

WYCOFANE ZE ZBIORÓW
BIBLIOTEKI GŁÓWNEJ PL

WYCOFANE ZE ZBIORÓW
BIBLIOTEKI GŁÓWNEJ PL

WYCOFANE ZE ZBIORÓW
BIBLIOTEKI GŁÓWNEJ PL

Jan Zygmowski

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig. № 22

Bardey, Dr. G., Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebraischer Aufgaben. Erster Teil: Aufgaben mit einer Unbekannten. [VI u. 95 S.] gr. 8. 1887. geh. M. 1.50.

Bücher, welche den angegebenen Gegenstand richtig behandeln, sind bisher kaum erschienen. Es wird in den Schulen demselben auch schwerlich die Aufmerksamkeit gewidmet, welche er verdient. Schon aus diesen Gründen wird, wie wir hoffen, dieses Buch Bardeys vielfach willkommen sein. Es ist vorzugsweise für Schüler bestimmt, damit sie sich selbständig nach dem Buche und dem Vortrage des Lehrers auf die Lösung der betreffenden Aufgaben vorbereiten, über die Ansätze zu solchen Aufgaben etwas mehr nachdenken, sich über die Punkte, welche hier in Betracht kommen, klarer werden, sich an die vorkommenden Verhältnisse gewöhnen und sich darin üben, die in Worten gegebenen Aufgaben in mathematische Zeichen zu übertragen. Manchem Lehrer wird es eine Anregung sein, diesem Gegenstande eine grössere und mehrseitige Aufmerksamkeit zu widmen. Auch Nichtmathematikern, für welche die eingekleideten Aufgaben meistens mehr Interesse haben als die Gleichungen selber, wird es willkommen sein. Es ist einfach abgefaßt und für jedermann, der einige algebraische Kenntnisse hat, leicht verständlich.

Die wesentliche Veranlassung zur Abfassung des Buches sind die von einem Herrn Robert Pauli ohne Erlaubnis des Herrn Dr. Bardey herausgegebenen „Anweisungen zur Lösung der Textaufgaben in Dr. Bardeys Aufgabensammlung“. Dr. Bardey sowohl als die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner glauben sich durch das Buch des Herrn Pauli geschädigt. Die zu der Aufgabensammlung Bardeys gehörenden Resultate kommen nicht im Buchhandel vor. Im Buche des Herrn Pauli sind alle Resultate mit recht fetten Lettern angegeben. Wenn der Verfasser in der Vorrede auch sagt, er wolle die Schüler über die Entwicklung des Ansatzes belehren, so ist doch auf die Angabe der Resultate und die sehr ausführliche Ausrechnung ebensoviel oder mehr Fleiß verwendet als auf die Entwicklung des Ansatzes. Die Ansätze sind vielfach in so weitläufiger Form dargestellt, wie sie zu den Aufgaben keineswegs nötig sind. Verschiedene Methoden, den Ansatz zu entwickeln, sind nicht gegeben. Die Aufgaben selber sind nicht angeführt; Herr Pauli hätte sich sonst des Nachdrucks schuldig gemacht. In dem Buche des Herrn Pauli sind alle Aufgaben des XXII Abschnitts der Bardeyschen Aufgabensammlung bearbeitet. In dem jetzt erscheinenden Buche von Bardey ist nur etwa der vierte Teil der Aufgaben aus dem betreffenden Abschnitt behandelt, weil der Verfasser das für genügend hält. Der Schüler wird bei gehörigem Verständnis der vorgeführten Aufgaben mit einiger Mühe auch die anderen Aufgaben lösen können.

Für die Lehrer, welche die Bardeysche Aufgabensammlung gebrauchen, sei hier bemerkt, daß der Verfasser, um sich von der Wirkung des Buches des Herrn Pauli frei zu halten, alle von diesem bearbeiteten Aufgaben in seiner Aufgabensammlung nach Form, Inhalt und Reihenfolge geändert hat, wodurch der Mißbrauch des Paulischen Buches unmöglich wird. Für die Besitzer der älteren Auflagen sind die neuen Aufgaben in einem besonderen Hefte erschienen.

Brockmann, F. J., vorm. Oberlehrer am königl. Gymnasium zu Cleve, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Für Gymnasien und Realschulen bearbeitet. [Mit 46 Holzschnitten im Text.] Zweite Auflage. [VIII u. 156 S.] gr. 8. 1880. geh. n. M. 1.60.

Herr Dr. Wiegand in Halle sagt am Schlusse einer eingehenden Rezension in der „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“ über dieses schon vielfach eingeführte Buch: „Wir erklären, daß wir es hier mit einem ganz vortrefflichen Schulbuche zu thun haben, das auch polytechnischen Schulen genügen wird und ganz besonders zum Privatstudium empfohlen werden kann. Die Ausstattung ist, wie bei allen Schriften, die aus der Teubnerschen Offizin hervorgehen, ganz vorzüglich, der Druck korrekt und der Preis außerordentlich billig.“

Lehrbuch der elementaren Geometrie für Gymnasien und Realschulen bearbeitet. 2 Teile. gr. 8. geh. n. M. 3.60.

Einzeln:

- I. Teil: Die Planimetrie. Mit 139 Figuren in Holzschnitt. Dritte verbesserte Auflage. [IX u. 201 S.] 1887. n. M. 2.—
- II. — Die Stereometrie. Mit 84 Figuren in Holzschnitt. [IV u. 128 S.] 1875. n. M. 1.60.

In gleicher Weise wie die mit allseitigem Beifall aufgenommene Trigonometrie hat der Verfasser die Planimetrie nach streng wissenschaftlichen Prinzipien bearbeitet. Das ganze

76

planimetrische System ist klar und übersichtlich geordnet. Die Anordnung und Einteilung des Ganzen weicht von den meisten denselben Stoff behandelnden Lehrbüchern insofern ab, als eine Menge von geometrischen Thatsachen, die nicht notwendig zum Systeme gehören, in den einzelnen Kapiteln in Form von Übungssätzen zusammengestellt ist, um neben der ziemlich reichhaltigen Sammlung systematisch geordneter Aufgaben, deren Auflösungen meistens nur andeutungsweise gegeben sind, dem Schüler als ein reichliches und zu selbständiger Beschäftigung mit dem Gelernten anregendes Material zu dienen.

Um bei Vollständigkeit doch den Umfang des Lehrbuches nicht übermäßig zu erweitern, hat der Verfasser die fruchtbaren Sätze über die Potenzlinie und in gleicher Weise das renommierte Taktionsproblem nicht in einem besonderen Kapitel, sondern in Kürze als Zugabe zu betreffenden Aufgaben behandelt. Die Lehre von der harmonischen Teilung, vom Pol und der Polare beim Kreise, Bernoullis Satz über Transversalen, sowie die wichtigsten Sätze über Maxima und Minima, soweit sie der Elementargeometrie angehören, haben in einem Anhang in einer dem Schulzweck entsprechenden Weise ihre Behandlung gefunden. Den Bau der Parallelen theorie, an welcher bis jetzt die rigorosen Anforderungen der Wissenschaftlichkeit meistens rütteln zu müssen geglaubt haben, meint der Verfasser auf Grund früher entwickelter Vorstellungen so aufgeführt zu haben, daß sich ein nicht zu ängstliches wissenschaftliches Gewissen damit zufrieden gestellt halten dürfte.

Wie in der Planimetrie, so ist auch in der Stereometrie mit einer streng wissenschaftlichen Behandlung eine klare und übersichtliche Anordnung zu verbinden gesucht worden, ist zwischen den erschöpfenden Handbüchern und den aphoristischen Leitfäden die richtige Mitte gehalten und der Zusammenhang der stereometrischen Thatsachen mit den planimetrischen und unter sich in leicht faßbarer Darstellung gebührend hervorgehoben worden.

Die Einteilung der Stereometrie ist die allgemein übliche, auch sind wesentlich andere Gesichtspunkte, als die hergebrachten, nicht aufgestellt. In Rücksicht auf die Bestimmung dieser Schrift konnte der Verfasser sich nicht entschließen, den hergebrachten Lehrgang zu verlassen. Denn ob für ein Lehrbuch, welches zum Gebrauche an Gymnasien und Realschulen bestimmt ist, der gewöhnliche, oder der den Anschauungen der neueren Geometrie angepaßte moderne Schnitt der bessere sei, dürfte vorderhand noch zweifelhaft sein.

Die als Übungsmaterial systematisch zusammengestellten Übungssätze und Aufgaben bilden das letzte Kapitel und können in ihren Abteilungen den einzelnen Kapiteln des Systems mit Auswahl angereicht werden. Da sie vorzugsweise auf die Anregung und Belebung der selbständigen Thätigkeit des Schülers berechnet sind, so fehlen entweder bei den meisten Übungssätzen die Beweise ganz, oder sind doch nur andeutungsweise gegeben; desgleichen sind für die Lösung der Aufgaben die Wege meist nur angedeutet. Wo in einzelnen Fällen Übungssätze ausführlich bewiesen und Aufgaben vollständig gelöst sind, möge man eine beabsichtigte Erweiterung des aufgestellten Systems erblicken. Bei der Aufstellung der Aufgaben ist auch noch dadurch dem Schüler eine hoffentlich willkommene Gelegenheit selbständiger Thätigkeit gegeben, daß die spezielle Formulierung einzelner Aufgaben aus einer allgemeinen Gruppe unterlassen ist.

Brockmann, F. J., vorm. Oberlehrer am königl. Gymnasium zu Cleve,
Materialien zu Dreiecksconstructions nebst Anwendung
auf fast vierhundert Aufgaben. [VI u. 88 S.] gr. 8. 1888. geh.
M. 1.20.

Diese Schrift hat den Zweck, den leider nicht zu leugnenden Übelstand, daß die Pflege der Konstruktionsaufgaben auf unseren Schulen durchweg am wenigsten erfreuliche Resultate liefert, vom methodischen, didaktischen und pädagogischen Standpunkte zu bekämpfen. Zunächst sind die Aufgaben auf Dreiecksconstructionen beschränkt. Die hierzu nötigen Materialien sind in verschiedenen Gruppen als Örter, Data, Lehrsätze, Reduktionsaufgaben und algebraische Analysis zusammengestellt und die dann folgenden 360 Aufgaben durch steten Hinweis auf das betreffende Material zur Lösung so durchsichtig gearbeitet, daß einerseits die vollständige Durchführung derselben keine Schwierigkeiten mehr bietet, andererseits aber die beständig angestrengte Thätigkeit des Lesers nicht überflüssig wird. — Der Verfasser spricht die Zuversicht aus, daß jeder, welcher diese Schrift vorurteilsfrei mit Ernst und Ausdauer durcharbeitet und dadurch namentlich die „Materialien“ in sich aufnimmt, das von ihm beherrschte Terrain weit über die dem Systeme angehörenden Elementaraufgaben hinaus erweitern und sich in den Stand setzen werde, sich auch für solche Aufgaben, für welche die Materialien hier nicht gegeben sind, durch selbstthätiges Studium die Wege zur Lösung zu ebnen.

PLANIMETRISCHE KONSTRUKTIONSAUFGABEN.

EINE VORSCHULE

ZU DES

VERFASSERS MATERIALIEN.

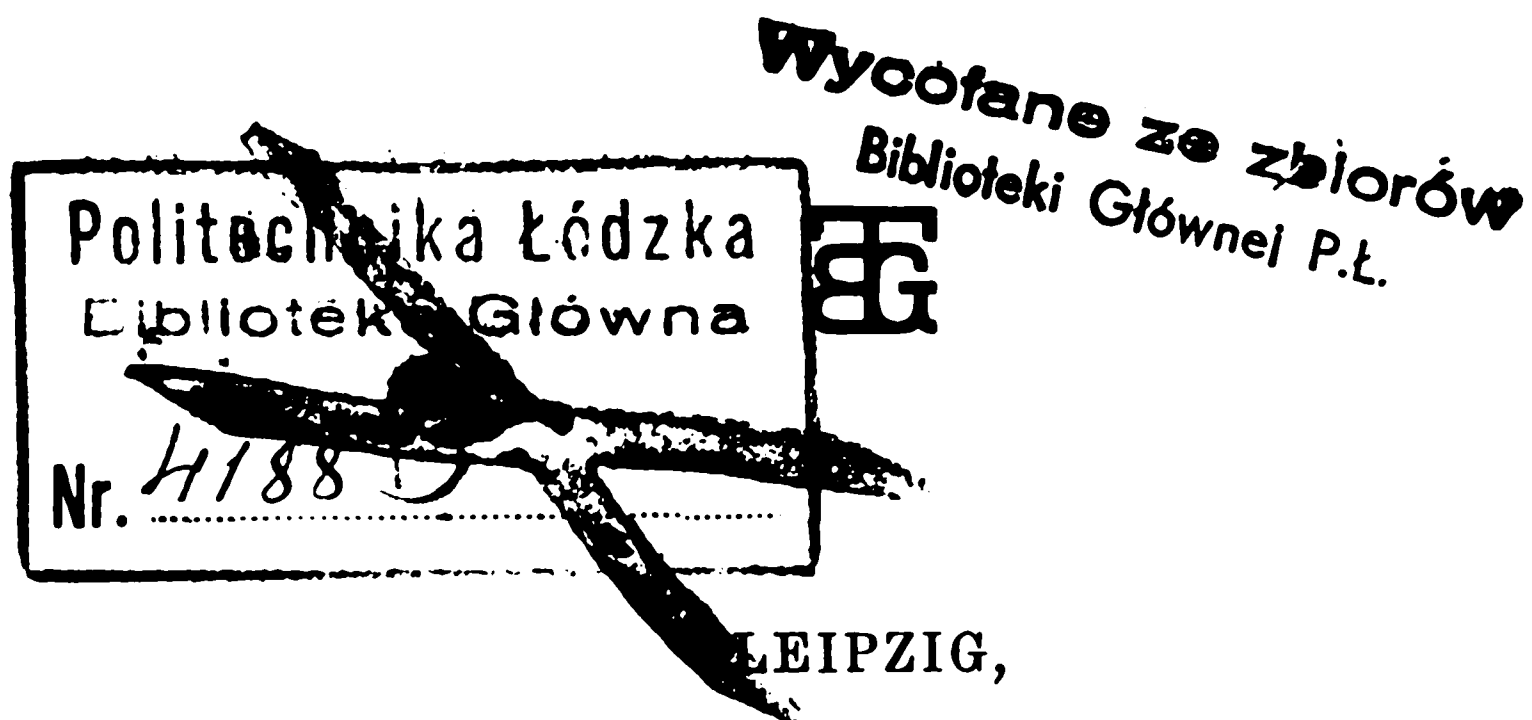
ENTHALTEND

501 AUFGABEN NEBST DEREN LÖSUNGEN.

BEARBEITET VON

F. J. BROCKMANN,

VORM. OBERLEHRER AM KGL. GYMNASIUM ZU CLEVELAND.



DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1889.

4188

Vorrede.

Bei der Ausarbeitung des Manuskripts zu den jüngst in gleichem Verlage erschienenen „Materialien zu den Dreiecks-konstruktionen“ drängte sich uns immer nachdrücklicher der Gedanke auf, daß zur recht ergiebigen Nutzbarmachung der „Materialien“ eine von den Elementaraufgaben hinüber leitende Vorschule unerläßlich notwendig sei.

So entstand denn vorliegende Sammlung, wenn auch in der Zeit nach den „Materialien“, so doch nach Form und Inhalt als ein Praeambulum zu denselben.

Während nämlich in den Materialien eine allgemeine Methodik bei Behandlung von Konstruktionsaufgaben und die Kenntnis der Lösungen einer Reihe von Aufgaben vorausgesetzt werden mußte, verfolgen die hier aufgeführten Aufgaben und ihre Lösungen den Zweck, daß der Lehrer durch aufmerksames Studium derselben eine allgemeine Methodik selbst abstrahiere und sich die für weiteres Studium erforderliche einigermaßen ausgedehnte Kenntnis von Lösungen aneigne.

Zur leichteren Erreichung dieses doppelten Zweckes sahen wir uns veranlaßt, wenigstens in der ersten Abteilung, die gemischte Aufgaben enthält, die Lösungen etwas ausführlich zu gestalten, obwohl wir mit Bewußtsein das rigorose Schema Euklidischer Auflösungen auch hier vermieden haben.

Daß wir durch die häufige Reduktion einer Aufgabe auf eine frühere dem Tadel verfallen, den Lieber in der Vorrede zur ersten Auflage der von ihm unter Mitwirkung von von Lühmann herausgegebenen Geometrische Konstruktionsaufgaben (Berlin, bei L. Simion, 1885) gegen diese Methode ausspricht, vermögen wir nicht zu bedauern. Ist nicht viel-

mehr eine solche Reduktion, wie bei den Aufgaben, so auch in den Beweisen der Theorie durchaus begründet durch die Natur der Mathematik? Fordert aber Lieber, daß man zur Lösung einer Aufgabe alle dazu nötigen Aufgaben noch einmal besonders löst und in die fragliche Lösung mit aufnimmt, so könnte man Entsprechendes für die Beweise der Theorie verlangen und es beispielsweise für notwendig erachten, den Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes so aufzubauen, daß die Beweise aller früheren hierzu notwendigen Lehrsätze in denselben aufgenommen werden müßten. Der Anblick eines solchen Beweises würde ein hinreichender Schutz gegen ein solche Sünde sein!

Ob wir indes bei den einzelnen Aufgaben stets den sogenannten elegantesten Weg der Lösung betreten haben, wagen wir nicht zu behaupten, jedenfalls halten wir sämtliche Lösungen für naturgemäß und darum auch für zweckentsprechend.

Von sämtlichen Lösungen dürfen wir behaupten, daß sie von uns selbständig aufgestellt sind; die Aufgaben selbst sind zum größten Teile den bekannten Sammlungen entnommen, in welchen dieselben meist ohne Lösung aufgestellt sind, sicher aber dann ohne Lösung, wenn man allenfalls eine erwarten zu dürfen glaubt. Ich nenne besonders Gandtner und Jung-hans, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie, dann Hoffmann, Sammlung planimetrischer Aufgaben, ferner Heilermann, Sammlung geometrischer Aufgaben und endlich Lieber und v. Lühmann, geometrische Konstruktionsaufgaben. Mit Ausnahme von Heilermann, der gar keine Lösungen bringt, bringen die andern genannten Autoren nur vereinzelte Lösungen.

Sollte jemand Anstoß daran nehmen, daß wir bei A. 492 zur Bestimmung eines Winkels die ebene Trigonometrie gestreift haben, so bemerken wir, daß nach unserer Ansicht die Anwendung goniometrischer Begriffe den streng geometrischen Charakter nicht alteriert, da ja die ebene Trigonometrie ein Teil der Planimetrie ist. Resultate einer numerischen Rechnung müssen freilich ausgeschlossen bleiben.

Um nicht allzu sehr in der Auswahl der Aufgaben beengt, namentlich nicht gezwungen zu sein, auf zu einfache Aufgaben zurückzugreifen, sahen wir uns an wenigen Stellen veranlaßt,

etwas notwendiges Material einzuflechten. Wir glauben indes doch nicht zu sehr in das Gebiet unserer Materialien hinüber gegriffen zu haben, da wir nur noch einfaches und darum gelegentlich mühelos einzuflechtendes Material zu Hilfe genommen haben. Besonders hervorzuheben wären die vor A. 229 aufgestellten Sätze über einige geometrischen Örter.

Mit diesen Auseinandersetzungen übergebe ich das Büchlein meinen geehrten Fachgenossen und den Studierenden, mit der ergebenen Bitte an die ersteren, dasselbe gewissenhaft prüfen und begründete Ausstellungen mir nicht vorenthalten zu wollen. An die letzteren richten wir die Bitte, sich mit Fleiß und Ausdauer dieses Büchleins beim Studium zu bedienen, damit sie die übliche Scheu vor den Konstruktionsaufgaben recht bald verlieren und sichere Wege zur Lösung derselben allmählich kennen lernen.

