



Statystyczne sterowanie procesami

DR INŻ. JÓZEF ZAWADA

JÓZEF ZAWADA

STATYSTYCZNE STEROWANIE PROCESAMI

SPIS TREŚCI

I. Wprowadzenie	sl. 3 - 10
II. Wybrane zagadnienia z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej	sl. 11 – 99
III. Wprowadzenie do sterowania procesami	sl. 100 – 125
IV. Projektowanie kart kontrolnych	sl. 126 – 201
V. Zdolność procesu	sl. 202 – 245
VI. Literatura	sl. 246

STATYSTYCZNE STEROWANIE PROCESAMI

Część I

WPROWADZENIE

PERCEPCJA

Percepcja – proces poznawczy, polegający na subiektywnym odzwierciedleniu przez człowieka przedmiotów, zjawisk, procesów, itp. czyli inaczej rzecz ujmując, na zbudowaniu w naszej świadomości obrazu otaczającej nas rzeczywistości.

Percepcja przebiega dwuetapowo:

- 1) etap sensoryczno-motoryczny, w którym nasze narządy zmysłowe odbierają różnego rodzaju bodźce (sygnały zawierające informacje o otaczającej nas rzeczywistości);
- 2) etap znaczeniowo-czynnościowy, w którym odebrany bodźcom nadawane jest znaczenie (w którym odbieramy i przetwarzamy zawartą w tych bodźcach informację);

SYGNAŁY (ZNAKI)

Bodźców odbieranych przez nasze zmysły jest olbrzymia ilość, w związku z czym nie jesteśmy w stanie odebrać i przetworzyć całej zawartej w nich informacji. Z tego względu ważną rzeczą jest, aby zauważać, odbierać i właściwie interpretować bodźce zawierające informacje istotne (zwane dalej **znakami).**

Umiejętność rozpoznawania znaków i właściwego interpretowania ich znaczenia fascynowała ludzi od bardzo dawna, można powiedzieć od zawsze. Sporządzano wykazy znaków oraz ich interpretacji.

ZNAKI – PRZYKŁAD

Bardzo często jako znaki uważano rzadko spotykane zdarzenia astronomiczne – np.. pojawienie się komety:

Na to rzekł Wojski, głowę pochyliwszy smutnie:

"Kometa czasem wojny, czasem wróży kłótnie!

Niedobrze, iż się zjawił tuż nad Soplicowem:

Może nam grozi jakim nieszczęściem domowem."

Adam Mickiewicz „Pan Tadeusz”

ZMIENNOŚĆ I JEJ PRZYCZYNY

Czynnikiem utrudniającym zauważenie znaków jest zmienność. W otaczającym nas świecie zmienne jest wszystko, nie ma dwóch identycznych przedmiotów, zjawisk czy procesów. Widzimy występujące różnice, jesteśmy do nich przyzwyczajeni, traktujemy je jako coś normalnego. **Czy słusznie? Czy zawsze słusznie??** Czy różnica pomiędzy tym co zwykle, a tym co właśnie teraz, nie jest sygnałem, który powinniśmy zauważyć???

Zmienność cech przedmiotów, zjawisk czy procesów spowodowana jest wpływami, często przypadkowymi, bardzo wielu bardzo różnych czynników. Określając wpływ każdego z tych czynników jako przyczynę zmienności można powiedzieć, że zmienność ma bardzo wiele bardzo różnych przyczyn.

PRZYCZYNY ZMIENNOŚCI – KLASYFIKACJA

Twórca statystycznego sterowania procesami - Walter Shewart, charakteryzując proces poprzez określoną kompozycję czynników wpływających na wyniki podejmowanych w ramach tego procesu działań, podzielił przyczyny zmienności na losowe i specjalne.

Przyczyny losowe cechują się tym, że jest ich bardzo wiele, skutek każdej z nich jest raczej niewielki i ma charakter przypadkowy. Wystąpienie konkretnej przyczyny losowej jest więc mało istotne i nie wymaga ingerencji w przebieg procesu.

Przyczyny specjalne to z reguły niewielka liczba przyczyn, z których każda może powodować istotny skutek. Wystąpienie przyczyny specjalnej powoduje rozregulowanie procesu i wymaga najczęściej ingerencji w jego przebieg. W związku z powyższym informacja o możliwości wystąpienia przyczyny specjalnej jest informacją istotną (stanowi **znak**).

ZMIENNOŚĆ A JAKOŚĆ

Wytwarzany produkt (usługa) definiowany jest za pomocą pewnego zestawu cech, a jego jakość zależy najczęściej od wartości (stanu) tych cech.

Zmienność wyników procesu powoduje, że wartości cech w poszczególnych egzemplarzach produktu odbiegają od wartości optymalnych, a nawet mogą wypaść z przedziału wartości dopuszczalnych.

Wynika stąd, że zmienność wyników procesu pogarsza jakość produktów. W takim razie doskonalenie jakości wymaga ograniczania tej zmienności.

Ograniczenie zmienności wyników procesu można osiągnąć poprzez identyfikację przyczyn specjalnych i stosowne przeciwdziałania podejmowane w przypadku ich wystąpienia.

CO TO JEST SSP (SPC) ?

Przy ograniczaniu zmienności wyników procesu bardzo przydatne okazały się narzędzia rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. W oparciu o nie zaprojektowano **szereg specjalnych technik statystycznych, których celem było przeciwdziałanie rozregulowywaniu procesów** przez przyczyny specjalne (powstawaniu wyrobów wadliwych). Techniki te oraz ich wykorzystanie w praktyce, określane mianem Statystycznego Sterowania Procesem (Statistical Process Control, SPC), stanowiąc będą główny temat niniejszego opracowania.

Mówiąc prościej – proces, którym chcemy sterować emituje bardzo wiele, bardzo różnych sygnałów. Niektóre z nich nie powinny ująć naszej uwadze, bo **są znakami** rozregulowania procesu. W dalszych częściach niniejszego opracowania będzie mowa o tym, jak rozpoznawać i interpretować te znaki.

STATYSTYCZNE STEROWANIE PROCESAMI

Część II

WYBRANE ZAGADNIENIA Z RACHUNKU PRAWDOPODOBIENSTWA I STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ

DANE - RODZAJE

Dane, czyli zebrane przez nas informacje np. o parametrach charakteryzujących przebieg procesu, wynikach tego procesu, itp., mogą mieć różną postać. Wyróżnia się:

- **dane liczbowe**: uzyskane w wyniku pomiarów lub obliczeń (np.: wynik pomiaru średnicy wałka za pomocą mikrometru czy wynik obliczeń prędkości samochodu na podstawie bezpośrednich pomiarów drogi i czasu, w jakim ta droga została przebyta);
- **dane kategoryjne** (alternatywne): uzyskane w wyniku podziału na kategorie np: dobry lub zły, zliczania przedmiotów w poszczególnych kategoriach czy określania liczby braków lub niezgodności (np.: liczba żarówek z partii produkcyjnej, która nie świeci);

DANE - PREZENTACJA

Zbiór danych zapisanych w postaci sekwencji wartości, np.:

**11,3; 12,6; 11,9; 13,0; 12,8; 14,2; 14,0; 14,5; 13,9; 14,8; 15,3; 13,0;
12,8; 14,2; 14,0; 15,3; 14,5; 13,9; 14,8; 11,3; 12,6; 11,9;**

jest dla człowieka trudny w odbiorze i przeważnie uniemożliwia wyciągnięcie szybkich i prawidłowych wniosków. Trudności w odbiorze rosną szybko wraz ze wzrostem ilości danych.

Aby ułatwić odbiór istotnych informacji zawartych w zebranych danych należy dane te odpowiednio opracować i przedstawić w bardziej przystępnej formie. Możliwe są tu różne rozwiązania, które w zasadzie można podzielić na dwie grupy:

- zastąpienie liczniejszego zbioru danych przez mniej liczny zbiór wartości je reprezentujących;
- przedstawienie zbioru danych w postaci graficznej;

WARTOŚCI REPREZENTUJĄCE ZBIÓR DANYCH

Do charakteryzowania zbiorów danych używa się najczęściej następujących wartości:

- **miara położenia** – wartość najlepiej* charakteryzująca wszystkie dane (średnia lub typowa wartość danych);
- **miara rozrzutu** – wartość charakteryzująca rozproszenie wartości poszczególnych danych;
- **wartości skrajne** zbioru danych;

Charakteryzowanie zbioru danych za pomocą wybranych wartości reprezentujących stanowi znaczne uproszczenie (pomija znaczną część zawartych w charakteryzowanym zbiorze informacji)

MIARY POŁOŻENIA

W większości przypadków, a zwłaszcza w przypadkach sterowania procesami, zbiór danych dotyczy jednej, ściśle określonej cechy, w związku z czym posiada dość jednorodny charakter. Wartości poszczególnych danych przeważnie nie różnią się mocno, więc na osi wartości grupują się w niedalekiej od siebie odległości.

Miejsce grupowania się wartości zbioru danych określa się za pomocą tzw. **miar położenia**. Do najczęściej stosowanych miar położenia należą:

- **średnia arytmetyczna;**
- średnia geometryczna;
- średnia harmoniczna;
- średnia kwadratowa;
- **mediana;**
- wartość modalna;

ŚREDNIA ARYTMETYCZNA

Średnią arytmetyczną oblicza się z zależności:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

W Excelu: **ŚREDNIA (tabl)**

gdzie n oznacza licznosc zbioru danych

Średnia arytmetyczna jest miarą naturalną, łatwą w intuicyjnym odbiorze i w związku z tym chętnie i często stosowaną. Przykłady: średnia ocen w semestrze, średnia płaca w firmie, średnia długość życia, itp.

Średnia arytmetyczna nie sprawdza się w przypadku danych niejednorodnych (duży i niegausowski rozrzut, wartości odstające, różne źródła danych). W takich przypadkach lepszą miarą położenia może być mediana.

ŚREDNIA ARYTMETYCZNA OBCIĘTA

Średnia arytmetyczna obcięta, zwana też średnią arytmetyczną zmodyfikowaną jest stosowana w przypadkach, gdy chcemy wyeliminować wpływ danych odstających. Modyfikacja dotyczy nie samej średniej, ale zbioru danych, dla którego jest obliczana. Przed wyznaczeniem średniej usuwa się z niego uprzednio określony procent danych o wartościach skrajnych.

W Excelu do wyznaczania średniej arytmetycznej odciętej służy funkcja **ŚREDNIA.WEWN (tabl; liczba)**, gdzie liczba jest ułamkiem określającym, jaka część danych nie zostanie uwzględniona w obliczeniu średniej.

Przykład wykorzystania średniej obciętej: ocena stylu skoku narciarskiego **$W = 3 * \text{ŚREDNIA.WEWN}(A1:A5; 0,4)$**

MEDIANA

Mediana jest to wartość danej, która w szeregu uporządkowanym według wartości zajmuje miejsce środkowe. Jeżeli liczba danych jest nieparzysta, to medianą jest wartość danej o numerze porządkowym $(n+1)/2$. Jeżeli liczba danych jest parzysta to medianą jest średnia arytmetyczna wartości danych o numerach porządkowych $n/2$ i $n/2 + 1$.

Wartość mediany jest odporna (nie reaguje) na tzw. dane odstające (skrajne), co na ogół jest jej zaletą.

Przykład. Dla zbioru danych:

12, 14, 11, 24, 18, 14, 15, 19, 13, 16 i 19

wartość mediany jest równa ? $M_e = 15$

W Excelu do wyznaczania wartości mediany służy funkcja

MEDIANA (tabl)

MIARY ROZRZUTU

Miary rozrzutu charakteryzują zmienność (rozproszenie) wartości zbioru danych. Miary te są zawsze nieujemne. Zerowa wartość dowolnej miary rozrzutu oznacza, że wartości wszystkich danych w zbiorze są jednakowe.

Do najczęściej spotykanych miar rozrzutu należą:

- **wariancja**
- **odchylenie standardowe;**
- **odchylenie przeciętne;**
- **rozstęp;**
- **odchylenie ćwiartkowe;**
- **współczynnik zmienności**

WARIANCJA

Wariancja jest średnią arytmetyczną kwadratów odchyleń wartości poszczególnych danych od wartości średniej zbioru.

Wariancję dla całej populacji obliczamy z zależności:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

W Excelu: **WARIANCJA.POPUL (tabl)**

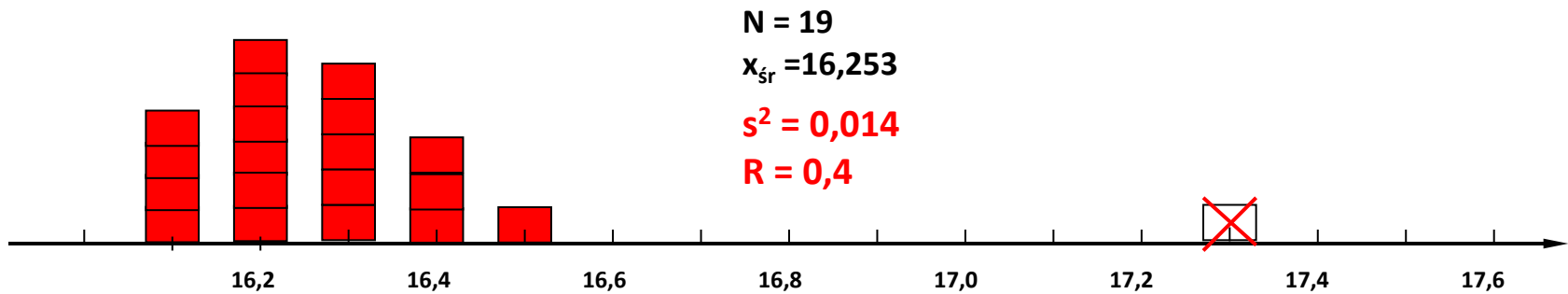
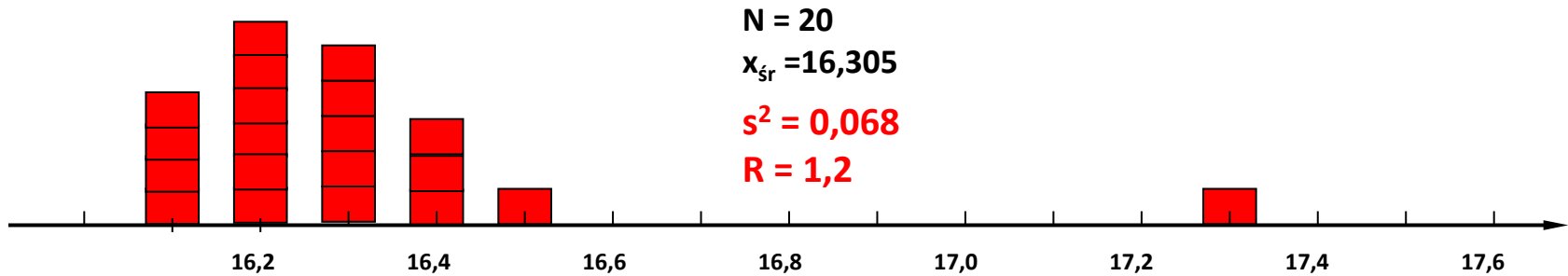
Estymator wariancji populacji określany na podstawie próbki:

$$s_e^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

W Excelu: **WARIANCJA (tabl)**

Wariancja jest wyrażona w jednostkach innych niż poszczególne dane. Jej wartość jest mocno uzależniona od wartości skrajnych

WARIANCJA c.d.



ODCHYLENIE STANDARDOWE

Odchylenie standardowe jest pierwiastkiem z wariancji i jest wyrażone w tych samych jednostkach, co zbiór danych.

Odchylenie standardowe dla całej populacji obliczamy z zależności:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

W Excelu: **ODCHYL.STANDARD.POPUL (tabl)**

Estymator odchylenia standardowego populacji określany na podstawie próbki:

$$s_e = \sqrt{s_e^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

W Excelu: **ODCHYL.STANDARDOWE (tabl)**

W praktyce odchylenie standardowe stosuje się przy $n \geq 5$ [\[L1\]](#)

ROZSTĘP

Rozstęp R jest to różnica pomiędzy największą i najmniejszą wartością w zbiorze danych

$$R = X_{\max} - X_{\min}$$

Rozstęp jest definiowany wyłącznie przez wartości skrajne, w związku z czym jest szczególnie wrażliwy na tzw. dane odstające

Wadę tę można ograniczyć poprzez modyfikację zbioru danych polegającą na uprzednim usunięciu z niego określonego procentu wartości skrajnych. Jeżeli zostanie usunięte 50% wartości (25% wartości najmniejszych i 25% wartości największych) to obliczony po takiej modyfikacji rozstęp nosi nazwę **rozstępu ćwiartkowego**.

W praktyce rozstępu używamy w przypadku niedużych zbiorów danych dla $n \leq 10$ [L1]

WARTOŚCI GRANICZNE

Zbiór danych można scharakteryzować podając jego wartości graniczne $X_{\min}$ i $X_{\max}$. Określają one tzw. obszar zmienności – V_x

$$V_x = \{X_{\min}; X_{\max}\}$$

Wartości graniczne są wrażliwe na dane odstające.

W Excelu wartości graniczne zbioru danych są zwracane przez funkcje: **MIN (tabl)** i **MAX (tabl)**

SZEREG PROSTY

SZEREG ROZDZIELCZY

Szereg prosty uzyskuje się przez sortowanie danych według ich wartości: rosnąco (najczęściej) lub malejąco (rzadziej).

Szereg rozdzielczy uzyskuje się dzieląc dane na pewne kategorie (podzbiory) i zliczając ilość (lub częstość) danych należących do każdej z tych kategorii.

Wynikiem utworzenia szeregu rozdzielczego jest najczęściej tabela, np.:

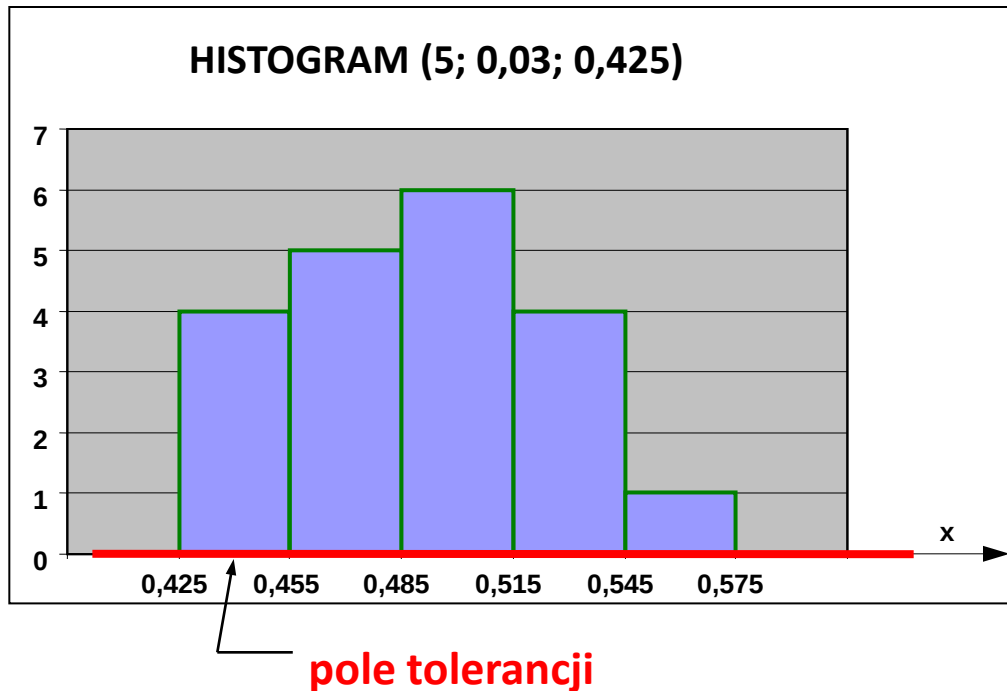
Wartość danej	Liczba danych	Częstość
0	2	0,08
1	7	0,28
2	9	0,36
3	5	0,20
4	2	0,08

WIZUALIZACJA SZEREGU ROZDZIELCZEGO

Wartość danej	Wystąpienia	Liczba danych
0		2
1		7
2		9
3		5
4		2

Bardziej zaawansowanym sposobem graficznej prezentacji szeregu rozdzielczego jest histogram

HISTOGRAM



Wykres słupkowy ilustrujący rozproszenie wartości zebranych danych.

Pokazuje postać rozkładu wartości interesującej nas cechy oraz usytuowanie tego rozkładu względem przyjętego pola tolerancji.

Wykorzystywany przy wstępnej analizie danych (przyjmowanie modelowego rozkładu dla interesującej nas cechy) oraz przy nadzorowaniu przebiegu procesów.

BUDOWA HISTOGRAMU 1/4

W celu utworzenia histogramu należy:

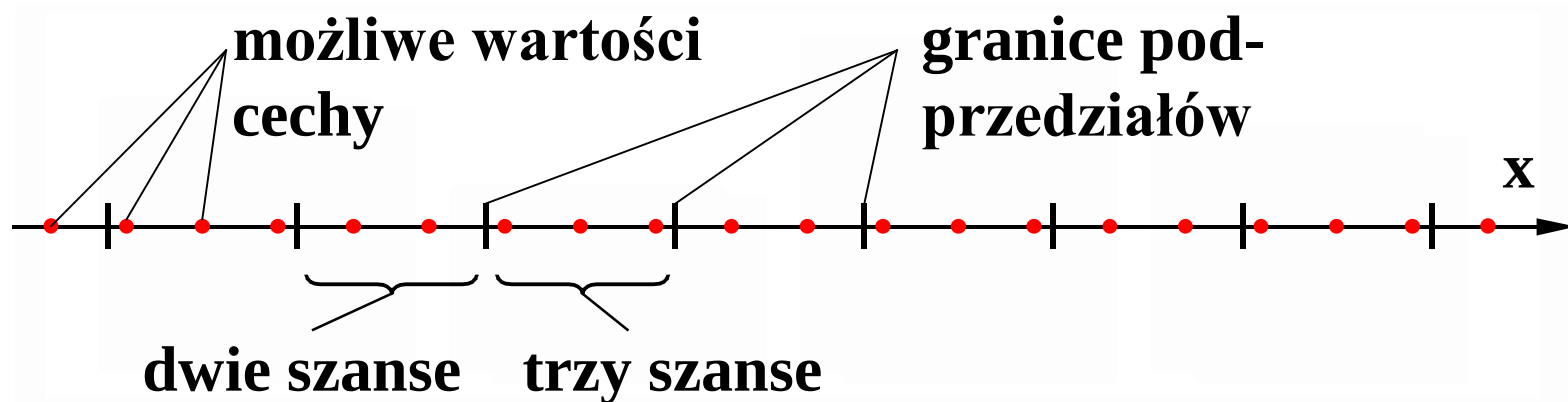
1. Zebrać interesujące nas dane: $x_1, x_2, \dots, x_N$, określić rozdzielczość Δ
2. Wyszukać w zbiorze danych wartość najmniejszą $x_{\min}$, wartość największą $x_{\max}$ i obliczyć rozstęp tych wartości $R = x_{\max} - x_{\min}$
3. Obliczyć orientacyjną liczbę podprzedziałów (klas):
 $k' \approx \sqrt{N}$, gdzie N – liczba danych;
4. Obliczyć orientacyjną szerokość podprzedziałów: $b' = R / k'$
5. Przyjąć szerokość podprzedziałów $b = n \cdot \Delta / 2$ oraz ich ilość k ; przy czym n i k należy dobrać tak, aby $b \cdot k \geq R + \Delta$
6. Wyznaczyć położenie poszczególnych podprzedziałów tak, aby wartości skrajne leżały możliwie symetrycznie względem histogramu
7. Obliczyć ilości danych znajdujących się w poszczególnych podprzedziałach i narysować wykres

BUDOWA HISTOGRAMU 2/4

Przy budowie histogramu każdemu podprzedziałowi należy zapewnić jednakowe formalne szanse uzyskania danych.

W przypadku danych analogowych warunek ten zapewniony jest przez przyjęcie jednakowej szerokości podprzedziałów.

W przypadku danych dyskretnych (a taki charakter mają wyniki pomiarów) jednakowa szerokość podprzedziałów nie gwarantuje równych szans uzyskania danych



BUDOWA HISTOGRAMU 3/4

Aby w przypadku danych dyskretnych zapewnić podprzedziałom jednakowe szanse uzyskania danych ich szerokości muszą być równe krotności różnicy sąsiednich wartości cechy

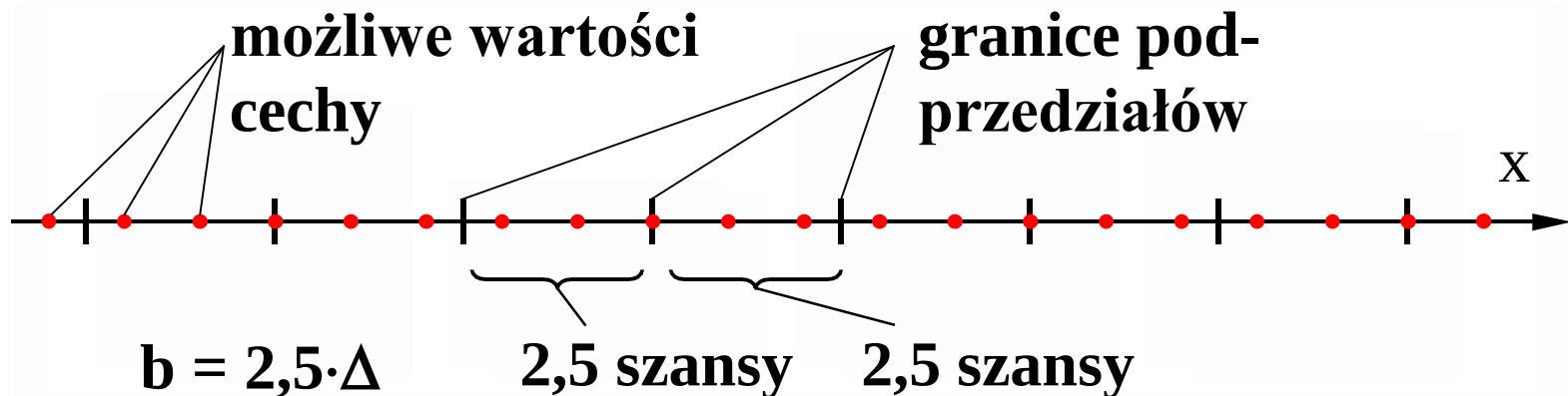
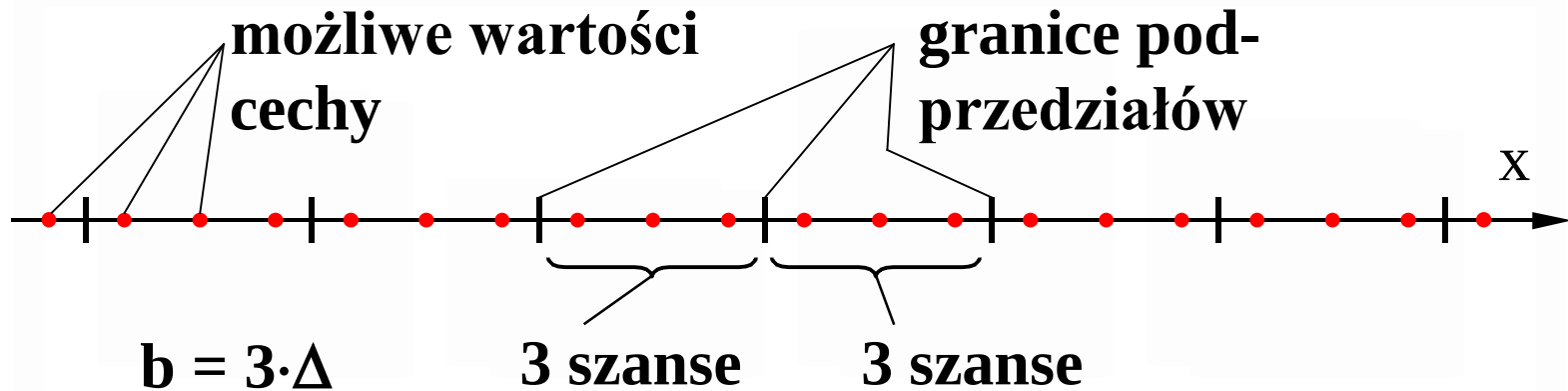
$$b = n \cdot \Delta \quad \text{gdzie: } n = 1, 2, 3, \dots$$

W przypadkach szczególnych można przyjąć:

$$b = 0,5 \cdot n \cdot \Delta \quad \text{gdzie: } n = 3, 5, 7, \dots$$

ale wtedy co druga granica podprzedziałów musi pokrywać się z możliwymi wartościami cechy. Dane o wartości leżącej na granicy są wtedy dzielone pomiędzy oba sąsiadujące podprzedziały

BUDOWA HISTOGRAMU 4/4



BUDOWA HISTOGRAMU – ZADANIE 2.1

Poniższy zbiór danych liczbowych przedstawić w postaci histogramu

0,43; 0,44; 0,57; 0,46; 0,47; 0,52; 0,49; 0,50; 0,51; 0,52;
0,53; 0,54; 0,55; 0,56; 0,57; 0,58; 0,59; **0,60**; 0,45; 0,46;
0,47; 0,58; 0,48; 0,55; 0,48; 0,49; 0,54; 0,50; 0,53; 0,50;
0,50; 0,51; 0,51; 0,56; 0,51; 0,51; 0,52; 0,48; 0,52; 0,53;
0,53; 0,50; 0,53; 0,49; 0,54; 0,54; 0,55; 0,47; 0,56; 0,45;
0,51;

$$R = X_{\max} - X_{\min} = 0,60 - 0,43 = 0,17$$

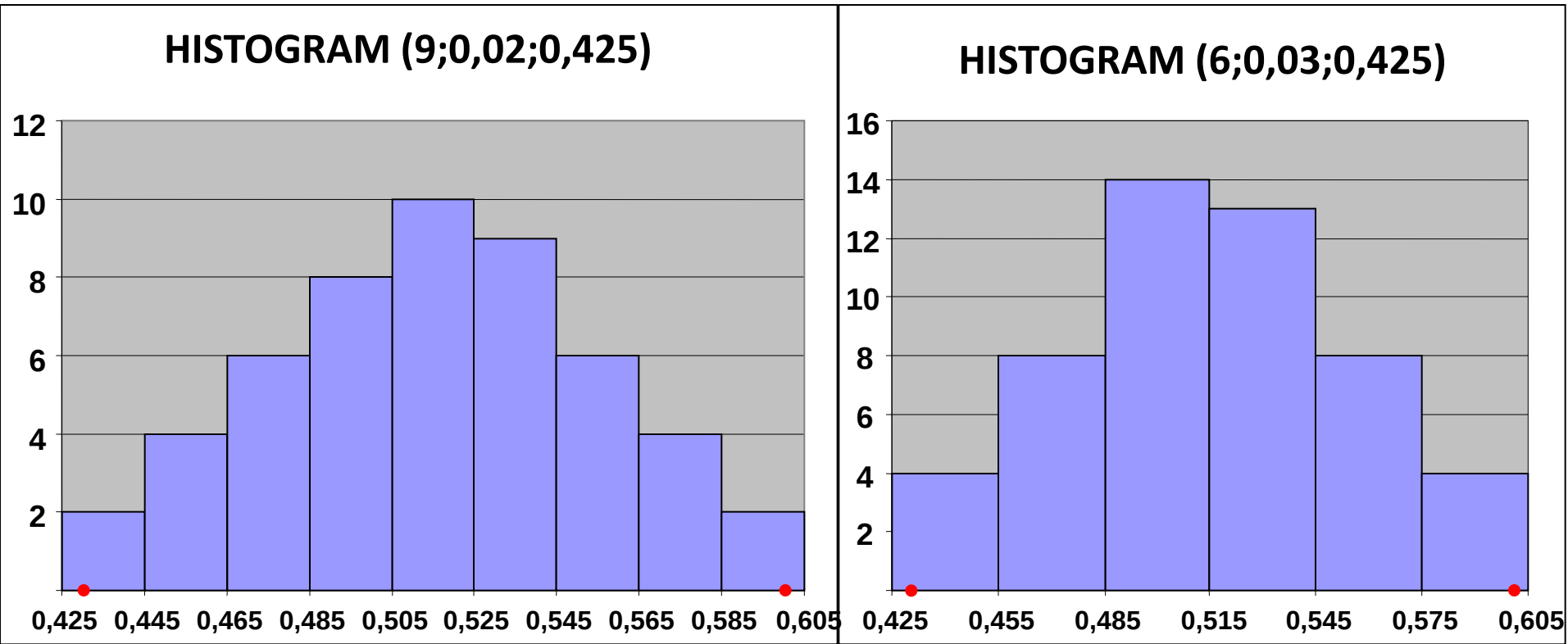
$$N = 51; \Delta = 0,01$$

$$k' \approx \sqrt{N} = \sqrt{51} = 7,14;$$

$$b' = R / k = 0,17 / 7,14 = 0,0238$$

Możliwości: $\{b = 0.02, k = 9; b = 0.03, k = 6; b = 0.025, k = 8;$

ZADANIE 2.1 - WYNIKI



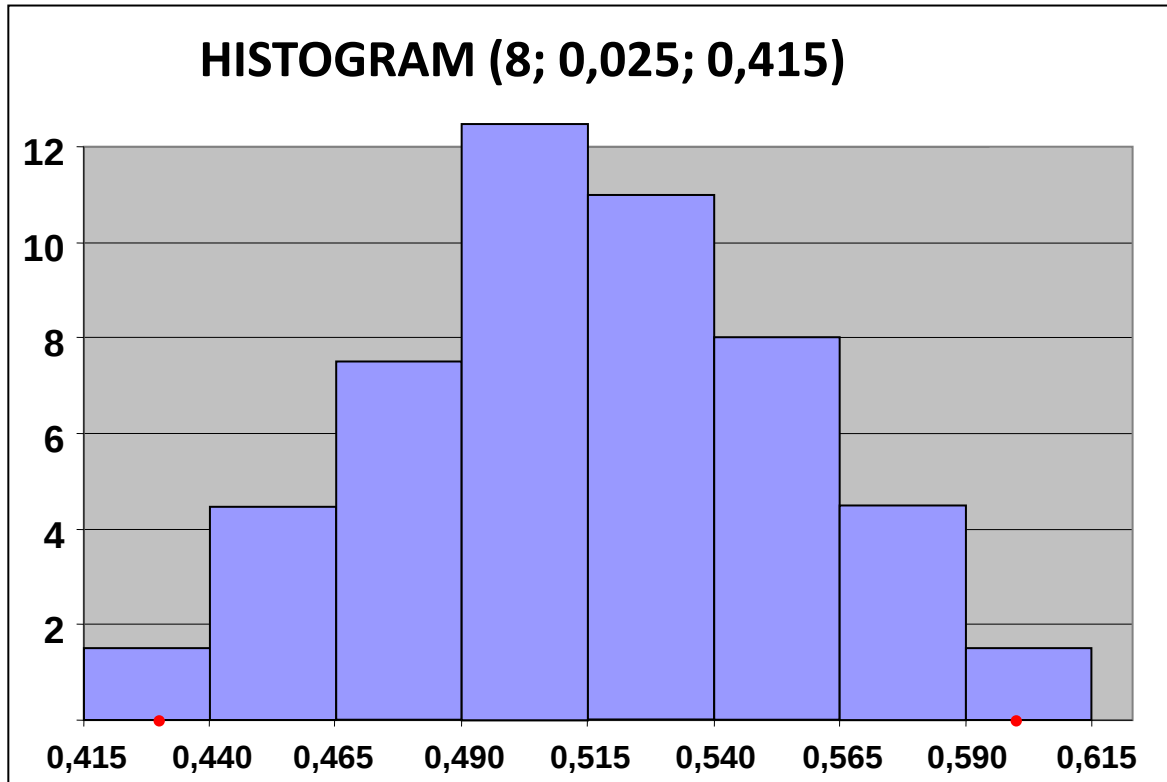
Histogramy sporządzone dla zbioru danych zadania 2.1:

a) $k = 9$, $b = 0,02$ oraz $X_{\min} = 0,425$;

b) $k = 6$, $b = 0,03$ oraz $X_{\min} = 0,425$

• - położenie wartości granicznych zbioru danych

ZADANIE 2.1 - WYNIKI

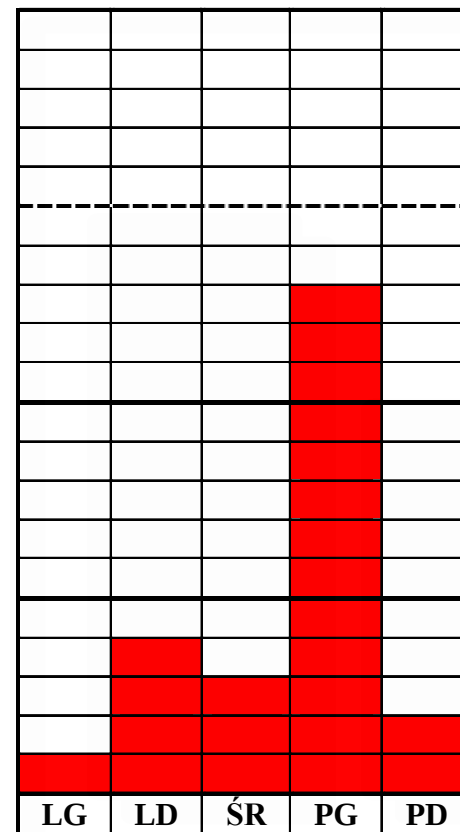
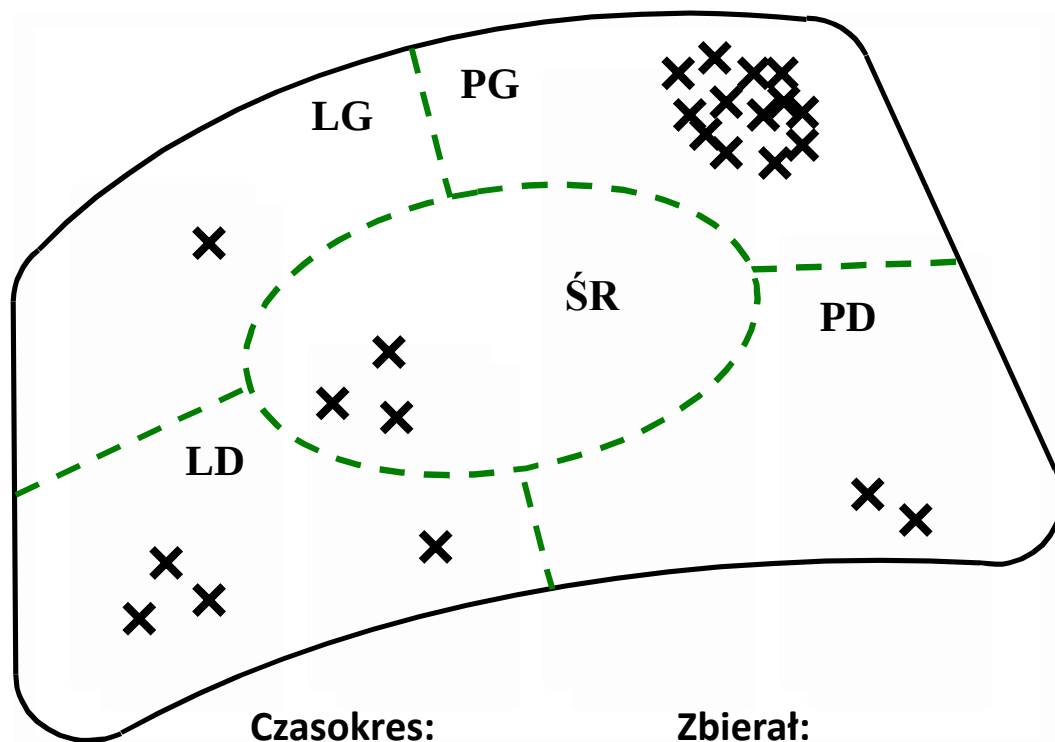


Histogram sporządzony dla zbioru danych zadania 2.1 o parametrach: $k = 8$, $b = 0,025$ oraz $X_{\min} = 0,415$

- - położenie wartości granicznych zbioru danych

ARKUSZ KONTROLNY Z HISTOGRAMEM

Pęknięcia szyby przedniej podczas montażu

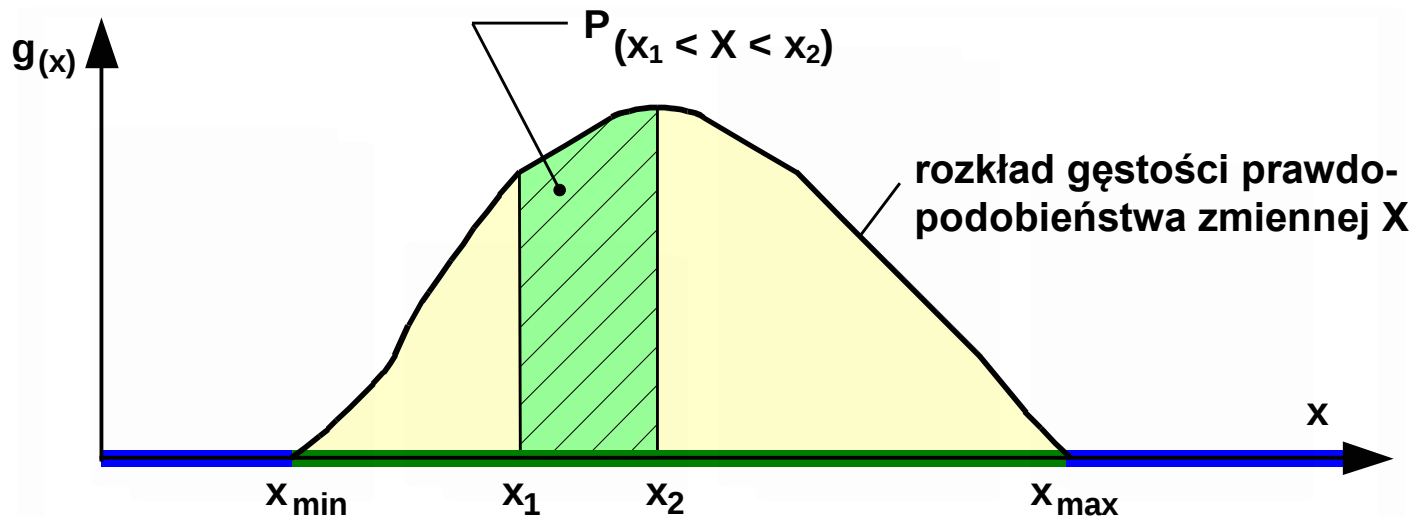


ROZKŁAD GĘSTOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Jeżeli dane dotyczą właściwości, która ma charakter zmiennej losowej ciągłej tj. **zmiennej, która może przyjąć każdą wartość z określonego przedziału zmienności, przy czym poszczególnym wartościom odpowiadają określone prawdopodobieństwa ich wystąpienia**, to do scharakteryzowania tej właściwości używa się tzw. rozkładu.

Rozkład gęstości p-stwa to graniczna postać histogramu, przy liczbie elementów zbioru n i liczbie klas k dążących do nieskończoności oraz szerokości klas b dążącej do zera. Na osi pionowej, zamiast liczności n_i czy częstości n_i / n odkłada się graniczną wartość iloczynu $n_i / (n \cdot b)$ zwaną gęstością prawdopodobieństwa.

