

Przypuśćmy, odkładając rozpatrzenie ogólniejszego przypadku do ustępu następnego, że środowisko 2 jest środowiskiem nie przenoszącym dalej fali, że więc cała energia zostaje odbita z powrotem do środowiska 1. Taki przypadek zachodzi wtedy, gdy gęstość i sprężystość środowiska 2 są albo bardzo wielkie albo znikomo małe w porównaniu z gęstością i sprężystością środowiska 1. Załóżmy poza tym, że powierzchnia rozdziału AB jest powierzchnią płaską (rys. 42), o rozmiarach tak

wielkich w porównaniu z długością fali, że możemy całkowanie pominąć uginanie, zachodzące na granicy tej powierzchni.

Oznaczmy opory akustyczne (p. ust. 4) środowisk 1 i 2 odpowiednio przez r_1 i r_2 , gdzie $r_1 = c_1 \rho_1 = \sqrt{e_1 \rho_1}$ i $r_2 = c_2 \rho_2 = \sqrt{e_2 \rho_2}$, i stosunek ich $\frac{r_1}{r_2}$ przez q . Rozważania teoretyczne Poissona (1819 r.) Rayleigha (1880 r.), Drudego (1890 r.) i in. prowadzą do wniosku, że w przypadku prostopadłego padania fali płaskiej na powierzchnię rozdziału AB , stosunek natężenia fali odbitej I_o do natężenia fali padającej I_p można, pomijając wpływ tarcia wewnętrznego środowiska, wyrazić wzorem

$$I_o = I_p \left(\frac{q - 1}{q + 1} \right)^2, \quad (27)$$

wartość więc I_o przybliża się nieograniczenie do wartości I_p , gdy q albo dąży do zera, gdy więc $r_1 = c_1 \rho_1$ jest bardzo małe w porównaniu z r_2 albo gdy q dąży do ∞ , a więc gdy r_1 jest w porównaniu z r_2 bardzo wielkie. Jeżeli badanymi środowiskami są np. powietrze i woda, przy czym fala przechodzi z powietrza do wody, mamy $r_1 = 33130 \cdot 0.001293 = 42,84 \text{ g/cm}^2 \text{ sek}$, $r_2 = 142400 \cdot 1 \text{ g/cm}^2 \text{ sek}$, stąd $q = 0,0003$, a zatem $I_o \div 0,9988 I_p$; przy rozchodzeniu się fal w kierunku odwrotnym — z wody do powietrza

$$q = \frac{142400}{42,84} = 3300, \text{ stąd } I_o = \left(\frac{3299}{3301} \right)^2 I_p = (0,9994)^2 I_p = 0,9998 I_p.$$

Zarówno więc w pierwszym, jak i w drugim przypadku prawie cała energia ulega odbiciu. Tę zależność energii odbitej od oporu akustycznego potwierdziły doświadczenia Boyle'a i Taylora (1926).

Gdy fala odkształcenia, wychodząca z punktu O , będącego źródłem zaburzeń, dochodzi do punktów $a, b, c \dots$ (rys. 42) powierzchni AB rozdziału środowisk 1 i 2, punkty te, zgodnie z zasadą Huygensa-Fresnela, stają się jak gdyby samodzielnymi źródłami zaburzeń; wysyłane przez nie fale cząstkowe będą jednak tym razem rozchodziły się nie w kierunku rozchodzenia się fali padającej, lecz w kierunku przeciwnym, tak że fala odkształcenia znów powróci do środowiska 1.

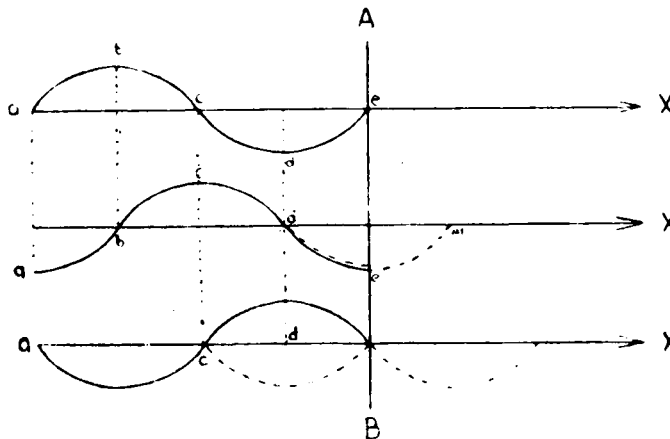
Fala ta będzie podobnie, jak i fala padająca, falą kulistą, której środek znajdować się będzie w punkcie O' , leżącym na prostopadłej OO_1 , opuszczonej z O na powierzchnię AB , w tej samej od powierzchni odległości, co źródło zaburzeń (rys. 42).

Istotnie, gdyby środowisko było jednorodne, a więc, gdyby powierzchni rozdziału nie było, w przeciągu czasu, jaki upłynął od chwili, gdy fala doszła do punktu O_1 , do chwili, gdy fala doszła do punktów Z_2Z_1 , fala przesunęłaby się do punktu O'_2 , promień więc fali cząstkowej wyniósłby $O_1O'_2$, w kierunku zaś dowolnego promienia Ob , promień fali wysłanej z punktu b byłby równy bb_2 . Ponieważ prędkość rozchodzenia się ma po odbiciu tę samą, co poprzednio wartość, gdyż fala odbita rozchodzi się w tym samym, co padająca, środowisku, promienie odbitych fal cząstkowych będą odpowiednio równe $O_1O'_2$ i bb_2 . Odległość zatem punktu O_2 obwiedni od punktu O' będzie równa $O'O_1 + O_1O_2 = OO_1 + O_1O'_2 = R$, gdzie R — promień kuli, opisanej z O i przechodzącej przez punkt O'_2 ; podobnie z równości trójkątów O_1Ob i $O_1O'b$ i z przyjętego założenia, że $OO_1 = O_1O'$ wynika, że $Ob_2 = O'b = R$, gdzie R promień tej samej, co poprzednio kuli. Wszystkie więc punkty obwiedni odbitych fal cząstkowych znajdować się będą stale w jednakowej odległości od punktu O' , który będzie jej środkiem geometrycznym. Fala odbita rozchodzić się będzie tak, jak gdyby źródłem zaburzeń był punkt O' . Punkt ten nazywamy obrazem punktu O . Prosta Ob_2 , wyznaczająca kierunek rozchodzenia się fal padających w punkcie b , tworzy z prostopadłą (normalną) do powierzchni AB w tym punkcie kąt ten sam, co prosta $O'b_1$, wyznaczająca kierunek fal odbitych, jak to bezpośrednio wynika z równości trójkątów OO_1b i $O'O_1b$. Nazywając pierwszy z tych kątów kątem padania, drugi — kątem odbicia, możemy powiedzieć, że kąt padania równy jest kątowi odbicia.

Podobnie rozumując, udowodnilibyśmy bez trudu, że fala płaska po odbiciu od powierzchni AB pozostanie płaską i że kąt odbicia będzie i tym razem równy kątowi padania. Można by stąd wnioskować, że fala odbita jest po prostu jak gdyby przedłużeniem fali padającej i że odbicie zmienia jedynie kierunek jej rozchodzenia się. Taki wniosek jest słuszny tylko w przypadku, gdy środowisko odbijające jest o wiele rzadsze od środowiska, z którego fale wychodzą. Wtedy istotnie, faza odchylenia przy odbiciu żadnej zmianie nie ulega; wychylenia cząstek środowiska z położenia równowagi zachowu-

ją w fali odbitej ten sam znak, jaki by miały, gdyby powierzchnia odbijającej AB nie było i gdyby fala swobodnie rozchodziła się dalej.

Niech ax będzie kierunkiem rozchodzenia się fali płaskiej, prostopadle do powierzchni rozdziału AB (rys. 43) i niech krzywa $abcd$, o której dla uproszczenia zakładamy, że jest sinusoidą, odtwarza wychylenia cząstek w chwili, gdy zaburzenia dochodzą do AB . Gdyby powierzchnia rozdziału nie było, w przeciągu następnej ćwierci okresu fala przesunęłaby się

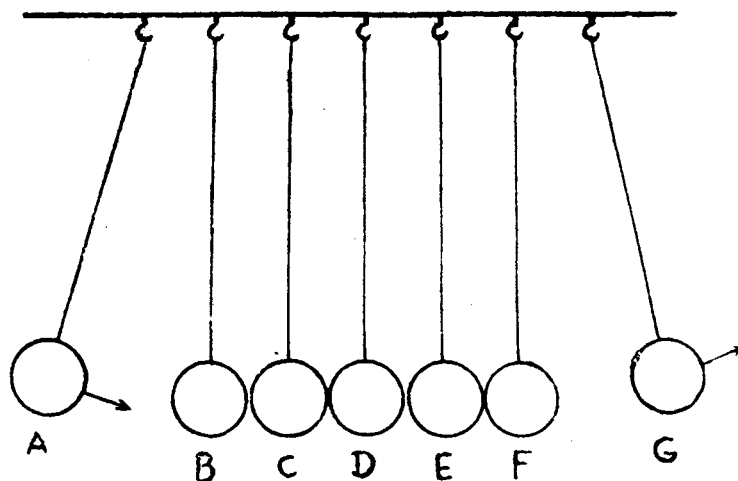


rys. 43

o ćwierć swej długości i cząstki, leżące poza AB , doznałyby odchylen, przedstawionych przez krzywą ee' . Na skutek odbicia odchylen tych doznają cząstki, leżące po stronie ujemnych x -ów na krzywej cd , znak jednak wychyleń pozostaje bez zmiany: i krzywa ed leży, podobnie jak ee' , poniżej osi ax (na rys. amplitudy fali odbitej i padającej są jednakowe; odbicie jest zatem całkowite). Po upływie połowy okresu fala odbita dojdzie do punktu c , po upływie całego okresu do a . W przypadku zatem fali podłużnej cząstki środowiska poruszać się będą w tym samym kierunku, w jakim by się poruszały, gdyby odbicia nie było; zgęszczenia więc odbijać się będą jako rozrzedzenia, rozrzedzenia jako zgęszczenia, fazy więc zmiany objętości (a co za tym idzie i ciśnienia) znak swój zmieniają.

Modelem, który pomoże nam wyjaśnić sobie, przynajmniej do pewnego stopnia, zachodzące w tym przypadku zjawiska, jest przykład Mariotte'a (tom I, str. 167). Gdy zderzające się kule mają jednakową masę, wtedy kula A spadając z pewnej wysokości i uderzając kulę B , odda jej całą swą energię ruchu i zatrzyma się, to samo zajdzie z kulą B , która odda nabytą energię kuli C itd., dopiero ostatnia kula G , stykająca się z powietrzem, będzie się dalej poruszała.

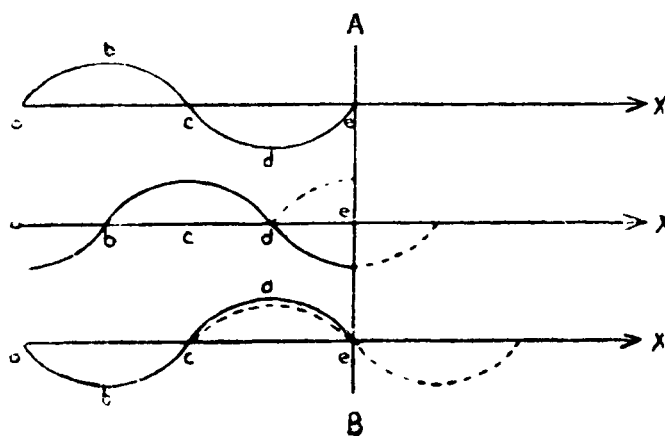
Wyobraźmy sobie, że kule te połączone są doskonałymi sprężynami; kula G poruszając się w kierunku wskazanym na rys. strzałką, pociągnie za sobą kulę F, ta zaś z kolei kulę E itd. Działanie to dojdzie, rzecz prosta, do kuli A wprowadzając ją w ruch o tym samym, co



rys. 44

poprzednio kierunku. Zjawisko zachodzi tak, jak gdyby z chwilą uderzenia ostatniej kuli G powstawał impuls, działający na kule w tym samym kierunku, co impuls początkowy. Jednocześnie po odbiciu zmienia się charakter wzajemnego działania kul; kule nie podlegają już uderzeniom, lecz ciągnięciom.

Gdy środowisko drugie jest gęstsze, wtedy przy odbiciu kierunek odchylenia zmienia się na przeciwny, tak że



rys. 45

zachodzi jak gdyby strata połowy fali. Niech jak poprzednio, sinusoidalna fala płaska pada prostopadle na powierzchnię rozdziału AB. Fala odbita będzie po upływie $\frac{T}{4}$ sek od chwili dojścia fali zaburzeń do AB przed-

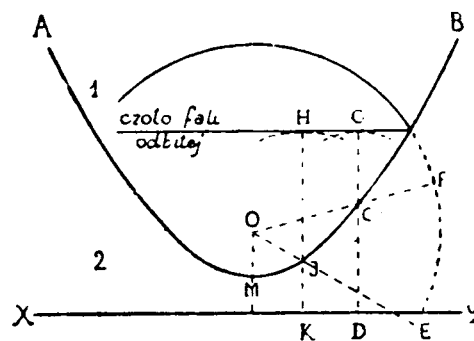
stawiona przez krzywą ed , leżącą nie po tej samej stronie osi ax , co przedłużenie fali padającej, lecz po przeciwnej. W przypadku fali podłużnej zgęszczenie odbijać się będzie jako zge-

szczenie, rozrzedzenie—jako rozrzedzenie, fazy zatem zmieniały objętości zachowują znak poprzedni. W przypadku fal poprzecznych mamy analogicznie (p. ust. 13): odbicie od środowiska akustycznie gęstszego zmienia fazę odchylenia na przeciwną, odkształcenie jednak zachowuje znak poprzedni; przy odbiciu zaś od środowiska rzadszego znak odchylenia zmianie nie ulega, zmienia się za to znak odkształcenia.

Na wybranym przez nas modelu będziemy mieli do czynienia ze zjawiskiem analogicznym, gdy ostatnia kula G uderzać będzie np. w doskonale sprężystą ścianę. Odbijając się od niej z tą samą prędkością w przeciwną stronę, kula ta wprowi ostatecznie w ruch kulę A , odbijając ją w kierunku przeciwnym do tego, w jakim poprzednio kula ta spadała. Wzajemne działanie kul będzie miało w tym przypadku ten sam charakter, co przed odbiciem.

Odbicie może również zmienić kształt fali. Niech np. powierzchnia rozdziału będzie częścią powierzchni paraboloidu obrotowego, tzn. powierzchni, utworzonej przez obrót paraboli koło jej własnej osi; przecięcie tej powierzchni płaszczyzną rysunku, przechodzącą przez oś, będzie parabolą (rys. 46). Przypuśćmy, że źródło zaburzeń, o znikomo małych rozmiarach w porównaniu z rozmiarami powierzchni odbijającej, znajduje się w punkcie O — ognisku paraboli. Gdyby powierzchni AB nie było, fala kulista, wychodząca z O , doszłaby po upływie pewnego czasu do punktów $F, E, \dots$; spotyka ona jednak powierzchnię odbijającą w punktach $C, I, \dots$, które wysyłają fale cząstkowe z powrotem do środowiska pierwszego. Obwiednią tych fal będzie tym razem płaszczyzna, której przecięciem z płaszczyzną rysunku jest linia prosta. Istotnie, niech XY będzie kierownicą paraboli AB tzn. taką prostą, od której każdy z punktów paraboli znajduje się w tej samej odległości, co od ogniska, tak że mamy

$$OI = IK; OC = CD. \quad (a)$$



rys. 46

Niech IH i CG wyznaczają kierunki, w jakich rozchodzi się fala po odbiciu. Proste te będą tworzyły z normalnymi do paraboli w punktach I i C kąty równe tym, jaki tworzą z normalnymi kierunki rozchodzenia się fali padającej OI i OC , możemy bowiem uważać bardzo małe elementy powierzchni w punktach I i C za elementy płaskie i stosować do nich wyżej udowodnione twierdzenie o równości kątów padania i odbicia. W czasie, w ciągu którego fala przesunęłaby się w środowisku jednorodnym na odległość IE i CF , po odbiciu przesunie się w kierunkach IH i CG na odległości

$$IH = IE \text{ i } CG = CF. \quad (b)$$

Przedłużmy te proste do przecięcia z kierownicą w punktach K i D . Ze wzorów (a) i (b) wynika od razu, że

$$KH = KI + IH = OE \text{ oraz } DG = DC + CG = OF$$

i z uwagi, że $OE = OF$,

jako promienie tej samej kuli,

$$KH = DG.$$

Punkty przeto, do których zaburzenie, wysyłane w pewnej chwili przez źródło O , dojdzie jednocześnie, będą leżały na płaszczyźnie HG , gdyż długości dróg, wzdłuż których zaburzenie się rozchodzi przed i po odbiciu, mają bez względu na położenie elementu odbijającego wartości te same.

Fala więc odbita jest falą płaską, rozchodzącą się w kierunku osi paraboloidu. Gdyby fala padająca była falą płaską, fala odbita byłaby falą kulistą, której środek znajdowałby się w ognisku O paraboli. Do tego punktu wszystkie zaburzenia, odbijane przez poszczególne elementy powierzchni odbijającej, dochodziłyby w tej samej fazie, wzajemnie się wzmacniając, wobec czego natężenie akustyczne byłoby w tym punkcie największe. Po dojściu zaś do tego punktu zaburzenia rozchodziłyby się dalej, tworząc w dalszym ciągu falę kulistą, tym razem o stopniowo zwiększającym się promieniu, której środkiem byłby punkt O . Punkt ten jest więc, podobnie, jak punkt O' w poprzednio rozpatrywanym przypadku, obrazem źródła

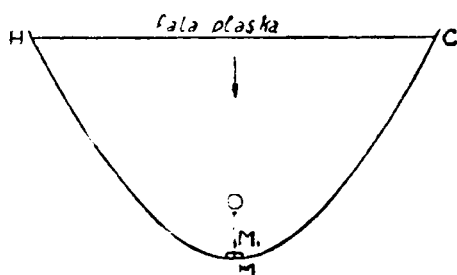
zaburzeń, znajdującego się w nieskończoności. Pomiedzy jednak tym przypadkiem a poprzednim zachodzi ta zasadnicza różnica, że przy odbiciu od powierzchni płaskiej fale przez punkt O' nie przechodzą, lecz rozchodzą się tak, jak gdyby wychodziły z tego punktu. Z tego też powodu punkty takie, jak punkt O' noszą nazwę urojonych obrazów akustycznych, punkty zaś takie, jak O — rzeczywistych obrazów akustycznych źródła.

Fala odbita powoduje odkształcenia tego samego rodzaju, co fala padająca; fala podłużna odbija się więc jako podłużna, fala poprzeczna — jako poprzeczna. Wyjątek stanowi, jak to wykazali Drude (1890 r.) i Berger (1915 r.), odbijanie się fali podłużnej, rozchodzącej się w środowisku stałym, od innego środowiska stałego. Wtedy, gdy kąt padania jest dostatecznie duży, fala odbita składa się z fali podłużnej i poprzecznej.

W przypadku, gdy powierzchnię odbijającą tworzy powierzchnia elipsoidu obrotowego, powstałego przez obrót elipsy dokoła jednej z jej osi głównych, gdy przeto przekrojem tej powierzchni przez płaszczyznę rysunku jest elipsa, stwierdzimy, posługując się podobnym rozumowaniem, którego tu przytaczać nie będziemy, że obraz rzeczywisty źródła, umieszczonego w jednym z ognisk elipsy, będzie się znajdował w drugim jej ognisku.

We wszystkich tego rodzaju przypadkach, gdy źródło zaburzeń okresowych możemy uważać za punkt materialny, obraz rzeczywisty źródła nie jest, ściśle biorąc, punktem. Natężenie posiada maximum wartości na pewnej skończonej powierzchni, otaczającej punkt O ; rozmiary tej powierzchni, wyznaczające wielkość tego obrazu dyfrakcyjnego, jak nazywamy taki obraz w odróżnieniu od obrazu, który byśmy otrzymali, gdyby zaburzenia głosowe nie doznawały uginania, są na ogół tym większe, im większy jest stosunek długości fali padającej do wielkości powierzchni odbijającej. W przypadku najogólniejszym otrzymamy rozkład natężeń podobny do rozkładu w rurze lejkowatej, o którym była mowa w ustępie poprzednim; punkt O i bezpośrednio otaczający go obszar będzie miejscem geometrycznym największego natężenia; w miarę wzrastania odległości od O natężenie będzie malało, dochodząc wreszcie na pewnym obszarze do wartości zero, aby przy dalszym wzrastaniu odległości znów się zwiększyć, przechodząc przez nowe maximum, znacznie jednak mniejsze, niż panujące w punkcie O , potem znów będzie malało itd.

Warunkiem jednak koniecznym takiego prawidłowego odbijania jest, aby powierzchnia odbijająca była dostatecznie gładka tzn. aby nie było na niej znaczniejszych występów lub rys. Istot-



rys 47

nie, wróćmy do rozpatrywanego wyżej przykładu powierzchni parabolicznej i przypuśćmy, że element tej powierzchni M , leżący na osi paraboli, jest wzniesiony ponad powierzchnię paraboloidu na wysokość h (rys. 47). Zaburzenia rozchodzące się w postaci sinusoidalnej fali płaskiej HG , odbi-

jają się wtedy nie od punktu M , lecz od M_1 i dochodzą po odbiciu do punktu O wcześniej o $\tau = \frac{2h}{c}$ sek, niż zaburzenia,

które jednocześnie wyszły z czoła fali w położeniu HG , lecz zostały odbite od innych punktów powierzchni, wobec czego drgania, odbite od punktu M_1 , spotykając się w punkcie O z drganiami, odbitymi od innych punktów powierzchni, nie będą miały tej samej, co i one fazy. Gdy h będzie równe $\frac{\lambda}{4}$,

τ stanie się równe $\frac{T}{2}$ sek, zaburzenie odbite od M_1 będzie miało w punkcie O fazę przeciwną do faz zaburzeń, odbitych od innych punktów, zamiast więc wzmacniania będziemy mieli wzajemne osłabianie się drgań odbitych. Jeżeli jednak h będzie wszędzie mniejsze od $\frac{\lambda}{4}$, wtedy odbicie zachowa na ogół swój charakter prawidłowy, jakkolwiek bowiem fazy fal odbitych nie będą w punkcie O całkowicie zgodne, to jednak nie będą się również znosiły, punkt O pozostanie więc nadal miejscem o natężeniu największym.

Tego rodzaju powierzchnię, która poza tym, zgodnie z przyjętym przez nas założeniem, nie będzie przenosiła do środowiska poza nią leżącego dochodzących do niej zaburzeń, nazywamy zwierciadłem doskonałym. Dla fal głosowych, w ścisłym tego słowa znaczeniu, zwierciadłem takim może być powierzchnia, którą skądinąd skłonni jesteśmy uwa-

zać za chropowatą: tak np. dla częstości 20000 drgań na sekundę za zwierciadło doskonałe możemy uważać w powietrzu powierzchnię, w której wysokość występow lub głębokość rys nie przekracza 4 mm, dla częstości 20 drgań na sekundę h , dochodzące do 4 m, pozwala jeszcze na odbicie prawidłowe; wtedy jednak rozmiary zwierciadła muszą być bardzo wielkie, aby można było pominąć wpływ uginania, zachodzącego na granicy danej powierzchni i rozumować tak, jak gdyby zaburzenia rozchodziły się prostoliniowo.

Tym się między innymi tłumaczy zjawisko tzw. echa harmonijnego, gdy dźwięk, dochodzący do nas po odbiciu od ściany np., posiada inną barwę, niż dźwięk wysyłany. Tętony składowe o częstości niższej, dla których ściana jest dostatecznie gładka, aby być zwierciadłem doskonałym, odbijają się od niej prawidłowo, tony zaś wyższe są przez ścianę rozpraszane w różnych kierunkach.

Zmiana, jakiej doznaje barwa dźwięku, dochodzącego po odbiciu do naszego ucha, zależy jednak od wielu czynników, których wpływ trudno nieraz z góry ustalić. Niewątpliwie znaczną rolę odgrywa również niejednakowe pochłanianie przez powierzchnię odbijającą tonów o różnej częstości. Tak np. powierzchnie ciał porowatych pochłaniają o wiele silniej tony wysokie, niż niskie, tak że dźwięk po odbiciu jest „czystszy”, niż dźwięk padający. Przeciwnie własności wykazują powierzchnie gładkie. W salach o takich powierzchniach ścian tony wysokie, będące zazwyczaj składowymi wszelkich szmerów i hałasów, odbijają się prawie bez straty energii, co nieraz jest rzeczą bardzo niedogodną.

Echo harmonijne jest szczególnym przypadkiem echa zwykłego, gdy głos dochodzący do nas bezpośrednio ze źródła zaburzeń i głos odbity słyszymy oddzielnie. Aby tak było, musi głos odbity przychodzić do naszego ucha co najmniej o $1/10$ sek później, niż głos idący bezpośrednio ze źródła. W najprostszym przypadku, gdy obserwator znajduje się w bezpośrednim sąsiedztwie źródła, ściana odbijająca powinna znajdować się w odległości przynajmniej 17 m, jeżeli dany głos trwa nieograniczenie krótko. Jest to jednak dolna granica, rzadko bowiem mamy do czynienia z takim bardzo krótkotrwałym zaburzeniem. Gdy chcemy np. usłyszeć echo jakiegoś wypowiedzianego przez nas wyrazu jednosylabowego,

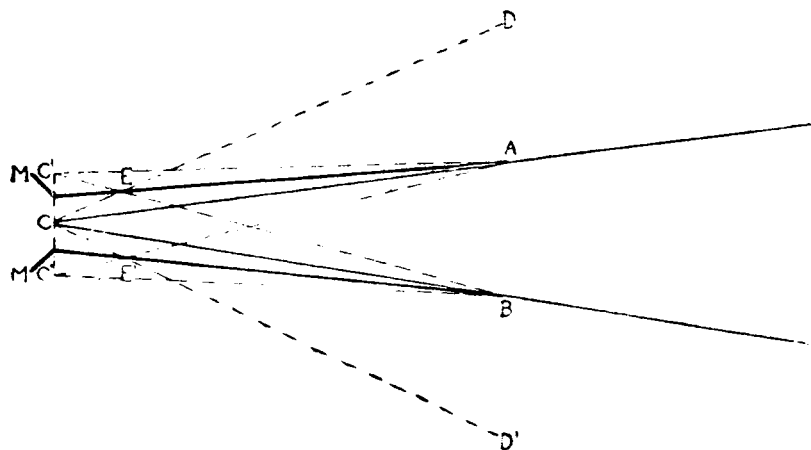
którego wymawianie trwa mniej więcej 0,2 sek, musimy umieścić się w odległości co najmniej 34 m od powierzchni odbijającej, aby bezpośrednio po wypowiedzeniu tej sylaby usłyszeć jej powtórzenie; gdy wyraz jest dwusylabowy, odległość musi być odpowiednio większa.

W otwartej przestrzeni odległość ta w nocy oraz w zimie będzie odpowiednio mniejsza.

W odległościach mniejszych głos odbity dochodzi do nas w chwili, gdy słyszymy jeszcze głos ze źródła. Mamy wtedy do czynienia z tzw. pogłosem, który często utrudnia dokładne słyszenie.

Odpowiednie zakrzywienie powierzchni odbijającej może spowodować ciekawe zjawiska akustyczne. Dźwięki, które ledwo słyhać w bezpośrednim sąsiedztwie źródła (np. cykanie zegarka), rozbrzmiewają donośnie w innym odległym punkcie, gdzie powstaje rzeczywisty obraz akustyczny źródła. Tego rodzaju własności, wynikające z ukształtowania powierzchni odbijających, posiadają np. sala kariatyd w Luwrze paryskim, katedra św. Pawła w Londynie, baptysterium w Pizie, zakryście katedr w Lublinie i w Wilnie.