Cleve, 18. Februar 1889.

F. J. Brockmann.

Allgemeine Inhaltsübersicht.

	Seite
I. Vermischte Aufgaben (A. 1 bis A. 333)	1
II. Dreieckskonstruktionsaufgaben (A. 334 bis 501)	72
Darunter Verwandlungsaufgaben (A. 480 bis 501)	98

I. Vermischte Aufgaben.

Vorbemerkung. Die folgenden Aufgaben schliessen sich unmittelbar an die in den gangbarsten Lehrbüchern enthaltenen Elemente an und sind ausnahmsweise ohne Erweiterung des Systems der Planimetrie in seiner hergebrachten Form löslich. Da dieselben das Ziel verfolgen, dem noch Ungeübten ein Wegweiser auf dem Gebiete der Konstruktionsaufgaben zu sein und ihn in dasselbe in leicht faßlicher Weise einzuführen, so war es geboten, die Lösungen etwas ausführlicher zu gestalten, als es in unseren „Materialien“ geschehen ist. Gleichwohl haben wir geglaubt, von der rigorosen Euklidischen Form abweichen zu dürfen, aus Gründen, die wir an andern Orten wiederholt ausgesprochen haben.

1. Um drei in einer Geraden liegende Punkte A , B und C als Mittelpunkte Kreise zu beschreiben, von denen jeder die beiden andern berührt, wenn der Radius r des Kreises um A gegeben ist.

Lösung. 1) Ist $r < AB$, so können die Kreise um B und C beide den um A nur umschliessend berühren. Die Radien derselben ergeben sich leicht.

2) Ist $AB < r < AC$, so berührt der Kreis um B den um A von innen, und der um C beide von aussen; oder die beiden Kreise um B und C berühren den um A umschliessend. Die Radien ergeben sich in beiden Lagen leicht.

3) Ist $r > AC$, so findet seitens der Kreise um B und C entweder eine gemeinsame innere Berührung des Kreises um A , oder eine gemeinsame umschliessende Berührung desselben statt, und lassen sich die Radien in beiden Fällen wiederum leicht bestimmen.

2. In einer Geraden einen Punkt X so zu bestimmen, daß eine Tangente aus demselben an einen gegebenen Kreis und die Verbindung desselben mit einem gegebenen Punkte A gleiche Winkel mit der Geraden bilden.

Lösung. Liegen der Kreis und der Punkt an verschiedenen Seiten der Geraden, so ist der Durchschnitt der aus dem

gegebenen Punkte an den Kreis gezogenen Tangente mit der Geraden der gesuchte Punkt X . Im andern Falle wird X durch die Tangente aus dem Gegenpunkte von A in bezug auf die Gerade bestimmt.

Determination. Weil zwei Tangenten aus A oder dessen Gegenpunkt möglich sind, so erhält man auch zwei verschiedene Punkte X .

3. In einer Geraden einen Punkt X so zu bestimmen, daß seine Entfernung von einem gegebenen Punkte A dieser Geraden und seine Entfernung von einem außerhalb derselben liegenden Punkte B eine gegebene Summe bilden.

Lösung. Macht man $XC = XB$ auf der Geraden, so ist AC der gegebenen Summe gleich, also Punkt C gegeben. Der gesuchte Punkt ist aber die auf der Geraden liegende Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Grundlinie BC ist. Der zweite Ort für X ist also das Lot zu BC in der Mitte dieser Linie.

Zusatz. Sollen die beiden Entfernungen eine gegebene Differenz bilden, so trage man $XC' = XB$ auf XA ab; dann ist AC' gleich der gegebenen Differenz. Den Punkt X bestimmt man dann auf gleiche Weise wie vorhin.

4. Auf der Peripherie eines Kreises einen Punkt X so zu bestimmen, daß seine Entfernungen von den Schenkeln eines Winkels eine gegebene Summe (oder Differenz) bilden.

Lösung. Ist XD das Lot auf den Schenkel AB , XE auf AC , so stelle man die gegebene Summe dar, indem man DX über X um $XF = XE$ verlängert (oder die gegebene Differenz, indem man XD über D bis F' verlängert, so daß $XF' = XF$ ist). In beiden Fällen sind wegen der bekannten Entfernungen DF (oder DF') die Parallelen durch F (oder F') zu AB und der Durchschnitt dieser Parallelen mit dem andern Schenkel AC in G (oder G') gegeben. Leicht erkennt man, daß sowol GX den Winkel G , als auch $G'X$ den Winkel G' halbiert.

Zusatz. Wenn statt der Lote auf die Schenkel die Parallelen zu denselben, von dem zu bestimmenden Punkte und dem jedesmal andern Schenkel begrenzt, eine gegebene Summe oder Differenz bilden sollen, so ergibt sich bei ganz analoger Behandlung, daß der gesuchte Punkt ebenfalls durch die

Halbierung eines konstruierbaren Winkels — derselbe gehört in beiden Fällen einem Rhombus an — bestimmt wird.

5. *Auf einer Geraden einen Punkt zu bestimmen, dessen Entfernung von einem gegebenen Punkte dieser Geraden mit der Entfernung desselben von einer zweiten Geraden eine gegebene Summe (oder Differenz) bildet.*

Lösung. Sind die Geraden AC und BL , auf deren ersterer der feste Punkt A gegeben ist, einander parallel, so erledigt sich die Lösung einfach dadurch, daß die Entfernung der Parallelen bekannt ist.

Bilden aber die Geraden den Winkel α und bilden das Lot XD (auf BL) und die Entfernung XA die Summe s , so verlängere man DX über X um $XF = XA$, so ist X die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Grundlinie AF ist. Für F aber ist zunächst ein Ort durch die Parallele $G FH$ zu BL gegeben, da die Entfernung DF bekannt ist. Ein zweiter Ort ergibt sich durch den Winkel XAF , dessen GröÙe sich leicht als $\frac{1}{2}(R + \alpha)$ ergibt. Zieht man daher $AJ \parallel BL$, wodurch $\angle XAJ = \alpha$ wird, und zieht ferner $AK \perp AJ$, so halbiert AF den rechten Winkel KAJ .

Wenn $AX - DX = d$ werden soll, so ergibt sich bei analoger Behandlung für F ein Ort durch eine bekannte Parallele zu BL . Der zweite wird aus dem Winkel XAF abgeleitet, dessen GröÙe $\frac{1}{2}(R - \alpha)$ beträgt.

1. Zusatz. Ist $DX > AX$, so daß $DX - AX = d$ werden muß, so bleibt die Lösung dieselbe, nur liegt der eine Ort, die Parallele, an der andern Seite von BL .

2. Zusatz. Wenn statt des Lotes XD auf BL das Lot XD' auf AC (wo D' auf BL liegt) eintreten soll, so erledigt sich die Lösung in noch einfacherer Weise.

3. Zusatz. Auch bleibt die Lösung ungeändert, wenn statt der Geraden BL eine Kreisperipherie gegeben ist.

6. *Einen Kreis zu konstruieren, der einen andern Kreis berührt, durch einen gegebenen Punkt geht, und dessen Mittelpunkt auf einer durch diesen Punkt gehenden Geraden liegt.*

Lösung. Der Kreis um M sei der gegebene Kreis, BC die gegebene Gerade, A der gegebene Punkt in derselben. Zieht man den Diameter $GAG' \parallel BC$, so bestimmen AG und AG' die Berührungspunkte Y und Y' , die Verbindungslinien

MY und MY' geben in der Geraden BC die beiden Mittelpunkte X und X' , woraus sich die Radien XA und XA' ergeben.

Zusatz. Wenn statt eines Kreises eine Gerade berührt werden soll, so ergibt sich der Berührungspunkt Y , wenn man im Durchschnitt beider Geraden zu der Geraden, welche Tangente werden soll, ein Lot errichtet, welches gleich der Entfernung dieses Durchschnittspunktes vom gegebenen Punkte A ist, und A mit dem Endpunkte des Lotes verbindet. Man erhält zwei verschiedene Kreise, da man obiges Lot nach zwei Seiten errichten kann.

7. Auf einer Dreiecksseite einen Punkt zu bestimmen, so daß die Lote aus demselben auf die beiden anderen Seiten eine gegebene Summe (oder Differenz) bilden.

Lösung. Der Punkt X liege zwischen B und C so, daß das Lot XD auf AB , und das Lot XE auf AC zusammen die Summe s bilden. Verlängert man DX über X um $XG = XE$, so ist $DG = s$ und die Parallele durch G zu AB gegeben. Schneidet diese Parallele die Seite AC in H , so ergibt sich leicht, daß HX den Winkel AHG halbiert.

Wenn die Differenz eine gegebene werden soll, so ist die Lösung ganz analog.

Zusatz. Auch bleibt die Lösung ungeändert, wenn der Punkt X auf der Verlängerung der Dreiecksseite bestimmt werden, oder wenn statt der Lote Parallelen zu den Dreiecksseiten bis an diese eintreten sollen. Die Lösung ändert sich ferner nicht, wenn der Punkt statt auf einer Dreiecksseite auf einer Kreisperipherie zu bestimmen ist.

8. Auf einer Geraden einen Punkt zu bestimmen, so daß eine Tangente von demselben aus an einen gegebenen Kreis und die Verbindung desselben mit einem gegebenen Punkte gleiche Winkel mit der Geraden bilden.

Lösung. Liegen Kreis und Punkt an verschiedenen Seiten der Geraden, so wird der Punkt durch die Tangente von dem Punkte aus bestimmt; liegen dieselben an derselben Seite der Geraden, so bestimme man zunächst zum gegebenen Kreise den Gegenkreis, indem man um den Gegenpunkt des Mittelpunktes mit demselben Radius einen Kreis beschreibt. Alsdann

bestimmt die Tangente von dem gegebenen Punkte aus an diesen Gegenkreis den gesuchten Punkt.

Determination. Weil in beiden Fällen zwei Tangenten möglich sind, erhält man zwei Punkte in der Geraden, welche den gestellten Bedingungen genügen.

Zusatz. Der gesuchte Punkt wird auch dadurch gefunden, daß man von dem Gegenpunkte des gegebenen Punktes die Tangenten an den gegebenen Kreis zieht.

9. In einer Geraden einen Punkt zu bestimmen, von welchem aus an zwei Kreise gezogene Tangenten gleiche Winkel mit der Geraden bilden.

Lösung. Man konstruiere den Gegenkreis (s. 8) zu einem der gegebenen Kreise und ziehe zu diesem und dem andern der beiden Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten, deren (vier) Durchschnitte mit der Geraden jeder den gesuchten Punkt geben. Hierbei ist zu bemerken, daß man *die* Tangente an den ersten Kreis zu nehmen hat, welche mit der Tangente des Gegenkreises, welche ein Stück der gemeinschaftlichen ist, entsprechend liegt.

10. In einer Geraden einen Punkt zu bestimmen, dessen Verbindungen mit zwei gegebenen Punkten mit der Geraden Winkel bilden, deren Differenz gegeben ist.

Lösung. Sind A und B die an derselben Seite der Geraden liegenden Punkte, und ist A' der Grenzpunkt von A , so ist $\sphericalangle BXA'$ das Supplement der gegebenen Differenz. Der Punkt X läßt sich demnach durch einen Kreisbogen über $A'B$ konstruieren.

Zusatz. Liegen die Punkte A und B an verschiedenen Seiten der Geraden, so wird der den Punkt X bestimmende Bogen über AB beschrieben.

11. In einer Geraden einen Punkt zu bestimmen, von welchem aus zwei an einen Kreis gezogene Tangenten einen Winkel von gegebener Größe einschließen.

Lösung. Mit Hilfe des gegebenen Winkels läßt sich die Entfernung des Kreismittelpunktes vom gesuchten Punkte bestimmen. Man erhält dann zwei Punkte, wenn die Entfernung der Geraden vom Kreismittelpunkte kleiner ist als die oben bestimmte Entfernung.

Zusatz. Soll der gesuchte Punkt auf einer Kreisperipherie liegen, so ändert sich die Lösung nicht.

12. *Um einen von drei Punkten einen Kreis zu beschreiben, so daß die von zwei anderen Punkten an denselben gezogenen Tangenten einen Winkel von gegebener GröÙe einschließen.*

Lösung. Soll der Kreis um A beschrieben werden, und schneiden die aus B und C an diesen gezogenen Tangenten einander in D , so ist $\sphericalangle BDA = CDA$ gleich der Hälfte des gegebenen. Zwei Kreisbogen über AB und AC mit gegebenem Peripheriewinkel bestimmen also den Punkt D , und das Lot von A auf BD oder CD ist der Radius des gesuchten Kreises.

13. *Auf dem Durchmesser eines Kreises ist ein Punkt gegeben; auf der Verlängerung desselben einen Punkt so zu bestimmen, daß seine Entfernung von dem gegebenen Punkte und die aus demselben gezogene Tangente eine gegebene Summe bilden.*

Lösung. Ist A der gegebene, X der gesuchte Punkt auf dem Diameter BC , und man macht auf der Verlängerung von AX über X hinaus $XF =$ der Tangente XD und in F das Lot FG , welches von der Verlängerung von DX in G geschnitten wird, so ist $\triangle XFG \cong XDM$, also $FG = MD$ (Radius), woraus sich die Konstruktion ergibt.

Zusatz. Soll die Differenz jener Strecken eine gegebene werden, so mache man XF über A hinaus $= XD$, und in F das Lot FG bis zum Durchschnitte mit der Tangente. Ist dieser Durchschnitt G , so findet man wiederum $FG = MD$.

14. *Einen Kreis zu beschreiben, der zwei konzentrische Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.*

Lösung. Wenn man berücksichtigt, daß die Berührungspunkte auf der Centrale liegen, so findet man für den Radius des gesuchten Kreises je nach der Art der Berührung aus den Radien R und r der gegebenen Kreise entweder den Wert $\frac{1}{2}(R + r)$ oder $\frac{1}{2}(R - r)$, und daraus als Örter für den gesuchten Mittelpunkt entweder einen konzentrischen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}(R - r)$ oder $\frac{1}{2}(R + r)$. Der bekannte Radius giebt außerdem einen Kreis um A als je zweiten Ort. Man erhält also vier Lösungen.

Zusatz. Ist statt des Punktes A ein Kreis oder eine Gerade gegeben, die berührt werden, oder unter einer Sehne

von gegebener Größe geschnitten werden sollen, so bleibt die Lösung ebenso einfach, da auch in diesen Fällen der je zweite Ort für den Mittelpunkt leicht bestimmt werden kann.

15. *In ein Kreissegment ein Quadrat so einzuschreiben, daß zwei Ecken desselben auf der das Segment begrenzenden Sehne liegen.*

Lösung. Verbindet man den Mittelpunkt der Sehne mit einer auf dem Bogen liegenden Ecke des Quadrates und verlängert diese Verbindungslinie bis in ein im Endpunkte der Sehne auf dieser errichtetes Lot, so ergibt sich leicht, daß dieses Lot gleich der Sehne ist.

16. *In einen Sektor ein Quadrat so einzuschreiben, daß zwei Ecken desselben auf dem Bogen liegen.*

Lösung. Ist $XYZT$ das gesuchte Quadrat, und liegen die Ecken X und Y auf dem Bogen BC , und ist A der Mittelpunkt des zugehörigen Kreises, so ist, wenn die verlängerte AX das in C auf BC errichtete Lot in D trifft,

$$TX : CD = AT : AC \text{ und}$$

$$TX : CB = AT : AC,$$

woraus sich ergibt $CD = CB$. Daraus ergibt sich aber sofort die Konstruktion.

Zusatz. Wird statt eines Quadrates ein rechtwinkliges Parallelogramm verlangt, dessen Seiten sich wie $m : n$ verhalten, so ergibt sich durch ähnliche Betrachtung, daß $CD : CB = m : n$ sein muß.

17. *Eine Strecke AB so in zwei Teile zu zerlegen, daß das Rechteck aus den Stücken einem gegebenen Rechteck ($m \cdot n$) gleich wird.*

Lösung. Ist X der gesuchte Teilpunkt und man verbindet denselben mit den Endpunkten C und D der in A und B auf AB (nach derselben Seite) errichteten und den Seiten m und n des gegebenen Rechtecks gleich gemachten Lote, so folgt aus $m \cdot n = AX \cdot BX$ die Proportion

$$m : AX = BX : n.$$

Wegen Gleichheit der Winkel A und B folgt aus dieser Proportion, daß $\triangle AXC \sim BXD$, woraus wiederum leicht gefolgert wird, daß $\angle CXD = R$. Ein Ort für X ist also der Halbkreis über CD .

Determination. Das größte Rechteck, welches aus den zwei Teilen einer Strecke gebildet werden kann, ist das Quadrat der halben Strecke; daher muß für die Möglichkeit der Lösung $m \cdot n \leq \frac{1}{4} AB^2$ sein. Im ersten Falle erhält man einen Punkt X , den Mittelpunkt von AB , im andern Falle zwei Punkte X , die gleiche Entfernung vom Mittelpunkt haben.

1. Zusatz. Errichtet man die Lote nach verschiedenen Seiten, so erhält man durch dieselbe Konstruktion in den Verlängerungen von AB je einen Punkt X , der so liegt, daß das Rechteck aus der Verlängerung (etwa BX) und der ganzen durch die Verlängerung entstandenen Strecke AX dem Rechtecke $m \cdot n$ gleich ist. Eine Determination ist für diesen Fall nicht erforderlich.

2. Zusatz. Soll eine Sehne AB so bis C verlängert werden, daß die Tangente aus C an den Kreis eine gegebene Länge hat, so reduziert sich die Lösung auf den im 1. Zusatz hervorgehobenen Fall.

18. *Durch einen Punkt P innerhalb eines Kreises eine Sehne XPY so zu legen, daß das Rechteck aus der ganzen Sehne und einem Abschnitte ($XY \cdot XP$) einem gegebenen Quadrate (m^2) gleich wird.*

Lösung. Ist M der Mittelpunkt des Kreises und $XP \cdot XY = m^2$, so ist auch $XP(XP + PY) = m^2$, oder $XP^2 + XP \cdot PY = m^2$. Zieht man nun durch P die auf PM senkrechte Sehne APB , so ist $XP \cdot PY = AP^2$, also $XP^2 = m^2 - AP^2$, wonach XP als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks konstruiert werden kann.

Zur Konstruktion sei bemerkt, daß ein um A mit dem Radius m beschriebener Kreis in PM einen Punkt E bestimmt, so daß $PE = PX$ ist.

Zur Determination ist zu beachten, daß, wenn die Verlängerung von PM über M hinaus den Kreis in C trifft, PC das Maximum angiebt, das PX erreichen kann.

Zusatz. Soll von einem Punkte P außerhalb eines Kreises eine Sekante so durch den Kreis gelegt werden, daß das Rechteck aus dem äußeren Abschnitte und der entstehenden Sehne ein gegebenes wird, so ist unter Berücksichtigung des bekannten Sekantensatzes die Lösung analog.

19. *In einen Kreis durch einen gegebenen Punkt eine Sehne zu legen, welche in diesem Punkte stetig geteilt wird.*

Lösung. Ist die Sehne XPY durch den Punkt P in den Kreis um M so gelegt, daß $PY : PX = PX : XY$ ist, so ist auch, wenn man durch Y eine Parallele zu MX zieht, welche die Verlängerung von MP in Z schneiden möge, auch $PZ : PM = PM : MZ$, wonach sich der Punkt Z bestimmen läßt. Da nun ferner

$$MP : XM = PZ : ZY,$$

so kann man, da XM als Radius gegeben ist, und PZ nach dem Vorhergehenden konstruiert werden kann, auch ZY konstruieren und durch einen Kreisbogen um Z mit ZY den Punkt Y bestimmen.