PRZYKŁADOWY ROZKŁAD GĘSTOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTWA



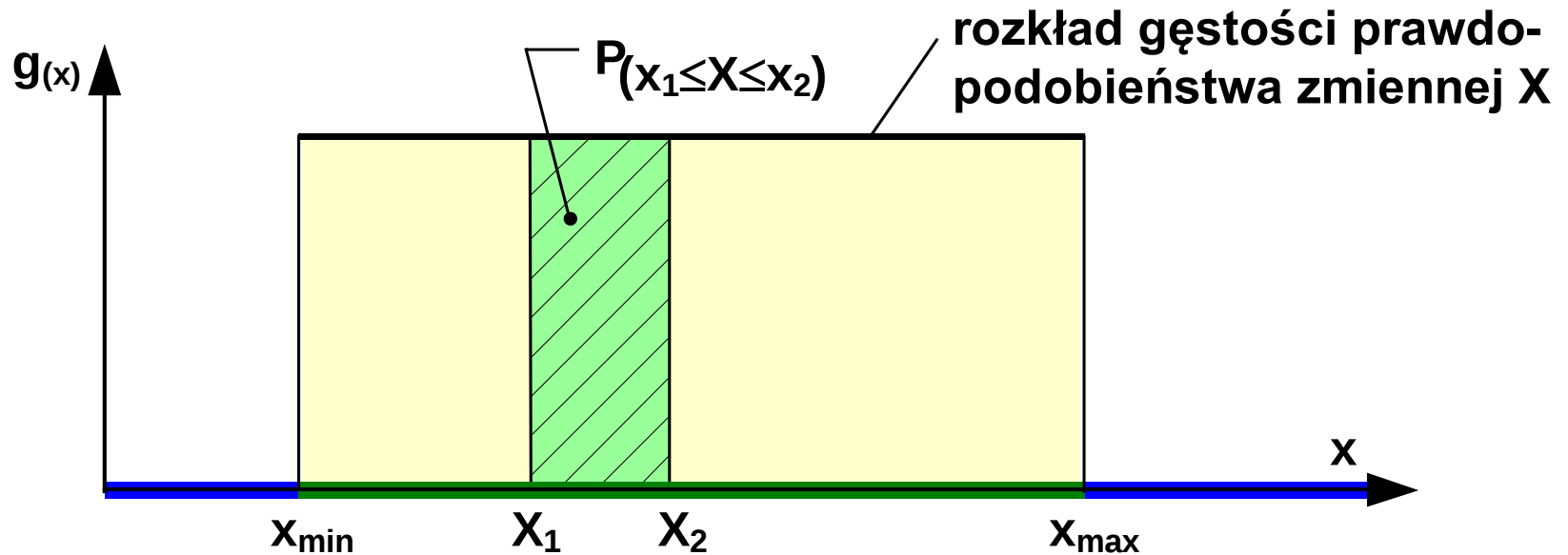
Zakreskowane pole przedstawia prawdopodobieństwo zdarzenia, że zmienna X przyjmie wartość leżącą w przedziale (x_1, x_2)

MODELOWE ROZKŁADY GĘSTOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTWA

W praktyce rzeczywiste rozkłady gęstości prawdopodobieństwa zastępuje się możliwie zbliżonymi rozkładami modelowymi. Do częściej stosowanych rozkładów modelowych należą:

- rozkład równego prawdopodobieństwa;**
- rozkład trójkątny (Simpsona)**
- rozkład trapezowy;**
- rozkład normalny**
- rozkład Studenta**

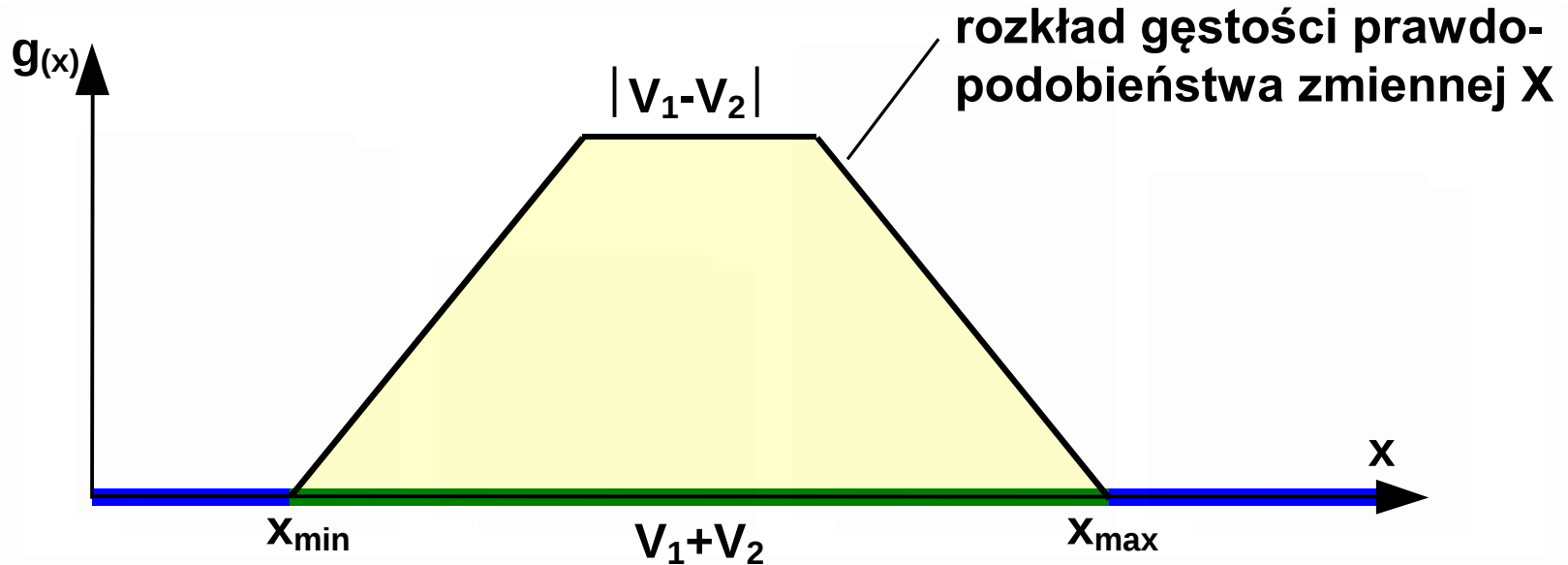
ROZKŁAD RÓWNEGO PRAWDOPODOBIEŃSTWA



Zbiór wartości zawarty pomiędzy $x_{\min}$ i $x_{\max}$ nazywać będziemy obszarem zmienności i oznaczać symbolem V

$$\begin{aligned} P(x_1 \leq X \leq x_2) &= (x_2 - x_1) \cdot g(x) = (x_2 - x_1) \cdot 1 / (x_{\max} - x_{\min}) \\ &= (x_2 - x_1) / (x_{\max} - x_{\min}) = (x_2 - x_1) / V \end{aligned}$$

ROZKŁAD TRAPEZOWY



Rozkład trapezowy posiada zmienna będąca sumą dwóch zmiennych o rozkładach równego prawdopodobieństwa i obszarach zmienności V_1 i V_2 . Jeżeli $V_1 = V_2$ rozkład trapezowy staje się rozkładem trójkątnym

ROZKŁAD NORMALNY

Rozkład normalny jest rozkładem granicznym sumy zmiennych losowych (o dowolnych w zasadzie rozkładach), przy liczbie składników tej sumy dążącej do nieskończoności.

Rozkład normalny należy do najważniejszych rozkładów teoretycznych. Wynika to z faktu, że w praktyce bardzo często występują wielkości, które są sumą (stanowią wypadkowe) wielu innych wielkości o charakterze zmiennych losowych.

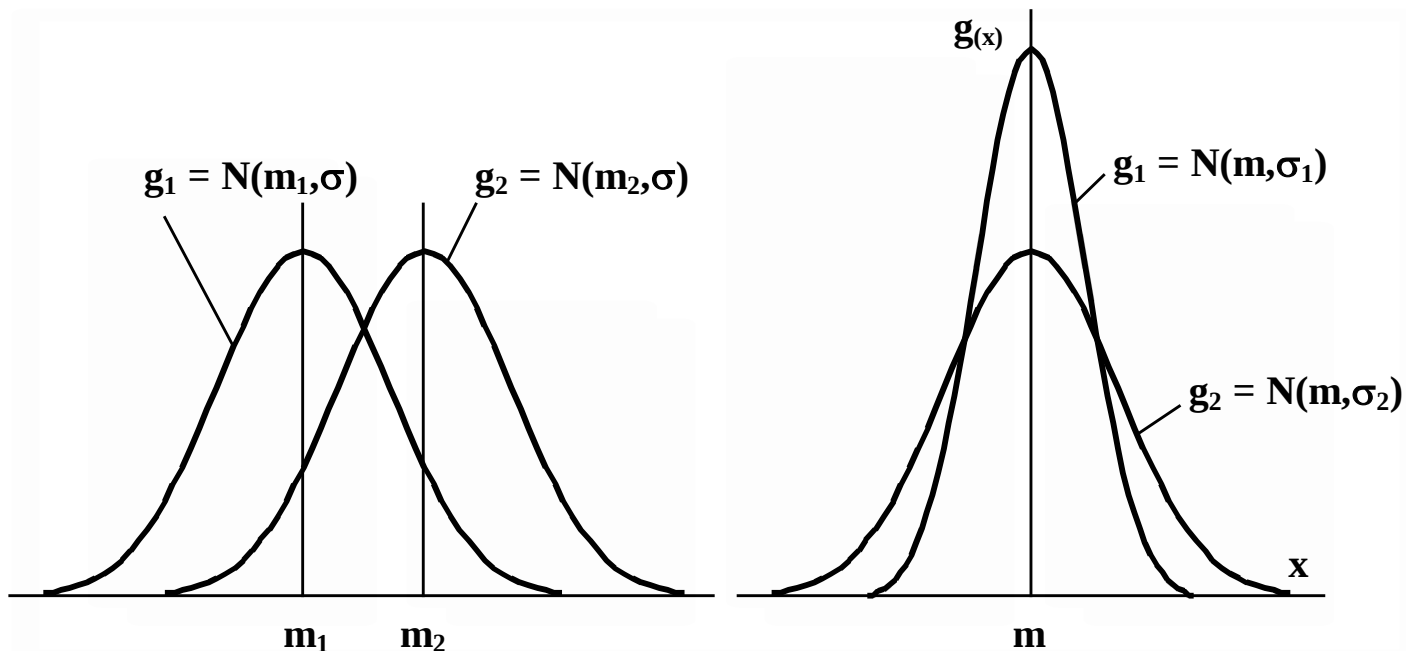
Wielkość, będąca sumą **kilku** wielkości składowych o charakterze zmiennych losowych posiada rozkład zbliżony do rozkładu normalnego.

ROZKŁAD NORMALNY c.d.

Gęstość rozkładu normalnego, zwanego również rozkładem Gauss'a opisuje zależność:

$$g(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-(x-m)^2 / 2 \cdot \sigma^2}$$

gdzie **m** jest miarą położenia zwaną wartością oczekiwaną, a **σ** miarą rozrzutu zwaną odchyleniem standardowym



TYPOWY PROBLEM

Jednym z najbardziej typowych problemów rozwiązywanych w oparciu o znane bądź założone rozkłady gęstości prawdopodobieństwa jest znalezienie odpowiedzi na pytanie: „**jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że zmienna losowa X przyjmie wartość mieszczącą się w określonym przedziale (x_1, x_2) ?**”

Odpowiedź na to pytanie stanowi zależność:

$$P_{(x_1 < X < x_2)} = \int_{x_1}^{x_2} g(x) \cdot dx$$

W przypadku rozkładu równego p-stwa czy trapezowego polichowanie powyższej całki jest stosunkowo proste, natomiast w przypadku rozkładu normalnego obliczenia są bardzo skomplikowane. Z tego względu całka funkcji gęstości rozkładu normalnego została stabelaryzowana. Poza tabelami wyznaczenie wartości tej całki umożliwiają funkcje specjalne arkuszy kalkulacyjnych.

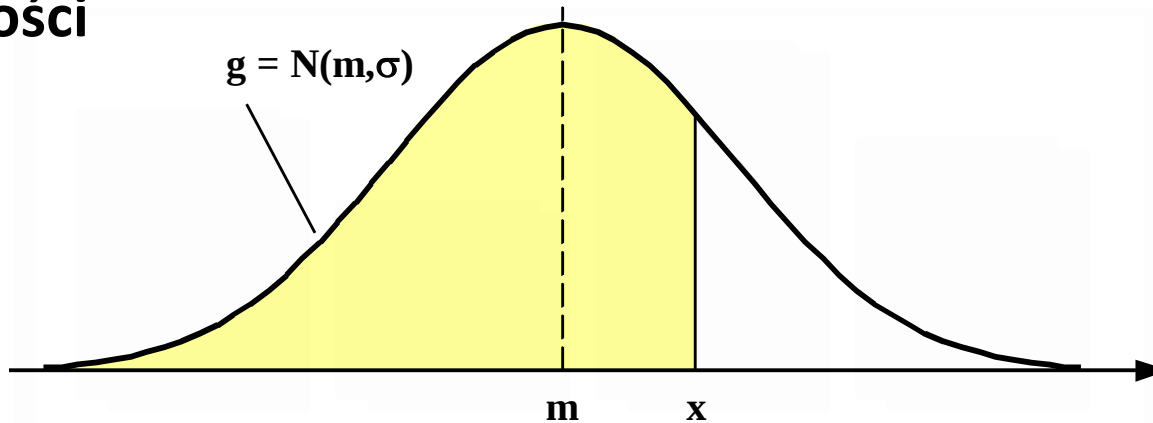
DYSTRYBUANTA

Zarówno tabele statystyczne jak i funkcje specjalne arkuszy kalkulacyjnych wykorzystują pojęcie tzw. **dystybuanty**.

Dystybuantą rozkładu nazywa się funkcję:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x g(x) \cdot dx$$

Wartość dystybuanty jest równa zacienionanemu polu pod krzywą gęstości



ROZKŁAD NORMALNY STANDARYZOWANY

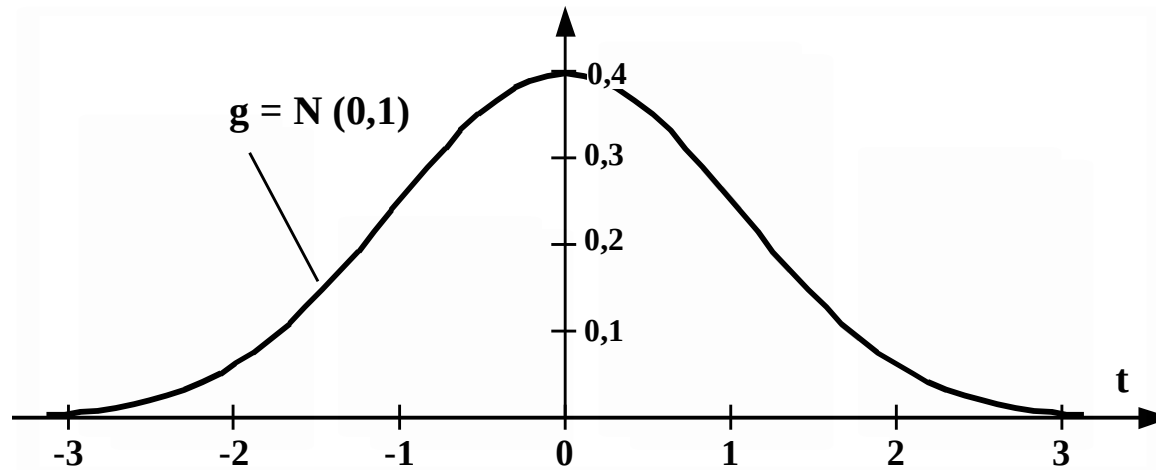
W praktyce mamy do czynienia z różnymi rozkładami normalnymi **(różne wymiary zmiennej X , różne wartości m i σ)**. Wszystkie te rozkłady można sprowadzić do jednej postaci zwanej rozkładem normalnym standaryzowanym

Sprowadzenie dowolnego rozkładu normalnego do postaci standaryzowanej odbywa się poprzez transformację zmiennej X w bezwymiarową zmienną T . Transformacja ta odbywa się zgodnie z zależnością

$$T = \frac{X - m}{\sigma}$$

Rozkład zmiennej T jest rozkładem o parametrach $m = 0$ i $\sigma = 1$. Pokazano go na następnym slajdzie.

ROZKŁAD NORMALNY STANDARYZOWANY



Rozkład standaryzowany mieści się praktycznie w przedziale $(-3, 3)$, a maksymalna wartość jego gęstości wynosi 0,3989. Jest symetryczny względem zera, w związku z czym mamy $F(-t) = 1 - F(t)$. Z tego względu większość tablic statystycznych nie podaje wartości dystrybuanty dla ujemnych wartości zmiennej t .

ROZKŁAD NORMALNY W EXCELU

W Excelu 2010 rozkład normalny obsługują cztery funkcje specjalne, dwie pierwsze dotyczą dowolnego rozkładu, dwie pozostałe rozkładu standaryzowanego

- ◆ **ROZKŁ.NORMALNY(x; m; σ ; skumulowany?)** – zwraca wartość gęstości $g(x)$, gdy w miejsce **skumulowany?** podstawimy zero lub wartość dystrybuanty $F(x)$, gdy w miejsce **skumulowany?** podstawimy 1
- ◆ **ROZKŁ.NORMALNY.ODW(F(x); m; σ)** – zwraca wartość x odpowiadającą dystrybuancie $F(x)$
- ◆ **ROZKŁ.NORMALNY.S(t)** – zwraca wartość dystrybuanty odpowiadającej wartości zmiennej standaryzowanej t
- ◆ **ROZKŁ.NORMALNY.S.ODW(F(t))** – zwraca wartość zmiennej standaryzowanej t odpowiadającą dystrybuancie $F(t)$

TYPOWY PROBLEM – ROZWIĄZANIE W EXCELU

Dane: rozkład normalny o parametrach m i σ , wartości x_1 i x_2

Szukane: prawdopodobieństwo zdarzenia $x_1 \leq X \leq x_2$

Schemat rozwiązania w oparciu o funkcje specjalne Excela:

$$x_i \rightarrow F(x_i) \rightarrow P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

czyli:

$$F(x_1) = \text{ROZKŁ.NORMALNY}(x_1; m; \sigma; 1)$$

$$F(x_2) = \text{ROZKŁ.NORMALNY}(x_2; m; \sigma; 1)$$

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

ROZKŁAD NORMALNY – ZADANIE 2.2

W pewnej fabryce samochodów czas montażu skrzyni biegów posiada rozkład bardzo zbliżony do normalnego o wartości oczekiwanej $m = 83,2$ min i odchyleniu standard. $\sigma = 2,9$ min

- a) jakie jest p-stwo zdarzenia, że losowo wybrana skrzynia była montowana w czasie nie przekraczającym $t_1 = 85$ min?
- b) jakie jest p-stwo zdarzenia, że losowo wybrana skrzynia była montowana w czasie większym niż $t_2 = 1,5$ godziny?
- c) jakie jest p-stwo zdarzenia, że losowo wybrana skrzynia była montowana w czasie t_3 spełniającym warunek $80 \leq t_3 \leq 85$
- d) Dla jakiego czasu t prawdopodobieństwo, że skrzynia zostanie zmontowana w czasie dłuższym wynosi $p_1 = 25\%$?
- e) Wyznaczyć przedział wartości, w którym mieści się $p_2 = 50\%$ środkowych czasów montażu skrzyni;

ZADANIE 2.2 – ROZWIĄZANIE

a) $P(t \leq t_1) = F(t_1) = F(85 \text{ min})$

$$F(85 \text{ min}) = \text{ROZKŁAD.NORMALNY}(X; m; \sigma; 1) = \\ = \text{ROZKŁAD.NORMALNY}(85, 83,2; 2,9; 1) = 0,7326 = 73,26\%$$

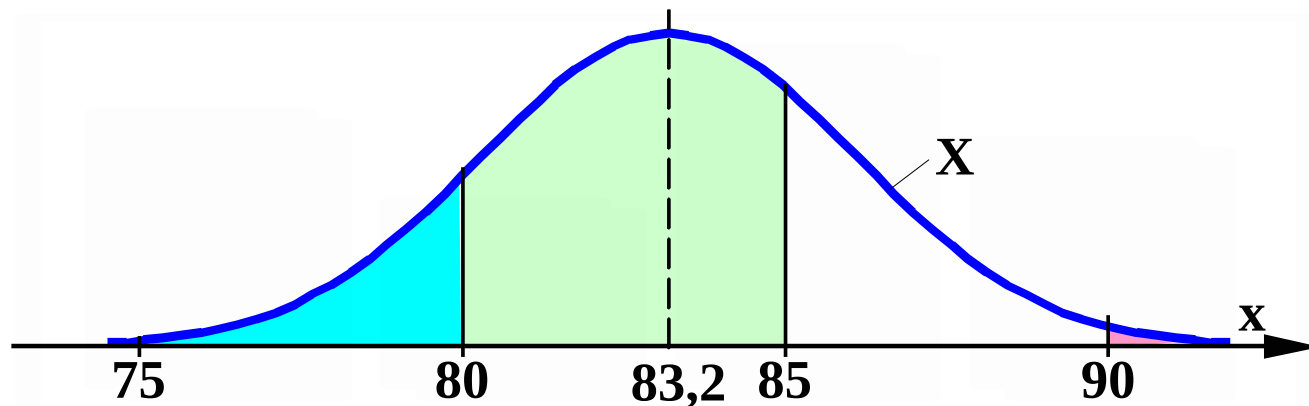
b) $P(t > t_2) = 1 - P(t \leq t_2) = 1 - F(t_2) = 1 - F(90 \text{ min})$

$$F(90 \text{ min}) = \text{ROZKŁAD.NORMALNY}(90, 83,2; 2,9; 1) = \\ = 0,990482 \approx 99,05\%$$

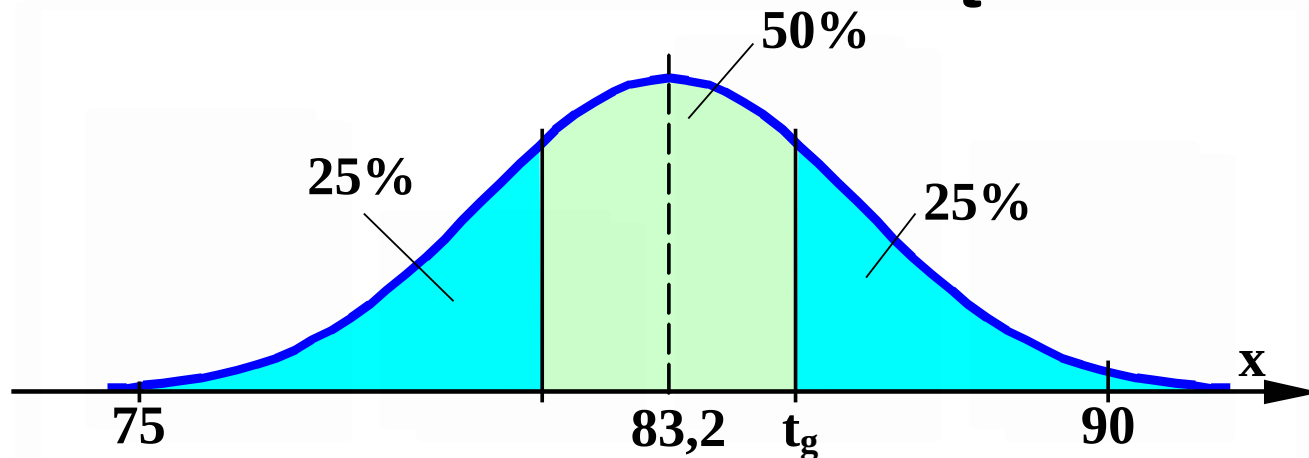
$$P(t > 90 \text{ min}) = 1 - F(90 \text{ min}) = 1 - 0,990482 = 0,009518 \approx 0,95\%$$

c) $P(80 \text{ min} \leq t \leq 85 \text{ min}) = F(85 \text{ min}) - F(80 \text{ min}) =$

$$\text{ROZKŁAD.NORMALNY}(85, 83,2; 2,9; 1) - \\ \text{ROZKŁAD.NORMALNY}(80, 83,2; 2,9; 1) = 0,597682 \approx 59,77\%$$



ZADANIE 2.2 – ROZWIĄZANIE



d) Oznaczmy szukany czas przez t_g . W takim razie

$$P(t > t_g) = 1 - P(t \leq t_g) = 1 - F(t_g)$$

$$1 - F(t_g) = 25\% = 0,25 \Rightarrow F(t_g) = 0,75 \quad \text{oraz} \quad t_g = F^{-1}(0,75)$$

$$t_g = \text{ROZKŁAD.NORMALNY.ODW}(0,75; 83,2; 2,9) = 85,16$$

e) 50% środkowych czasów montażu skrzyni otrzymamy po odrzuceniu 25% czasów krótszych i 25% czasów dłuższych

$$t_p = \text{ROZKŁAD.NORMALNY.ODW}(0,25; 83,2; 2,9) = 81,24$$

$$t_k = \text{ROZKŁAD.NORMALNY.ODW}(0,75; 83,2; 2,9) = 85,16$$

$$81,24 \text{ min} \leq t \leq 85,16 \text{ min}$$

ROZKŁAD STUDENTA

Rozkład Studenta jest to rozkład zmiennej losowej określonej zależnością:

$$T = \frac{\bar{x} - m}{s_e} \cdot \sqrt{n}$$

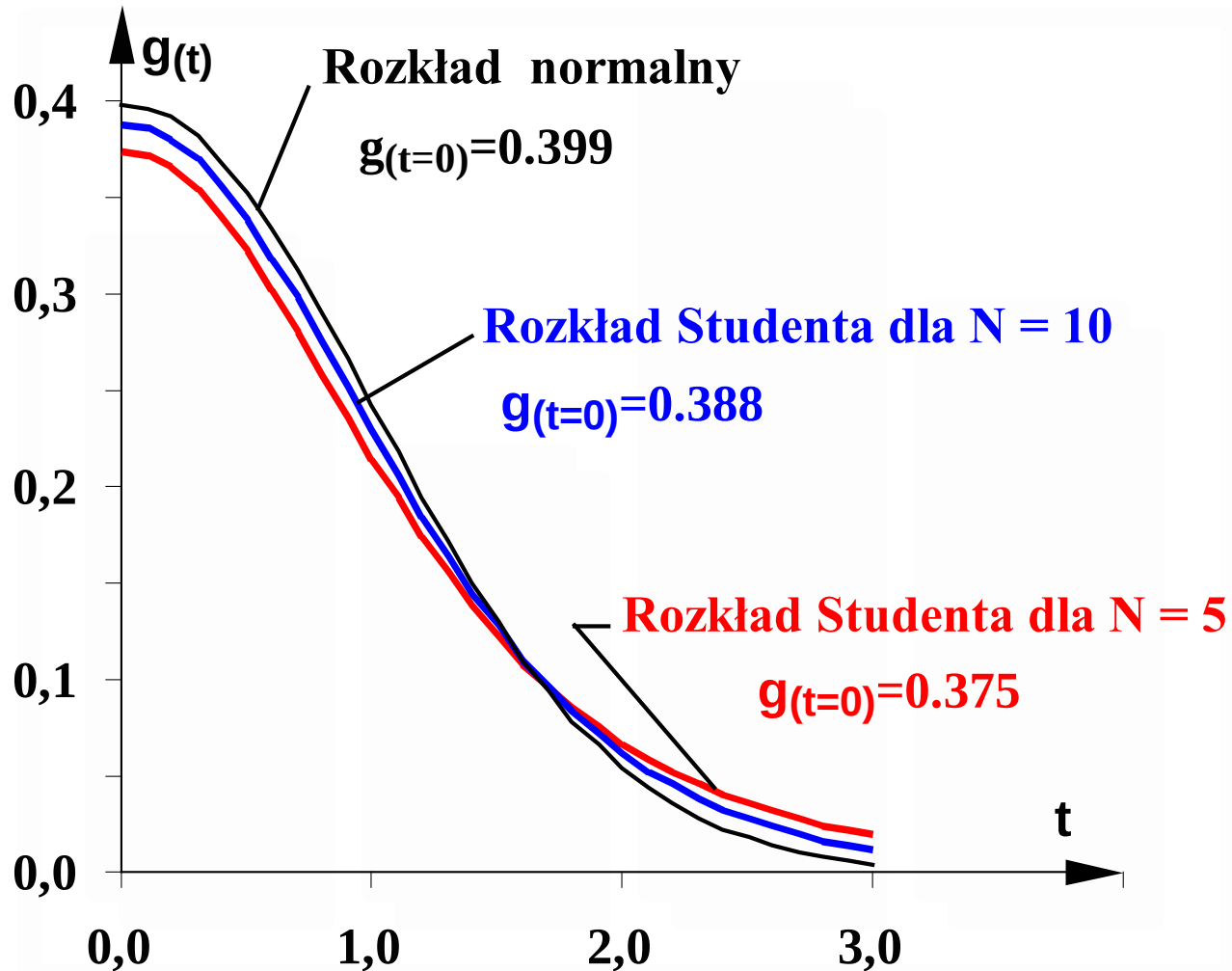
Bezwymiarowa zmienna T wiąże nieznaną wartość oczekiwaną m zmiennej losowej X o rozkładzie normalnym, ze zmiennymi losowymi $\bar{x}$ i s_e określonymi na podstawie wyników badań próbki o liczności n .

Rozkład Studenta umożliwia oszacowanie wartości oczekiwanej m zmiennej losowej X na podstawie wartości tej zmiennej w stosunkowo małej próbce ($n \geq 5$)

ROZKŁAD STUDENTA c.d.

Funkcja gęstości rozkładu Studenta ma bardzo skomplikowaną postać analityczną, z której w praktyce raczej się nie korzysta. Wykres tej funkcji (następny slajd) jest podobny do wykresu gęstości rozkładu normalnego standaryzowanego, z tą różnicą, że krzywa rozkładu Studenta jest nieco bardziej spłaszczona. Wielkość tego spłaszczenia zależy od liczności n próby, którą reprezentują zmienne $\bar{x}$ i s_e . Im większa liczność tej próby, tym rozkład Studenta jest bardziej podobny do rozkładu normalnego i zdaniem wielu autorów przy $N > 30$ różnice pomiędzy obu rozkładami można uznać za mało istotne.

ROZKŁAD STUDENTA - WYKRES



ROZKŁAD STUDENTA W EXCELU

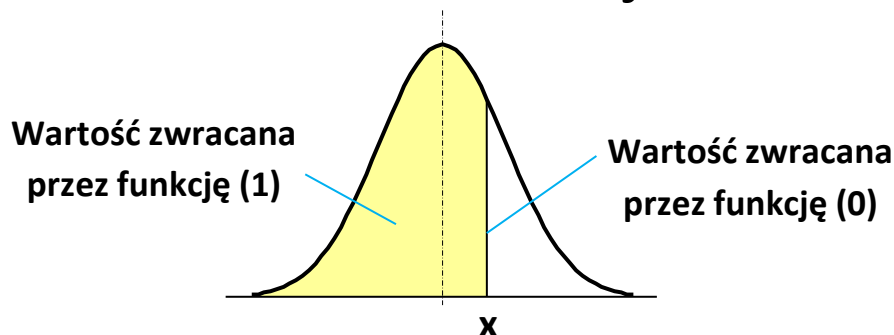
W Excelu 2010 rozkład Studenta obsługują dwie funkcje specjalne:

◆ **ROZKŁ.T (x; stopnie_swobody; skumulowany?)**

gdzie: **x** – wartość zmiennej T;

stopnie swobody – liczebność próbki pomniejszona o jeden;

skumulowany? – pytanie, co ma zwrócić funkcja: po wprowadzeniu wartości 0 funkcja zwraca wartość gęstości, a po wprowadzeniu wartości 1 funkcja zwraca wartość dystrybuanty;



◆ **ROZKŁ.T.ODWR(F(x); stopnie_swobody)** –

zwraca wartość **x** odpowiadającą wprowadzonej wartości dystrybuanty $F(x) = P(T \leq x)$

ZADANIE 2.2B

Na podstawie przeprowadzonej analizy założono, że pewna cecha populacji (oznaczymy ją X) powinna posiadać rozkład normalny. Z populacji tej pobrano 10-elementową próbkę i pomierzono wartości cechy X w kolejnych elementach. Uzyskano następujące wyniki:

20; 24; 25; 26; 24; 22; 25; 27; 23; 24;

W oparciu o uzyskane wyniki określić przedział wartości, w którym z prawdopodobieństwem $p = 95\%$ mieści się wartość oczekiwana m cechy X populacji.

Rozwiązanie

Dane: $x_1 \div x_{10}$; $p(m_1 < m < m_2) = 95\% = 0,95$; $k = 10$;

Szukane: $m_1 = ?$; $m_2 = ?$;

ZADANIE 2.2B – ROZWIĄZANIE

Nieznana wartość oczekiwaną m zmiennej losowej X wiąże z parametrami próbki bezwymiarowa zmienna losowa T , która posiada rozkład Studenta o $k = n - 1$ stopni swobody

Warunek $m_1 < m < m_2$ przekształcamy do równoważnej mu postaci:

Oznaczając
$$\frac{\bar{x} - m_2}{s_e} \cdot \sqrt{n} < \frac{\bar{x} - m}{s_e} \cdot \sqrt{n} < \frac{\bar{x} - m_1}{s_e} \cdot \sqrt{n}$$

$$\frac{\bar{x} - m_2}{s_e} \cdot \sqrt{n} = x_1; \quad \frac{\bar{x} - m}{s_e} \cdot \sqrt{n} = T; \quad \frac{\bar{x} - m_1}{s_e} \cdot \sqrt{n} = x_2$$

dostaniemy: $p(m_1 < m < m_2) = p(x_1 < T < x_2) = 0,95$;

gdzie T oznacza zmienną losową posiadającą rozkład Studenta;

Równanie $p(x_1 < T < x_2) = 0,95$ posiada nieskończenie wiele rozwiązań, dlatego należy wprowadzić dodatkowy warunek dotyczący wartości x_1 i x_2

ZADANIE 2.2B – ROZWIĄZANIE c.d.

Zakładamy, że wartości x_1 i x_2 leżą symetrycznie względem zera, czyli że $x_1 = -x_2$.

Prawdopodobieństwo

$$p(x_1 < T < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = 0,95$$

Ze względu na symetrię krzywej rozkładu mamy:

$$F(x_1) = F(-x_2) = 1 - F(x_2), \text{ czyli}$$

$$p(x_1 < T < x_2) = F(x_2) - (1 - F(x_2)) = 0,95$$

$$\text{skąd } F(x_2) = (1 + 0,95)/2 = 0,975$$

Rozwiązując powyższe równanie w oparciu o tablice statystyczne lub funkcje Excela dostajemy $x_2 = 2,262$

Znając wartość x_2 możemy obliczyć interesujące nas wartości m_1 i m_2

$$m_1 = \bar{x} - \frac{x_2 \cdot s_e}{\sqrt{n}} \quad \text{oraz} \quad m_2 = \bar{x} + \frac{x_2 \cdot s_e}{\sqrt{n}}$$

ZADANIE 2.2B – ROZWIĄZANIE W EXCELU

1. Wprowadzamy dane $x_1 \div x_{10}$ do kolumny A
2. Wprowadzamy licznosc próbki do komórki C1

$$C1 = \text{ILE.NIEPUSTYCH}(A:A) \quad (10)$$

3. Wprowadzamy prawdopodobieństwo $p(x_1 < T < x_2)$ do C2

$$C2 = p(x_1 < T < x_2) = 0,95 \quad (0,95)$$

4. Obliczamy średnią arytmetyczną cechy X w próbce

$$C3 = \text{ŚREDNIA}(A:A) \quad (24,00)$$

5. Obliczamy estymator odchylenia standardowego populacji

$$C4 = \text{ODCH.STANDARDOWE}(A:A) \quad (2,00)$$

6. Obliczamy prawdopodobieństwo $p(T \leq x_2)$

$$C5 = (1 + C2)/2 \quad (0,975)$$

ZADANIE 2.2B – ROZWIĄZANIE W EXCELU

7. Obliczamy wartość graniczną x_2 zmiennej T (C6)

$$C6 = \text{ROZKŁ.T.ODWR}(C5; C1-1) \quad (2,262)$$

8. Obliczamy granice przedziału, w którym z prawdopodobieństwem p zawarta jest nieznana wartość m (x_1 i x_2)

$$m_1 = C7 = C3 - C6 \cdot C4 / \text{pierwiastek}(C1) \quad (22,57)$$

$$m_2 = C8 = C3 + C6 \cdot C4 / \text{pierwiastek}(C1) \quad (25,43)$$

I ostatecznie mamy:

$$22,57 < m < 25,43$$

ZMIENNE LOSOWE SKOKOWE 1/2

Zmiennymi losowymi skokowymi nazywamy takie zmienne, które mają **skończony zbiór wartości**.

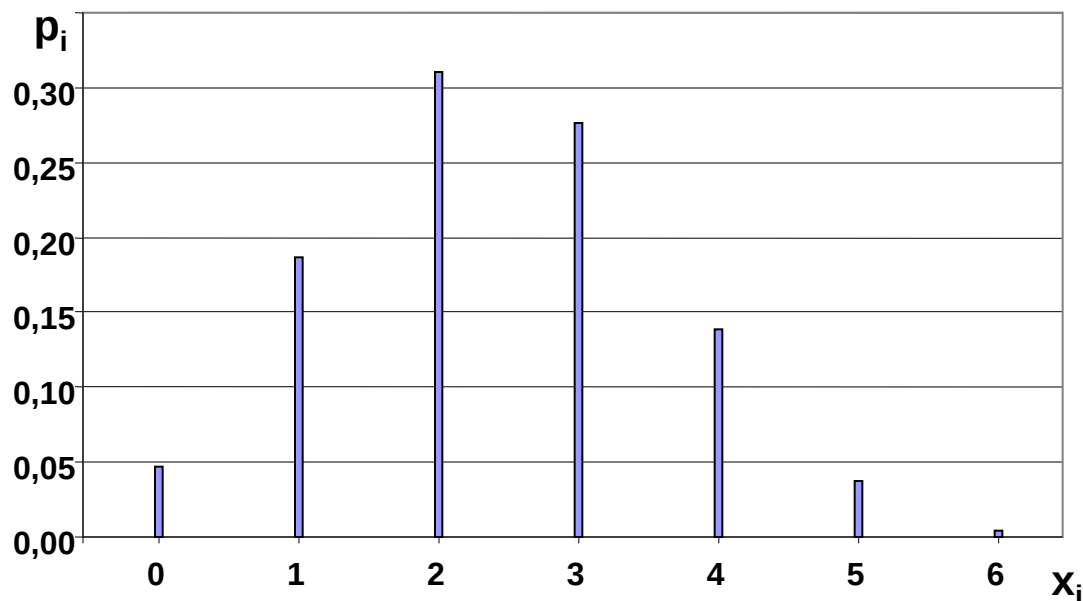
Skończony zbiór wartości oznacza, że zmienne losowe skokowe mogą przyjmować tylko niektóre wartości liczbowe (np. wartości liczb naturalnych).

Przykłady zmiennych losowych skokowych:

- wydajność pracy mierzona liczbą sztuk wyrobów na zmianę;
- liczba egzemplarzy wadliwych w partii wyrobów;
- liczba eksperymentów zakończonych wynikiem pozytywnym;

ZMIENNE LOSOWE SKOKOWE 2/2

Zmienna losowa skokowa może przybierać wartości $x_1, x_2, \dots, x_i$ odpowiednio z prawdopodobieństwem $p_1, p_2, \dots, p_i$. Zbiór $\{x_i, p_i\}$ określa rozkład tej zmiennej.



Dystrybuantę zmiennej losowej skokowej X określa zależność:

$$F(x) = P(X \leq x); \quad \text{przy czym } 0 \leq F(x) \leq 1$$

ROZKŁAD ZERO - JEDYNKOWY

Rozkład zero – jedynkowy charakteryzuje zmienną, która może być tylko w jednym z dwóch stanów, przy czym każdemu z tych stanów odpowiada określone i stałe prawd-stwo zaistnienia.

Zdarzenie polegające na tym, że zmienna losowa osiągnie wybrany stan określane jest sukcesem i przypisywana jest mu wartość jeden. Zdarzenie przeciwne określane jest niepowodzeniem i przypisywana jest mu wartość równa zero. Jeżeli prawd-stwo sukcesu wynosi p to prawd-stwo niepowodzenia $q = 1 - p$

Przykłady:

rzut monetą: sukces=orzeł ($p = 0,5$)
niepowodzenie= reszka ($q = 0,5$)

rzut kością: sukces= wyrzucenie jedynki ($p=1/6$),
niepowodzenie= wyrzucenie innej liczby ($q=5/6$)

ROZKŁAD DWUMIANOWY

Rozkład dwumianowy opisuje liczbę sukcesów osiągniętych w trakcie realizacji n niezależnych prób, z których każda ma jednakowe prawdopodobieństwo osiągnięcia sukcesu równe p .

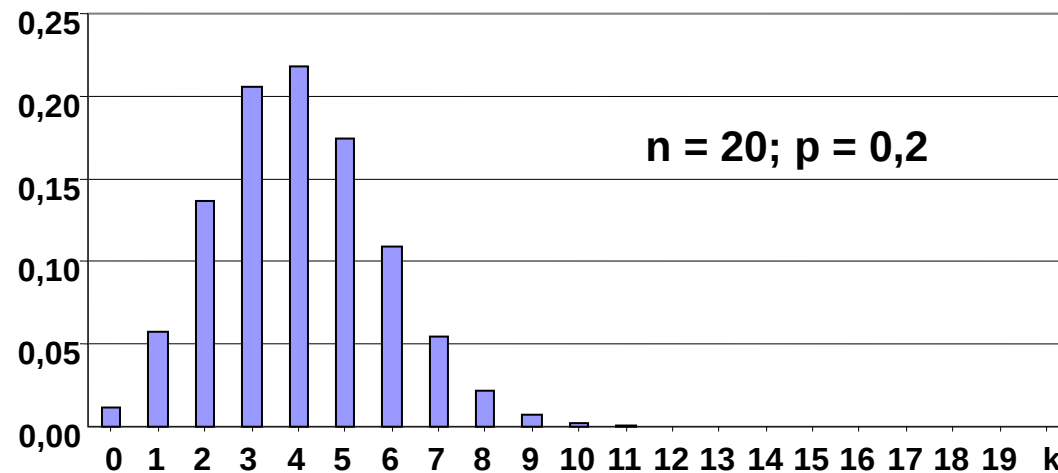
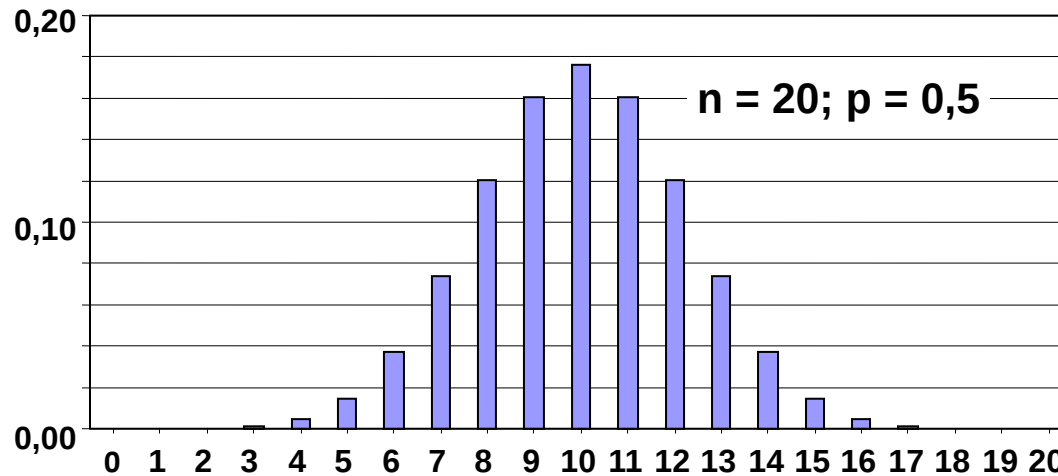
Inaczej rzecz ujmując można powiedzieć, że rozkład dwumianowy jest rozkładem zmiennej będącej sumą n niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie zero-jedynkowym.