Odbijaniem się fal głosowych można objaśnić działanie tzw. tub, tj. rur stożkowatych, służących do zwiększania doniosłości



rys. 48

głosu. Niech MAB (rys. 48) będzie tą rurą i niech C , jak to przyjmiemy dla uproszczenia, będzie źródłem głosu. Gdyby tuby nie było, w stożku ACB skupiona byłaby jedynie ta część energii fali odkształcenia, jaka

przypada na kąt bryłowy ACB , na skutek jednak odbicia od ścian rury energia z rury wychodząca jest o wiele większa. Istotnie, wybierzmy na ścianie rury punkty E i E' takie, że proste CE i EB oraz CE' i $E'A$ tworzą z normalną do ściany rury kąty jednakowe; zaburzenia, idące w kierunku CD i CD' , po odbiciu w punktach E i E' pójdą w kierunku EB i $E'A$, a więc wyjdą z tuby tak, jak gdyby wysyłającym je źródłem był nie punkt C , lecz C' . Energia zatem wychodząca z rury, będzie energią przenoszoną nie przez część AB fali odkształcenia, lecz przez część DD' . Do tego dojdzie jeszcze energia fal odbitych w punktach leżących bliżej punktu C , niż punkt E ; fale te doznają jednak odbić wielokrotnych, co, oczywiście, zmniejsza ich energię.

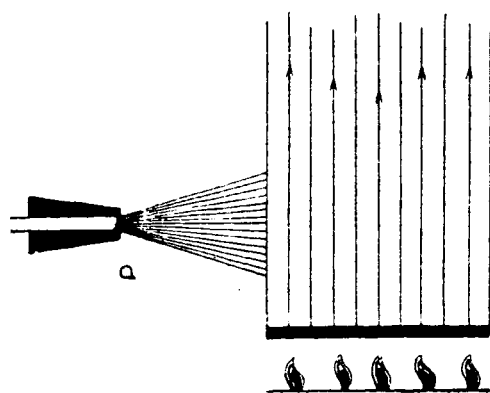
Na odbijaniu się fal oparta jest również metoda badania dna morskiego, o której wspominaliśmy już wyżej. Polega ona na mierzeniu czasu, jaki upłynął od chwili wystąpienia sygnału do chwili odbioru fali odbitej i na wyznaczaniu stąd odległości powierzchni odbijającej od obserwatora. Aby odbicie zachodziło według praw możliwie mało odbiegających od prawa prostoliniowego rozchodzenia się zaburzeń, nawet wtedy, gdy powierzchnia odbijająca jest niewielka, używa się w tych pomiarach fal ultra krótkich (p. ust. 11).

Gdy powierzchnie odbijające rozmieszczone są w odstępach prawidłowych, fale odbite, dochodząc do ucha w jednakowych i niewielkich odstępach czasu, mogą wywołać wrażenie dźwięku o częstości, niezależnej od częstości drgań wysyłanych przez źródło, lecz wyznaczonej przez wzajemną odległość powierzchni odbijających oraz przez ich odległość od źródła i od obserwatora. Te tony odbicia, odkryte przez Oppela (1857 r.), zazwyczaj nie mają stałej częstości, lecz szybko stają się coraz niższe.

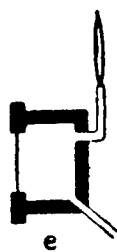
Zjawisko to można zaobserwować, idąc wąską ulicą między murami; odgłos kroków staje się wtedy szczególnie dźwięczny.

Z przykładów odbicia, przytoczonych przez nas wyżej, nie należy wyprowadzać wniosku, że odbicie tylko wtedy zachodzi wyraźnie, gdy środowiskiem odbijającym jest ciało stałe. Tak bowiem bynajmniej nie jest. Jak to już wyżej mówiliśmy, odbicie zachodzi zawsze na powierzchni rozgraniczającej dwa różniące się fizycznie środowiska, a więc i wtedy, gdy obydwa środowiska są płynne. Dowodem może być piękne doświadczenie Tyndalla (1889 r.).

Fale zaburzeń, wychodzące z poziomej rury *a* w kierunku czułego płomienia *e* (por. ust. 7), powodują jego skracanie się i wydłużanie. Gdy między rurą i płomieniem znajduje się słup

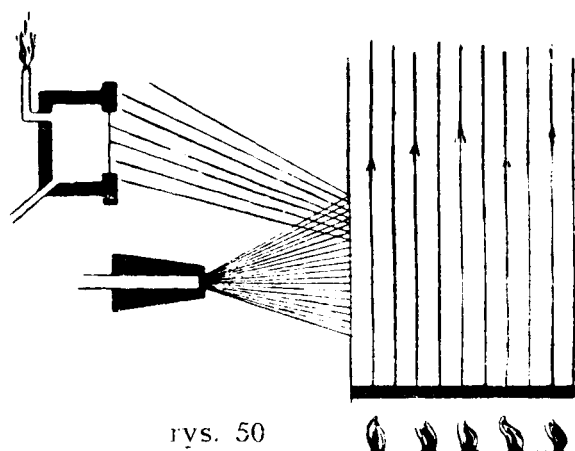


rys. 49



powietrza, ogrzewanego przez szeroki palnik (rys. 49, gdzie zjawisko to jest schematycznie przedstawione), wtedy wskutek odbicia fal od powierzchni tego słupa zaburzenia nie dochodzą do płomienia, który pali się zupełnie spokojnie. Je-

żeli jednak płomień umieścimy po tej samej stronie co źródło zaburzeń (rys. 50), fale odbite znów powodować będą skracanie się i wydłużanie płomienia. Tutaj, prawdopodobnie, należy szukać przynajmniej częściowego wyjaśnienia faktu, że głos w powietrzu zupełnie czystym przy słonecznej pogodzie rozchodzi się nieraz na znacznie mniejszą odległość, niż przy pogodzie dżdżystej i chmurnej. Bo- wiem p i o n o w e słupy ogrzanego powietrza, podnoszące się z silniej nagranych części powierzchni ziemi, odbijają znaczną część energii dochodzących do nich fal głosowych.



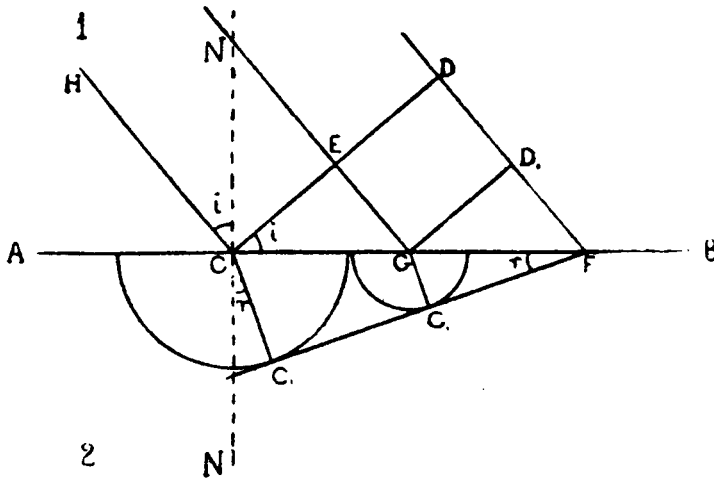
rys. 50

Według przytaczanej już niejednokrotnie pracy v. Angerera i Ladenburga niejednorodności fizycznej powietrza, spowodowanej czy to niejednakowym ogrzaniem jego warstw czy to niejednakową prędkością wiatru na różnych wysokościach, należy przypisać potężne nieraz echo, jakie słyszy się czasami po wystrzale (p. ust. 13).

Jaką rolę odgrywają w tym zjawisku obłoki, nie jest rzeczą wyjaśnioną; poglądy na tę sprawę różnych badaczy są często biegunowo przeciwne.

13. — ZAŁAMANIE SIĘ FAL.

Zazwyczaj jednak powierzchnia odbijająca jest zwierciadłem niedoskonałym, tak że część energii padającej przechodzi do środowiska drugiego. Przypuśćmy dla uproszczenia wywodów, że fala odkształcenia jest falą płaską CD (rys. 51) i załóż-



rys. 51

my, że prędkość rozchodzenia się zaburzeń jest w drugim środowisku mniejsza, niż w pierwszym, że więc $c_1 > c_2$. Środowisko drugie nazywać będziemy wtedy akustycznie gęstszym. Niech w pewnej chwili czoło fali dojdzie w punkcie C do powierzchni rozdziału. Fale cząstkowe, wysyłane z tego punktu, będą częściowo rozchodziły się z powrotem w środowisku pierwszym, tworząc w nim stopniowo falę odbitą, o natężeniu mniejszym, niż fala padająca, częściowo zaś rozchodzić się będą w środowisku drugim.

Przez czas, w ciągu którego fala cząstkowa, wychodząca z punktu D w chwili, gdy punkt C czoła znajduje się na powierzchni AB , dojdzie do punktu F powierzchni rozdziału, fala cząstkowa, wysłana przez C , utworzy półkulę o promieniu CC_1 tyle razy mniejszym od promienia DF , ile razy prędkość c_2 jest mniejsza od c_1 . Podobnie fala cząstkowa, którą zaczyna wysyłać punkt G , gdy fala padająca przesunie się do położenia GD_1 , utworzy w środowisku drugim przez czas, w ciągu którego zaburzenie z D , przesunie się do F , półkulę o promieniu GG_1 będącym do D_1F w stosunku takim, jak c_2 do c_1 .

Oznaczmy przez t_1 czas, w ciągu którego zaburzenie przechodzi z D do F , przez t_2 — czas przejścia z D_1 do F , wobec czego $DF = c_1 t_1$ i $D_1 F = c_1 t_2$. Z podobieństwa prostokątnych trójkątów o bokach równoległych CDF i $GD_1 F$ wynika, że

$$\frac{CF}{GF} = \frac{DF}{D_1 F} = \frac{t_1}{t_2}.$$

Przeprowadźmy z punktu F styczne FG_1 i FC_1 do półkuli GG_1 i CC_1 , będących przecięciem kulistych fal cząstkowych z płaszczyzną rysunku. Prostokątne trójkąty FGG_1 i FCC_1 (kąty $FG_1 G$ i $FC_1 C$ są kątami prostymi) są podobne, mamy bowiem

$$\frac{CC_1}{GG_1} = \frac{c_2 t_1}{c_2 t_2} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{CF}{GF},$$

wobec tego kąty GFG_1 i CFC_1 są równe. Styczne więc FG_1 i FC_1 leżą na tej samej prostej, skąd wynika, że obwiednia fal cząstkowych w drugim środowisku jest płaszczyzną. Fala płaska po przejściu do środowiska drugiego pozostaje płaską, zmienia się jedynie kierunek jej rozchodzenia się. Niech HC oznacza kierunek rozchodzenia się zaburzeń w środowisku pierwszym. Kąt HCN będzie wtedy kątem padania i . W środowisku drugim kierunek rozchodzenia się wyznacza prosta CC_1 , tworząca z normalną NN do powierzchni kąt r . Z trójkąta $CC_1 F$ mamy

$$CC_1 = c_2 t_1 = CF \sin r,$$

z trójkąta CDF

$$DF = c_1 t_1 = CF \sin i.$$

Dzieląc DF przez CC_1 , otrzymujemy

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin i}{\sin r} = n_{1,2}. \quad (28)$$

Te zmiany kierunku rozchodzenia się zaburzeń przy przejściu fali z jednego środowiska do drugiego nazywamy załamaniem się fali, kąt r — kątem załamania, stosunek

zaś $\frac{c_1}{c_2} = n_{1,2}$ prędkości rozchodzenia się zaburzeń w środowisku, z którego fala wychodzi, do prędkości w środowisku, do którego fala wchodzi, współczynnikiem załamania się fali w dwu danych środowiskach.

Od tego współczynnika załamania należy odróżniać wielkość q , równą stosunkowi oporów akustycznych dwu danych środowisk (ust. 12) $c_1 \rho_1$ i $c_2 \rho_2$, którą często nazywają akustycznym współczynnikiem załamania. Od tej wielkości zależy, jak o tym była wyżej mowa (ust. 12), stosunek energii odbitej do energii padającej; w założeniu, że kąt padania równy jest zeru oraz że w środowiskach nie występują siły tarcia wewnętrznego, stosunek ten wyraża wzór (27) ust. 12. Dla energii wchodzącej do środowiska mamy przy tych samych założeniach

$$I_w = I_p \cdot \frac{4q}{(q+1)^2} \quad (29)$$

Z analogicznymi wzorami, wyprowadzonymi przez Fresnela (1831 r.), spotykamy się w optyce, gdzie jednak mamy do czynienia z jedną tylko wielkością — współczynnikiem załamania się fali n .

Gdy powierzchnia łamiąca nie jest płaszczyzną, zjawisko staje się o wiele bardziej złożone. Odkładając bardziej szczegółowe rozpatrzenie tych przypadków do rozdziałów, traktujących o zjawiskach optycznych, poprzestajemy tutaj na zaznaczeniu, że i tym razem powstają po załamaniu rzeczywiste lub urojone obrazy źródła zaburzeń, mające cechy takie same, jak te, o których była mowa w ust. 12.

Ze wzoru (28) wynika, że przy przejściu ze środowiska akustycznie rzadszego do akustycznie gęstszego kierunek rozchodzenia się zaburzeń przybliży się do normalnej, kąt i jest większy od kąta r . Tak np. zachodzi zjawisko przy przejściu fali z wody do powietrza, mniej więcej cztery razy akustycznie gęstszego. Gdybyśmy więc umieścili w wodzie worek gumowy kształtu dwuwypukłej soczewki, o dostatecznie wielkich rozmiarach w porównaniu z długością fali (patrz ust. 12), i napełnili go powietrzem, soczewka byłaby w tych warunkach soczewką zbierającą.

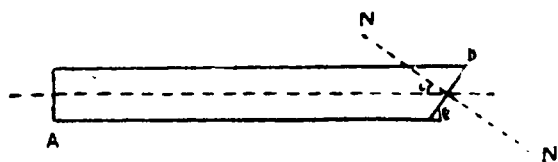
Jeżeli zaburzenie przechodzi ze środowiska gęstszego do rzadszego, kierunek rozchodzenia się zaburzeń tworzy po załamaniu kąt większy od kąta padania. W przypadku szczegól-

nym, gdy kąt padania staje się równy $i_g = \arcsin \frac{c_1}{c_2}$, kąt załamania r dochodzi do wartości 90° . Ponieważ kąt r przekroczyć tej wartości nie może, przy dalszym wzroście kąta padania ponad wartość kąta granicznego i_g cała energia ulega odbiciu. Zachodzące w tym przypadku zjawisko nazywamy całkowitym wewnętrznym odbiciem.

Aby otrzymać w powietrzu soczewkę zbierającą, należy wypełnić ją ciałem, w którym prędkość rozchodzenia się zaburzeń sprężystych jest mniejsza, niż w powietrzu, a więc np. dwutlenkiem węgla ($c \doteq 270 \text{ m/sek}$ w temperaturze 0° C) lub opiłkami kauczukowymi (wartość c zawarta jest w granicach od 30 do 70 m/sek) tak, jak to zrobił Hesechus (1890 r.), który w ten sposób otrzymał, zgodnie z przewidywaniem, rzeczywisty obraz źródła drgań, utworzony przez fale załamane.

Kauczuk jest jedynym ciałem stałym, które może być w tym celu użyte. We wszystkich innych ciałach stałych prędkość rozchodzenia się jest o wiele większa, niż w powietrzu, dochodząc w stali np. do wartości około 5120 m/sek. Z gazów wyróżnia się wodór, w którym c wynosi według Sturma (1904 r.) — 1258 m/sek.

Prawa załamania się fal dźwiękowych sprawdzał doświadczalnie Hajech (1857 r.). Rura, wypełniona badanym środowiskiem, była z jednej strony zamknięta błoną, prostopadłą do osi, z drugiej zaś błoną tworzącą kąt φ z osią rury (rys. 52).



rys. 52

Rura umieszczona była w ten sposób, że stanowiła jakby przedłużenie rury drugiej, na której końcu znajdowało się źródło zaburzeń (w doświadczeniu Hajecha — dzwonek).

Falę zaburzeń, wychodzącą z tej drugiej rury, można było zatem uważać za falę płaską. Fala ta, padając prostopadle na błonę A, nie załamywała się i w rurze pomiarowej rozchodziła się w kierunku poprzednim. Załamywanie następowało dopiero na błonie CD, przy czym kąt padania i był, oczywiście, równy $90 - \varphi$. Pomiar polegał na wyznaczeniu kierunku (i kąta, jaki kieru-

nek ten tworzył z normalną do błony), w którym dźwięk słychać było najsilniej. Podajemy za Wüllnerem wyniki niektórych pomiarów Hajecha:

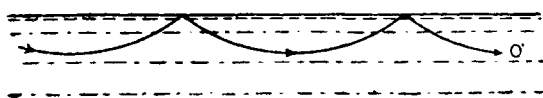
środo-wisko wypełniające rurę	kąt padania i	kąt załamania r	
		obserw.	obl.
wodór	$35^{\circ} 50'$	8°	$8^{\circ} 50'$
"	25°	7°	$6^{\circ} 22'$
gaz świetlny	$35^{\circ} 50'$	$25^{\circ} 40'$	$26^{\circ} 50'$
dwutlenek węgla	$35^{\circ} 50'$	$49^{\circ} 50'$	$48^{\circ} 19'$
"	23°	$33^{\circ} 20'$	$32^{\circ} 33'$
woda studzienna	$35^{\circ} 50'$	$7^{\circ} 40'$	$7^{\circ} 58'$
"	25°	$5^{\circ} 40'$	$5^{\circ} 27'$

Wobec znacznych trudności, z jakimi związane jest doświadczalne wyznaczenie kąta załamania r , oraz z uwagi, że prawa załamania obowiązują jedynie w przypadku, gdy, jak o tym już niejednokrotnie była mowa, powierzchnia łamiąca ma bardzo znaczne rozmiary w porównaniu z długością fali, należy wyniki te uważać za potwierdzające z dostateczną ścisłością założenia teoretyczne.

W podobny sposób badał załamanie fal głosowych Neyreneuff (1894 r.). Załamanie przez powierzchnię zakrzywioną wyznaczali Perrot i Dussaud (1895 r.) oraz Sondhauss, który używał soczewki, wypełnionej dwutlenkiem węgla. Schellbach i Boehm wyznaczali (1879. r.) kąt załamania, nie oddzielając ciała łamiącego błoną od środowiska, z którego fale wychodziły. Wszystkie te pomiary na ogół potwierdzają ustalone wyżej prawa załamania.

Zmianą w kierunku rozchodzenia się zaburzeń sprężystych przy zmianie własności fizycznych środowiska można objaśnić fakt, że w zimie zasięg sygnałów podwodnych jest większy, niż w lecie. W zimie bowiem temperatura wody na ogół wzrasta z głębokością, tym samym wraz z głębokością wzrasta prędkość rozchodzenia się głosu: głębsze warstwy wody są akustycznie rzadsze od warstw powierzchniowych. Zaburzenia zatem, idące w kierunku powierzchni wody, rozchodzą się wzdłuż linii krzywych, zwróconych wypukłością do dna rzeki; trafiając na powierzchnię, odbijają się od niej prawie całkowicie (por. ust. 12) i po odbiciu dochodzą, znów wzdłuż linii

krzywej, do punktu O, który może leżeć poza bezpośrednim zasięgiem zaburzenia (rys. 53). W lecie natomiast rozkład temperatury w wodzie jest odwrotny: warstwy dolne są akustycznie gęstsze, wobec czego kierunki rozchodzenia się zaburzeń leżą na krzywych,



rys. 53

zwróconych w stronę dna wklęsłością. Zaburzenia dochodzą w ten sposób nie do powierzchni, lecz do dna i jedynie bardzo niewielki ułamek ich energii ulega odbiciu.

Temu też należy, prawdopodobnie, przypisać, że zaburzenia o wielkiej energii (takie np. jak wybuchy prochowni, wulkanów itp.) można słyszeć w nienormalnie wielkiej odległości: kanonadę pod Verdun, w czasie pierwszej Wielkiej Wojny (1914—1918), słyszeć było można, według Branda (1917 r.), jeszcze w odległości 350 km od pola bitwy; wybuch wulkanu Mont Pelée na Martynice w 1902 roku słychać było w odległej o 1550 km Wenezueli (Lacroix, 1904 r.).

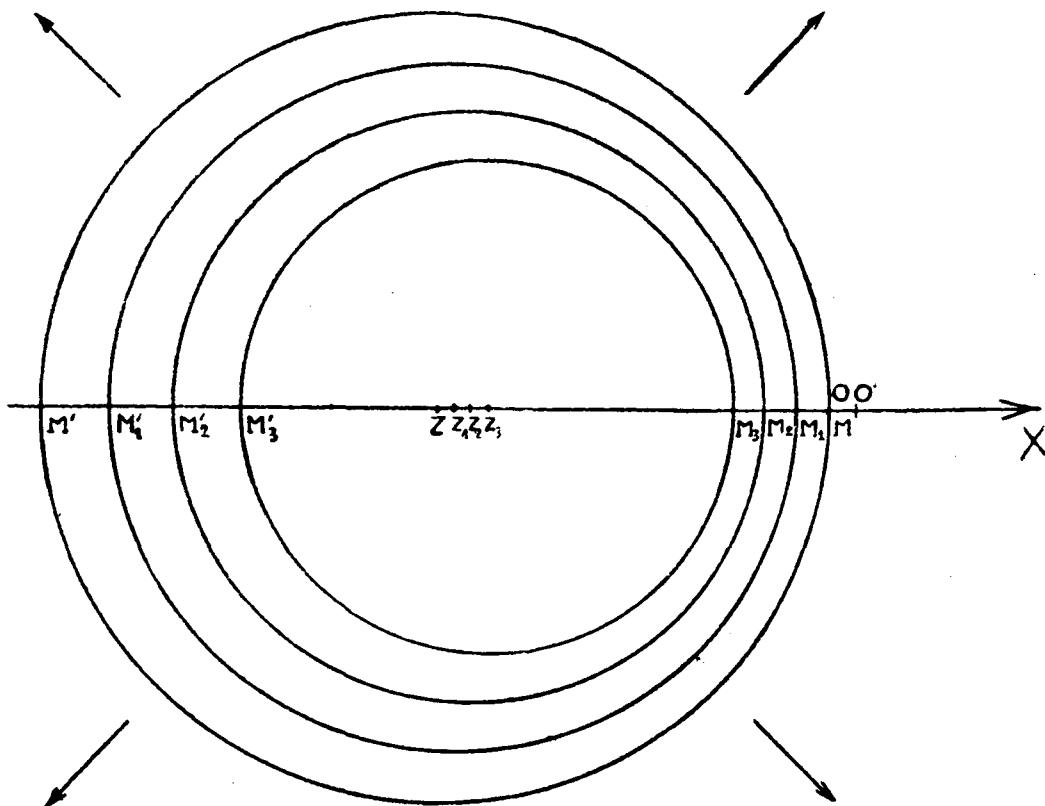
Ten tzw. zewnętrzny obszar słyszenia jest często, choć nie zawsze, oddzielony od obszaru, do którego dochodzą bezpośrednio zaburzenia ze źródła, obszarem ciszy, w którym zaburzenie się nie ujawnia. Prędkość pozorna zaburzeń, dochodzących do obszaru zewnętrznego, wyznaczona z odległości miejsca obserwacji od miejsca zaburzeń i z czasu, który upłynął od chwili wysłania zaburzenia do chwili obserwacji, jest zazwyczaj o wiele mniejsza od prędkości zaburzeń, dochodzących bezpośrednio; tak np. według Humphreysa (1924 r.), fala sprężysta, wzbudzona przez wybuch wulkanu Krakatoa (27 sierpnia 1883 r.), obiegała ziemię sześciokrotnie z prędkością przeciętną 315 m/sek. Maurain, obserwując wybuch wywołany dla celów doświadczalnych w Courbières 15 maja 1924 r., znalazł, że prędkość rozchodzenia się fali wybuchu, jest w miejscach odległych od ogniska mniejsza od normalnej. Do podobnego wniosku prowadzą również ogłoszone w 1930 roku przez Whipple'a pomiary prędkości fali wybuchu, spowodowanej przez spadek w Syberii 30 czerwca 1908 roku wielkiego meteoru; prędkość tej fali wynosiła przeciętnie 318 m/sek.

Zjawisko to można objaśnić, zakładając, że zaburzenia, dochodzące do obszaru zewnętrznego, przechodzą dłuższą drogę, zakrzywioną na skutek załamania w wysokich warstwach atmosfery i krzywizną swą zwróconą ku ziemi, dokładnego jednak wyjaśnienia tego zjawiska, jak dotychczas, nie ma, niewiele bowiem wiemy o właściwościach fizycznych atmosfery na znaczniejszych wysokościach.

Jakkolwiek jednak zmieniałby się kierunek rozchodzenia się zaburzeń i ich energia, częstość drgań na skutek odbicia czy też załamania nie ulega żadnej zmianie: obserwator słyszeć będzie po wielokrotnym odbiciu czy załamaniu ton tej samej wysokości, jaki by słyszał bezpośrednio, gdyby głos rozchodził się w środowisku jednorodnym. Częstość drgań jest więc równie dobrze w środowisku jednorodnym, jak i niejednorodnym, wielkością stałą, zależną jedynie od rodzaju źródła zaburzeń i odkształceń, jakim źródło to podlega.

Twierdzenia tego w niczym nie osłabiają przytoczone wyżej zmiany barwy dźwięku przy odbiciu, wynikające z niejednakowego odbijania drgań o różnych częstościach, oraz powstawanie tonów odbicia, które do obserwatora dochodzą później, niż zaburzenie pierwotne.

Tak jednak jest dopóty, dopóki, jak to stwierdził (1843 r.) Doppler i niezależnie od niego (1848 r.) Fizeau na podstawie badań zjawisk optycznych, zarówno źródło zaburzeń Z , jak i obserwator O , znajdują się w spoczynku względem środowiska, w którym zaburzenia się rozchodzą. Istotnie, przypuśćmy, że źródło, które w chwili $t=0$ znajduje się w punkcie Z , porusza się ruchem jednostajnym z prędkością v_z w kierunku prostej ZOX , na której znajduje się również obserwator (rys. 54). Zaburzenie, które źródło w tej chwili wysyła, znajdzie się, o ile środowisko jest jednorodne, po upływie czasu t_1 na powierzchni kuli o promieniu $ZM=r=ct_1$. Po upływie T sek, gdy źródło wysyłać będzie zaburzenie o tej samej fazie, co w chwili $t=0$, położenie źródła na prostej OX wyznaczy punkt oddległy od Z o $ZZ_1 = v_z T$. Wobec czego wysłane przez nie wtedy zaburzenie znajdzie się w chwili $t=t_1$ na powierzchni kuli opisanej z Z_1 promieniem $Z_1M_1=r_1=c(t_1-T)$. Po upływie dalszych T sek źródło przejdzie do punktu Z_2 , oddległego od Z o $2v_z T$; wysłane przez niego zaburzenie o tej samej fazie, co wysłane poprzednio w chwilach $t=0$ i $t=T$ zaburzenia, znajdzie się w chwili $t=t_1$ na powierzchni kuli, opisanej z Z_2 promieniem $Z_2M_2=r_2=c(t-2T)$. Odległości zatem punk-



rys. 54

tów $M, M_1, M_2, \dots$ prostej ZOX , w których zaburzenia stale posiadają tę samą fazę, będą odpowiednio równe

$$\begin{aligned} MM_1 &= ZM - ZM_1 = ZM - ZZ_1 - Z_1M_1 = \\ &= ct_1 - v_z T - ct_1 + cT = (c - v_z)T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1M_2 &= Z_1M_1 - Z_1M_2 = Z_1M_1 - Z_1Z_2 - Z_2M_2 = \\ &= ct_1 - cT - v_z T - ct_1 + c \cdot 2T = (c - v_z)T, \end{aligned}$$

stąd

$$MM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = \dots = (c - v_z)T.$$

Odległości te, zgodnie z określeniem podanym w ust. 1, wyznaczają długość fali λ_1 . Mamy więc

$$\lambda_1 = (c - v_z)T \quad (30a)$$

lub oznaczając przez λ długość fali w wypadku, gdy źródło jest w spoczynku, i biorąc pod uwagę, że $\lambda = cT$,

$$\lambda_1 = \lambda \frac{c - v_z}{c}. \quad (30b)$$

Jeżeli więc do obserwatora, znajdującego się, zgodnie z założeniem, na prostej ZO $\times$, np. w punkcie M , dojdzie w chwili $t = t_1$ pewna faza zaburzeń, to ta sama faza dochodzić będzie do niego następnie w odstępach czasu $T' = \frac{\lambda_1}{c}$, takiego bowiem czasu wymagać będą zaburzenia na przejście drogi M_1M , M_2M itd. W punkcie O zatem okres powrotu tych samych faz zaburzenia, równy okresowi zachodzących w tym punkcie drgań, będzie równy

$$T' = \frac{\lambda_1}{c} = T \frac{c - v_z}{c}. \quad (30c)$$

Gdy obserwator znajduje się po przeciwnej stronie źródła, np. w którymś z punktów M' , M'_1 , . . ., analogiczne rozumowanie doprowadzi nas do wniosku, że wtedy okres drgań, zachodzących w danym punkcie, będzie większy od T

$$T' = T \frac{c + v_z}{c}, \quad (30d)$$

częstość drgań zatem się zmniejszy. Uważając prędkość źródła za dodatnią, gdy jest skierowana ku obserwatorowi, innymi słowy kierunek prostej ZO za dodatni kierunek osi x -ów, obydwa przypadki możemy objąć jednym wzorem (30c).