20. *Durch einen Punkt P außerhalb eines Kreises eine Sekante an diesen zu legen, welche in der Peripherie stetig geteilt wird.*

Bei der Lösung ist zu unterscheiden, ob die entstehende Sehne XY , oder das äußere Stück der Sekante das größere Stück werden soll. Soll die Sehne XY das größere Stück werden, so ergibt sich mit Hilfe des Sekantensatzes, daß die entstehende Sehne gleich der aus dem Punkte P an den Kreis zu ziehenden Tangente ist; im andern Falle, wo PX das größere Stück werden soll, kann man, wenn man $XZ \parallel YM$ bis in PM zieht, gerade wie in A. 19 sowohl Punkt Z , als auch die Größe XZ bestimmen.

21. *Durch einen von drei Punkten eine Gerade zu legen, so daß die Lote auf dieselbe von den zwei anderen Punkten aus eine gegebene Summe bilden.*

Lösung. 1) Sollen die beiden anderen Punkte B und C an verschiedenen Seiten der durch A zu legenden Geraden liegen, und sind BD und CE die Lote, so daß $CE + BD = s$ ist, so verlängere CE um $EF = BD$ und ziehe FB , so ist $\triangle BCF$ gegeben und die durch A zu BF gezogene Parallele die gesuchte Gerade.

Oder man konstruiere zu A , B und C die vierte Ecke K eines Parallelogramms, welche B oder C gegenüber liegt, dann ist das rechtwinklige Dreieck KAG , in welchem $KG = s$ ist, gegeben, und AG ist die gesuchte Gerade.

2) Sollen die Punkte an derselben Seite liegen, so ist bei gleicher Bezeichnung, wenn F die Mitte von BC , und $FG \perp AE$ ist, $\triangle AGF$ gegeben, da $FG = \frac{1}{2}s$ ist.

Oder, man konstruiere die vierte, Punkt A gegenüberliegende, Ecke eines Parallelogramms, dessen anderen Ecken A , B und C sind. Ist diese Ecke L , so ist im rechtwinkligen Dreiecke LAG die Seite $LG = s$.

22. *In einer Dreiecksseite einen Punkt X so zu bestimmen, daß die Differenz der Quadrate der beiden durch ihn bis an die anderen Seiten gezogenen Parallelen eine gegebene sei.*

Lösung. Liegt der Punkt X in AB so, daß für die Parallelen XE (zu AC) und XF (zu BC) $XE^2 - XF^2 = d^2$ ist und man beschreibt über FC als Diameter einen Halbkreis, in welchen man die Sehne $FG = FX$ einlegt, so ist, da $FC = XE$ ist, CG die gegebene Differenz d . Es liegt also F auf einer an den um C mit d beschriebenen Kreis gelegten Tangente. Verlängert man nun GF bis in das in A auf AC errichtete Lot, bis H , so erhält man zwei Paare ähnlicher Dreiecke, nämlich $AHF \sim GCF$, und $AED \sim ABC$. Aus der Ähnlichkeit des ersteren Paares hat man: $AH : AF = CG : FG$, aus der des

$$\text{andern: } AC : AF = FX : BC,$$

$$\text{folglich } AH : AC = d : BC.$$

Hieraus ist H bestimmbar, und mittelst einer Tangente auch Punkt F , wodurch die Parallelen FX und XE bestimmt sind.

Zusatz. Soll der Punkt X auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks bestimmt werden, so sind die Parallelen zu den Katheten zugleich Senkrechte zu denselben.

23. bis 25. *Durch einen Punkt innerhalb eines Kreises eine Sehne in denselben zu legen,*

23. *deren Stücke eine gegebene Summe bilden.*

Lösung. Durch die Länge der Sehne ist ihre Entfernung vom Mittelpunkte gegeben, so daß dieselbe als Tangente an einen bekannten Kreis konstruiert werden kann.

24. *deren Stücke eine gegebene Differenz bilden.*

Lösung. Ist $PX - PY = d$, und man macht $XZ = YP$, so ist das gleichschenklige Dreieck MPZ durch seine Seiten gegeben.

25. *deren Stücke ein gegebenes Verhältniß ($m : n$) haben.*

Lösung. Trifft die durch Y zu MX gezogene Parallele den durch P gehenden Radius in C , so ist $MX : YC = MP : PC = m : n$, woraus der Punkt C und die Länge von CY bestimmt werden kann.

Anmerkung. Daß die Stücke der Sehne ein gegebenes Rechteck bilden, kann keine Aufgabe sein, da das Rechteck aus den Stücken einer Sehne konstant ist.

26. bis 28. *Durch einen Punkt außerhalb eines Kreises eine Sekante zu legen,*

26. *deren Stücke eine gegebene Summe bilden.*

Lösung. Setzt man das äußere Stück der Sekante als Verlängerung an den andern Endpunkt, so ist die Mitte der Sehne auch die Mitte der verlängerten Sekante und dieser Punkt leicht zu bestimmen.

27. *deren Stücke eine gegebene Differenz bilden.*

Lösung. Die Länge der Sehne ist gegeben, oder die Länge des äußeren Abschnittes.

28. *deren Stücke ein gegebenes Verhältniß haben.*

Lösung. Ganz ähnlich wie bei A. 25.

Da auch bei der Sekante das Rechteck aus den Stücken derselben konstant ist, so haben wir hier nur eine entsprechend modifizierte Aufgabe, nämlich

29. *Durch einen Punkt außerhalb eines Kreises eine Sekante so zu legen, daß das Rechteck aus dem äußeren Abschnitte und der entstehenden Sehne einem gegebenen Quadrate (a^2) gleich werde.*

Lösung. Es ergibt sich leicht, daß das Quadrat des äußeren Stückes $= \sqrt{t^2 - a^2}$ ist, wenn t die Tangente aus dem gegebenen Punkte bezeichnet.

30. *Zwischen die Schenkel eines Winkels eine Gerade von gegebener Länge so zu legen, daß die Abschnitte von den Schenkeln eine gegebene Summe bilden.*

Lösung. Liegt die Gerade $DE = a$ so, daß $AD + AE = s$ ist und man beschreibt den inneren Berührungskreis des Dreiecks ADE , sowie den zu DE gehörigen äußeren, so sind die Entfernungen der Berührungspunkte dieser Kreise in demselben Schenkel vom Scheitel beziehungsweise $\frac{1}{2}(s - a)$ und $\frac{1}{2}(s + a)$. — Wenn man ausnahmsweise die Sehne und den äußeren Ab-

schnitt der Sekante als deren Stücke betrachten wollte, so bieten die entsprechenden Aufgaben gar keine Schwierigkeit, mit Ausnahme von

31. *Durch einen Punkt außerhalb eines Kreises an diesen eine Sekante zu legen, so daß die entstehende Sehne und der äußere Abschnitt eine gegebene Differenz haben.*

Lösung (analytisch-algebraisch). Heißt y die Sehne, x der äußere Abschnitt und t die von P zu ziehende Tangente, so ist $x : t = t : x + y$, woraus folgt:

$$x + y = \frac{t^2}{x}. \text{ Ist nun}$$

$$x - y = d, \text{ so ergibt sich}$$

$$x^2 - \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}t^2 \text{ und daraus}$$

$$x = \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{16}d^2}, \text{ welcher Ausdruck sich einfach konstruieren läßt.}$$

Zusatz. Soll die Differenz in anderem Sinne genommen werden, nämlich $y - x = d$, so erhält man für y denselben Ausdruck; oder auch für x

$$x = -\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{16}d^2}.$$

Eine rein geometrische Lösung dieser Aufgabe ist folgende:

Ist PXY die verlangte Sekante und PA die Tangente von P aus an den Kreis, so ist, wenn die gegebene Differenz d heißt, $t^2 = PX(d + 2PX)$, oder $2t^2 = 2PX(d + 2PX)$, d. h. die gegebene Differenz d ist um ein Stück ($2PX$) zu verlängern, so daß das Rechteck aus der ganzen, durch die Verlängerung entstehenden Geraden und der Verlängerung einem gegebenen Quadrate ($2t^2$) gleich werde. Das geschieht entweder nach A. 17, 1. Zus. oder in für vorliegenden Fall eleganterer Konstruktion in folgender Weise. Auf dem Berührungsradius AM mache man $AB = AP$, dann ist $BP^2 = 2t^2$. Macht man nun ferner $BC \perp BP$ und $BC = \frac{1}{2}d$, dann um C mit CB einen Kreis und verbindet P mit C , welche Verbindungslinie den um C beschriebenen Kreis in D und E schneiden möge, so ist DP die gesuchte Verlängerung $2PX$ und $PE = PY$. Ein Kreis um P mit dem Radius PE bestimmt also durch seinen Durchschnitt Y mit dem gegebenen Kreise den Endpunkt der gesuchten Sekante.

32. *An einen Kreis eine Tangente zu legen, so daß das von einem Punkte A der Peripherie auf sie gefällte Lot durch die Peripherie halbiert wird.*

Lösung. Trifft der Diameter AE die Tangente in D , so ist $ED = AE$, also Punkt D gegeben.

33. *Von zwei Punkten außerhalb eines Kreises zwei Sekanten an diesen zu ziehen, welche sich gegenseitig halbieren.*

Lösung. Die Verbindungslinie der Endpunkte derselben auf der Peripherie muß gleich und parallel der Verbindungslinie der gegebenen Punkte sein.

34. *Durch den Punkt P in einer Kreisperipherie eine Sekante von gegebener GröÙe s so zu legen, daß die Tangente aus ihrem Endpunkte außerhalb der Peripherie eine gegebene Länge t erhalte.*

Lösung. Man erhält die Länge der Sehne, wenn man zunächst das äußere Stück der Sekante als dritte Proportionale bestimmt. Es ist nämlich, wenn dies äußere Stück x genannt wird,

$$s : t = t : x.$$

Dann ist die Sehne $= s - x$.

Zusatz. Soll die Sekante so durch P gelegt werden, daß dieselbe in P stetig geteilt wird, so läßt sich in beiden Fällen die GröÙe der Sehne bestimmen, sei es, daß der innere oder der äußere Teil der größere Abschnitt werden soll.

35. *Durch zwei Punkte (P und P') eines Kreises um M zwei gleiche und parallele Sehnen zu legen.*

Lösung. Da das durch M auf beide Schnen gezogene gemeinschaftliche Lot in M halbiert wird, so wird auch jede andere Gerade, welche durch M zwischen die Sehnen gelegt wird, in M halbiert. Verbindet man daher P mit M und verlängert PM über M um $MA = PM$, so ist AP' die Richtung der einen gesuchten Sehne.

Determination. Geht die Verbindungslinie PP' durch M , so ist die Lösung nur möglich, wenn $PM = MP'$ ist. Dann genügt aber jedes Paar paralleler Sehnen.

Zusatz. Für den Fall, daß die Punkte P und P' außerhalb des Kreises liegen, ist die Lösung genau dieselbe; auch wenn der eine innerhalb, der andere außerhalb liegt.

36. *Durch zwei Punkte (P und P') zwei gleiche Sehnen zu legen, welche einander unter einem gegebenen Winkel α schneiden.*

Lösung. Ist X der Durchschnittspunkt der Sehnen, so ist leicht nachweisbar, daß $\angle PXM = \angle P'XM = \frac{1}{2}\alpha$ ist. Man hat daher für X zwei Örter, nämlich einen Kreis über PP' mit dem zugehörigen Peripheriewinkel $= \alpha$, und einen Kreis über PM (oder $P'M$) mit einem Peripheriewinkel $= \frac{1}{2}\alpha$.

37. *Durch zwei Punkte zwei gleiche und zu einander senkrechte Sehnen zu legen.*

Lösung nach A. 36 leicht. Auch mit Hilfe von A. 35 zu lösen.

38. *Aus dem zweiten Endpunkte eines Berührungsdurchmessers bis an die Tangente eine Gerade zu ziehen, die in der Peripherie halbiert wird.*

Lösung. Ist A der Berührungspunkt, B der andere Endpunkt des Berührungsdiameters, Y der Durchschnitt der gesuchten Geraden mit der Peripherie, und X der Durchschnitt derselben mit der Tangente, so ergibt sich leicht $AX = AB$.

39. *Zwischen einer Tangente und dem Berührungsdiameter eine zweite Tangente zu legen, welche in ihrem Berührungspunkte halbiert wird.*

Lösung. Es ergibt sich leicht, daß die gesuchte Tangente mit der gegebenen einen Winkel von 60° macht.

40. *Durch einen Durchschnittspunkt zweier Kreise eine Gerade zu legen, so daß die entstehenden Sehnen ein gegebenes Verhältniß $m : n$ haben.*

Lösung. Mittels eines Lotes in jenem Durchschnittspunkte läßt sich das gegebene Verhältniß in einfachster Weise auf die Centrale übertragen.

41. *Durch einen Durchschnittspunkt zweier Kreise in den einen Kreis eine Sehne zu legen, welche durch die Peripherie des andern halbiert wird.*

Lösung. Soll durch den Durchschnittspunkt A die Sehne AB in den Kreis um M so gelegt werden, daß ihr Durchschnitt X mit der Peripherie des Kreises um M' die Mitte der Sehne AB ist, so läßt sich, wenn man die Radien MA und MB , und $XE \parallel MA$ zieht, sowohl Punkt E (in MB) als auch die Länge

EX leicht bestimmen, wodurch sich ein zweiter Ort für X ergibt.

Oder wenn man MX bis zum zweiten Durchschnitte mit der Peripherie um M' (bis in D) verlängert, so ergibt sich aus dem rechten Winkel $MXA = DXA$, daß AD Diameter und $DB = DA$ ist.

42. *Die Sehne so zu legen, daßs sie in X nach dem Verhältnis $m : n$ geteilt werde.*

Lösung. Wiederum ergibt sich Punkt E und die Größe von EX durch eine Proportion.

Anmerkung. Es ist hierbei gleichgültig, ob man die Parallele XE zu MA oder zu MB zieht.

43. bis 45. *Durch einen Durchschnittspunkt zweier Kreise eine Gerade zu legen, so daßs*

43. *die entstehenden Sehnen einander gleich werden.*

Lösung. Zieht man durch jenen Durchschnittspunkt die Parallele zu den aus den Mittelpunkten der gegebenen Kreise auf die gesuchte Gerade gezogenen Loten, so trifft diese die Mitte der Centrale.

44. *die entstehenden Sehnen eine gegebene Summe haben.*

1. Lösung. Fällt man aus den Mittelpunkten der Kreise die Lote auf die gesuchte Gerade, so erhält man durch eine Parallele leicht ein rechtwinkliges Hilfsdreieck, dessen Hypotenuse die Centrale, und dessen eine Kathete die halbe gegebene Summe ist.

2. Lösung. Oder man konstruiere zu den Mittelpunkten und dem Durchschnittspunkte als Ecken eines Parallelogramms die vierte Ecke, welche einem der Mittelpunkte gegenüber liegt. Alsdann ist das Lot aus dieser vierten Ecke auf das im Durchschnittspunkte zur gesuchten Geraden errichtete Lot, wie sich leicht beweisen läßt, der halben gegebenen Summe gleich.

Determination. Die kleinste Summe ist die Verbindungslinie beider Durchschnittspunkte, die größtmögliche die durch den Durchschnittspunkt zur Centrale gezogene Parallele, welche also auf der kleinsten senkrecht steht.

45. *die entstehenden Sehnen eine gegebene Differenz haben.*

Lösung. Entsprechend der zweiten Lösung der vorigen Aufgabe konstruiere man als vierte Ecke des Parallelogramms

die, welche dem Durchschnittspunkte gegenüber liegt. Alsdann ist das entsprechende Lot, wie leicht zu beweisen, der halben gegebenen Differenz gleich.

46. *Auf einer Geraden MN einen Punkt zu bestimmen, von dem aus die Stücke einer geteilten Geraden unter gleichen Gesichtswinkeln erscheinen.*

Lösung. Soll $AXC = BXC$ werden, so bestimme man zu A , C und B den vierten, zu C konjugierten harmonischen Punkt C' in der Linie AB . Alsdann ist der Kreis über CC' als Diameter ein Ort für den Punkt X .

Zusatz. Soll X auf einer Kreisperipherie bestimmt werden, so bleibt die Lösung ungeändert.

47. *In einer Geraden einen Punkt X zu bestimmen, dessen Entfernungen von zwei Punkten A und B außerhalb dieser Geraden eine gegebene Summe bilden.*

Lösung. Beschreibt man um A (oder B) mit der gegebenen Summe einen Kreis, so ist der Mittelpunkt des Kreises, welcher diesen berührt und durch den Gegenpunkt von B (oder A) in bezug auf die gegebene Gerade geht, der gesuchte Punkt.

48. *Die Differenz der Entfernungen soll eine gegebene sein.*

Lösung. Ganz ähnlich wie von A. 47.

Zusatz. Die Lösungen der Aufgaben 47 und 48 bleiben wesentlich dieselben, wenn statt eines der beiden Punkte eine Gerade oder ein Kreis gegeben ist. Auch, wenn statt beider Punkte Kreise gegeben sind.

49. *Einen Kreis zu konstruieren, der die im Endpunkte eines Diameters gezogene Tangente eines gegebenen Kreises berührt und durch den andern Endpunkt des Diameters geht, dessen Mittelpunkt aber auf der gegebenen Kreisperipherie liegen soll.*

Lösung. Ist die Tangente in dem Endpunkte B des Diameters AB gezogen und ist X der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, XC senkrecht zur Tangente in B , $XD \perp AB$, so ist $XC = XA = DB$, woraus folgt, daß AB in D stetig geteilt ist, da $\sphericalangle AXB = 1R$.

50. *Von einem Endpunkte eines Kreisdiameters aus über eine zu diesem Diameter senkrechte Sehne hinaus eine Gerade so zu ziehen, daß das an der andern Seite von Sehne und Peripherie begrenzte Stück von gegebener Länge sei.*

Lösung. Ist AB der gegebene Durchmesser, CD die zu demselben senkrechte Sehne und AXY die gesuchte Gerade, daß $XY = a$ ist, so ist $CBYX$ ein Sehnenviereck, folglich $AX(AX + a) = AC \cdot AB$, woraus die Größe von AX zu bestimmen ist.

Zusatz. Die Lösung bleibt ungeändert einfach, wenn auch CD in der Verlängerung von AB senkrecht zu AB steht.

51. *Von einem Endpunkte eines Kreisdiameters bis zu der im andern Endpunkte gezogenen Tangente eine Gerade zu ziehen, so daß das Stück derselben zwischen der Peripherie und Tangente von gegebener Länge sei.*

Lösung. Ist AXY die gesuchte Gerade und bezeichnen wir AX mit x , XY mit a und XB mit y , so ist nach bekannten Sätzen $a \cdot x = y^2 = 4r^2 - x^2$, oder $ax + x^2 = 4r^2$, oder $x(a + r) = 4r^2$. Um also die Länge von x oder $a + x$ zu bestimmen, hat man die gegebene Länge a um soviel zu verlängern, daß das Rechteck aus der Verlängerung und der ganzen durch die Verlängerung entstandenen Geraden einem gegebenen Quadrate ($4r^2$) gleich werde. (Vergl. 'Aufg. 17. 1. Zus.)

52. *Die Gerade soll so gelegt werden, daß $AX + AY = s$ wird.*

Lösung. Gegeben ist die mittlere Proportionale zwischen den Stücken, deren Summe s werden soll. Diese ist nämlich der Diameter AB . Beschreibt man aber über der Summe s als Diameter einen Halbkreis und legt CE gleich der mittleren Proportionale senkrecht zum Diameter in diesen Halbkreis, so ist, wenn D die Mitte von AB , das Dreieck CDE gegeben, da $\sphericalangle E = 1R$, CE gleich der bekannten mittleren Proportionale, und die Hypotenuse $CD = \frac{1}{2}s$ ist. Hieraus läßt sich aber leicht das Dreieck ABC ableiten, worin EB und EA die Linien AY und AX sind.