Rozkład dwumianowy opisuje zależność:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1 - p)^{n-k}$$

gdzie: k – liczba sukcesów; n – liczba prób; p – prawdopodobieństwo osiągnięcia sukcesu w pojedynczej próbie

ROZKŁAD DWUMIANOWY- PRZYKŁADY



Przykładowe rozkłady dwumianowe dla $n = 20$ i różnych p

ROZKŁAD DWUMIANOWY W EXCELU

W Excelu 2010 rozkład dwumianowy obsługują trzy funkcje specjalne: `ROZKŁ.DWUM()`, `ROZKŁ.DWUM.ODWR()` oraz `ROZKŁ.DWUM.PRZEC()`. Do rozwiązywania problemów omawianych w ramach niniejszego kursu wykorzystywać będziemy tylko pierwszą z nich.

♦ **ROZKŁ.DWUM(k; n; p; skumulowany?)**

gdzie: k – liczba sukcesów

n – liczba prób;

p – praw-stwo sukcesu w pojedynczej próbie

Funkcja zwraca wartość prawdopodobieństwa $P(X=k)$, gdy w miejsce **skumulowany** podstawimy zero lub wartość dystrybuanty $F(k)$, gdy w miejsce **skumulowany** podstawimy 1

ROZKŁAD DWUMIANOWY – ZADANIE 2.3

W dużej partii występuje 20% sztuk wadliwych. Pobrano próbę liczącą 20 sztuk. Procedura kontrolna przewiduje zaakceptowanie partii wyrobów, gdy nie więcej niż 2 sztuki okażą się wadliwe. Jakie jest prawdopodobieństwo, że partia wyrobów nie zostanie zaakceptowana?

Rozwiązanie

Jeśli sukcesem jest ocena, że kontrolowana sztuka jest wadliwa to p-stwo odrzucenia partii: $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2)$

$$F(2) = \text{ROZKŁ.DWUM}(2; 20; 0,2; 1) = 0,206085$$

$$P(X \geq 3) = 1 - 0,206085 = 0,793915 \approx 79,4\%$$

Jeśli sukcesem jest ocena, że kontrolowana sztuka jest poprawna, to p-stwo odrzucenia partii: $P(X \leq 17) = F(17)$

$$F(17) = \text{ROZKŁ.DWUM}(17; 20; 0,8; 1) = 0,793915 \approx 79,4\%$$

ROZKŁAD DWUMIANOWY – ZADANIA 2.4

A. Partia dostarczanych detali ma wadliwość 5%. Niech zmienną losową będzie liczba dobrych detali spośród czterech dostarczonych. Obliczyć prawdopodobieństwo, że dostarczono co najmniej dwa detale dobre. $P = 0,9995 = 99,95\%$

B. Wadliwość procesu produkcyjnego wynosi 10%. Obliczyć prawdopodobieństwo, że na osiem wylosowanych produktów będą co najwyżej dwa złe. $P = 0,9619 = 96,19\%$

C. W stawie hodowlanym są dwa gatunki ryb w proporcji 8:2. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród dziesięciu złowionych ryb będzie co najmniej siedem ryb liczniejszego gatunku. $P = 0,8791 = 87,91\%$

D. Przyjmując, że co czwarte wezwanie pogotowia jest nieuzasadnione określić prawdopodobieństwo, że na osiem wyjazdów co najmniej połowa z nich będzie uzasadniona. $P = 0,9727 = 97,27\%$

ROZKŁAD POISSON'A

Rozkład Poisson'a jest rozkładem zmiennej losowej dyskretnej.

Opisuje go zależność:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

Zmienna losowa X jest interpretowana jako liczba zdarzeń zachodzących losowo w określonym obszarze (np. w określonym przedziale czasu, na określonej długości, na określonej powierzchni, w określonej przestrzeni, w określonej liczbie prób, itp.)

Aby zmienna X posiadała rozkład Poisson'a powinny być spełnione następujące warunki:

- gęstość prawdopodobieństwa wystąpienia zdarzenia dla każdego punktu obszaru powinna być jednakowa;
- poszczególne zdarzenia powinny być wzajemnie niezależne;

Rozkład Poisson'a jest określony za pomocą jednego parametru λ , który jest wartością oczekiwaną liczby zdarzeń w obszarze.

ROZKŁAD POISSONA c.d.

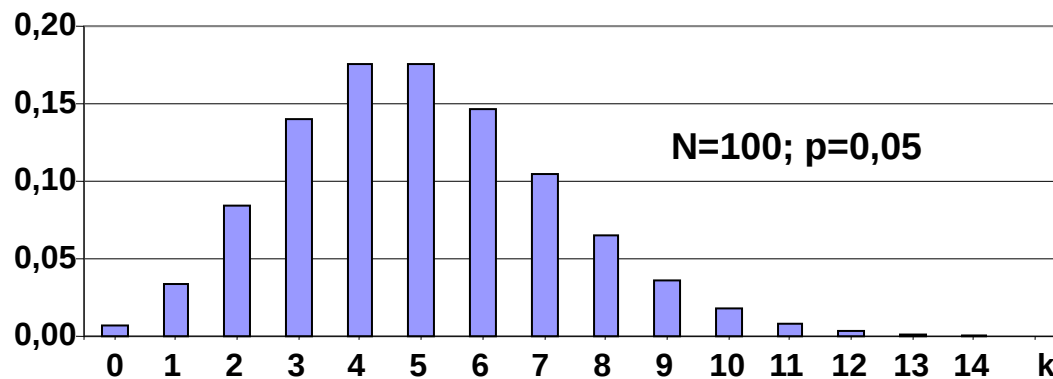
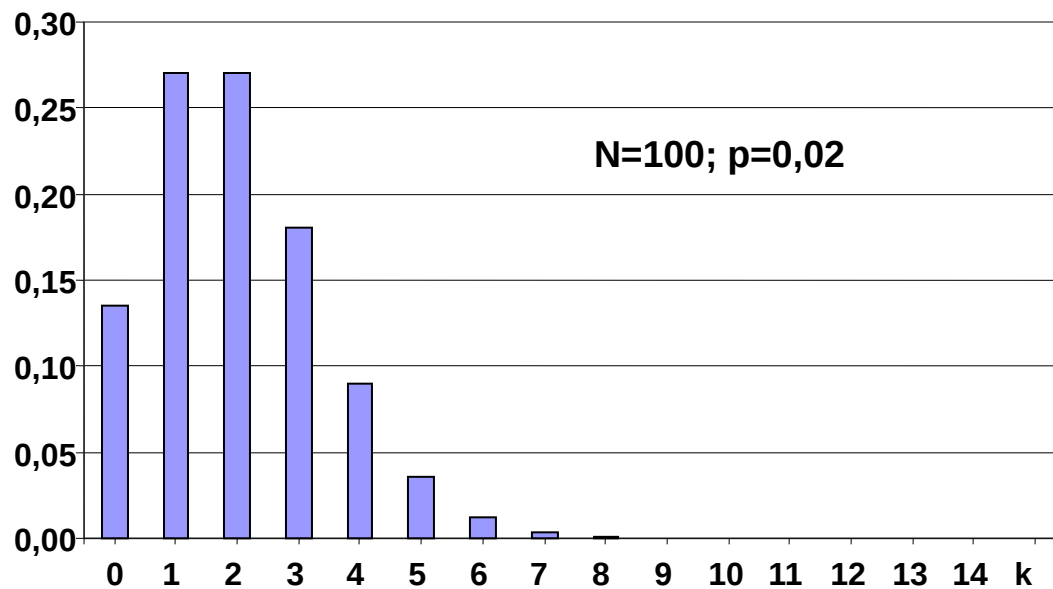
Rozkład Poisson'a jest rozkładem granicznym, do którego dąży rozkład dwumianowy, gdy n rośnie, p maleje a $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot p) = \lambda > 0$

(uważa się, że rozkład Poisson'a dostatecznie przybliża rozkład dwumianowy, gdy $p \leq 0,1$; $n \geq 100$ oraz $\lambda \in \langle 0,1;10 \rangle$)

W związku z powyższym rozkład Poisson'a był w przeszłości używany do uzyskiwania przybliżonych wyników obliczeń, które należało prowadzić w oparciu o rozkład dwumianowy, ale były z tym kłopoty z powodu dużych n (brak odpowiednich tablic statystycznych). Obecnie, w dobie powszechnej komputeryzacji i łatwego dostępu do odpowiedniego oprogramowania (np. Excel'a) ta funkcja rozkładu Poisson'a straciła swe znaczenie.

(wykorzystanie rozkładu Poisson'a do przybliżonych obliczeń w przypadku zmiennych o rozkładzie dwumianowym pokazano w zadaniach 2.5 i 2.6A)

ROZKŁAD POISSONA - PRZYKŁADY



ROZKŁAD POISSONA W EXCELU

W Excelu rozkład Poissona obsługuje funkcja specjalna: **ROZKŁAD.POISSON (k; λ ; skumulowany?)**, gdzie:

k – liczba zdarzeń w określonym obszarze;

λ – wartość oczekiwana liczby zdarzeń w obszarze; w przypadku, gdy obszarem jest seria prób, λ oznacza oczekiwaną liczbę sukcesów w n próbach ($\lambda = n \cdot p$, gdzie p – prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie)

skumulowany? – pytanie o to, co funkcja ma zwrócić: prawdopodobieństwo $P(X=k)$ czy dystrybuantę $P(X \leq k)$; w przypadku odpowiedzi negatywnej (0) zwraca wartość prawdopodobieństwa, a w przypadku odpowiedzi pozytywnej (1) - wartość dystrybuanty.

ROZKŁAD POISSONA – ZADANIE 2.5

Wadliwość produkowanych uszczelek wynosi 0,75%. Pobrano losowo 200 uszczelek. Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że znaleziono:

- dwie uszczelki wadliwe; $P(X=2)$
- przynajmniej 2 uszczelki wadliwe; $P(X \geq 2)$

Zadanie rozwiązać korzystając z rozkładu Poissona i dwumianowego. Porównać wyniki.

$$P(X=2) = \text{ROZKŁAD.POISSON}(2;1,5;0) = 0,251021 \approx 25,1\%$$

$$P(X=2) = \text{ROZKŁAD.DWUM}(2;200;0,0075;0) = 0,252126 \approx 25,2\%$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(X=1)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - \text{ROZKŁAD.POISSON}(1;1,5;1) = 1 - 0,557825 = 0,442175$$

$$P(X \geq 2) = 1 - \text{ROZKŁAD.DWUM}(1;200;0,0075;1) = 1 - 0,557196 = 0,442804$$

ZADANIE 2.6A 1/2

Wadliwość w partii wynosi 2 %. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wśród 100 losowo pobranych egzemplarzy należących do tej partii znajduje się:

- a) co najmniej 4 egzemplarze wadliwe;
- b) mniej niż 5 egzemplarzy wadliwych;

Rozwiązanie

Sukces = wystąpienie egzemplarza wadliwego; $p = 0,02$

Zmienna losowa X = liczba egzemplarzy wadliwych ma rozkład dwumianowy

- a) $X \geq 4$; $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3)$
 $F(3) = \text{ROZKŁAD.DWUM}(3; 100; 0,02; 1) = 0,85896$
 $P(X \geq 4) = 1 - F(3) = 1 - 0,85896 = 0,14104$
- b) $X < 5$; $P(X < 5) = P(X \leq 4) = F(4)$
 $F(4) = \text{ROZKŁAD.DWUM}(4; 100; 0,02; 1) = 0,94917$
 $P(X < 5) = F(4) = 0,94917$

ZADANIE 2.6A 2/2

Ponieważ $p < 0,1$ i $n = 100$ rozkład dwumianowy można przybliżyć rozkładem Poisson'a

$$\lambda = n \cdot p = 0,02 \cdot 100 = 2$$

a) $X \geq 4$; $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3)$

$$F(3) = \text{ROZKŁAD.POISSON}(3; 2; 1) = 0,85712$$

$$P(X \geq 4) = 1 - F(3) = 1 - 0,85712 = 0,14288$$

b) $X < 5$; $P(X < 5) = P(X \leq 4) = F(4)$

$$F(4) = \text{ROZKŁAD.POISSON}(4; 2; 1) = 0,94735$$

Rodzaj rozkładu:	Uzyskane wyniki	
	a)	b)
dwumianowy	0,14104	0,94917
Poisson'a	0,14288	0,94735

ZADANIE 2.6B

Do stacji benzynowej, zlokalizowanej przy pewnej ruchliwej drodze, przyjeżdżają samochody z częstotliwością określoną rozkładem Poissona ze średnią równą 1 samochód na minutę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu minuty zgłoszą się co najmniej 2 samochody?

Rozwiązanie

Zdarzenie = przyjazd samochodu;

Średnia częstość zdarzeń $g = 1$ przyjazd/min;

Rozpatrywany obszar $V = 1$ min

Oczekiwana liczba zdarzeń w obszarze $\lambda = g \cdot V = (1/\text{min}) \cdot 1 \text{ min} = 1$

Zmienna **$X = \text{ilość przyjazdów}$** posiada rozkład Poissona

Zdarzenie, że w ciągu minuty przyjadą co najmniej 2 samochody jest przeciwne do zdarzenia, że w ciągu minuty przyjedzie mniej niż 2 samochody.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1)$$

$$F(1) = \text{ROZKŁAD.POISSON}(1; 1; 1) = 0,73576$$

$$P(X \geq 2) = 1 - F(1) = 1 - 0,73576 = 0,26424$$

ZADANIE 2.6C

Do stacji benzynowej przyjeżdżają samochody z częstotliwością określoną rozkładem Poisson'a ze średnią równą 1 samochód na minutę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu najbliższych 5-u minut zgłosi się co najmniej 7 samochodów?

Rozwiązanie

Zdarzenie = przyjazd samochodu;

Średnia częstość zdarzeń $g = 1$ przyjazd/min;

Rozpatrywany obszar $V = 5$ min

Oczekiwana liczba zdarzeń w obszarze $\lambda = g \cdot V = (1/\text{min}) \cdot 5 \text{ min} = 5$

Zmienna **$X = \text{ilość przyjazdów}$** posiada rozkład Poissona

Zdarzenie, że w ciągu najbliższych 5-u minut przyjedzie co najmniej 7 samochodów jest przeciwne do zdarzenia, że w ciągu najbliższych 5-u minut przyjedzie mniej niż 7 samochodów.

$$P(X \geq 7) = 1 - P(X < 7) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - F(6)$$

$$F(6) = \text{ROZKŁAD.POISSON}(6; 5; 1) = 0,76218$$

$$P(X \geq 7) = 1 - F(6) = 1 - 0,76218 = 0,23782$$

HIPOTEZA STATYSTYCZNA

Hipotezą statystyczną nazywamy każde przypuszczenie dotyczące określonej właściwości zbiorowości, które można zweryfikować metodami statystycznymi na podstawie wyników badań części tej zbiorowości.

Hipotezy statystyczne mogą dotyczyć:

- wartości badanych zmiennych (np. równości lub różnicy tych wartości);**
- zależności pomiędzy badanymi zmiennymi (np. istnienia lub braku korelacji, postaci zależności, itp.);**
- rozkładów badanych zmiennych;**

Hipotezy weryfikuje się za pomocą odpowiednio dobranych testów statystycznych

TEST STATYSTYCZNY - ETAPY

Test statystyczny składa się najczęściej z następujących etapów:

1. Sformułowanie tezy rzeczowej i ustaleniu hipotez H_0 i H_a ;
2. Wyboru właściwej funkcji testowej (statystyki z próby);
3. Przyjęciu stosownego poziomu istotności α ;
4. Odczytaniu wartości krytycznych w tablicach dystrybuanty właściwego rozkładu i ustaleniu obszaru krytycznego;
5. Obliczeniu wartości funkcji testowej i:
 - odrzuceniu hipotezy zerowej na korzyść hipotezy alternatywnej, gdy wartość ta znajduje się w obszarze krytycznym;
 - nie odrzuceniu hipotezy zerowej, gdy wartość funkcji testowej jest poza obszarem krytycznym;

TEZA RZECZOWA

Teza rzeczowa jest stwierdzeniem dotyczącym najczęściej całej populacji. Precyzuje ona istnienie jakiejś zależności, różnicy, mechanizmu funkcjonowania czy prawdopodobieństwa wystąpienia, a badania próbki (próbek) mają potwierdzić jej prawdziwość.

Weryfikacja statystyczna tezy rzeczowej sprowadza się do sformułowania dwóch hipotez: hipotezy zerowej i hipotezy alternatywnej.

Hipoteza zerowa jest hipotezą, której p-stwo słuszności badamy. Najczęściej jest ona zaprzeczeniem tezy rzeczowej, która w takich przypadkach pokrywa się z hipotezą alternatywną. Odrzucenie hipotezy zerowej ze względu na zbyt małe p-stwo jej słuszności prowadzi do automatycznego uznania słuszności hipotezy alternatywnej (czyli potwierdzenia tezy rzeczowej)

HIPOTEZA ZEROWA

Hipoteza zerowa H_0 polega najczęściej na założeniu, że różnica pomiędzy analizowanymi właściwościami (parametrami, rozkładami, itp.) nie występuje, czyli jest równa zero.

Przykład hipotezy zerowej dotyczącej różnicy wartości parametrów Θ_1 i Θ_2

$$H_0: \Theta_1 = \Theta_2$$

Test statystyczny polega na określeniu prawdopodobieństwa słuszności hipotezy zerowej. Jeśli jest ono mniejsze od przyjętej wartości kryterialnej (tzw. **poziom istotności**) to hipotezę zerową odrzucamy. Jeśli jest większe nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.

Brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej nie świadczy o tym, że jest ona prawdziwa.

HIPOTEZA ALTERNATYWNA

Hipoteza alternatywna H_a jest hipotezą konkurencyjną w stosunku do hipotezy zerowej, najczęściej stanowi jej zaprzeczenie. Nie podlega weryfikacji statystycznej. Jest automatycznie uznawana za słuszną w przypadkach, kiedy hipoteza zerowa jest odrzucana.

Jeżeli hipoteza zerowa jest typu:

$$H_0: \Theta_1 = \Theta_2$$

to hipoteza alternatywna może przyjąć jedną z trzech poniższych postaci:

1) $H_a: \Theta_1 \neq \Theta_2$

2) $H_a: \Theta_1 < \Theta_2$

3) $H_a: \Theta_1 > \Theta_2$

FUNKCJA TESTOWA

Funkcja testowa W służy do oceny prawdopodobieństwa słuszności hipotezy zerowej.

W przypadku hipotez dotyczących wartości badanych zmiennych (**tzw. hipotez parametrycznych**) funkcja testowa posiada najczęściej postać:

$$W = \frac{f(x_1, \dots, x_n) - f_H}{\sigma_{f(x)}}$$

gdzie:

$f(x_1, \dots, x_n)$ - wartość badanej zmiennej w populacji szacowana na podstawie wyników badań elementów próbki $(x_1, \dots, x_n)$;

f_H - wartość badanej zmiennej w populacji przyjęta hipotetycznie

$\sigma_{f(x)}$ - odchylenie standardowe badanej zmiennej oszacowane na podstawie wyników badań próbki;

FUNKCJA TESTOWA c.d.

Argumenty funkcji W – $\{x_1, \dots, x_n\}$ - są wartościami zmiennej losowej X , w związku z czym funkcja W ma również charakter zmiennej losowej.

Funkcję W należy zdefiniować w ten sposób, aby przy założeniu słuszności hipotezy zerowej H_0 można było określić jej rozkład.

Wybór właściwej funkcji testowej jest sprawą bardzo ważną. Niewłaściwa postać funkcji uniemożliwia bowiem wyciągnięcie poprawnych wniosków z przeprowadzonych badań. Należy też zawsze sprawdzić, czy założenia związane z definiowaną funkcją, bądź jej rozkładem są spełnione.

TYPOWE FUNKCJE TESTOWE 1/3

Testowanie hipotezy dotyczącej wartości średniej w populacji.

Zalecana jest funkcja testowa postaci:

$$W = \frac{\bar{x} - m}{s_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - m}{s_x} \cdot \sqrt{n}$$

gdzie:

$\bar{x}$ – średnia arytmetyczna wyników próbki;

m – hipotetycznie przyjęta wartość średnia populacji

$s_{\bar{x}}$ – odchylenie standardowe średniej arytmetycznej

s_x – estymator odchylenia standardowego populacji
szacowany na podstawie wyników badań próbki;

Powyższa funkcja posiada rozkład Studenta o $k = n - 1$ stopni swobody. Dla dużej próby ($n > 30$) można zastąpić go rozkładem normalnym standaryzowanym

TYPOWE FUNKCJE TESTOWE 2/3

Porównanie średnich w dwóch populacjach o takim samym odchyleniu standardowym

Zalecana jest funkcja testowa postaci:

$$W = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{n_1 \cdot s_1^2 + n_2 \cdot s_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

gdzie:

$\bar{x}_1; \bar{x}_2$ – średnie arytmetyczne wyników próbek;

$s_1; s_2$ – odchylenia standardowe próbek;

$n_1; n_2$ – liczności próbek;

Powyższa funkcja posiada rozkład Studenta o $k = n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody.

Przed przystąpieniem do testowania średnich należy sprawdzić słuszność założenia o równości odchyleń standardowych

TYPOWE FUNKCJE TESTOWE 3/3

Porównanie wariancji dwóch populacji: badamy dwie populacje o rozkładzie normalnym $N(m_1, \sigma_1)$ i $N(m_2, \sigma_2)$, przy czym żaden z tych parametrów nie jest znany. Należy sprawdzić hipotezę $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$

Zalecana funkcja testowa ma postać:
$$F = \frac{s_{e,1}^2}{s_{e,2}^2}$$
gdzie:

$s_{e,1}^2; s_{e,2}^2$ – estymatory wariancji populacji obliczone na podstawie wyników badań próbek;

$n_1; n_2$ – liczności próbek;

Jeżeli hipoteza zerowa jest prawdziwa to funkcja F posiada rozkład F-Snedecora z $k_1 = n_1 - 1$ oraz $k_2 = n_2 - 1$ stopniami swobody.

W liczniku należy umieścić większą z wariancji z obu prób

WYNIKI TESTOWANIA

Decyzje związane z testowaniem hipotezy są obarczone ryzykiem popełnienia błędu. Możliwe są cztery przedstawione niżej przypadki:

	↓↓↓ RZECZYWISTOŚĆ ↓↓↓	
↓ WYNIK TESTOWANIA ↓	H_0 jest prawdziwa	H_0 jest fałszywa
ODRZUCENIE $H_0 \rightarrow$	BŁĄD I RODZAJU	DECYZJA SŁUSZNA
NIE ODRZUCENIE $H_0 \rightarrow$	DECYZJA SŁUSZNA	BŁĄD II RODZAJU

Przy testowaniu hipotezy statystycznej można popełnić:

- błąd I rodzaju polegający na odrzuceniu prawdziwej hipotezy zerowej;
- błąd II rodzaju polegający na nie odrzuceniu fałszywej hipotezy zerowej;

POZIOM ISTOTNOŚCI

Jak już wspomniano wcześniej decyzje związane z testowaniem hipotezy są obarczone ryzykiem błędu. Wielkość tego ryzyka zależy od przyjętego poziomu istotności.

Poziom istotności α to maksymalne dopuszczalne prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej w przypadku, gdy jest ona prawdziwa.

Sens przyjętego poziomu istotności (np. $\alpha = 0,05$) jest taki, że godzimy się z sytuacją, iż w każdych stu decyzjach o odrzuceniu hipotezy zerowej będzie średnio pięć decyzji błędnych.

Poziom istotności należy do założeń wstępnych, co oznacza, że należy go przyjąć przed wyznaczeniem obszaru krytycznego i obliczeniem wartości funkcji testowej.

WYBÓR POZIOMU ISTOTNOŚCI

Ustalenie odpowiedniego poziomu istotności nastrocza pewne trudności ponieważ niższa wartość poziomu istotności :

- zwiększa poziom wiarygodności hipotezy alternatywnej (jej przyjęcie jest bardziej uzasadnione);
- utrudnia odrzucenie hipotezy zerowej;

Z powyższego wynika, że występuje konflikt pomiędzy chęcią odrzucenia hipotezy zerowej a chęcią przyjęcia hipotezy alternatywnej z dużą wiarygodnością.

W naukach przyrodniczych i technice przyjmuje się wartość $\alpha = (0,01 \div 0,10)$, najczęściej $\alpha = 0,05$.

OBSZAR KRYTYCZNY

Obszarem krytycznym nazywa się zbiór wartości funkcji testowej, dla których prawdopodobieństwo słuszności hipotezy zerowej jest mniejsze od przyjętego poziomu istotności.

Związek pomiędzy wartością funkcji testowej W , a p -stwem słuszności H_0 wynika z zależności wartości funkcji testowej od różnicy pomiędzy właściwością określoną na podstawie badań próbki a właściwością przyjętą hipotetycznie.

Jeżeli obie właściwości są równe, to różnica pomiędzy nimi wynosi zero i potwierdza słuszność H_0 . Jeżeli pomiędzy porównywanymi właściwościami występuje różnica to może być ona spowodowana naturalnym rozrzutem właściwości próbki lub niesłusznością H_0 .

W miarę wzrostu wartości w/w różnicy maleje szansa na to, że jedyną przyczyną jej wystąpienia jest losowy charakter próbki, czyli rosną wątpliwości dotyczące słuszności H_0 .

OBSZAR KRYTYCZNY c.d.

Jak już wspomniano funkcja testowa **W** jest zmienną losową, której rozkład został określony przy założeniu słuszności hipotezy zerowej. Przyjęcie tego założenia oznacza, że zmienność wartości funkcji testowej spowodowana jest wyłącznie naturalnym rozrzutem właściwości próbki.

Znając rozkład funkcji testowej możemy powiązać wartości funkcji z prawdopodobieństwem ich wystąpienia.

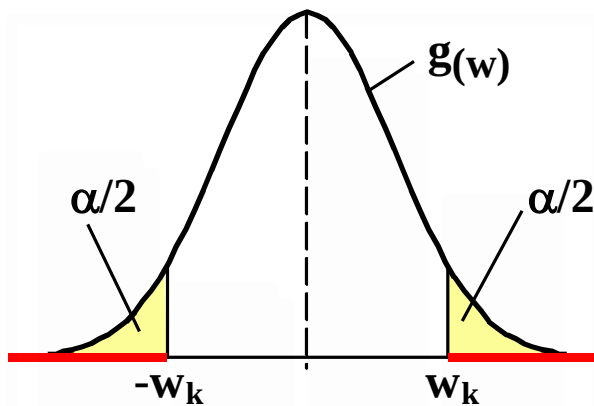
Jeżeli p-stwo wystąpienia jakiejś wartości funkcji testowej jest zbyt małe może to stanowić powód zakwestionowania słuszności hipotezy zerowej.

Kryterium podziału wartości funkcji testowej na dopuszczalne i zbyt mało prawdopodobne stanowi przyjęty wcześniej poziom istotności α .

Obszar krytyczny to zbiór tych wszystkich wartości funkcji testowej, które uznano za zbyt mało prawdopodobne

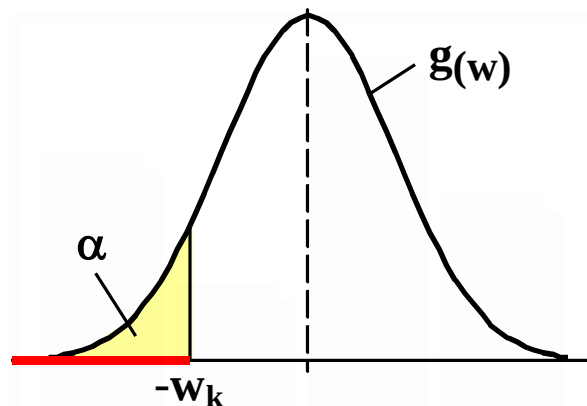
OBSZAR KRYTYCZNY - POŁOŻENIE

Położenie obszaru krytycznego zależy od przyjętego wcześniej poziomu istotności α i postaci hipotezy alternatywnej. Pokazano to na poniższych rysunkach:



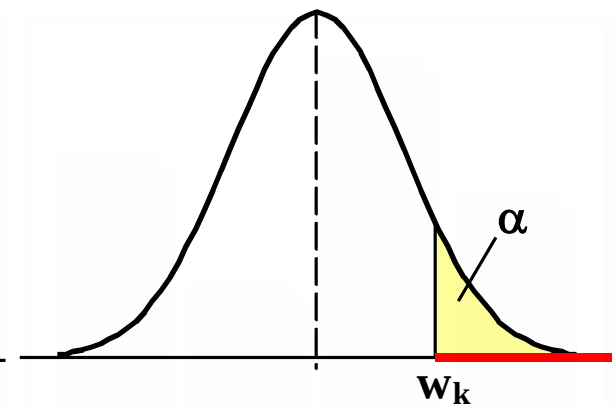
$$H_a : f(x_1, \dots, x_n) \neq f_H$$

$$(-\infty; -w_k) \text{ oraz } (w_k; +\infty)$$



$$H_a : f(x_1, \dots, x_n) < f_H$$

$$(-\infty; -w_k)$$



$$H_a : f(x_1, \dots, x_n) > f_H$$

$$(w_k; +\infty)$$

OCENA SŁUSZNOŚCI HIPOTEZY ZEROWEJ

Na podstawie danych otrzymanych z badań próbki obliczamy wartość funkcji testowej, i:

- jeżeli wartość ta znajduje się w obszarze krytycznym, to hipotezę zerową należy odrzucić; pociąga to za sobą wniosek, że prawdziwa jest hipoteza alternatywna;
- jeżeli wartość ta znajduje się poza obszarem krytycznym nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Wniosek: hipoteza zerowa może, ale nie musi być prawdziwa

Brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej nie jest dowodem jej prawdziwości !!!

Bardziej nowoczesnym, choć wciąż rzadko spotykanym podejściem jest obliczenie i podanie jako wyniku weryfikacji prawdopodobieństwa popełnienia błędu I-go rodzaju.

TEST STATYSTYCZNY – ZADANIE 2.7

Automat ma produkować blaszki o długości nominalnej 0,6mm. W ramach okresowej kontroli poprawności procesu wylosowano do sprawdzenia 45 blaszek i pomierzono ich długość. Uzyskano $\bar{x} = 0,59 \text{ mm}$ oraz $s_x^2 = 0,05 \text{ mm}^2$. Wariancja próbki nie budzi zastrzeżeń. Zakładając, że rozkład długości produkowanych blaszek jest normalny sprawdzić, czy nastawę długości płytki można uznać za właściwą, czy też należy ją skorygować.

Rozwiązanie

Przyjmujemy hipotezę zerową, że średnia populacji $m=0,6\text{mm}$. Hipoteza alternatywna $H_0: m \neq 0,6\text{mm}$ (**potrzebna regulacja**).

Przyjmujemy poziom istotności. W technice typowa wartość tego współczynnika wynosi 0,05.

Przyjmujemy funkcję testową i obliczamy jej wartość:

ROZWIĄZANIE ZADANIA 2.7

$$W = \frac{\bar{x} - m}{s_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - m}{s_x} \cdot \sqrt{n} = \frac{0,59 \cdot \text{mm} - 0,6 \cdot \text{mm}}{\sqrt{0,05 \cdot \text{mm}}} \cdot \sqrt{45} = 0,30$$

Wyznaczamy obszary krytyczne. Ponieważ nasza funkcja testowa posiada rozkład Studenta o $k=n-1 = 45-1 = 44$ stopniach swobody, więc

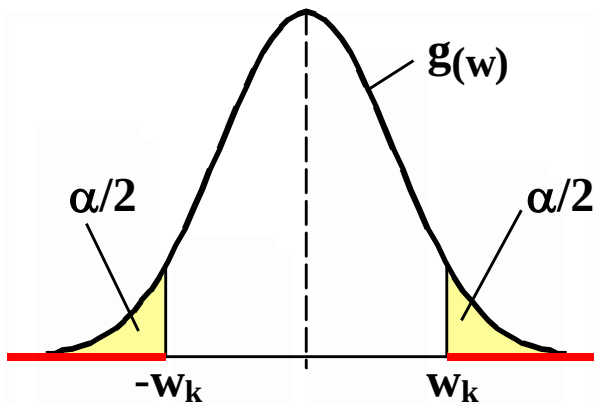
$$\alpha/2 = 0,05 / 2 = 0,025$$

$$F(w_k) = 1 - 0,025 = 0,975$$

$$W_k = \text{ROZKŁ.T.ODW}(0,975;44) \approx 2,02$$

obszar krytyczny:

$$(-\infty \div -2,02) \text{ oraz } (2,02 \div +\infty)$$



$$H_a : f(x_1, \dots, x_n) \neq f_H$$

Ponieważ wartość funkcji testowej nie leży w obszarze krytycznym, nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

TEST STATYSTYCZNY – ZADANIE 2.8

Na losowo dobranej próbie 120 samochodów marki „Skoda Fabia” testowano zużycie benzyny po przejechaniu na szosie odległości 100 km. Średnie zużycie paliwa w grupie testowanych samochodów wyniosło 6,4 litra przy odchyleniu standardowym 0,8 litra. Norma fabryczna wynosi 6,1 litra na 100 km. Czy rzeczywiste zużycie różni się istotnie od normy fabrycznej? Założyć, że zużycie paliwa ma rozkład normalny. Przyjąć poziom istotności $\alpha = 0,03$.

Rozwiązanie

Przyjmujemy hipotezę zerową, że średnie zużycie paliwa we wszystkich produkowanych samochodach wynosi $m = 6,1$ l.

Hipoteza alternatywna $H_a: m > 6,1$ l

Przyjmujemy funkcję testową i obliczamy jej wartość:

ROZWIĄZANIE ZADANIA 2.8

$$W = \frac{\bar{X} - m_X}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - m_X}{\sigma_X} \cdot \sqrt{n} = \frac{6,4 \cdot 1 - 6,1 \cdot 1}{0,8 \cdot 1} \cdot \sqrt{120} = 4,11$$

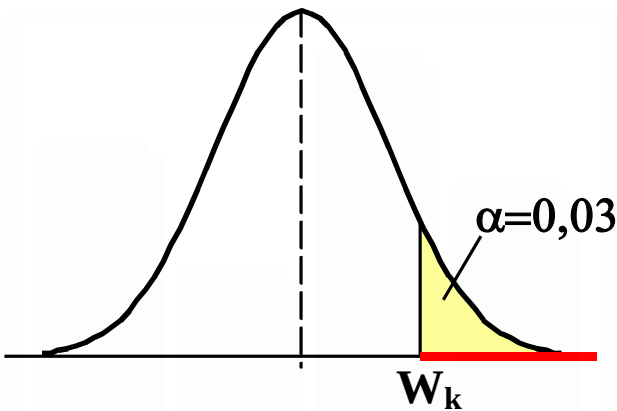
Z postaci hipotezy alternatywnej wynika, że obszar krytyczny jest jednostronny. Ponieważ nasza funkcja testowa posiada rozkład Studenta o $k = n - 1 = 120 - 1 = 119$ stopniach swobody, więc dla $\alpha = 0,03$ mamy:

$$W_k = \text{ROZKŁAD.T.ODW}(0,97;119) = 1,90$$

obszar krytyczny: $(1,90 \div +\infty)$

Ponieważ wartość funkcji testowej leży w obszarze krytycznym hipotezę zerową należy odrzucić.

Dane fabryczne powinny zostać uaktualnione.



$$H_a : f(x_1, \dots, x_n) > f_H$$
$$(W_k \div +\infty)$$

ZADANIE 2.9

(do samodzielnego rozwiązania)

Automat napełnia 100g opakowania kawy. Wyniki napełniania posiadają rozkład normalny o odchyleniu standardowym równym 3g. Planuje się pobranie 25-elementowej próby losowej w celu zweryfikowania hipotezy, że średnia waga opakowania wynosi więcej, niż 101g. Przy jakiej minimalnej wartości średniej wagi z pobranej próby będzie można przyjąć wysuniętą hipotezę, jeżeli założony poziom istotności wynosi $\alpha = 0,05$?

Odp: Przy $\bar{x} = 102,0265g \approx 102,0g$

STATYSTYCZNE STEROWANIE PROCESAMI

Część III

WPROWADZENIE DO STEROWANIA PROCESAMI

ISTOTA SPC

SPC jest strategią, której celem jest systematyczne doskonalenie procesu. Cel ten osiąga się poprzez ograniczanie zmienności występującej w tym procesie.

Jak już wspomniano w części I, im większa zmienność procesu, tym bardziej zróżnicowane właściwości produktu, tym większa szansa na powstanie produktu nie spełniającego wymagań, czyli tym niższa jakość procesu.

Ograniczanie zmienności wewnątrz procesu osiąga się poprzez identyfikację przyczyn tej zmienności i stosowne przeciwdziałania

Strategia SPC może obejmować jeden proces, ale może również (i powinna) obejmować wszystkie istotne procesy zachodzące w organizacji. Zdaniem wielu ekspertów jest to bardzo skuteczny i ekonomiczny sposób doskonalenia jakości.

RÓŻNICE POMIĘDZY KT a SPC

I kontrola techniczna, i statystyczne sterowanie procesem są elementami strategii zapewniania jakości. Mimo, że oba te podejścia mogą wykorzystywać metody statystyczne, to jednak istnieje między nimi fundamentalna różnica.

Zapewnianie jakości w oparciu o kontrolę międzyoperacyjną i końcową polega na usuwaniu skutków niewłaściwie funkcjonujących ogniw procesu, przeciwdziałaniu temu, aby wadliwy produkt uczestniczył w dalszych operacjach technologicznych bądź trafił do odbiorcy.

Zapewnianie jakości w oparciu o SPC skupia się na wyszukiwaniu niewłaściwie funkcjonujących ogniw procesu i poprawie ich działania.

„Zapewnianie jakości w oparciu o kontrolę techniczną przypomina prowadzenie samochodu w oparciu o informacje uzyskane wyłącznie z lusterek wstecznych”
[J.R. Thompson]

SPC - ETAPY

Działania realizowane w ramach SPC można podzielić na etapy

- **sporządzenie wykresu przebiegu procesu, wybór rodzaju danych charakteryzujących przebieg tego procesu oraz miejsc i sposobu ich pobierania;**
- **zaprojektowanie odpowiednich dla zbieranych danych kart kontrolnych,**
- **pobranie danych (badanie odpowiednio dobranych próbek), opracowanie zebranych danych i naniesienia wyników na karty kontrolne;**
- **detekcja przypadków rozregulowania procesu, wykorzystanie wykrytych przypadków do identyfikacji przyczyn specjalnych, usunięcie przyczyn;**

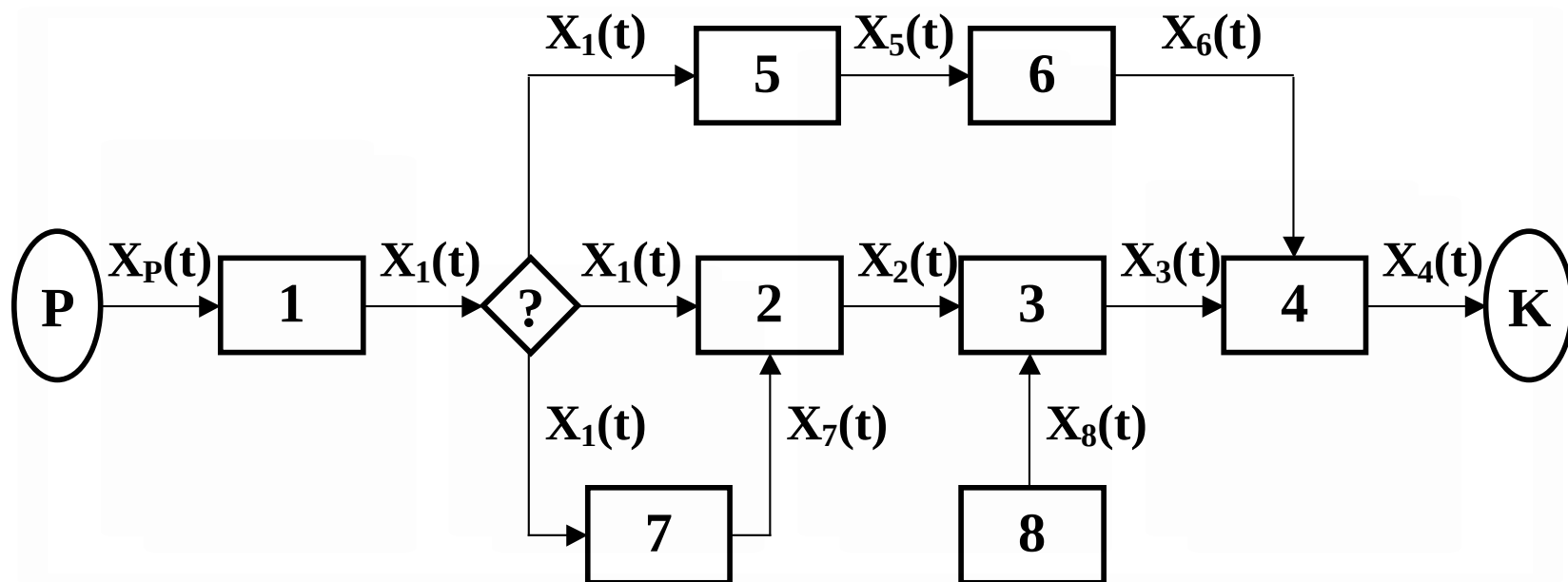
MONITOROWANIE PROCESU

Aby właściwie sterować procesem musimy dysponować, poza ogólną wiedzą o tym procesie, danymi o jego przebiegu. W związku z powyższym procesy objęte SPC winny być monitorowane, a dane uzyskane w wyniku tego monitorowania, najlepiej dane liczbowe, zapamiętywane.

Ze względów ekonomicznych zbiór danych dotyczących przebiegu procesu nie powinien być zbyt duży. Dlatego najczęściej ograniczamy go do tych danych, które są najbardziej powiązane z wynikiem procesu lub które charakteryzują ten wynik.

Wybór danych i miejsc ich monitorowania można ułatwić dzieląc proces na mniejsze części (podprocesy) oraz określając wejścia i wyjścia, a także powiązania między tymi podprocesami. Graficzny obraz wyników takiej analizy nazywamy kartą przebiegu procesu

KARTA PRZEBIEGU PROCESU



W oparciu o kartę przebiegu procesu ustala się znaczenie poszczególnych podprocesów dla końcowego rezultatu i wybiera do monitorowania wejścia i/lub wyjścia najważniejszych z nich

ZMIENNOŚĆ PROCESU I JEJ PRZYCZYNY

Jak już wspomniano w części I każdy proces wytwarzania wyrobu posiada pewną naturalną zmienność przejawiającą się określonymi rozkładami prawdopodobieństwa kontrolowanych cech. Zmienność ta spowodowana jest wieloma czynnikami nierozłącznie związanymi z rozważanym procesem i charakteryzującymi się najczęściej niewielkim wpływem na końcowy rezultat. Czynniki te nazywa się **przyczynami losowymi** (ogólnymi).