Przypuśćmy teraz, że porusza się również i obserwator. Uważajmy i tym razem prędkość jego ruchu jednostajnego v_0 za dodatnią, gdy kierunek jej zgodny jest z kierunkiem ZO. Niech T'' oznacza czas, jaki upłynął od chwili $t = t_1$, gdy do obserwatora doszło zaburzenie M , do chwili $t = t_1 + T''$, gdy doszło do niego zaburzenie M_1 . W ciągu tego czasu obserwator przesunął się do punktu O' odległego o $v_0 \cdot T''$ od punktu O . Zaburzenie M_1 przeszło zatem drogę nie M_1M , lecz $M_1O' = M_1M + MO'$. Ponieważ prędkość rozchodzenia się zaburzeń

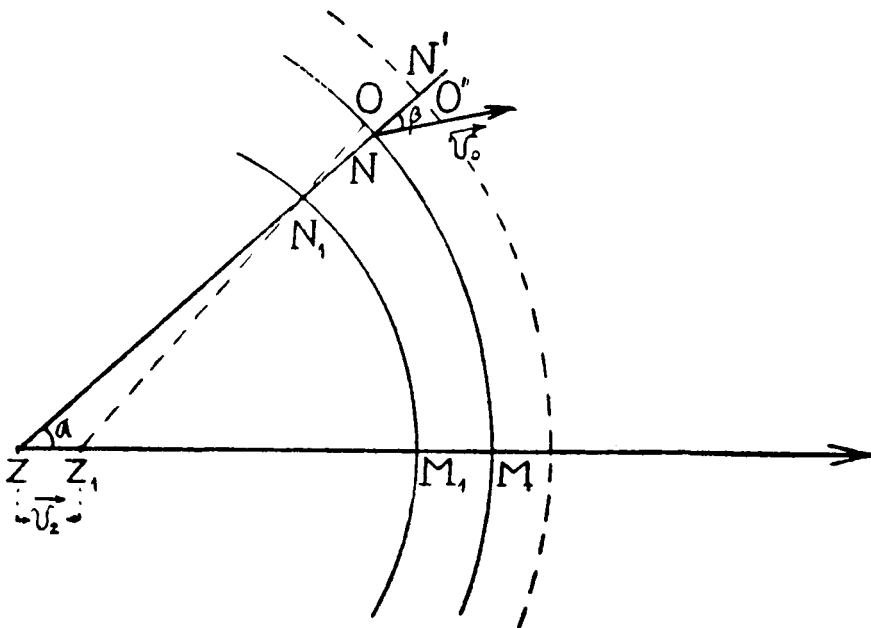
pozostaje taka sama, jak w przypadku, gdy źródło i obserwator są w spoczynku (p. ust. 15), droga ta jest równa cT'' , mamy więc

$$cT'' = M_1 M + MO' = (c - v_z)T + v_0 T'',$$

$$\text{stąd } (c - v_0)T'' = (c - v_z)T \text{ i ostatecznie } T'' = T \frac{c - v_z}{c - v_0}. \quad (31)$$

Gdy więc $v_z = 0$, obserwator, oddalając się od źródła, słyszy ton niższy, niż wtedy, gdy jest w spoczynku.

Gdy wreszcie obserwator zajmuje względem źródła położenie dowolne, gdy np. znajduje się na prostej ZO, tworzącej z kierunkiem prędkości źródła $\vec{v}_z$ kąt α , prędkość zaś jego tworzy z kierunkiem ZO kąt β (rys. 55), do wzoru (31) należy zamiast wartości v_z i v_0 wstawić



rys. 55

wartości ich składowych w kierunku ZO. Niech w chwili $t = t_1$ do obserwatora, o którym założymy chwilowo, że jest w spoczynku, dojdzie z Z fala zaburzeń o oznaczonej fazie; zaburzenie o tej samej fazie, wysłane przez źródło z położenia Z_1 , będzie w tej samej chwili leżało na powierzchni kuli, opisanej z Z_1 promieniem $Z_1 M_1$ i przecinającej prostą ZO w punkcie N_1 . Gdy obserwator znajduje się w dostatecznie wielkiej odległości r od źródła, możemy odległość ZZ_1 uważać za małą w porównaniu z r , innymi słowy, kąt $ZN_1 Z_1$, jaki tworzą ze sobą kierunki rozchodzenia się tych fal w punkcie N_1 , za prawie równy zeru, a więc przyjąć, że zaburzenie wysłane z Z_1 roz-

chodzi się w kierunku $N_1 N$ tak, jak gdyby źródło przesuwalo się nie wzdłuż prostej ZX , lecz wzdłuż prostej ZO z prędkością $v_z \cos \alpha$. Otrzymamy wtedy analogicznie do wzoru (30a)

$$N_1 N = \lambda_2 = (c - v_z \cos \alpha) T, \quad (31a)$$

skąd
$$T'_1 = \frac{\lambda_2}{c} = T \frac{c - v_z \cos \alpha}{c}. \quad (31b)$$

W przypadku więc, gdy prosta ZO tworzy z kierunkiem prędkości v_z kąt prosty, okres drgań, dochodzących do obserwatora, pozostaje bez zmiany.

Niech teraz obserwator porusza się z prędkością $\vec{v}_0$, tworzącą kąt β z kierunkiem ZO . Oznaczmy przez T''_1 czas, jaki upłynie od chwili $t = t_1$, gdy do obserwatora dochodzi zaburzenie, wysłane z Z , do chwili, gdy dochodzi do niego zaburzenie o tej samej fazie, wysłane z Z_1 . W ciągu tego czasu obserwator przesunie się na odległość $v_0 T''_1$ do punktu O' i znajdzie się na powierzchni kuli, opisanej z Z promieniem ZN' . Przyjmując, tak jak uprzednio, że kierunki rozchodzenia się fal z Z i Z_1 są zgodne, znajdujemy, że odległość, przebyta w ciągu czasu T'' przez zaburzenie, wysłane z Z_1 , równa jest

$$cT''_1 = N_1 N' = N_1 N + NN' = (c - v_z \cos \alpha) T + v_0 \cos \beta T''_1,$$

skąd
$$T''_1 = T \frac{c - v_z \cos \alpha}{c - v_0 \cos \beta}. \quad (31c)$$

Gdy $\alpha = \beta = 90^\circ$, a więc, gdy zarówno obserwator, jak i źródło przesuwają się w kierunku prostopadłym do łączącej ich prostej, częstość drgań, dochodzących do obserwatora, pozostaje bez zmiany. Częstość nie ulega zmianie również i wtedy, gdy $v_z \cos \alpha = v_0 \cos \beta$.

Zmiana częstości drgań zależy zatem, jak to wynika z wyżej wprowadzonych wzorów, nie od prędkości obserwatora względem źródła (czy też źródła względem obserwatora), lecz od prędkości obserwatora i źródła względem środowiska. Istotnie, na prędkość względną mieliśmy wzór (tom I, str. 38)

$$v_w = v_z - v_0$$

$$\text{i } v_z = v_w + v_0 \text{ lub } v_0 = v_z - v_w.$$

Po podstawieniu do wzoru (31) otrzymujemy

$$T'' = T \frac{c - v_w - v_0}{c - v_0} = T \frac{c - v_z}{c - v_z + v_w},$$

skąd bezpośrednio wynika, że zmiana okresu zależy również i od wartości czy to v_0 czy też v_z . Jedyne wtedy, gdy $v_w = 0$, a więc gdy źródło i obserwator poruszają się w tym samym kierunku, z tą samą prędkością, T'' nie zależy ani od v_z ani od v_0 . W przypadku granicznym, gdy $v_0 = c$, okres drgania, dochodzącego do obserwatora, stanie się nieskończenie wielki, obserwator bowiem porusza się z tą samą prędkością, co dane zaburzenie, które stale mu towarzyszy w tej samej fazie.

Zmianę wysokości tonu, wysyłanego przez poruszające się źródło, można z łatwością stwierdzić, słuchając gwizdka poruszającego się parowozu lub syreny okrętu, znajdującego się w ruchu. Nieruchomy obserwator słyszy ton wyższy, który w chwili, gdy parowóz mija obserwatora, nagle się obniża. Zależność wysokości tonu od prędkości v_z sprawdził w ten właśnie sposób Buys Ballot (1845 r.), o wiele jednak dokładniejsze pomiary wykonał (1875 r.) Vogel, otrzymując wyniki, potwierdzające wyprowadzone wyżej wzory. Gdy lokomotywa przybliżała się do obserwatora z prędkością 19,3 m/sek, ton obserwowany miał częstość 2118,2 drgań na sekundę, według zaś wzoru (30) częstość powinna była być równa 2111,8; przy oddalaniu się od obserwatora z prędkością 19,6 m/sek częstość spadała do 1878,1 drgań na sekundę, różniąc się od obliczonej mniej więcej o 0,5%. (Dane te podajemy za Chwolsonem).

15. — ZABURZENIA ROZCHODZĄCE SIĘ Z PRĘDKOŚCIĄ WIĘKSZĄ, NIŻ PRĘDKOŚĆ GŁOSU.

W rozważaniach ustępów poprzednich przyjmowaliśmy, że odkształcenia, jakim podlega środowisko, są dostatecznie małe, aby nie zmieniać w wydatniejszy sposób jego własności fizycznych. Założenia te znajdowały na ogół potwierdzenie w doświadczeniu, okazywało się bowiem, że jakiegokolwiek byłoby źródło i energia zaburzeń, w pewnej mniejszej lub większej odległości od źródła można było bez obawy znacznieszego błędu uważać odkształcenia środowiska za bardzo małe i stosować do nich wzory, wyprowadzone na podstawie tego właśnie założenia.

Zgodność jednak między wywodami teoretycznymi i rzeczywistym przebiegiem zjawiska okaże się niewystarczającą,

gdy badane przez nas elementy środowiska znajdują się w pobliżu źródła, wysyłającego zaburzenia o znacznej energii, lub też gdy odkształcenia wywołane są przez ruch ciała, posuwającego się z prędkością równą lub większą od normalnej prędkości rozchodzenia się zaburzeń, którą tak, jak poprzednio, nazywać będziemy prędkością głosu.

Z pierwszym przypadkiem mamy do czynienia, gdy źródłem zaburzeń jest niezwykle nagle zmiana ciśnienia, zachodząca w pewnym ograniczonym obszarze środowiska; zmiana ta może być ujemną, jak np. przy zgnieceniu naczynia, z którego usunięto powietrze, lub dodatnią, jak np. przy wybuchu (detonacji łac. *detonare* — grzmieć), w którego granicznym przypadku prędkość spalania się ciała wybuchowego jest tak wielka, że wzrost objętości ciała, zachodzący na skutek tego spalania, a co za tym idzie i wzrost ciśnienia na otaczające warstwy środowiska, dochodzi prawie natychmiastowo do swej wartości największej.

W tego rodzaju zaburzeniach, wywołujących wrażenie *h u k u* lub *t r z a s k u*, cząstki środowiska, bezpośrednio stanowiące źródło lub, jak się często mówi, *o g n i s k o* zaburzeń, nabywają prędkości tak wielkich, że założenie niewielkich odchyłeń od położenia równowagi traci całkowicie swe uzasadnienie.

Do tej kategorii należy również zaliczyć trzaskanie z bicia. Szybki ruch końca sznura powoduje zgęszczenie powietrza przed sznurem i rozrzedzenie za sznurem. Według Lummera trzask spowodowany jest przez szybki ruch powietrza, dążącego do miejsc o zmniejszonym nagle ciśnieniu.

To znaczne przesunięcie się cząstek środowiska sprawia, że po pierwotnej fali odkształcenia — zgęszczenia, gdy zachodzi nagły wzrost ciśnienia, — rozrzedzenia, gdy ciśnienie nagle spada — tworzy się następnie koło ogniska fala o przeciwnym znaku odkształcenia i te dwie fale rozchodzą się, jako *f a l e w y b u c h u* (franc. *onde de détonation* lub przez zapożyczenie terminu z balistyki *onde de bouche*). Prędkość rozchodzenia się fali w pobliżu ogniska zazwyczaj znacznie przewyższa prędkość głosu, jak to stwierdził (1875 r.) pomiędzy innymi Mach, biorąc za źródło zaburzeń rozbrojenie iskrowe. Prędkość ta

na ogół wzrasta ze wzrostem energii zaburzenia. Becker umieszczając ciało wybuchowe w rurze, dzięki czemu fala odkształcenia rozchodziła się mniej więcej, jak fala płaska, otrzymał (1922 r.) na wartość prędkości rozchodzenia się 12000 m/sek. Na otwartym powietrzu prędkość ma zazwyczaj wartość znacznie mniejszą. Wolff używając 15000 kg ciała wybuchowego, znalazł (1899 r.), że w odległości 10 m od ogniska prędkość wynosiła mniej więcej 860 m/sek. Von Angerer i Ladenburg, używając znacznie mniejszej masy wybuchowej, (około 3 kg), znaleźli na prędkość rozchodzenia się w odległości 3 m od ogniska 1151 m/sek. Z zestawienia tych danych wynika, że prędkość c , zgodnie z tym, cośmy przyjmowali w ustępach poprzednich, bardzo szybko maleje wraz ze wzrostem odległości od ogniska. Istotnie, w doświadczeniu Wolffa w odległości 150 m prędkość fali wybuchu była prawie równa prędkości głosu, w doświadczeniu v. Angerera i Labenburga już w odległości 30 m od ogniska spadała do wartości normalnej. Jedno-



rys. 56

cześnie zmieniał się również i charakter odkształcenia, które schematycznie odtwarza krzywa rys. 56, gdzie na osi odciętych odkładamy czas, na osi rzędnych — ciśnienie. Część krzywej, odtwarzająca zgęszczenie, w miarę rozchodzenia się fali staje

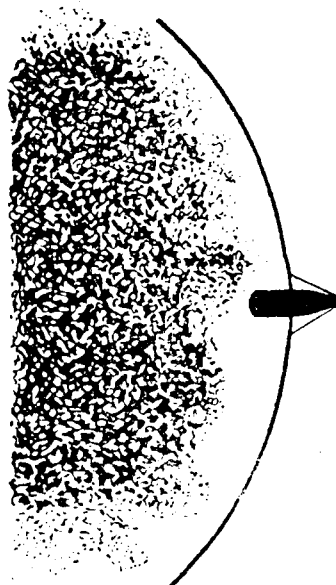
się bardziej stroma i węższa, czas więc przechodzenia zgęszczenia przez dany element objętości środowiska staje się ze wzrostem odległości od ogniska coraz krótszy, wzrasta za to nagłość zmiany ciśnienia. Część krzywej, odpowiadająca rozrzedzeniu, stopniowo się wydłuża i spłaszcza. Tym się tłumaczy niejednokrotnie stwierdzony fakt, że w pobliżu miejsca wybuchu działanie mechaniczne wywiera głównie fala zgęszczenia (szyby wtłaczane są do wnętrza mieszkań), w większej jednak odległości — fale rozrzedzenia (szyby wypadają na zewnątrz), jakkolwiek bowiem zmiany ciśnienia przez nią wywołane są znacznie mniejsze, to jednak czas jej działania jest wtedy znacznie dłuższy od czasu krótkotrwałego zgęszczenia.

Działanie fali rozrzedzenia ujawnia się nieraz w niewielkiej już odległości od miejsca wybuchu (kilku lub kilkunastu metrów), jak to można było stwierdzić podczas bombardowania Warszawy w 1939 r.: w pokojach sąsiadujących z miejscem, w którym wybuchł pocisk, szyby wypadały na zewnątrz i zamknięte szafy się otwierały.

Villard rozpatrując dane otrzymane z obserwacji wybuchu w Courtines, stwierdza (1924 r.), że w widmie fali wybuchu długość fali, której odpowiada maximum energii, wzrasta z masą użytego środka wybuchowego.

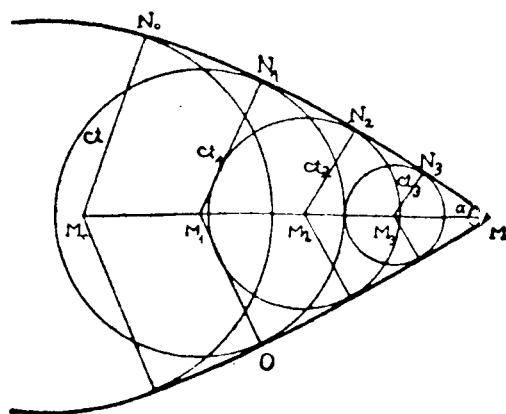
Teorie fal wybuchu dali (1860 r.) Rieman oraz Earnshaw, uwzględniając w odpowiednich równaniach hydrodynamicznych, zmianę gęstości, jakiej doznaje środowisko na skutek zachodzących w nim odkształceń, później zaś (1921 r.) Becker, który doszedł do nieco odmiennych wyników, bardziej odpowiadających danym doświadczenia.

Przypuśćmy teraz, że fala wybuchu powoduje wyrzucenie pocisku, przy czym nadaje mu prędkość większą od prędkości głosu. W bezpośrednim sąsiedztwie ogniska pocisk, który stopniowo dochodzi do swej prędkości największej, porusza się zazwyczaj wolniej od fali wybuchu, w odległości nieco dalszej prędkość fali wybuchu staje się mniejsza, wobec czego pocisk zaczyna ją wyprzedzać, przebijając jak gdyby jej czoło. Tę właśnie chwilę wyobraża schematycznie rys. 57, odtworzony według zdjęć fotograficznych Cranza (1926 r.). Pocisk, poruszając się od tej chwili w środowisku, do którego nie doszła jeszcze fala wybuchu, zgęszcza przed sobą powietrze, za sobą zaś zostawia szereg rozłożonych na drodze swego ruchu wirów (por. rozdz. II, ust. 5). Każdy zatem punkt jego drogi staje się kolejno źródłem zaburzeń, rozchodzących się we wszystkie strony z prędkością mniej więcej normalną. Niech M_0M (rys. 58) będzie drogą, przebytą przez pocisk, którego ruch dla uproszczenia przyjmiemy na tym odcinku za jednostajny i prostoliniowy. Po upływie czasu t , w ciągu którego pocisk przejdzie drogę M_0M , zaburzenie, mające swe źródło w punkcie M_0 , znajdzie się na powierzchni kuli, opisanej z M_0 pro-



rys. 57

mieniem ct , przy czym, zgodnie z założeniem $ct = vt$, gdzie v — prędkość pocisku. Podobnie zaburzenie wysłane z M_1



rys. 58

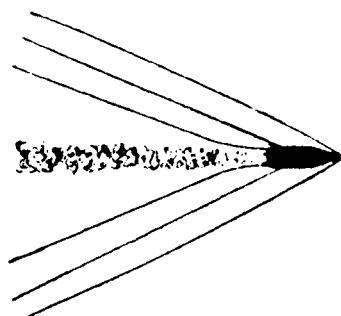
znajdzie się po upływie czasu t_1 , w ciągu którego pocisk przejdzie drogę M_1M , w odległości $c_1 \cdot t_1 < v \cdot t_1$ itd. Obwiednią tych wszystkich fal cząstkowych będzie zatem po upływie t sek, jakie upłynęły od chwili, gdy pocisk przechodził przez punkt M_0 , powierzchnia styczna do kul M_0N_0 , $M_1N_1 \dots$. Z podobieństwa trójkątów MM_3N_3 , $MM_2N_2 \dots$ wynika, że po-

wierzchnia $N_0N_1 \dots$ jest powierzchnią stożka prostego. Kąt wierzchołkowy tego stożka 2α możemy wyznaczyć ze wzoru

$$\sin \alpha = \frac{c}{v}.$$

W ten sposób powstająca fala jest tzw. falą pocisku (franc. onde de choc, onde balistique). Oprócz niej mogą się tworzyć, mniej więcej równoległe do niej, fale o mniejszym natężeniu, biorące swój początek na wystających częściach pocisku. Ostatecznie otrzymujemy obraz taki, jak na rys. 59, odtworzonym schematycznie również według zdjęć fotograficznych Cranza.

Do obserwatora, znajdującego się w pobliżu drogi pocisku, fala pocisku dochodzi przed falą wybuchu i to tym wcześniej, im większa odległość dzieli obserwatora od miejsca wybuchu. Według Bruhata zjawisko posiada przebieg następujący. W chwili, gdy fala pocisku dochodzi do obserwatora w O (rys. 58), słyszy on silny huk (zazwyczaj, choć, jak stwierdza Cermak, nie zawsze, wyraźniejszy i ostrzejszy od huku wybuchu); huk ten pozornie wychodzi z tego punktu drogi M_1 , któ-



rys. 59

ry jest środkiem kuli, stycznej w danym punkcie do fali pocisku; dopiero później dochodzą do obserwatora zaburzenia wysyłane z punktu $M_2, M_3, \dots$ składające się na gwizd pocisku, początkowo bardzo wysoki, później zaś zgodnie z zasadą Dopplera-Fizeau niższy.

Podczas bombardowania Warszawy w 1939 r. można było zauważyć, że przy strzelaniu z armat salwami lub też gdy pocisk dobiegał już ziemi, słychać było nie gwizd, lecz szelest, podobny do szelestu zboża lub wysokiej trawy, poruszanej przez silny wiatr. Zjawisko to szczególnie wyraźnie występowało na wąskich ulicach.

Stopniowo jednak prędkość pocisku maleje, fala pocisku odrywa się od pocisku i rozchodzi się z prędkością normalną. Wtedy odstęp czasu, jaki upływa od chwili, gdy obserwator słyszy falę pocisku, do chwili, gdy słyszy falę wybuchu, nie zmienia się już przy zmianie odległości obserwatora od ogniska wybuchu.

W podobny schemat możnaby ująć również i rozchodzenie się grzmotu i takiemu właśnie przebiegowi zjawiska przypisać, przynajmniej częściowo, „warkot” grzmotu.

ROZDZIAŁ II.

DRGANIA CIAŁ SPRĘŻYSTYCH. ŹRÓDŁA DŹWIĘKU.

1. — DRGANIA STRUNY.

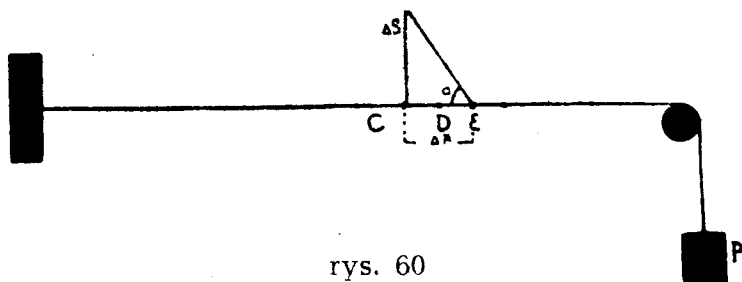
Przy badaniu źródeł zaburzeń okresowych, o których była mowa w rozdziale poprzednim, często rozróżnia się tzw. źródła samodzielne, które raz wzbudzone, stają się na dłuższy lub krótszy przeciąg czasu źródłami dźwięku (w szerokim tego słowa znaczeniu), przy czym okres wysyłanych przez nie zaburzeń zależy przede wszystkim od ich własności geometrycznych i fizycznych, i tzw. źródła wtórne, które jedynie jakby odtwarzają lub dalej przekazują otrzymywane działania zewnętrzne, powtarzające się okresowo (np. pochodzące od innego źródła drgań). W pierwszym przypadku mówimy o drganiach własnych (s w o b o d n y c h) źródła, w drugim — o jego drganiach wymuszonych (p o d n i e c a n y c h).

Nie wchodząc tutaj w rozważanie, czy podział ten — dogodny, gdy chodzi o klasyfikację przyrządów, z jakimi się ma do czynienia w badaniach akustycznych — jest dostatecznie ścisły, i odkładając do dalszych ustępów ustalenie związków, zachodzących między drganiami wymuszonymi i własnymi, zajmiemy się obecnie rozpatrzeniem swobodnych drgań ciał stałych.

Jeden z najprostszych przypadków tego rodzaju stanowi drganie struny tzn. ciała stałego, wydłużonego w kształt nici, o wymiarach poprzecznych bardzo małych w porównaniu z długością ciała.

Przypuśćmy, że mamy taką struną, do której obu końców przyłożone są siły P (rys. 60), C zaś niech będzie bardzo małym elementem jej długości, o którym założymy, że w chwili $t = 0$ został wychylony ze swego położenia równowagi i przesunięty

w kierunku prostopadłym do struny na niewielką odległość Δs . Przyjmijmy dalej, że struna jest całkowicie pozbawiona sprężystości tak, że ani zmiana jej kształtu, którą powoduje wychylenie elementu C , ani jej wydłużenie, które wychyleniu temu towarzyszy, nie wywołuje powstania w niej żadnych sił sprężystych, wobec czego jedyną siłą, którą działa element C na sąsiedni element E , przesuując go do góry, jest składowa, prostopadła do struny, napięcia, wzbudzonego przez siły ze-



rys. 60

wewnętrzne. Składowa ta w chwili, gdy środek masy elementu E znajduje się w położeniu równowagi, równa jest $P \sin \alpha$ lub z uwagi, że kąt α jest bardzo mały, i że Δs nieograniczenie mało różni się od łuku koła, opisanego ze środka masy elementu E promieniem równym Δx , odległości środków masy rozpatrywanych elementów, $P \frac{\Delta s}{\Delta x}$.

Podobnie więc, jak w przypadku, rozpatrywanym w ustępie drugim rozdziału I, napięcie, przeciwdziałające zmianie kształtu struny, jest proporcjonalne do obliczonej na jednostkę długości zmiany odchylenia od położenia równowagi. Stosując zatem to samo, co wtedy rozumowanie, i podstawiając P zamiast e oraz masę jednostki długości struny δ zamiast ρ , znajdujemy, że odkształcenie wywołane w elemencie C , będzie się rozchodziło wzdłuż struny z prędkością

$$c = \sqrt{\frac{P}{\delta}} \quad (1)$$

lub, gdy, jak to często bywa, obciążenie struny jest wyrażone w jednostkach ciężarowych,

$$c = \sqrt{g \frac{P}{\delta}}. \quad (1a)$$

Wzór ten, wyprowadzony (1779 r.) przez Eulera, poddali sprawdzeniu doświadczalnemu bracia W. i E. H. Weberowie (1825 r.).