53. *Die Gerade so zu legen, daß $AY - AX = d$ wird.*

Lösung. Wie bei der vorigen Aufgabe ist das Hilfsdreieck CDE gegeben, da $ED = \frac{1}{2}d$ ist.

54. *Es soll $AY^2 + AX^2 = s^2$ werden.*

Lösung (Bezeichnung wie in A. 52). Es ist

$$(AY + AX)^2 = AY^2 + AX^2 + 2AY \cdot AX.$$

Soll nun $AY^2 + AX^2 = s^2$ sein, so erhält man, da

$$AY \cdot AX = 4r^2 \text{ ist, } (AY + AX) = \sqrt{s^2 + 8r^2} \text{ und} \\ (AY - AX) = \sqrt{s^2 - 8r^2},$$

woraus AY und AX einzeln zu bestimmen sind.

55. *Es soll $AY^2 - AX^2 = d^2$ werden.*

Lösung wie in voriger Aufgabe.

Oder man erhält $XY = \sqrt{2t^2 - d^2}$.

56. *In einen Kreis eine Sehne von gegebener Grösse so zu legen, daß dieselbe von einer andern den Kreis schneidenden Geraden nach einem gegebenen Verhältnis geteilt wird.*

Lösung. Man teilt die von der gegebenen Geraden gebildete Sehne innerlich und äußerlich nach dem gegebenen Verhältnis und zieht von den Teilpunkten an den durch die gegebene Grösse der entstehenden Sehne gegebenen konzentrischen Kreis Tangenten.

57. *In einer Geraden einen Punkt zu bestimmen, dessen Entfernungen von einem anderen Punkte und einer anderen Geraden eine gegebene Summe bilden.*

Lösung. Ist in MN der Punkt X so zu bestimmen, daß die Senkrechte BC auf AB und die Entfernung XP die Summe s ergeben, so ist die Parallele CD zu AB in der Entfernung $CX + XA = s$ gegeben; dann ist aber X der in MN liegende Mittelpunkt eines Kreises, der CD berührt und durch A geht.

58. *Die Differenz der beiden Entfernungen soll gegeben sein.*

Lösung ganz analog wie bei der vorhergehenden Aufg.

59 bis 62. *Dieselben beiden letzten Aufgaben, wenn entweder bloß statt der Geraden, oder auch statt des Punktes ein Kreis gegeben ist.*

Lösung für diese vier Fälle ebenfalls der gegebenen ganz analog.

63 und 64. *In einer Geraden AB einen Punkt X so zu bestimmen, daß seine Entfernungen von einer gegebenen Geraden und einem gegebenen Kreise eine gegebene Summe (oder Differenz) bilden.*

Lösung. Man erkennt für beide Fälle leicht den gesuchten Punkt als Mittelpunkt eines Kreises, welcher den gegebenen Kreis und eine für jeden Fall besonders, aber leicht zu konstruierende, Parallele berührt.

65 bis 66. *Die Entfernungen des gesuchten Punktes beziehen sich auf zwei Kreisperipherieen.*

Lösung wie zu A. 63 und 64, wobei statt der Parallele ein konzentrischer Kreis eintritt.

67. *Durch die Endpunkte einer Sehne zwei zu einander parallele Sehnen zu ziehen, welche ein gegebenes Verhältniß haben.*

Lösung. Schneidet die Verbindungslinie der Endpunkte X und Y der durch A und B zu einander parallel gezogenen Sehnen die gegebene Sehne in Z , so ist

$$XA : BY = AZ : BZ = m : n,$$

woraus Punkt Z leicht zu konstruieren. Da aber, wie sich leicht nachweisen läßt, $AZ = XZ$, so ergibt sich X .

68. *Die parallelen Sehnen sollen eine gegebene Summe s bilden.*

Lösung. Zieht man von dem Mittelpunkt M auf die Sehnen die Lote MC und MD , so erkennt man, daß durch M ein Diameter gelegt werden muß, so daß die Lote von A und B auf denselben die Summe $\frac{1}{2}s$ ergeben. Das ist aber nach A. 21 zu machen.

69 bis 73. *Zwei Gerade zu konstruieren, wovon gegeben sind*

69. *ihr Verhältniß ($m : n$) und die Summe ihrer Quadrate (p^2).*

Lösung. Setzt man die gesuchten Geraden in C unter einem rechten Winkel an einander, so ist die Verbindungslinie AB ihrer Endpunkte bekannt, denn $AB = p$. Ein Ort für C ist also der Halbkreis über AB als Durchmesser, der andere ist durch das Verhältniß $m : n$ gegeben. Vergl. hierzu des Verfassers Planimetrie, Übs. 60.

Oder man folgert aus $a : b = m : n$ zunächst

$$a^2 : b^2 = m^2 : n^2, \text{ dann } a^2 : a^2 + b^2 = m^2 : m^2 + n^2 \text{ oder}$$

$a^2 : p^2 = m^2 : m^2 + n^2$. Setzt man dann $m^2 + n^2 = s^2$, so erhält man

$$a : p = m : s \text{ und}$$

$$b : p = n : s,$$

wonach die gesuchten Geraden als vierte Proportionale konstruiert werden können.

70. *ihr Verhältniß ($m : n$) und die Differenz ihrer Quadrate (d^2).*

Lösung. Die gesuchten Geraden a und b bilden mit d ein rechtwinkliges Dreieck ABC , worin $AB = d$ die eine Ka-

thete, und wenn $a > b$ ist, $CB = a$ die Hypotenuse, und $AC = b$ die andere Kathete ist. Ein Ort für C ist also das Lot in A auf AB , der andere ist wiederum durch das Verhältnis $a : b = m : n$ gegeben (s. vorige Aufg.).

Oder man hat analog wie vorhin $a : b = m : n$, daraus $a^2 : b^2 = m^2 : n^2$ und weiter $a^2 : a^2 - b^2 = m^2 : m^2 - n^2$. Setzt man nun $m^2 - n^2 = \delta^2$, so erhält man durch

$$a : d = m : \delta \quad \text{und}$$

$$b : d = n : \delta$$

die beiden gesuchten Geraden als vierte Proportionalen.

71. *ihr Rechteck ($m \cdot n$) und die Summe ihrer Quadrate (p^2).*

Lösung. Bilden die gesuchten Geraden in C einen rechten Winkel und heißen sie einzeln a und b , so ist die Verbindungslinie ihrer Endpunkte B und A , nämlich $BA = p$. Ist nun $CD \perp AB$, so ist $\triangle BCD \sim \triangle ABC$, folglich $BC : CD = p : b$, also $ab = mn = p \cdot CD$, woraus CD zu konstruieren. C giebt dann im Halbkreise über AB die Ecke des rechten Winkels an, und CB und CA sind die gesuchten Geraden.

72. *ihr Rechteck ($m \cdot n$) und die Differenz ihrer Quadrate (d^2).*

Lösung. Bilden die gesuchten Geraden a und b mit d ein bei C rechtwinkliges Dreieck, in welchem $a > b$ angenommen, $AB = a$ die Hypotenuse, $AC = b$ die eine Kathete ist, so ist die andere Kathete $BC = d$. Trifft nun ein in A zu AB errichtetes Lot die Verlängerung von BC in D , so ist $\triangle ADC \sim \triangle ABC$, woraus folgt: $AD : AC = AB : d$, oder $AD : b = a : d$, und hieraus $AD \cdot d = ab = mn$, so daß sich AD als vierte Proportionale ergibt. Da nun ferner $AD^2 = DC \cdot (d + DC)$ ist, so ist zur Konstruktion des Dreiecks ABD und des Dreiecks ABC noch Aufg. 17 1. Zusatz zu lösen.

73. *sowohl die Summe (s^2), als auch die Differenz (d^2) ihrer Quadrate.*

Lösung. Für die größere der gesuchten Geraden a erhält man einfach $2a^2 = s^2 + d^2$, d. h. die Gerade a ist die Seite eines Quadrates, dessen Diagonale die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten s und d ist.

74 und 75. *Durch einen Punkt einer Sehne eine andere zu legen, so daß die aus den Endpunkten der erstern auf die zu*

ziehende Sehne gezogenen Lote eine gegebene Summe (s) [oder Differenz (d)] bilden.

Lösung. Ist AB die gegebene Sehne und sind AE und BD die Lote, gezogen auf die durch den Punkt C der Sehne gezogene Gerade, so ist $AE : BD = AC : BC$, woraus sich ergibt:

$$AE : s = AC : AB \text{ und}$$

$$AE : d = AC : AC - BC.$$

In beiden Fällen ergibt sich AE und also ein Ort für E . Ein anderer Ort ist der Halbkreis über AC als Diameter.

76 und 77. *Durch einen Punkt an einen Kreis eine Sekante zu legen, so daß die aus den Durchschnitten einer andern durch denselben Punkt gezogenen Sekante mit der Peripherie auf sie gefälltten Lote eine gegebene Summe (s) oder Differenz (d) bilden.*

Lösung. Ist ABC die gegebene Sehne, AF die gesuchte, so ziehe man, wenn die Summe der Lote $AE + CD = s$ sein soll, aus der Mitte G von BC das Lot GH . Man erkennt leicht, daß dann Punkt H durch zwei Örter gegeben ist. — Bei gegebener Differenz der Lote ziehe man durch B die Parallele zur gesuchten Geraden, welche das Lot CD in K schneiden möge. Wiederum ergibt sich, daß Punkt K durch zwei Örter gegeben ist.

78. *Zwei Seiten eines Dreiecks durch eine zur dritten Seite parallele Gerade so zu durchschneiden, daß das Quadrat der gezogenen Parallele gleich dem Rechteck aus den untern Abschnitten der Dreiecksseiten werde.*

Lösung. Ist $DE \parallel BC$ so gezogen, daß $DE^2 = BD \cdot CE$, und man zieht durch A die Parallele zu BC und verlängert BE , bis sie diese Parallele in F trifft, so ist

$$BD : c = DE : AF \text{ und}$$

$$EC : b = DE : AF$$

also $BD \cdot EC : bc = DE^2 : AF^2$, woraus folgt, daß $AF^2 = bc$ sein muß.

79. *Die Parallele soll durch die Verlängerungen der Dreiecksseiten gezogen werden.*

Lösung. ist bei gleicher Bezeichnung ganz analog. Der Punkt F fällt auf die andere Seite von A .

80. *Das Quadrat der zu ziehenden Parallele soll gleich der Summe der Quadrate der untern Abschnitte werden.*

Lösung. Aus den Proportionen in der Lösung zu A. 79 folgt

$$BD^2 : c^2 = DE^2 : AF^2 \text{ und}$$

$$EC^2 : b^2 = DE^2 : AF^2$$

also $\frac{BD^2 + EC^2}{b^2 + c^2} = \frac{DE^2}{AF^2}$; also muß $AF^2 = b^2 + c^2$ sein.

81. *Die Parallele soll durch die Verlängerungen der Dreiecksseiten gelegt werden.*

Lösung ganz ähnlich wie vorhin. Vergl. Lösung zu A. 79.

82 und 83. *Die Aufg. 80 und 81 mit der Änderung, daß statt der Summe der Quadrate der Abschnitte die Differenz der Quadrate derselben gelten soll.*

Lösung den Lösungen der entsprechenden Aufgaben ganz entsprechend.

84 und 85. *Zwei Dreiecksseiten oder ihre Verlängerungen durch eine zur dritten Dreiecksseite parallele Gerade so zu durchschneiden, daß das Rechteck aus dieser Parallele und der parallelen Seite dem Rechtecke aus den untern Abschnitten gleich werde.*

Lösung. Soll die Parallele DE durch die Seiten b und c selbst gelegt werden, so hat man unter Anwendung der bisherigen Bezeichnung

$$CE : b = a : AF + a \text{ und}$$

$$BD : c = DB : AF$$

also $CE \cdot BD : bc = a \cdot DE : AF (AF + a)$.

Da nun $CE \cdot BD = a \cdot DE$ sein soll, so muß

$$bc = AF (AF + a)$$

sein, woraus man nach A. 17, 1. Zus. AF bestimmen kann.

Sollen die Verlängerungen der Dreiecksseiten unter der gegebenen Bedingung durchschnitten werden, so erhält man bei gleicher Bezeichnung

$$BD : c = DE : AF \text{ und}$$

$$CE : b = a : AF - a$$

also $BD \cdot CE : bc = a \cdot DE : AF (AF - a)$, woraus da

$BD \cdot CE = a \cdot DE$ sein soll, folgt, daß

$$AF (AF - a) = bc \text{ sein muß.}$$

Wiederum läßt sich hieraus AF nach Aufg. 17 konstruieren.

86. *Zwei Gerade zu konstruieren, deren Verhältnis ($m : n$) gegeben ist, und deren Rechteck einem gegebenen Quadrate (p^2) gleich ist.*

Lösung. Wenn man die Vorderglieder der Proportion $x : y = m : n$ mit x multipliziert, so erhält man $x^2 : xy = m : n$, oder gemäß der Aufgabe $x^2 : p^2 = m : n$, woraus man x auf folgende Weise konstruiert. Über $AB (= m + n)$ beschreibe man einen Halbkreis und errichte in D ($AD = m$, $BD = n$) das Lot zu AB , welches den Halbkreis in C schneidet. Macht man nun $CD = p$, und zieht DE (E in CA) parallel zu BA , so ist $CE = x$. Denn nach einem bekannten Lehrsatz (cf. des Verfassers Planimetrie, Lehrs. 141, b) ist alsdann $CE^2 : CD^2 = m : n$.

Zusatz. Man kann die Aufgabe auch so formulieren, daß von den gesuchten Geraden außer ihrem Verhältnis ihre mittlere Proportionale gegeben ist.

87. *Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade bis an zwei Parallelen zu ziehen, welche von der einen in zwei Stücke geteilt wird, deren Rechteck gegeben ist.*

Lösung. Durch das Lot von dem Punkte aus auf die Parallelen erhält man das Verhältnis der Stücke; daher die Lösung nach A. 86.

Zusatz. Die Lösung bleibt einfach für den Fall, daß die Stücke der Geraden je von dem Punkte bis an die Parallelen gerechnet werden sollen.

Die Aufgaben, die Linie so zu ziehen,

88. *daß die Summe der Quadrate der Stücke,*

89. *daß die Differenz der Quadrate der Stücke eine gegebene sei,*

finden mit Hinzunahme des konstruierbaren Verhältnisses derselben einfache Erledigung nach A. 69 und 70.

90 bis 92. *Durch einen Punkt auf der Verbindungslinie zweier Punkte auf zwei Parallelen eine Gerade zu legen, daß die auf den Parallelen entstehenden Abschnitte*

90. *ein gegebenes Rechteck bilden.*

91. *eine gegebene Quadratsumme bilden.*

92. *eine gegebene Quadratdifferenz bilden.*

Lösung dieser drei Aufgaben durch Zuhilfenahme des bekannten Verhältnisses der Abschnitte nach Aufg. 69, 70 und 86 leicht.

93 bis 95. *Durch einen Punkt innerhalb eines Kreises eine Sehne zu legen, daßs*

93. *die Stücke derselben ein gegebenes Verhältniß haben.*

94. *die Stücke derselben eine gegebene Quadratsumme, und*

95. *eine gegebene Quadratdifferenz bilden.*

Lösung. Diese Aufgaben finden einfache Erledigung nach A. 86, 71 und 72, da das Produkt der Stücke leicht zu bestimmen ist.

Zusatz. Die entsprechenden Aufgaben, durch einen Punkt außerhalb eines Kreises eine Sekante unter denselben Bedingungen zu legen, erledigen sich auf gleiche Weise.

96. *Durch einen Punkt eine Gerade so durch drei in einem Punkte einander schneidende Gerade zu legen, daßs auf ihr gleiche Stücke abgeschnitten werden.*

Lösung. Durch eine beliebige, durch einen Punkt der mittleren der drei Geraden so zwischen die beiden äußern gelegte Gerade, daßs sie von der mittleren halbiert wird, bestimmt man die Richtung der gesuchten.

97. *Von einer Ecke eines Dreiecks zur Gegenseite eine Gerade zu ziehen, so daßs sie die mittlere Proportionale zwischen den entstehenden Abschnitten dieser Gegenseite werde.*

Lösung. Verlängert man die gesuchte Gerade über ihren Fußpunkt um sich selbst, so liegen die drei Ecken des Dreiecks mit dem Endpunkte der Verlängerung auf der Peripherie eines Kreises. Für den Durchschnittspunkt mit der Gegenseite ergibt sich ein Halbkreis als Ort.

Determination. Der Winkel, von dessen Scheitel aus die Gerade gelegt werden soll, muß eine gewisse Größe haben, damit der Halbkreis die Gegenseite schneidet oder wenigstens berührt. Soll aber die Gerade zur Verlängerung der Gegenseite gezogen werden, so ist eine Lösung stets möglich mit der alleinigen Ausnahme, wenn die gegebene Ecke die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist. — Für einen stumpfen Winkel an der gegebenen Ecke giebt es stets zwei Lösungen.

98. *Von einem Endpunkte eines Diameters zu einer im andern Endpunkte gezogenen Tangente eine Gerade zu ziehen, deren durch die Kreisperipherie gebildeten Stücke ein gegebenes Rechteck bilden.*

Lösung. Die Entfernung des Berührungspunktes der Tangente von dem Durchschnitte der gesuchten Geraden mit der Peripherie des Kreises ist gegeben.

99. *In einen Kreis eine Sehne zu legen, welche durch zwei gegebene Radien desselben in drei gleiche Teile geteilt wird.*

Lösung. Die Verbindungslinie der Endpunkte der gegebenen Radien schneidet die Verlängerungen der zu den Endpunkten der gesuchten Sehne gezogenen Radien so, daß drei gleiche Stücke entstehen, wovon das mittlere gegeben ist.

100. *Von einem Endpunkte eines Diameters bis an ein in der Verlängerung desselben auf ihm errichtetes Lot eine Gerade zu ziehen, so daß das zwischen die Kreisperipherie und dies Lot fallende Stück eine gegebene GröÙe habe.*

Lösung ist mittelst eines Sehnenvierecks auf A. 17, 1. Zus. zu reduzieren.

Zusatz. Die Lösung bleibt dieselbe, wenn das gegebene Lot auf dem Durchmesser selbst steht.

101 und 102. *Durch einen Punkt innerhalb (oder außerhalb) eines gegebenen Winkels durch die Schenkel des Winkels eine Gerade zu legen, so daß die von diesem Punkte und den Schenkeln begrenzten Stücke derselben ein gegebenes Rechteck bilden.*

Lösung. Liegt der gegebene Punkt P innerhalb des gegebenen Winkels und ist $PX \cdot PY = p \cdot q$ (oder m^2), so muß ein durch den Scheitel A des gegebenen Winkels und die beiden Punkte X und Y gelegter Kreis die Linie AP in B so schneiden, daß $AP \cdot PB = p \cdot q (= m^2)$ ist. Das Stück PB läßt sich dann leicht als vierte oder dritte Proportionale finden. Durch den bekannten Winkel $PYB = PXA$ erhält man dann den Punkt Y . — Liegt P außerhalb des Winkels, so ist die Lösung unter Anwendung des Sekantensatzes ganz analog.

103. *Durch einen von drei gegebenen Punkten eine Gerade zu legen, so daß die aus den beiden andern auf diese gefällten Lote ein gegebenes Verhältniß ($m : n$) haben.*

Lösung. Soll die Gerade durch C gelegt werden, so läßt sich der Punkt bestimmen, in welchem die Verbindungslinie der beiden anderen Punkte A und B oder ihre Verlängerung von der gesuchten geschnitten wird, dessen Verbindung mit C die gesuchte Gerade giebt. In dem einen Falle fällt die gesuchte zwischen die beiden anderen Punkte, im anderen liegen diese auf derselben Seite der gesuchten.