Od czasu do czasu na proces wytwarzania oddziałują inne czynniki. Jest ich raczej niewiele, ale wpływ każdego z nich jest znaczący. Czynniki te nazywa się **przyczynami specjalnymi**.

Wystąpienie przyczyny specjalnej może rozregulować proces i sprawić, że jego wyniki będą niezadawalające.

PROCES STATYSTYCZNIE UREGULOWANY

Proces, którego zmienność spowodowana jest wyłącznie przyczynami losowymi nazywać będziemy **procesem statystycznie uregulowanym**, a jego zmienność – **zmiennością naturalną**. Zmienność naturalna jest cechą charakterystyczną procesu i można ją zmienić tylko przez zmianę samego procesu.

Proces statystycznie uregulowany jest stabilny, jego wyniki są do pewnego stopnia przewidywalne, chociaż nie muszą być zadawalające.

Wystąpienie wyniku niezadawalającego nie jest w tym przypadku sygnałem rozregulowania procesu. Jedynym sposobem poprawy sytuacji jest zmiana procesu (jego przeprojektowanie).

PRÓBKA

Podstawowym zadaniem SPC jest okresowa ocena stanu procesu. Możliwe są dwa wyniki tej oceny:

- proces przebiega stabilnie (jest w stanie statystycznie uregulowanym, nie ma potrzeby ingerencji w jego przebieg);
- proces jest rozregulowany (wystąpiła przyczyna specjalna, potrzebna jest ingerencja w przebieg procesu);

Oceny stanu procesu dokonuje się na podstawie odpowiednio pobieranych danych. Danymi tymi są najczęściej wyniki pomiarów określonych parametrów procesu, bądź też wyników tego procesu.

Wszystkich możliwych do uzyskania danych jest przeważnie bardzo dużo. Ze względów ekonomicznych do oceny wykorzystuje się tylko pewną ich reprezentację. Reprezentacja ta nosi nazwę **próbki**.

POBIERANIE PRÓBEK

Próbki pobierane są najczęściej w regularnych odstępach, przy czym odstępy te mogą być definiowane za pomocą:

- czasu (**np.: co godzinę**);
- kolejnego numeru produktu (**np.: co setna sztuka**);
- przynależności do określonej grupy (**np.: z każdej partii**);

Zwykle kolejne próbki są jednakowo liczne i zawierają takie same egzemplarze produktu (usługi). Poszczególne egzemplarze próbki poddane zostają badaniom, a wyniki tych badań wykorzystane do obliczenia wartości funkcji testowej służącej do oceny stanu procesu. Jako przykłady najczęściej wykorzystywanych funkcji testowych wymienić można średnią arytmetyczną, medianę, rozstęp czy odchylenie standardowe.

Funkcja opisana na wynikach badań elementów próbki jest nazywana dalej **statystyką próbki**.

PRÓBKA - WYMAGANIA

Próbka statystyczna powinna dobrze odzwierciedlać populację, z której została pobrana, czyli być reprezentatywna. Od próbek wymagana jest również (p. **PN-ISO 7870**) jednorodność.

Próbkę można uważać za jednorodną, jeżeli zmienność wartości danych wewnątrz próbki wynika wyłącznie z przyczyn losowych (zmienności naturalnej procesu).

W większości zastosowań produkcyjnych cechą jednorodności charakteryzują się dane zebrane w krótkim przedziale czasu, w bardzo zbliżonych warunkach.

Zasady doboru elementów próbki winny być tak określone, aby ograniczając możliwości wpływu przyczyn specjalnych, nie ograniczyły zarazem wpływu przyczyn losowych. Ograniczenie wpływu przyczyn losowych sprawia, że próbka przestaje być reprezentatywna.

WYBÓR ELEMENTÓW PRÓBKİ

Reprezentatywność próbki zależy od jej liczności i sposobu wyboru elementów składowych. Najbardziej reprezentatywna byłaby próbka zawierająca wszystkie elementy zbiorowości, ale ze względów zarówno technicznych jak i ekonomicznych, korzystanie z takich próbek jest przeważnie niemożliwe.

W praktyce liczność próbek jest przeważnie niewielka. Aby były reprezentatywne należy stosować właściwe zasady wyboru ich elementów. Podstawową zasadą jest unikanie jakichkolwiek tendencji, czyli całkowita przypadkowość (wybór losowy).

Sposoby pomagające zapewnić losowość próbki:

- pobieranie elementów próbki w oparciu o tablicę liczb losowych;
- losowanie „na ślepo” (wszystkie elementy zbiorowości powinny mieć jednakowe szanse wyboru) - najprostsza metoda;
- pobieranie systematyczne (zaleca się, aby cykl procesu był różny od cyklu pobierania)

PRÓBKİ - WŁAŚCIWOŚCI

Jeżeli próbka zawiera dane liczbowe i jej liczność n jest dostatecznie duża ($n > 30$), to można przyjąć, że:

1. Rozkład średniej z próbki jest rozkładem normalnym (niezależnie od rozkładu zbiorowości, z której próbka pochodzi)
2. Średnia średnich z wielu próbek jest równa średniej całej zbiorowości;
3. Odchylenie standardowe średniej z próbki $\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$, gdzie σ oznacza odchylenie standardowe całej zbiorowości;

Dodatkowo:

- nawet dla małych licznosci ($n \geq 4$) rozkład średniej z próbki jest mocno zbliżony do rozkładu normalnego;
- jeżeli rozkład całej zbiorowości jest rozkładem normalnym to podane wyżej właściwości są słuszne dla każdego n .

OCENA STANU PROCESU

Podstawowe zadanie SPC – ocena stanu procesu – jest w swojej istocie bardzo podobne do wielokrotnego testowania hipotezy statystycznej. Podstawę kolejnych testów stanowią wyniki badania kolejnych próbek.

Jako hipotezę zerową przyjmuje się, że proces przebiega stabilnie (jest statystycznie uregulowany), a jako hipotezę alternatywną, że proces jest rozregulowany.

Podobnie jak w przypadku hipotez statystycznych, w ocenie stanu procesu mogą wystąpić dwa rodzaje błędów:

- błąd pierwszego rodzaju polegający na odrzuceniu hipotezy zerowej w przypadku, gdy jest ona prawdziwa;**
- błąd drugiego rodzaju polegający na nieodrzuceniu hipotezy zerowej w przypadku, gdy jest ona fałszywa.**

KARTY KONTROLNE PROCESU

Klasyczny sposób testowania hipotez statystycznych jest zbyt złożony, aby dało się go wprowadzić do powszechnej praktyki przemysłowej. Okazało się jednak, że istnieje względnie prosty, graficzny sposób oceny stanu procesu. Sposób ten, zaproponowany po raz pierwszy w 1924r przez Waltera Shewharta nosi nazwę **kart kontrolnych procesu** lub, od nazwiska wynalazcy, kart kontrolnych Shewharta.

Idea pomysłu Shewharta polega na tym, że dla określonej funkcji opisanej na wynikach pomiarów elementów próbki (**statystyki próbki**) oblicza się granice, w których z określonym, bardzo dużym prawdopodobieństwem wartość tej funkcji powinna się zawierać. Przy założeniu stabilności procesu obliczone granice pozostają aktualne dla kolejnych próbek. Można je zatem wykreślić w postaci tzw. linii kontrolnych i sprawdzać, czy wartości funkcji obliczanej dla kolejnych próbek są pomiędzy nimi zawarte.

KARTY KONTROLNE PROCESU c.d.

Karta kontrolna Shewharta jest wykresem wartości statystyk kolejnych próbek. Wykres ten sporządzany jest w układzie dwóch współrzędnych. Na osi pionowej odkładana jest wartość statystyk poszczególnych próbek, na osi poziomej numer próbki

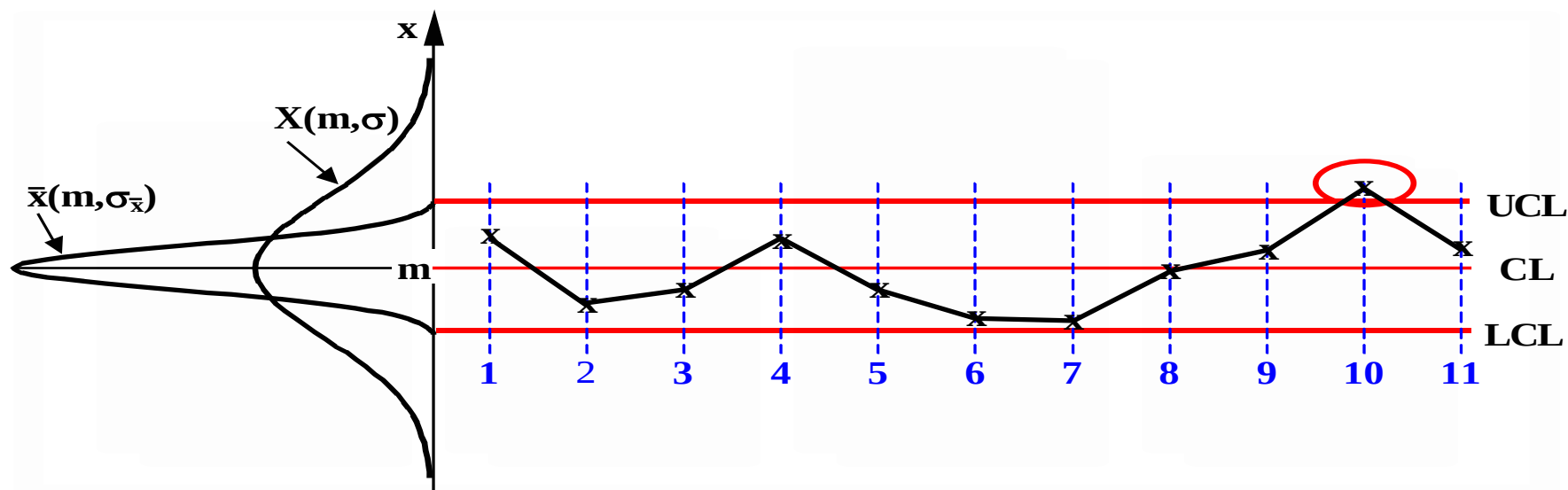
Na karcie kontrolnej naniesione są minimum trzy linie:

Linia centralna (CL) odpowiada średniej wartości statystyki opisanej na wszystkich możliwych do uzyskania wynikach czyli na całej zbiorowości danych; w praktyce linię tą wykreśla się w oparciu o średnią wartość statystyki z wielu ($n > 20$) próbek.

Linie kontrolne (LCL, UCL) znajdują się w odległości $3 \cdot \sigma$ po każdej stronie linii centralnej, σ oznacza tu odchylenie standardowe statystyki opisanej na całej zbiorowości danych.

Położenie linii CL, LCL i UCL określa się przy założeniu stabilności procesu.

KARTY KONTROLNE PROCESU



Wartość funkcji dla próbki 10 wyszła poza granice kontrolne. Przy stabilnym procesie jest to bardzo mało prawdopodobne. Znacznie bardziej prawdopodobna jest możliwość rozregulowania się procesu.

Obsługa kart kontrolnych jest bardzo prosta. Sprowadza się do pomiaru elementów próbki, policzenia wartości funkcji, naniesienia tej wartości na kartę kontrolną i ocenie położenia naniesionego punktu.

„FAŁSZYWE SYGNAŁY”

Błąd pierwszego rodzaju - uznanie procesu za rozregulowany, podczas gdy w rzeczywistości jest on stabilny, daje **fałszywy sygnał**. Konsekwencją wystąpienia tego błędu jest strata czasu na próbę znalezienia rzekomej przyczyny specjalnej. Czasami takie poszukiwania kończą się nawet „sukcesem”, a podjęte przeciwdziałania zamiast poprawić, pogarszają stabilność procesu.

Konsekwencje fałszywych sygnałów są na tyle poważne, że reguły oceny procesu powinny poważnie ograniczać prawdopodobieństwo ich wystąpienia. W praktyce przyjmuje się, że szansa wystąpienia fałszywego sygnału nie powinna przekraczać wartości 0,002 (jeden fałszywy sygnał na 500 ocen).

BŁĘDY DRUGIEGO RODZAJU

Jeżeli proces jest rozregulowany, ale wartość statystyki próbki z przyczyn losowych mieści się wewnątrz granic kontrolnych popełniamy błąd drugiego rodzaju. Wnioskujemy, w tym przypadku błędnie, że proces jest stabilny i nie podejmujemy żadnej ingerencji w jego przebieg.

Konsekwencją popełnienia błędu drugiego rodzaju może być wzrost liczby wyrobów niezgodnych.

Prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju zależy od trzech czynników: szerokości granic kontrolnych, stopnia rozregulowania procesu i liczności próbki. Jest ono przeważnie trudne do ustalenia *[przykład-prowadzenie samochodu]*

Przy konstrukcji kart kontrolnych Shewharta uwzględnia się tylko błąd pierwszego rodzaju.

ROZWÓJ SPC

O znaczeniu kart kontrolnych świadczy fakt, iż zdaniem wielu specjalistów ich wprowadzenie stanowiło początek nowoczesnego zarządzania jakością.

Pierwsze karty kontrolne zostały wprowadzone w 1924 r. przez W. Shewharta. Były one przeznaczone do sterowania procesem produkcyjnym (w owych czasach uważano, że jakość powstaje głównie w tym procesie).

Dzięki pracom W.E. Deminga program sterowania procesami został w latach czterdziestych ub. wieku znacznie rozszerzony i objął, poza produkcją, większość procesów przygotowania produkcji, procesy zarządzania, usługi, a nawet współpracę z dostawcami i odbiorcami.

Rosnący zakres zastosowań i związana z nim coraz większa różnorodność zadań spowodowały rozwój technik SPC, w szczególności powstanie nowych kart kontrolnych oraz wspomagającego SPC oprogramowania komputerowego.

TYPY KART KONTROLNYCH

Według **PN-ISO 7870** są trzy główne typy kart kontrolnych. Stanowią je:

- karty kontrolne Shewharta (z kilkoma bliskimi odmianami);
(stosowane głównie do oceny, czy proces pozostaje w stanie statystycznie uregulowanym);
- karty kontrolne akceptacji procesu;
(stosowane w celu oceny, czy proces zapewni spełnienie wymagań dla mierzonej właściwości, pozwalają na ocenę stabilności procesu)
- karty kontrolne adaptacji procesu;
(stosowane do regulacji procesu za pomocą przewidywania trendów i dokonywania wyprzedzających nastaw)

KARTY KONTROLNE SHEWHARTA

Szczegółowe informacje nt. kart kontrolnych Shewharta zawiera norma **PN-ISO 8258**.

Zdaniem autorów w/w normy karty kontrolne Shewharta można podzielić na:

- karty kontrolne dla danych liczbowych;
- karty kontrolne dla danych alternatywnych;

Każdy z w/w typów kart może być użyty w dwóch różnych sytuacjach:

- bez zadanych wartości normatywnych;
- z zadanymi wartościami normatywnymi;

Dane normatywne to dane wykorzystywane przy konstrukcji kart wynikające albo z posiadanej już wiedzy nt. procesu albo z wymagań dotyczących wyników tego procesu.

KARTY KONTROLNE BEZ WARTOŚCI NORMATYWNYCH

Karty te służą wyłącznie do sprawdzania, czy nadzorowany proces jest w stanie statystycznie uregulowanym, czyli umożliwiają wykrycie przyczyn specjalnych.

Dane niezbędne do konstruowania tych kart pochodzą wyłącznie z wyników badań pobranych próbek.

Karty kontrolne bez wartości normatywnych są szczególnie użyteczne na etapie badań i konstrukcji, przy uruchamianiu produkcji oraz na etapie wstępnych badań usługi. Pozwalają na ustalenie, czy nowa produkcja, wyrób lub usługa są odtwarzalne oraz czy metody badań dają powtarzalne wyniki.

KARTY KONTROLNE Z ZADANYMI WARTOŚCIAMI NORMATYWNYMI

Karty te służą do sprawdzania, czy różnice pomiędzy wartościami statystyk próbek a przyjętymi wartościami normatywnymi mogą być spowodowane zmiennością naturalną (**czyli czy proces jest stabilny**).

Różnią się od kart bez wartości normatywnych dodatkowym wymaganiami dotyczącym wartości średniej i/lub miary rozproszenia statystyk.

Wartości normatywne mogą wynikać z już posiadanej wiedzy o procesie (znajomości zdarzeń minionych), przesłanek ekonomicznych czy wymagań określonych w dokumentacji.

Dane normatywne powinny być zgodne z naturalną zmiennością procesu.

Kart tego typu używa się przeważnie w produkcji, zarówno do sterowania procesami jak i utrzymania jednorodności wyrobu na żądanym poziomie.

KARTY KONTROLNE DLA DANYCH LICZBOWYCH

Od tego typu kart, w szczególności od kart $\bar{X}$ i R, zaczęło się statystyczne sterowanie procesami. Są bardzo użyteczne, bo:

- dana liczbowa zawiera więcej informacji niż dana alternatywna;
- mają szeroki potencjalny zakres zastosowań (**zarówno procesy, jak i ich wyniki, mają wiele mierzalnych właściwości**);
- pozwalają analizować i oceniać przebieg procesu niezależnie od wymagań zawartych w dokumentacji technicznej; dają niezależny obraz możliwości procesu;
- wykorzystują mniej liczne próbki (**niższe koszty kontroli i krótszy czas reakcji**);

ZESTAW KART KONTROLNYCH

Jak już wspomniano w części I zbiór danych liczbowych można scharakteryzować za pomocą dwóch parametrów: miary położenia i miary rozrzutu. Karta kontrolna umożliwia wykreślenie tylko jednej charakterystyki. W związku z powyższym do sterowania procesem za pomocą kart dla danych liczbowych używa się dwóch kart:

- karty dotyczącej położenia (tzw. poziomego procesu) - najczęściej charakterystykami są średnia arytmetyczna i mediana;**
- karty dotyczącej rozrzutu (najczęściej charakterystykami są rozstęp, odchylenie standardowe i odchylenie przeciętne;**

W przypadku sterowania procesem za pomocą kart dla danych alternatywnych wystarczy jedna karta (nie ma potrzeby wykreślania oddzielnej karty dla miary rozrzutu).

STATYSTYCZNE STEROWANIE PROCESAMI

Część IV

PROJEKTOWANIE KART KONTROLNYCH

PROJEKTOWANIE KART KONTROLNYCH

$\bar{X}$ i R BEZ WARTOŚCI NORMATYWNYCH

W przypadku tym wszystkie dane potrzebne do zaprojektowania kart pochodzą wyłącznie z wyników badań próbek.

Procedura projektowania kart kontrolnych jest następująca:

1. Pobieramy **k** próbek o liczności **n** każda ($k \geq 20$; $n = 4 \div 6$)
2. Po pobraniu każdej próbki dokonujemy pomiarów wchodzących w jej skład elementów uzyskując ($X_1, \dots, X_n$)
3. Dla każdej próbki obliczamy wartość średnią i rozstęp

$$\bar{X} = \sum_1^n X_i / n \quad R = X_{i,\max} - X_{i,\min} \quad i = 1, \dots, n$$

4. Wyznaczamy wartości średnie dla wszystkich próbek

$$\bar{\bar{X}} = \sum_1^k \bar{X}_i / k \quad \bar{R} = \sum_1^k R_i / k \quad i = 1, \dots, k$$

PROJEKTOWANIE KART KONTROLNYCH $\bar{X}$ i R BEZ WARTOŚCI NORMATYWNYCH

Ponieważ dane, na podstawie których projektujemy karty kontrolne, powinny pochodzić z procesu statystycznie uregulowanego, w procedurę konstruowania kart włączono czynności zapewniające spełnienie tego warunku

5. Obliczamy granice kontrolne dla rozrzutu

$$CL = \bar{R} \quad LCL = D_3 \cdot \bar{R} \quad UCL = D_4 \cdot \bar{R}$$

6. Wykreślamy kartę kontrolną R i sprawdzamy, czy wszystkie użyte do jej konstrukcji próbki pochodzą z procesu statystycznie uregulowanego. Jeżeli nie, wyłączamy z obliczeń próbki będące pod wpływem przyczyn specjalnych i z nowym mniejszym zbiorem próbek przystępujemy ponownie do realizacji punktu 4. Sekwencję czynności 4 ÷ 6 powtarzamy tak długo, aż wszystkie różnice pomiędzy rozstępami próbek będzie można uznać za spowodowane zmiennością naturalną

PROJEKTOWANIE KART KONTROLNYCH $\bar{X}$ i R BEZ WARTOŚCI NORMATYWNYCH

7. Obliczamy granice kontrolne dla wartości średniej

$$CL = \bar{\bar{X}} \quad LCL = \bar{\bar{X}} - A_2 \cdot \bar{R} \quad UCL = \bar{\bar{X}} + A_2 \cdot \bar{R}$$

8. Wykreślamy kartę kontrolną $\bar{X}$ i sprawdzamy, czy wszystkie użyte do jej konstrukcji próbki pochodzą z procesu statystycznie uregulowanego. Jeżeli nie, wyłączamy z obliczeń próbki będące pod wpływem przyczyn specjalnych i z nowym mniejszym zbiorem próbek przystępujemy ponownie do realizacji punktu 4. Sekwencję czynności 4 ÷ 8 powtarzamy tak długo, aż wszystkie różnice między statystykami próbek będzie można uznać za spowodowane zmiennością naturalną.

9. Jeżeli wartości charakterystyk (po ew. selekcji próbek) są zawarte pomiędzy granicami kontrolnymi (lub dokładniej: nie wykazują rozregulowania procesu) to granice te możemy stosować do dalszego sterowania tym procesem.

WSPÓŁCZYNNIKI LICZBOWE DO PROJEKTOWANIA KART KONTROLNYCH $\bar{X}$ i R

We wzorach na granice kontrolne w kartach $\bar{X}$ i R występują współczynniki liczbowe A_2 , D_3 i D_4 . Wartości tych współczynników zależą wyłącznie od liczności próbki. Zestawiono je w poniższej tabeli

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
A_2	1,880	1,023	0,729	0,577	0,483	0,419	0,373	0,337	0,308	0,223
D_3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,076	0,136	0,184	0,223	0,348
D_4	3,267	2,575	2,282	2,115	2,004	1,924	1,864	1,816	1,777	1,652

PROJEKTOWANIE KART $\bar{X}$ i R Z ZADANYMI WARTOŚCIAMI NORMATYWNYMI

W odróżnieniu od poprzedniego przypadku w chwili przystąpienia do projektowania dysponujemy już pewnymi danymi na temat procesu. Dane te mogą wynikać z wcześniejszej znajomości tego procesu (**kontynuacja nadzoru**), przesłanek ekonomicznych czy wymagań określonych w dokumentacji technicznej.

Najczęściej znanymi wartościami normatywnymi są:

m (μ) – wartość oczekiwana populacji;

X₀ – wartość średnia populacji (wartość docelowa procesu określona na podstawie przesłanek ekonomicznych lub wymagań w dokumentacji technicznej);

σ₀ – odchylenie standardowe populacji;

R₀, s₀ – średnia wartość rozstępu lub średnia wartość odchylenia kwadratowego wyników próbki przyjęta np.: w oparciu o wcześniejszą znajomość procesu;

PROJEKTOWANIE KART $\bar{X}$ i R Z ZADANYMI WARTOŚCIAMI NORMATYWNYMI

Wartości normatywne powinny być typowe (bardzo zbliżone) dla wyników przyszłych. W szczególności powinny być zgodne z naturalną zmiennością procesu.

Obliczenia:

Granice kontrolne dla wartości średniej:

$$CL = X_0 \quad LCL = X_0 - \frac{3}{\sqrt{n}} \cdot \sigma_0 \quad UCL = X_0 + \frac{3}{\sqrt{n}} \cdot \sigma_0$$

Granice kontrolne dla rozrzutu

$$CL = R_0 = d_2 \sigma_0 \quad LCL = D_3 R_0 = D_3 d_2 \sigma_0 \quad UCL = D_4 R_0 = D_4 d_2 \sigma_0$$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
d_2	1,128	1,693	2,059	2,326	2,534	2,704	2,847	2,970	3,078	3,472

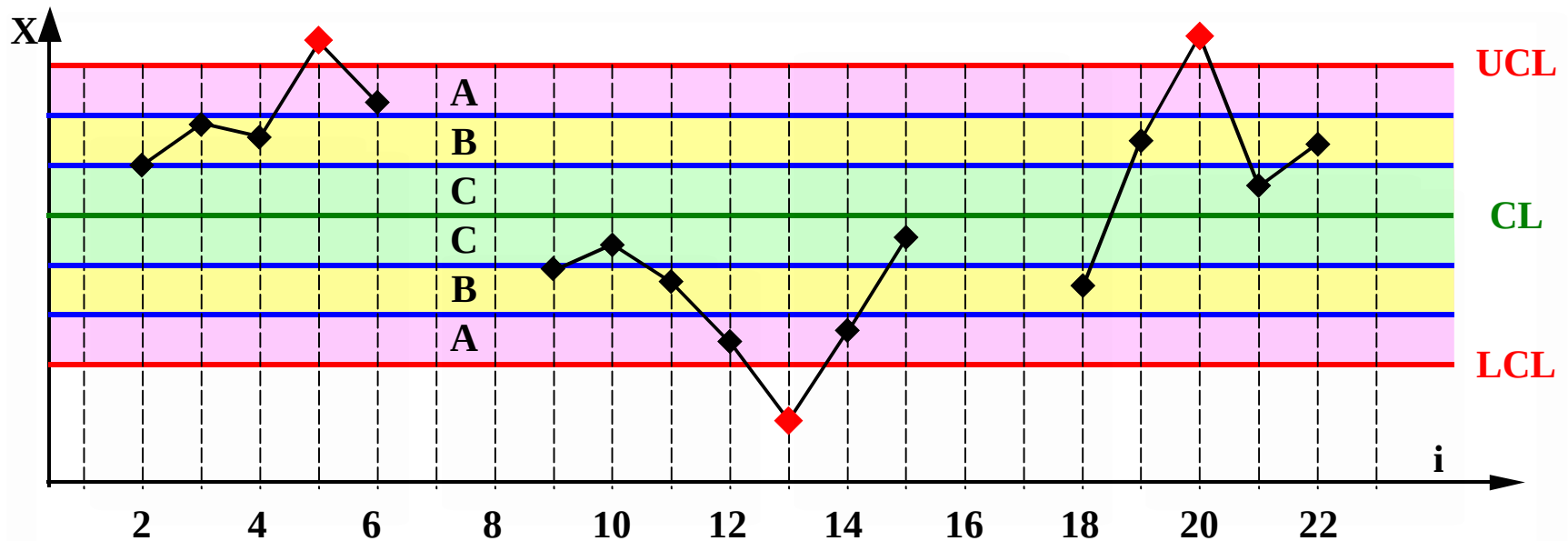
INTERPRETACJA WYKRESÓW STATYSTYK

Podstawowym znakiem rozregulowania procesu jest wyjście wykresu statystyki poza granice kontrolne.

O rozregulowaniu procesu mogą informować również wartości statystyki znajdujące się wewnątrz granic kontrolnych, jeżeli seria tych wartości tworzy niezwykłą dla naturalnej zmienności konfigurację. Podstawowy zestaw takich konfiguracji pokazano na kolejnych slajdach.

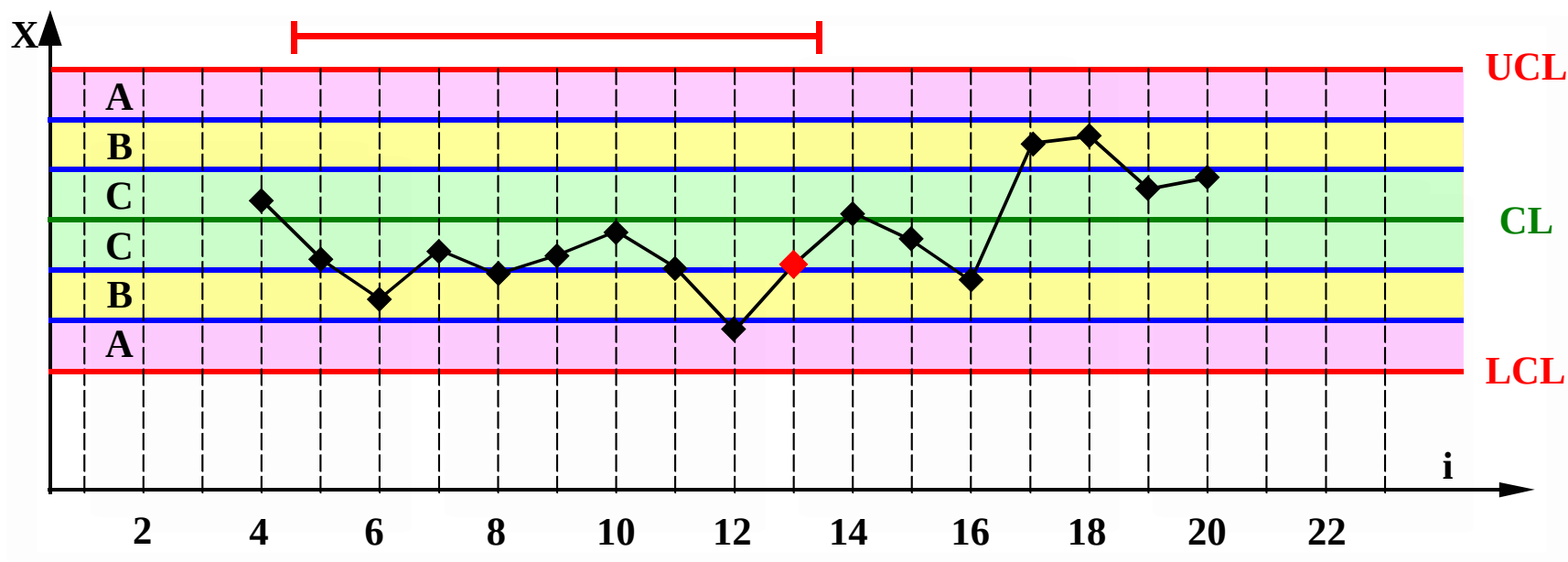
Poza przedstawionymi niżej znakami mogącymi świadczyć o rozregulowaniu procesu mogą wystąpić jeszcze inne. Szczególną uwagę należy zwracać na konfiguracje mające okresowy charakter.

ZNAKI ROZREGULOWANIA PROCESU 1



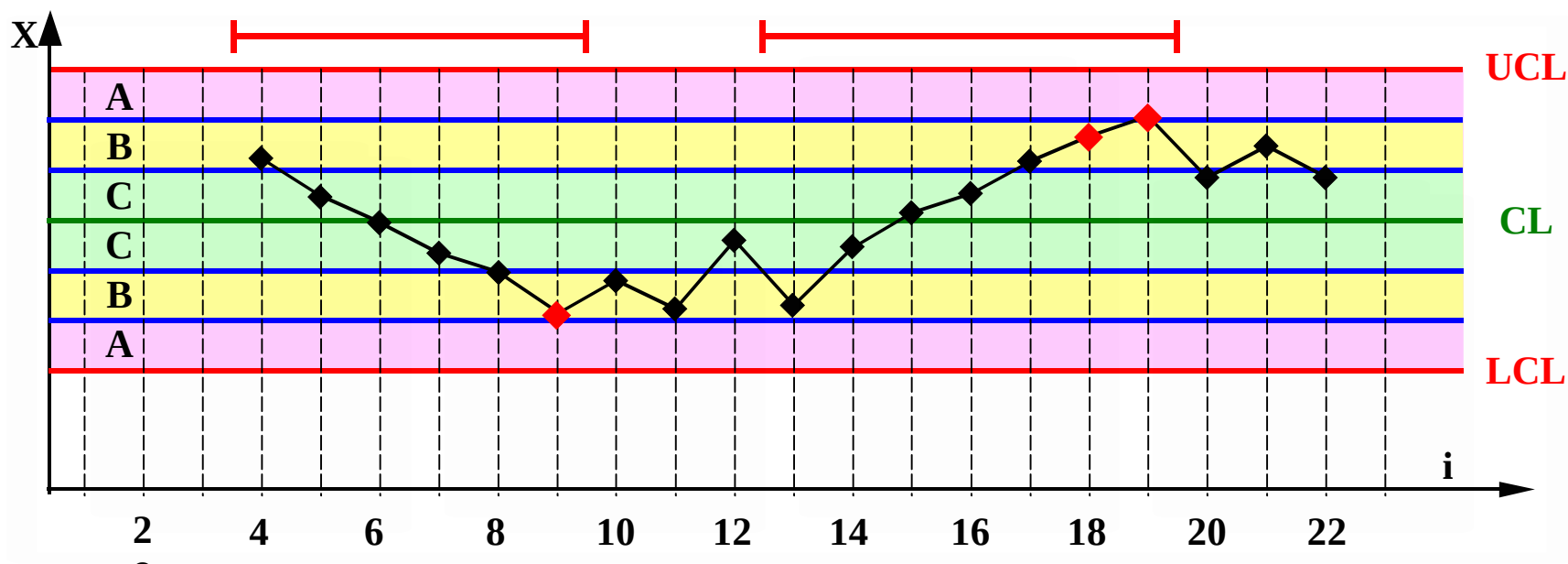
Podstawowy znak rozregulowania procesu – wyjście wykresu statystyki poza granice kontrolne

ZNAKI ROZREGULOWANIA PROCESU 2



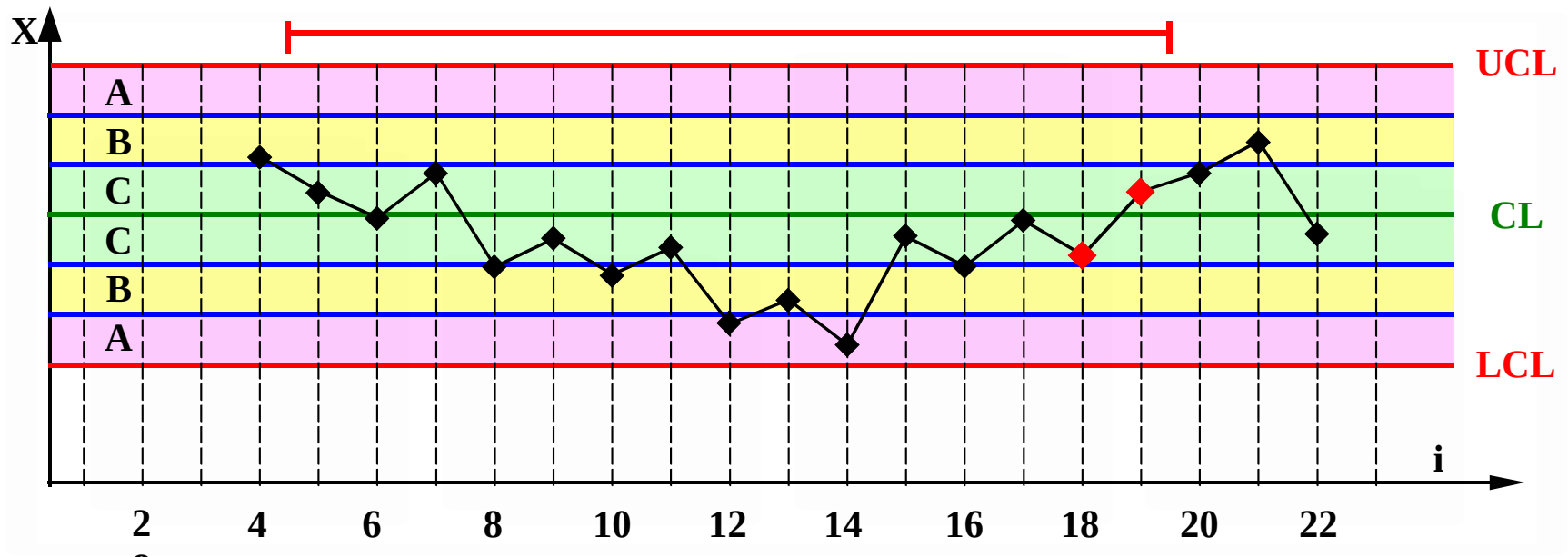
Niezwykła konfiguracja serii wartości wewnątrz granic kontrolnych – **dziewięć kolejnych punktów po jednej stronie linii centralnej**

ZNAKI ROZREGULOWANIA PROCESU 3



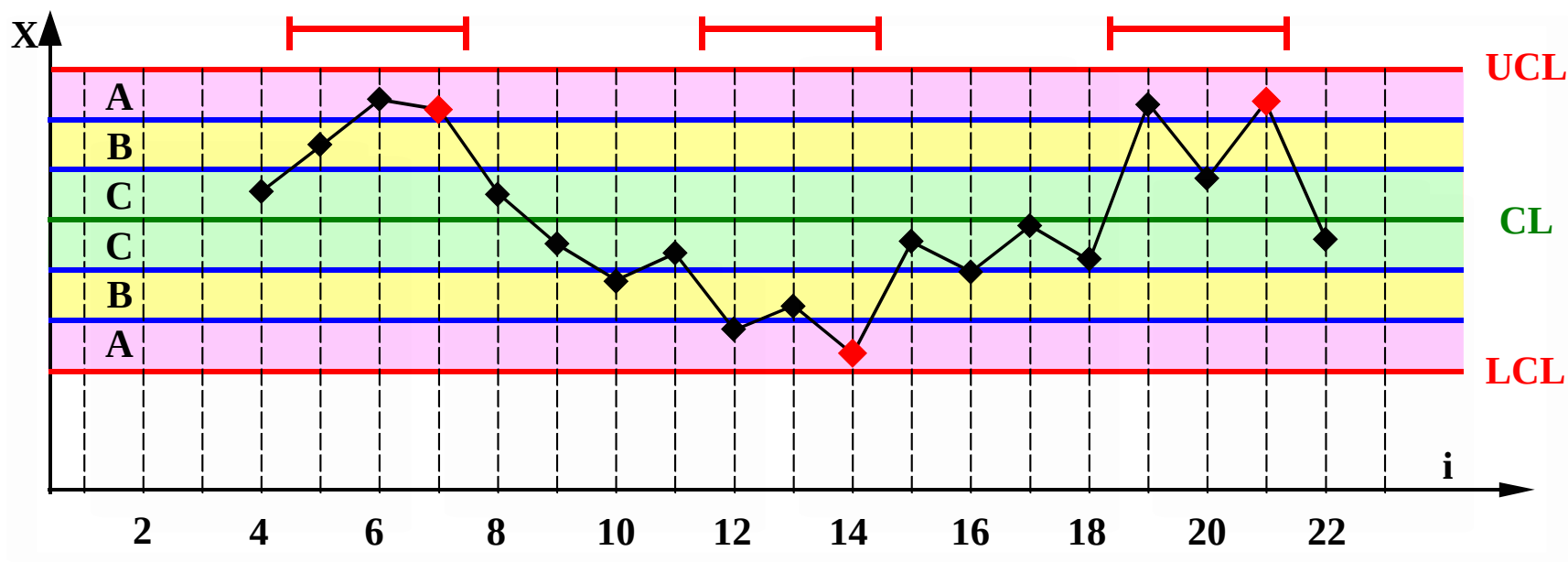
Niezwykła konfiguracja serii wartości wewnątrz granic kontrolnych – **sześć kolejnych punktów stale rosnących lub malejących**

ZNAKI ROZREGULOWANIA PROCESU 4



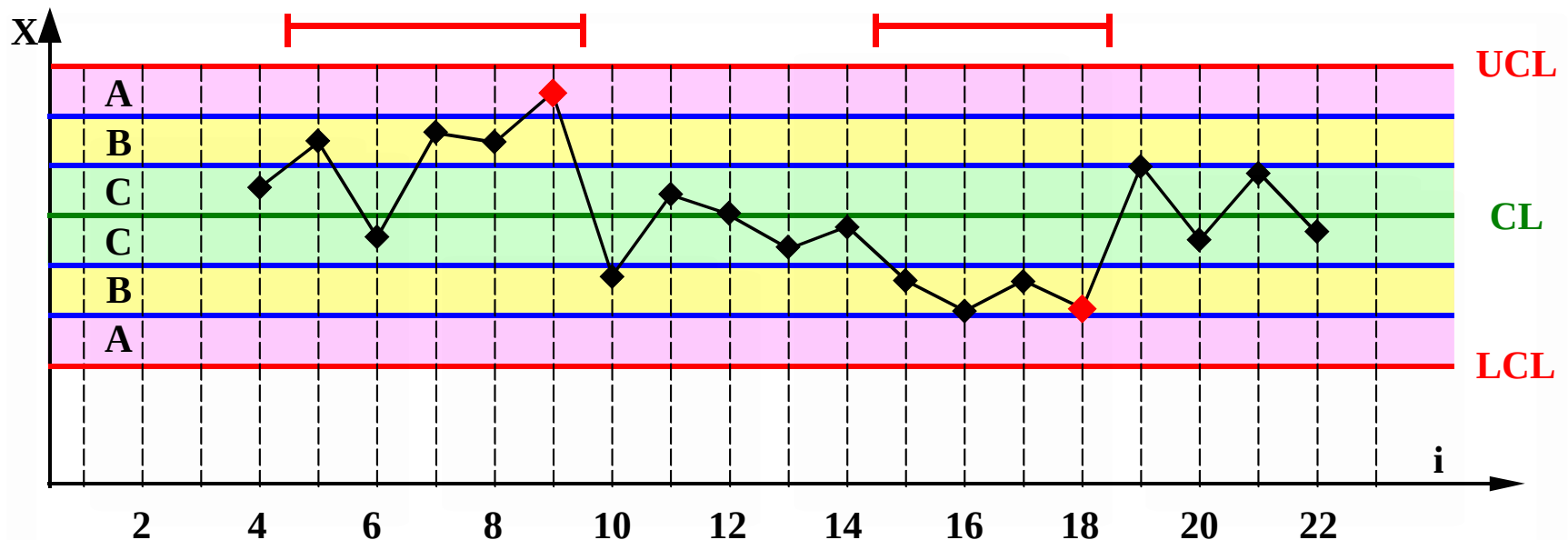
Niezwykła konfiguracja serii wartości wewnątrz granic kontrolnych – **czternaście kolejnych punktów na przemian rosnących i malejących**