Sznur spleciony z cienkich nitek bawełny, o bardzo małej sztywności, był jednym końcem przywiązany do śruby, drugim zaś nawinięty na blok i obciążony odpowiednim ciężarem. Nagłym uderzeniem sznura w punkcie, leżącym w pobliżu jednego z jego końców, powodowano powstanie poprzecznej fali odkształcenia, która po przebieżeniu całej długości sznura odbijała się od drugiego nieruchomego jego końca, przy czym kierunek odchylenia cząstek zmieniał się na przeciwny (por. rozdz. I, ust. 12), tak że góra np. odbijała się, jako dolina. Mierząc czas, jaki upłynął od chwili wystania zaburzenia do chwili jego powrotu, i znając długość sznura, można wyznaczyć prędkość c . Weberowie stwierdzili, że prędkość rozchodzenia się fal jest wielkością stałą: przy podwojeniu, potrojeniu . . . długości drogi czas zużyty na jej przebycie przez falę, wzrastał dwukrotnie, trzykrotnie . . . , że dalej prędkość ta nie zależy od długości fali, zachowując tę samą wartość zarówno wtedy, gdy odkształcenie było wywołane przez krótkotrwałe i słabe potrącenie palcem, jak i wtedy, gdy wzbudzono je przez długie i silne uderzenie, i wreszcie, że otrzymane z pomiarów wartości c mało na ogół się różniły od obliczonych ze wzoru (1a). Tak np. w przypadku sznura o długości 1662,2 cm i masie 52,612 g, obciążonego 610,5 gc, znaleziono na czas przejścia odkształcenia tam i z powrotem $\frac{46}{60}$ sek i stąd na prędkość

$$c_1 = \frac{60 \cdot 3324,4}{46} = 4336,2 \text{ cm/sek};$$

podczas gdy ze wzoru (1a) mamy

$$c = \sqrt{\frac{980,6 \cdot 610,5 \cdot 1662,2}{52,612}} = 4339 \text{ cm/sek},$$

różnica zatem nie przekracza 0,1%, leżąc całkowicie w granicach błędu doświadczenia. Wzór więc (1a) można uważać za potwierdzony doświadczalnie.

Opierając się na tych danych, rozpatrzmy, jakie drgania może wykonywać struna o długości l , napięta między dwoma nieruchomymi punktami A i B . W jakikolwiek sposób pobudzamy ją do drgania, choćby przez szarpanie palcem jakiegoś jej elementu O , wzbudzone zaburzenie rozchodzi się w obie dwie strony i odbija się od nieruchomych punktów A i B , które wtedy stają się jak gdyby nowymi źródłami zaburzeń. Załóżmy, że zaburzenie, wywołane w O , jest dostatecznie małe, aby podlegać prawom ustalonym w rozdziale I oraz że przy odbiciu nie zachodzi strata energii (albo też, że straty na obu końcach są jednakowe). Wtedy, w przypadku najogólniejszym, na strunie powstanie układ fal stojących, wytworzony przez interferencję wychodzących z A i B fal składowych harmonijnych prostych, na jakie możemy zawsze rozłożyć falę odkształcenia struny. Każda z tych fal będzie miała, oczywiście, inną długość, wszystkie one jednak będą musiały czynić zadość warunkowi, aby punkty A i B były ich węzłami. Najdłuższą zatem falą, która może powstać na strunie, będzie taka, która będzie miała węzły tylko w tych dwóch punktach, a więc której długość równa jest $2l$. Częstość przeto drgań tonu zasadniczego o najmniejszej częstości drgań, otrzymamy ze wzoru

$$\nu_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{P}{\delta}}, \quad (2)$$

gdzie P , jak poprzednio, oznacza siłę napinającą strunę.

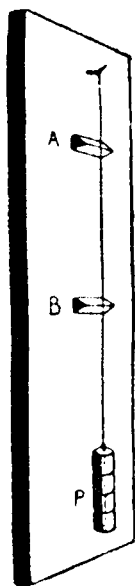
Na okres drgania T_1 otrzymujemy ze wzoru (2)

$$T_1 = \frac{2l}{c},$$

a więc okres drgania tonu zasadniczego równy jest przeciągowi czasu, jaki zaburzenie zużywa na przebycie drogi od jednego z punktów umocowania do drugiego i z powrotem.

Wzór (2) można sprawdzić przy pomocy tzw. sonometru (łac. sonare — brzmieć). Jest to pionowo wisząca deska, na której (w górnej jej części) umocowane są jednym ze swych końców badane struny. Struny te obciąża się zmiennymi ciężarami P . Pryzmaty A i B

które można przesuwać wzdłuż deski, ograniczają badany odcinek struny AB. Gdy na desce jest napięta, jak to najczęściej bywa, jedna tylko struna, sonometr staje się monochordem (gr. monos — jeden tylko, chorde — struna). Przy użyciu tego właśnie przyrządu Mersenne, jeszcze przed wyprowadzeniem wzoru (2) przez Taylora, ustalił (1636 r.) zależność częstości drgań od obciążenia P oraz długości i gęstości liniowej drutu. Wzór (2) był później wielokrotnie sprawdzany, między innymi i przez wymienionych wyżej braci Weberów.



rys. 61

Warunkom granicznym czynią zadość również wszystkie tony o częstościach 2, 3, 4, 5... n -krotnie większych od częstości tonu zasadniczego. Tonowi o częstościach $2\nu_1$, odpowiada fala o długości l , a więc mająca oprócz węzłów w punktach A i B jeszcze jeden węzeł w punkcie środkowym C (rys. 62). Tonowi o częstości $3\nu_1$, odpowiada fala długości $\frac{2}{3}l$, ma-

jąca poza węzłami A i B jeszcze dwa węzły dodatkowe w D i E itd. Możemy zatem napisać

$$\nu_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{P}{\delta}}. \quad (2a)$$

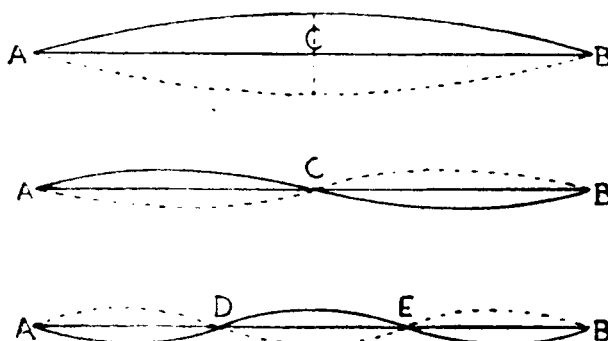
W strunie fala odkształcenia rozchodzi się tylko wzdłuż struny, pod względem więc formalnym zjawisko jest zupełnie analogiczne do rozchodzenia się fali płaskiej w środowisku nieograniczonym, gdzie wartość odchylenia od położenia równowagi również jest funkcją tylko dwóch zmiennych t i x — odległości danego elementu od dowolnie wybranego punktu lub płaszczyzny. Kładąc oś x wzdłuż struny, możemy analogicznie do wzoru (3) na str. 13 napisać

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3)$$

gdzie s zastąpiliśmy przez y .

Napiszmy, że

$$y = y_t \cdot y_x$$



rys. 62

gdzie y_t jest funkcją samego tylko czasu, y_x — samej tylko odległości; y_t posiada więc w danej chwili tę samą wartość we wszystkich punktach struny, y_x zaś w danym punkcie struny posiada w każdej chwili wartość stałą. Różniczkując mamy

$$\frac{\partial y}{\partial t} = y_x \frac{dy_t}{dt} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = y_x \frac{d^2 y_t}{dt^2}$$

oraz

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y_t \frac{dy_x}{dx} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y_t \frac{d^2 y_x}{dx^2}.$$

Podstawiając do równania (3) otrzymujemy

$$y_x \frac{d^2 y_t}{dt^2} = c^2 y_t \frac{d^2 y_x}{dx^2}$$

lub

$$\frac{1}{y_t} \frac{d^2 y_t}{dt^2} = \frac{c^2}{y_x} \frac{d^2 y_x}{dx^2}. \quad (3a)$$

Lewa strona równania (3a) nie zależy od x , prawa — od t , równanie zatem wtedy tylko może być spełnione, gdy zarówno prawa, jak i lewa jego strona są równe wielkości stałej. Oznaczmy ją przez $-\frac{4\pi^2}{T_i^2}$. Będziemy mieli

$$\frac{d^2 y_t}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T_i^2} y_t \quad \text{i} \quad \frac{d^2 y_x}{dx^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{4\pi^2}{T_i^2} y_x. \quad (4)$$

Pierwszemu z równań (4) zadość czyni, jak to można łatwo sprawdzić, wartość y_t , wyrażona jednym z dwóch poniższych wzorów

$$y_t' = y_0^{(i)} \sin \frac{2\pi t}{T_i} \quad \text{lub} \quad y_t'' = y_0^{(i)} \cos \frac{2\pi t}{T_i}, \quad (5)$$

drugiemu zaś z równań (4) — wartość y_x

$$y_x' = \sin \frac{2\pi x}{cT_i} \quad \text{i} \quad y_x'' = \cos \frac{2\pi x}{cT_i}. \quad (5a)$$

W przypadku przez nas rozpatrywanym struna nie jest wszakże nieograniczenie długa, lecz umocowana w punktach A i B ; w tych punktach wychylenie stale jest równe zeru; dla x zatem równego

zeru lub 1 wartość y_x musi być równa zero. Temu warunkowi może uczynić zadość jedna tylko z wartości y_x , wyznaczonych przez wzór (5a), a mianowicie

$$y_x = \sin \frac{2\pi x}{cT_i} = \sin \frac{\pi \cdot 2x}{cT_i} = \sin h \cdot 2x \quad (6)$$

i to jedynie wtedy, gdy $\frac{2l}{cT_i}$ jest równe n , n zaś jest jakąkolwiek liczbą z szeregu liczb całkowitych 1, 2, 3, ... Stąd wynika, że częstotści drgań składowych wyrażają się wzorem

$$\nu_i = \frac{1}{T_i} = \frac{nc}{2l} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{P}{\delta}} = n \nu_1 \quad (7)$$

Wartość czynnika $cT_i = \lambda_i$ argumentu funkcji y_x , którą nazywamy funkcją własną równania (3), znajdujemy ze wzoru

$$\frac{2l}{cT_i} = \frac{2l}{\lambda_i} = n, \text{ stąd } \lambda_i = \frac{2l}{n}. \quad (7a)$$

Podstawiając na n kolejne liczby całkowite, otrzymamy tzw. wartości własne argumentu funkcji y_x

$$h_1 = \frac{\pi}{\lambda_1} = \frac{\pi}{2l}; \quad h_2 = \frac{\pi}{\lambda_2} = \frac{2\pi}{2l}; \quad h_3 = \frac{\pi}{\lambda_3} = \frac{3\pi}{2l} \dots$$

Odchylenie $y^{(i)}$, czyniące zadość warunkom granicznym, wyrazi się wzorem

$$y^{(i)} = y_0^{(i)} \sin \left(\frac{\pi}{\lambda_i} \cdot 2x \right) \cdot \sin \frac{2\pi c}{\lambda_i} \cdot t \quad (8)$$

lub

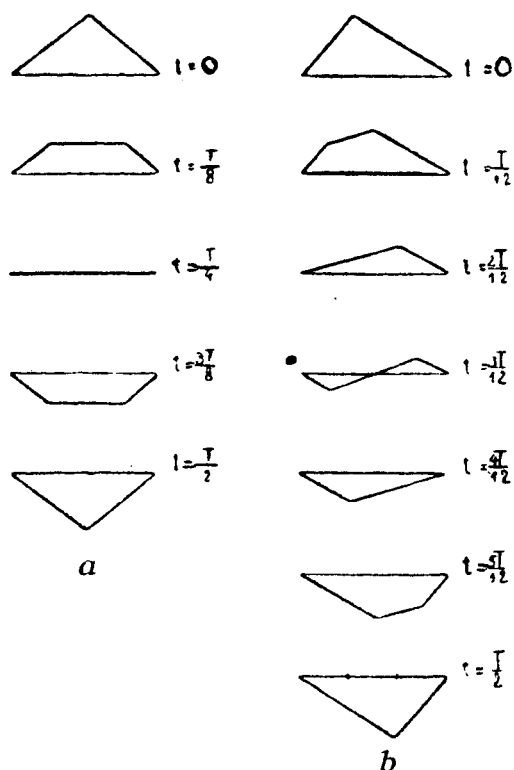
$$y^{(i)} = y_0^{(i)} \sin \left(\frac{\pi}{\lambda_i} \cdot 2x \right) \cdot \cos \frac{2\pi c}{\lambda_i} \cdot t, \quad (8a)$$

gdzie $y_0^{(i)} \sin \left(\frac{\pi}{\lambda_i} \cdot 2x \right)$ jest amplitudą danego drgania harmonijnego prostego.

Rozwiązanie ogólne otrzymamy, sumując wzory (8) i (8a) po podstawieniu do nich wartości własnych i pisząc $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$,

$$y = y_0' \sin \frac{\pi \cdot 2x}{2l} \sin \omega_1 t + y_0'' \sin \frac{2\pi \cdot 2x}{2l} \cdot \sin 2\omega_1 \cdot t + \\ + y_0''' \sin \frac{3\pi \cdot 2x}{2l} \sin 3\omega_1 t + \dots \quad y_0^{(n)} \sin \frac{n\pi \cdot 2x}{2l} \sin n\omega_1 t + \dots \quad (8b)$$

Kształt fali złożonej zależy od położenia na strunie miejsca zaburzenia początkowego, to zn. miejsca, w którym struna została szarpnięta. Najprostszy stosunkowo obraz otrzymujemy, gdy punkt wzbudzony leży dokładnie pośrodku struny,



rys. 63a i b

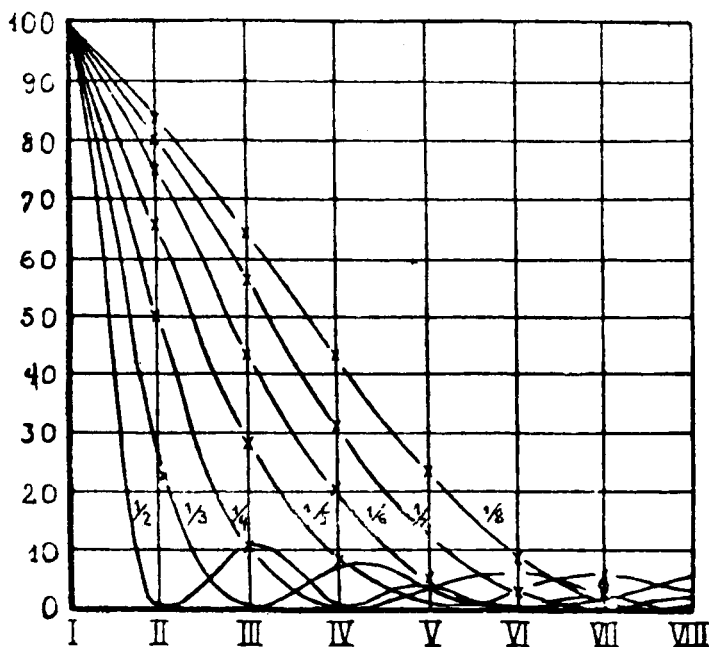
wtedy wszystkie punkty struny przechodzą jednocześnie przez położenie równowagi i jednocześnie dochodzą do największych możliwych odchyśleń; gdy punkt wzbudzenia leży w odległości $1/3$ od jednego z końców struny, zjawisko staje się bardziej zawiłe. Kolejne położenie struny w pierwszym i drugim przypadku odtwarzają rys. 63a, 63b wzięte z pracy Kalähnego (1927 r.), przy czym na rys. 63a są podane położenia struny co $\frac{1}{8}$ okresu drgania jej tonu zasadniczego, na rys. 63b — co $\frac{1}{12}$.

Od położenia na strunie miejsca szarpnięcia zależy również i barwa dźwięku, w którym znikają te wyższe tony harmonijne, jakie mają węzeł w punkcie szarpnięcia.

Drgania poszczególnych punktów struny nie są na ogół jednakowe, lecz zależą od odległości danego punktu zarówno od końców struny, jak i punktu szarpnięcia. Jasną jest bowiem rzeczą, że drganie punktu, w którym przypada węzeł n -tego tonu harmonijnego, różni się od drgania punktu, na który przypada strzałka tego tonu. Obraz drgania danego elementu struny można otrzymać albo przy pomocy mikroskopu wibracyjnego (p. str. 67) albo też, jak to zrobili Krigar-Mentzel i Raps, rzucając obraz danego elementu struny na błonę fotograficzną, nawiniętą na walec, poruszający się ruchem śrubowym.

Rozkładając drganie wypadkowe na szereg Fouriera i znając odchylenie od położenia równowagi poszczególnych ele-

mentów długości struny w chwili $t=0$, a więc w chwili jej wzbudzenia, można obliczyć, czego tu robić nie będziemy, odchylenie ich w dowolnej chwili $t=t_1$ oraz stosunek wzajemny energii tonów struny. Obliczenia te dla pewnych położenia miejsca wzbudzenia wykonał Auerbach; wynik jego obliczeń graficznie odtwarza rys. 64, na którym rzymskie cyfry osi odciętych oznaczają częstotliwości tonów harmonicznych, równych (I) częstotliwości tonu zasadniczego i dwa (II), trzy (III) ... osiem (VIII) razy większych, rzędne zaś energie, odpowiadające tym tonom, i wreszcie ułamki przy krzywych stosunki odcinków, na jakie punkt wzbudzony dzieli umocowaną w dwóch punktach strunę. Z rysunku tego



rys. 64

wynika, że dźwięk najbogatszy w wyższe tony harmoniczne otrzymamy przy wzbudzeniu w punkcie leżącym w odległości $\frac{1}{8}$ od jednego z umocowanych punktów struny. Wnioski te znalazły na ogół potwierdzenie w doświadczeniach, wykonanych przez Krigar-Menzel'a i Rapsa (1893 r.) oraz Mortona i Vinycomba (1904 r.). Z góry można jednak przewidzieć, że zgodność wyników doświadczeń z wnioskami, opartymi na wyżej przytoczonych rozważaniach, nie może być doskonała. Żadne bowiem z dwóch podstawowych założeń: ani to, że punkty zamocowania są zupełnie nieruchome, ani też, że struna jest doskonale giętka, nie są nigdy w rzeczywistości spełnione. Z tego też powodu częstość tonu zasadniczego różni się zazwyczaj od obliczanej ze wzoru (2).

Wpływ sztywności ujawnia się, rzecz prosta, najbardziej w strunach metalowych. N. Savart, który pierwszy stwierdził (1842 r.), że ton drgającej struny metalowej jest wyższy od tonu, którego należałoby się spodziewać, stosując wzór (2), założył, na podstawie swych pomiarów, że częstość tonu obserwowanego można wyrazić wzorem

$$\nu''^2 = \nu_1^2 + \nu_0^2, \quad (a)$$

gdzie ν_1 jest częstością, obliczaną ze wzoru (2), ν_0 zaś częstością, z jaką by struna drgała pod działaniem własnej tylko sztywności. Duhamel dał (1842 r.) przybliżoną teorię tego zjawiska, przyjmując, że drganie, spowodowane przez sztywność struny, ma częstość taką, jak drganie struny doskonale giętkiej, o tej samej długości i gęstości, obciążonej odpowiednio dobranym ciężarem P'_0 , tak że mamy

$$\nu_0^2 = \frac{g P'_0}{4 l^2 \delta},$$

wzór więc (a) możemy przepisać w postaci

$$\nu''^2 = \frac{g}{4 l^2 \delta} (P + P'_0). \quad (b)$$

Seebeck stwierdził (1847 r.), że założenia Savarta i Duhamela odpowiadają rzeczywistości jedynie w warunkach szczególnych i dał dokładniejszą teorię tego zjawiska, rozwiniętą następnie przez Rayleigha i Brauna (1872 r.). Według Allana (1927 r.) poprawka jest tym mniejsza, im większe jest napięcie i im mniejsza jest częstość danego tonu.

Na częstość drgań wpływa również rodzaj środowiska, w którym struna się znajduje i którego cząstki unosi w swym ruchu drgającym, co powoduje pozorny wzrost masy struny i obniżenie tonu zasadniczego. Laird znalazł (1898 r.), że częstości drgań tej samej struny wynoszą w powietrzu 70,8, w wodzie 70,1, w rtęci 43,0, w glicerynie od 15 do 22 drgań na sekundę. Próby Kolaceka (1879 r.) i Kalähnego (1915 r.) ujęcia tej zależności we wzory dały wyniki dodatnie jedynie w przypadku płynów o gęstości niewielkiej.

Drganie zarówno całej struny, jak i poszczególnych jej elementów oraz stosunek energii tonu zasadniczego do energii wyższych tonów harmonijnych zależą w wysokim stopniu od sposobu wzbudzenia drgań struny, a więc od tego, czy, jak to przyjmowaliśmy wyżej, struna została pobudzona do drgania przez szarpnięcie (cytra lub harfa) czy przez pociągnięcie smyczkiem (skrzypce) czy wreszcie przez uderzenie (fortepian). W tym ostatnim przypadku energia wyższych tonów harmonijnych może być w pewnych warunkach większa od energii tonu zasadniczego. Zagadnień tych rozpatrywać tu nie będziemy.

Poświęcono im wiele prac teoretycznych i doświadczalnych, że wymienimy tu prace Helmholtza, zebrane w podstawowym dla akustyki dziele „Die Lehre von der Tonempfindungen” (Nauka o wrażeniach dźwiękowych, 1862 r.), dalej W. Kaufmanna (1895 r.), Bartona i jego współpracowników (1909 r. i nast.), George’a (1925 r.) i ostatnio paru uczonych hinduskich Ramana i Banerji’ego (1929 r.) oraz Bhargavy i Gosha (1924 i 1925 r.).

Oprócz rozpatrywanych wyżej drgań poprzecznych mogą w strunie rozchodzić się również drgania podłużne z prędkością

$$c' = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (9)$$

gdzie E — moduł Younga struny, ρ — jej gęstość. W strunie umocowanej na dwu końcach, w których podobnie, jak w przypadku fali poprzecznej, tworzą się węzły fali, otrzymujemy na częstość drgań tonu zasadniczego

$$\nu_1 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (9a)$$

(znaczek 1 od łac. longitudinalis — podłużny).

Oznaczając przez q przekrój struny i podstawiając do wzoru (2) $q\rho$ zamiast ϱ , przepiszemy wzór (2) w postaci

$$\nu_t = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{P}{q\rho}}$$

(znaczek t od łac. transversalis — poprzeczny). Stąd na stosunek ν_t do ν_1 otrzymujemy

$$\frac{\nu_t}{\nu_1} = \sqrt{\frac{P}{qE}}. \quad (10a)$$

Niech Δl oznacza wydłużenie struny, spowodowane przez obciążenie P . Mamy wtedy (tom I, str. 201)

$$\frac{P}{q} = p = E \frac{\Delta l}{l},$$

skąd ostatecznie

$$\frac{v_t}{v_1} = \sqrt{\frac{\Delta l}{l}}. \quad (10b)$$

Drgania podłużne mają zatem częstość taką, jaką by miały drgania poprzeczne przy takim obciążeniu P , któreby powodowało dwukrotne zwiększenie długości struny. Wzór ten potwierdziły pomiary Cagniard de la Toura.

W doświadczeniu Cagniard de la Toura długość struny wynosiła 1480 cm, stosunek zaś częstości drgań $\frac{v_t}{v_1} = 0,0593$. Stąd na wydłużenie struny Δl pod działaniem obciążenia P znajdujemy

$$\Delta l = l \left(\frac{v_t}{v_1} \right)^2 = 1480 \cdot (0,0593)^2 = 5,18 \text{ cm.}$$

Z bezpośredniego pomiaru Cagniard de la Tour otrzymał $\Delta l = 5 \text{ cm}$, a więc wartość, różniącą się mniej, niż o 4% od obliczonej.

2. — DRGANIA PRĘTÓW I SZTAB.

W ten sam sposób, jak w strunach, rozchodzić się będą drgania podłużne również w prętach lub sztabach, to zn. wydłużonych ciałach stałych, których wymiary poprzeczne są, podobnie jak w strunach, małe w porównaniu z długością ciała, lecz których współczynnik sztywności nie jest tak, jak w strunach, równy zeru, gdzie zatem prędkość rozchodzenia się tego rodzaju zaburzeń jest, jak to wynika ze wzoru (9), niezależna od sztywności ciała. Drgania te, wzbudzone czy to przez pocieranie ciała w kierunku jego długości czy też przez uderzenie w kierunku osi ciała, rozchodzić się będą z prędkością

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Fale okresowego odkształcenia, odbijające się na końcu ciała, wytworzą ostatecznie tak, jak w strunie, fale stojące, w których rozmieszczenie węzłów i strzałek będzie zależało od sposobu umocowania drgającego pręta. Gdy jeden tylko

z końców pręta jest umocowany, drugi zaś swobodny, tonowi zasadniczemu odpowiadać będzie fala, której węzeł znajduje się w punkcie zamocowania, strzałka zaś — na końcu swobodnym (rys. 65a, na którym odcinki odłożone w kierunku prostopadłym do osi pręta O_x , odtwarzają odchylenia od położenia równowagi w chwili największego wychylenia). Długość tej fali równa jest więc $4l$, gdzie l — długość pręta. Stąd na częstość drgań otrzymamy

$$\nu_1' = \frac{c_1}{\lambda_1} = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (11)$$

Warunkowi, aby węzeł był w O , strzałka na końcu pręta, czyni zadość również fala o długości $\lambda = \frac{3}{4} l$ (rys. 65b), a więc o częstości

$$\nu_1'' = \frac{3}{4l} \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

jak również fala o długości $\frac{4}{5} l$ (rys. 65c), o częstości zatem

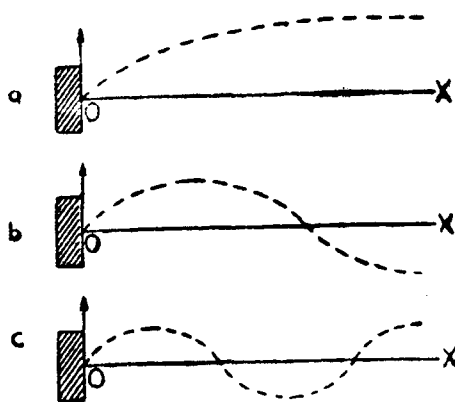
$$\nu_1''' = \frac{5}{4} l \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Mamy przeto ogólnie

$$\nu_1^{(n)} = \frac{(2n-1)}{4l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (11a)$$

Gdy obydwa końce pręta są swobodne, tak że na końcach powstają strzałki fali stojącej, częstość drgań tonu zasadniczego otrzymamy ze wzoru

$$\nu_1' = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (12)$$



rys. 65

odległość bowiem między strzałkami l równa jest $\frac{\lambda}{2}$; częstości tonów wyższych będą wtedy równe

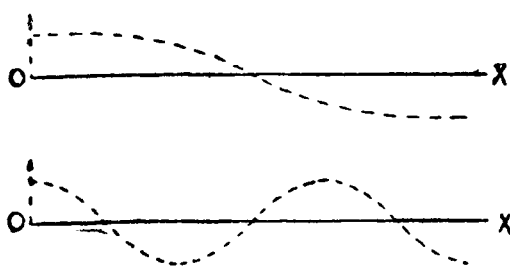
$$v_1^{(n)} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (12a)$$

Zmieniając odległość punktu zamocowania (lub zawieszenia) od końca pręta, usuwamy te tony, których węzeł nie przypada na miejsca zamocowania. Tak np. umocowując pręt pośrodku, uniemożliwiamy powstanie wszystkich tonów wyższych, których węzeł nie leży w środku; w tym więc przypadku znikają wszystkie drgania, dla których n jest parzyste. Częstoci kolejnych tonów harmonijnych wyrażają się wtedy wzorem

$$v_1^{(n)} = \frac{2n-1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (12b)$$

drgania więc zachodzą tak, jak w pręcie, umocowanym na jednym końcu i mającym długość dwa razy mniejszą. (rys. 66).