104. *Durch einen von drei Punkten eine Gerade zu legen, so daß die von den beiden anderen Punkten auf sie gefällten Lote Abschnitte auf ihr bilden, deren Rechteck ein gegebenes ($p \cdot q$) ist.*

Lösung. Ist die Gerade so durch C gelegt, daß, wenn D und E die Fußpunkte der von A und B auf diese gefällten Lote sind, $CD \cdot CE = p \cdot q$ ist, und man zieht etwa $DF \perp BC$, so ist BD gemeinschaftliche Hypotenuse der bei F und E rechtwinkligen Dreiecke. Daher sind B, D, F und E die Ecken eines Sehnenvierecks und also $BC \cdot CF = CD \cdot CE = p \cdot q$, woraus der Punkt F zu bestimmen ist. Dann ergibt sich D leicht durch zwei Örter.

Zusatz. Die Konstruktion bleibt dieselbe, ob die gesuchte Gerade zwischen die beiden anderen Punkte fallen soll oder nicht.

105. *Durch einen von drei Punkten eine Gerade zu legen, so daß die von den beiden anderen Punkten auf sie gefällten Lote ein gegebenes Rechteck bilden.*

Lösung. Zieht man in C ein Lot zu der gesuchten Geraden und von A und B auf dieses die Lote AF und BG , so muß $AF \cdot BG = p \cdot q$ sein, wozu also die vorige Aufgabe zu lösen ist, welche Lösung indes hier etwas modifiziert erscheint.

106. *Die durch die Lote aus den beiden anderen Punkten auf der gesuchten gebildeten Abschnitte sollen eine gegebene Quadratsumme bilden.*

Lösung. Sei DCE die gesuchte Gerade, in welcher D und E die Fußpunkte der Lote aus A und B seien. Errichtet man nun in C die $CF \perp DE$ und macht $CF = CD$, ferner FG (bis in BE) $\parallel DE$, so ist $CG = s$ gegeben und dadurch ein Ort für G . Zieht man ferner CH (bis in FG) $\perp AC$, so ist $\triangle ADC \cong FCH$, also $CH = AC$. Hierdurch ist aber der

Punkt H , und in dem Halbkreise über HB ein zweiter Ort für G gegeben.

Zusatz. Die Lösung bleibt ungeändert, wie auch die gesuchte Gerade zu den beiden andern Punkten liegen soll.

107. *Die Lote aus A und B sollen eine gegebene Quadratsumme bilden.*

Lösung. Durch ein Lot in C zur gesuchten Geraden und Lote aus A und B auf dieses Lot in einfacher Weise auf die vorige Aufgabe zu reduzieren.

108. *Die Lote aus A und B sollen eine gegebene Quadratdifferenz bilden.*

1. **Lösung.** Soll $BE^2 - AD^2 = d^2$ sein, so muß auch $(BE + AD)(BE - AD) = d^2$ sein. Konstruiert man nun zu den Punkten A , B und C als Ecken eines Parallelogramms die vierte Ecke F , welche C gegenüber liegt, und ebenso die vierte Ecke G , die A gegenüber liegt, und zieht die Lote FH und GJ auf DAE , so ist $FH = BE + AD$, und $GJ = BE - AD$. Es ist also für die drei Punkte F , G und C die Aufgabe 105 zu lösen.

2. **Lösung.** Macht man $AK = BK$ und $KL \perp DE$, so ist $BL^2 - AL^2 = BE^2 - AD^2 = d^2$ gegeben. Zieht man daher $LJ \perp AB$, so ist auch $BJ^2 - AJ^2 = d^2$, daher auch der Punkt J gegeben. Schließlich ist das Lot in J auf AB der eine, der Halbkreis über KC der andere Ort für L .

109. *Die von den Loten aus A und B auf die gesuchte Gerade gebildeten Abschnitte sollen eine gegebene Quadratdifferenz bilden.*

Lösung. Wird durch eine Konstruktion wie in A. 108 auf die vorige Aufgabe reduziert.

110. *Durch einen Punkt eine Gerade zu legen, so daß die zu dieser Geraden senkrechte Tangente an einem gegebenen Kreise und das Lot aus einem gegebenen Punkte ein gegebenes Verhältnis haben.*

Lösung. Wird auf A. 103 reduziert, da das vom Mittelpunkt M des gegebenen Kreises auf die gesuchte Gerade gefällte Lot der senkrechten Tangente gleich ist.

111 bis 117. *Durch einen Punkt eine Gerade zu ziehen, daß*

111. *die auf derselben senkrecht stehenden Tangenten an zwei gegebenen Kreisen in einem gegebenen Verhältnis stehen.*

112. *daß das Lot von einem Punkte auf diese Linie und eine zu derselben senkrechte Tangente eines Kreises ein gegebenes Rechteck bilden.*

113. *daß zwei senkrechte Tangenten an zwei Kreisen ein gegebenes Rechteck bilden.*

114 bis 117. *daß entweder eine senkrechte Tangente und das Lot aus einem gegebenen Punkte, oder zwei senkrechte Tangenten eine gegebene Quadratsumme oder Quadratdifferenz bilden.*

Lösung dieser sechs Aufgaben reduziert sich in einfachster Weise auf eine der unmittelbar vorhergehenden, wenn man statt der senkrechten Tangente das Lot vom Mittelpunkte des betreffenden Kreises nimmt.

118. *Von einem Punkte zu einer Kreisperipherie eine Gerade zu ziehen, welche von einer gegebenen Geraden nach einem gegebenen Verhältnis geteilt wird.*

Lösung. Schneidet die gesuchte Gerade die gegebene Gerade in X , den Kreis in Y , so verbinde man Y mit dem Mittelpunkte M des Kreises und ziehe $PZ \parallel YM$ bis in die Verbindungslinie des gegebenen Punktes mit dem Kreismittelpunkte. Dann läßt sich durch das gegebene Verhältnis sowohl der Punkt Z in AM , als auch die Größe von ZX bestimmen, wodurch ein Ort für X erhalten wird.

Zusatz. Ganz analog werden die Aufgaben gelöst, wenn von einem Punkte zu einer Geraden oder zu einer Kreisperipherie eine Gerade gezogen werden soll, welche durch eine gegebene Kreisperipherie nach einem gegebenen Verhältnis geteilt werden soll.

119. *Durch einen Punkt zwischen zwei Kreisperipherieen eine Gerade bis an diese so zu legen, daß sie in dem Punkte nach einem gegebenen Verhältnis geteilt wird.*

Lösung. Ist $AP : BP = m : n$ und man zieht den einen Radius, etwa MB , und durch den andern Durchschnittspunkt A die Parallele AC zu MB bis in die Verbindungslinie MP , so läßt sich durch das gegebene Verhältnis sowohl der Punkt C als auch die Länge von AC bestimmen.

120. *Durch einen Punkt zwischen zwei konzentrischen Kreisperipherieen eine Gerade zu legen, welche in diesem Punkte nach einem gegebenen Verhältnis geteilt wird.*

Lösung ist unter Berücksichtigung der möglichen verschiedenen Lagen der Lösung der vorigen Aufgabe nachzubilden. — (Es sind nämlich vier verschiedene Lagen zu unterscheiden, da der gegebene Punkt zwischen oder außerhalb der Durchschnitte liegen kann.)

121. *Durch einen Punkt eine Gerade zu legen, so daßs zwei konzentrische Kreise Sehnen darauf abschneiden, welche ein gegebenes Verhältniß haben.*

Lösung. Ist A der gegebene Punkt, M der gemeinsame Mittelpunkt der beiden Kreise, die Sehnen BC und DE , und ist $BC : DE = m : n$, so ist auch, wenn F der Mittelpunkt der Sehnen ist, $BF : DF = m : n$. Zieht man nun die Parallele DG zu FM bis in den Radius BM , so ist ebenfalls $BM : MG = m : n$, woraus auf BM der Punkt G und also die Stücke BG und MG bestimmt werden können. Teilt man dann einen beliebigen Radius des größeren Kreises, etwa MH in J so, daßs $HJ = BG$ ist, und beschreibt über HJ als Diameter einen Kreis, welcher die innere Peripherie in K schneidet, so ist $JK = DG$ und $HK = DB$. Die so gefundene GröÙe von BD (der Ringsehne) bestimmt den Abstand der AC vom Mittelpunkte M .

122. *Zwei Dreiecksseiten durch eine Parallele zur dritten so zu durchschneiden, daßs die Summe der gebildeten unteren Abschnitte eine gegebene (s) sei.*

Lösung. Das Verhältniß der Abschnitte ist gegeben.

1. Zusatz. Ein spezieller Fall ist der, daßs die Summe der Abschnitte der parallelen (dritten) Seite gleich werden soll.

2. Zusatz. Soll die Parallele durch die Verlängerungen der Dreiecksseiten gelegt werden, so bleibt die Lösung wesentlich dieselbe.

123 bis 128. *Zwei Dreiecksseiten (oder deren Verlängerungen) durch eine zur dritten Seite parallele Gerade so zu durchschneiden, daßs*

- a) *die unteren Abschnitte eine gegebene Differenz,*
- b) *eine gegebene Quadratsumme,*
- c) *eine gegebene Quadratdifferenz bilden.*

Lösung unter Berücksichtigung des gegebenen Verhältnisses nach A. 69 und 70 leicht.

129 und 130. *Einen Kreis zu konstruieren, der eine Gerade L und einen Kreis M berührt und zwar entweder die Gerade oder den Kreis in einem gegebenen Punkte.*

Lösung. a) Ist der Berührungspunkt A in der gegebenen Geraden L gegeben, so schneidet ein mit dem gesuchten konzentrischer Kreis durch den Mittelpunkt M des gegebenen Kreises das Lot in A auf L in einem Punkte C so, daß AC dem Radius des Kreises M gleich ist. Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises ist alsdann die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks in der gegebenen Geraden AC , dessen Grundlinie MC ist. Da das Lot AC ($= r$) auf beiden Seiten von A abgetragen werden kann, so erhält man zwei Mittelpunkte, also zwei Kreise.

b) Ist der Berührungspunkt A auf der Kreisperipherie gegeben, so bestimmt der zum gesuchten konzentrische Kreis durch den Mittelpunkt M eine Gerade, welche zur gegebenen Geraden parallel ist und von ihr einen Abstand hat, welcher gleich dem Radius des gegebenen Kreises ist. In dieser Geraden ist ein Punkt Z so zu bestimmen, daß das Lot ZX auf derselben $= XM$ wird. Zieht man nun $MC \perp$ auf diese Gerade und macht MD (in der Linie AM) $= MC$, so giebt die durch M zu DC gezogene Parallele den Punkt Z und das Lot in diesem Punkte (auf der konstruierten Geraden) den Mittelpunkt X des dem gesuchten konzentrischen Kreises. Da man MD nach beiden Seiten abtragen kann, so erhält man auch hier einen zweiten Kreis.

1. Zusatz. Für den Fall, daß der Berührungspunkt A auf dem Kreise gegeben ist, erhält man einen Ort für den Mittelpunkt X durch Halbierung des Winkels, den die in A an den gegebenen Kreis gezogene Tangente mit der gegebenen Geraden macht, da diese auch Tangente an dem gesuchten Kreise ist.

2. Zusatz. Unter Berücksichtigung des Lehrsatzes, daß wenn ein Kreis einen andern und eine Gerade berührt, die beiden Berührungspunkte mit einem Endpunkte eines zur berührten Geraden senkrechten Diameters des berührten Kreises in einer Geraden liegen, lassen sich in beiden Fällen die nicht gegebenen Berührungspunkte auf dem Kreise oder der Geraden bestimmen.

131. *Einen Kreis zu konstruieren, der zwei andere berührt, und zwar den einen in einem gegebenen Punkte.*

Lösung. Berührt der Kreis um X die Kreise um M und M_1 und zwar letzteren in A , so schneidet ein mit dem Kreise um X konzentrischer Kreis, welcher durch M geht, die der Lage nach gegebene XA in B so, daß M_1B die Differenz der Radien der gegebenen Kreise ist. Punkt B ist also bestimmbar, und der Mittelpunkt X ergibt sich als die in der Linie BA liegende Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Grundlinie MB ist.

132. *An einen Kreis eine Tangente so zu ziehen, daß die Lote aus zwei gegebenen Punkten auf dieselbe einander gleich werden.*

Lösung. Soll die Tangente an einer Seite der beiden Punkte liegen, so muß sie der Verbindungslinie der Punkte parallel sein; soll sie zwischen beiden Punkten liegen, so muß sie durch die Mitte der Verbindungslinie der beiden Punkte gehen.

133. *Zwischen die Verlängerungen zweier Radien eine Tangente von gegebener Länge zu konstruieren.*

Lösung. Sei CED die Tangente zwischen den Radien MA und MB , und sei gleich a , E sei der Berührungspunkt. Macht man nun auf MB die Strecke $MF = CD$, ferner $MG = MC$, $FG = MD$, dann ist $\sphericalangle D = \sphericalangle F$, also $FG \parallel CD$. Für G aber erhält man zwei Örter: 1) durch das Lot GH auf MF , welches gleich ME , d. i. dem Radius des Kreises gleich ist; 2) durch den Winkel MGF , welcher dem Centriwinkel AMB gleich ist. Ist nun G auf diese Weise bestimmt, so hat man GF , den Berührungspunkt E und die gesuchte Tangente.

134. *Durch einen Punkt außerhalb eines Kreises an diesen eine Sekante zu legen, daß die von den Durchschnitten derselben mit der Kreisperipherie auf eine andere Sekante durch denselben Punkt gefällten Lote eine gegebene Summe bilden.*

Lösung. Ist AXY die gesuchte Sekante, und bilden die aus den Durchschnittspunkten X und Y auf eine andere gegebene, ebenfalls durch A gehende, Sekante gefällten Lote XD und YE die Summe s , so ist, wenn man von der Mitte F der Sehne XY das Lot FG auf AC zieht, dies Lot $FG = \frac{1}{2}s$,

und daher die Parallele MN zu AC als Ort für F gegeben. Ein zweiter Ort ist der Halbkreis über dem Diameter MA .

135. *Zwei Dreiecksseiten durch eine zur dritten Seite parallele Gerade so zu durchschneiden, daßs die Summe der hierdurch an der dritten Seite gebildeten Abschnitte dieser dritten Seite gleich werde.*

Lösung. Ist DE die gesuchte Parallele und ist $CD + BE = BC$, so ist, wenn man $CF = CD$ macht, $CF = BE$. Berücksichtigt man den Parallelismus von DE und CB , so ergibt sich, daßs FE und FD die Winkel DEB und EDC halbieren. Zieht man $FJ \perp AB$, $FH \perp DE$ und $FG \perp AC$, so findet man, daßs $FJ = FH = FG$ ist, woraus weiter die Kongruenz der Dreiecke AGF und AJF und ferner folgt, daßs AF den Winkel A halbiert. Dann ist aber der Punkt F , sowie $CD = CF$ und die Parallele durch D zu BC leicht zu bestimmen.

Zusatz. Aus $CD : BE = b : c$ ergibt sich leicht

$CD : a = b : b + c$, woraus CD als vierte Proportionale in einfacher Weise konstruierbar ist.

136. *Die parallele Dreiecksseite soll gleich der Differenz der entstehenden Abschnitte werden.*

Lösung. Es ergibt sich bei ähnlicher Behandlung, daßs die Halbierungslinie des Nebenwinkels von A auf der Gegenseite die Stücke der durchschnittenen Seiten bestimmt. — Mittelst einer Proportion (analog wie vorhin) einfach zu lösen.

137. *Die Parallele so zu legen, daßs die entstehenden unteren Abschnitte eine gegebene Summe bilden.*

Lösung. Ist $DE \parallel CB$, und $CD + BE = s$, so mache man $CBF = s$ und $FA' \parallel BA$ (bis in CA). Alsdann liegt DE in dem Dreiecke $CF A'$ so, daßs die Summe der Abschnitte $(CD + E'F)$ der parallelen Seite CF gleich ist. Es bleibt also in bezug auf Dreieck $CF A'$ noch A. 136 zu lösen.

138. *Die Parallele so zu legen, daßs die Abschnitte eine gegebene Differenz bilden.*

Lösung in ähnlicher Weise auf die Lösung von A. 136 in bezug auf ein leicht abzuleitendes Dreieck zu reduzieren.

139 bis 144. *Die Parallele soll durch die Verlängerungen der Dreiecksseiten gelegt werden, so daßs (bei gleicher Bezeichnung wie vorhin)*

139. $DE = CD + BE,$

140. $DE = AC - AB,$

141. $CD + BE = CB,$

142. $CD - BE = CB,$

143. $CD + BE = s,$

144. $CD - BE = d$ werde.

Lösung dieser sechs Aufgaben den vorhergehenden Lösungen der entsprechenden Aufgaben ganz entsprechend.

145. *Zwei Dreiecksseiten durch eine zur dritten Seite parallele Gerade so zu durchschneiden, daß die Differenz des einen oberen und des anderen unteren Abschnittes eine gegebene sei.*

Lösung. Ist $DE \parallel CB$ und $AD - BE = d$, so mache man DF (auf DA) $= BE$ und ziehe durch F , E und A bezüglich Parallelen zu CB , CA und CB . Die Parallele durch F schneide die durch E in G , die durch A und E gezogenen Parallelen mögen einander in K schneiden. Dann ist $FA = GK = d$, $EG = EB$, und wenn man $KL \parallel GB$ zieht, $EK = EL$. Der Punkt L ist also bestimmbar. Der Winkel L ergibt sich als die Hälfte von A , so daß LK als Parallele zum Halbierer des Winkels A und die Parallele durch A zu BC den Punkt K bestimmen. Die Parallele KH zu AC bestimmt in AB den Punkt E und dadurch die gesuchte Parallele.

146. *Der obere Abschnitt AD soll dem unteren Abschnitt EB gleich werden.*

Lösung. Zieht man $DG \parallel AB$ bis in BC , so ergibt sich aus $EB = DG = DA$, daß AG den Winkel A halbiert, so daß G leicht bestimmt werden kann. Die Parallele durch G zu AB giebt den Punkt D .

147. *Eine Gerade von gegebener Größe so zwischen zwei Dreiecksseiten zu legen, daß der obere Abschnitt auf der einen Seite dem unteren auf der anderen gleich werde.*

Lösung. Es sei $DE = a$ so zwischen die Dreiecksseiten AC und AB gelegt, daß $AD = BE$. Zieht man $DH \parallel AB$ und $BG \parallel DE$, so ist, wenn G der Durchschnitt der Parallelen ist, $EB = GD = DA$, woraus sich ergibt, daß AG den Winkel A halbiert. Da nun $BG = ED = a$ gegeben ist, so ist der Punkt G , und der Punkt D , sowie die $DE (\parallel BG)$ leicht zu konstruieren.

148. *Eine Gerade senkrecht auf einer der beiden Dreiecksseiten so zwischen zwei Seiten zu legen, daß der eine obere Abschnitt dem anderen unteren gleich wird.*

Lösung durch ähnliches Verfahren wie bei A. 147 leicht.

149. *Durch die Endpunkte einer Sehne zwei parallele Sehnen zu legen, die ein gegebenes Rechteck bilden.*

Lösung. Zieht man durch den Mittelpunkt M ein Lot auf die gesuchten Sehnen, so muß das Produkt der von A und B auf diese gefällten Senkrechten ein Viertel des gegebenen Rechtecks sein; also A. 105.

150 und 151. *Die Summe (oder die Differenz) der Quadrate der Sehnen soll eine gegebene sein.*

Lösung auf 106 und 107 zu reduzieren mittelst des Lotes aus M .

152 bis 154. *Durch einen Durchschnittspunkt zweier Kreise eine Gerade zu legen, so daß*

152. *die beiden entstehenden Sehnen ein gegebenes Rechteck,*

153. *eine gegebene Quadratsumme,*

154. *eine gegebene Quadratdifferenz bilden.*

Lösung dieser drei Aufgaben wird der Reihe nach auf A. 104, 106 und 109 reduziert, wenn man aus den Mittelpunkten Lote auf die Sehnen fällt.