ZNAKI ROZREGULOWANIA PROCESU 5



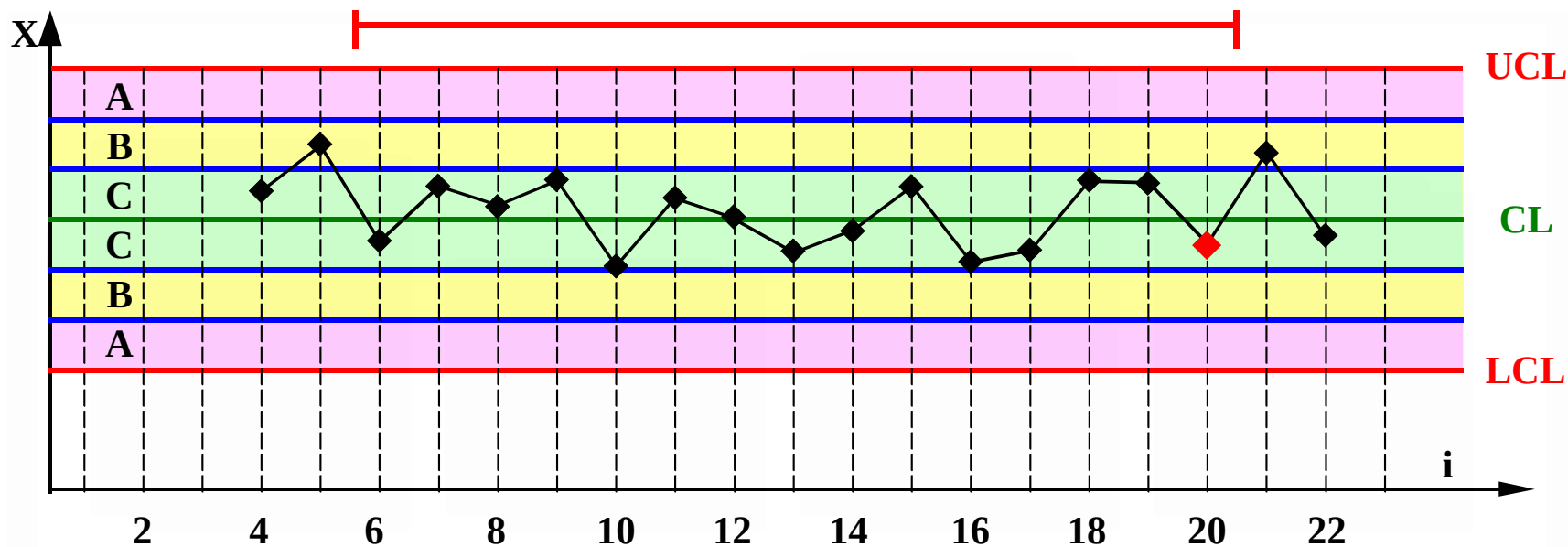
Niezwykła konfiguracja serii wartości wewnątrz granic kontrolnych – **dwa z trzech kolejnych punktów w strefie A**

ZNAKI ROZREGULOWANIA PROCESU 6



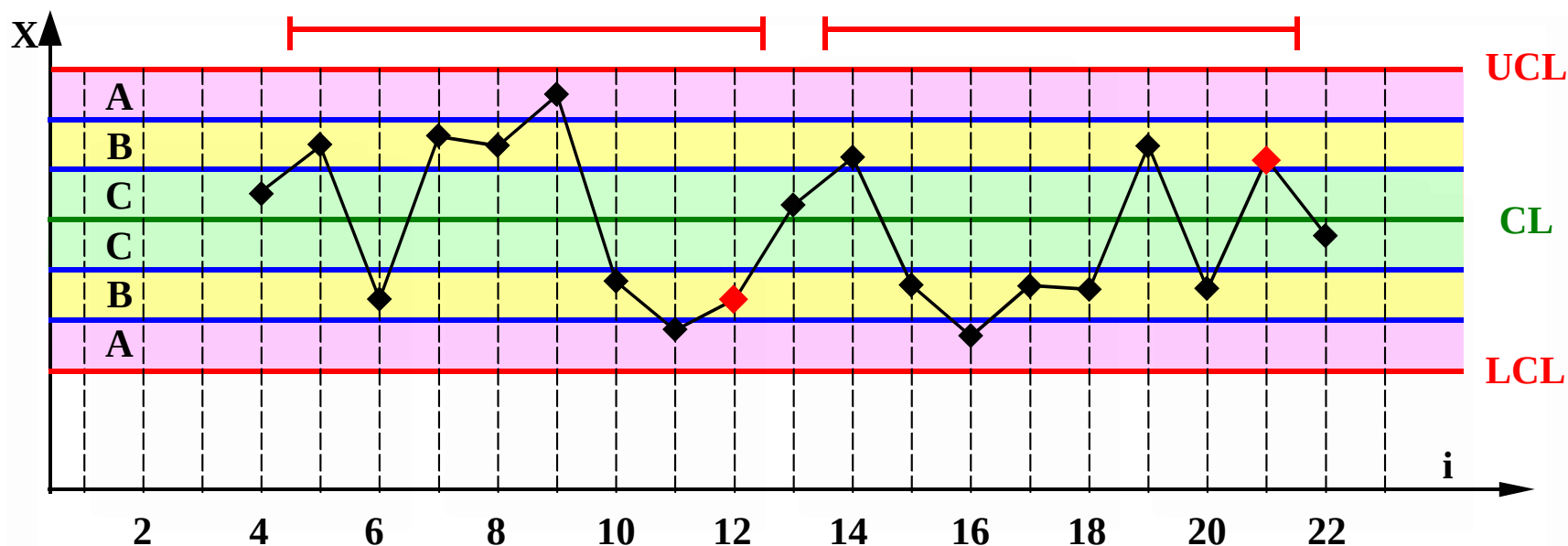
Niezwykła konfiguracja serii wartości wewnątrz granic kontrolnych – **cztery z pięciu kolejnych punktów w strefie B lub dalej**

ZNAKI ROZREGULOWANIA PROCESU 7



Niezwykła konfiguracja serii wartości wewnątrz granic kontrolnych – **piętnaście kolejnych punktów wyłącznie w strefach C**

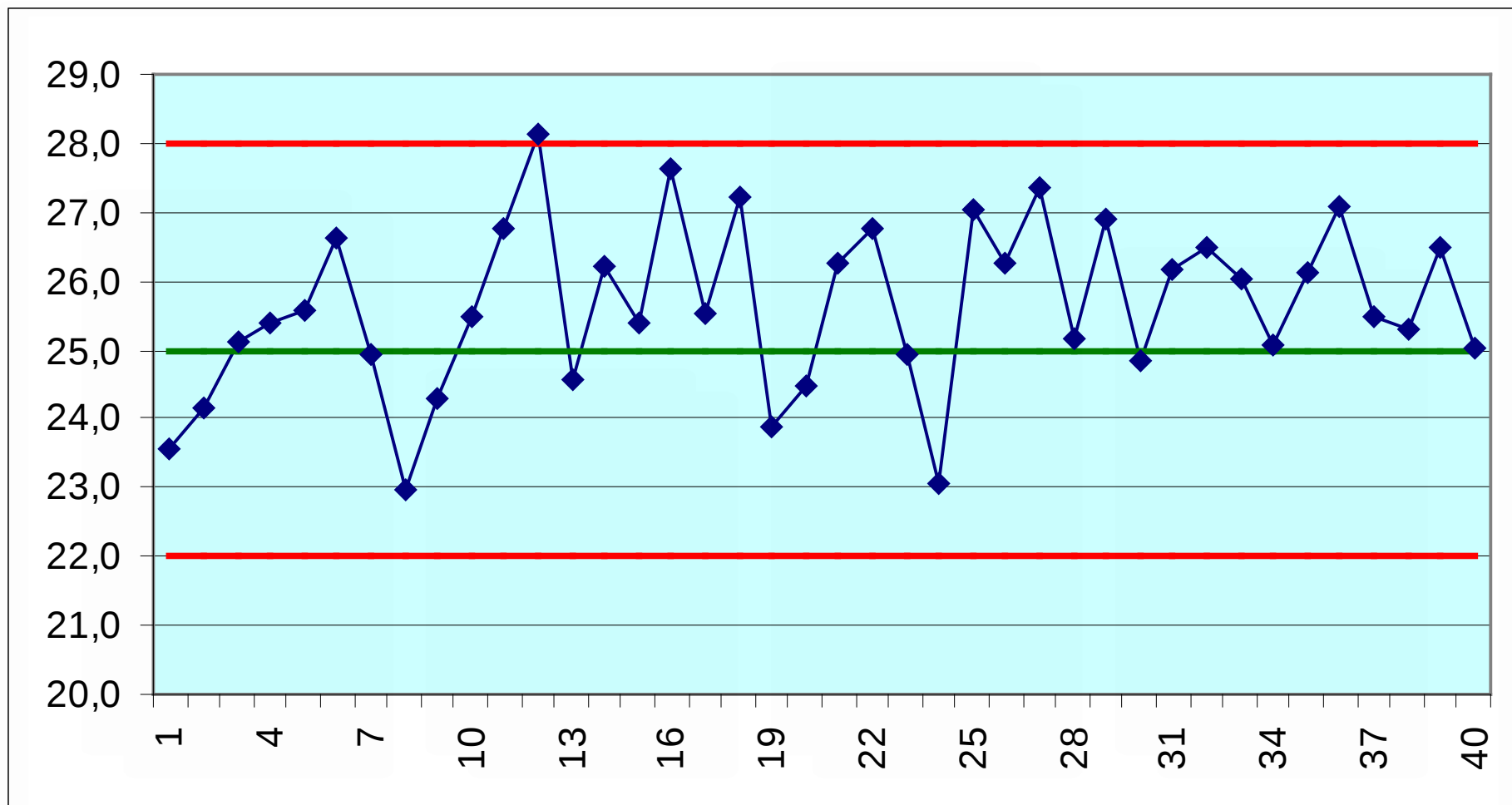
ZNAKI ROZREGULOWANIA PROCESU 8



Niezwykła konfiguracja serii wartości wewnątrz granic kontrolnych – **osiem kolejnych punktów wyłącznie w strefach A i B (żaden w strefie C)**

ZADANIE 4.1

Na przedstawionej poniżej karcie $\bar{X}$ odszukać wszystkie znaki rozregulowania procesu



ZADANIE 4.2A 1/2

Zaprojektować karty kontrolne $\bar{X}$ -R dla procesu pakowania herbaty, który winien być sterowany tak, aby średnia masa paczek herbaty wynosiła 100,6 g. Odchylenie standardowe mas paczek określone podczas nadzorowania innych, bardzo podobnych procesów pakowania wynosiło $\sigma = 1,4$ g. Zadanie rozwiązać dla liczności próbek $n_1 = 3$ i $n_2 = 5$

Rozwiązanie

Dane: $X_0 = 100,6 \cdot \text{g}$; $\sigma_0 = 1,4 \cdot \text{g}$

Dla takiego zestawu danych obowiązują zależności:

$$CL_X = X_0 \quad LCL_X = X_0 - \frac{3}{\sqrt{n}} \cdot \sigma_0 \quad UCL_X = X_0 + \frac{3}{\sqrt{n}} \cdot \sigma_0$$

$$CL_R = R_0 = d_2 \sigma_0 \quad LCL_R = D_3 d_2 \sigma_0 \quad UCL_R = D_4 d_2 \sigma_0$$

ZADANIE 4.2A 2/2

a) dla próbek o liczności $n_1 = 3$ mamy:

$$d_2 = 1,693; \quad D_3 = 0; \quad D_4 = 2,575$$

Podstawiając powyższe wartości do podanych wcześniej zależności uzyskujemy:

$$CL_X = 100,6; \quad LCL_X = 98,2; \quad UCL_X = 103,0$$

$$CL_R = 2,4; \quad LCL_R = 0,0; \quad UCL_R = 6,1$$

b) dla próbek o liczności $n_2 = 5$ mamy:

$$d_2 = 2,326; \quad D_3 = 0; \quad D_4 = 2,115$$

Podstawiając powyższe wartości do podanych wcześniej zależności uzyskujemy:

$$CL_X = 100,6; \quad LCL_X = 98,7; \quad UCL_X = 102,5$$

$$CL_R = 3,3; \quad LCL_R = 0,0; \quad UCL_R = 6,9$$

ZADANIE 4.2B (1/5)

Pobrano 25 próbek o licznosci 5. Obliczono wartości średnie mas i rozstępy ich wartości (tabela ↓). Ocenić, czy wszystkie próbki pochodziły z procesu statystycznie uregulowanego.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\bar{x}_{sr}$	100,7	101,0	99,5	100,5	100,1	99,0	100,4	101,0	100,2	102,0	99,6	99,4	98,9
R	3,5	4,0	2,8	4,4	4,9	4,0	4,1	2,0	2,3	4,4	4,9	6,0	3,9
n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
$\bar{x}_{sr}$	99,1	99,1	99,4	99,2	99,9	100,5	99,4	100,3	100,5	101,0	100,0	99,8	
R	4,7	4,3	4,0	4,4	4,7	4,0	6,3	4,2	4,1	4,6	4,5	3,3	

Rozwiązanie

1. Wprowadzamy wartości statystyki $\bar{X}_{sr}$ do kolumny A (wiersze od A1 do A25)
2. Wprowadzamy wartości rozstępu R do kolumny B (wiersze od B1 do B25)

ZADANIE 4.2B (2/5)

3. Konstruujemy kartę R

- wyznaczamy średnią wartość rozstępu

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^k R_i / k \quad i = 1, \dots, k$$

W Excelu **C1 = średnia (b:b)** (powinniśmy uzyskać rezultat 4,17)
i przeciągamy przez wszystkie k wierszy (od C1 do C25)

- wyznaczamy granice kontrolne dla rozstępu:

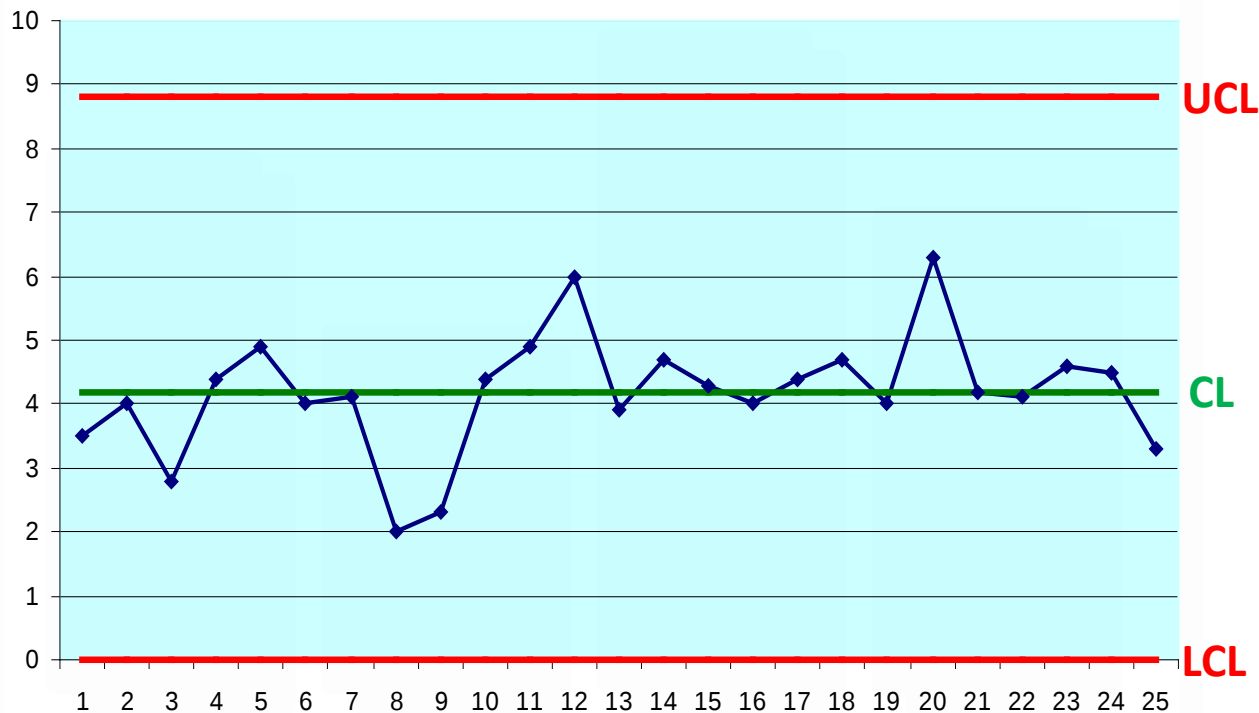
$$CL = \bar{R} \quad LCL = D_3 \cdot \bar{R} \quad UCL = D_4 \cdot \bar{R}$$

(dla n=5 $D_3 = 0$ oraz $D_4 = 2,115$)

W Excelu: **D1= 0·C1** (powinniśmy uzyskać rezultat 0)
oraz **E1= 2,115·C1** (powinniśmy uzyskać rezultat 8,82)
i przeciągamy przez wszystkie k wierszy

ZADANIE 4.2B (3/5)

- zaznaczamy kolumny B,C,D i E i tworzymy wykres liniowy (formatujemy linie wykresu nadając im odpowiednią grubość, dolnej i górnej granicy kolor czerwony, linii centralnej – kolor zielony; na linii R nanosimy znaczniki)



- na utworzonym wykresie szukamy sygnałów rozregulowania procesu; w tym przypadku sygnałów takich brak)

ZADANIE 4.2B (4/5)

3. Konstruujemy kartę $\bar{X}_{\text{sr}}$

- wyznaczamy średnią wartość wartości średnich

$$\bar{\bar{X}} = \sum_{i=1}^k \bar{X}_i / k \quad i = 1, \dots, k$$

W Excelu **F1=średnia(A:A)** (powinniśmy uzyskać rezultat 100,02)
i przeciągamy przez wszystkie k wierszy (od F1 do F25)

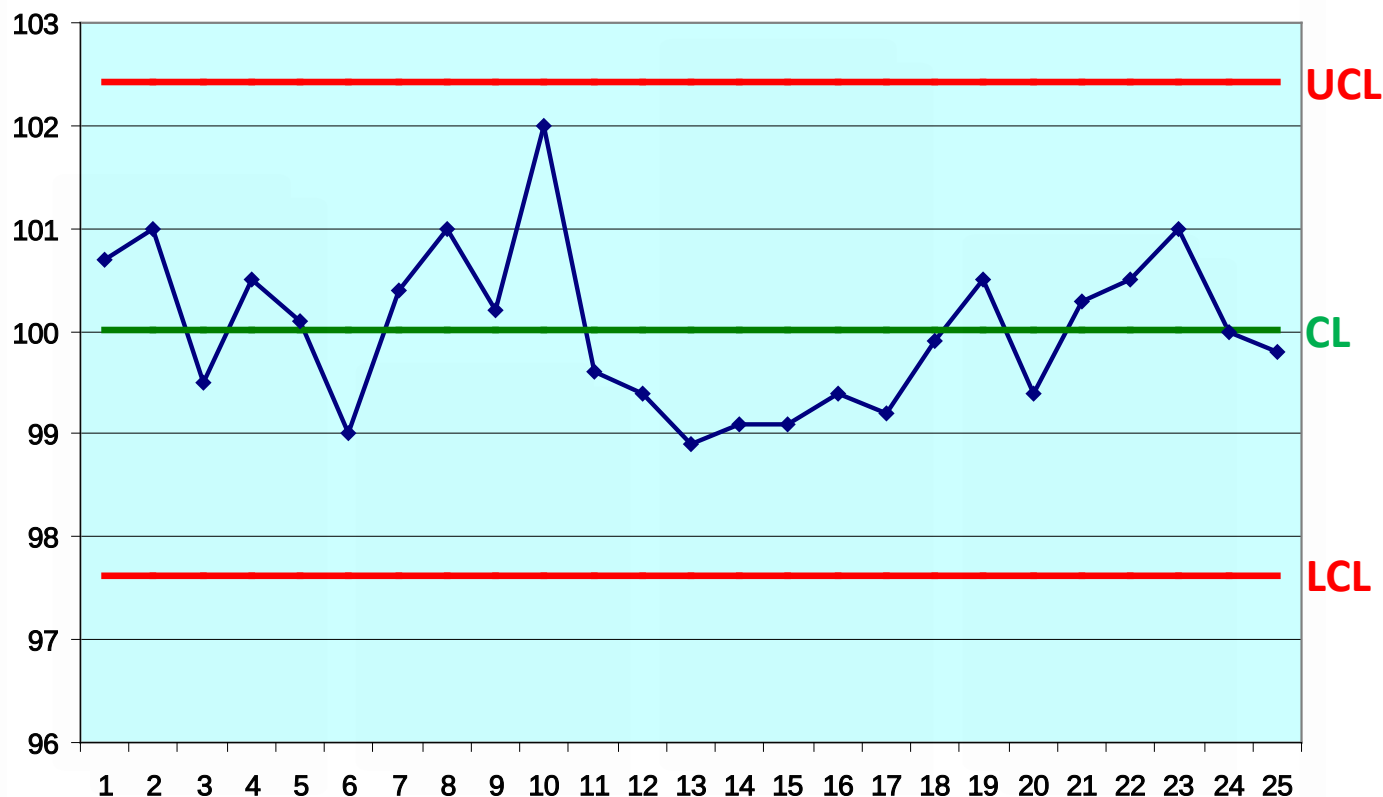
- wyznaczamy granice kontrolne dla wartości średniej

$$\begin{aligned} CL &= \bar{\bar{X}} & LCL &= \bar{\bar{X}} - A_2 \cdot \bar{R} & UCL &= \bar{\bar{X}} + A_2 \cdot \bar{R} \\ & & & (\text{dla } n = 5 \quad A_2 = 0,577) \end{aligned}$$

W Excelu: **G1= F1-0,577·C1** (powinniśmy uzyskać rezultat 97,61)
oraz **H1= F1+0,577·C1** (powinniśmy uzyskać rezultat 102,43)
i przeciągamy przez wszystkie k wierszy

ZADANIE 4.2B (5/5)

- zaznaczamy kolumny A, F, G i H i tworzymy wykres liniowy (linie wykresu formatujemy analogicznie jak w przypadku rozstępu)



- na utworzonym wykresie szukamy sygnałów rozregulowania procesu; w tym przypadku sygnałów takich brak)

Wniosek: próbki pochodziły z procesu statystycznie uregulowanego

ZADANIE 4.2C (1/6)

Na podstawie wyników badań 24 próbek skonstruować karty kontrolne $\bar{X}$ -R

Nr pr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\bar{X}_1$	95	90	103	102	101	104	103	101	99	94	94	94
$\bar{X}_2$	97	102	105	99	96	101	102	107	95	93	96	96
$\bar{X}_3$	102	97	98	103	99	98	99	106	100	98	100	98
$\bar{X}_4$	95	103	104	95	106	104	103	99	99	93	99	99
Nr pr.	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\bar{X}_1$	102	103	96	95	106	96	101	103	104	103	106	105
$\bar{X}_2$	104	100	101	103	105	99	104	96	91	97	101	100
$\bar{X}_3$	99	96	106	104	106	101	95	102	93	98	99	101
$\bar{X}_4$	96	100	101	106	109	103	101	91	97	100	96	98

Rozwiązanie

1. Do kolumny A wprowadzamy numery próbek (i)
2. W kolumnach B, C, D i E zamieszczamy wyniki pomiarów elementów wchodzących do poszczególnych próbek; obszar danych (od B1 do E25) zaznaczamy kolorem jasnozielonym

ZADANIE 4.2C (2/6)

Konstruujemy kartę R

3. W kolumnie F obliczamy wartość rozstępu w próbkach:

$$F1 = \max(B1:E1) - \min(B1:E1)$$

4. W kolumnie G obliczamy średnią wartość rozstępu

$$G1 = \text{średnia}(F:F)$$

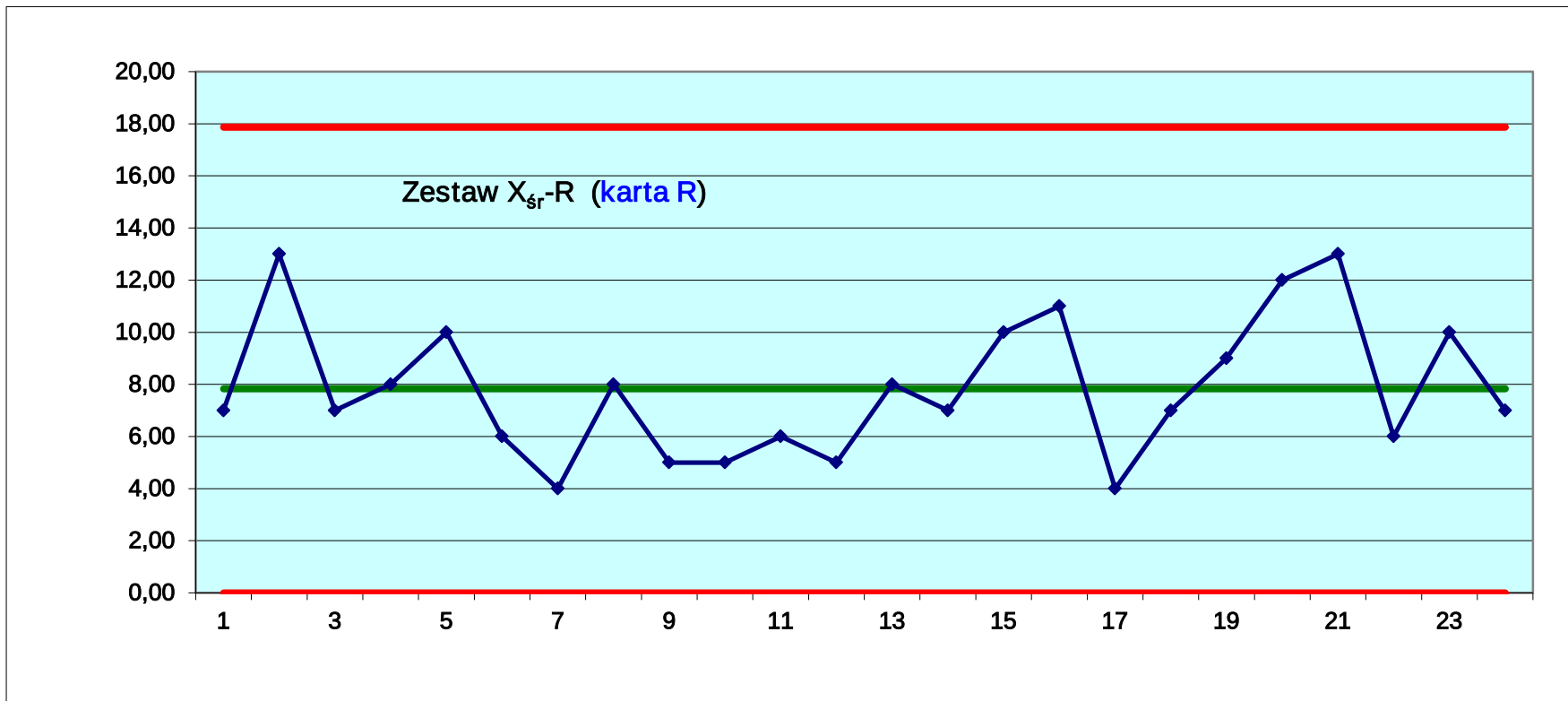
5. W kolumnach H i I obliczamy wartości dolnej i górnej linii kontrolnej dla rozstępu. Ponieważ $LCL_R = D_3 \cdot \bar{R}$, $UCL_R = D_4 \cdot \bar{R}$ oraz dla próbki 4-sztukowej $D_3 = 0$ i $D_4 = 2,282$ więc

$$H1 = 0 \cdot G1 \text{ oraz } I1 = 2,282 \cdot G1$$

6. Zdefiniowane pola F1, G1, H1 i I1 przeciągamy w dół do końca tabeli danych (w naszym przypadku do wiersza 24, tabelę F1xI24 zaznaczamy kolorem jasnożółtym)

7. Zaznaczamy tabelę F1xI24 i tworzymy wykres liniowy pokazany na następnym ekranie.

ZADANIE 4.2C (3/6)



8. Na utworzonym wykresie szukamy sygnałów rozregulowania procesu; w przypadku wystąpienia takich sygnałów usuwamy próbki, które je generują (p.p.15), w przypadku nie wystąpienia przystępujemy do konstruowania karty $\bar{X}_{\text{sr}}$

ZADANIE 4.2C (4/6)

Konstruujemy kartę $\bar{X}_{sr}$

9. W kolumnie J obliczamy średnie wartości poszczególnych próbek
 $J1 = \text{średnia}(B1:E1)$

10. W kolumnie K obliczamy średnią wartość średnich $\bar{\bar{X}}_{sr} (\bar{\bar{X}})$

$$\mathbf{K1 = \text{średnia}(J:J)}$$

11. W kolumnach L i M obliczamy wartości dolnej i górnej linii kontrolnej dla wartości średniej. Ponieważ:

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2 \cdot \bar{R} \quad UCL = \bar{\bar{X}} + A_2 \cdot \bar{R}$$

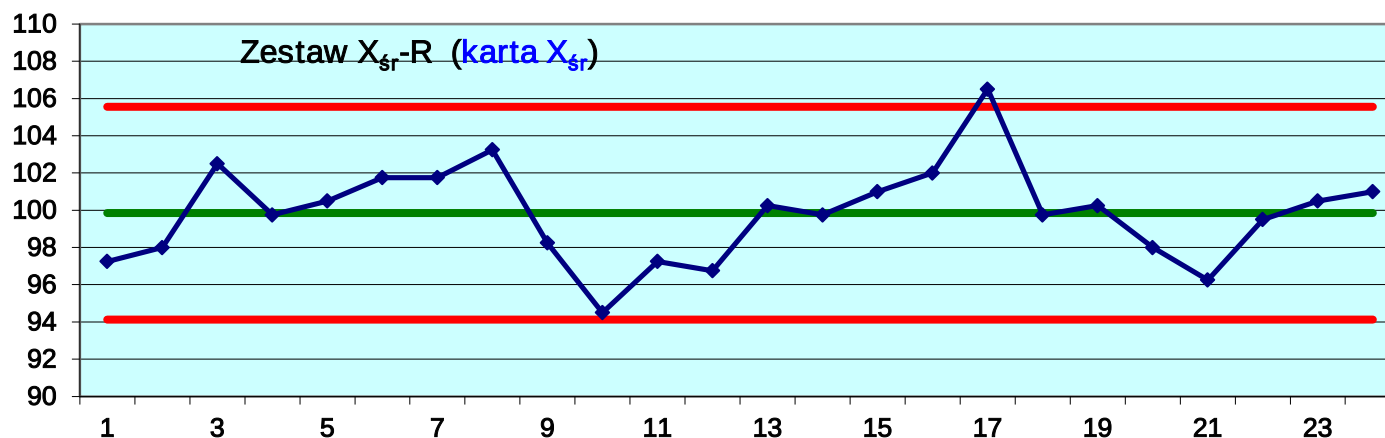
oraz dla próbki 4-sztukowej $A_2 = 0,729$, więc:

$$\mathbf{L1 = K1 - 0,729 \cdot G1} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{M1 = K1 + 0,729 \cdot G1}$$

12. Zdefiniowane pola J1, K1, L1 i M1 przeciągamy w dół do końca tabeli danych (w naszym przypadku do wiersza 24, tabelę J1xM24 zaznaczamy kolorem jasnoniebieskim)

ZADANIE 4.2C (5/6)

13. Zaznaczamy tabelę J1xM24 i tworzymy wykres liniowy pokazany poniżej

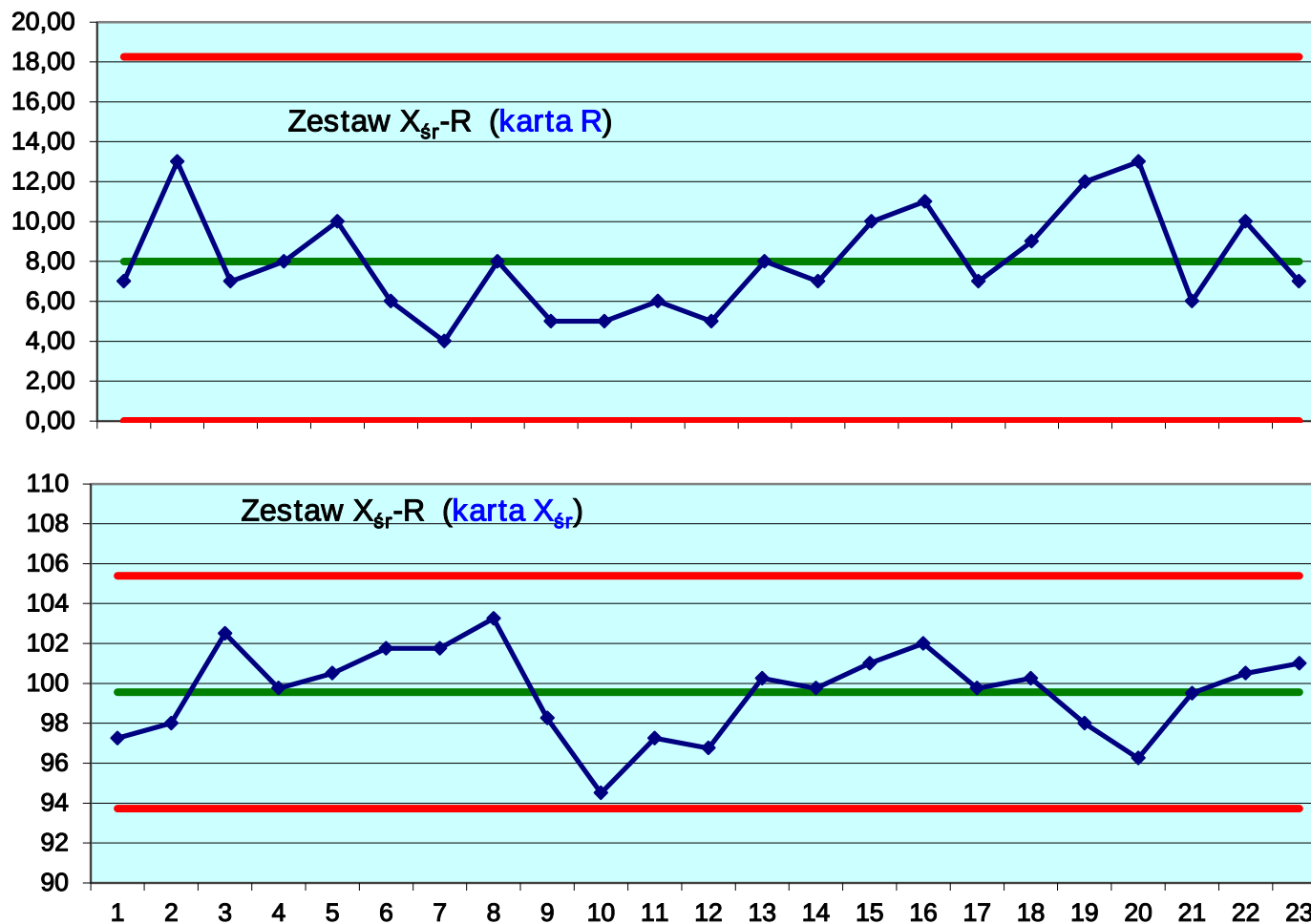


14. Na utworzonym wykresie szukamy sygnałów rozregulowania procesu; w naszym przypadku sygnał taki generuje próbka nr 17

15. Usuwamy próbki generujące sygnały rozregulowania poprzez usunięcie tych wierszy arkusza, w których się one znajdują. Excel automatycznie wykona obliczenia i sporządzi analogiczne wykresy dla zmodyfikowanego zestawu danych

ZADANIE 4.2C (6/6)

16. Po usunięciu wiersza z danymi próbki nr 17 otrzymujemy:



17. Uzyskane wykresy nie zawierają sygnałów rozregulowania procesu i mogą być wykorzystane do sterowania jego dalszym przebiegiem

KARTY KONTROLNE $\bar{X}$ i s

Zestaw kart bardzo podobny do zestawu $\bar{X}$, R . Uważa się, że umożliwia bardziej dokładne sterowanie procesem ponieważ miara s uwzględnia informacje zawarte we wszystkich elementach próbki.

Aby otrzymać odpowiednio wiarygodne wartości odchylenia standardowego musimy pobierać liczniejsze próbki ($n \geq 10$). Zwiększa to zarówno czas, jak i koszty prowadzonych badań. Drugą wadą zestawu kart $\bar{X}$ i s są znacznie trudniejsze obliczenia.

Metodę $\bar{X}$, s zaleca się stosować w przypadkach, gdy pomiary elementów próbek są łatwe, szybkie i tanie (np. pomiary średnicy wałeczków za pomocą suwmiarki elektronicznej).

PROJEKTOWANIE KART $\bar{X}$ i s BEZ ZADANYCH WARTOŚCI NORMATYWNYCH

1. Po wstępnym ustabilizowaniu procesu pobieramy **k** próbek o liczności **n** każda ($k \geq 20$; $n \geq 10$)
2. Po pobraniu każdej próbki dokonujemy pomiarów wchodzących w jej skład elementów uzyskując ($X_1, \dots, X_n$)
3. Dla każdej próbki obliczamy wartość średnią i odchylenie standardowe

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n \quad s = \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n-1)} \quad i = 1, \dots, n$$

4. Wyznaczamy wartości średnie dla wszystkich próbek

$$\bar{\bar{X}} = \sum_{i=1}^k \bar{X}_i / k \quad \bar{s} = \sum_{i=1}^k s_i / k \quad i = 1, \dots, k$$

PROJEKTOWANIE KART $\bar{X}$ i s BEZ ZADANYCH WARTOŚCI NORMATYWNYCH

5. Obliczamy granice kontrolne dla odchylenia standardowego

$$CL = \bar{s} \quad LCL = B_3 \cdot \bar{s} \quad UCL = B_4 \cdot \bar{s}$$

6. Wykreślamy kartę kontrolną s i sprawdzamy, czy wszystkie użyte do jej konstrukcji próbki pochodzą z procesu statystycznie uregulowanego. Jeżeli nie, wyłączamy z obliczeń próbki będące pod wpływem przyczyn specjalnych i z nowym mniejszym zbiorem próbek przystępujemy ponownie do realizacji punktu 4. Sekwencję czynności 4 ÷ 6 powtarzamy tak długo, aż wszystkie różnice pomiędzy rozstępami próbek będzie można uznać za spowodowane zmiennością naturalną

7. Obliczamy granice kontrolne dla wartości średniej

$$CL = \bar{\bar{X}} \quad LCL = \bar{\bar{X}} - A_3 \cdot \bar{s} \quad UCL = \bar{\bar{X}} + A_3 \cdot \bar{s}$$

PROJEKTOWANIE KART $\bar{X}$ i s BEZ ZADANYCH WARTOŚCI NORMATYWNYCH

8. Wykreślamy kartę kontrolną i sprawdzamy, czy wszystkie użyte do jej konstrukcji próbki pochodzą z procesu statystycznie uregulowanego. Jeżeli nie, wyłączamy z obliczeń próbki będące pod wpływem przyczyn specjalnych i z nowym mniejszym zbiorem próbek przystępujemy ponownie do realizacji punktu 4. Sekwencję czynności 4 ÷ 8 powtarzamy tak długo, aż wszystkie różnice między statystykami próbek będzie można uznać za spowodowane zmiennością naturalną.
9. Jeżeli wartości charakterystyk (po ew. selekcji próbek) nie wykazują rozregulowania procesu to sporządzoną kartę można stosować do dalszego sterowania tym procesem.

WSPÓŁCZYNNIKI LICZBOWE DO PROJEKTOWANIA KART KONTROLNYCH $\bar{X}$ i s

We wzorach na granice kontrolne w kartach $\bar{X}$ i s występują współczynniki liczbowe A_3 , B_3 i B_4 . Wartości tych współczynników zależą wyłącznie od liczności próbki. Zestawiono je w poniższej tabeli

n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15
A_3	1,427	1,287	1,182	1,099	1,032	0,975	0,927	0,886	0,850	0,789
B_3	0,000	0,030	0,118	0,185	0,239	0,284	0,321	0,354	0,382	0,428
B_4	2,089	1,970	1,882	1,815	1,761	1,716	1,679	1,646	1,618	1,572

ZADANIE 4.3

W procesie wytwarzania nakrętek jednym z monitorowanych parametrów jest zewnętrzna szerokość nakrętki (wymiar pod klucz). Kontrola tego parametru jest szybka, prosta i tania (suwmiarka elektroniczna), w związku z czym podjęto decyzję o zastosowaniu zestawu kart $\bar{X}$ -s. W celu utworzenia kart pobrano i poddano badaniom 25 dziesięcioelementowych próbek. Wyniki pomiarów próbek zestawiono w tabeli:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\bar{X}$	15,003	15,002	14,998	15,017	14,978	14,995	15,004	14,997	14,994	15,001	14,998	15,005	14,998
s	0,016	0,031	0,034	0,026	0,027	0,021	0,033	0,020	0,015	0,020	0,015	0,036	0,036
n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
$\bar{X}$	15,007	14,995	14,990	14,995	15,005	14,998	14,998	14,992	14,981	14,996	14,982	14,992	
s	0,032	0,027	0,035	0,034	0,030	0,023	0,032	0,046	0,035	0,019	0,030	0,034	

Wykorzystując podane wyżej wyniki zaprojektować zestaw kart $\bar{X}$ -s
opracowano na podstawie [1]

PROJEKTOWANIE KART $\bar{X}$ i s DLA ZADANYCH WARTOŚCI NORMATYWNYCH

Wartości normatywne (X_0 , m , s_0 , σ_0) nie powinny się istotnie różnić od przyszłych wyników procesu. W szczególności powinny być zgodne z jego naturalną zmiennością.

Granice kontrolne dla wartości średniej:

$$CL = X_0 = m \quad LCL = X_0 - \frac{3}{\sqrt{n}} \cdot \sigma_0 \quad UCL = X_0 + \frac{3}{\sqrt{n}} \cdot \sigma_0$$

Granice kontrolne dla rozrzutu:

$$CL = s_0 = C_4 \cdot \sigma_0 \quad \text{bo : } \sigma_0 = s_0 / C_4$$

$$LCL = B_3 \cdot s_0 = B_3 \cdot C_4 \cdot \sigma_0 \quad UCL = B_4 \cdot s_0 = B_4 \cdot C_4 \cdot \sigma_0$$

n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15
C ₄	0,9400	0,9515	0,9594	0,9650	0,9693	0,9727	0,9754	0,9776	0,9794	0,9823

KARTY KONTROLNE POJEDYNCZYCH OBSERWACJI (X i R lub IX-MR)

W niektórych sytuacjach, np. w przypadku badań niszczących koszty badań próbek mogą być bardzo duże. Może się także zdarzyć, że parametr charakteryzujący proces jest w poszczególnych fazach tego procesu niezmienny w czasie (np. określona właściwość partii materiału wejściowego procesu).

W wymienionych wyżej i podobnych do nich przypadkach sterowanie procesem można oprzeć na pojedynczych wynikach ($n = 1$).

W celu oszacowania zmienności takiego procesu stosuje się tzw. **ruchome rozstępy**, czyli bezwzględne różnice wartości kolejnych wyników ($|X_1 - X_2|, |X_2 - X_3|, \dots, |X_{k-1} - X_k|$). Z ruchomych rozstępów oblicza się średni ruchomy rozstęp.