W pręcie, umocowanym na obydwu końcach, węzły fali stojącej tworzą się w punktach zamocowania; częstoci drgań składowych wyraża wtedy wzór (12a).



rys. 66

Gdy pręt pocierany jest (np. smyczkiem) nie w kierunku swej osi, lecz w kierunku, tworzącym z osią kąt większy od zera, wtedy poza drganiami podłużnymi powstają w pręcie jeszcze drgania, wzbudzone przez skrócenie, jakie zachodzi

na skutek pocierania. Zakładając, że i tym razem, jak we wszystkich przypadkach poprzednich, odkształcenie jest dostatecznie małe, aby podlegało prawom, omówionym w ust. 2—5 rozdz. V tomu I, znajdziemy, stosując rozumowanie analogiczne do tego, jakim posługiwaliśmy się w ust. 2 rozdz. I, że prędkość rozchodzenia się fal skrócenia w pręcie o przekroju kołowym równa jest

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (13)$$

gdzie μ — współczynnik sztywności ciała (tom I, str. 209), lub z uwagi, że

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)},$$

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{2(1+\sigma)}} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (13a)$$

Stosunek prędkości rozchodzenia się fal skrócenia do prędkości rozchodzenia się fal podłużnych jest wielkością stałą; w stałym przeto stosunku będą również dla danego pręta długości fal składowych oraz odpowiadające im częstości drgań. Tak np. na częstość tonu zasadniczego w pręcie, umocowanym na jednym końcu, otrzymamy

$$\nu_s = \frac{c_s}{\lambda} = \frac{1}{4l\sqrt{2(1+\sigma)}} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (14)$$

fale skrócenia bowiem będą miały, podobnie jak fale podłużne, węzeł w punkcie zamocowania, strzałkę — na końcu swobodnym. Wzory wyprowadzone dla fal podłużnych będą zatem po uwzględnieniu stosunku prędkości c_s i c_l obowiązywały i w tym przypadku.

Ze wzorów (11) i (14) znajdujemy, że stosunek częstości drgań tonu zasadniczego, otrzymanego przy pocieraniu podłużnym pręta, do częstości drgań, wzbudzanych przy pocieraniu poprzecznym (gdy kierunek pocierania tworzy z osią pręta kąt 90°) wynosi

$$\frac{\nu_l}{\nu_s} = \sqrt{2(1+\sigma)}, \quad (14a)$$

skąd można, jak to pierwszy wykazał (1825 r. i nast.) Savart, obliczyć współczynnik Poissona. W ten właśnie sposób wyznaczył (1844 r. i nast.), Wertheim σ dla paru metali, otrzymując wartości, niewiele różniące się od znalezionych przy użyciu innych metod.

Gdy pręty mają przekroje różne od kołowych, prędkość c_s zależna jest od stosunku ich wymiarów w różnych kierunkach. Schulze opierając się na teorii de Saint-Venanta (tom I, str. 215), wyznaczył

(1904 r.) prędkość rozchodzenia się fal skreńcenia w tego rodzaju prętach, znajdując np. dla prętów o przekroju prostokątnym

$$c_s = A \cdot \frac{2ab}{a^2 + b^2} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (14b)$$

gdzie a, b są długościami boków przekroju, A —funkcją ich stosunku $\frac{a}{b}$.

We wszystkich więc dotychczas rozpatrywanych przypadkach fal poprzecznych i podłużnych struny, fal podłużnych i fal skreńcenia pręta lub sztaby, stosunek częstości drgań składowych można zawsze wyrazić szeregiem liczb całkowitych.

Teen prosty stosunek przestaje obowiązywać, gdy poprzeczna fala zaburzeń jest wywołana przez zgięcie pręta lub sztaby, a więc innymi słowy przez odchylenie danej warstwy z położenia równowagi w kierunku prostopadłym do osi ciała.

Teoria rozchodzenia się tego rodzaju zaburzeń, które zazwyczaj mamy na myśli, gdy mówimy o drganiach poprzecznych ciał stałych, daje na częstość drgań składowych wzór

$$v_t^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \frac{K_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{E \cdot B_p}{S \cdot \rho}}, \quad (15)$$

gdzie B_p jest momentem bezwładności przekroju sztaby (tom I, str. 218), S — polem przekroju, E — modułem Younga, ρ — gęstością danego ciała, K_n — liczbą, mającą różne znaczenia, zależnie od sposobu zamocowania sztaby oraz od rzędu n danego drgania. W przypadku pręta lub sztaby, umocowanych na jednym końcu, wartość K_n można, z dużym przybliżeniem, wyrazić szeregiem liczb

$$1,194 \frac{\pi}{2}; \quad 2,989 \frac{\pi}{2}; \quad 5 \frac{\pi}{2}; \quad 7 \frac{\pi}{2} \dots (2n-1) \frac{\pi}{2}. \quad (15a)$$

Oznaczając częstość drgań tonu zasadniczego przez 1, na częstości względne tonów składowych otrzymamy

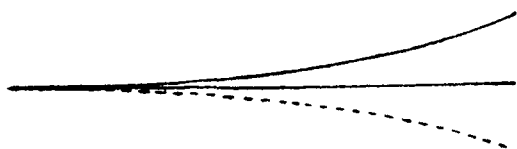
$$1; \quad 6,27; \quad 17,57; \quad 34,37, \quad 56,84 \dots \quad (15b)$$

Obraz drgań najniższego tonu sztaby, w ten sposób zamocowanej, odtwarza schematycznie rys. 67. Częstość tonu zasadniczego zależy od kształtu przekroju pręta: dla pręta lub sztaby prostokątnych mamy podstawiając do wzoru (15)

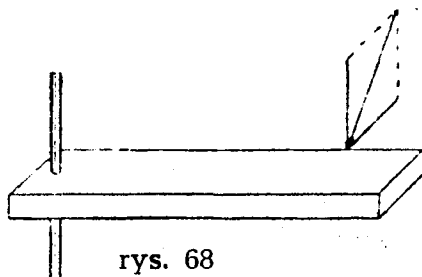
$$B_p = \frac{1}{12} ab^3 \quad (\text{tom I, str. 218}),$$

$$\nu'_t = \frac{1}{2\pi} \frac{K_1^2}{I^2} \sqrt{\frac{E \cdot ab^3}{12 ab \cdot \rho}} = \frac{1}{4\pi} \frac{K_1^2 b}{I^2 \sqrt{3}} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (15c)$$

Ton zatem będzie wyższy, gdy odkształcenie zachodzić będzie w kierunku szerszego boku pręta lub sztaby, gdy więc



rys. 67



rys. 68

kierunek drgania będzie prostopadły do boku węższego. Jeżeli ciało pobudzimy do drgania przez uderzenie w kierunku prostopadłym do osi, lecz tworzącym z normalnymi do powierzchni bocznych kąt różny od zera (rys. 68), drganie wzbudzone będzie wypadkowym drgań składowych, z których każde będzie równoległe do jednego z boków pręta i będzie posiadało odpowiadającą temu kierunkowi częstość drgania. Końce drgających w ten sposób prętów będą opisywały krzywe, analogiczne do krzywych Lissajous, jak to można łatwo sprawdzić, obserwując silnie oświetlone wypolerowane końce drgających prętów.

Na tym oparta jest budowa tzw. *kalejdofonu* (gr. kalos — piękny, ejdos — postać) *Wheatstone'a*.

Gdy różnica rozmiarów poprzecznych jest niewielka, koniec pręta drga tak, jak gdyby drgania składowe posiadały tę samą częstość drgań i zmieniającą się w sposób ciągły różnicę faz. Koniec pręta opisuje wtedy kolejno linię prostą, elipsę, koło, znów elipsę i linię prostą o kierunku prostopadłym do poprzedniego itd. (p. rozdz. I, ust. 9). Szczególnie wyraźnie można zjawisko to obserwować używając prętów o przekroju mało różniącym się od kołowego.

Dla prętów i sztab o przekroju kołowym otrzymujemy podstawiając $B_p = \frac{\pi r^4}{4}$ (tom I, str. 218)

$$\nu_t = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{K_1}{l^2} \sqrt{\frac{E \cdot \pi r^4}{4\pi r^2 \cdot \rho}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{K_1 r}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (15d)$$

Wyprowadzenie wzoru (15) nastęrcza spore trudności matematyczne, dlatego też poprzestaniemy na dowodzie przybliżonym, podanym przez Wüllnera.

Ze wzoru (9) na str. 219 tomu I otrzymujemy następujący związek między strzałką zgięcia pręta, umocowanego w jednym końcu, i siłami sprężystości, wzbudzonymi przez zgięcie i działającymi na swobodny koniec pręta,

$$f = \frac{3 E \cdot B_p}{l^3} \cdot s. \quad (a)$$

Odgięty więc koniec sztaby będzie pod działaniem tych sił drgał ruchem harmonijnym. Oznaczmy przez m masę punktu materialnego, która by pod działaniem tych samych sił wykonywała drgania o tym samym okresie. Będziemy mieli

$$f = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot m \cdot s. \quad (b)$$

Masa ta będzie oczywiście proporcjonalna do masy pręta, równej $S \cdot l \cdot \rho$ gdzie S — przekrój, l — długość pręta. Oznaczmy czynnik proporcjonalności przez $\frac{3}{K^4}$. Podstawiając tę wartość m do (b) i przyrównując (a) i (b), otrzymujemy

$$\frac{3 E \cdot B_p}{l^3} \cdot s = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{3}{K^4} l \cdot S \cdot \rho \cdot s,$$

skąd

$$T = \frac{2\pi \cdot l^2}{K^2} \sqrt{\frac{S \cdot \rho}{E \cdot B_p}}$$

i ostatecznie

$$\nu_t = \frac{1}{T} = \frac{K^2}{2\pi \cdot l^2} \sqrt{\frac{E \cdot B_p}{S \cdot \rho}},$$

gdzie K , jak to wyznaczył Seebeck, równe jest $1,194 \cdot \frac{\pi}{2}$.

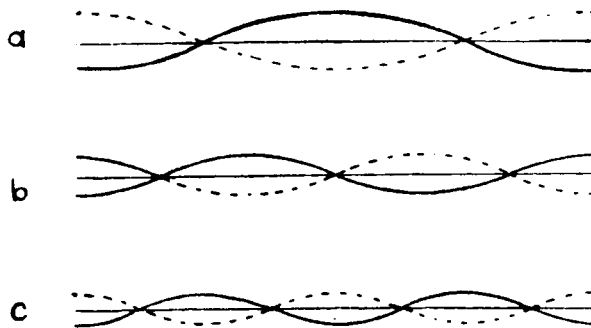
Oprócz tego drgania zasadniczego zgięcie sztaby wzbudza drgania o częstotściach wyższych, przy których sztaba rozpada się jakby na poszczególne drgające części, oddzielone od siebie węzłami. Tym częstotnościom wyższym odpowiadają wartości K_n wyrażone wyżej szeregiem (15a). Wartości te można wyznaczyć, rozwiązując równanie ogólne, do którego doprowadzają nas rozważania analogiczne do tych, jakimi posługiwaliśmy się przy wyprowadzeniu równania drgania struny (ust. 1), i które tym razem ma kształt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4},$$

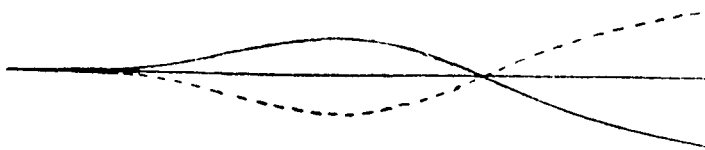
gdzie $a = \sqrt{\frac{E \cdot B_p}{S \cdot \rho}}$.

Teorię rozchodzenia się tych zaburzeń opracowali między innymi Poisson, Seebeck, Rayleigh, później zaś Lamb (1910 r.) i Kalähne (1913 r.).

Położenie węzłów i strzałek składowych fal stojących jest, oczywiście, zależne od warunków granicznych, innymi słowy, od sposobu umocowania pręta czy sztaby. Tak np. w pręcie o końcach swobodnych fala drgania zasadniczego posiada dwa węzły (rys. 69), znajdujące się, według Seebecka, w odległości 0,22421 od bliższego z dwóch końców swobodnych, na których tworzą się strzałki, i w odległości wzajemnej równej 0,55161; fala pierwszego tonu wyższego ($n = 2$) tworzy trzy węzły:



rys. 69



rys. 70

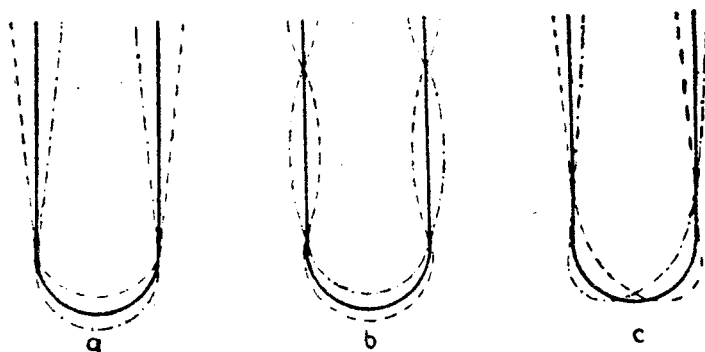
dwa w odległościach 0,13211 od końców swobodnych, trzeci — w połowie długości sztaby itd. W pręcie o jednym końcu swobodnym (rys. 70) jeden węzeł pierwszego tonu wyż-

szego przypada w miejscu zamocowania, drugi zaś na przekroju odległym o $0,2261\ l$ od końca swobodnego.

Położenie węzłów można wyznaczyć, jak to pierwszy wykazał (1787 r.) Chladni, posypując pręt lub sztabę suchym piaskiem; piasek, odrzucany przez drgające części ciała, zbiera się w węzłach, zaznaczając w ten sposób ich położenie. Pomiar, wykonany przy użyciu tej metody między innymi przez Strohlkego i Lissajous'a, dały wyniki, mało różniące się od otrzymanych ze wzorów.

W ten właśnie sposób F. Savart stwierdził, że podłużnym drganiom pręta lub sztaby towarzyszą zawsze drgania poprzeczne: piasek, którym był posypyany pręt pocierany podłużnie, zbierał się poza tymi miejscami, które odpowiadały węzłom fali podłużnej, jeszcze w punktach, odpowiadających węzłom fali poprzecznej. Energia drgań poprzecznych jest jednak wtedy o wiele mniejsza od energii drgań podłużnych.

Takie same mniej więcej położenie węzłów otrzymamy w zakrzywionym pręcie lub sztabie. W najważniejszym w praktyce przypadku widełek strojowych — kamertonu — tzn. pręta metalowego o przekroju prostokątnym, zgiętego w kształt litery *U* i osadzonego na nóżce, można z pewnym przybliżeniem uważać drganie widełek za analogiczne do drgań pręta, umocowanego na jednym końcu i mającego długość, równą mniej więcej odległości swobodnego końca od punktu, w którym widełki się zakrzywiają. Zgodnie z tym za-



rys. 71

łożeniem częstość drgań tonu zasadniczego wyraziłaby się wzorem (15c); gdzie *b* oznacza grubość prętów kamertonu, mierzoną w płaszczyźnie tych prętów, zazwyczaj bowiem za ton charakterystyczny kamertonu uważa się ton o drganiach, zachodzących w tej właśnie płaszczyźnie. Gdyby kamerton nie

miał nóżki, fala stojąca tonu zasadniczego miałaby kształt taki, jak na rys. 71a, fala zaś pierwszego tonu wyższego ($n = 2$) taki, jak na rys. 71b, węzły jej byłyby oddalone od swobodnych końców mniej więcej o 0,2 połowy całkowitej długości widełek. Fale tonów wyższych posiadałyby odpowiednio większą ilość węzłów. Tego rodzaju obraz drgań kamertonu, podany przez Chladni'ego, może w pewnych przypadkach wystarczyć. Doświadczenia istotnie stwierdzają, że kamerton wykonywa drgania złożone o parzystej i nawet, jak się zdaje, nieparzystej liczbie węzłów (wyjątek stanowi drganie o trzech węzłach, wtedy bowiem środek masy kamertonu przesuwałby się silnie w jedną i drugą stronę, (rys. 71c), przy czym położenie węzłów mniej więcej odpowiada założeniom Chladni'ego: gdy np. pobudzimy kamerton do drgania, uderzając go lub pociągając smyczkiem w punkcie bliskim swobodnego końca, mniej więcej w węźle pierwszego tonu wyższego, otrzymamy czysty ton zasadniczy, gdy zaś punkt wzbudzenia leży blisko zakrzywionej części kamertonu, mniej więcej w węźle tonu zasadniczego, usłyszymy pierwszy ton wyższy, ściślejsze jednak pomiary wykazały, że w rzeczywistości zjawisko jest bardziej złożone.

Według Mercadiera (1874 r.) ton zasadniczy kamertonu można wyrazić wzorem empirycznym

$$\nu' = k \frac{b + \beta}{(l + L)^2}, \quad (16)$$

gdzie k , β i L są wielkościami stałymi, mającymi u różnych badaczy różne wartości.

Według Mercadiera, $\beta = 0$; $k = 818270$, $L \approx 3,8$ mm, według Auerbacha (1909 r.), $k = 818000$, $\beta = 0,5$ mm, $L = 3,8$ mm. Z licznych prac poświęconych zagadnieniu drgań kamertonu wymienimy jedynie pracę Struykena (1907 r.), dającą obraz drgań zupełnie odmienny od obrazu Chladni'ego.

W zegarach godziny są często wydzwaniane przez uderzenia młotka w grubą, płaską, spiralnie zwiniętą sprężynę, umocowaną na jednym końcu; wysokość tonu jest wtedy większa, niż w przypadku drutu prostego, zakrzywienie bowiem zwiększa siły, występujące przy odkształceniu.

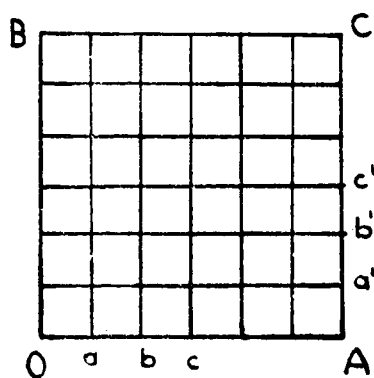
W orkiestrach używane są ksylofony i celesty. Ksylofon (gr. ksylon — drewno) składa się z drewnianych płytek o tej samej najczęściej grubości i szerokości, lecz o różnej długości, przymocowanych

lub podpartych w punktach węzłowych tonu zasadniczego. W celestach źródłem drgań są drgania wydrążonych rur metalowych o cienkich ścianach. W pozytywkach twarde ostrza, umieszczone w odpowiednich odstępach na obracającym się walcu, odginają końce cienkich sztabek (stroików), o różnych długościach i wprawiają je w ten sposób w drganie.

3. — DRGANIA BŁON I PŁYT.

Struny i pręty uważaliśmy w ustępach poprzednich za ciała jednowymiarowe, punkty bowiem znajdujące się w tej samej odległości od dowolnie wybranego punktu osi ciała posiadają w każdej chwili tę samą fazę odkształcenia. Odpowiednikiem dwumiarowym strun i prętów są błony i płyty, przy czym błony, podobnie, jak struny, nie posiadają sztywności, wobec czego mogą drgać poprzecznie jedynie wtedy, gdy są poddane napięciu zewnętrznemu. Częstość drgań błony jest zatem tak, jak częstość drgań struny, funkcją sił zewnętrznych.

W przypadku jednorodnej, równomiernie napiętej błony kwadratowej możemy zdać sobie w przybliżeniu sprawę z przebiegu zjawiska, przyrównując drgania błony do drgań dwu układów strun, skrzyżowanych pod prostym kątem, i wyznaczając częstość drgań własnych błony z położenia na niej linii (nie punktów jak w strunie) węzłowych, łączących węzły poszczególnych fikcyjnych strun. Niech np. w jednakowych strunach, równoległych do boku OA , węzły w danych warunkach tworzą się w odległościach $Oa, Ob, Oc \dots$ od boku OB , wtedy



rys. 72

linie węzłowe błony będą równoległe do tego boku w tych samych odległościach. Podobne węzły w strunach równoległych do OB spowodują powstanie linii węzłowych, równoległych do OA i leżących w odległości $Aa', Ab' \dots$ od tego boku (rys. 72). Te dwa układy linii węzłowych podzielią błonę na tak drgające części, że drgania dwu części sąsiednich będą miały zawsze fazy przeciwne. W przypadku szczególnym,

gdy poza punktami brzeżnymi nie ma innych punktów węzłowych, liniami węzłowymi są boki OB, BC, CA i AO . Błona drga wtedy jak całość.

Weźmy za miarę napięcia P błony wartość siły, działającej na jednostkę długości jakiejkolwiek linii, przeprowadzonej na powierzchni błony (por. tom I, str. 255), i oznaczmy przez δ' masę jednostki jej powierzchni. Uogólniając wzór (2a) otrzymamy

$$v_{n,m} = \frac{1}{2l} \sqrt{(n^2 + m^2) \frac{P}{\delta'}}, \quad (17)$$

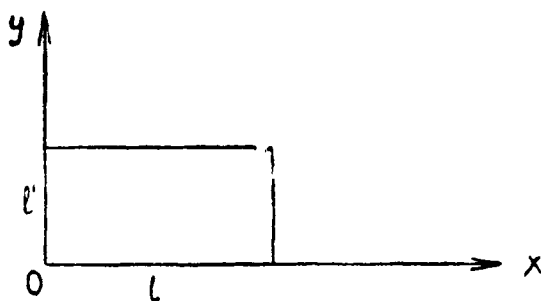
gdzie n i m są dowolnymi liczbami całkowitymi. Kładąc częstość tonu zasadniczego równą 1 ($n=1, m=1$), otrzymujemy na zespół częstości drgań błony kwadratowej następujący szereg liczb

$$1 \quad 1,58 \quad 2 \quad 2,24 \quad 2,55 \quad 2,92 \quad 3,00$$

Przyjmijmy, że mamy do czynienia z równomiernie napiętą prostokątną błoną o długości boków l i l' i weźmy płaszczyznę tej błony za płaszczyznę yOx (rys. 73); poprzeczne drgania błony zachodzić będą wtedy w kierunku osi Oz (prostopadłej do płaszczyzny rysunku). Uogólniając na dwa wymiary równanie (3) napiszemy

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right), \quad (18)$$

gdzie $c = \sqrt{\frac{P}{\delta'}}$.



rys. 73

We wszystkich punktach obwodu błony wychylenie równe jest zeru, z więc równe jest zeru dla $x=0$ i $x=l$ przy dowolnych znaczeniach y oraz dla $y=0$ i $y=l'$ przy dowolnych znaczeniach x . Tym warunkom oraz równaniu (18) czynią zadość wartości z wyrażone wzorem

$$z = A \sin \left(\frac{2\pi t}{T_{n,m}} + \varphi \right) \sin n\pi \frac{x}{l} \cdot \sin m\pi \frac{y}{l'}, \quad (18a)$$

które istotnie stają się równe zeru, gdy $x=0$ lub l oraz gdy $y=0$ lub l' , o ile tylko m i n oznaczają dowolne liczby całkowite. Poza tym z staje się równe zeru, 1) gdy przy dowolnej wartości y odcięta x równa jest $\frac{pl}{n}$, gdzie $p=1,2,\dots,(n-1)$, a więc w punktach linii prostych, równoległych do osi Oy i przecinających oś Ox w wyżej poda-

nych punktach, oraz 2) w punktach linii prostych, równoległych do osi Ox i przecinających oś Oy w punktach o rzędnych równych odpowiednio $\frac{p'l'}{m}$, gdzie $p' = 1, 2, \dots (m-1)$.

Te proste stanowią linie węzłowe. Podstawiając (18a) do wzoru (18), znajdziemy

$$\frac{4\pi^2}{T_{n,m}^2} = c^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{l'^2} \right),$$

skąd

$$\nu_{n,m} = \frac{1}{T_{n,m}} = \frac{c^2}{4} \sqrt{\frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{l'^2}}$$

i ostatecznie

$$\nu_{n,m} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{l'^2} \right) \frac{P}{\delta'}}. \quad (18b)$$

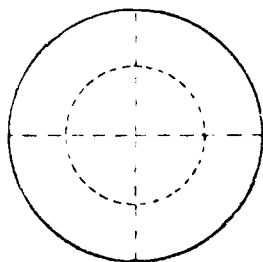
W błonie kwadratowej $l = l'$ i

$$\nu_{n,m} = \frac{1}{2l} \sqrt{(n^2 + m^2) \frac{P}{\delta'}}.$$

Każdej parze wartości n i m odpowiada oznaczona częstość drgania. W błonach prostokątnych, gdy stosunek l do l' wyraża się stosunkiem wielkich liczb całkowitych, danej częstości drgania odpowiada zawsze ta sama para wartości n i m , a co za tym idzie i ten sam układ linii węzłowych. Gdy jednak stosunek ten równy jest stosunkowi niewielkich liczb całkowitych lub też, gdy błona jest kwadratowa, tej samej częstości mogą odpowiadać dwie różne pary wartości n i m . Tak np. przy $l:l' = 1:2$ otrzymamy tę samą częstość drgania dla $n = 1$ i $m = 16$

$$\frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{l'^2} = \frac{1}{l^2} \left(n^2 + \frac{m^2}{4} \right) = \frac{1}{l^2} \cdot 65 \text{ oraz dla } n = 8 \text{ i } m = 2.$$

Tych przypadków, dokładnie rozpatrzonych przez Kalähne'go (1913 r.), omawiać tutaj nie będziemy.



rys. 74

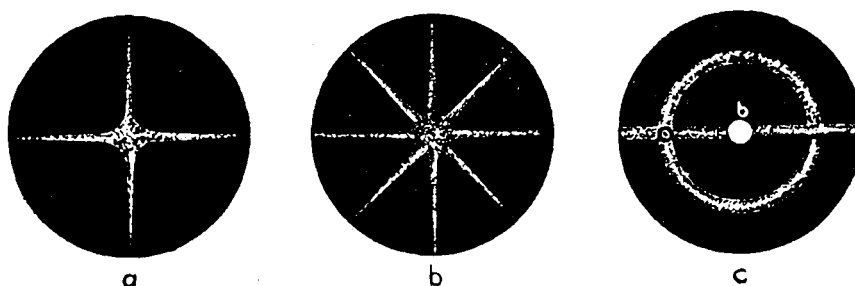
W błonie kołowej liniami węzłowymi są promienie błony lub też koła, mające swój środek w środku błony. Tak np. dla częstości drgań 3,501 razy większej od częstości tonu zasadniczego otrzymujemy, według Rayleigha, rozkład linii węzłowych mniej więcej taki, jak na rys. 74.

Savart sprawdzał doświadczalnie prawa drgań błony, naciągając na drewnianych ramach błony papierowe i pergaminowe. Drgania błon kwadratowych badali Bourget i Bernard (1860 r.), później, między innymi, Antolik (1890 r.) i Terada (1908 r.). Poza pracami teoretycznymi Poissona i Rayleigha należy wymienić pracę Mathieu (1868 r.), który badał drgania płyt eliptycznych.

W praktyce błony są używane najczęściej w przyrządach pomiarowych (rozdz. I, ust. 4) a to ze względu na znaczne zazwyczaj tłumienie ich drgań własnych (p. rozdz. II, ust. 4). Poza tym stanowią one zasadniczą część tzw. kotłów, w których naciągnięte błony zamykają otwór wydrążonych ciał o kształcie zbliżonym do półkuli, i bębnow, gdzie błona jest naciągnięta na dwu otwartych podstawach pustego wewnątrz walca.

W płytach częstość poprzecznych drgań własnych jest wyznaczona przez współczynniki sprężystości płyty (moduł Younga i współczynnik Poissona lub współczynnik sztywności), następnie zaś przez kształt i sposób zamocowania płyty. I tym razem linie węzłowe dzielą płytę na oddzielnie drgające części; drgania sąsiednich części mają zawsze fazy przeciwne. W płytach kolistych linie węzłowe są tak, jak w błonach, albo promieniami albo też kołami, jak to łatwo można sprawdzić, posypując płytę piaskiem, który, zdmuchiwany z części drgających, zbiera się w liniach węzłowych, tworząc tzw. figury Chladni'ego (od nazwiska fizyka, który pierwszy je obserwował).

Promieniste linie węzłowe otrzymuje się, zamocowując płytkę w środku i uderzając lub pocierając smyczkiem jej brzeg. Gdy unieru-



rys. 75

chomimy (przytrzymując np. palcem) punkt obwodu, leżący na średnicy prostopadłej do średnicy w punkcie pocieranym, otrzymamy rozkład linii węzłowych taki, jak na rys. 75a; gdy unieruchomimy dwa punkty obwodu, leżące na wzajemnie prostopadłych średnicach

i pobudzimy płytkę do drgania w punkcie, leżącym między nimi, otrzymamy obraz taki, jak na rys. 75b. Dla otrzymania kołowych linii węzłowych płytkę należy pobudzać do drgania w punkcie środkowym. Rys. 75c odtwarza otrzymane linie węzłowe, gdy płytkę pociąga się smyczkiem w punkcie (b), znajdującym się w wyciętej środkowej części płytki.