155. *Durch einen Punkt A eine Gerade zu legen, welche von den Schenkeln eines Winkels Stücke abschneidet, welche ein gegebenes Rechteck bilden.*

Lösung. Ist KCL der gegebene Winkel und ist durch den innerhalb desselben gelegenen Punkt A die Gerade BAD so gelegt, daß $CD \cdot CB = p \cdot q$ ist, so bestimme man zunächst durch die durch A gezogenen Parallelen zu KC und LC die Punkte F und E in CL und KL . Zieht man dann BG bis in CL parallel zu ED , so ist G bestimmbar, da

$$CE : CB = CD : CG, \text{ also}$$

$$CE \cdot CG = CB \cdot CD = p \cdot q \text{ ist.}$$

Es ist aber ferner $CE : CB = AF : CB = FD : CD$, also $FD : CD = CD : CG$ oder $CF : CD = DG : CG$ oder $CF \cdot CG = CD \cdot DG$. Nun ist CG und CF bekannt, also läßt sich CD bestimmen, wodurch die Aufg. gelöst ist.

Auf die Linie CG ist nämlich A. 17 anzuwenden.

Zusatz. Liegt der Punkt A außerhalb des Winkels, so führt ein analoges Verfahren zum Ziel.

156. *Durch einen Punkt A einen Kreis zu konstruieren, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden liegt, und der eine andere gegebene Gerade berührt.*

Lösung. Liegt der Mittelpunkt auf L , so muß der gesuchte Kreis auch durch den Gegenpunkt von A in bezug auf L gehen. Es ist also eine Aufgabe des Apollonischen Berührungsproblems zu lösen, nämlich: Einen Kreis zu konstruieren, der durch zwei Punkte geht und dabei eine gegebene Gerade berührt.

157. *Der zu konstruierende Kreis, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden liegt, soll durch A gehen und dabei einen gegebenen Kreis berühren.*

Lösung unter Anwendung des Gegenpunktes von A in bezug auf die gegebene Gerade ebenfalls auf eine Aufgabe des Apollonischen Berührungsproblems zu reduzieren, die wiederum durch einen zum gesuchten konzentrischen Kreis, welcher durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geht, auf A. 156 zu reduzieren ist.

158. *Der zu konstruierende Kreis soll zwei gegebene Kreise berühren, sein Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden liegen.*

Lösung. Ein zum gesuchten konzentrischer Kreis durch den Mittelpunkt des einen der zu berührenden Kreise reduziert die Lösung wiederum auf eine Aufgabe des Apollonischen Berührungsproblems, indem dieser konzentrische Kreis durch einen gegebenen Punkt geht, einen gegebenen Kreis (nämlich einen mit dem anderen Kreise konzentrischen) berührt, und dessen Mittelpunkt in L liegt. Also A. 157.

159. *Drei Gerade mit einem Endpunkte so aneinander zu legen, daß die anderen Endpunkte in einer Geraden liegen, deren Mitte der andere Endpunkt der mittleren Geraden ist.*

Lösung. Sind AB , AC und AD so mit dem Endpunkte A an einander gelegt, daß B , C und D auf einer Geraden liegen und $BC = DC$ ist, so verlängere man AC über C bis E , so daß $CE = AC$ ist, dann ist $ABED$ ein Parallelogramm, dessen beiden Dreiecke ADE und ABE jedes aus seinen gegebenen drei Seiten konstruiert werden kann. Punkt C ist dann leicht zu bestimmen.

160. *Durch einen Punkt P eine Gerade so durch die Seiten eines Parallelogramms zu legen, daß die zwischen zwei Seiten und den Verlängerungen der anderen fallenden Stücke derselben einander gleich werden.*

Lösung. Schneidet die gesuchte Gerade die Seiten AB und BC in E und G , die Verlängerungen von DA und DC in F und H , so ergibt sich, wenn man die Diagonale AC zieht, daß $EF = GH$ wird, wenn die durch P gehende Linie parallel zur Diagonale AC ist, weil dann $\triangle AEF \cong CGH$ ist. (II. Krit.)

161. *Durch einen Punkt P in einer Dreiecksseite bis in die Verlängerung einer anderen eine Gerade so zu ziehen, daß sie durch die dritte halbiert wird.*

Lösung. Wird die Gerade PX (P auf AC , X auf der Verlängerung von AB) durch die Seite BC in Y halbiert, so ist die Parallele PD (zu AB) $= BX$.

162. *Zwischen eine Kathete und die Verlängerung der anderen eine Gerade von gegebener Länge so zu legen, daß sie durch die Hypotenuse halbiert wird.*

Lösung. Ist A der rechte Winkel, und liegt DE ($= a$) so zwischen den Katheten AB und AC , daß ihr Durchschnitt mit der Hypotenuse BC , nämlich F , die Mitte von DE ist, so ergibt sich leicht, daß $AF = DF = EF = \frac{1}{2}a$ ist. Der Punkt F ist also mittelst eines Kreisbogens, dessen Mittelpunkt A ist, leicht zu bestimmen, desgleichen D oder E mittelst eines Kreisbogens mit dem Mittelpunkte F .

Determination. Die gegebene a muß gleich oder größer sein als das doppelte Lot von A auf die Hypotenuse BC . Unter Umständen fällt die Gerade mit ihren beiden Endpunkten in die Verlängerungen der Katheten.

163. *Die Verlängerungen der Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks über die Grundlinie hinaus so durch eine Parallele zur Grundlinie zu durchschneiden, daß sie gleich jeder der Verlängerungen werde.*

Lösung. Ist BC die Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks und DE die gesuchte Parallele, so ergibt sich leicht, daß BE den Winkel CBD halbiert. Es ist also der Punkt E in der Verlängerung von AC leicht zu bestimmen.

164. *Auf zwei Dreiecksseiten (AB und AC) die Punkte X und Y so zu bestimmen, daß $AX = XY = YC$ werde.*

Lösung. Es ergibt sich $\sphericalangle ACX = \frac{1}{2}A$. — Oder, wenn man CD (bis in AB) parallel zu XY zieht, ist $DC = DA$, woraus D zu bestimmen als Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Grundlinie AC ist. In bezug auf das Dreieck DCA ist dann A. 147 zu lösen.

165. *Eine Parallele zu einer Dreiecksseite so durch die beiden anderen zu legen, daß die Summe der parallelen Seiten gleich der Summe der Abschnitte zwischen denselben werde.*

Lösung. Zieht man im entstehenden Trapez die Mittellinie, so ergibt sich die Lösung nach A. 140 oder A. 136, je nachdem die Seiten selbst oder ihre Verlängerungen von der Parallele geschnitten werden sollen.

166. *Zwischen eine Gerade und einen Kreis eine Gerade so zu legen, daß sie der Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks wird, dessen Grundlinie die Verbindung ihres Durchschnittes mit der Peripherie und eines gegebenen Punktes in der Geraden ist, wenn der Winkel, den sie mit der Geraden macht, gegeben ist.*

Lösung. Ist YX diese Gerade und $YX = YP$, dabei $\sphericalangle Y = \alpha$, so ist $\sphericalangle LPX$ gegeben.

167. *Von einem Punkte in einer Geraden durch einen Kreis eine Sekante zu ziehen, so daß sowohl das äußere Stück derselben als auch die entstehende Sehne gegebene Längen werden.*

Lösung. Ist XYZ die verlangte Sekante, $XY = a$, $YZ = b$, und man beschreibt einen mit dem gegebenen konzentrischen Kreis, welcher die Sekante in T berührt, so ist T die Mitte von YZ , also $TX = \frac{1}{2}b + a$. Dadurch läßt sich aber die Größe MX und also auch X bestimmen. Dann findet man T leicht durch zwei Örter.

168. *An einen Kreis eine Sekante zu ziehen, welche auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht und in der Peripherie des Kreises halbiert wird.*

Lösung. Ist YZX die gesuchte Sekante, $\sphericalangle Y = 1 R$ und $YZ = ZX$, und man zieht den Diameter XMA bis zum Durchschnitt B mit der gegebenen Geraden, so ergibt sich, wenn man AZ zieht, daß AB gleich dem Diameter XA des gegebenen Kreises, also MB gleich dem dreifachen Radius desselben ist. Punkt B läßt sich also bestimmen und dadurch X und die Senkrechte XZY .

169. *Eine gegebene Strecke so zwischen zwei Kreisperipherieen zu legen, daß dieselbe an einem der Kreise Tangente wird.*

Lösung. Liegt $AB (= a)$ so zwischen den Peripherieen um M und M' , daß sie den Kreis um M in A berührt, so läßt sich MB und dadurch B leicht bestimmen.

170. *Durch einen Punkt eine Gerade so durch zwei Dreiecksseiten zu legen, daß das in das Dreieck fallende Stück der Summe der an der dritten Seite liegenden Abschnitte der beiden Seiten gleich werde.*

Lösung. Das abzuschneidende Dreieck muß einen Umfang haben, welcher gleich $AB + AC$ ist. Dies zu erreichen mache man $AD = AE = \frac{1}{2}(AB + AC)$, konstruiere einen Kreis, welcher AB und AC in D und E berührt, und ziehe von P die Tangente PXY an diesen Kreis an der Seite, an welcher A liegt. Dann ist $XY = XB + XC$.

171. *Durch zwei Punkte (P und P') zwei Sehnen (oder Sekanten) so an einen Kreis zu ziehen, daß sie sich auf der Peripherie durchschneiden und ihre beiden andern Endpunkte mit dem Mittelpunkt in einer Geraden liegen.*

Lösung. Am gemeinsamen Durchschnittspunkte auf der Peripherie entsteht ein rechter Winkel. Derselbe ist also durch einen Halbkreis über PP' als Diameter zu bestimmen.

172. *In einen Kreis eine Sehne von gegebener GröÙe so einzulegen, daß sie von einer andern halbiert wird.*

Lösung. Durch die gegebene GröÙe der Sehne ist ihre Entfernung vom Mittelpunkte und also ein konzentrischer Kreis mit dieser Entfernung als Radius gegeben. Die Tangente an diesen im Durchschnitt desselben mit der gegebenen Sehne ist die gesuchte Sehne.

Determination. Die gesuchte Sehne muß größer als die gegebene Sehne sein.

173 und 174. *In einem Kreisbogen einen Punkt X so zu bestimmen, daß die Summe (oder Differenz) seiner Entfernungen von den Endpunkten der zugehörigen Sehne eine gegebene sei.*

Lösung. Ist AB die Sehne und X der gesuchte Punkt, und man macht AZ gleich der gegebenen Summe (oder Differenz), so ist durch einen Kreis um A ein Ort für Z gegeben. Einen zweiten Ort erhält man durch den bekannten Winkel AZB , welcher in beiden Fällen aus dem durch den Kreis und

die Sehne gegebenen Winkel AXB leicht abgeleitet werden kann.

175. Den Punkt X so zu bestimmen, daß die Halbierungslinie des Winkels AXB durch einen gegebenen Punkt P geht.

Lösung. Man verbinde P mit dem bekannten Mittelpunkt des anderen Bogens über AB .

176 bis 178. Über einer Sehne als Schenkel ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, so daß

176. der Mittelpunkt des demselben umgeschriebenen Kreises,

177. des inneren Berührungskreises,

178. der Höhendurchschnitt desselben auf der Peripherie des Kreises liegt.

Lösung. Die beiden Mittelpunkte und der Höhendurchschnitt sind der Mittelpunkt D des Bogens über der Sehne. Daraus läßt sich das Dreieck in jedem der drei Fälle leicht konstruieren.

179. In einer Dreiecksseite einen Punkt X so zu bestimmen, daß die Verbindungslinie der Fußpunkte der aus diesem Punkte auf die beiden andern Seiten gefällten Lote der ersten Seite parallel ist.

Lösung. Liegt X in BC so, daß die Verbindungslinie DE der Fußpunkte D und E zu BC parallel ist, so ist $ADXE$ ein Sehnenviereck, also $\sphericalangle AXE = ADE = B$, also

$$\sphericalangle XAE = \varphi = R - D \text{ gegeben.}$$

180. Von zwei Geraden ein gleiches Stück so abzuschneiden, daß die Reste im Verhältnis $m : n$ stehen.

Lösung. Legt man die Geraden $AB (= a)$ und $AB (= b)$ in A unter einem beliebigen Winkel an einander, und sind $BD = CE$ die gleichen abzuschneidenden Stücke, so daß $AD : AE = m : n$ ist, so ist auch, wenn man $BF \parallel DE$ zieht, $AB : AF = m : n$, woraus der Punkt F auf AC bestimmt werden kann. Es ist dann aber auch $DB : EF = m : n$, oder, da $DB = CE$, $CE : EF = m : n$, d. h. die Linie D ist äußerlich nach dem Verhältnis $m : n$ zu teilen. Diese Teilung ergibt den Punkt E und die Parallele durch E zu BF den Punkt D .

181. Zwei Gerade um ein gleiches Stück so zu verlängern, daß die entstehenden ganzen Linien sich wie $m : n$ verhalten.

Lösung. Bei gleicher Bezeichnung genau wie vorhin. Auch hier muß schließlic CF in E äußerlich nach dem Verhältnis $m : n$ geteilt werden.

182. *Die eine von zwei Geraden um ein Stück zu verkürzen, die andere um ein gleiches Stück zu verlängern, so daß der erste Rest zur zweiten Summe sich verhalte wie $m : n$.*

Lösung ganz analog. Schließlic wird CF innerlich nach dem Verhältnis $m : n$ geteilt, wenn mit der Geraden AC die Verlängerung vorgenommen wird.

183. *Jede von zwei Geraden in zwei Teile zu teilen, so daß die einen Abschnitte beider sich wie $m : n$, die andern wie $p : q$ verhalten.*

Lösung. Legt man die zu teilenden Geraden AB und AC in A unter einem beliebigen Winkel an einander, und sind D und E die Teilpunkte, so daß $AD : AE = m : n$ und $DB : EC = p : q$, so ist, wenn man $BF \parallel DE$ zieht, der Punkt F in AC leicht zu bestimmen. Zieht man ferner EG (bis in BF) parallel zu AB , so giebt die Proportion

$$EG : EC = p : q = AC : AH$$

ebenso einfach den Punkt H auf AB . Die Verbindungslinie CH giebt dann auf BF den Punkt G und die Parallele durch G zu AB den Punkt E in AC , endlich wird der Punkt D in AB durch eine Parallele von E zu BF erhalten.

Zusatz. Wenn man in den Aufgaben 179 bis 182 die gegebenen Geraden durch a und b , das abzuschneidende oder anzusetzende Stück durch x bezeichnet (bei A. 182 ist dann noch eine Größe y einzuführen) und man setzt die den Aufgaben entsprechenden Proportionen an, so lassen sich diese stets so umformen, daß x (oder y) als vierte Proportionale bestimmt werden kann. Die vorhergehenden Lösungen sind durchsichtiger, daher vorzuziehen.

184. *Durch die Verlängerungen zweier Radien über die Peripherie hinaus eine Gerade so zu legen, daß sie von der Peripherie des Kreises in drei gleiche Teile geteilt wird.*

Lösung. Ist M der Mittelpunkt des Kreises und EF die verlangte Gerade, welche die Peripherie in C und D so schneidet, daß $EC = CD = DF$ ist, so ist leicht nachweisbar, daß das Dreieck MEF gleichschenkligh ist. Nimmt man daher M als Spitze eines beliebigen gleichschenklighen Dreiecks, dessen

Schenkel MP und QM auf den gegebenen Radien liegen, und teilt dessen Grundlinie PQ in den Punkten A und B in drei gleiche Teile, so giebt die Verbindungslinie von M und A den Punkt C , die Verbindungslinie von M und B den Punkt D , worin die gesuchte Gerade die Peripherie durchschneidet.

185. *Von einem Punkte P in einer Kreisperipherie zwei Sehnen gegebenen Verhältnisses so in den Kreis zu legen, daß ihre andern Endpunkte mit dem Mittelpunkte in einer Geraden liegen.*

Lösung. Zieht man vom Punkte P den Durchmesser und zu diesem ein Lot bis in eine der Sehnen, so läßt sich der Durchschnittspunkt mit dieser Sehne durch eine bekannte Proportion konstruieren.

186. *Von einem Punkte P außerhalb eines Kreises an diesen zwei Sekanten gegebenen Verhältnisses so zu legen, daß ihre andern Endpunkte mit dem Mittelpunkte des Kreises in einer Geraden liegen.*

Lösung. Sind PA und PB die verlangten Sekanten, so ist wegen der bekannten Größe von AB für P ein Ort durch das gegebene Verhältnis gegeben, ein anderer durch die bekannte MP . Daher lassen sich die Sekanten PA und PB ihrer Größe nach einzeln konstruieren.

187. *In einen Kreis eine Sehne von gegebener Länge so zu legen, daß sie von einer andern in zwei Teile geteilt wird, deren Rechteck gleich p^2 ist.*

Lösung. Da auch die Stücke der gegebenen Sehne ein Rechteck $= p^2$ geben müssen, so bestimme man den Durchschnittspunkt. Dann giebt eine Tangente durch diesen Punkt an einen durch die gegebene Länge der einzulegenden Sehne bestimmbaren konzentrischen Kreis die verlangte Lage der Sehne.

188. *Durch einen Punkt in einer von zwei Sehnen eines Kreises eine dritte so durch beide zu legen, daß die äußern Abschnitte der dritten Sehne gleich werden.*

Lösung. Sind AB und CD die zwei gegebenen Sehnen, und ist die dritte Sehne FG so durch den Punkt P auf CD durch diese beiden Sehnen gelegt, daß $GP = FE$ ist, wobei E der Durchschnitt in AB , so ergibt sich leicht, daß

$$EF \cdot EG = AE \cdot EB = PC \cdot PD$$

ist, daß also die gegebene Sehne AB in E so zu teilen ist, daß das Rechteck $AE \cdot EB = PC \cdot PD$ ist.

189. *Zu einer Dreiecksseite eine Parallele zu legen, welche durch eine von einem Endpunkte dieser Seite ausgehende Transversale im Verhältnis $m : n$ geteilt wird.*

Lösung. Wird die zu BC gezogene Parallele XY durch die Transversale CP in Z so geschnitten, daß $XZ : YZ = m : n$ ist, dann muß auch, wenn man AZ bis D (in BC) verlängert, $BD : CD = m : n$ sein. Hieraus ist der Punkt D und durch Verbindung desselben mit A auch Z zu bestimmen.

190. *Die Parallele soll so gelegt werden, daß das Rechteck aus ihren, durch die Transversale gebildeten, Abschnitten einem gegebenen Quadrate gleich werde.*

Lösung. Zieht man durch A eine Parallele zu BC , bis sie die CP (oder ihre Verlängerung) in G schneidet, so hat man

$$\begin{aligned} XZ : BC &= PZ : PC \text{ und} \\ ZY : AG &= CZ : CG \end{aligned}$$

also $XZ \cdot ZY : BC \cdot AG = PZ \cdot CZ : PC \cdot CG$, woraus, da $XZ \cdot ZY$ gegeben, etwa p^2 ist, und man die Produkte $BC \cdot AG$ und $PC \cdot CG$ durch die Quadrate m^2 und q^2 ersetzen kann, folgt

$$PZ \cdot CZ = \left[\frac{p \cdot q}{m} \right]^2 = n^2,$$

wenn man die vierte Proportionale zu m , p und q durch n bezeichnet. Es ist also PC in Z so zu teilen, daß das Rechteck aus den Stücken einem gegebenen Quadrate gleich werde.