PROJEKTOWANIE KART POJEDYNCZYCH OBSERWACJI X i RUCHOMEGO ROZSTĘPU R

1. Pobieramy i mierzymy k jednoelementowych próbek lub wykonujemy k pomiarów parametru charakteryzującego proces. Uzyskujemy k wyników $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$.
2. Obliczamy wartości ruchomych rozstępów $R_i = |X_i - X_{i-1}|$
3. Obliczamy wartość średnią wyników $\bar{X} = \sum_{i=1}^k X_i / k$
4. Obliczamy wartość średnią rozstępów $\bar{R} = \sum_{i=2}^k R_i / (k - 1)$
5. Obliczamy granice kontrolne dla rozstępu

$$CL = \bar{R} \quad LCL = 0 \quad UCL = 3,267 \cdot \bar{R}$$

PROJEKTOWANIE KART POJEDYNCZYCH OBSERWACJI $\bar{X}$ i RUCHOMEGO ROZSTĘPU $\bar{R}$

6. Wykreślamy kartę kontrolną $\bar{R}$ i sprawdzamy, czy wszystkie użyte do jej konstrukcji próbki pochodzą z procesu statystycznie uregulowanego. Jeżeli nie, wyłączamy z obliczeń próbki będące pod wpływem przyczyn specjalnych i z nowym mniejszym zbiorem próbek przystępujemy ponownie do realizacji punktu 3. Sekwencję czynności 3 ÷ 6 powtarzamy tak długo, aż wszystkie różnice pomiędzy rozstępami próbek będzie można uznać za spowodowane zmiennością naturalną

7. Obliczamy granice kontrolne dla wartości średniej

$$CL = \bar{\bar{X}} \quad LCL = \bar{\bar{X}} - 3 \cdot \bar{\bar{R}} / d_2 \quad UCL = \bar{\bar{X}} + 3 \cdot \bar{\bar{R}} / d_2$$

PROJEKTOWANIE KART POJEDYNCZYCH OBSERWACJI **X** i RUCHOMEGO ROZSTĘPU **R**

8. Wykreślamy kartę kontrolną **X** i sprawdzamy, czy wszystkie użyte do jej konstrukcji próbki pochodzą z procesu statystycznie uregulowanego. Jeżeli nie, wyłączamy z obliczeń próbki będące pod wpływem przyczyn specjalnych i z nowym mniejszym zbiorem próbek przystępujemy ponownie do realizacji punktu 3. Sekwencję czynności 3 ÷ 8 powtarzamy tak długo, aż wszystkie różnice między statystykami próbek będzie można uznać za spowodowane zmiennością naturalną.
9. Jeżeli wartości charakterystyk (po ew. selekcji próbek) nie wykazują już rozregulowania procesu to utworzone karty można zacząć stosować do dalszego sterowania tym procesem

KARTY KONTROLNE POJEDYNCZYCH OBSERWACJI – CHARAKTERYSTYKA

1. Karty pojedynczych obserwacji (X i R) powinny być w zasadzie stosowane tylko w tych przypadkach, gdy zmienna X posiada rozkład zbliżony do normalnego; jeżeli warunek ten nie jest spełniony należy zachować szczególną ostrożność w interpretowaniu uzyskanych przebiegów.
2. W kartach X i R nie występuje minimalizacja zmienności przypadkowej dzięki uśrednianiu, w związku z czym nie są one tak czułe na zmiany procesu, jak karty $\bar{X}$ i R .
3. Ze względu na wady kart X i R należy zawsze rozważyć możliwość zastąpienia ich kartami $\bar{X}$ i R o mniej licznych i rzadziej pobieranych próbkach.

ZADANIE 4.4

W laboratorium poddano analizie próbki mleka w proszku. Ze względu na bardzo małą zmienność badanych cech w próbkach pochodzących z tej samej partii zdecydowano, że każdą partię będzie reprezentować tylko jedna próbka. W tabeli poniżej zestawiono wyniki badania wilgotności 13-u próbek pochodzących z 13-u kolejnych partii produkcyjnych

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
X[%]	2,9	3,2	3,6	4,3	3,8	3,5	3,0	3,1	3,6	3,5	2,8	4,4	4,0
R[%]	-	0,3	0,4	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Na podstawie zebranych danych zaprojektować kartę kontrolną X i R do sterowania procesem produkcji tak, aby wilgotność w kolejnych partiach produktu była na tym samym, co w kontrolowanych partiach poziomie. Założyć, że wilgotność mleka w populacji partii posiada rozkład zbliżony do normalnego.

KARTY KONTROLNE MEDIANY

Karty mediany stanowią alternatywę dla kart $\bar{X}$ i $\bar{R}$ (dają ten sam rodzaj informacji). Ich stosowanie jest szczególnie zasadne w przypadkach, gdy w zbiorowości danych charakteryzujących kontrolowany proces występują tzw. dane odstające.

Karty kontrolne mediany nie wymagają wielu obliczeń i są łatwe w prowadzeniu.

Granice kontrolne kart mediany oblicza się najczęściej w oparciu o średnią wartość median poszczególnych próbek ($\overline{Me}$) i średnią wartość rozstępów próbek ($\bar{R}$).

Możliwe jest również wykorzystanie mediany median i mediany rozstępów.

PROJEKTOWANIE KART KONTROLNYCH

Me i R

1/3

1. Pobieramy **k** próbek o licznosci **n** każda ($k \geq 20$; $n = 4 \div 6$);
2. Po pobraniu każdej próbki dokonujemy pomiarów wchodzących w jej skład elementów uzyskując (**$X_1, \dots, X_n$**);
3. Dla każdej próbki obliczamy medianę (**Me**) i rozstęp (**R**):

$$Me = X_{(n+1)/2} \quad \text{lub} \quad Me = (X_{n/2} + X_{(n/2)+1}) / 2$$

$$R = \max\{X_i\} - \min\{X_i\} \quad i = 1, \dots, n$$

4. Wyznaczamy wartości średnie dla wszystkich próbek:

$$\overline{Me} = \sum_{i=1}^k Me_i / k \quad \overline{R} = \sum_{i=1}^k R_i / k \quad i = 1, \dots, k$$

5. Obliczamy granice kontrolne dla rozrzutu:

$$CL = \overline{R} \quad LCL = D_3 \cdot \overline{R} \quad UCL = D_4 \cdot \overline{R}$$

PROJEKTOWANIE KART KONTROLNYCH

Me i R

2/3

6. Wykreślamy kartę kontrolną R i sprawdzamy, czy wszystkie użyte do jej konstrukcji próbki pochodzą z procesu statystycznie uregulowanego. Jeżeli nie, wyłączamy z obliczeń próbki będące pod wpływem przyczyn specjalnych i z nowym mniejszym zbiorem próbek przystępujemy ponownie do realizacji punktu 4. Sekwencję czynności 4 ÷ 6 powtarzamy tak długo, aż wszystkie różnice pomiędzy rozstępami próbek będzie można uznać za spowodowane zmiennością naturalną

7. Obliczamy granice kontrolne dla mediany:

$$CL = \bar{Me} \quad LCL = \bar{Me} - A_4 \cdot \bar{R} \quad UCL = \bar{Me} + A_4 \cdot \bar{R}$$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A ₄	1,88	1,19	0,80	0,69	0,55	0,51	0,43	0,41	0,36

Wg PN-ISO 8258

PROJEKTOWANIE KART KONTROLNYCH

Me i R

3/3

8. Wykreślamy kartę kontrolną Me; sprawdzamy, czy wszystkie użyte do jej konstrukcji próbki pochodzą z procesu statystycznie uregulowanego. Jeżeli nie, wyłączamy z obliczeń próbki będące pod wpływem przyczyn specjalnych i z nowym mniejszym zbiorem próbek przystępujemy ponownie do realizacji punktu 4. Sekwencję czynności $4 \div 8$ powtarzamy tak długo, aż wszystkie różnice między statystykami próbek będzie można uznać za spowodowane zmiennością naturalną.
9. Jeżeli wartości charakterystyk (po ew. selekcji próbek) nie wykazują rozregulowania procesu utworzone karty można zacząć stosować do dalszego sterowania tym procesem.

Uwaga! Karta mediany z granicami $\pm 3\sigma$ daje wolniejszą odpowiedź na rozregulowanie procesu niż karta $\bar{X}$

DANE ALTERNATYWNE (KATEGORIALNE)

Dane alternatywne to najczęściej informacje postaci:

- dany egzemplarz wyrobu: **jest dobry** lub **jest zły**;
- dana cecha (atrybut) w badanym egzemplarzu wyrobu: **występuje** lub **nie występuje**;

Podane wyżej przykłady danych alternatywnych możemy opisać za pomocą zmiennej zerojedynekowej, np.:

$X = 0$, gdy wyrób spełnia wymagania i **$X = 1$** , gdy wyrób jest niezgodny z wymaganiami.

KARTY KONTROLNE DLA DANYCH ALTERNATYWNYCH - CHARAKTERYSTYKA

Karty kontrolne dla danych alternatywnych nie są najlepszym narzędziem SPC. Bardzo często jednak, zwłaszcza w momencie wprowadzania technik SPC, dane alternatywne są jedynym rodzajem danych, jakimi dysponujemy.

Wadą kart kontrolnych dla danych alternatywnych jest konieczność pobierania dużych próbek oraz mniejsza dokładność (karty te są mniej czułe na rozregulowania procesu i dają mniej dokładne informacje o jego przebiegu).

Karty kontrolne dla danych alternatywnych są przeważnie znacznie prostsze w prowadzeniu niż karty dla danych liczbowych:

- wykonuje się tylko jeden wykres;**
- o wiele prostsze są prowadzone obliczenia (ustala się tylko liczbę braków lub niezgodności ewentualnie częstości ich występowania);**

KARTY KONTROLNE p i np

Jeżeli informacje o przebiegu procesu ograniczone są do ilości wyrobów niezgodnych wykrytych w kolejnych wyprodukowanych partiach czy pobranych próbkach, to do sterowania tym procesem można wykorzystać **kartę p** lub **kartę np**.

Obie w/w karty oparte są na rozkładzie dwumianowym - oznacza to przyjęcie założenia, że każdy egzemplarz wyrobu ma jednakowe ryzyko wadliwości. Od wielkości tego ryzyka zależy liczność kontrolowanych próbek. Powinna być ona na tyle duża, aby średnia liczba wyrobów niezgodnych w kontrolowanych partiach przekraczała wartość 2.

Karta np (karta liczby wyrobów niezgodnych) może być stosowana tylko w przypadkach, gdy liczności kolejnych kontrolowanych partii/próbek są jednakowe. W przypadku **karty p** (karty frakcji wyrobów niezgodnych) spełnienie tego warunku nie jest konieczne.

KARTA KONTROLNA np

Karta np, zwana też kartą liczby wyrobów niezgodnych, konstruowana jest przy założeniu, że wystąpienie wyrobu niezgodnego można opisać zmienną losową zero-jedynkową o prawdopodobieństwie sukcesu równym p . Przy tym założeniu zmienna losowa X = liczbie braków w n -elementowej próbce będzie posiadała rozkład dwumianowy o parametrach n i p , a zmienna losowa

$$Z = \frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}$$

rozkład zbliżony do normalnego o parametrach $m_Z = 0$ i $\sigma_Z = 1$;

Funkcja opisująca zmienną Z jest funkcją testową hipotezy dotyczącej uregulowania procesu. Dla hipotezy zerowej

H_0 : proces jest statystycznie uregulowany

zmienna Z winna spełniać warunek: $-3 \leq Z \leq 3$. Wobec tego granice kontrolne karty winny odpowiadać wartościom $Z = -3$ i $Z = 3$, a linia centralna wartości $Z = 0$

KARTA KONTROLNA np

Przekształcając zależność opisującą zmienną Z dostajemy:

$$X = n \cdot p + Z \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

W oparciu o powyższą zależność dostajemy

$$CL = X_{(Z=0)} = n \cdot \bar{p}$$

$$LCL = X_{(Z=-3)} = n \cdot \bar{p} - 3 \cdot \sqrt{n \cdot \bar{p} \cdot (1 - \bar{p})}$$

$$UCL = X_{(Z=3)} = n \cdot \bar{p} + 3 \cdot \sqrt{n \cdot \bar{p} \cdot (1 - \bar{p})}$$

gdzie $\bar{p}$ – średnia frakcja braków w próbkach, stanowi estymator nieznanej wartości p ;

Karta np jest najprostszą i najłatwiejszą w prowadzeniu kartą kontrolną. Ponieważ n oznacza licznosc partii/próbki kontrolowanych wyrobów, a p – procentowy udział wyrobów niezgodnych w tej partii, to iloczyn $n \cdot p$ oznacza po prostu liczbe wykrytych wyrobów niezgodnych.

ZADANIE 4.5

Klawisze do klawiatur komputerowych wykonywane na wtryskarce przekazywane są do kontroli technicznej w partiach po 80 sztuk każda. W wyniku kontroli technicznej (badania organoleptyczne) uzyskujemy informację o liczbie wyrobów niezgodnych $n_{n,i}$ w każdej z badanych partii. Wyniki badań kolejnych 25-u partii przedstawiono w poniższej tabeli:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$n_{n,i}$	1	5	4	2	7	11	8	7	4	0	1	7	6
i	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
$n_{n,i}$	8	11	5	6	2	4	6	4	6	7	5	4	

Zaprojektować kartę kontrolną do sterowania procesem wytwarzania klawiszy.

(opracowano na podstawie [1])

ROZWIĄZANIE ZADANIA 4.5 1/2

1. Obliczamy średnią ilość i średni udział wyrobów niezgodnych w próbkach

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^{25} n_{n,i} / \sum_{i=1}^{25} n_i = 131 / 25 \cdot 80 = 0,0655$$

$$n \cdot \bar{p} = 80 \cdot 0,0655 = 5,24$$

Ponieważ $n \cdot \bar{p} > 2$ i próbki są jednakowo liczne możemy zastosować zarówno kartę np jak i kartę p

2. Obliczamy współrzędne linii karty np

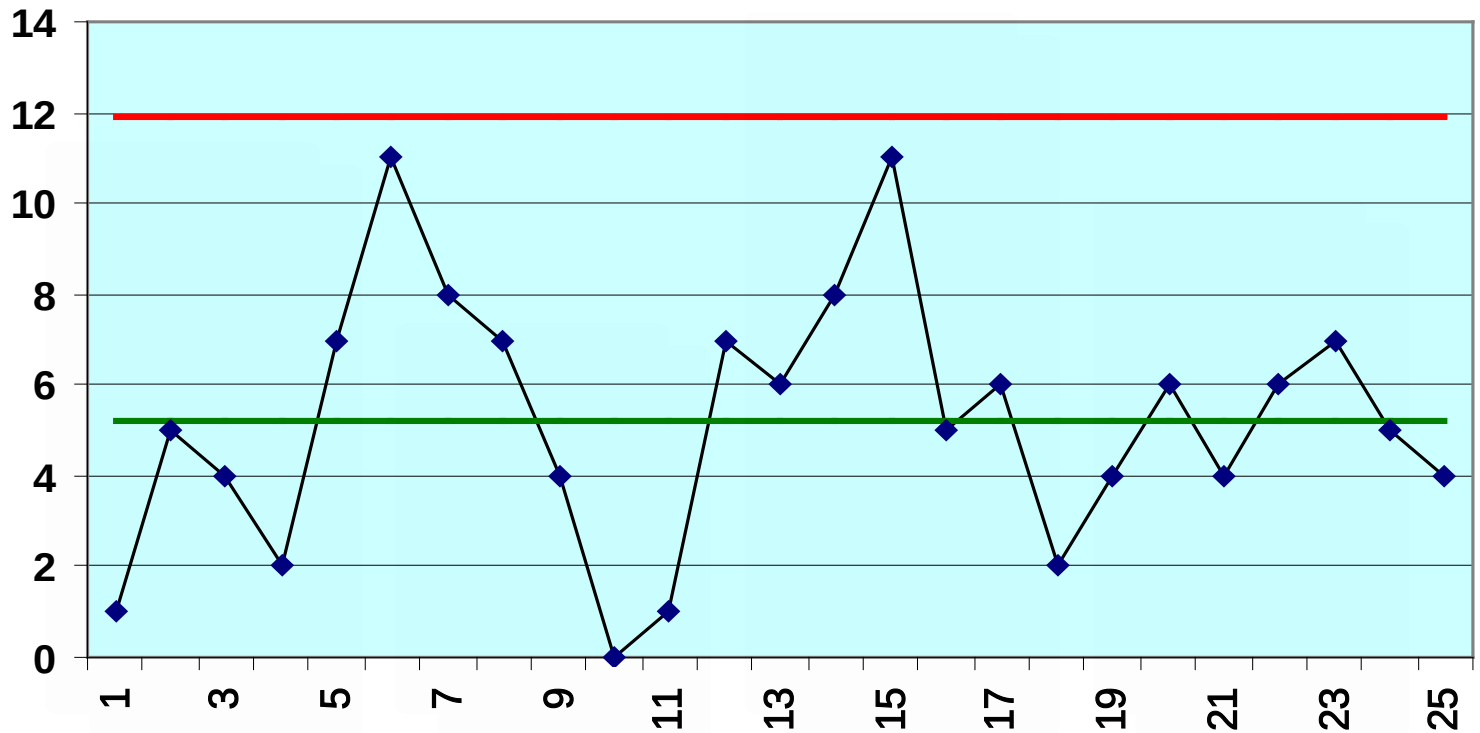
$$CL = n \cdot \bar{p} = 5,24$$

$$\begin{aligned} LCL &= n \cdot \bar{p} - 3 \cdot \sqrt{n \cdot \bar{p} \cdot (1 - \bar{p})} = 5,24 - 3 \cdot \sqrt{5,24 \cdot (1 - 0,0655)} = \\ &= -1,40 ; \text{przyjmujemy } LCL = 0 \end{aligned}$$

$$UCL = n \cdot \bar{p} + 3 \cdot \sqrt{n \cdot \bar{p} \cdot (1 - \bar{p})} = 5,24 + \sqrt{5,24 \cdot (1 - 0,0665)} = 11,9$$

ROZWIĄZANIE ZADANIA 4.5 2/2

3. Wykreślamy linie karty i nanosimy na nią wyniki badania próbek



Ponieważ wykres nie wskazuje na rozregulowanie procesu w trakcie wykonywania próbek wykorzystanych do jego utworzenia, utworzone karty można zacząć stosować do dalszego sterowania tym procesem.

KARTA KONTROLNA p 1/3

Karta kontrolna p jest używana w przypadkach, gdy do sterowania procesem wykorzystuje się informacje o procentowym udziale (frakcji) wyrobów niezgodnych w kolejnych partiach produktu.

Dla stałej liczności partii/próbek karta p jest w zasadzie równoważna karcie np. Współrzędne linii karty p oblicza się w tym przypadku z zależności:

$$CL = \bar{p} = \sum_{i=1}^k n_{n,i} / \sum_{i=1}^k n = \sum_{i=1}^k n_{n,i} / n \cdot k$$

$$LCL = \bar{p} - 3 \cdot \sqrt{\bar{p} \cdot (1 - \bar{p}) / n}$$

$$UCL = \bar{p} + 3 \cdot \sqrt{\bar{p} \cdot (1 - \bar{p}) / n}$$

gdzie $n_{n,i}$ oznacza liczbę wyrobów niezgodnych w i-tej partii

KARTA KONTROLNA p 2/3

Kartę kontrolną p można stosować również w przypadkach, kiedy oceniane partie/próbki różnią się licznością (np. liczba operacji wykonana w miesiącu na określonym oddziale szpitala). Ponieważ jednak położenie linii kontrolnych zależy od licznosci próbki, w przypadkach takich granice kontrolne powinny być obliczane oddzielnie dla każdej z nich.

$$LCL_i = \bar{p} - 3 \cdot \sqrt{\bar{p} \cdot (1 - \bar{p}) / n_i}$$

$$UCL_i = \bar{p} + 3 \cdot \sqrt{\bar{p} \cdot (1 - \bar{p}) / n_i}$$

Ten sposób prowadzenia karty jest bardzo pracochłonny, dlatego w przypadku, kiedy licznosci ocenianych próbek różnią się niewiele ($\pm 25\%$) można oceniać przebieg procesu na podstawie karty obliczonej dla wspólnej, średniej licznosci próbek. Jeżeli jednak ocena jakiejś próbki na tak sporządzonym wykresie budzi wątpliwości, należy obliczyć dla niej granice indywidualne.

KARTA KONTROLNA p 3/3

Jeszcze innym sposobem rozwiązania problemów występujących przy niejednakowych licznościach kontrolowanych partii jest wyrażenie wartości frakcji wyrobów niezgodnych p_i w postaci standaryzowanej Z_i .

Standaryzacja polega na określeniu różnicy pomiędzy frakcją wyrobów niezgodnych w próbkce, a frakcją średnią wszystkich próbek i wyrażeniu tej różnicy w jednostkach odchylenia standardowego, czyli:

$$Z_i = (p_i - \bar{p}) / \sqrt{\bar{p} \cdot (1 - \bar{p}) / n_i}$$

Ponieważ zmienna Z_i posiada rozkład zbliżony do rozkładu normalnego o parametrach $m = 0$ i $\sigma = 1$ więc granice kontrolne: $CL = 0$; $LCL = -3$ i $UCL = 3$

Ze względu na trudność obliczeń przy sterowaniu procesem za pomocą tej karty, stanowisko kontrolne powinno być wyposażone w komputer.

ZADANIE 4.6

W procesie produkcji transformatorów kontroli podlegała co 10-a wykonana sztuka. Wynik kontroli miał charakter alternatywny (spełnia wymagania, nie spełnia wymagań). Wyniki kontroli przeprowadzonych w ciągu ostatniego miesiąca zestawiono w poniższej tabeli ($n_{n,i}$ - liczba sztuk niespełniających wymagań)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	158	140	140	155	160	144	139	151	163	148	150	153	149
$n_{n,i}$	11	11	8	6	4	7	10	11	9	5	2	7	7
i	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
n_i	145	160	165	136	153	150	148	135	165	143	138	144	161
$n_{n,i}$	8	6	15	18	10	9	5	0	12	10	8	14	20

Zaprojektować kartę kontrolną do sterowania tym procesem

(opracowano na podstawie [4])

ROZWIĄZANIE ZADANIA 4.6 1/5

1. Obliczamy średnią ilość i średni udział wyrobów niezgodnych w próbkach

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^{26} n_{n,i} / \sum_{i=1}^{26} n_i = 233 / 3893 = 0,060$$

$$\bar{n}_{n,i} = \sum_{i=1}^{26} n_{n,i} / k = 233 / 26 = 8,96$$

Ponieważ liczności próbek są różne możemy zastosować tylko kartę p. (warunek dot. średniej liczby braków w próbce jest spełniony).

2. Obliczamy współrzędne linii karty p

Sprawdźmy możliwość wykorzystania stałych granic dla średniej liczności próbki

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{26} n_i / k = 3893 / 26 = 149,73$$

$$n_{\min} = 135 = 0,902 \cdot \bar{n} ; \quad n_{\max} = 165 = 1,102 \cdot \bar{n}$$

ROZWIĄZANIE ZADANIA 4.6 2/5

Ponieważ wahania liczności próbek wokół wartości średniej wynoszą około 10% można zaprojektować kartę ze stałymi granicami kontrolnymi opartymi na średniej liczności próbki

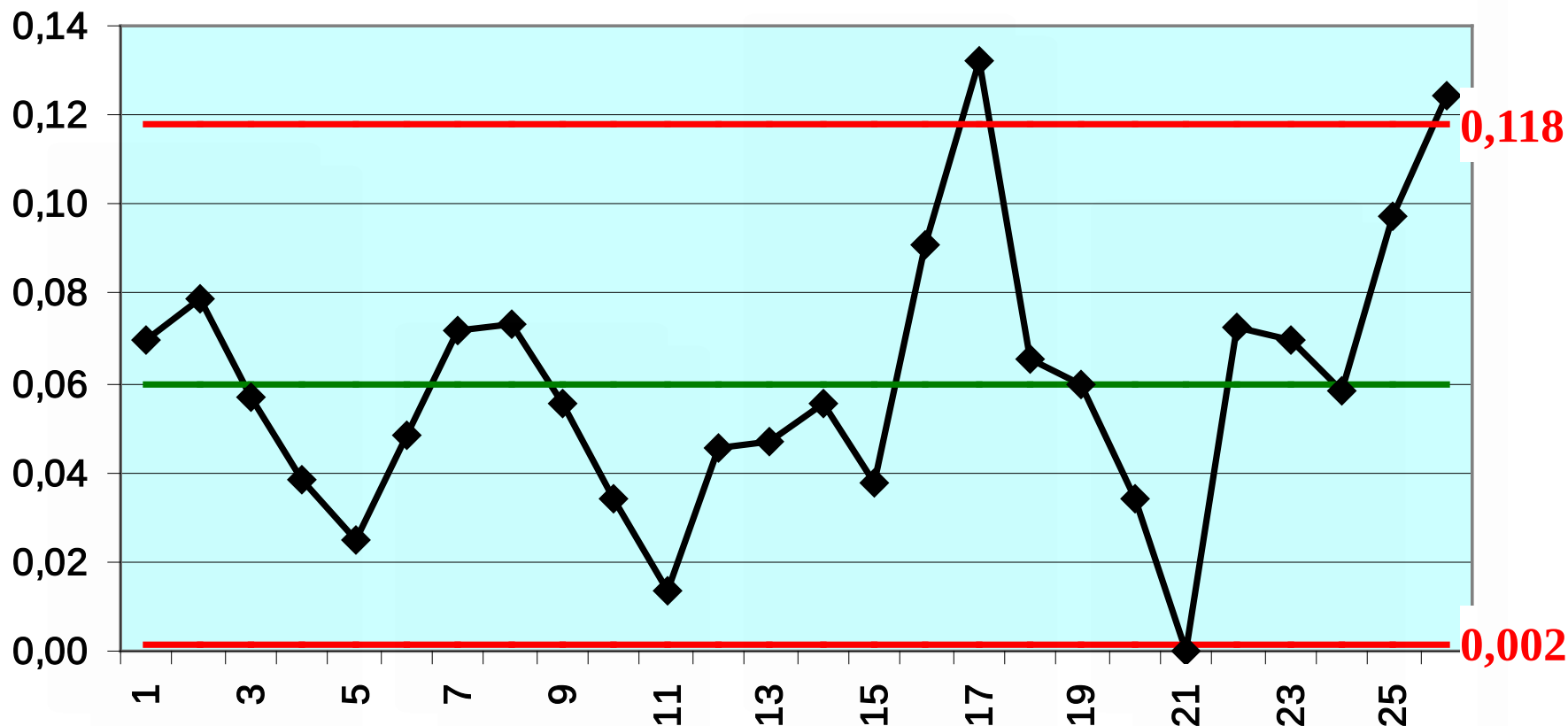
$$CL = \bar{p} = 0,060$$

$$\begin{aligned} LCL &= \bar{p} - 3 \cdot \sqrt{\bar{p} \cdot (1 - \bar{p}) / \bar{n}} = \\ &= 0,060 - 3 \cdot \sqrt{0,06 \cdot (1 - 0,06) / 149,73} = \\ &= 0,060 - 0,058 = 0,002 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{p} + 3 \cdot \sqrt{\bar{p} \cdot (1 - \bar{p}) / \bar{n}} = \\ &= 0,060 + 3 \cdot \sqrt{0,06 \cdot (1 - 0,06) / 149,73} = \\ &= 0,060 + 0,058 = 0,118 \end{aligned}$$

Po wykreśleniu linii karty p i naniesieniu wyników kontroli dostajemy:

ROZWIĄZANIE ZADANIA 4.6 3/5



Frakcje jednostek niezgodnych w próbkach 17 i 26 wykraczają poza górną granicę kontrolną, w związku z czym próbki te zostają wyeliminowane z dalszych obliczeń

ROZWIĄZANIE ZADANIA 4.6 4/5

Obliczamy ponownie współrzędne linii karty p dla pozostałych 24-ech próbek:

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^k n_{n,i} / \sum_{i=1}^k n_i = 195 / 3596 = 0,054$$

$$\bar{n}_{n,i} = \sum_{i=1}^k n_{n,i} / k = 195 / 24 = 8,13$$

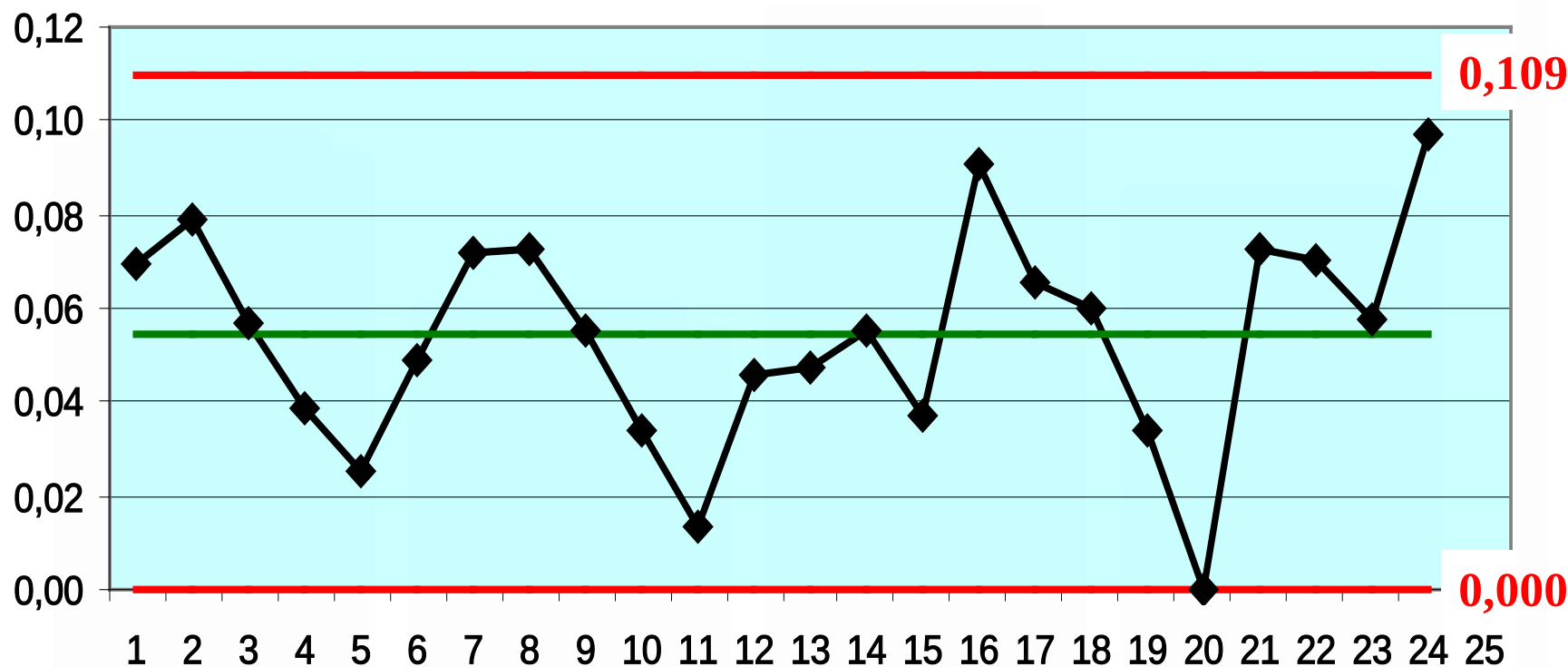
$$CL = \bar{p} = 0,054$$

$$\begin{aligned} LCL &= \bar{p} - 3 \cdot \sqrt{\bar{p} \cdot (1 - \bar{p}) / \bar{n}} = 0,054 - 3 \cdot \sqrt{0,06 \cdot (1 - 0,06) / 149,73} = \\ &= 0,054 - 0,055 = -0,001 \quad \text{przyjmujemy } LCL = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{p} + 3 \cdot \sqrt{\bar{p} \cdot (1 - \bar{p}) / \bar{n}} = 0,054 + 3 \cdot \sqrt{0,06 \cdot (1 - 0,06) / 149,73} = \\ &= 0,054 + 0,055 = 0,109 \end{aligned}$$

ROZWIĄZANIE ZADANIA 4.6 5/5

Po ponownym wykreśleniu linii karty p i naniesieniu wyników kontroli dostajemy:



Przedstawiony wyżej wykres nie wskazuje na rozregulowanie procesu. Karta może służyć do dalszego jego monitorowania.

KIERUNKI STEROWANIA

Stosując karty dla danych liczbowych należy tak sterować procesem, aby wartości statystyk próbek były możliwie bliskie wartości średniej (leżały możliwie blisko linii centralnej). Odejście od linii centralnej, zarówno w górę jak i w dół, jest przeważnie jednakowo niekorzystne.

Przy stosowaniu kart alternatywnych celem sterowania nie jest linia centralna, ale dolna granica kontrolna. Inaczej mówiąc im niżej leży wykres **p** (**np**) tym lepiej, a ideałem jest osiągnięcie dla wszystkich próbek $p = 0$. W tej sytuacji przesunięcie się wykresu powyżej wartości średniej jest niekorzystne i należy eliminować przyczyny powodujące taki stan rzeczy.

OBSZAR ODNIESIENIA

W przypadku kart kontrolnych p i np wartością odniesienia dla liczby wykrytych jednostek niezgodnych była liczność próbki. W praktyce występują sytuacje, w których zlicza się jednostki niezgodne lub niezgodności, ale próbka nie występuje. W takich przypadkach dla zliczanych wartości przyjmuje się inną wartość odniesienia. Może nią być określony przedział czasu, określona długość, powierzchnia czy objętość, egzemplarz produktu, itp (np.: **liczba reklamacji zgłoszona w ciągu miesiąca, liczba skaz na 1m² arkusza blachy czy liczba tzw. literówek w arkuszu wydawniczym**).

Wielkość, bądź jej określony przedział, przyjęty jako odniesienie dla liczby zliczanych niezgodności nazywany będzie dalej **obszarem odniesienia**.

KARTY KONTROLNE c i u

Jeżeli spełnione są dwa warunki:

- prawdopodobieństwo wystąpienia niezgodności w każdym punkcie obszaru odniesienia jest jednakowe oraz
- ilość niezgodności występujących w jednym obszarze nie zależy od ilości niezgodności występujących w innych obszarach

to zmienna c równa liczbie wykrytych niezgodności w poszczególnych obszarach odniesienia posiada rozkład Poissona o $\lambda = \bar{c}$, gdzie $\bar{c}$ oznacza średnią ilość niezgodności w zbiorowości obszarów odniesienia

Na rozkładzie Poissona (rozkładzie zdarzeń rzadkich) oparta jest konstrukcja kart kontrolnych **c** i **u**. **Karta c** (karta liczby niezgodności) stosowana jest w przypadku, gdy poszczególne obszary odniesienia są tej samej wielkości, **karta u** (karta liczby niezgodności na jednostkę obszaru) nie wymaga spełnienia tego warunku.

KARTA KONTROLNA c

Na karcie c wykreśla się liczbę niezgodności wykrytych w obszarze odniesienia.

Współrzędne linii tej karty oblicza się z następujących zależności:

$$CL = \bar{c} = \sum_{i=1}^k c_i / k ;$$

$$LCL = \max \left\{ 0; \bar{c} - 3 \cdot \sqrt{\bar{c}} \right\}$$

$$UCL = \bar{c} + 3 \cdot \sqrt{\bar{c}}$$

Zdaniem autorów [2] liczba niezgodności nie jest najlepszym typem danych dla potrzeb SPC. W praktyce zdarza się jednak, że jest to jedyny typ danych dostępnych w chwili rozpoczynania programu statystycznego sterowania procesem.

ZADANIE 4.7

Kontrola techniczna taśmy zakładanej do określonego typu kaset magnetowidowych polegała na określeniu liczby wad powierzchni na długości taśmy (350 m). Wyniki tej kontroli zestawiono w poniższej tabeli:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c _i	7	1	2	5	0	6	2	0	4	4
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
c _i	6	3	3	3	1	6	3	1	5	6

Na podstawie powyższych danych skonstruować kartę do statystycznego sterowania procesem produkcji taśmy

ROZWIĄZANIE ZADANIA 4.7 1/2

Ponieważ dane z kontroli są liczbami niezgodności występujących na powierzchni jednakowej długości odcinków taśm więc na ich podstawie można skonstruować zarówno kartę c jak i kartę u. Przy braku jakichkolwiek zaleceń wybieramy kartę c ponieważ jest prostsza w prowadzeniu.

Obliczamy współrzędne linii kontrolnych:

$$\bar{c} = \sum_{i=1}^{26} c_i / k = 68 / 20 = 3,4$$

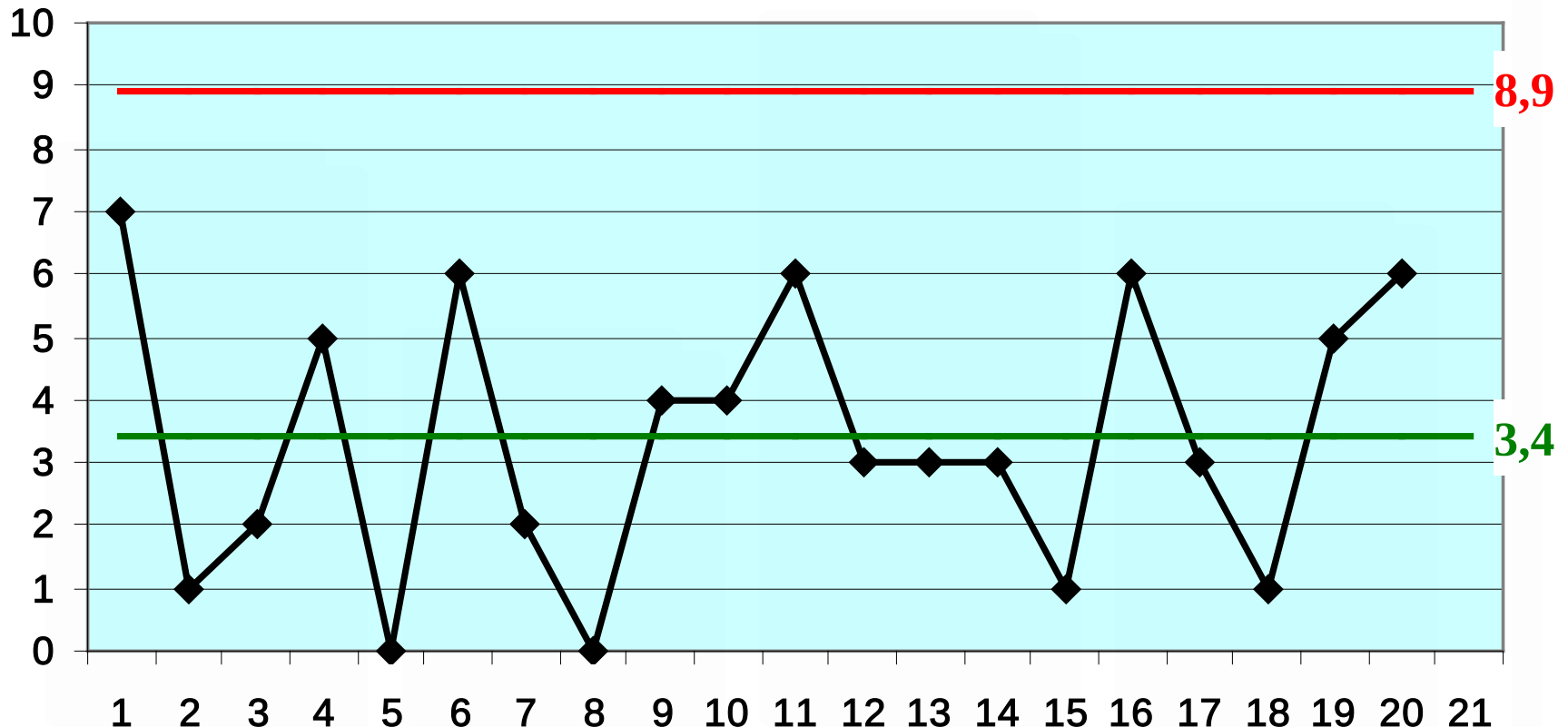
$$CL = \bar{c} = 3,4$$

$$LCL = \max \left\{ 0; \bar{c} - 3 \cdot \sqrt{\bar{c}} \right\} = \max \left\{ 0; 3,4 - 3 \cdot \sqrt{3,4} \right\} = 0$$

$$UCL = \bar{c} + 3 \cdot \sqrt{\bar{c}} = 3,4 + 3 \cdot \sqrt{3,4} = 8,9$$

ROZWIĄZANIE ZADANIA 4.7 2/2

Po wykreśleniu linii karty c i naniesieniu wyników kontroli dostajemy:



Dane wstępne wskazują, że proces jest statystycznie uregulowany. Karta może służyć do dalszego monitorowania procesu

KARTA KONTROLNA u 1/2

Porównywanie liczby niezgodności występujących w różnych obszarach odniesienia nie ma większego sensu, jeżeli obszary te różnią się między sobą wielkością. W przypadkach takich porównywać należy gęstość niezgodności, czyli ilość niezgodności przypadających na jednostkę obszaru odniesienia.

Do monitorowania gęstości niezgodności służy karta u. Współrzędne jej linii kontrolnych wyznacza się z zależności:

$$CL = \bar{u} = \sum_{i=1}^k c_i / \sum_{i=1}^k n_i ;$$

$$LCL_i = \max \left\{ 0; \bar{u} - 3 \cdot \sqrt{\bar{u}/n_i} \right\}$$

$$UCL_i = \bar{u} + 3 \cdot \sqrt{\bar{u}/n_i}$$

n_i – wielkość obszaru odniesienia (liczba jednostek, w których wyrażamy wielkość tego obszaru)

KARTA KONTROLNA u 2/2

Z podanych wcześniej zależności wynika, że położenie granic kontrolnych zależy od wielkości obszaru odniesienia. W przypadku obszarów o różnych wielkościach współrzędne granic kontrolnych powinny być więc obliczane oddzielnie dla każdego z nich. Występuje w tym względzie pełna analogia do karty p. Analogiczne są również sposoby rozwiązania tego problemu:

- wyznaczanie indywidualnych granic kontrolnych dla każdego z obszarów odniesienia;
- wyznaczanie wspólnych granic kontrolnych dla średniej wielkości obszaru (tylko w przypadkach, gdy różnice wielkości obszarów nie są zbyt duże);
- standaryzacja zmiennej u;

ZADANIE 4.8

Taśma magnetowidowa jest produkowana w odcinkach o długości 4000m, a następnie cięta na odcinki o długościach 200, 260, 380 i 500 m (w zależności od rodzaju kasety). Po nawinięciu na szpulę taśma poddawana jest kontroli polegającej na określeniu liczby wad powierzchni na całej długości taśmy.

Wyniki ostatnich 25-u kontroli zestawiono w poniższej tabeli:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
l_i	260	500	380	500	200	260	200	380	380	500	200	380	260
c_i	7	17	8	20	3	2	7	15	5	14	9	13	3
i	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
l_i	260	380	200	380	260	500	260	260	380	500	380	260	
c_i	5	10	7	8	10	7	2	9	15	7	10	12	

Na podstawie powyższych danych skonstruować kartę kontrolną do sterowania procesem produkcji taśmy.

ROZWIĄZANIE ZADANIA 4.8 1/2

Ponieważ zliczana jest ilość niezgodności i ponieważ obszary odniesienia (długości kontrolowanych taśm) są różne, to jedyną możliwą do zaprojektowania kartą kontrolną jest karta u.