Z doświadczeń Chladni'ego, Savarta, Strehlkego, ostatnio zaś Southwella (1922 r.) wynika, że częstość drgań tonu zasadniczego płyty kolistej jest tym większa, im większą jest grubość płyty i mniejszy jej promień.

W często spotykanym przypadku płytki kolistej, umocowanej w środku, częstość drgań czterech tonów najniższych wyraża się według Southwella wzorem

$$\nu = \frac{d}{r^2} \sqrt{\frac{f_1 \cdot E}{\rho}}, \quad (19)$$

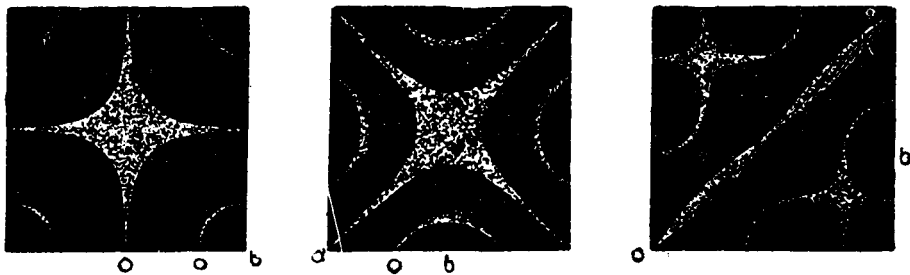
gdzie d oznacza grubość płytki, r jej promień, f_1 zaś jest odpowiednio równe 5,156; 160,2; 134,9 i 5250.

Wnioski te są na ogół zgodne z teorią drgania płyty kolistej, opracowaną przez Kirchhoffa (1850 r.).

I w tym dziale nauki o drganiach ważną rolę odgrywają badania Rayleigha, omówione w jego „Teorii dźwięku” (Theory of Sound). Drgania płyt anizotropowych badał Voigt (1915 r.). Ważny w praktycznych zastosowaniach przypadek płyt kolistych, umocowanych na obwodzie, jest przedmiotem licznych badań, zarówno teoretycznych, jak i doświadczalnych (Schulze, 1907 r., Lamb, 1920 r., Carrington, 1925 r., Powell i Roberts, 1923 r.).

Teorię drgań płyty kolistej można z pewnym, niewielkim zresztą przybliżeniem zastosować do dzwonów. Promieniom węzłowym płyty odpowiadają w dzwonie południki węzłowe, otrzymane przez przecięcie powierzchni dzwonu płaszczyznami, przechodzącymi przez oś; kołom węzłowym — linie kołowe, otrzymane przez przecięcie płaszczyznami prostopadłymi do osi. Linie te są jednak węzłowymi tylko dla drgań poprzecznych (prostopadłych do powierzchni dzwonu), nie są zaś węzłowymi dla drgań podłużnych (stycznych do powierzchni dzwonu), towarzyszących zawsze drganiom poprzecznym. Najniższemu tonowi odpowiadają dwie węzłowe linie południkowe, przecinające się pod prostym kątem. Napełnienie naczynia o kształcie dzwonu (np. kieliszka) wodą, obniża jego tony własne, masa bowiem drgająca jest wtedy zwiększona.

Większe jeszcze trudności przedstawia zbadanie drgań płyt kwadratowych lub prostokątnych. O różnorodności otrzymywanych tym razem linii węzłowych niech świadczy rysunek 76, odtwarzający linie węzłowe na płytce, umocowanej w środku, a której punkty *a* są nieruchome, punkt zaś *b* jest



rys. 76

pierwotnym źródłem zaburzeń. Wzrastającej złożoności otrzymywanych figur towarzyszy i tym razem wyższy ton drgania płytki.

Wheatstone dał (1833 r.) stosunkowo prosty sposób wykreślenia tych linii, zakładając, że w płytkach, podobnie, jak w błonach, tworzą się dwa wzajemnie prostopadłe układy linii węzłowych, rozdzielających części drgające w fazach przeciwnych. Drgania płyty otrzymujemy sumując te drgania składowe. Tej metody bliżej omawiać nie będziemy.

Teoria drgań płyt kwadratowych została stosunkowo niedawno (1909 r.) opracowana przez Ritza i następnie uogólniona na płyty innych kształtów przez Ellę Goldman (1918 r.). Doświadczalnie badali drgania takich płyt Savart, Wheatstone i Terada (1907 r.)

4. — TŁUMIENIE DRGAŃ. — DRGANIA WYMUSZONE (PODNIĘCANE). — REZONANS.

Jakiegokolwiek jednak byłoby ciało drgające, drgania w nim wzbudzone stopniowo zanikają. To zanikanie energii ruchu drgającego jest spowodowane z jednej strony przez działanie sił rozpraszających układu (sił tarcia wewnętrznego), z drugiej zaś przez pobudzanie do drgania środowiska otaczającego ciało przez oddawanie energii na zewnątrz, przez jej promieniowanie.

Wpływ każdego z tych dwu czynników na tłumienie drgań jest zależny zarówno od rodzaju drgającego ciała, jak

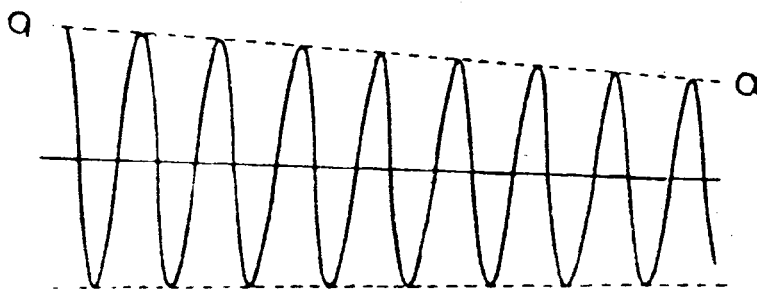
i od rodzaju środowiska. Tak np. struna lub kamerton promieniują niewielką na ogół część swej energii drgania, toteż dźwięki przez nie wydawane mają niewielkie natężenie; drgania ich zanikają głównie na skutek działania sił rozpraszających układu. Błony promieniują o wiele silniej, tym silniej, im gęstsze jest otaczające je środowisko, w wodzie np. silniej, niż w powietrzu — tak, że nieraz, szczególnie, gdy masa błony jest niewielka, tłumienie jest prawie całkowicie spowodowane przez promieniowanie.

Bez względu jednak na to, który z tych czynników przeważa, można zawsze z wystarczającym przybliżeniem przyjąć, że w niezmienionych warunkach stosunek wartości dwu kolejno po sobie następujących największych wychyleń w tę samą stronę posiada wartość stałą. Oznaczmy wartość tę przez k . Wtedy stosunek amplitud w chwili mT i $(m+p)T$ wyrazi się wzorem

$$\frac{s_m}{s_{m+p}} = k^p. \quad (20)$$

O ile tłumienie jest niewielkie, okres tego rodzaju drgań tłumionych lub zanikających pozostaje mniej więcej taki sam, jak poprzednio, krzywa jednak wychyleń zmienia swój

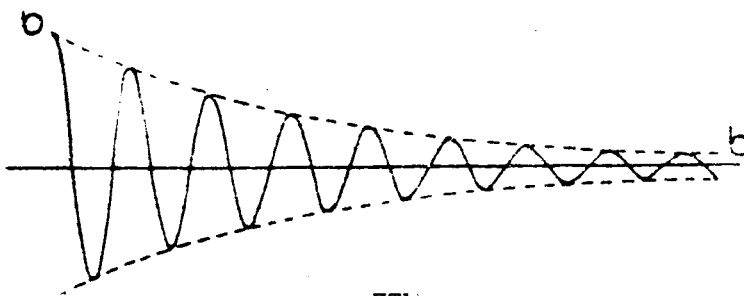
$$K=1,03$$



rys. 77a

kształt, chwile bowiem, w których odchylenie ma wartość największą, nie dzielą już na dwie równe części czasu, jaki upływa między jednym i drugim przejściem przez położenie równowagi. Te odstępstwa od nietłumionego drgania harmonijnego stają się w miarę wzrostu wartości k coraz wyraźniejsze (rys. 77, a, b, c).

$$k = 1.35$$



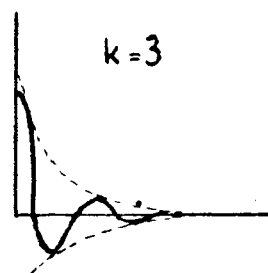
rys. 77b

Wprowadźmy zamiast stosunku k dwu kolejnych amplitud dekrement logarytmiczny, tzn. logarytm naturalny ich stosunku (tom I, str. 227) i przyjmijmy, że wobec stałego i stopniowego zmniejszania się energii ruchu drgającego amplitudy drgań również zmieniają się w sposób ciągły, tak że dekrement logarytmiczny można uważać za proporcjonalny do okresu drgań. Będziemy wtedy mieli

$$\Lambda = \lg \frac{s_m}{s_{m+1}} = \delta T, \quad (21)$$

dla stosunku zaś amplitud w chwilach mT i $(m+p)T$.

$$p\Lambda = \lg \frac{s_m}{s_{m+p}} = \delta \cdot pT. \quad (21a)$$



rys. 77c

Z zestawienia ze wzorem (20) wynika, że

$$\delta = \frac{1}{T} \lg k, \quad (21b)$$

gdzie wielkość δ , zależną również i od częstości drgań, dla każdego więc tonu harmonijnego mającą inną na ogół wartość, nazwiemy współczynnikiem tłumienia lub po prostu tłumieniem.

Związek między odchyleniami w chwilach mT i $(m+p)T$ możemy teraz wyrazić wzorem

$$s_{m+p} = s_m e^{-\delta pT},$$

skąd na odchylenie od położenia równowagi w dowolnej chwili t otrzymamy pisząc T_0 zamiast T

$$s = s_0 e^{-\delta t} \sin 2\pi \frac{t}{T_0}, \quad (22)$$

gdzie s_0 oznacza amplitudę w chwili $t = 0$, którą przyjęliśmy za początkową.

We wzorze (22) mamy do czynienia z iloczynem dwu funkcji czasu, z których tylko druga $\left(\sin 2\pi \frac{t}{T_0}\right)$ przybiera okresowo co T_0 sek te same znaczenia; pierwsza $(s_0 e^{-\delta t})$ — funkcja wykładnicza — stopniowo dąży do zera. Wartość funkcji wykładniczej w danej chwili t wyraża odpowiednia rzędna krzywych *aa* lub *bb* (rys. 77), przechodzących przez punkty największych odchyłeń od położenia równowagi, a więc przez punkty, których rzędne wyrażają wartości funkcji wykładniczej w chwilach $t = 0, T_0, 2T_0, 3T_0 \dots$ lub $t = \frac{1}{2} T_0, \frac{3}{2} T_0, \frac{5}{2} T_0 \dots$

Różniczkując wzór (22) otrzymamy na wartość prędkości drgań

$$v = \frac{ds}{dt} = s_0 e^{-\delta t} \left(\frac{2\pi}{T_0} \cos 2\pi \frac{t}{T_0} - \delta \sin 2\pi \frac{t}{T_0} \right)$$

lub, wprowadzając częstość kołową,

$$v = s_0 e^{-\delta t} (\omega_0 \cos \omega_0 t - \delta \sin \omega_0 t). \quad (22a)$$

Gdy

$$\omega_0 \cos \omega_0 t - \delta \sin \omega_0 t = 0, \text{ a więc } \operatorname{tg} \omega_0 t = \frac{\omega_0}{\delta}. \quad (a)$$

prędkość staje się równa zero, odchylenie zaś przybiera wartość największą. Pierwsze zatem maximum wychylenia nastąpi po upływie

$$t_1 = \frac{1}{\omega_0} \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\delta} \quad (b)$$

sekund od chwili początkowej, w której odchylenie było równe zero.

Ten odstęp czasu nie jest równy $\frac{T_0}{4}$ gdyby bowiem tak było,

$$\operatorname{tg} \omega_0 t_1 = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_0}{4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$$

byłby równy nieskończoności, tłumienie więc δ równe zero. Odstępy jednak między kolejnymi przejściami przez położenie największego wychylenia są równe okresom między kolejnymi przejściami przez położenie równowagi a więc równe $\frac{T_0}{2}$, jak to wynika ze wzoru (22). Istotnie, drugie maximum odchylenia nastąpi w chwili

$$t_2 = \frac{1}{\omega_0} \left(\operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\delta} + \pi \right),$$

po upływie zatem

$$t_2 - t_1 = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{T_0 \cdot \pi}{2\pi} = \frac{T_0}{2}$$

sekund od chwili pierwszego maximum.

Na wartość przyspieszenia otrzymujemy ze wzoru, 22a)

$$a = \frac{dv}{dt} = s_0 e^{-\delta t} \left\{ (\delta^2 - \omega_0^2) \sin \omega_0 t - 2 \omega_0 \delta \cos \omega_0 t \right\} -$$

$$s_0 e^{-\delta t} \left\{ (\omega_0^2 - \delta^2) \sin \omega_0 t + 2 \omega_0 \delta \cos \omega_0 t + 2 \delta^2 \sin \omega_0 t - 2 \delta^2 \sin \omega_0 t \right\} =$$

$$s_0 e^{-\delta t} \left\{ (\omega_0^2 + \delta^2) \sin \omega_0 t + 2 \delta (\omega_0 \cos \omega_0 t - \delta \sin \omega_0 t) \right\}$$

i po podstawieniu wartości s i v ze wzorów (22) i (22a)

$$a = -(\omega_0^2 + \delta^2) s - 2 \delta v. \quad (22b)$$

Przyspieszenie jest przeto wynikiem działania dwu sił. Pierwsza jest proporcjonalna do odchylenia od położenia równowagi, działając więc sama powodowałaby drgania harmonijne proste o częstości kołowej ω_1 , związanej z ω_0 wzorem (por. tom I, str. 56, wzór 20)

$$C^2 s = \frac{4\pi^2}{T_1^2} s = \omega_1^2 s = (\omega_0^2 + \delta^2) s. \quad (a)$$

Na skutek jednak działania drugiej siły, proporcjonalnej do prędkości, a więc mającej cechy tarcia wewnętrznego (por. tom I, str. 286), częstość drgania wynosi nie ω_1 , lecz ω_0 . Ze wzoru (a) otrzymujemy

$$\omega_0^2 = \omega_1^2 - \delta^2 \quad (22c)$$

lub po uwzględnieniu wzoru (21) i podstawieniu zamiast częstości kołowych odpowiednich okresów

$$\frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{4\pi^2}{T_1^2} - \frac{\Lambda^2}{T_0^2},$$

skąd

$$\frac{T_0^2}{4\pi^2 + \Lambda^2} = \frac{T_1^2}{4\pi^2}$$

i ostatecznie

$$T_0 = T_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^2}. \quad (23)$$

Tłumienie zwiększa więc okres drgania.

W najczęściej spotykanych w praktyce przypadkach zmiana ta nie jest wielka. Tak np., gdy $k = 25$, a więc innymi słowy, gdy każde maximum bez względu na znak odchylenia jest 5 razy mniejsze od poprzedniego, co odpowiada drganiom bardzo szybko zanikającym, stosunek T_0 do T_1 wynosi mniej więcej 1,1. Z dalszym jednak wzro-

stem tłumienia stosunek ten szybko wzrasta. Ze wzoru (a) wynika, że częstość kołowa ω ma wartość rzeczywistą, gdy

$$C^2 - \delta^2 > 0,$$

gdy więc działanie sprężystości ciała przewyższa działanie tłumienia. W przypadku granicznym, gdy

$$C^2 - \delta^2 = 0$$

ω_0 staje się równe zeru, T_0 wzrasta do nieskończoności a przeto i k staje się nieskończenie wielkie. Gdy

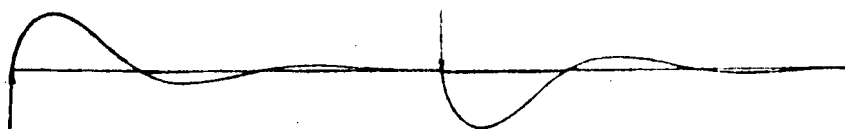
$$C^2 - \delta^2 < 0,$$

zaburzenia w układzie stają się aperiodycznymi.

Gdy na ciało prócz sił sprężystości i sił tłumienia działają jeszcze również okresowo się zmieniające siły zewnętrzne, odchylenia od położenia równowagi są wypadkowymi odchylen, spowodowanych przez drgania własne ciała, których częstość wyznaczają, jak o tym była wyżej mowa, własności fizyczne i geometryczne ciała, i odchylen, wywoływanych przez siły zewnętrzne i razem z nimi okresowo się zmieniających; te odchylenia stanowią tzw. drgania wymuszone (podniecane) ciała.

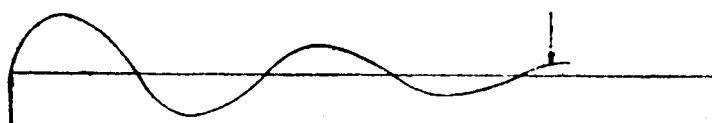
Dla uproszczenia weźmy pod uwagę te tylko chwile, w których działanie sił zewnętrznych posiada wartość największą, a więc sprowadźmy te siły do krótkotrwałych impulsów, powtarzających się w prawidłowych odstępach czasu. Przyjmijmy, że odstępów te są o wiele dłuższe od okresu zasadniczego drgania ciała (tym samym, rzecz prosta, i od okresu drgań wszystkich tonów wyższych). Pierwszy impuls, udzielony ciału początkowo nie drgającemu, spowoduje powstanie w nim jego drgań własnych, które, zgodnie z tym, cośmy wyżej mówili, będą prędzej lub wolniej zanikały. Jeżeli tłumienie jest duże, może się zdarzyć, że z chwilą drugiego impulsu odchylenia, spowodowane przez drgania własne ciała, będą dostatecznie małe, abyśmy mogli uważać ciało za niedrgające, a więc znajdujące się w takim samym stanie, jak przy impulsie pierwszym. Odchylenia więc od położenia równowagi o tej samej mniej więcej amplitudzie powtarzać się będą w odstępach czasu,

równych odstępom, oddzielającym kolejne impulsy (rys. 78, gdzie $k = 25$). Jeżeli teraz przyjmiemy, że działanie sił zewnętrznych polega nie na pojedynczych impulsach, lecz że zmienia się okresowo np. sinusoidalnie, odchylane od położenia równowagi elementy masy ciała wykonywać będą drgania również sinusoidalne o amplitudzie, która przy pewnej wartości tłumienia może być całkowicie niezależna od stosunku częstości zmian siły działającej do częstości drgań własnych.



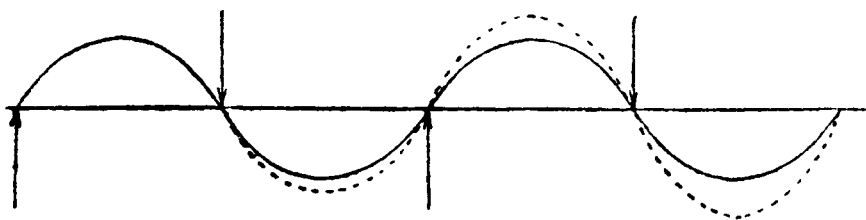
rys. 78

Gdy tłumienie maleje, zwiększa się na ogół wpływ drgań własnych ciała, kolejne bowiem impulsy, że wrócimy znów do założenia, jakim posługiwaliśmy się wyżej, mogą już nie dochodzić do ciała w chwilach, odpowiadających temu samemu stanowi jego ruchu (rys. 79, gdzie stosunek częstości impulsów i częstości drgań własnych ciała jest ten sam, co na rys. 78, k jednak równe jest 2).



rys. 79

Przy tłumieniu bardzo małym amplitudy drgań wymuszonych wtedy tylko mogą mieć znaczniejszą wartość, gdy okres zmian siły zewnętrznej jest prawie lub dokładnie równy okresowi drgań własnych ciała, tylko wtedy bowiem kolejne impulsy będą stopniowo zwiększały amplitudę drgań, która może osiągnąć bardzo wielkie wartości, tym większe, im tu-



rys. 80

mienie jest mniejsze. Wzrastanie amplitudy ustaje dopiero wtedy, gdy energia dostarczona z zewnątrz stanie się równa energii, rozpraszanej w ciele i wypromieniowywanej przez ciało. W granicy, gdy tłumienia nie ma wcale, amplituda może dojść do wartości nieskończenie wielkiej. Taki przypadek w rzeczywistości nigdy nie zachodzi; może się jednak zdarzyć, że przy niewielkim tłumieniu obszerność drgań staje się dostatecznie duża, aby spowodować rozerwanie się ciała.

Tym się np. tłumaczy pękanie wałów okrętowych, na których osadzone są śruby, wprawiające statek w ruch, i w których powstają fale skręcenia.

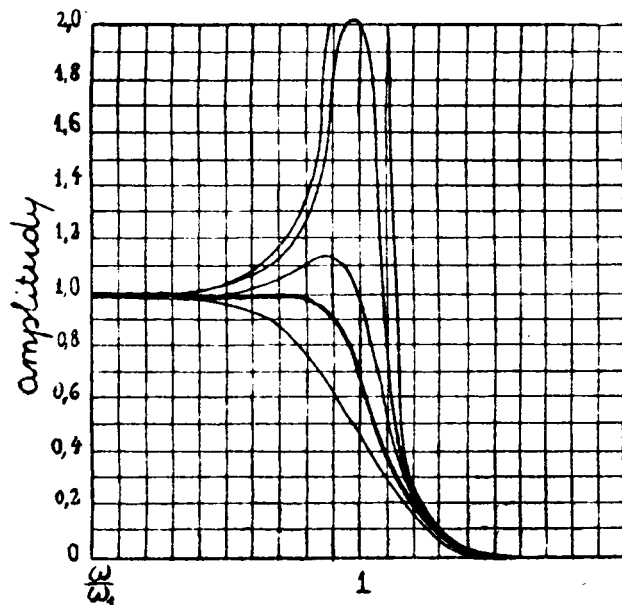
To wzrastanie amplitudy drgań wymuszonych przy pewnej częstotliwości zmian siły zewnętrznej nazywamy zjawiskiem *rezo-*
nansu (o d d ż w i ę k u).

Gdy tłumienie nie jest znikomo małe, rezonans zachodzić może i przy częstotliwości ω siły zewnętrznej, różniącej się nieco od częstotliwości ω_1 drgań własnych; stany bowiem ruchu ciała, w jakich trafiają je impulsy, mniej różnić się będą od siebie, nawet przy niezupełnej zgodności okresów, niż w przypadku drgań nietłumionych zupełnie lub tłumionych nieznacznie. Amplituda drgań wymuszonych będzie miała jednak wtedy wartość mniejszą niż w przypadku poprzednim. Tzw. *szero-*
kość rezonansu, tzn. granice, w jakich może zmieniać się stosunek $\frac{\omega}{\omega_1}$, przy którym amplituda drgań wymuszonych osiąga znaczniejsze wartości, wzrasta tedy ze wzrostem tłumienia, jednocześnie jednak rezonans staje się coraz mniej wyraźny.

Dalszy wzrost częstotliwości ω powoduje szybki spadek amplitudy drgań wymuszonych, impulsy bowiem zbyt są częste, aby mogły wywołać znaczniejsze odchylenie od stanu równowagi.

Cały przebieg zjawiska odtwarzają krzywe rys. 81, wziętego z pracy Backhausa w „Handbuch der Physik”, gdzie na osi odciętych odłożone są stosunki $\frac{\omega}{\omega_1}$, na osi rzędnych względne wartości amplitud drgań wymuszonych. Każda z krzywych odpowiada innej wartości tłumienia; tłumieniu znikomo małe-

mu odpowiada najwyższa krzywa, narysowana tylko częściowo; krzywe o rzędnych mniejszych od jedności odpowiadają tłumieniom, przy których rezonans nie zachodzi. Jeżeli więc chodzi o otrzymanie możliwie największej „czułości” tzn. możliwie największego odchylenia od położenia równowagi przy



rys. 81

danej wartości siły zewnętrznej, należy „naстроить” ciało drgające na okres zmian sił zewnętrznych i zmniejszyć w miarę możliwości tłumienie. Im tłumienie jest mniejsze, tym zgodność okresów ω i ω_1 musi być większa, tym „ostrzejszy” jest rezonans.

Jeżeli jednak chodzi, jak w przyrządach pomiarowych (p. ust. 4,

rozdz. I), aby stosunek wartości odchylenia od położenia równowagi do siły wzbudzającej drganie był możliwie mało zależny od stosunku $\frac{\omega}{\omega_1}$, wtedy należy dobierać ciała o częstości drgań własnych możliwie wielkiej w porównaniu z częstością zmian siły wzbudzającej i o znaczniejszym tłumieniu; długość bowiem prostoliniowej, równoległej do osi Ox części krzywej rezonansu będzie (aż do pewnej granicy) w miarę wzrostu tłumienia wzrastała. Czułość przyrządu będzie, oczywiście, tym razem mniejsza, niż poprzednio.

Przypuśćmy, że ciałem drgającym jest punkt materialny o masie równej jednostce i że siła zewnętrzna, wzbudzająca drgania, zmienia się sinusoidalnie, wartość zaś jej wynosi $b \sin \omega t$.

Przyspieszenie odchylenia od położenia równowagi jest tym razem wynikiem działania nie tylko sił sprężystości i sił tłumienia, lecz również siły zewnętrznej. Wzór (22b) przekształca się więc w następujący

$$a = -(\omega_0^2 + \delta^2)s - 2\delta v + b \sin \omega t$$

lub podstawiając $a = \frac{d^2 s}{dt^2}$, $v = \frac{ds}{dt}$,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + (\omega_0^2 + \delta^2) s = b \sin \omega t. \quad (24)$$

Odchylenie wypadkowe jest sumą odchyień, spowodowanych przez drgania własne ciała

$$s_1 = s_0 e^{-\delta t} \sin \omega_0 t$$

o okresie ω_0 , związanym z okresem ω_1 , jaki by miały drgania własne niethumione, wzorem

$$\omega_0^2 = \omega_1^2 - \delta^2,$$

i odchyień, spowodowanych przez drgania wymuszone o okresie tym samym, co zmiany sił wewnętrznych,

$$s_2 = s' \sin (\omega t - \alpha). \quad (a)$$

Mamy zatem

$$s = s_1 + s_2. \quad (24a)$$

Podstawmy s do równania (24). Będziemy mieli

$$\frac{d^2 (s_1 + s_2)}{dt^2} + 2\delta \frac{d(s_1 + s_2)}{dt} + \omega_1^2 (s_1 + s_2) = b \sin \omega t.$$

Otwierając nawiasy i uwzględniając, że zgodnie ze wzorem (22b)

$$\frac{d^2 s_1}{dt^2} + 2\delta \frac{ds_1}{dt} + \omega_1^2 s_1 = 0,$$

znajdujemy, że

$$\frac{d^2 s_2}{dt^2} + 2\delta \frac{ds_2}{dt} + \omega_1^2 s_2 = b \sin \omega t.$$

Po podstawieniu s_2 ze wzoru (a) i zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$-s' \omega^2 \sin (\omega t - \alpha) + 2\delta s' \omega \cos (\omega t - \alpha) + \omega_1^2 s' \sin (\omega t - \alpha) = b \sin \omega t$$

lub po otwarciu nawiasów

$$\begin{aligned} & -s' \omega^2 \sin \omega t \cos \alpha + s' \omega^2 \cos \omega t \sin \alpha + 2\delta s' \omega \cos \omega t \cos \alpha + \\ & + 2\delta s' \omega \sin \omega t \sin \alpha + \omega_1^2 s' \sin \omega t \cos \alpha - \omega_1^2 s' \cos \omega t \sin \alpha = b \sin \omega t. \end{aligned}$$

Równość ta musi być spełniona przy dowolnym znaczeniu t a więc zarówno przy $t = 0$, jak i przy $t = \frac{T}{4}$. W pierwszym przypadku otrzymujemy

$$s' \omega^2 \sin \alpha + 2\delta s' \omega \cos \alpha - \omega_1^2 s' \sin \alpha = 0$$

lub
$$-(\omega_1^2 - \omega^2) \sin \alpha + 2\delta \omega \cos \alpha = 0$$

i stąd
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\delta \omega}{\omega_1^2 - \omega^2}; \quad (25)$$

w drugim — mamy

$$-s' \omega^2 \cos \alpha + 2\delta s' \omega \sin \alpha + \omega_1^2 s' \cos \alpha = b,$$

skąd

$$s' = \frac{b}{\omega_1^2 \cos \alpha + 2\delta \omega \sin \alpha - \omega^2 \cos \alpha}. \quad (26a)$$

Ze wzoru (25) wynika, że

$$\sin \alpha = \frac{2\delta \omega}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \quad \text{i} \quad \cos \alpha = \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}. \quad (26b)$$

Podstawiając te wartości do wzoru (26a), znajdujemy

$$s' = \frac{b}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}. \quad (26c)$$

Amplituda drgań wymuszonych będzie miała wartość największą, gdy mianownik będzie przechodził przez minimum,

$$f = (\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2$$

$$\frac{df}{d\omega} = 4(\omega_1^2 - \omega_r^2) \omega_r + 8\delta^2 \omega_r = 0,$$

skąd
$$\omega_r^2 = \omega_1^2 - 2\delta^2 \quad \text{lub} \quad \omega_r = \sqrt{\omega_1^2 - 2\delta^2}. \quad (27)$$

Częstość drgań wymuszonych ω_r , przy której zachodzi rezonans amplitudy, nie jest zatem równa ani częstości drgań własnych nietłumionych ani też częstości $\omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 - \delta^2}$ drgań własnych tłumionych. Dopiero przy tłumieniu równym zeru otrzymujemy

$$\omega_r = \omega_1 = \omega_0.$$

Jest rzeczą oczywistą, że gdy $2\delta^2 > \omega_1^2$, nie może już być mowy o jakimkolwiek rezonansie. Największą wartość tłumienia, przy którym rezonans zachodzi, otrzymujemy z równości

$$\left(\frac{\delta}{\omega_1}\right)^2 = 0,5 \text{ lub } \frac{\delta}{\omega_1} = 0,707.$$

Podstawiając $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ i uwzględniając, że

$$T_1 = \frac{T_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^2}} \text{ oraz że } \delta T_0 = \Lambda,$$

otrzymujemy $\Lambda = \lg k = 2\pi$ i stąd $k = 534$.