191. *Die Parallele so zu legen, daß das Rechteck aus ihr und einem Abschnitte (etwa dem an AB anliegenden Abschnitte) einem gegebenen Quadrate gleich werde.*

Lösung. Bei gleicher Konstruktion und Bezeichnung, wie vorhin, erhält man:

$$\begin{aligned} XY : BC &= AX : AB = GZ : GC \text{ und} \\ XZ : BC &= PZ : PC \end{aligned}$$

also $XY \cdot XZ : BC^2 = GZ \cdot PZ : GC \cdot PC$ oder

$$p^2 : a^2 = GZ \cdot PZ : m^2,$$

woraus der Punkt Z in der Linie GC bestimmt werden kann.

191. *In der durch die Spitze A zur Grundlinie BC gezogenen Parallele einen Punkt X so zu bestimmen, daß das aus diesem*

Punkte auf die Grundlinie gefällte Lot die mittlere Proportionale wird zwischen den Loten aus diesem Punkte auf die beiden andern Seiten.

Lösung. Sind XD , XE und XF die Lote auf BC , AC und AB , ferner $AG \perp BC$, so erkennt man leicht, daß $AG = XD$ und $\triangle XAF \sim ABG$, sowie $XE A \sim ACG$ ist. Aus der Ähnlichkeit des ersten Paares ergibt sich aber

$$XF : AX = AG : AB.$$

Aus der Ähnlichkeit des andern Paares folgt

$$XE : AX = AG : AC.$$

Aus beiden Proportionen folgt aber

$$XF \cdot XE : AX^2 = AG^2 : AB \cdot AC.$$

Soll nun $XF \cdot XE = AG^2 (= XF^2)$ sein, so muß $AX^2 = AB \cdot AC$ sein, woraus sich Punkt X ergibt.

193. *Der Punkt X soll unter denselben Bedingungen auf einer zu BC gezogenen Parallele bestimmt werden.*

Lösung. Sind XY , XZ und XT die Lote auf AB , AC und BC , und man zieht noch DF und EG senkrecht zu BC , welche jede dem Lote XT gleich sind, so ergibt sich leicht, daß $\triangle DXY \sim BDF$ und $\triangle EXZ \sim EGC$ ist. Hieraus folgt

$$DX : XY = BD : DF \text{ und}$$

$$XE : XZ = EC : EG, \text{ folglich}$$

$DX \cdot XE : XY \cdot XZ = BD \cdot EC : XT^2$, da $DF = EG = XT$ ist. Hieraus ergibt sich aber, daß $DX \cdot XE = BD \cdot EC$ sein muß, da $XY \cdot XZ$ der Aufgabe gemäß gleich XT^2 sein soll.

194. *Der Punkt X soll unter gleichen Bedingungen in einer von A aus gezogenen Transversale bestimmt werden.*

Lösung. Ist X der gesuchte Punkt, so daß, wenn man aus ihm die Lote XF , XZ und XT auf die Seiten BC , AB und AC zieht, $XZ : XY = XF : XT$ ist, so ziehe man aus D die Lote DE und DF auf AB und AC . Alsdann ist:

$$XZ : AX = DE : AD \text{ und}$$

$$XT : AX = DF : AD, \text{ also}$$

$$XZ \cdot XT : AX^2 = DE \cdot DF : AD^2.$$

Da nun $XZ \cdot XT = XF^2$ sein soll, und $DE \cdot DF = m^2$ gegeben ist, so erhält man $XF : AX = m : AD$. Nun ist,

wenn man das Lot von A auf BC fällt und dasselbe mit h bezeichnet,

$$XY : DX = h : AD.$$

Aus dieser und der vorhergehenden Proportion erhält man:

$$AX : DY = h : m,$$

woraus Punkt X bestimmt werden kann. (Man erhält zwei Punkte X , den einen zwischen A und D , den andern in der Verlängerung über D hinaus.)

195. *Auf einem Kreisbogen einen Punkt zu bestimmen, dessen Entfernungen von den Endpunkten der zugehörigen Sehne ein gegebenes Rechteck bilden.*

Lösung. Ist AB die Sehne, X der gesuchte Punkt, $XD \perp AB$ und AC ein Diameter des gegebenen Kreises, so ist nach Brockmann, Planimetrie Lehrs. 124

$$XD : XB = AX : AC.$$

Ist nun $XB \cdot AX = p^2$ gegeben, so findet man durch die Proportion $XD : p = p : AC$ die Höhe XD und dadurch den Punkt X .

196. *Von dem Mittelpunkte des Bogens einer Sehne eine zweite Sehne in den Kreis zu legen, dessen an der andern Seite zwischen Sehne und Kreisperipherie fallendes Stück von gegebener Länge (a) sei.*

Lösung. Ist C der Mittelpunkt des zur Sehne AB gehörigen Bogens und schneidet die gesuchte Sehne CD die gegebene in X , so daß $XD = a$ ist, so hat man, wenn man den Diameter CE zieht, welcher AB in N rechtwinklig schneidet, wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke CNX und CDE :

$CX : CN = CE : CX + a$ oder $CX (CX + a) = CE \cdot CN$,
woraus nach A. 17 CX zu konstruieren ist.

197. *In einen Kreis einen Diameter zu ziehen, so daß das Lot aus einem gegebenen Punkte auf denselben die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten desselben sei.*

Lösung. Ist AMB der gesuchte Diameter, so daß, wenn PX das aus P auf denselben gefällte Lot ist, sich verhält $AX : PX = PX : BX$, so muß die Tangente $XC = XP$ sein. Man hat daher: $XC^2 = MX - r^2$, und $PX^2 = PM^2 - MX^2$, woraus folgt: $PX = \frac{1}{2} (PM^2 + r^2)$. Durch das gefundene PX läßt sich der Punkt X und die Lage des gesuchten Diameters bestimmen.

198. *Durch zwei von dem Endpunkte eines Diameters ausgehende Sehnen einen zweiten Diameter so zu legen, daß das zwischen die Sehnen fallende Stück desselben im Mittelpunkte des Kreises halbiert wird.*

Lösung. Parallelen aus dem andern Endpunkte des Diameters zu den Sehnen geben auf diesem die Endpunkte des zwischen die Sehnen fallenden Stückes des gesuchten Diameters.

199. *Auf einer Ecktransversale eines Dreieckes den Mittelpunkt eines Kreises zu bestimmen, welcher durch eine zweite Ecke geht und die dieser gegenüber liegende Seite berührt.*

Lösung. Ist AD die gegebene Transversale und auf ihr X der Mittelpunkt eines Kreises, der durch C geht und die Seite AB berührt, so ziehe man $DE \parallel XC$ und DF parallel zum Berührungsradius XG . Dann ist

$$DE : CX = AD : AX \text{ und}$$

$$FD : GX = AD : AX$$

also $DE : CX = FD : GX$, folglich, da $CX = GX$ ist, $DE = FD$. Es ist also DE , und folglich auch Punkt E gegeben. Die Parallele durch C zu DC giebt den Mittelpunkt X in AD .

200. *Um einen Punkt auf einer Dreiecksseite einen Kreis zu beschreiben, welcher die beiden anderen Dreiecksseiten in zwei Punkten schneidet, deren Verbindungslinie der ersten Seite parallel ist.*

Lösung. Schneidet der Kreis um P in der Seite BC die Seiten AB und AC in den Punkten D und E so, daß $DE \parallel BC$ ist, und das in P auf BC errichtete Lot schneidet die Seite AB in O , die DE in H , so ist :

$$DH : BP = OD : OB, \text{ und } 2DH : BC = AD : AB.$$

Aus beiden Proportionen folgt:

$$\frac{2BP \cdot OD}{OB} = \frac{AD \cdot BC}{AB}, \text{ woraus sich ferner ergibt:}$$

$$OD : AD = BC \cdot OB : 2AB \cdot BP.$$

Setzt man hierin $BC \cdot OB = m^2$, $2AB \cdot PB = n^2$, so ist

$$OD : AD = m^2 : n^2, \text{ oder}$$

$$OA : AD = m^2 - n^2 : n^2.$$

Mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten

$\sqrt{m^2 - n^2} = d$ und n sind, läßt sich das Verhältniß $m^2 - n^2 : n^2$ durch ein lineares Verhältniß $p : q$ ersetzen, nach welchem man AO zu teilen hat, um den Punkt D zu bestimmen.

201. *Einen Kreis zu konstruieren, welcher eine Gerade und einen Kreis so berührt, daß die Berührungssehne zwischen beiden eine gegebene GröÙe habe.*

Lösung. Berührt der Kreis um X die Gerade L in Z und den Kreis um M in Y so, daß $YZ = s$ ist, so liegen die Berührungspunkte Z und Y mit einem Endpunkte (etwa A) des zu L senkrechten Diameters AMC in einer Geraden (cf. Brockmann, Planimetrie VII, A. 180, Zus.). Zieht man daher YC , so ist $\triangle AYC \sim AZB$ und folglich, da $YCBZ$ ein Sehnenviereck ist, $AC \cdot AB = AY \cdot (AY + s)$. Daraus ist aber nach A. 17, 1. Zus. die Länge AY zu konstruieren.

202. *Einen Kreis zu konstruieren, der durch zwei Punkte geht und eine Gerade unter einer gegebenen Bogenhöhe schneidet.*

Lösung. Schneidet ein durch P und P' gehender Kreis die Gerade L unter einer Bogenhöhe $DA = a$, so berührt dieser Kreis eine im Abstände a zur gegebenen Geraden parallel gezogene Gerade L' . Der Kreis ist also nach dem Apollonischen Berührungsproblem zu konstruieren.

203. *Durch einen Punkt auf der Peripherie eines Kreises eine Gerade, welche diesen Kreis noch in X , einen anderen in Y schneidet, so zu legen, daß $AX \cdot AY$ einem gegebenen Rechtecke gleich werde.*

Lösung. Zieht man YT senkrecht auf den durch A gehenden Diameter AB des erstern Kreises und die Sehne XB , so ist $AT : AY = XA : AB$, also, wenn $AY \cdot AX = m \cdot n$ sein soll, $AT : m = n : AB$. Hieraus findet man AT als eine vierte Proportionale, und durch T den Punkt Y .

204. *Über einen Radius eines Kreises als Summe der Grundlinien zwei einander ähnliche gleichschenklige Dreiecke zu konstruieren, deren Spitzen in der Kreisperipherie liegen.*

Lösung. Liegen die beiden gleichschenkligen, einander ähnlichen Dreiecke MCX und CAY mit den Spitzen X und Y in der Kreisperipherie, so ist, wenn man MY zieht,

$$\triangle MCX \cong AYM.$$

Hieraus folgt, daß $AY = CY = MC$ ist. Wegen der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke besteht aber die Proportion:

$MX : MC = YC : CA$, oder, da $MX = MA = r$, und $YC = MC$ ist, $MA : MC = MC : CA$, d. h. der Radius MA wird in C stetig geteilt.

Zusatz. Der Schenkel AY ergibt sich hierdurch als die Seite des dem gegebenen Kreise eingeschriebenen regulären Zehnecks.

205. *An den Bogen eines Quadranten eine Tangente so zwischen die Verlängerungen der den Quadranten begrenzenden Radien zu legen, daß sie im Berührungspunkte nach einem gegebenen Verhältnis geteilt wird.*

Lösung. Ist die Tangente XZY im Berührungspunkte Z so geteilt, daß $XZ : ZY = m : n$ ist, so ziehe man in A an den Kreis eine Tangente, welche den Berührungsradius MZ in T schneiden möge. Nun ist $\triangle MTA \sim MYZ$, also $AT : AM = MZ : XZ$, oder, da $AT = XZ$ und $MZ = MA$ ist, $ZX : AM = AM : YZ$.

Aus der gegebenen mittleren Proportionale und dem gegebenen Verhältnis lassen sich nach A. 87, Zus. die Größen XZ und YZ einzeln konstruieren.

206. *In einer Dreiecksseite einen Punkt zu bestimmen, dessen Entfernungen von den beiden andern Seiten ein gegebenes Rechteck bilden.*

Lösung. Liegt der Punkt X in der Seite BC so, daß das Rechteck aus den Loten XD und XE auf die Seiten AB und AC , also $DX \cdot EX = p \cdot q$ ist, so bestimme man den Punkt G innerhalb des Dreiecks ABC so, daß die Lote auf AB und AC einzeln gleich p und q gleich sind, etwa $GF = p$, $GH = q$. Zieht man dann durch den Punkt G die Parallele KGL zu BC , so erhält man zwei Paare ähnlicher Dreiecke, nämlich $\triangle FGK \sim \triangle DXB$ und $\triangle HGL \sim \triangle EXC$. Hieraus ergeben sich die Proportionen

$$FG : DX = KG : BX \text{ und}$$

$$HG : EX = GL : XC$$

folglich $KG \cdot GL = BX \cdot XC$, woraus Punkt X nach A. 17 zu bestimmen ist, da KG und GL gegeben sind.

207. *Der Punkt soll unter denselben Bedingungen in der Verlängerung einer Dreiecksseite bestimmt werden.*

Lösung der vorhergehenden genau nachzubilden. Schließlich ist nach A. 17, 1. Zus. zu verfahren.

208. *In einen Kreis ein Rechteck gegebenen Inhalts zu beschreiben.*

Lösung. Die Diagonale des Rechtecks ist ein Diameter des Kreises. Aus dem gegebenen Inhalte desselben läßt sich leicht die Entfernung zweier Ecken von dieser Diagonale bestimmen.

209. *In ein Viereck einen Rhombus zu beschreiben, dessen Seiten den Diagonalen des Vierecks parallel sind.*

Lösung. Liegen die Ecken des Rhombus X , Y , Z und T der Reihe nach in den Seiten AB , BC , CD und DA des Vierecks, so hat man die Proportionen

$$DZ : DC = TZ : AC \text{ und}$$

$$CZ : DC = ZY : DB, \text{ folglich}$$

$$DZ : CZ = DB : AC, \text{ woraus Punkt } Z \text{ zu finden.}$$

210. *In ein Dreieck ein Rechteck zu beschreiben, von welchem zwei Ecken auf einer Seite liegen, und dessen eine Diagonale einer andern Dreiecksseite parallel ist.*

Lösung. Liegen die Ecken X und Y in BC , Z und T auf AC und AB , und ist $TY \parallel AC$, so ergeben sich die Proportionen:

$$BY : BC = TY : AC, \text{ und, wenn man } AD \perp BC \text{ zieht,}$$

$$CZ : AC = CY : CD. \text{ Da nun } TY = CZ \text{ ist, so folgt}$$

$$BY : CY = BC : CD, \text{ woraus Punkt } Y \text{ zu finden.}$$

211. *In einen Kreisausschnitt ein Rechteck mit gegebenem Verhältnis seiner Seiten so zu konstruieren, daß zwei Ecken auf einem Grenzradius liegen.*

Lösung. Liegen die Ecken H und E auf dem Radius AC , F auf dem Bogen und G auf AB , und man zieht durch B eine Parallele zu AC bis zum Durchschnitt D mit der Verbindungslinie AF , so ist

$$BD : GF = AB : AG \text{ und}$$

$$AG : GH = AB : BJ; (BJ \perp AC). \text{ Hieraus folgt}$$

$BD : BJ = m : n$, so daß D , und also auch Punkt F bestimmt werden kann.

212. *Zwei Ecken des Rechtecks sollen im Bogen des Ausschnittes liegen.*

Lösung. Liegen die Ecken D und E auf dem Bogen BC , F auf AC und G auf AB , so sind die Seiten DG und EF der Halbierungslinie des Centriwinkels A des Ausschnitts parallel. Zieht man nun durch B zu dieser Halbierungslinie eine Parallele bis zum Durchschnitt H mit der Verbindungslinie AD , so ist $AG : AB = GD : BH = GF : BC$, woraus man erhält:

$$GD : GF = BH : BC = m : n.$$

213. *Ein Rechteck, dessen eine Ecke gegeben ist, so zu konstruieren, daß die Gegenseiten dieser Ecke durch zwei Punkte gehen, welche mit der gegebenen Ecke auf einer Geraden liegen, und dessen Seiten ein gegebenes Verhältniß haben.*

Lösung. Liegen die Punkte M , N und P in einer Geraden und das Rechteck $ABNC$ so, daß die Verlängerungen von AB und AC durch M und P gehen, dabei aber $AB : BN = m : n$ ist, so verlängere man BN über N um $ND = NC$ und errichte in N und D Lote auf NP und ND , welche einander in E schneiden. Dann ist $\triangle NED \simeq NCP$, also außer $ND = NC$ auch $NE = NP$, also Punkt E bestimmbar. Es ist dann die gesuchte NC eine solche, daß sich die aus M und E darauf gefällten Lote, welche $= BN$ und $= ND = NC$ sind, wie $m : n$ verhalten, welche nach A. 104 bestimmt werden kann.

Zusatz. Soll das gesuchte Rechteck ein Quadrat werden, so findet man NC , wenn man N mit der Mitte von NE verbindet.

214. *Das verlangte Rechteck soll einen gegebenen Inhalt haben.*

Lösung wie vorhin mit schließlicher Anwendung von A. 105.

215 und 216. *Das gesuchte Rechteck soll einen gegebenen Umfang (oder eine gegebene Differenz seiner Seiten) haben.*

Lösung wie in 22 mit schließlicher Anwendung von A. 21 oder 22.

217. *In ein Dreieck ein Quadrat zu beschreiben, dessen eine Seite auf einer Dreiecksseite liegt.*

1. **Lösung.** Liegen zwei Ecken (F und G) des gesuchten Quadrates auf BC , D und E auf AB und AC , und man verbindet C mit D und verlängert diese Verbindungslinie bis in H , in die durch A zu BC gezogene Parallele, oder man verbindet A mit G , bis diese Verbindungslinie das in B auf BC errichtete Lot in J schneidet, so ergibt sich, wenn man noch

$AK \perp BC$ zieht, sehr leicht, daß in jenem Falle $AH = AK$, in diesem Falle $BJ = BC$ ist, wodurch Punkt D oder F leicht zu bestimmen ist.

2. Lösung. Verwandelt man das Dreieck ABC mit Beibehaltung der Seite BC in ein (inhaltsgleiches) Dreieck BCA' , worin $\sphericalangle A'BC = 1R$ ist, und man halbiert diesen rechten Winkel, so giebt die Parallele durch den Durchschnitt des Winkelhalbierers mit der Hypotenuse zu BC im Dreieck ABC die Seite DE des gesuchten Quadrates.

Determination. Es ist zu beachten, daß das verlangte Quadrat auf jeder der drei Seiten stehen und auch mit seinen Ecken auf den Verlängerungen der Dreiecksseiten liegen darf. Die Quadrate der letzten Art erhält man, wenn man das Stück $AH = AK$ auf der entgegengesetzten Seite abschneidet, oder das Lot $BJ = BC$ nach der andern Seite errichtet, oder endlich statt des rechten Winkels $A'BC$ seinen Nebenwinkel halbiert.

218. *In ein Dreieck ein Rechteck einzuschreiben, dessen Diagonale gegeben ist.*

Lösung. Man verwandelt das gegebene Dreieck ABC in ein anderes bei C rechtwinkliges $A'BC$. Dann ist der Durchschnitt eines mit der gegebenen Diagonale als Radius um C beschriebener Kreis mit der Hypotenuse $A'B$ ein Punkt der zu BC parallelen Seite des gesuchten Rechtecks.

219 und 220. *Das einzuschreibende Rechteck soll einen gegebenen Umfang oder eine gegebene Differenz seiner Seiten haben.*

Lösung. Man verwandelt wiederum $\triangle ABC$ in ein bei C rechtwinkliges Dreieck $A'BC$ und bestimmt nach A. 7 in der Hypotenuse $A'B$ einen Punkt, dessen Entfernungen von den beiden Katheten eine gegebene Summe oder Differenz bilden. Die Parallele durch diesen Punkt zu BC bestimmt im Dreiecke ABC die zu BC parallele Seite DE .

221. *Das einzuschreibende Rechteck soll einen gegebenen Inhalt erhalten.*

Lösung unter Anwendung des rechtwinkligen Dreiecks $A'BC$ auf A. 205 zurückzuführen.