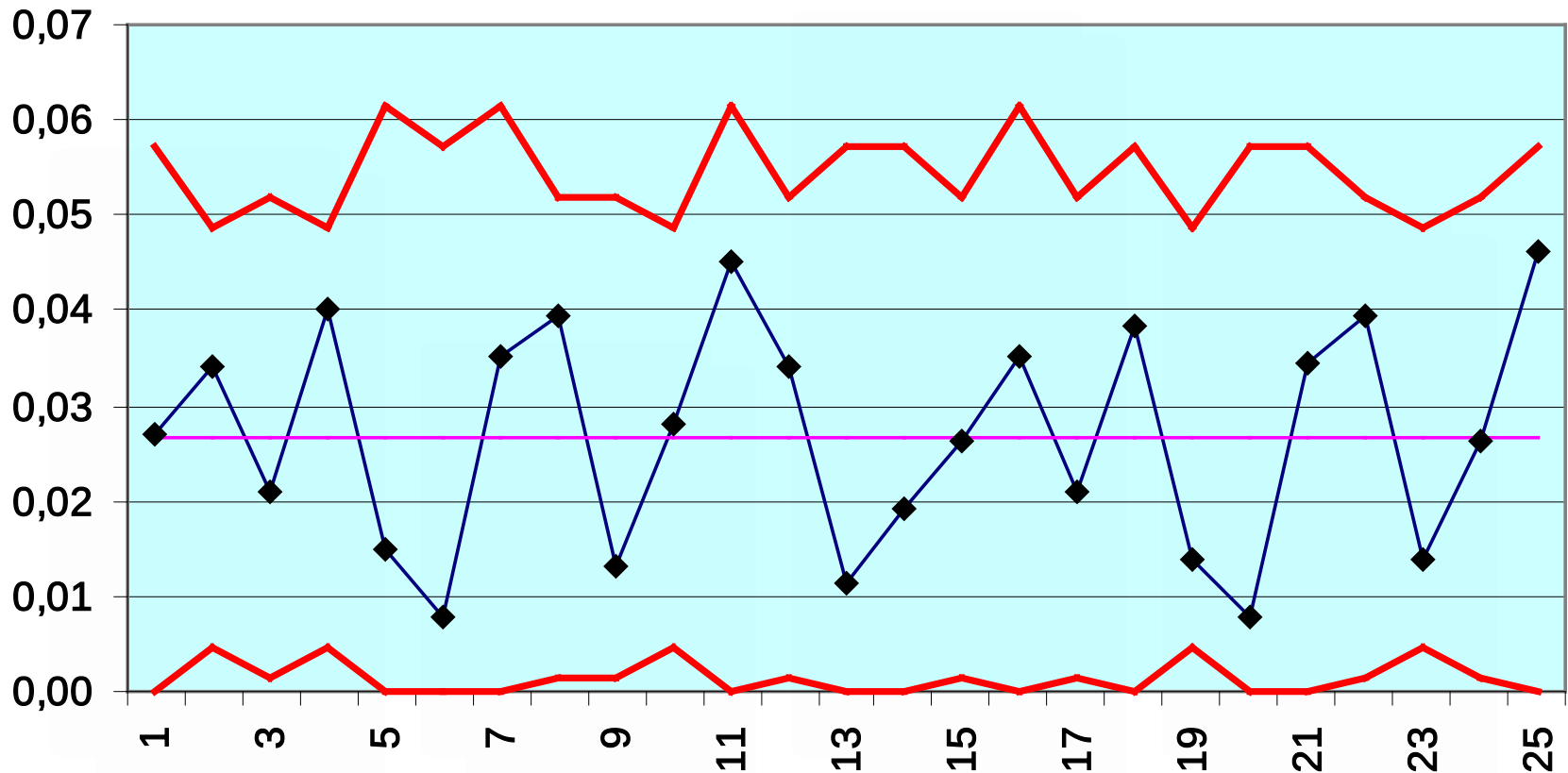
Ponieważ wielkości obszarów odniesienia są mocno zróżnicowane należy dla każdego z nich zastosować indywidualne granice kontrolne. Obliczamy je następująco:

$$CL = \bar{u} = \sum_{i=1}^{25} c_i / \sum_{i=1}^{25} n_i = 225 / 8420 = 0,0267;$$

$$LCL_i = \bar{u} - 3 \cdot \sqrt{\bar{u} / n_i} = 0,0267 - 3 \cdot \sqrt{0,0267 / n_i}$$

$$UCL_i = \bar{u} + 3 \cdot \sqrt{\bar{u} / n_i} = 0,0267 + 3 \cdot \sqrt{0,0267 / n_i}$$

ROZWIĄZANIE ZADANIA 4.8 2/2



Dane wstępne wskazują, że proces jest statystycznie uregulowany. Karta może służyć do dalszego monitorowania procesu

STATYSTYCZNE STEROWANIE PROCESAMI

Część V

ZDOLNOŚĆ PROCESU

MODEL PROCESU

W większości przypadków szukania rozwiązań różnych problemów dobrym punktem wyjścia okazuje się stworzenie koncepcyjnego modelu problemu, który należy rozwiązać.

„... zbudowanie przybliżonego, i nawet dalekiego od doskonałości modelu dostarcza często materiału do opracowania strategii działania lepszej, niż strategia nie oparta na żadnym modelu teoretycznym.” [2]

Powyższa zasada dotyczy również statystycznego sterowania procesami. Rozwiązanie wielu związanych z tym sterowaniem problemów może okazać się łatwiejsze, jeśli utworzony zostanie matematyczny model procesu.

Można utworzyć różne modele procesu: bardziej złożone, trudniejsze w analizie, lepiej przybliżające rzeczywistość i mniej skomplikowane, łatwiejsze, ale jednocześnie mniej dokładne. Przedstawiony dalej model procesu należy traktować jako jedną z możliwych alternatyw.

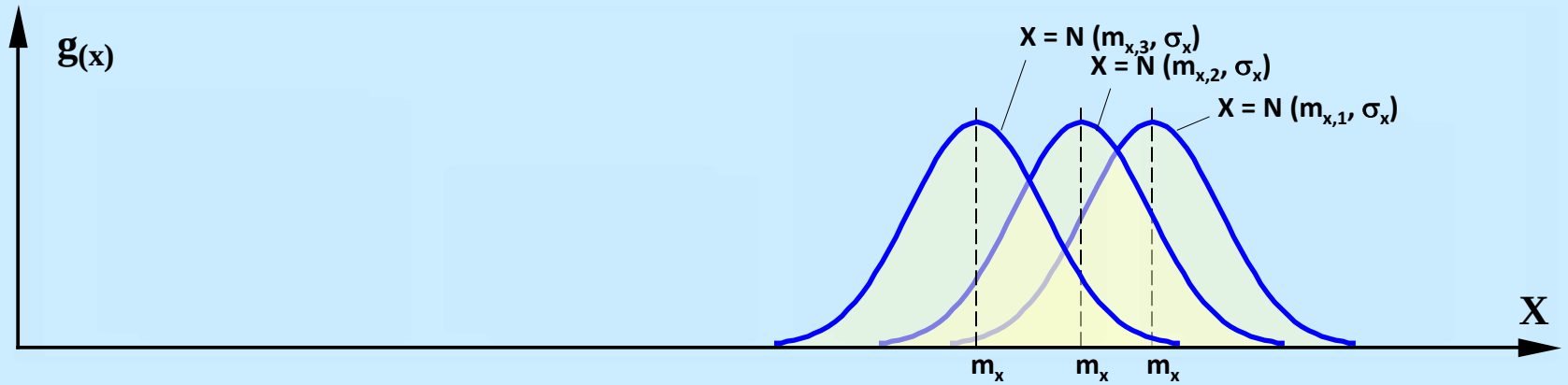
OPIS MODELU

W przyjętym przez nas modelu proces charakteryzowany jest przez swoje wyniki. Zakładamy, że wyniki te są realizacjami jednowymiarowej zmiennej losowej X o wartości oczekiwanej m_x i odchyleniu standardowym σ_x . Zakładamy jednocześnie, że powyższe parametry charakteryzują proces w stanie statystycznie uregulowanym, tzn. wynikają wyłącznie z przyczyn losowych.

Wyniki procesu winny spełniać nałożone na nie wymagania. Aby to zapewnić musimy mieć możliwość efektywnego sterowania tym procesem. W przyjętym modelu efektywnemu sterowaniu (regulacji procesu) odpowiada możliwość wprowadzenia dowolnej zmiany wartości oczekiwanej.

Odchylenie standardowe σ_x charakteryzuje naturalną zmienność procesu. W przyjętym modelu nie mamy możliwości zmiany tej wartości (jedynym sposobem na zmianę naturalnej zmienności jest bowiem przeprojektowanie (czyli zmiana) samego procesu.

REGULACJA PROCESU



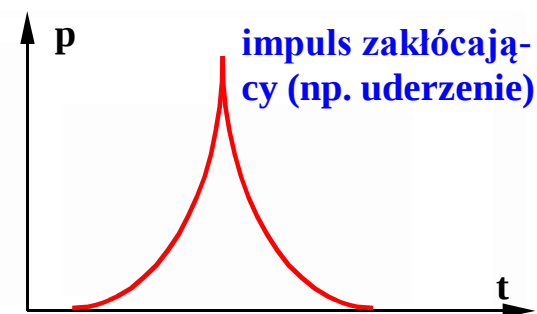
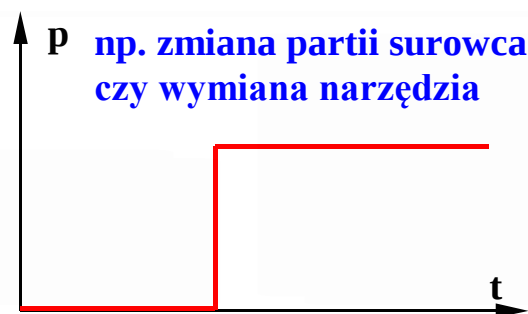
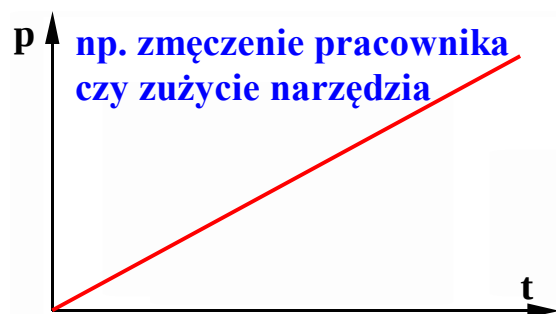
W ramach regulacji procesu możemy zmieniać wartość oczekiwaną, nie możemy natomiast zmieniać odchylenia standardowego. Aby zmniejszyć zmienność musimy przeprojektować (zmienić) sam proces.

PRZYCZYNY SPECJALNE 1/3

Kolejny element przyjętego modelu stanowią przyczyny specjalne. Przyczyny te nie są, tak jak wspomniane wcześniej przyczyny losowe, integralnym składnikiem procesu. Są to raczej sporadycznie pojawiające się zakłócenia, nieprawidłowości, które należy wykryć i usunąć.

Przyczyny specjalne zmieniają wyniki procesu. Przyjęto, że nowe, zmienione wyniki reprezentować będzie jednowymiarowa zmienna losowa X_z .

Przyczyny specjalne mogą pojawiać się stopniowo lub nagle, mogą mieć charakter trwały (trzeba je usuwać) lub przejściowy (ustępują samoczynnie).



PRZYCZYNY SPECJALNE 2/3

W przyjętym modelu założono, że wpływ przyczyn specjalnych (**zmiana wartości parametru charakteryzującego wynik**) jest bliżej nieokreśloną funkcją czasu, czyli że: **$X_z - X = Z(t)$**

W takim razie wyniki procesu zakłóconego określać będzie funkcja:

$$X_z = X + Z(t)$$

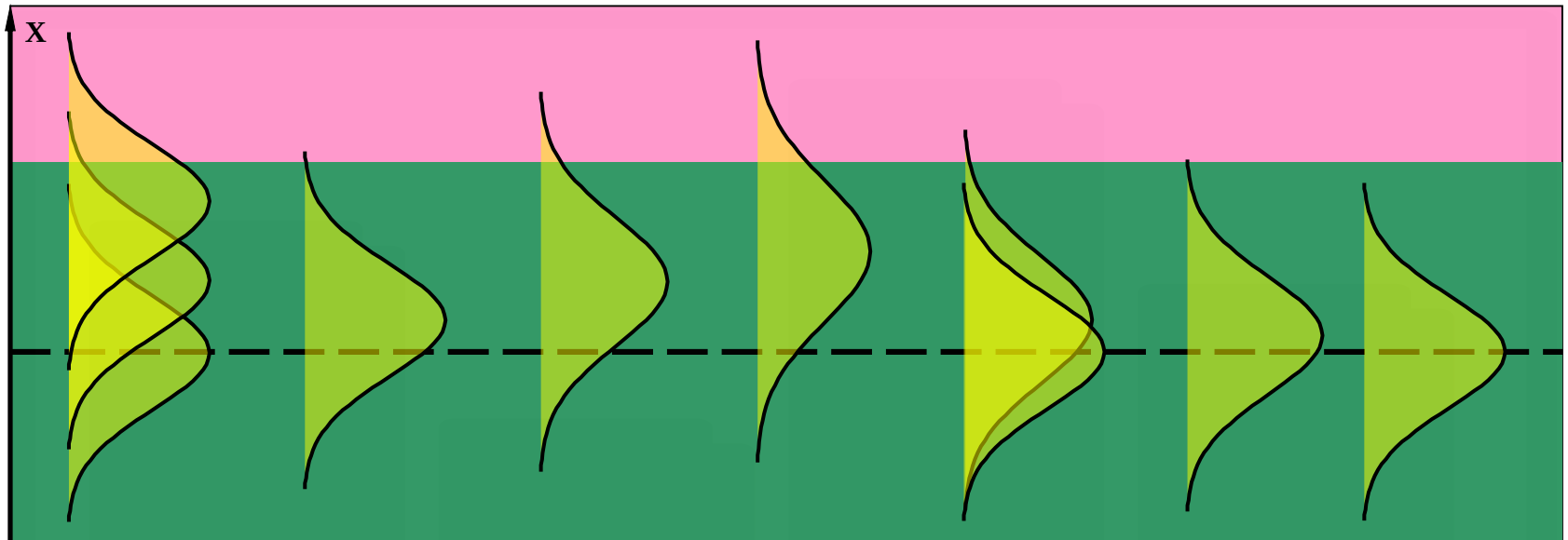
Funkcje losowe X_z i X przyjmują kolejne wartości dla kolejnych wyników procesu. Natomiast funkcja $Z(t)$ ma charakter ciągły. Dlatego pod uwagę należy brać tylko niektóre jej wartości – te, które przyjmuje w momentach powstania kolejnych wyników procesu. Uwzględniając powyższe dostajemy:

$$X_{z,i} = X_i + Z(t_i)$$

gdzie i jest wyróżnikiem wyniku procesu, a t_i czasem powstania tego wyniku.

MODEL PROCESU

Funkcja $Z(t_i)$ może wpływać zarówno na wartość oczekiwaną jak i na wariancję zmiennej losowej X_z .



Na osi poziomej mamy czas, a na osi pionowej wartość parametru, którą chcemy sterować. Kolorem zielonym oznaczono pole tolerancji parametru. Na początku mamy proces rozregulowany. Kolejne dwa kroki pokazują wyniki regulacji, mniej i bardziej udanej. W miarę upływu czasu proces znowu ulega stopniowemu rozregulowaniu. Po jego wykryciu następuje ponowna regulacja procesu. I.t.d.

PRZYCZYNY SPECJALNE 3/3

Znając funkcję $Z(t_i)$ moglibyśmy wyznaczyć parametry zmiennej losowej X_z , czyli prognozować wyniki procesu zakłóconego. Możliwość tą wykorzystuje się przy różnego rodzaju symulacjach.

W praktyce funkcja $Z(t_i)$ jest prawie zawsze nieznana co powoduje, że wyznaczenie parametrów zmiennej losowej X_z nie jest możliwe.

Możliwe jest natomiast wykrycie istotnych różnic pomiędzy parametrami zmiennych losowych X_z i X , czyli stwierdzenie wystąpienia przyczyny specjalnej (zakłócenia).

Stwierdzenie wystąpienia przyczyny specjalnej ma miejsce, gdy odpowiedź na pytanie: czy elementy badanej próbki (**realizacje zmiennej losowej X_z**) mogą pochodzić z procesu uregulowanego (**stanowią realizacje zmiennej losowej X**) jest negatywna.

DETEKCJA ZAKŁÓCENIA

Stwierdzenie faktu rozregulowania procesu (**wystąpienia przyczyny specjalnej**) odbywa się w oparciu o zaprojektowane dla tego procesu karty kontrolne.

Sygnal rozregulowania na karcie nie musi pojawić się równocześnie z wystąpieniem przyczyny specjalnej. Może zdarzyć się, zwłaszcza w przypadkach, gdy wielkość zakłócenia nie jest zbyt duża, że sygnał ten jest znacznie opóźniony.

Należy podkreślić fakt, że karty kontrolne nie są „automatycznymi detektorami rozregulowania procesu”, lecz narzędziem, które to rozregulowanie pomaga zauważyć. Stwierdzenie, że wystąpiła przyczyna specjalna jest wnioskiem o charakterze statystycznym, tzn. ma określone prawdopodobieństwo słuszności.

FUNKCJONOWANIE KART

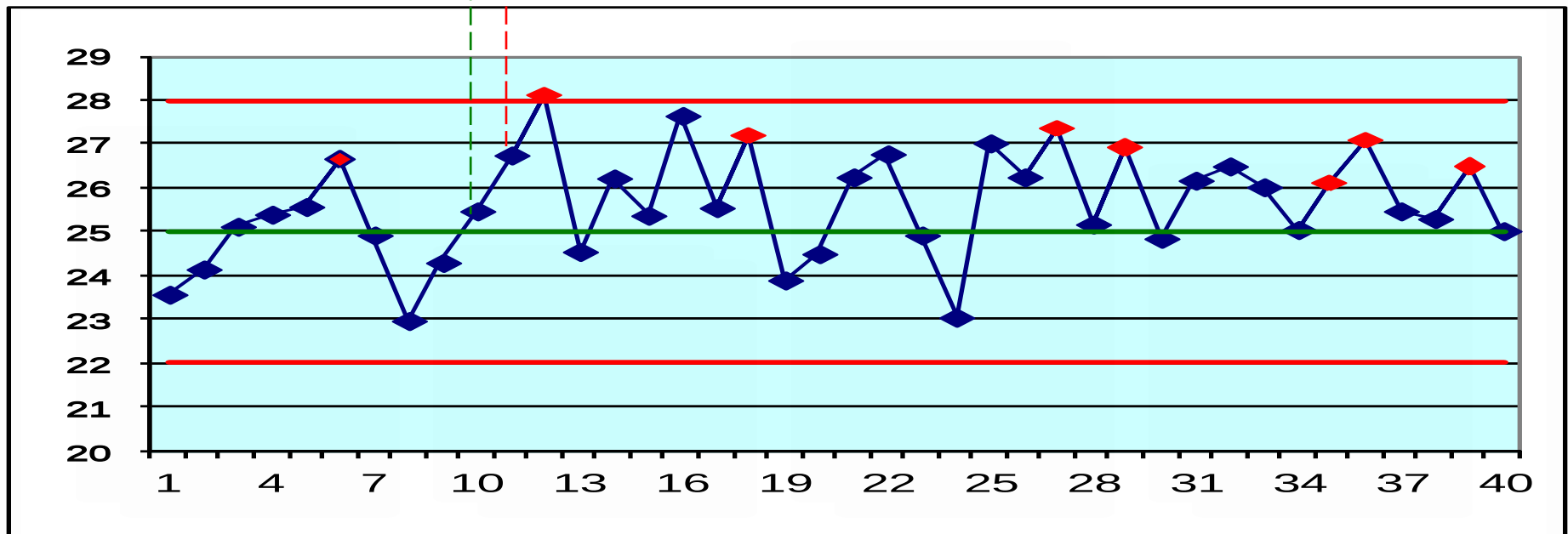
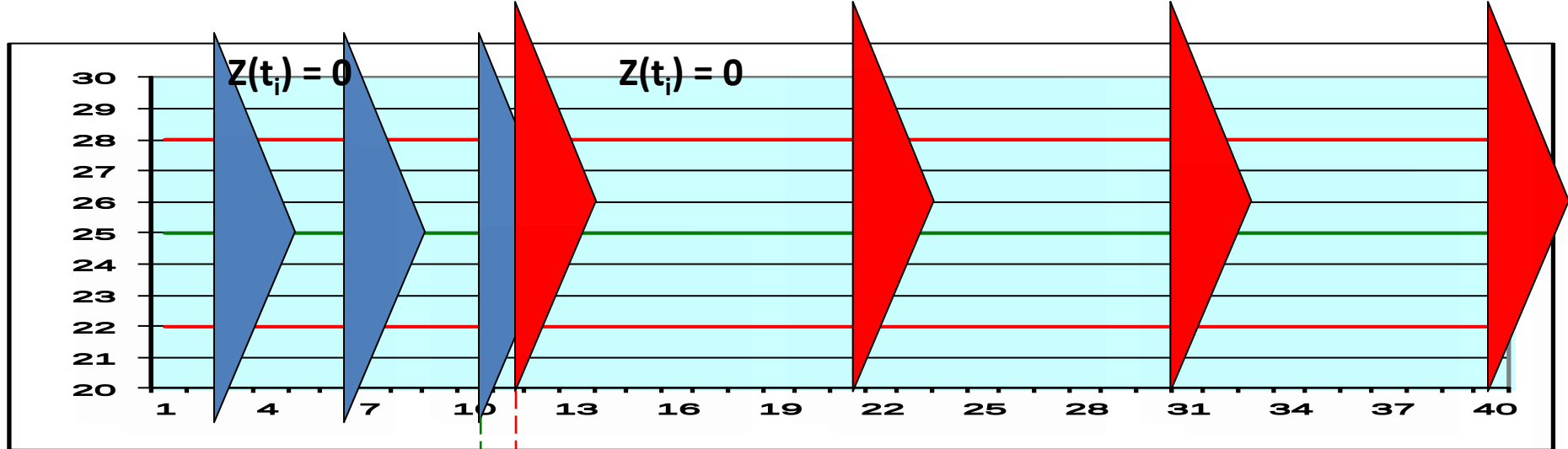
W celu ukazania, jak funkcjonują karty kontrolne oraz jakie są ich możliwości, na kilku dalszych slajdach pokazano symulowane komputerowo, możliwe do wystąpienia w praktyce, przebiegi wybranej statystyki na kartach prowadzonych dla przykładowo przyjętego, modelowego procesu.

Proces ten w stanie statystycznie uregulowanym charakteryzuje się wynikami posiadającymi rozkład trójkątny o wartości oczekiwanej $m_x=25$ i odchyleniu standardowym $\sigma_x = 2$. Proces przebiega stabilnie podczas produkcji pierwszych 10-u partii (**przez partię rozumiemy tu zbiorowość wyników, z których pobierana jest próbka**). Począwszy od 11-ej partii pojawia się zakłócenie (**funkcja zakłócająca $Z(t_i) = 1$ oznacza zmianę wartości oczekiwanej z $m_x = 25$ na $m_{xz} = 26$ oraz niezmiennione odchylenie standardowe $\sigma_{xz} = \sigma_x$**).

FUNKCJONOWANIE KART

Czasowy przebieg przykładowo wybranego, modelowego procesu pokazano w górnej części ekranu. Poniżej zamieszczono symulowany za pomocą generatora liczb losowych, możliwy do wystąpienia w rzeczywistości przebieg charakterystyki X.

Ze względu na fakt, że symulowane zakłócenie dotyczy tylko wartości oczekiwanej zrezygnowano z analizy karty kontrolnej dotyczącej rozrzutu

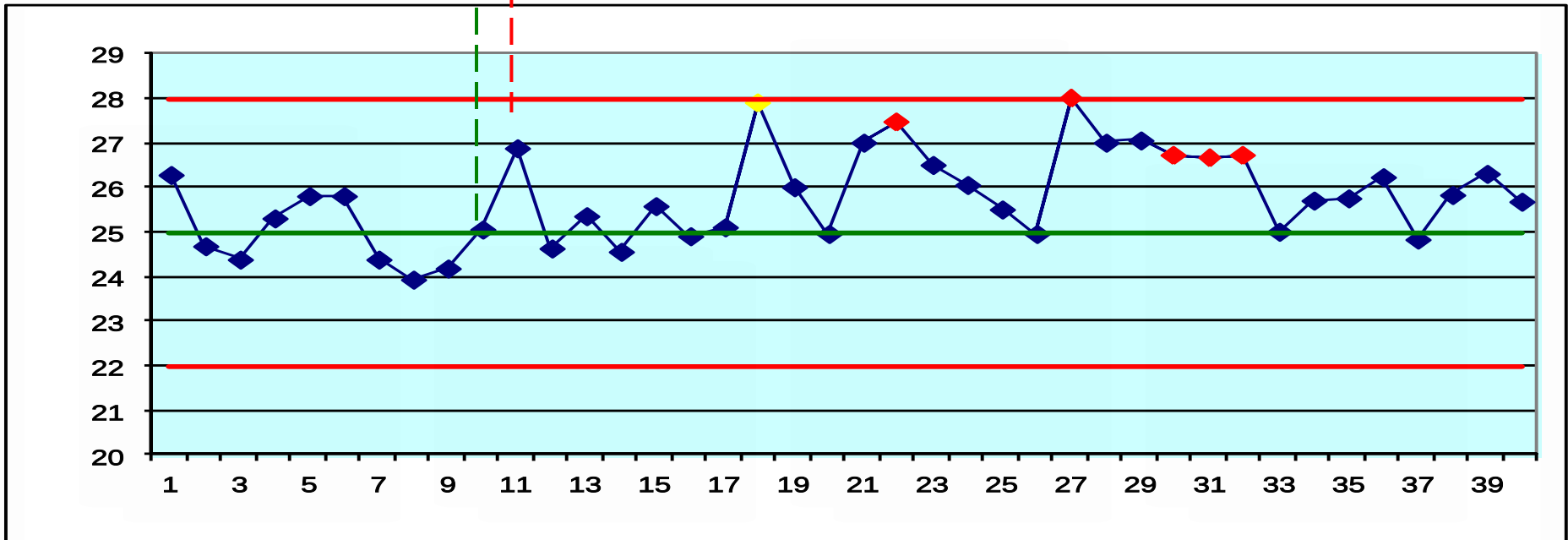
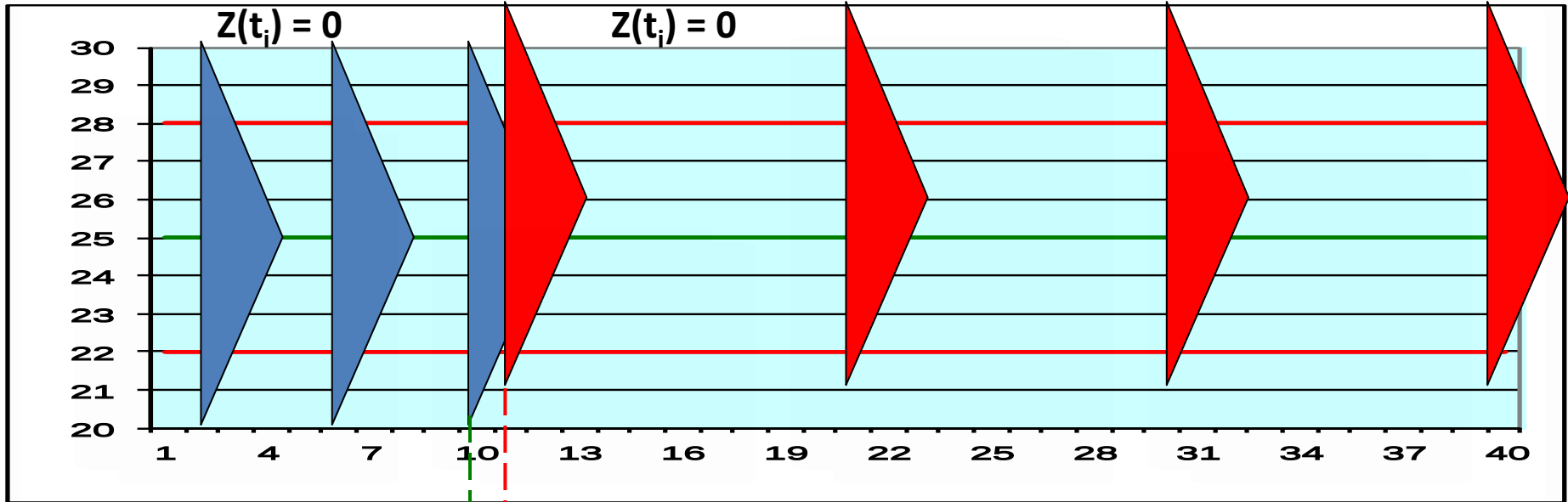


SYMULACJA I - KOMENTARZ

Z założeń przyjętych dla wykonanej symulacji wiadomo, że proces był rozregulowany przy produkcji partii 11 (**i dalszych**). Pierwszy sygnał rozregulowania procesu (**przekroczenie granicy kontrolnej**) pojawia się już w próbce nr 12. Uwzględniając fakt, że rozregulowanie procesu jest stosunkowo małe, jest to sygnał bardzo szybki.

Następne potwierdzenia faktu rozregulowania procesu znajdujemy w wynikach badań próbki 18 (**dwa z trzech kolejnych punktów w strefie skrajnej**), próbki 27 (**jak w przyp. 18**), próbki 29 (**cztery z pięciu kolejnych punktów w strefie B lub dalej**), próbek 35 i 36 (**jak w przyp. 29**) oraz próbki 39 (**dziewięć kolejnych punktów powyżej CL**)

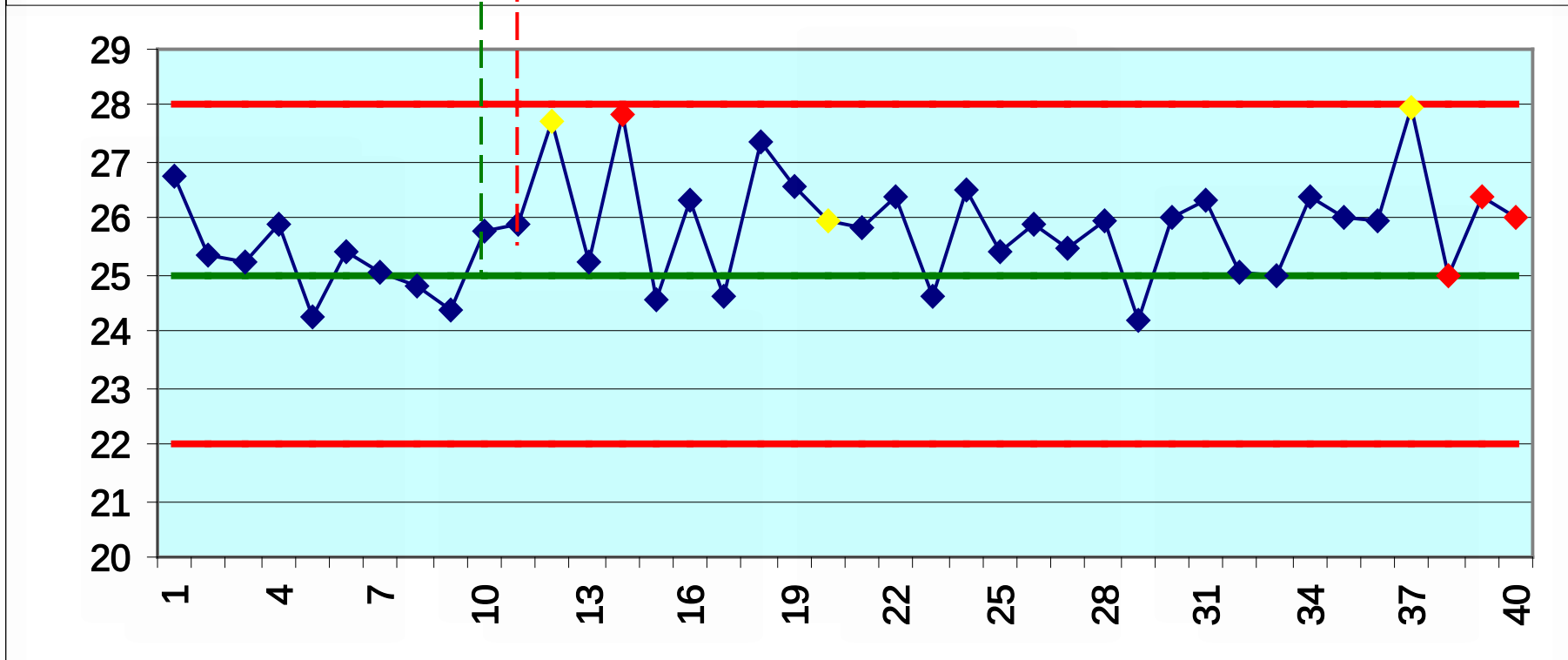
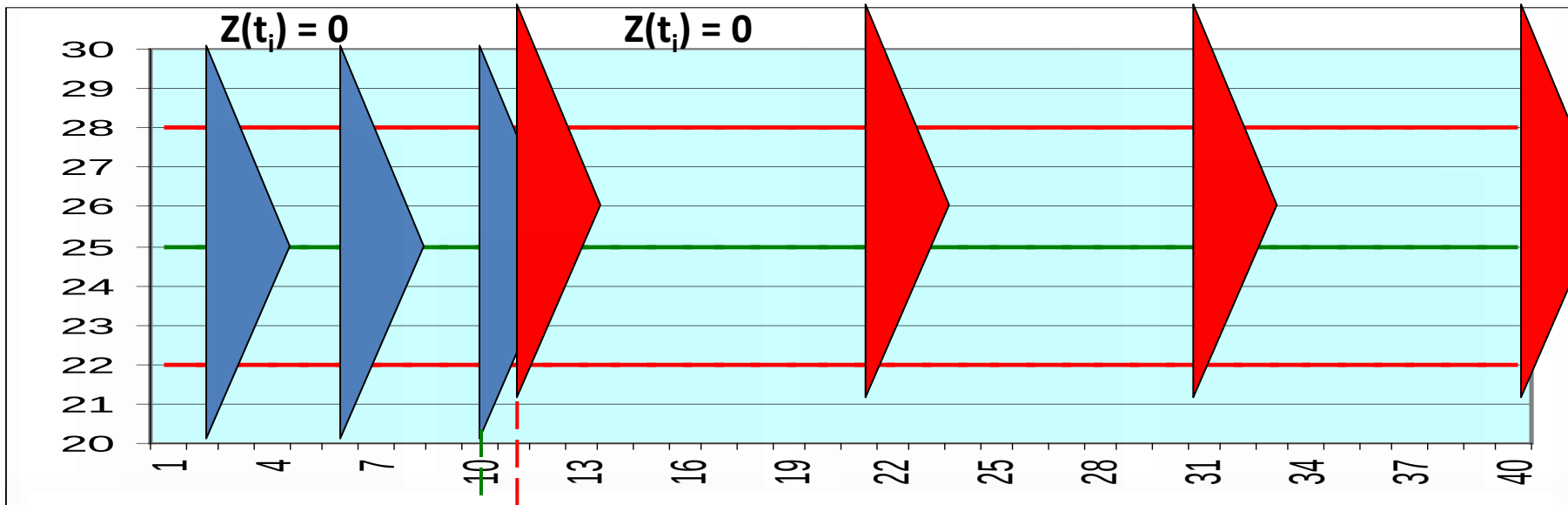
Niezależnie od formalnych potwierdzeń, nawet niezbyt wprawne oko zauważy fakt, że znaczna większość punktów leży powyżej CL.



SYMULACJA II - KOMENTARZ

W symulacji nr II przebieg procesu jest identyczny jak w przypadku symulacji nr I. Tym razem na sygnały rozregulowania procesu trzeba było poczekać nieco dłużej. Pierwszą jaskółką (która, jak wiadomo, wiosny jeszcze nie czyni) są wyniki badań próbki nr 18 (punkt bardzo blisko granicy kontrolnej). Pierwszy formalny sygnał rozregulowania procesu dają dopiero wyniki badań próbki nr 22 (**dwa z trzech kolejnych punktów w strefie skrajnej**), a potwierdzają je próbka nr 27 (**przekroczenie granicy kontrolnej**) oraz próbki 30, 31 i 32 (**cztery z pięciu kolejnych punktów w strefie B lub dalej**).

Podobnie jak w przypadku I łatwo zauważyć fakt, że poczynając od próbki nr 18 prawie wszystkie punkty wykresu leżą powyżej linii średniej.



SYMULACJA III -KOMENTARZ

W symulacji nr III proces przebiega identycznie jak w poprzednich dwóch symulacjach. Pierwsze ostrzeżenie (żółte światło) przynoszą już wyniki badań próbki nr 12 (**punkt bardzo blisko granicy kontrolnej**), a formalnym potwierdzeniem rozregulowania procesu są wyniki badań próbki nr 14 (**dwa z trzech kolejnych punktów w strefie skrajnej**). Później, mimo że proces wciąż jest rozregulowany, sygnały rozregulowania nie występują. I dopiero wyniki badań próbek 38, 39 i 40 potwierdzają ponownie fakt rozregulowania (**dziewięć kolejnych punktów powyżej CL**). Swoistym paradoksem tej symulacji jest potwierdzenie rozregulowania procesu przez punkt leżący niemal na linii centralnej (próbka nr 38).

I w tym przypadku, choć może nieco mniej wyraźnie niż w poprzednich, widać asymetrię położenia punktów wykresu względem linii centralnej

WYMAGANIA

Przy sterowaniu procesem należy uwzględnić wymagania, które są stawiane wynikom tego procesu.

Wymagania stawiane wynikom procesu mają postać zbioru wartości dopuszczalnych. Zbiór wartości dopuszczalnych $\{D\}$ może być ograniczony jednostronnie: $\{D\} \geq A$ lub $\{D\} \leq B$ albo dwustronnie: $A \leq \{D\} \leq B$

gdzie:

A - dolna wartość graniczna (lower specification limit, LSL);

B – górna wartość graniczna (upper specification limit, USL);

Różnica wartości granicznych $T = B - A$ nosi nazwę tolerancji;

WSPÓŁCZYNNIK ZDOLNOŚCI

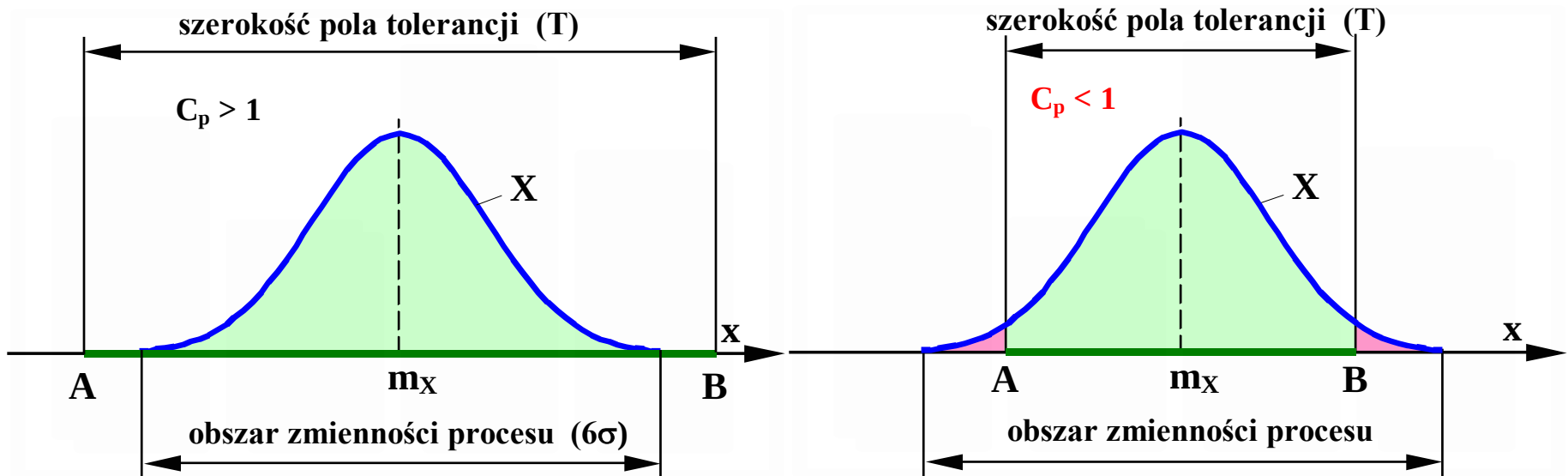
Celem sterowania procesem jest zapewnienie, aby poszczególne wyniki tego procesu należały do zbioru wartości dopuszczalnych, czyli spełniały warunek $X_i \in \{D\}$. Spełnienie tego warunku dla wszystkich i jest bardzo często niemożliwe.

Możliwość spełnienia warunku $X_i \in \{D\}$ zależy od tzw. zdolności procesu (**wydolności procesu**). Liczbową miarą tej zdolności jest tzw. współczynnik zdolności procesu. Oblicza się go z zależności:

$$\text{współczynnik zdolności} = \frac{\text{szerokość pola tolerancji}}{\text{obszar zmienności procesu}}$$

Obszar zmienności procesu to przedział, w którym mieszczą się prawie wszystkie wyniki tego procesu. Dla procesów, których wyniki posiadają rozkład zbliżony do normalnego przyjmuje się, że obszar zmienności wynosi 6σ .

WSPÓŁCZYNNIK ZDOLNOŚCI C_p



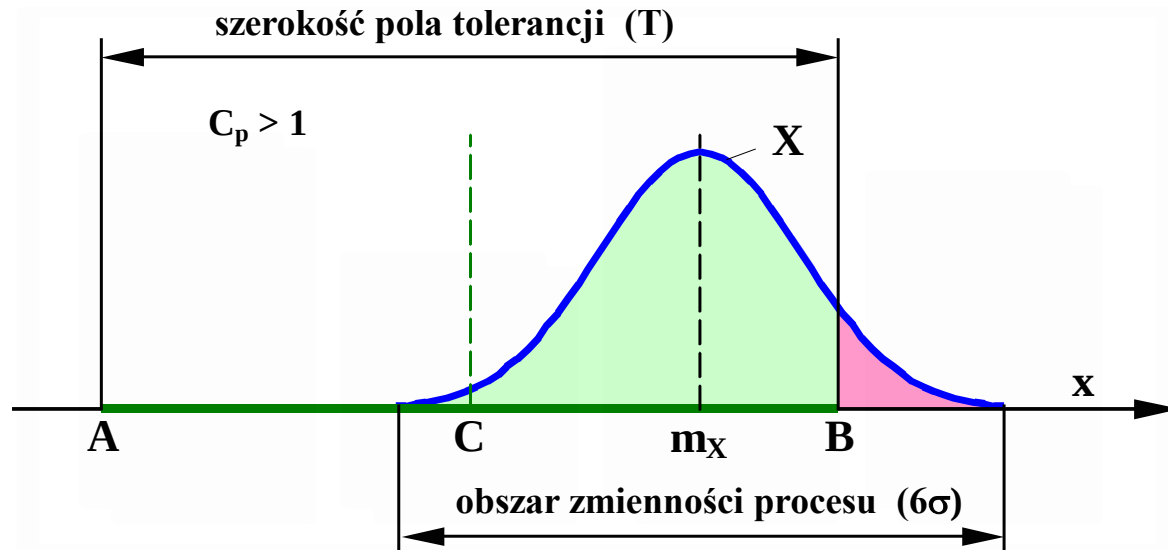
Podstawowym współczynnikiem zdolności procesu jest współczynnik określony wzorem

$$C_p = \frac{T}{6 \cdot \sigma}$$

Współczynnik ten określa tzw. potencjalną zdolność procesu. Jego wartość powinna być większa od 1 (**zalecana wartość tego współczynnika wynosi 1,33, co oznacza, że $T = 8 \cdot \sigma$**)

WSPÓŁCZYNNIK ZDOLNOŚCI C_p

Współczynnik C_p nie uwzględnia położenia naturalnego obszaru zmienności względem pola tolerancji (zmiana tego położenia nie wpływa na wartość współczynnika, chociaż może skutkować wzrostem ilości wyników niezgodnych)



W rzeczywistości, ze względu na ograniczone możliwości sterowania procesem, obszar naturalnej zmienności leży prawie zawsze asymetrycznie względem środka pola tolerancji:

$$m_x \neq C = (A + B)/2$$

WSPÓŁCZYNNIK ZDOLNOŚCI C_{pk}

Współczynnikiem uwzględniającym asymetrię położenia obszaru zmienności względem pola tolerancji jest współczynnik C_{pk} . Wartość tego współczynnika oblicza się z zależności:

$$C_{pk} = \frac{\min(|A - m_x|, |B - m_x|)}{3 \cdot \sigma}$$

A ponieważ (**patrz następny ekran**)

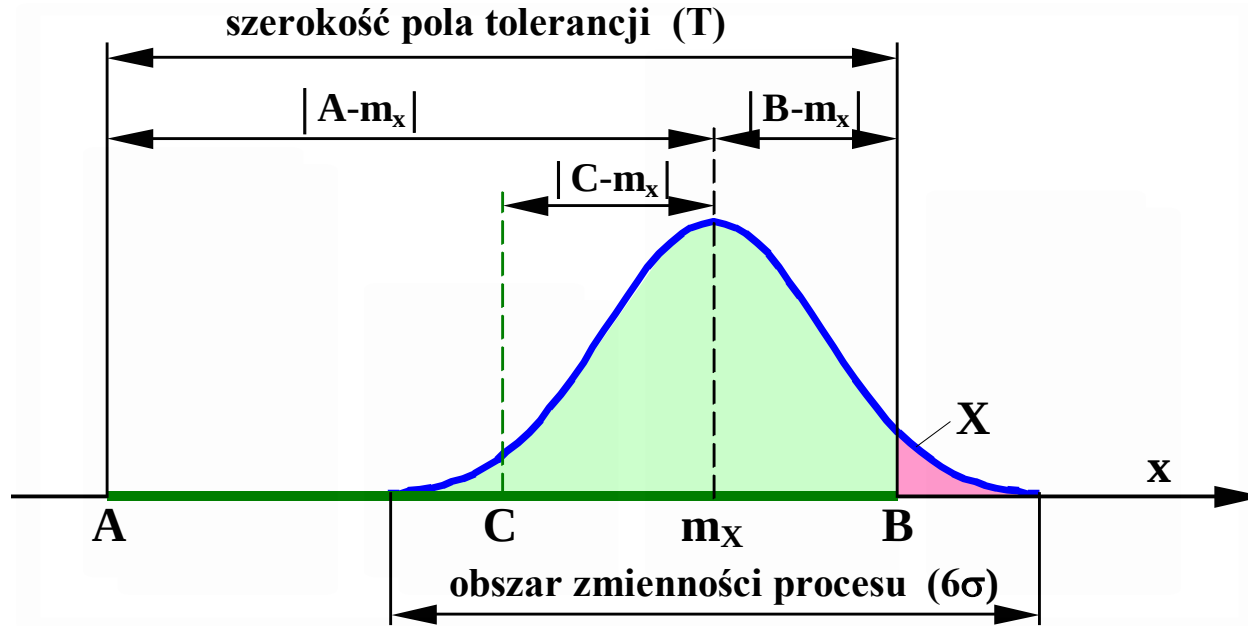
$$\min(|A - m_x|, |B - m_x|) = 0,5 \cdot T - |C - m_x|$$

więc

$$C_{pk} = \frac{T/2 - |C - m_x|}{3 \cdot \sigma} = \frac{T}{6 \cdot \sigma} - \frac{|C - m_x|}{3 \cdot \sigma} = C_p - \frac{|C - m_x|}{3 \cdot \sigma}$$

Różnica $|C - m_x|$ określa asymetrię położenia obszaru zmienności względem pola tolerancji (**tzw. niewycentrowanie procesu**)

WSPÓŁCZYNNIK C_{pk} - RYSUNEK



Przy symetrycznym położeniu obszaru zmienności względem pola tolerancji ($C - m_x = 0$) wartość C_{pk} jest równa wartości C_p . W miarę wzrostu asymetrii tego położenia wartość współczynnika C_{pk} maleje ($|C - m_x| \uparrow C_{pk} \downarrow$)

Dodatkową zaletą współczynnika C_{pk} jest możliwość jego wyznaczenia w przypadkach, gdy zbiór wartości dopuszczalnych jest ograniczony jednostronnie.