Oznaczmy stosunek $\frac{\omega}{\omega_1}$ przez a , wielkość zaś $\frac{\delta^2}{\omega_1^2}$ przez ψ — jest to tzw. stopień tłumienia. Wzory (26b) i (27) przybiorą wtedy postać

$$s' = \frac{b}{\sqrt{\omega_1^4 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \omega_1^4 \cdot \frac{4\delta^2}{\omega_1^2} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}} = \frac{b}{\omega_1^2 \sqrt{(1-a^2)^2 + 4a^2\psi}}, \quad (26d)$$

$$\frac{\omega_r}{\omega_1} = a_r = \sqrt{1 - 2\psi}. \quad (27a)$$

Przyjmijmy, że k jest równe 1,9, dekrement więc logarytmiczny

$$\Lambda = \lg k = \frac{\log k}{\log e} \doteq 0,6$$

(symbolem $\log$ oznaczamy logarytmy zwykłe). Uwzględniając, że $\delta T_0 = \Lambda$ oraz że

$$T_0 = T_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\Lambda}{2\pi}\right)^2} = T_1 \sqrt{\left(1 + \frac{0,6}{6,28}\right)^2} \doteq T_1 \cdot 1,004,$$

otrzymujemy

$$\delta T_1 \cdot 1,004 = \frac{\delta}{\omega_1} \cdot 2\pi \cdot 1,004 = \Lambda \doteq 0,6,$$

skąd

$$\left(\frac{\delta_1}{\omega_1}\right)^2 = \psi = \left(\frac{0,6}{2\pi}\right)^2 \doteq 0,01.$$

Stosunek częstości drgań rezonansu do drgań własnych ciała będzie w tym przypadku

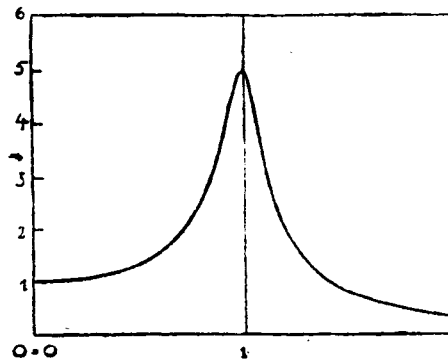
$$\frac{\omega_r}{\omega_1} = a_r = \sqrt{1 - 0,02} = 0,99,$$

a więc prawie równy jedności (rys. 82). Stosunek amplitudy rezonansu do wartości amplitudy przy $\omega = 0$ będzie, jak to wynika ze wzorów (26c) i (27a), równy

$$\frac{s'_r}{s'_0} = \frac{1}{2\sqrt{\psi(1-\psi)}} = \frac{1}{0,198} \approx 5.$$

Wyznamy amplitudy dla dwóch stosunków częstości a' i a'' , jednakowo odległych od a_r , np. dla $a' = 0,5$ i $a'' = 1,48$. Amplituda s'_1 , odpowiadająca stosunkowi a' , będzie mniej więcej 1,6 razy większa od amplitudy s''_1 , odpowiadającej stosunkowi a'' . Krzywa amplitud po przekroczeniu a_r jest bardziej stroma, niż przed przekroczeniem tej wartości.

Drgania wymuszone są podtrzymywane przez siły zewnętrzne, których praca w przypadku, gdy drgania się ustalą, wyrównuje straty spowodowane przez siły rozpraszające.



rys. 82

Praca sił zewnętrznych, wykonana w ciągu czasu dt wynosi

$$dW = f \cdot ds_2 = f \cdot \frac{ds_2}{dt} \cdot dt.$$

Podstawiając $f = b \sin \omega t$ i, jak to wynika ze wzoru (a),

$$\frac{ds_2}{dt} = \omega s' \cos(\omega t - \alpha), \quad (27c)$$

otrzymamy

$$dW = b \omega s' \sin \omega t \cos(\omega t - \alpha) dt,$$

skąd praca wykonana w ciągu jednego okresu

$$\begin{aligned} W &= b \omega s' \int_0^T \sin \omega t \cos(\omega t - \alpha) dt = \\ &= b \omega s' \int_0^T (\sin \omega t \cos \omega t \cos \alpha + \sin^2 \omega t \sin \alpha) dt = \frac{b \omega s'}{2} T \sin \alpha. \end{aligned} \quad (28)$$

Ze wzorów (26c) i (26b) mamy

$$s' = \frac{b}{2\delta\omega} \sin\alpha \quad \text{i} \quad \sin\alpha = \frac{2\delta\omega}{b} s'.$$

Podstawiając tę wartość $\sin\alpha$ do wzoru (28), otrzymamy

$$l\dot{Q} = \frac{b\omega s'}{2} T \cdot \frac{2\delta\omega}{b} s' = \delta\omega^2 s'^2 T. \quad (28a)$$

Niech teraz f_t oznacza siły tłumienia proporcjonalne, zgodnie ze wzorem (24) do prędkości drgań wymuszonych. Praca przeciwko tym siłom, wykonana w ciągu czasu dt , będzie równa

$$dW_t = f_t \cdot ds_2 = f_t \cdot \frac{ds_2}{dt} \cdot dt$$

i po podstawieniu

$$f_t = 2\delta \cdot \frac{ds_2}{dt}$$

oraz wartości $\frac{ds_2}{dt}$

$$dW_t = 2\delta\omega^2 s'^2 \cos^2(\omega t - \alpha) dt,$$

stąd na pracę, rozproszoną w ciągu jednego okresu, otrzymujemy

$$W_t = 2\delta\omega^2 s'^2 \int_0^T \cos^2(\omega t - \alpha) dt = 2\delta\omega^2 s'^2 \cdot \frac{T}{2} = \delta\omega^2 s'^2 T. \quad (29)$$

Stosunek energii rozproszonej do energii całkowitej drgań wymuszonych jest tym większy, im większe jest tłumienie. Oznaczmy przez v_m największą wartość prędkości ruchu drgającego

$$v_m = \omega s'.$$

Energia całkowita drgań wymuszonych jest, jak wiemy,

$$U_c = \frac{1}{2} \omega^2 s'^2 = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 b^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}, \quad (30)$$

stąd na stosunek energii rozproszonej w ciągu jednego okresu drgania do energii całkowitej

$$\frac{U_t}{U_c} = \frac{\delta\omega^2 s'^2 T}{\frac{1}{2} \omega^2 s'^2} = 2\delta T; \quad (31)$$

im większe jest więc tłumienie, tym większy jest stosunek energii rozproszonej podczas jednego okresu drgania do energii całkowitej.

Energia całkowita drgań wymuszonych, a co za tym idzie, i energia rozproszona, znajdująca się do niej w stałym stosunku, osiąga wartość największą, gdy, jak to wynika ze wzoru (30) $\omega_1 = \omega$. Przy tej częstotliwości zachodzi rezonans energii, któremu odpowiada największa wartość pracy sił zewnętrznych, potrzebnej do wyrównania strat energii, spowodowanych przez tłumienie.

W przypadku granicznym, gdy tłumienie równe jest zeru, rezonans energii i rezonans amplitudy zachodzą przy tej samej częstotliwości drgań. Wtedy, wobec tego, że energia wcale nie jest rozpraszana, nie może ustalić się stan równowagi między energią dostarczaną z zewnątrz i energią rozpraszaną, tak że zarówno amplituda, jak i energia drgań może dojść do wartości nieskończenie wielkiej. Wymaga to jednak całkowitej zgodności okresów drgań wymuszonych i drgań własnych, o czym mogą nas przekonać następujące proste rozważania. Oznaczmy, jak wyżej, przez a stosunek drgań wymuszonych ω do drgań własnych ciała ω_1 i przypuśćmy, że w granicach stosunków częstotliwości a_1 i a_2 , czyniących zadość nierówności

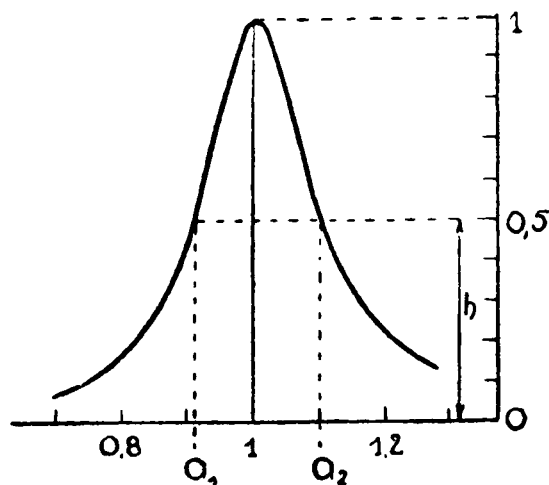
$$a_1 < a_r < a_2,$$

gdzie przez a_r rozumiemy będziemy stosunek ω do ω_r , w przypadku rezonansu (a więc dla rezonansu energii $a_r = 1$) energia drgań wymuszonych jest co najwyżej h razy mniejsza od energii rezonansu

$$U_r = \frac{b^2}{8\delta^2} = \frac{b^2}{\omega_1^2 \cdot 8\psi}, \quad (32)$$

gdzie ψ jest, jak poprzednio, stopniem tłumienia.

Różnica $a_2 - a_1$ daje nam pojęcie o szybkości zmian energii w miarę, jak częstotliwość drgań wymuszonych zbliża się i następnie oddala od częstotliwości drgań własnych ciała. Z tego też względu jest ona miarą tzw. szerokości



rys. 83

rezonansu dla wysokości h . Zazwyczaj oblicza się ją dla $h = \frac{1}{2}$.

Wzór (31) przepiszemy w postaci

$$U = \frac{1}{2} \frac{b^2}{\left(\omega_1 \cdot \frac{1}{a} - \omega_1 a\right)^2 + 4\delta^2} = \frac{1}{2} \frac{b^2}{\omega_1^2 \left\{ \left(\frac{1}{a} - a\right)^2 + 4\psi \right\}},$$

skąd

$$\frac{U}{U_r} = \frac{4\psi}{\left(\frac{1}{a} - a\right)^2 + 4\psi} = h - \frac{1}{2}$$

i

$$8\psi = \left(\frac{1}{a} - a\right)^2 + 4\psi - \frac{1}{a^2} - 2 + a^2 + 4\psi.$$

kładąc $a^2 = z$, otrzymujemy

$$\frac{1}{z} - 2 + z - 4\psi = 0$$

lub

$$z^2 - 2(2\psi + 1)z + 1 = 0.$$

A zatem

$$\begin{aligned} z - 2\psi + 1 \pm \sqrt{(2\psi + 1)^2 - 1} &= 2\psi + 1 \pm \sqrt{4\psi^2 + 4\psi} = \\ &= 2\psi + 1 \pm 2\sqrt{\psi} \sqrt{\psi + 1} = (\sqrt{\psi + 1} \pm \sqrt{\psi})^2. \end{aligned}$$

Biorąc tylko dodatnie wartości pierwiastka, mamy

$$\sqrt{z_2} = a_2 = \sqrt{\psi + 1} + \sqrt{\psi},$$

$$\sqrt{z_1} = a_1 = \sqrt{\psi + 1} - \sqrt{\psi}$$

i ostatecznie na szerokość rezonansu otrzymujemy

$$a_2 - a_1 = 2\sqrt{\psi}.$$

W przykładzie wyżej przez nas podanym $k = 1,9$ i $\psi = 0,01$

$$a_2 - a_1 = 0,2; \quad a_2 = 1,105; \quad a_1 = 0,905.$$

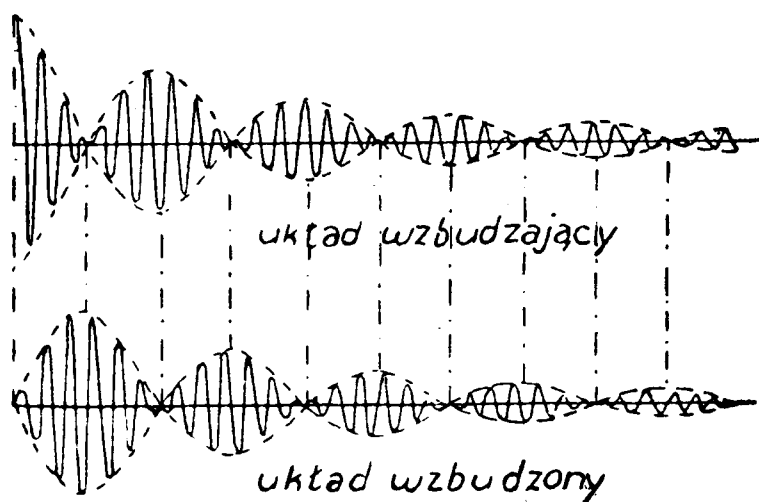
Powyżej zatem wartości 1,105 i poniżej 0,905 stosunku $\frac{\omega}{\omega_1}$ energia drgań wymuszonych jest mniejsza od połowy U_r . Gdy $\psi = 0$, szerokość rezonansu spada do zera.

6. — SPRZĘŻENIE.

Wnioski, do jakich doprowadziły nas wyżej podane rozważania, dotyczą jednak tylko tych przypadków, gdy można całkowicie pominąć oddziaływanie układu, pobudzonego do drgań, na układ, wzbudzający drgania. To jednak nie zawsze jest możliwe, często wzajemne oddziaływanie jest dostatecznie silne, aby zmienić w znaczniejszym stopniu okres każdego z układów drgających, tworzących wtedy tzw. układ sprzężony.

Nie wchodząc w szczegółowe rozpatrywanie tego zagadnienia, którego teoria nastręcza duże trudności, poprzestaniemy na stwierdzeniu, że drgania każdego z układów sprzężonych są sumą dwóch drgań składowych, tym bardziej różniących się od drgań własnych każdego układu, im silniejsze jest sprzężenie. Drgania te w ostatecznym wyniku powodują dudnienia, których częstość, jednakowa dla obu układów, wzrasta ze wzrostem sprzężenia. Dudnienia te są najwyraźniejsze, gdy częstości drgań własnych układów są wzajemnie równe, gdy więc układy sprzężone są „nastrojone” na ten sam ton.

Ogólny przebieg zjawiska w tym przypadku, (przy czym w chwili $t=0$ jeden z układów sprzężonych jest w spoczynku), odtwarzają krzywe rys. 84 (tłumienie w obydwu układach jest



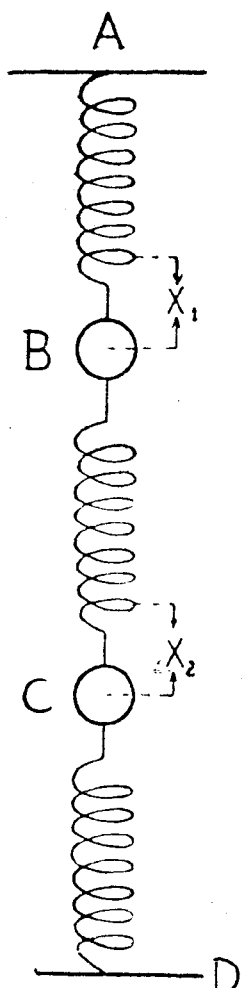
rys. 84

jednakowe). Największym odchyleniom układu wzбудzającego odpowiadają odchylenia zerowe układu wzбудzanego i odwrotnie.

Takie „przelewanie się” energii z jednego układu do drugiego można w prosty sposób wykazać, zawieszając na niezbyt ciężkiej ramie dwa wahadła jednakowej długości, obciążone dostatecznie wielkimi masami; wahadła te są sprzężone poziomą częścią ramy, na której wiszą. Gdy jedno z tych wahadeł odchylimy od położenia równowagi i puścimy swobodnie, zacznie się ono wahać z malejącą stopniowo amplitudą i wreszcie na krótką chwilę się zatrzyma, aby znów zacząć się wa-

hać coraz silniej. Jednocześnie drugie wahadło będzie się wahało z coraz to większą obszernością, która dojdzie do wartości największej, gdy wahania wahadła pierwszego na chwilę ustaną.

W zjawiskach akustycznych, w ściślejszym tego słowa znaczeniu, zazwyczaj jeden z tonów sprzężenia jest o wiele słabiej tłumiony, niż drugi, tak że słyszymy ten tylko ton.



rys. 85

Niech AB (rys. 85) będzie sprężyną, dźwigającą kulkę o masie m . Kulka ta, wychylona z położenia równowagi i puszczona swobodnie będzie, jak wiemy (tom I, str. 90), drgała ruchem harmonijnym prostym, jeżeli tylko działanie sił ciężkości będzie dostatecznie małe w porównaniu z działaniem sił sprężystości.

Okres drgania i częstość kołowa kulki wyrażą się wtedy (przy pominięciu masy sprężyny) wzorami

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} \quad \text{i} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad (d)$$

gdzie k_1 — stosunek siły, powstającej przy rozciąganiu lub zginiataniu sprężyny, do odchylenia x_1 kulki B od położenia równowagi.

Niech CD będzie drugą sprężyną, dźwigającą kulkę C o masie m_2 . Okres oraz częstość kołowa drgań własnych tej kulki będą przy zachowaniu tych samych ograniczeń, co wyżej, równe

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_2}} \quad \text{i} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \quad (e)$$

gdzie k_2 ma znaczenie analogiczne do k_1 .

Przymocujmy jedną z tych sprężyn w punkcie A , drugą w punkcie D i połączmy kulkę B z kulką C trzecią sprężyną BC , której własności sprężyste wyraża współczynnik $k_{1,2}$. Jeżeli teraz, przytrzymując kulkę C w położeniu równowagi wprowadzimy w ruch drgający kulkę B , kulka będzie, jak poprzednio, drgała ruchem harmonijnym prostym z innym jednak, niż poprzednio okresem wahań; gdyż oprócz siły $f_1 = -kx_1$ działać na nią będzie siła $f_{1,2}$, powstająca przy odkształcaniu sprężyny BC , działająca w tym samym, co f_1 kierunku i równa $-k_{1,2} x_1$. Wypadkowa

$$f' = -(k_1 + k_{1,2}) x_1$$

będzie i tym razem proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi.

Ze wzoru

$$f' = m_1 a = -m_1 \cdot \frac{4\pi^2}{T_{0,1}^2} x_1 = -m_1 \omega_{0,1}^2 \cdot x_1 = -(k_1 + k_{1,2}) x_1$$

otrzymujemy na okres i częstotliwość drgań

$$T_{0,1} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1 + k_{1,2}}} \quad \text{ i } \quad \omega_{0,1} = \sqrt{\frac{k_1 + k_{1,2}}{m_1}}. \quad (g)$$

Jest to okres i częstotliwość kołowa drgań własnych układu *AB* po sprężeniu.

Analogicznie, dla drgań sprężyny *CD*, gdy kulka *B* jest nieruchoma, znajdujemy

$$T_{0,2} = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_2 + k_{1,2}}} \quad \text{ i } \quad \omega_{0,2} = \sqrt{\frac{k_2 + k_{1,2}}{m_2}}. \quad (h)$$

Jeżeli teraz obie kulki będą swobodne, drganie jednej z nich (np. kulki *B*) spowoduje drgania kulki drugiej, odchylając ją okresowo od położenia równowagi. Na kulkę *B* oprócz poprzednich sił f_1 i $f_{1,2}$, wzbudzonych przez ruch tej kulki, działać będzie siła f_2 , wzbudzona przez rozciąganie i zgniatanie sprężyny *BC* przy ruchu kulki *C*. Siła ta będzie, jak łatwo się można o tym przekonać, skierowana przeciwnie do sił f_1 i $f_{1,2}$.

Tym razem będziemy mieli

$$f = m_1 a = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -(k_1 + k_{1,2}) x_1 + k_{1,2} x_2$$

lub

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{k_1 + k_{1,2}}{m_1} x_1 = \frac{k_{1,2}}{m_1} x_2,$$

co z uwagi na wzór (g) możemy przepisać w postaci

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_{0,1}^2 x_1 = a_1^2 x_2, \quad (34)$$

gdzie przez a_1^2 oznaczamy $\frac{k_{1,2}}{m_1}$.

Ruch kulki *C* wyznaczony będzie wzorem podobnym

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_{0,2}^2 x_2 = a_2^2 x_1, \quad (34a)$$

gdzie a_2^2 jest równe $\frac{k_{1,2}}{m_2}$.

Założmy, że równaniom tym będzie czyniło zadość rozwiązanie typu

$$x = A \sin \omega t,$$

gdzie ω będzie miała tę samą wartość w obu układach, amplituda zaś wartości na ogół różne tak, że będziemy mieli

$$x_1 = A_1 \sin \omega t \quad \text{i} \quad x_2 = A_2 \sin \omega t. \quad (\text{i})$$

Po podstawieniu tych wartości do równań (34) i (34a), otrzymamy

$$(\omega_{0,1}^2 - \omega^2) A_1 = a_1^2 A_2 \quad \text{i} \quad (\omega_{0,2}^2 - \omega^2) A_2 = a_2^2 A_1,$$

$$\text{skąd} \quad (\omega_{0,1}^2 - \omega^2)(\omega_{0,2}^2 - \omega^2) = a_1^2 a_2^2. \quad (35)$$

Wzór ten możemy przepisać trochę inaczej, wprowadzając nową wielkość tzw. stopień sprzężenia, którego miarą jest iloczyn stosunków sił, z jakimi działają na siebie wzajemnie dwa sprzężone drgające układy, do sił, jakim podlega każdy z układów, gdy drugi układ jest w spoczynku.

Opierając się na wyprowadzonych wyżej wzorach, napiszemy

$$\frac{a_1^2 x_2}{(k_1 + k_{1,2}) x_1} \cdot \frac{a_2^2 x_1}{(k_2 + k_{1,2}) x_2} = \frac{a_1^2 a_2^2}{(k_1 + k_{1,2})(k_2 + k_{1,2})} = \frac{a_1^2 \cdot a_2^2}{\omega_{0,1}^2 \omega_{0,2}^2} \cdot m_1 m_2. \quad (\text{k})$$

Za stopień sprzężenia S przyjmuje się jednak zazwyczaj nie tę wartość, lecz jej pierwiastek kwadratowy, odniesiony do jednostki masy, mamy przeto

$$S = \frac{a_1 a_2}{\omega_{0,1} \cdot \omega_{0,2}}. \quad (36)$$

Jest to wielkość o wymiarze równym jedności, jak to łatwo możemy

sprawdzić, podstawiając do (k) $\frac{k_{1,2}}{m_1}$ i $\frac{k_{1,2}}{m_2}$ zamiast a_1^2 i a_2^2 . Wartość

jej może się zmieniać w granicach od 0 do 1.

Równanie (35) przybiera zatem postać

$$\omega^4 - (\omega_{0,1}^2 + \omega_{0,2}^2) \omega^2 + (1 - S^2) \omega_{0,1}^2 \omega_{0,2}^2 = 0, \quad (37)$$

skąd wynika, że

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{\omega_{0,1}^2 + \omega_{0,2}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_{0,1}^2 + \omega_{0,2}^2)^2}{4} - (1 - S^2) \omega_{0,1}^2 \omega_{0,2}^2} = \\ &= \frac{\omega_{0,1}^2 + \omega_{0,2}^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_{0,1}^2 - \omega_{0,2}^2)^2 + 4 S^2 \omega_{0,1}^2 \omega_{0,2}^2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Ponieważ S nigdy nie jest większe od jedności, obie wartości ω^2 są dodatnie. Równaniom (34) i (34a) czynią więc zadość dwie częstości kołowe ω_1 i ω_2 , które otrzymujemy, wyciągając pierwiastek kwadratowy z wielomianu (38), wyznaczającego ω^2 , przy czym uwzględniamy, rzecz prosta, tylko pierwiastek dodatni. Ogólne rozwiązanie wyrazi się przeto wzorem

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1' \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_1'' \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \\ x_2 &= A_2' \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2'' \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \quad (39)$$

gdzie wartości tych amplitud oraz faz φ_1 i φ_2 będziemy mogli wyznaczyć z warunków początkowych.

Gdy obydwa układy są „nastrojone” na ten sam okres drgania, gdy

$$\omega_{c,1} = \omega_{c,2} = \omega_0,$$

ze wzoru (38) otrzymujemy

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm S\omega_0^2 = \omega_0^2(1 \pm S),$$

$$\text{skąd} \quad \omega_1 = \omega_0 \sqrt{1+S} \quad \text{ i } \quad \omega_2 = \omega_0 \sqrt{1-S}. \quad (40)$$

Gdy sprzężenie jest słabe (jak np. w przytoczonym wyżej doświadczeniu z wahadłami), częstości składowe, z których jedna jest zawsze większa, druga zaś mniejsza od ω_0 , mało się różnią od częstości ω_0 drgań własnych układu po sprzężeniu. Powodują one wtedy wyraźne dudnienia (rozdz. I, ust. 8) o częstości niewielkiej

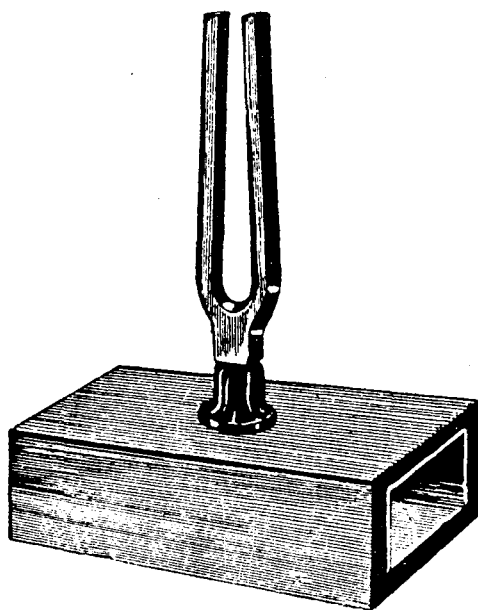
$$\omega' = \omega_1 - \omega_2.$$

W naszym przykładzie taki przypadek zachodzi, gdy sprężyny AB i CD są zupełnie jednakowe, masy kulek równe, oraz gdy sprężyna BC jest zrobiona z cienkiego drutu, którego zwoje posiadają dość znaczny promień (tom I, str. 214). W miarę, jak sprzężenie wzrasta, dudnienie staje się coraz częstsze, zwiększa się bowiem różnica częstości ω_1 i ω_2 .

Teorię drgań sprzężonych w przypadkach analogicznych do rozpatrywanego przez nas (dwu drgających punktów materialnych), lecz z uwzględnieniem tłumienia dał (1897 r.), na podstawie wcześniejszych prac Rayleigha, M. Wien, — doświadczalnie zagadnienie to badali między innymi Warburg (1869 r.) i König (1880 r.), w zastosowaniu zaś do drgań elektromagnetycznych Groszkowski (1930 r.). Ogólna teoria tych drgań, mimo licznych prac jej poświęconych (Helmholtz, Rayleigh, Courant i Hilbert, Schottky, następnie, 1927 r., Waetzmann i Schuster) jest dopiero w początkach, następcza bowiem bardzo duże trudności matematyczne.

7. — DRGANIA OGRANICZONYCH MAS GAZU.

Na prawach rezonansu i sprzężenia opiera się często używany w praktyce sposób zwiększenia promieniowania akustycznego. Dla osiągnięcia tego celu sprzęgamy dwa układy: jeden o tłumieniu (a więc i promieniowaniu) niewielkim, służący jako pierwotne źródło zaburzeń, drugi, silnie promieniujący energię i stanowiący źródło wtórne, wzbudzane przez układ



rys. 86

pierwszy. Najczęściej tym drugim układem jest ograniczona masa powietrza, jak np. powietrze, znajdujące się w pudełku rezonansowym kamertonu (rys. 86) lub skrzypiec. Energia promieniowania posiada wartość największą w przypadku rezonansu obu układów, wtedy jednak tłumienie w układzie pierwotnym również osiąga maksimum. Tak np. według R. Königa (1880 r.) widełki strojowe o częstości własnej 256 drgań na sekundę, umieszczone na pudełku rezonansowym, wysyłały

drgania, które mogły być jeszcze słyszane przez czas tym krótszy, im mniej różniły się częstości drgań własnych obu układów. Czas ten wynosił 80 sekund, gdy częstość drgań własnych rezonatora była równa 218,3 drgań na sekundę, spadał prawie do zera, gdy częstości się wyrównywały, i znów wzrastał, gdy częstość drgań własnych rezonatora przekraczała częstość drgań własnych kamertonu. Zgodnie z tym, co mówiliśmy wyżej, tego rodzaju sprzężenie musi zmienić częstość drgań własnych kamertonu przed sprzężeniem. Okazuje się jednak, że w tym przypadku zmiana ta nie jest wielka: największa jej wartość, jaką osiąga w pobliżu rezonansu, nie przekracza 0,01%.

Ten wynik pomiarów Königa jest całkowicie zgodny z wywodami teoretycznymi Wiena, o których wspominaliśmy w ustępie poprzednim; mamy tu bowiem do czynienia z układami, w których wpływ tłumienia jest o wiele większy od wpływu sprzężenia o wartości niewielkiej.

Częstość drgań własnych masy powietrza, zawartej w pudełku rezonansowym, możemy uzgodnić z częstością drgań własnych kamertonu, nadając pudełku odpowiednie rozmiary.

W prostym przypadku słupa gazu, zawartego w rurze cylindrycznej, dostatecznie długiej, o niewielkim przekroju, związek między częstością drgań własnych i wymiarami rury możemy wyznaczyć, posługując się rozumowaniem analogicznym do rozumowań ust. 1 i 2.

Tak więc, gdy gaz zawarty jest w rurze na obu końcach otwartej, z warunku, że ciśnienie w warstwach końcowych ma wartość stałą, taką samą, jak otaczające powietrze, wynika, że w rurze może powstać tylko taka fala stojąca, której węzły ciśnienia, a tym samym strzałki odchylenia cząstek od położenia równowagi (por. rozdz. I, ust. 6) znajdują się w warstwach końcowych słupa gazowego. Oznaczając przez l długość rury, na długość fali tonu zasadniczego otrzymujemy

$$\lambda_1 = 2l,$$

skąd częstość drgania

$$\nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{2l}.$$

Wyższe tony muszą również czynić zadość warunkom granicznym, będziemy więc mieli ogólnie

$$\nu_n = \frac{nc}{2l} \quad (41)$$

gdzie $n = 1, 2, 3 \dots$

Gdy rura jest na jednym końcu zamknięta, układ tworzących się w niej fal stojących musi mieć na końcu zamkniętym węzeł, na końcu otwartym — strzałkę odchylenia. Częstości drgań własnych takiego słupa gazowego będą zatem równe

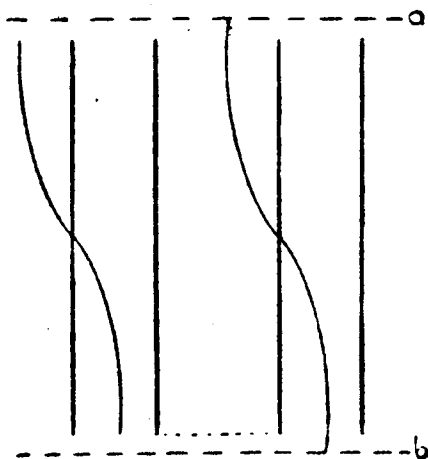
$$\nu_n = \frac{(2n-1)}{4l} c. \quad (41a)$$

Wzory (41) i (41a) często są nazywane wzorami Bernoulli'ego.

Z góry jednak można przewidzieć, że te proste związki nie będą ściśle odtwarzały wyników doświadczenia, założenia bo-

wiem, na jakich oparliśmy ich wyprowadzenie, na ogół nie odpowiadają dokładnie warunkom, w jakich zachodzi badane zjawisko.

Przede wszystkim założenie, że fala rozchodząca się w gazie jest w każdym przypadku falą płaską, wtedy tylko można uważać za usprawiedliwione, gdy poprzeczny wymiar liniowy rury jest dostatecznie mały w porównaniu z długością fali danego tonu; wtedy jednak, jak o tym była mowa w ust. 3 rozdz. I, prędkość rozchodzenia się zaburzeń jest funkcją li-



rys. 87

niowych wymiarów rury. Po wtóre, węzeł ciśnienia nie może leżeć dokładnie w końcowej warstwie słupa, jedynie bowiem zmienność ciśnienia może powodować powstawanie zaburzeń w otaczającym środowisku, a więc innymi słowy, promieniowanie akustyczne. Należy więc przyjąć, że węzeł ciśnień (strzałka odchyłeń) znajduje się nieco poza otwartym końcem rury, tak że w rurze na obu końcach otwartej mamy do czynie-

nia z falą stojącą, raczej taką, jak na prawym rysunku 87, nie zaś taką, jak na rysunku lewym. Ton zasadniczy jest przeto nieco niższy, jak gdyby rura miała długość nie l , lecz $l + \Delta l$. Według Helmholtza (1860 r.), ten pozorny przyrost długości rury można z dostatecznym przybliżeniem uważać za równy

$$\Delta l = \frac{\pi}{4} r = 0,7854 r, \quad (42)$$

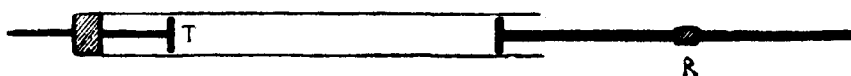
gdzie r jest promieniem rury.

Gdy rura jest, jak to bywa zazwyczaj w pischczalkach, na jednym końcu zwężona, odległości płaszczyzn a , b od cylindrycznej części rury przestają być równe; płaszczyzna, leżąca po stronie zwężenia, jest bardziej oddalona.

To przesunięcie strzałek na zewnątrz rury zostało potwierdzone w licznych doświadczeniach, wykonanych między innymi przez Wertheima (1851 r.), Blaikleya (1879 r.), Boehma (1910 r.) i Ratza

(1925 r.). Wartość Δl , wyznaczona przez tych badaczy, jest nieco mniejsza od podanej przez Helmholtza, wahając się w granicach od 0,66 r. (Wertheim) do 0,577 r. (Blaikley).

Jeżeli jednak słup gazu pobudzany jest do drgania w rurze o odpowiednio dobranym promieniu i przy tym tak, że promieniowanie jego jest niewielkie, stosowanie wzorów Bernouilliego nie pociągnie za sobą znaczniejszych błędów. Taki przypadek zachodzi w tzw. rurze Kundta (1868 r.). W pręcie z dowolnego materiału o średnicy, nie przekraczającej jednego centymetra, umocowanym np. w środku (rys. 88) i pociera-



rys. 88

nym w kierunku swej osi wilgotną szmatką, powstają drgania podłużne, których częstość wyznacza wzór (12). Na jednym z końców pręta przymocowana jest lekka płytką korkowa, przenosząca drgania pręta na słup gazu, zawarty w rurze szklanej, o średnicy od 2 do 3 cm, nasuniętej na pręt. Długość słupa gazu można zmieniać, przesuwając tłoczek T . Jeżeli w rurze rozsypimy równomiernie jakiś bardzo lekki proszek, np. wiłdłaku (lycopodium), proszek ten będzie wprawiony w ruch przez drgania gazu. Ruch ten staje się najwidoczniejszy w przypadku rezonansu, gdy częstość drgań pręta równa jest częstości jednego z drgań własnych słupa gazowego. W rurze powstają wtedy wyraźne skupienia proszku w miejscach odpowiadających węzłom odchylenia; w strzałkach proszku nie ma prawie zupełnie. Wypełniając rurę kolejno dwoma różnymi gazami, otrzymujemy ze wzorów

$$c_1 = \nu \lambda_1 \quad \text{i} \quad c_2 = \nu \lambda_2, \quad (\text{a})$$

gdzie ν — częstość drgań pręta, λ_1 i λ_2 — długości fal stojących, obliczone z odległości wzajemnej węzłów,

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

skąd, znając c_1 , możemy obliczyć c_2 .

której zakrzywiona powierzchnia wykazuje równomiernie rozłożone wzniesienia i zagłębienia. Gdy rurę oświetlimy lampą jednonitkową, ustawioną tak, aby nitka była prostopadła do długości rury, na ekranie umieszczonym pod rurą otrzymamy równoodległe obrazy nitki otrzymane przez załamanie światła w warstewce, która działa, jak szereg rozmieszczonych równomiernie wzdłuż rury soczewek cylindrycznych.

Do pomiaru długości fali w płynach służyć może również ultradźwiękowy interferometr Pierce'a (1925 r.). Źródło wysyłające bardzo krótkie fale, a więc rozchodzące się mniej więcej prostoliniowo, umieszczone jest w takiej odległości od powierzchni odbijającej, aby grubość zawartej między nim a powierzchnią odbijającą warstwy płynu stanowiła wielokrotność połowy długości fali. Wtedy fale padające i odbite tworzą stały układ fal stojących. Przy tego rodzaju rezonansie słupa płynu promieniowanie źródła staje się szczególnie silne; dla podtrzymania więc drgań konieczny jest większy przypływ energii z zewnątrz, niż w przypadku, gdy przesunięcie powierzchni odbijającej w tę lub inną stronę rezonans ten usunie. Dla wyznaczenia długości fali wystarczy wyznaczyć dwa sąsiednie położenia powierzchni odbijającej, przy których zachodzi rezonans.

Wywody powyższe ulegną niewielkiej na ogół zmianie, gdy rurę o przekroju kołowym zastąpimy rurą o przekroju prostokątnym, jeżeli tylko wymiary poprzeczne rury są tak, jak poprzednio, małe w porównaniu z długością fali. Dopiero w miarę wzrostu przekroju ujawnia się wpływ tych wymiarów na częstość drgań własnych, w pewnych zaś przypadkach na nateżenie dźwięku (Savart). Ogólnie mówiąc, częstości drgań rur o wymiarach podobnych i podobnie pobudzanych do drgania (np. rury organowe) są w stosunku odwrotnym do ich wymiarów.

Drgania własne rur o zmiennym przekroju kołowym zachodzą mniej więcej według tych samych praw, co rur o przekroju stałym, o ile tylko, jak to udowodnił Rayleigh, zmiany przekroju są niewielkie. W przypadku zmian większych częstość drgań własnych zależy przy tej samej długości rury od stosunku długości węższej części do szerszej. (Cermak, 1924 r.). Ważny dla teorii przyrządów muzycznych przypadek rur stożkowych nie znalazł jak dotychczas, należytego rozwiązania.

Gdy gaz wypełnia objętość kulistą, energia wyższych tonów jest tak mała, że w praktyce często można ją pominąć:

drgania własne sprowadzają się wtedy do drgań tonu zasadniczego.

Rolę analogiczną do roli pudełka rezonansowego kamertonu odgrywają rury, wypełnione powietrzem, w takich instrumentach muzycznych, jak piszczałki, trąby itp. Zależnie od sposobu wzbudzania drgań rozróżniamy dwa typy tego rodzaju instrumentów: stroikowe (języczkowe) i fletowe. W instrumentach typu pierwszego pierwotnym źródłem drgań jest giętkie ciało stałe, wprowadzane w ruch przez prąd wdmuchiwanego do rury powietrza i okresowo zamykające i otwierające jego dopływ.

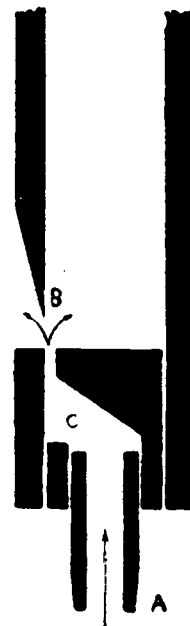
W instrumentach takich, jak oboj lub fagot, stroikiem są dwie cienkie płytki (błony), umocowane po obu stronach rury w ten sposób, że w położeniu równowagi rurę całkowicie zamykają; podczas drgania płytek powstaje między nimi szczelina, okresowo zmieniająca swój przekrój, co powoduje znów okresowe zmiany ciśnienia w rurze. W trąbach takich, jak waltornia, puzon — stroikiem są napięte wargi trębacza. W innych instrumentach stroikami są zazwyczaj podłużne płytki metalowe, które drgając, zamykają całkowicie (klarnet, saksofon) lub częściowo dostęp powietrza do rury.

Uzgadniając częstości drgań własnych stroika z częstością jednego z tonów własnych rury, otrzymujemy rezonans.

Masa powietrza, zawarta w rurze, stanowi wraz ze stroikiem układ sprzężony, wobec czego częstość drgań tego układu nie jest równa częstościom drgań własnych czy to stroika czy też słupa powietrza. Gdy jednak tłumienie drgań stroika jest, podobnie jak w przypadku kamertonu, umieszczonego na pudełku rezonansowym, znacznie mniejsze, niż tłumienie drgań masy powietrza, instrument wydaje przy rezonansie ton mało różniący się od tonu własnego stroika. Stopień bowiem sprzężenia i w tym przypadku, jak i na ogół we wszystkich sprzężeniach akustycznych, w ścisłym tego słowa znaczeniu, ma wartość niewielką, nie przekraczającą, według Vogela, w żadnym przypadku 0,25. Teorię instrumentów stroikowych, jako układów sprzężonych, zapoczątkowaną przez Helmholtza, opracowali M. Wien i Vogel (1920 r.).

W przyrządach typu fletowego pierwotnym źródłem drgań są drgania warstewki powietrza, wdmuchiwanej przez szczelinę i uderzającej o umieszczoną naprzeciwko szczeliny krawędź

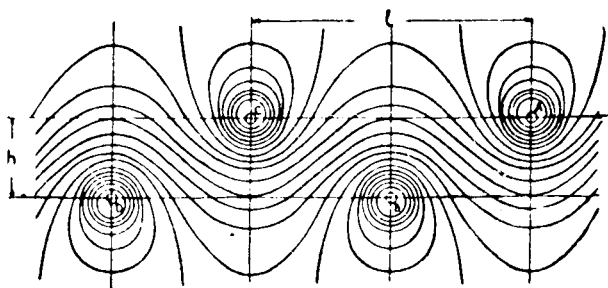
(rys. 90). Warstewka ta, poruszająca się z pewną prędkością względem szczeliny i nieruchomego powietrza, jest odgraniczona od środowiska, w którym się porusza, powierzchniami nieciągłości. Taka powierzchnia jest, jak wiemy, (tom I, str. 297), siedliskiem wirów, które przy statecznym wypływie gazu tworzą się, jak to na podstawie teorii Prandtla wykazał v. Kármán, w odstępach regularnych po obu stronach warstwy, przy czym w wirach znajdujących się po stronach przeciwnych, kierunki obrotu są również przeciwne. W tym układzie wirów stosunek odstepu h środków wirów o przeciwnych kierunkach obrotu do odległości wzajemnej l wirów o tym samym kierunku ma w przypadkach ruchu statecznego wartość stałą.



rys. 90

Stosunek ten obliczony na podstawie praw hydromechaniki wynosi, według v. Kármána i Rubacha (1912 r.) 0,283.

Pewne pojęcie o tego rodzaju zjawisku, zachodzącym w przypadku wąskiej, prostokątnej, dostatecznie długiej szczeliny daje nam schematyczny rysunek 91, odtwarzający przekrój warstwy wirowej płaszczyzną prostopadłą do szczeliny.



rys. 91

Przypuśćmy, że w pewnej chwili istnieją dwa wiry A i B. Gdy strumień powietrza, poruszając się z prędkością u względem szczeliny, oddali się na odległość $\frac{l}{2}$ powstanie nowy

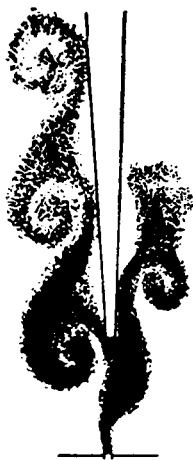
wir C, gdy odległość wzrośnie do l — wir D; w ciągu więc tego czasu warstewka wykona jedno całkowite wahnięcie. Częstość wahań wyniesie

$$\nu = \frac{u}{l} . \quad (43a)$$

Tego rodzaju tony, powstające np. przy gwizdaniu „przez zęby”, noszą nazwę tonów szczelinowych.

Przy zwykłym gwizdaniu tony powstające są również tonami szczelinowymi, zjawisko jednak jest bardziej złożone z uwagi na działanie rezonancyjne jamy ustnej, kołowy kształt szczeliny i drganie warg.

W piszczałkach fletowych warstewka, wychodząca ze szczeliny, uderza w przeciwległą krawędź i ulega rozszczepieniu na dwie oddzielne warstwy wirowe, postępujące wzdłuż boków krawędzi. Wiry te uwidocznili (1925 r.) Carrière, wdmuchując do piszczałki powietrze zmieszane z parą wodną nasyconą; para ta przy rozprężeniu tworzyła mgłę, którą łatwo można było obserwować (rys. 92).



rys. 92

Na rysunku 92 wzdłuż każdego z boków krawędzi postępują wiry o tym samym kierunku obrotu. W rzeczywistości, jak to stwierdził Carrière, tworzą się na każdej krawędzi również i wiry o kierunku przeciwnym, wobec czego wykształca się stopniowo na każdym boku całkowita warstwa wirowa. Wiry te są jednak tak małe, że można stwierdzić ich istnienie jedynie w wyjątkowo sprzyjających warunkach.

Za każdym razem, gdy wir wdmuchiwanego powietrza uderza o krawędź, powstaje fala zderzenia, która, dochodząc z prędkością głosu do szczeliny, powoduje wytworzenie się w pobliżu niej nowego wiru. Tym sposobem powstaje nowy układ wirów, w którym odległość między wirami wynosi nie l , lecz d , gdzie d — odległość między szczeliną i krawędzią (prędkość bowiem głosu jest bardzo wielka w porównaniu z prędkością ruchu powietrza, tak że chwilę uderzenia o krawędź i chwilę powstania nowego wiru można uważać za jednoczesne). Ten układ wirów, będący źródłem tzw. tonów krawędziowych (franc. sons d'arête lub sons de bouche), nakłada się na układ, odpowiadający tonom szczelinowym. Największe natężenie otrzymamy wtedy, gdy d będzie równe l lub $2l, 3l \dots$

Ta w wielkim skrócie podana przez nas teoria została opracowana przez Krügera (1920 r.) na podstawie wspomnianych już wyżej prac

v. Kármána. Wyjaśnia ona z wystarczającą na ogół dokładnością wyniki wcześniejszych prac doświadczalnych Wachsmutha (1902 r. i nast.), Heusena (1900 r.), a zwłaszcza Gollera (1912 r.) oraz Rietha (1917 r.). Wykonane (1926 r.) ze szczególną starannością pomiary Bentona również ją potwierdzają.

Działanie masy powietrza, zawartej w rurze, ujawnia się przede wszystkim w zwiększeniu natężenia tonu krawędziowego, następnie zaś w ustaleniu wysokości tonu. Jak wynika bowiem z wyżej przytoczonych rozważań, wysokość tonu krawędziowego zależy od prędkości „wiatru” tzn. wdmuchiwanej warstewki powietrza a więc od powodującego jej ruch ciśnienia; ton zatem wydawany przez piszczałkę tego typu wtedy tylko miałby stałą wysokość, gdyby prędkość „wiatru” stale była jednakowa, co w praktyce trudno byłoby urzeczywistnić. Tę zależność udowodniły istotnie pomiary Schaefera (1918 r.) i Lutza (1921 r.), którzy stwierdzili, że dopiero wtedy, gdy ciśnienie „wiatru” odpowiada tonowi własnemu powietrza w rurze, ton piszczałki pozostaje stały w dość szerokich granicach ciśnienia.

Zależność wysokości tonu od ciśnienia ujawnia się również, lecz w znacznie mniejszym stopniu i w instrumentach stroikowych.

W zupełnie podobny sposób można wyjaśnić powstawanie tzw. tonów ciętych, zbadanych po raz pierwszy przez Strouhala (1878 r.). Tomy te, których przykładem są brzęczenia drutów telegraficznych, szum drzew, tony wydawane przez tzw. harfę eolską tzn. układ drutów o różnej odpowiednio dobranej długości, rozpiętych na sztywnej ramie, itd., powstają na skutek ruchu płynu (równie dobrze cieczy, jak i gazu) względem sztaby, pręta lub drutu.

Oznaczmy przez U prędkość drutu, pręta lub sztaby względem masy płynu, którą uważamy za nieruchomą, i przyjmijmy, że ciało to porusza się w kierunku prostopadłym do swej osi. Rysunek 91 będzie tym razem odtwarzał przecięcie warstwy wirowej płaszczyzną prostopadłą do osi poruszającego się ciała (w dostatecznej odległości od końców danego ciała).

Warstwa wirowa będzie poruszała się względem nieruchomej warstwy płynu z prędkością u , na ogół mniejszą od U . Gdy na skutek tej różnicy prędkości wir początkowo przylega-

jący do ciała oddali się od niego na odległość $\frac{l}{2}$, przy ciele powstanie wir nowy po przeciwnej stronie warstwy; przy wzroście odległości o l powstanie wir po tej samej stronie; w ciągu tego czasu warstewka, jak o tym była mowa wyżej, wykona jedno całkowite wahanie. Częstość zatem drgań warstewki będzie równa

$$\nu = \frac{U - u}{l}. \quad (43b)$$

Gdy ta częstość drgań jest zgodna z częstością drgań własnych ciała, gdy więc mamy do czynienia z rezonansem, powstają silne drgania ciała i natężenie dźwięku może przybrać dość znaczną wartość.

Według v. Kármána stosunek $\frac{u}{U}$, jak również stosunek l do wymiarów ciała posiadają dla danego ciała wartość stałą, niezależną od rodzaju płynu. Tak np. dla drutu cylindrycznego stosunki $\frac{u}{U} = a$ i $\frac{l}{2r} = b$, gdzie r — promień drutu, mają w powietrzu i wodzie wartości te same, które v. Kármán i Rubach wyznaczyli doświadczalnie. Przekształcając równanie (43b), otrzymamy

$$\nu = \frac{1-a}{b \cdot 2r} \cdot U = \frac{1-a}{b} \cdot \frac{U}{2r} = C \cdot \frac{U}{2r}. \quad (43c)$$

Według Kármána i Rubacha C w danym przypadku równe jest 0,20.

Wnioski te znalazły potwierdzenie w doświadczeniach Strouhala i Krügera (1914 i lata późniejsze) z wyjątkiem przypadków drutów bardzo cienkich. Wzór (43c) jeszcze przed pracami v. Kármána wyprowadził Rayleigh, przyjmując na C nieco odmienną wartość równą 0,185.

Szczególny przypadek drgań słupa gazu stanowi tzw. śpiewający płomień.

Zjawisko to, odkryte przez Higginsa (1777 r.) polega na drganiu powietrza, zawartego w otwartej rurze pionowej, do której, w dolnej jej części, wprowadzony jest płomień. Rodzaj palącego się gazu nie wpływa w niczym na wysokość tonu, nieco wyższą zazwyczaj od wysokości własnego tonu rury, wypełnio-



rys. 93

nej gazem jednorodnym o tej samej temperaturze. Dobierając rury odpowiedniej długości, można zbudować tzw. harmonijkę gazową, dającą tony o oznaczonym stosunku częstości.

Najbardziej, jak się zdaje, słuszne wyjaśnienie tego bardzo złożonego zjawiska dał Rayleigh, stwierdzając, że drgania są w tym przypadku podtrzymywane przez okresowy przypływ ciepła, przy czym podtrzymywanie zachodzi wtedy, gdy ciepło przypływa w chwilach największego zgęszczenia, odpływa zaś w chwilach największego rozrzedzenia. Tym by się tłumaczył fakt, stwierdzony przez Sondhaussa (1860 r.), a ostatnio potwierdzony przez Richardsona, że rura „odpowiada” na pobudzenie wtedy tylko, gdy przewody, doprowadzające spalany gaz, mają dostateczną długość, aby powstała w nich fala stojąca.

Zmiana energii cieplnej w akustyczną zachodzi również i wtedy, gdy przez przewodnik przepływa zmienny prąd elektryczny. Ciepło, wywiązane w drucie i proporcjonalne do kwadratu natężenia prądu, możemy uważać za sumę dwu ilości ciepła: stałej i zmiennej, jak to wynika bezpośrednio ze wzoru

$$i_0^2 \sin^2 \omega t = \frac{i_0^2}{2} - \frac{i_0^2}{2} \cos^2 \omega t.$$

Zmienna ilość ciepła powoduje zmienne ogrzewanie otaczającego powietrza i, co za tym idzie, okresową zmianę jego prężności. Obszerność tych zmian jest tym większa, im mniejsza jest objętość ogrzewanego gazu oraz im mniejsza jest pojemność cieplna przewodnika. Warunki te są spełnione, gdy przewodnikiem są cienkie paski (platynowe lub złote) lub druty o grubości możliwie małej (np. 1μ), zamknięte w niewielkiej puszcze. Drgania ciśnienia w puszcze są przekazywane na zewnątrz przez drgania błony, zamykającej całkowicie lub częściowo jeden z boków puszek, lub też bezpośrednio przez otwór w puszcze doprowadzane do ucha. Znając natężenie prądu i wymiary puszek można, jak to wykazał (1922 r.) Wentz i jak to potwierdziły pomiary Trendelenburga (1923 r.), dokładnie obliczyć amplitudy drgań ciśnienia. Toteż tego rodzaju przyrząd, nazywany *termofonem*, może służyć do dokładnych bezwzględnych pomiarów amplitud, gdy chodzi o energie niewielkie.

Odrębną kategorię źródeł dźwięku stanowią przyrządy typu syreny, których pierwowzorem jest syrena Cagniard de la Toura. Jest to płyta kołowa, na której wzdłuż obwodu koła są

równomiernie rozmieszczone otwory. Gdy płytę wprawimy w ruch obrotowy koło osi, przechodzącej przez jej środek i prostopadłej do jej płaszczyzny, i gdy na którykolwiek z układów otworów skierujemy prąd powietrza, wydmuchiwany z niewielkiej rurki, też prostopadłej do płyty, okresowo powtarzające się nagłe przerywania prądu będą źródłem dźwięku. Wysokość dźwięku w tym przyrządzie zależy jedynie od ilości otworów i prędkości obrotu płyty, może więc być dowolnie zmieniana.

Do tej samej kategorii dźwięków należą dźwięki wydawane przez szybko obracające się ciała, jak np. dynamaszyny, turbiny itp.