ZASADY OBLICZANIA WSPÓŁCZYNNIKÓW

Wartości współczynników zdolności procesu należy wyznaczać na podstawie odpowiednio licznego zbioru danych (zaleca się, aby uwzględnić co najmniej 100 wyników procesu).

Dane użyte do wyznaczania wartości współczynników zdolności powinny pochodzić z procesu statystycznie uregulowanego [2]

Dane użyte do wyznaczania wartości współczynników zdolności powinny pochodzić z reprezentatywnych próbek (np. w przypadku procesu realizowanego na kilku urządzeniach technologicznych próbki winny pochodzić, w odpowiednich proporcjach, ze wszystkich tych urządzeń).

We wzorach określających wartości współczynników zdolności występuje odchylenie standardowe wyników procesu σ . Wartość tego odchylenia należy określać na podstawie zmienności wewnętrzpróbkowej ($\sigma = \bar{R}/d_2$ lub $\sigma = \bar{s}/C_4$)

OBLICZANIE WSPÓŁCZYNNIKÓW c.d.

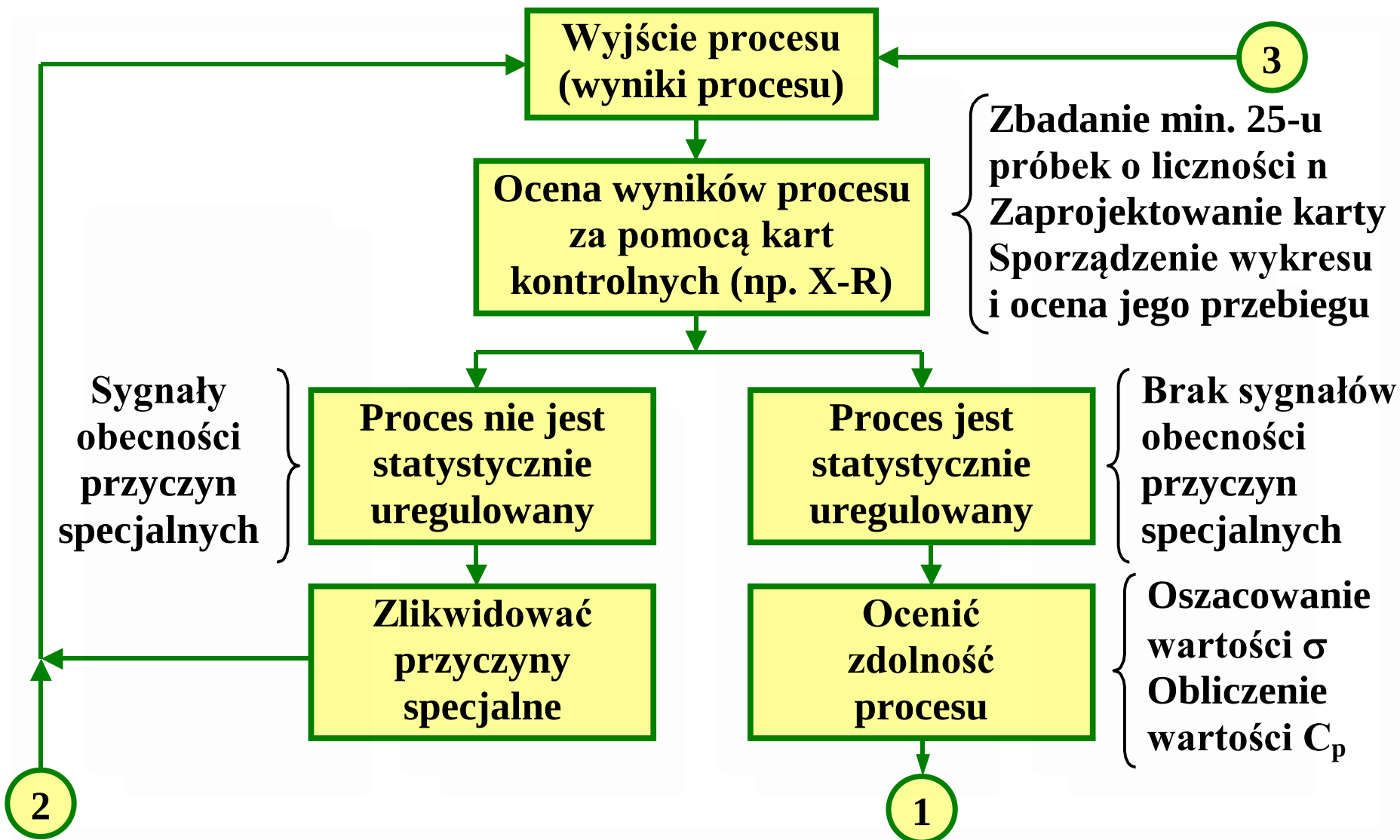
Jeżeli wyniki procesu posiadają rozkład odbiegający od normalnego to obszar zmienności tych wyników można obliczyć z zależności:

$$V = F^{-1}(0,99865) - F^{-1}(0,00135) \quad [2]$$

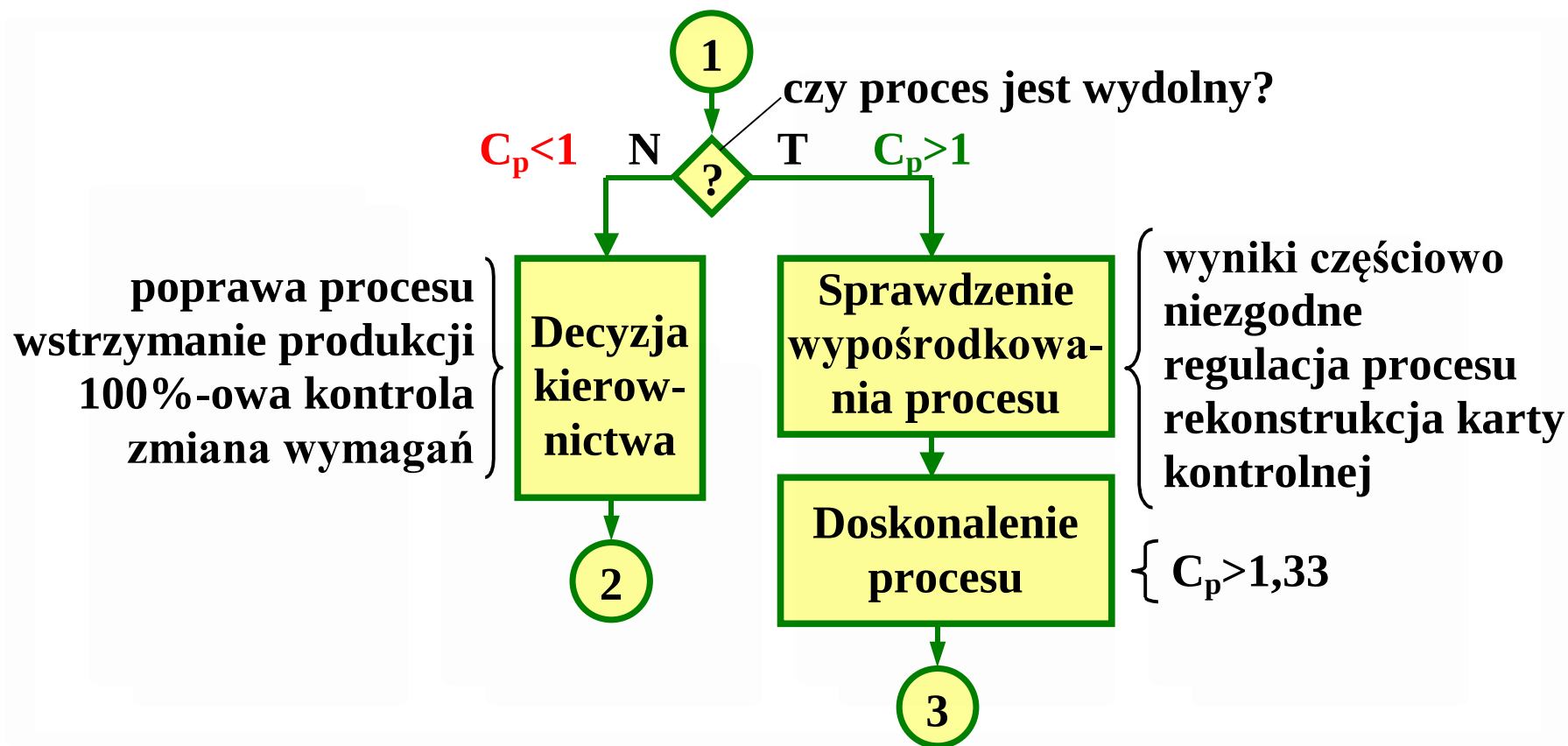
gdzie $F^{-1}(0,99865)$ i $F^{-1}(0,00135)$ oznaczają wartości wyników procesu, dla których dystrybuanta rozkładu osiąga odpowiednio 0,99865 i 0,00135;

Współczynniki zdolności C_p i C_{pk} powinny być używane łącznie.

STRATEGIA DOSKONALENIA PROCESU



STRATEGIA DOSKONALENIA PROCESU



Opracowano na podstawie [4]

ORGANIZACJA ZADAŃ SPC - WYTYCZNE

Obliczanie wartości statystyk próbek, nanoszenie obliczonych wartości na karty kontrolne oraz ocenę przebiegu uzyskanych wykresów dobrze jest powierzyć osobom dokonującym pomiarów (badań) tych próbek. Osoby te winny zostać odpowiednio przeszkolone i wyposażone w proste kalkulatory statystyczne. Takie rozwiązanie zapewnia szybką reakcję na sygnał rozregulowania.

Konstruowaniem nowych kart kontrolnych oraz aktualizacją już używanych (aktualizacja wartości współrzędnych linii) powinien zajmować się specjalista od SPC (zwykle usytuowany w dziale przygotowania produkcji).

AKTUALIZACJA KART KONTROLNYCH

Aktualizacja kart kontrolnych polega na ponownym obliczeniu wartości współrzędnych linii karty w oparciu o dane z możliwie bliskiej przeszłości. W praktyce najczęściej dane takie pobiera się z ostatniej wypełnionej karty kontrolnej i nanosi na następną. Granice kontrolne obliczone w oparciu o dane z przeszłości nazywa się często próbnymi granicami kontrolnymi.

W uzasadnionych przypadkach zaleca się ponowną ocenę uzyskanych wykresów po zastąpieniu granic próbnych (uzyskanych na podstawie danych z poprzedniej karty) granicami obliczonymi w oparciu o dane znajdujące się na tej karcie.

Niektóre specjalistyczne programy komputerowe wspomagające SPC aktualizują współrzędne linii kontrolnych każdorazowo po wprowadzeniu danych z badań kolejnej próbki.

KARTY KONTROLNE – CELOWOŚĆ STOSOWANIA

Stosowanie kart kontrolnych Shewarta w celu sterowania procesem jest zasadne, gdy:

- ◆ proces ten jest sterowalny
- ◆ proces ten jest zdolny do spełnienia wymagań określonych w dokumentacji konstrukcyjnej czy technologicznej;

Proces jest sterowalny wtedy, gdy w grupie czynników go określających, czynników, których wartości mogą być nastawiane i zmieniane są czynniki powiązane z nadzorowaną cechą.

Najlepiej, jeśli związek pomiędzy nadzorowaną cechą i czynnikiem sterującym jest określony w postaci analitycznej (funkcja, wykres czy tabela). Nie jest to jednak warunek konieczny.

ZADANIE 5.1

Wymagania dotyczące średnicy szlifowanych wałków mają postać:

$$A : d = 20_{-0,016}^0 \quad \times \quad B : d = 20_{-0,03}^0$$

Na podstawie wyników pomiarów średnic wałków w 22-u pięciostukowych próbkach pochodzących z procesu statystycznie uregulowanego obliczono:

$$\bar{\bar{d}} = 19,990 \quad \text{oraz} \quad \bar{R} = 0,010$$

Przy założeniu, że rozkład średnic powstających w procesie szlifowania jest zbliżony do normalnego policzyć wartości współczynników zdolności tego procesu.

ZADANIE 5.1 – ROZWIĄZANIE A

$$C_p = \frac{T}{6 \cdot \sigma}$$

$$T = B - A = G - F = 0 - (-0,016) = 0,016$$

$$\sigma = \overline{R}/d_2 = 0,01 / 2,326 = 0,004299$$

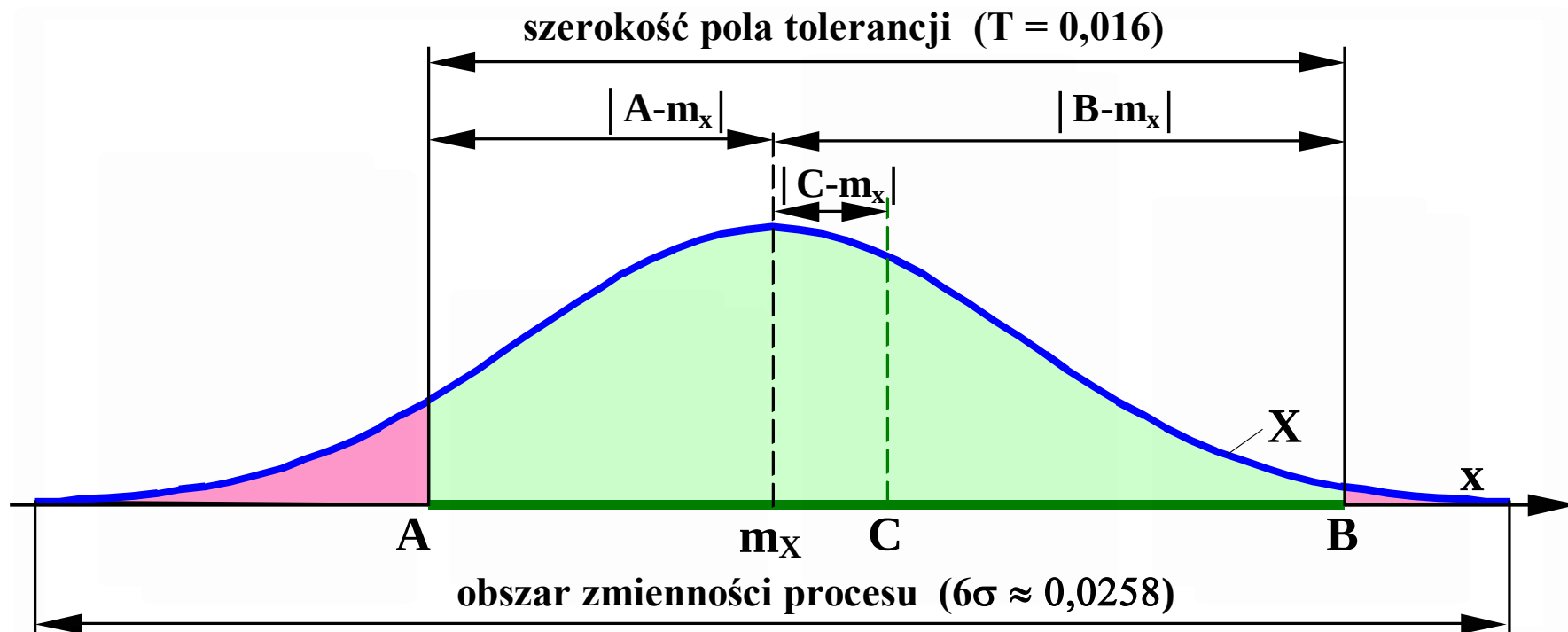
$$C_p = \frac{T}{6 \cdot \sigma} = \frac{0,016}{6 \cdot 0,004299} = 0,620$$

$$C_{pk} = C_p - \frac{|C - m_x|}{3 \cdot \sigma}$$

$$C = (A + B) / 2 = (19,984 + 20,000) / 2 = 19,992; \quad m_x = \overline{d} = 19,990$$

$$C_{pk} = C_p - \frac{|C - m_x|}{3 \cdot \sigma} = 0,620 - \frac{|19,992 - 19,990|}{3 \cdot 0,004299} = 0,465$$

ZADANIE 5.1 – ROZWIĄZANIE A c.d.



Odp: $C_p = 0,620$; $C_{pk} = 0,465$;

(proces nie nadaje się do spełnienia wymagań jakościowych)

ZADANIE 5.1 – ROZWIĄZANIE B

$$C_p = \frac{T}{6 \cdot \sigma}$$

$$T = B - A = G - F = 0 - (-0,03) = 0,03$$

$$\sigma = \overline{R}/d_2 = 0,01 / 2,326 = 0,004299$$

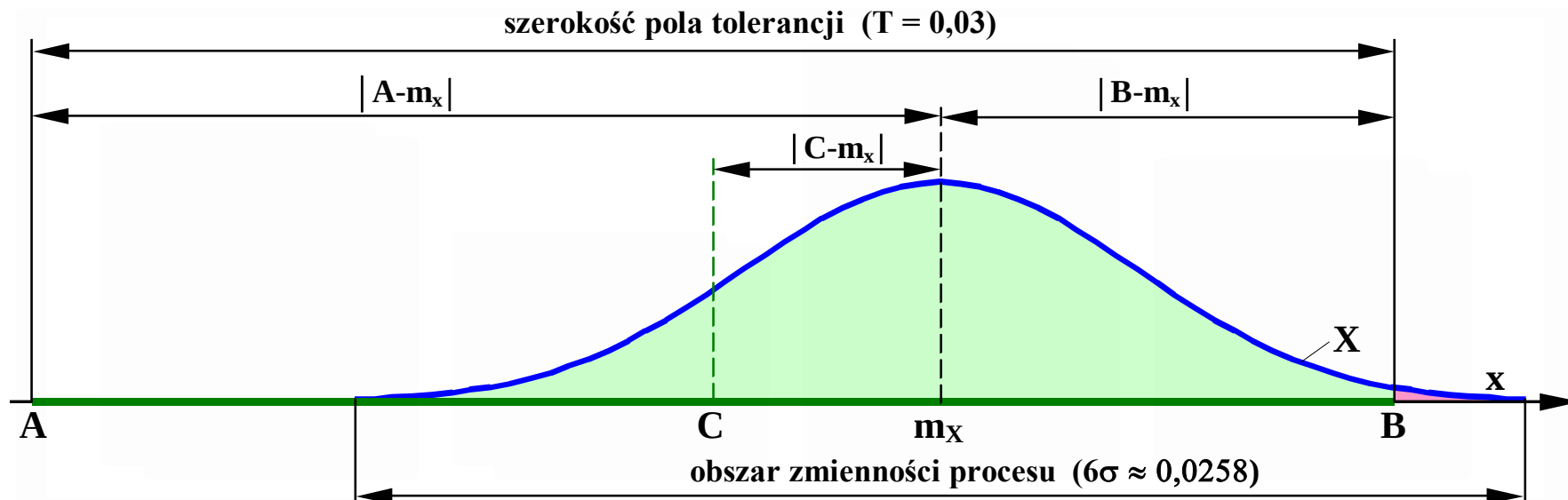
$$C_p = \frac{T}{6 \cdot \sigma} = \frac{0,03}{6 \cdot 0,004299} = 1,163$$

$$C_{pk} = C_p - \frac{|C - m_x|}{3 \cdot \sigma}$$

$$C = (A + B) / 2 = (19,970 + 20,000) / 2 = 19,985; \quad m_x = \overline{d} = 19,990$$

$$C_{pk} = C_p - \frac{|C - m_x|}{3 \cdot \sigma} = 1,163 - \frac{|19,985 - 19,990|}{3 \cdot 0,004299} = 0,775$$

ZADANIE 5.1 – ROZWIĄZANIE B c.d.



Odp: $C_p = 1,163$; $C_{pk} = 0,775$

(proces nadaje się do spełnienia warunków jakościowych po poprawie wycentrowania)

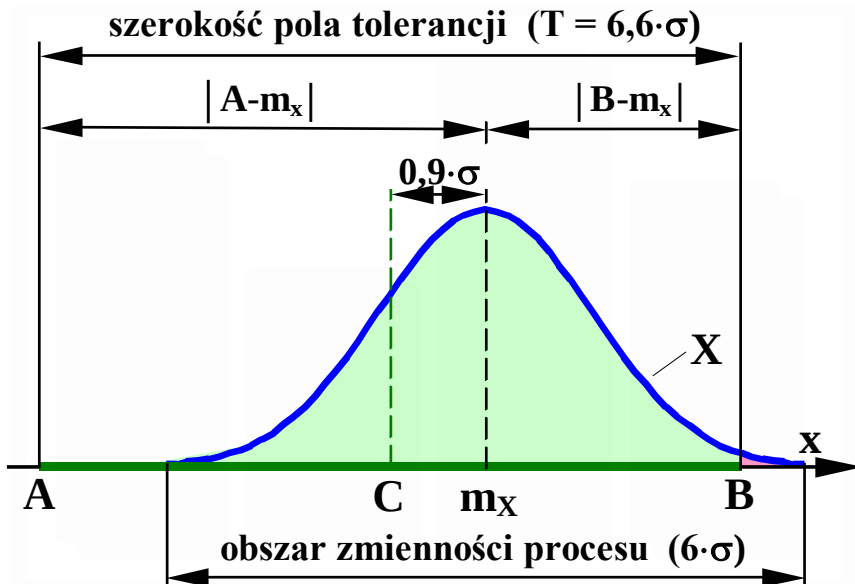
ZADANIE 5.2

Wartości współczynników pewnego procesu wynoszą odpowiednio: $C_p=1,1$ oraz $C_{pk} = 0,8$. Jaki procent wyników tego procesu spełnia wymagania?

Rozwiązanie

$$C_p = \frac{T}{6 \cdot \sigma} \Rightarrow T = 6 \cdot \sigma \cdot C_p = 6 \cdot \sigma \cdot 1,1 = 6,6 \cdot \sigma$$

$$C_{pk} = C_p - \frac{|C - m_x|}{3 \cdot \sigma} \Rightarrow |C - m_x| = (C_p - C_{pk}) \cdot 3 \cdot \sigma = 0,9 \cdot \sigma$$



$$\begin{aligned} A &= m_x - 0,9 \cdot \sigma - T/2 = m_x - 0,9 \cdot \sigma - 3,3 \cdot \sigma = \\ &= m_x - 4,2 \cdot \sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= m_x - 0,9 \cdot \sigma + T/2 = m_x - 0,9 \cdot \sigma + 3,3 \cdot \sigma = \\ &= m_x + 2,4 \cdot \sigma \end{aligned}$$

$$P(A \leq X \leq B) = F(B) - F(A) = F(t_B) - F(t_A)$$

ZADANIE 5.2 – ROZWIĄZANIE c.d.

$$t_B = \frac{B - m_x}{\sigma} = \frac{m_x + 2,4 \cdot \sigma - m_x}{\sigma} = 2,4$$

$$t_A = \frac{A - m_x}{\sigma} = \frac{m_x - 4,2 \cdot \sigma - m_x}{\sigma} = -4,2$$

$$\begin{aligned} P_{(A \leq X \leq B)} &= F_{(t_B)} - F_{(t_A)} = F(2,4) - F(-4,2) = \text{ROZKŁAD.NORMALNY.S}(2,4) - \\ &\text{ROZKŁAD.NORMALNY.S}(-4,2) \\ &= 0,991802 - 0,000013 = 0,991789 \approx 99,18\% \end{aligned}$$

Odp: Prawdopodobieństwo uzyskania wyniku zgodnego wynosi $\approx 99,18\%$

Powyższe zadanie można było rozwiązać w sposób przybliżony, przyjmując na podstawie rysunku, że $F_{(t_A)} \approx 0$; wtedy:

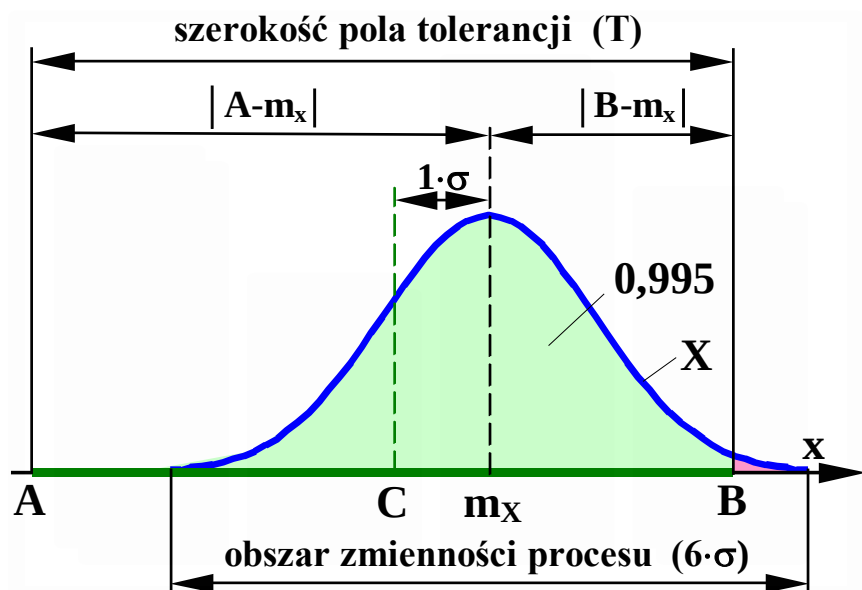
$$P_{(A \leq X \leq B)} = F_{(t_B)} - F_{(t_A)} \approx F_{(t_B)} = 0,991802 \approx 99,18\%$$

(motyw ten zostanie wykorzystany w następnym zadaniu)

ZADANIE 5.3

Obliczyć wartość współczynnika C_p , który przy niewycentrowaniu procesu $|C - m_x| = \sigma$ daje prawdopodobieństwo uzyskania wyrobu zgodnego równe 99,5%

Rozwiązanie



$$P_{(A \leq X \leq B)} = F_{(B)} - F_{(A)} = 0,995$$

na podst. rysunku $F_{(A)} \approx 0$, wtedy:

$$P_{(A \leq X \leq B)} \approx F_{(B)}$$

$$F_{(X=B)} = F_{(t=t_B)} \approx 0,995$$

$$t_B \approx \text{ROZKŁAD.NORMALNY.S.ODW}(0,995)$$

$$t_B \approx 2,575835$$

$$t_B = \frac{B - m_x}{\sigma} \Rightarrow B - m_x = t_B \cdot \sigma$$

ZADANIE 5.3 – ROZWIĄZANIE c.d.

$$T/2 = B - C = (B - m_x) + (m_x - C) = t_B \cdot \sigma + \sigma = \sigma \cdot (t_B + 1)$$

$$T = 2 \cdot T/2 = 2 \cdot \sigma \cdot (t_B + 1)$$

$$C_p = \frac{T}{6 \cdot \sigma} = \frac{2 \cdot \sigma \cdot (t_B + 1)}{6 \cdot \sigma} = \frac{(t_B + 1)}{3} \approx \frac{2,5758 + 1}{3} \approx 1,192$$

Odp: 99,5%-owe prawdopodobieństwo uzyskania wyrobu zgodnego przy niewycentrowaniu procesu równym $1 \cdot \sigma$ uzyskuje się przy współczynniku zgodności $C_p = 1,192$

Zaleca się sprawdzenie poprawności rozwiązania zadania 5.3, tj. policzenie prawdopodobieństwa uzyskania wyniku zgodnego przy współczynniku zdolności $C_p = 1,192$ i niewycentrowaniu procesu równym jednemu odchyleniu standardowemu.

ZADANIE 5.4

W oparciu o wyniki pomiarów próbek podane w zadaniu 4.2B obliczyć współczynniki zdolności procesu pakowania herbaty. Wymagania odnośnie masy paczek wynoszą: $98g \leq m \leq 103g$

Rozwiązanie

1. Wprowadzamy dane do Excel'a (w układzie pionowym)

2. Sprawdzamy licznosc zbioru danych

$$N = k \cdot n = 25 \cdot 5 = 125 > 100$$

(licznosc zbioru danych nie budzi zastrzeżeń)

3. Sprawdzamy stabilnosc procesu

(w tym celu nalezy sporzadzic karty kontrolne, naniesc na nie wartosci srednie i rozstepy poszczegolnych probek i ocenic, czy pochodza one z procesu znajdujacego sie w stanie statystycznie uregulowanym)

ZADANIE 5.4 – ROZWIĄZANIE c.d.

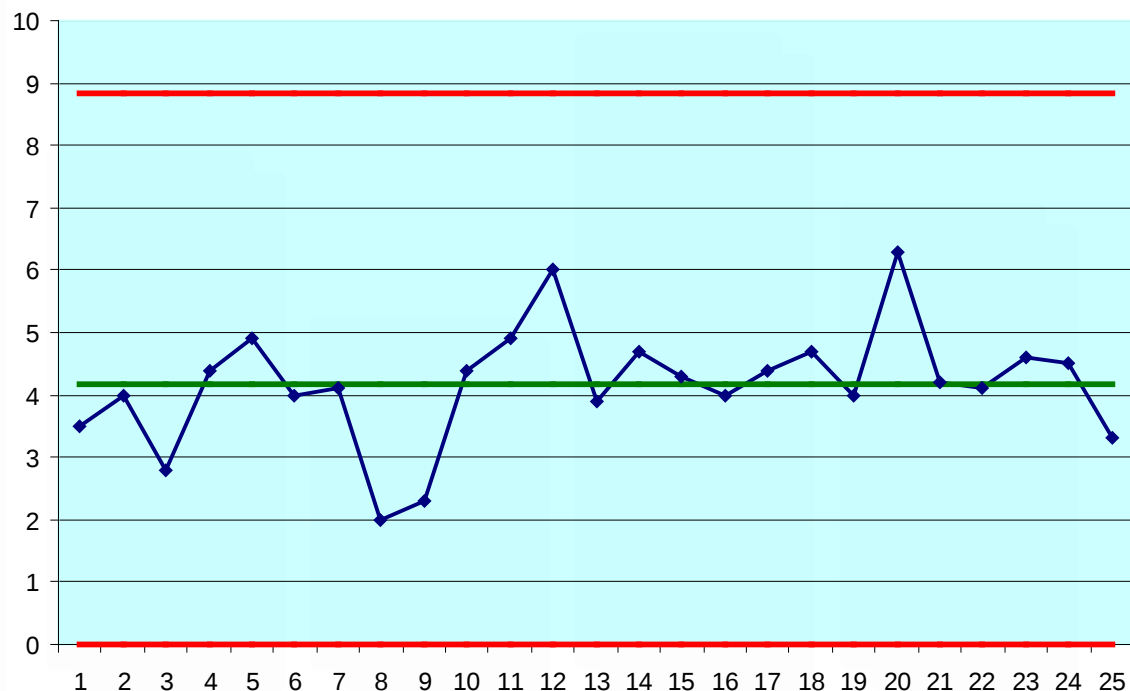
W pierwszej kolejności sprawdzamy wartości rozstępu:

$$\bar{R} = \text{średnia}(R_1 : R_{25}) = 4,172;$$

$$CL = \bar{R} = 4,172;$$

$$LCL = D_3 \cdot \bar{R} = 0 \cdot 4,172 = 0;$$

$$UCL = D_4 \cdot \bar{R} = 2,115 \cdot 4,172 = 8,824$$



Wykres wartości rozstępów nie zawiera sygnałów rozregulowania procesu

ZADANIE 5.4 – ROZWIĄZANIE c.d.

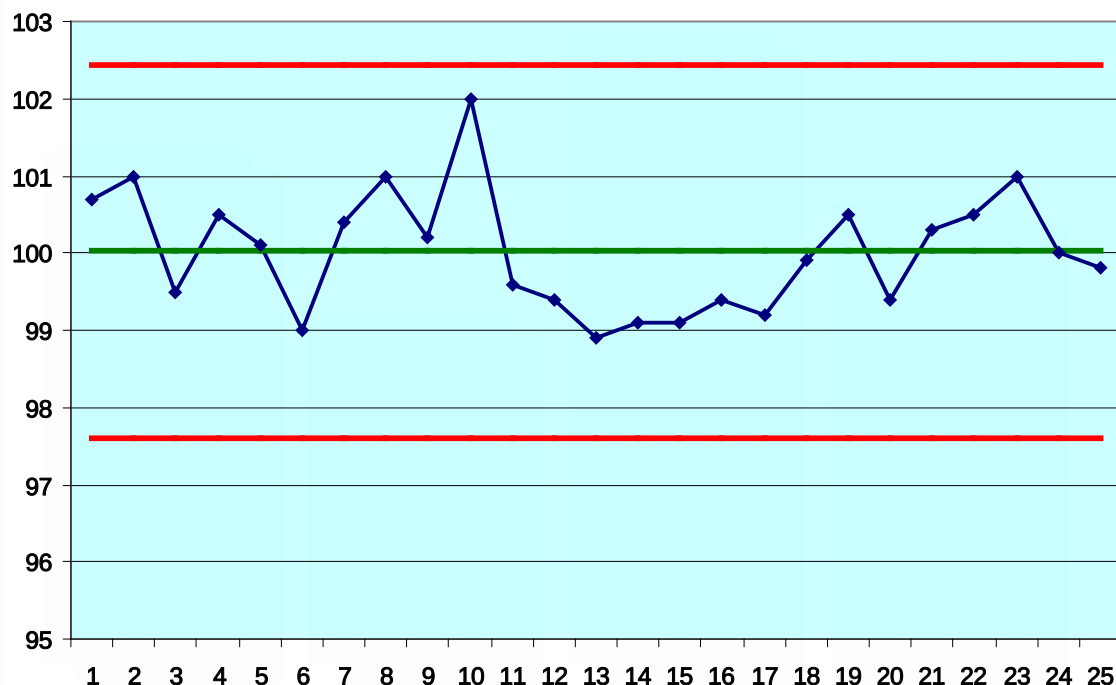
Następnie sprawdzamy wartości średnie w próbkach:

$$\bar{\bar{X}} = \text{średnia}(\bar{X}_1 : \bar{X}_{25}) = 100,02;$$

$$CL = \bar{\bar{X}} = 100,02$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2 \cdot \bar{R} = 100,02 - 0,577 \cdot 4,172 = 97,61$$

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2 \cdot \bar{R} = 100,02 + 0,577 \cdot 4,172 = 102,43$$



**Wykres wartości
średnich nie zawiera
sygnałów rozregulowa-
wania procesu**

ZADANIE 5.4 – ROZWIĄZANIE c.d

Obliczamy współczynniki zdolności procesu:

$$A = 98 \cdot \text{g}; B = 103 \cdot \text{g}; C = (A+B)/2 = 100,5 \cdot \text{g}; T = B-A = 5 \cdot \text{g};$$

$$m_X = \bar{\bar{X}} = 100,02 \cdot \text{g};$$

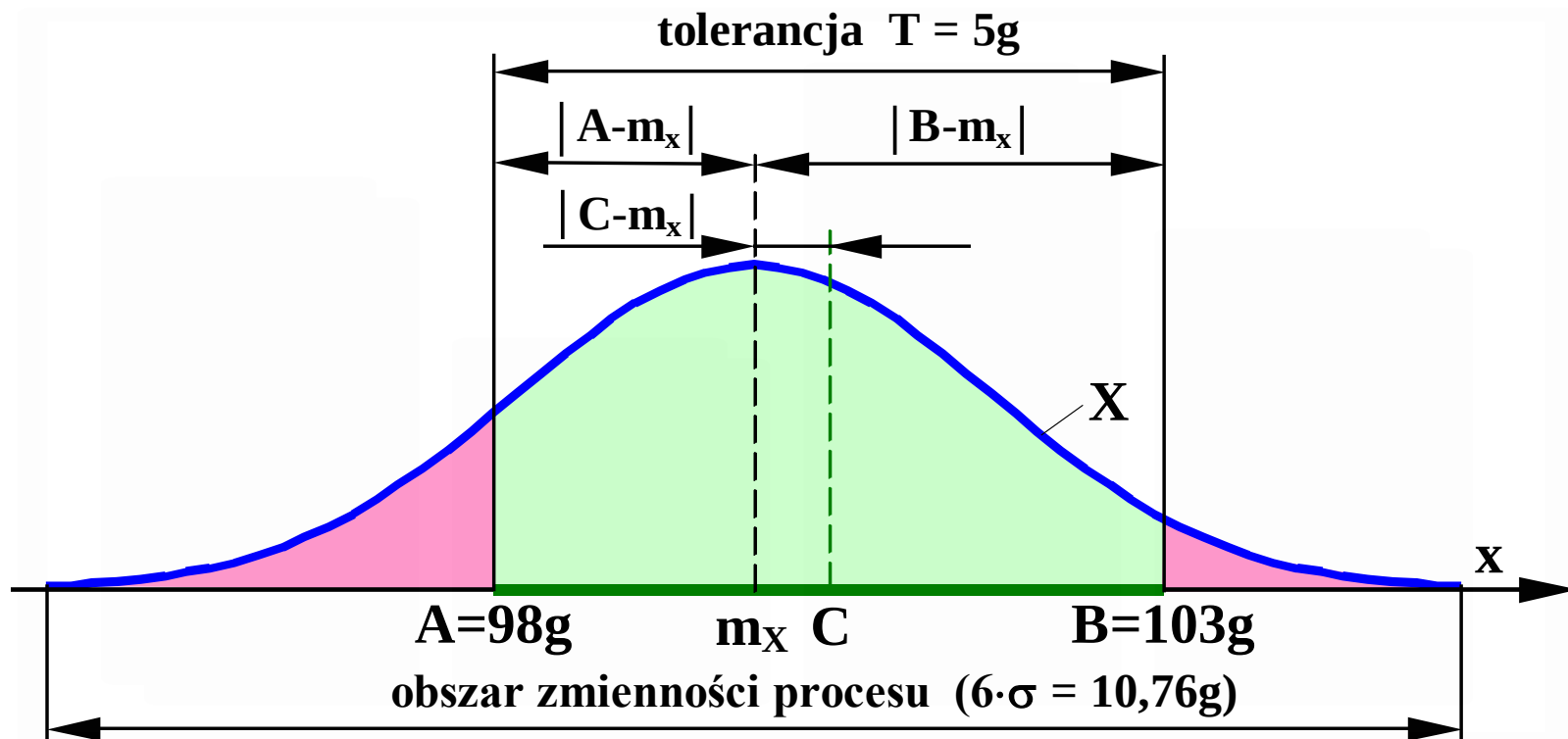
$$\sigma = \bar{R}/d_2; d_2(5) = 2,326; \sigma = 4,172 \cdot \text{g}/2,326 = 1,794 \cdot \text{g}$$

$$C_p = \frac{T}{6 \cdot \sigma} = \frac{5 \cdot \text{g}}{6 \cdot 1,794 \cdot \text{g}} = \frac{5 \cdot \text{g}}{10,762 \cdot \text{g}} = 0,465$$

$$C_{pk} = C_p - \frac{|C - m_X|}{3 \cdot \sigma} = 0,465 - \frac{|100,5 \cdot \text{g} - 100,02 \cdot \text{g}|}{3 \cdot 1,794 \cdot \text{g}} = 0,375$$

Obliczone wartości współczynników C_p i C_{pk} jednoznacznie wskazują, że proces pakowania nie nadaje się do spełnienia określonych w treści zadania wymagań

ZADANIE 5.4 – ROZWIĄZANIE c.d.



Na wykresie przedstawiono rozkład możliwych wyników procesu pakowania oraz zbiór wartości dopuszczalnych. Proces jest stabilny, ale ze względu na swoją naturalną zmienność nie nadaje się do spełnienia określonych warunków **(zbyt duża część wyników nie mieści się w zbiorze wartości dopuszczalnych)**

LITERATURA

- 1. Greber Tomasz – „Statystyczne sterowanie procesami – doskonalenie jakości z pakietem STATISTICA”, wyd. przez Statsoft Polska Sp. z o.o., Kraków, 2000r.**
- 2. J.R. Thompson i in. „Techniki zarządzania jakością od Shewharta do metody Six Sigma”, Akademicka Oficyna Wydawnicza Exit, Warszawa, 2005r.**
- 3. PN-ISO 7870:2006 „Karty kontrolne – Ogólne wytyczne i wprowadzenie”;**
- 4. PN-ISO 8258:1993 „Karty kontrolne Shewharta”**



2016

**Statystyczne sterowanie procesami
(materiały do wykładów)**