222. *Die Seiten des einzuschreibenden Rechtecks sollen eine gegebene Quadratdifferenz bilden.*

Lösung nach A. 22 und Zus. leicht.

Zusatz. Wäre die Summe der Quadrate der Seiten gegeben, so wäre die Aufgabe identisch mit A. 216.

223. *Die Summe der Diagonale und einer Seite des einzuschreibenden Rechtecks soll eine gegebene sein.*

Lösung. Unter Anwendung des rechtwinkligen Dreiecks $A'BC$ ist in der Hypotenuse $A'B$ ein Punkt zu bestimmen, dessen Entfernungen vom Scheitel des rechten Winkels und der Kathete BC die gegebene Summe bilden, was nach A. 58 zu bewirken ist.

224. *Die Diagonale und eine Seite des Rechtecks sollen eine gegebene Differenz bilden.*

Lösung in ganz ähnlicher Weise auf A. 59 zu reduzieren.

225. *Von einem Punkte außerhalb eines Kreises an diesen eine Sekante zu ziehen, so daß die ganze Sekante und der äußere Abschnitt eine gegebene Quadratdifferenz bilden.*

Lösung. Es ist das Produkt der Stücke, nämlich das Quadrat der Tangente aus dem gegebenen Punkte, gegeben, daher die Lösung auf A. 72 zu reduzieren.

226. *Die entstehende Sehne und der äußere Abschnitt sollen eine gegebene Quadratdifferenz bilden.*

Lösung. Zieht man den Diameter YMA , AX und AP , so ist $YX^2 = 4r^2 - XA^2$ und $PX^2 = PA^2 - AX^2$. Hieraus erhält man $d^2 = 4r^2 - PA^2$, woraus PA , Punkt A und Y , also auch YP zu bestimmen ist.

227 und 228. *Der gegebene Punkt liege innerhalb des Kreises und es werde unter gleichen Bedingungen eine Sehne verlangt.*

Lösung den vorigen ganz entsprechend; man hat in ersterem Falle statt einer Tangente die halbe kleinste Sehne zu nehmen.

Für die folgenden 37 Aufgaben stellen wir zunächst einige Sätze über geometrische Örter auf, da dieselben selbst in den gangbarsten Lehrbüchern nicht vollständig formuliert vorkommen dürften. Die allgemeine Kenntniss der Chordale wird dabei vorausgesetzt.

1. *Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und einen gegebenen Punkt rechtwinklig schneiden, ist die Chordale zu Kreis und Punkt.*

Beweis. Geht der Kreis um M durch P und schneidet den Kreis um K in A rechtwinklig, so liegt M auf der in A an K gezogenen Tangente. Zieht man nun MP , MK und MA , so ist $MK^2 - MA^2 = MK^2 - MP^2 = r^2$, d. h. M liegt in der Chordale zu P und dem Kreise.

2. *Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt P gehen und einen gegebenen Kreis unter einem Durchmesser schneiden (oder halbieren), ist wiederum die zugehörige Chordale.*

Beweis. Geht der Kreis um M durch P und schneidet den Kreis K unter dem Durchmesser AB , so ist leicht nachzuweisen, daß $MP^2 - MK^2 = r^2$ ist, d. h. daß Punkt M auf der Chordale liegt.

3. *Der Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und von einem gegebenen Kreise halbiert werden, ist eine konstruierbare Kreislinie.*

Beweis. Wird der durch P gehende Kreis um M von dem Kreise um K unter dem Diameter AB geschnitten, so ergibt sich leicht, daß $MK^2 + MP^2 = r^2$ ist. Darnach ist der Ort ein Kreis um den Mittelpunkt von PK mit einem Radius $= \sqrt{\frac{1}{2}(r^2 - \frac{1}{2}PK^2)}$.

Anmerkung. Da „rechtwinklig schneiden“ und „rechtwinklig geschnitten werden“ bei zwei Kreisen dasselbe ist, so bedarf es keiner besondern Aufstellung eines Ortes für diesen Fall.

4. *Der Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche zwei andere beide rechtwinklig schneiden, ist die Chordale beider Kreise.*

Beweis ähnlich wie vorhin und einfach.

5. *Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise jeden unter einem Durchmesser schneiden, ist der zweite Potenzort der beiden Kreise.*

Dieser zweite Potenzort ist eine auf der Centrale beider Kreise senkrechte Gerade, für deren Punkte die Differenz der Quadrate ihrer Entfernungen von den Mittelpunkten der Kreise gleich der im entgegengesetzten Sinne genommenen Differenz der Quadrate der Radien ist. Für die Kreise um O_1 und O_2 mit den Radien r_1 und r_2 ist, wenn C ein Punkt dieses Ortes ist, $CO_1^2 - CO_2^2 = r_2^2 - r_1^2$.

Man erhält diesen Ort dadurch, daß man, wenn A der Fußpunkt der Potenzlinie ist, von O_2 aus ein Stück $O_2B = O_1A$

in der Richtung nach A abträgt und in B zur Centrale das Lot errichtet; oder man zieht in O_1 und O_2 auf derselben Seite der Centrale senkrechte Radien, und errichtet in der Mitte der Verbindungslinie ihrer Endpunkte zu dieser das Lot, welches die Centrale im Fußpunkte des Ortes schneidet.

Beweise sind einfach.

Zusatz. Die Differenz der Potenzen eines jeden Punktes dieses Ortes in bezug auf die beiden Kreise ist konstant $p_1^2 - p_2^2 = 2(r_2^2 - r_1^2)$, woher der Name: Linie äquidifferenten Potenzen.

6. *Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen Kreis (um O_1) rechtwinklig und einen andern (um O_2) unter einem Diameter schneiden, ist der dritte Potenzort der beiden Kreise.*

Dieser dritte Potenzort ist gleichfalls eine zur Centrale senkrechte Gerade, für deren Punkte die Differenz der Quadrate ihrer Entfernungen von den Mittelpunkten der Kreise gleich der Summe der Quadrate der Radien ist. Es ist also, wenn C ein Punkt dieses Ortes ist, $CO_1^2 - CO_2^2 = r_1^2 + r_2^2$. (Wird der Kreis um O_2 rechtwinklig, der um O_1 unter einem Durchmesser geschnitten, so erhält man einen andern dritten Potenzort, indem dann $CO_2^2 - CO_1^2 = r_1^2 + r_2^2$ sein muß.)

Man erhält diesen Ort, wenn man die Centrale O_1O_2 in B so teilt, daß $BO_1^2 - BO_2^2 = r_1^2 + r_2^2$ ist, und in B zur Centrale das Lot errichtet.

Beweise sind einfach.

Zusatz. Die Differenz der Potenzen eines jeden Punktes dieses Ortes in bezug auf die beiden Kreise ist konstant, nämlich gleich dem doppelten Quadrate des Radius des Kreises um O_2 , so daß also auch dieser Potenzort eine Linie äquidifferenten Potenzen genannt werden kann.

7. *Der Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche einen andern rechtwinklig schneiden, und von einem dritten halbiert werden, ist eine konstruierbare Kreislinie, deren Mittelpunkt die Mitte der Verbindungslinie der Mittelpunkte der gegebenen Kreise ist.*

Beweis. Schneidet der Kreis um M den Kreis um K in A rechtwinklig und wird vom Kreise um K' unter dem Diameter BMC geschnitten, so ist

$$MK^2 = r^2 + MA^2 \text{ und } MK'^2 = r'^2 + MB^2.$$

Da nun $MD = MB$ ist, so folgt hieraus

$$MK^2 - MK'^2 = r^2 - r'^2,$$

wonach der Ort als Kreis, wie in 3, konstruiert werden kann.

Diese sieben geometrischen Örter finden Anwendung auf die folgenden 37 Aufgaben, in welchen zur vollständigen Lösung außer den Bedingungen, die einen dieser Örter ergeben, noch eine Bedingung enthalten ist, wodurch der Mittelpunkt und der Radius des gesuchten Kreises bestimmt werden können. Die Lösung des renommierten Apollonischen Berührungsproblems wird hierbei vorausgesetzt.

229 bis 237. *Einen Kreis zu konstruieren, welcher einen andern Kreis rechtwinklig, oder unter einem Diameter schneidet, oder von diesem unter einem Diameter geschnitten wird, und dabei*

229 bis 231. durch zwei gegebene Punkte geht.

Bei der Lösung ist zu merken, daß, wenn die Lage des Mittelpunktes durch zwei Örter bestimmt ist, der Radius des gesuchten Kreises die Entfernung desselben von einem gegebenen Punkte ist.

232 bis 234. *eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.*

Lösung. Der Mittelpunkt wird durch zwei Örter, der Radius in einfacher Weise wie vorhin bestimmt.

235 bis 237. *einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt.*

Lösung in gleicher Weise einfach.

238. *Einen Kreis zu konstruieren, der durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Kreise jeden rechtwinklig schneidet.*

Lösung. Durch zweimalige Anwendung von O. 1 bestimmt man den Mittelpunkt des gesuchten Kreises und den Radius durch eine Tangente.

239. *Einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise rechtwinklig durchschneidet.*

Lösung. Als Mittelpunkt des gesuchten Kreises ergibt sich gemäß O. 1 das Potenzcentrum der drei Kreise, als Radius die Tangente aus diesem an einen derselben.

240. *Einen Kreis zu konstruieren, der durch einen gegebenen Punkt geht und jeden von zwei gegebenen Kreisen halbiert.*

Lösung. Zweimalige Anwendung von O. 2 giebt den Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Der Radius desselben wird

durch einen zur Verbindungslinie dieses Mittelpunktes mit dem Mittelpunkte eines der Kreise senkrechten Diameter dieses Kreises bestimmt.

241. *Einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise halbiert.*

Lösung wie in A. 240.

242. *Einen Kreis zu konstruieren, der durch einen gegebenen Punkt geht und von zwei andern Kreisen halbiert wird.*

Lösung. Man bestimmt den Mittelpunkt des gesuchten Kreises nach O. 3 und den Radius aus zwei rechtwinkligen Dreiecken.

243. *Einen Kreis zu konstruieren, der durch P geht, einen gegebenen Kreis halbiert und einen andern rechtwinklig schneidet.*

Lösung mit Hilfe von O. 1 und 2.

244 und 245. *Einen Kreis zu konstruieren, der zwei andere rechtwinklig schneidet und einen dritten halbiert, oder zwei halbiert und den dritten rechtwinklig schneidet.*

Lösung. Für beide Fälle ist nach O. 1 und 2 der Mittelpunkt des gesuchten Kreises durch zwei Örter zu bestimmen; den Radius findet man dann in ähnlicher Weise wie bei A. 239 und 240.

246. *Einen Kreis zu konstruieren, der einen andern rechtwinklig, einen zweiten unter einem Durchmesser schneidet, und von einem dritten unter einem Durchmesser geschnitten wird.*

Lösung mit Hilfe obiger Örter leicht.

247 und 248. *Einen Kreis zu beschreiben, der zwei Kreise unter einem Durchmesser schneidet und von einem dritten unter einem Diameter geschnitten wird, oder einen unter einem Durchmesser schneidet und von den beiden andern unter einem Durchmesser geschnitten wird.*

Lösung unter Anwendung obiger Örter leicht.

249. *Einen Kreis zu konstruieren, der von drei gegebenen Kreisen halbiert wird.*

Lösung mit Hilfe obiger Örter ebenfalls leicht.

Determination. Nur möglich, wenn die drei Kreise einander durchschneiden.

Einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt P geht, eine gegebene Gerade berührt,

250. *und einen gegebenen Kreis halbiert.*

Lösung. Verbindet man den Punkt P mit dem Mittelpunkt K des halbierten Kreises und verlängert diese Verbindungslinie bis in die Peripherie des gesuchten, so läßt sich nach dem bekannten Sehnensatze dieser zweite Punkt der Peripherie des gesuchten Kreises bestimmen. Dadurch wird aber die Aufgabe auf die Aufgabe des Berührungsproblems reduziert: Einen Kreis zu konstruieren, der durch zwei Punkte geht und eine Gerade berührt.

251. *und einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet.*

Lösung. Auf der Verbindungslinie PK läßt sich nach dem bekannten Tangentensatze wiederum ein zweiter Punkt C der gesuchten Kreisperipherie bestimmen, wodurch die Lösung der Aufgabe in gleicher Weise reduziert wird.

Einen Kreis zu konstruieren, der durch einen gegebenen Punkt P geht, einen gegebenen Kreis berührt,

252 und 253. *und einen zweiten Kreis halbiert oder rechtwinklig schneidet.*

Lösung in ganz ähnlicher Weise durch Bestimmung eines zweiten Punktes der gesuchten Kreisperipherie in beiden Fällen auf dieselbe Berührungsaufgabe zu reduzieren.

Einen Kreis zu konstruieren, der eine gegebene Gerade berührt

254. *und zwei gegebene Kreise halbiert,*

255. *und von zwei gegebenen Kreisen den einen halbiert und den andern rechtwinklig schneidet,*

256. *und zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet.*

Lösung. Unter Berücksichtigung der leicht erweisbaren Thatsachen, 1) daß die Peripherieen aller Kreise, welche zwei andere halbieren, durch zwei feste Punkte der Centrale der halbierten Kreise gehen,

2) daß dasselbe der Fall ist, wenn der eine der beiden Kreise halbiert, der andere rechtwinklig geschnitten wird, oder

3) beide Kreise rechtwinklig schneiden und diese Kreise aus einander liegen,

4) daß jeder Kreis, welcher zwei gegebene, einander durchschneidende Kreise rechtwinklig schneidet, auch jeden andern Kreis rechtwinklig schneidet, der durch die Durchschnittspunkte derselben geht,

kann man in jedem der obigen Fälle zu der zu berührenden Geraden noch 2 Punkte bestimmen, wodurch der gesuchte

Kreis gehen muß. Dadurch ist aber die betreffende Aufgabe auf das Berührungsproblem reduziert: Einen Kreis zu konstruieren, der durch zwei Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt.

Die entsprechenden Aufgaben

257 bis 259, *in welchen statt einer Geraden ein gegebener Kreis berührt werden soll*, finden in ganz analoger Weise durch Reduktion auf ein Berührungsproblem ihre einfache Erledigung.

260 und 261. *Einen Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Gerade berührt und einen gegebenen Kreis halbiert oder rechtwinklig schneidet.*

Lösung. Der gesuchte Kreis muß auch den Gegenkreis des gegebenen in bezug auf die Halbierungslinie des Winkels der gegebenen Geraden in gleicher Weise durchschneiden. Konstruiert man diesen, so lassen sich gemäß den in der Lösung von A. 256 angeführten Thatsachen in der Centrale des gegebenen Kreises und seines Gegenkreises noch zwei Punkte der gesuchten Peripherie bestimmen.

262 und 263. *Einen Kreis zu konstruieren, der eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt und einen andern gegebenen Kreis unter einem Durchmesser oder rechtwinklig schneidet.*

Lösung. Sind A und B die Berührungspunkte in der Geraden L und dem Kreise K , so liegen diese mit einem Endpunkte, etwa C , des auf L senkrechten Diameters CKE in einer Geraden. (Vergl. des Verfassers Planimetrie, A. 180, Zus.) Zieht man nun von C die Tangente CD an den gesuchten Kreis, so ist, da $ABEG$ (G der Fußpunkt des senkrechten Diameters in L) ein Sehneuviereck ist,

$$CE \cdot CG = CB \cdot CA = CD^2,$$

wodurch die Länge CD bekannt ist. Einen um C mit CD beschriebenen Kreis muß aber der gesuchte rechtwinklig durchschneiden, so daß die beiden Aufgaben auf die A. 255 resp. A. 256 reduziert sind.

264 und 265. *Einen Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Kreise berührt und einen dritten halbiert oder rechtwinklig schneidet.*

Lösung. Die aus einem Ähnlichkeitspunkte, mit welchem die beiden Berührungspunkte in einer Geraden liegen, an den

gesuchten Kreis zu konstruierende Tangente läßt sich in ähnlicher Weise, wie vorhin, ihrer Länge nach bestimmen. Da nun ein mit dieser Länge als Radius um den Ähnlichkeitspunkt beschriebener Kreis von dem gesuchten rechtwinklig geschnitten wird, so ist dadurch die Lösung der Aufgaben auf A. 258 resp. A. 259 reduziert.

Determination. Für diese ist zu merken, daß der äußere oder der innere Ähnlichkeitspunkt zu verwenden ist, je nachdem die beiden Kreise gleichartig oder ungleichartig berührt werden sollen.

266. *Um ein Dreieck ein Rechteck zu legen*), welches einen gegebenen Umfang hat.*

Lösung. Liegen die beiden Figuren mit der Ecke A zusammen und gehen die Seiten DE und FE des gesuchten Rechtecks durch die Ecken B und C des Dreiecks, so hat man, wenn man FA über A bis G verlängert, so daß $AG = AD$ ist, und $AH \perp AB$ und $= AB$ macht, (dadurch wird $\triangle AGE \cong ADB$) je einen Halbkreis über AC und AH als Ort für F und G . Man hat dann nach A. 44 durch A in beide Halbkreise eine Gerade zu legen, so daß die Summe der entstehenden Sehnen gleich dem halben gegebenen Umfang wird.

267. *Das rechtwinklige Parallelogramm soll ein Quadrat werden.*

Lösung. Man lege bei gleicher Behandlung, wie vorhin, durch A nach A. 43 die Gerade so, daß die entstehenden Sehnen einander gleich werden.

268. *Die Seiten des Rechtecks sollen eine gegebene Differenz haben.*

Lösung ähnlich mit schließlicher Anwendung von A. 45.

269. *Die Seiten des Rechtecks sollen ein gegebenes Verhältnis haben.*

Lösung mit schließlicher Anwendung von A. 40 ähnlich.

270. *Von dem Rechtecke soll eine Seite gegeben sein.*

Lösung einfach.

271. *Von dem Rechtecke soll die Diagonale gegeben sein.*

*) Eine Ecke des Rechtecks fällt in eine Ecke des Dreiecks; die beiden nicht anliegenden Seiten gehen durch die beiden anderen Ecken.

Lösung. Die A gegenüberliegende Ecke des Rechtecks ist in einfachster Weise durch zwei Örter gegeben.

272. *Das Rechteck soll einen gegebenen Inhalt haben.*

Lösung in ähnlicher Weise mit Anwendung von A. 104.

273. *Die Seiten des Rechtecks sollen eine gegebene Quadratdifferenz bilden.*

Lösung ähnlich; schließlich Anwendung von A. 109.

274. *Um ein Dreieck einen Rhombus zu beschreiben, von welchem ein Winkel gegeben ist.*

Lösung. Ist A die gemeinschaftliche Ecke und gehen die Seiten DE und FE des Rhombus durch die Ecken B und C des gegebenen Dreiecks, und ist $\angle FAD$ gleich dem gegebenen Winkel α , so läßt sich in gleicher Weise wie in A. 266 der Punkt H bestimmen, und durch die bekannten Winkel F und G , welche nämlich beide $= 2R - \alpha$ sind, je ein Kreisbogen über AC und AH als Ort für F und G bestimmen. Zur wirklichen Bestimmung dieser Punkte ist dann noch A. 43 zu lösen.

275. *Die Diagonalen des Rhombus sollen ein gegebenes Verhältnis haben.*

Lösung. Aus dem Verhältnis der Diagonalen kann man die Winkel des Rhombus konstruieren und die vorliegende Aufgabe auf die vorhergehende reduzieren.

276. *Um ein (ordinäres) Viereck einen Rhombus zu legen, dessen Winkel gegeben sind.*

Lösung. Der Rhombus $XYZT$ liege so um das Viereck $ABCD$, daß die Seiten XY , YZ , ZT und TX der Reihe nach durch die Ecken C , D , A und B des Vierecks gehen. Halbiert man drei Seiten des Vierecks, etwa CD , DA und AB in den Punkten E , F und G und zieht durch E und G Parallelen zu den Seiten ZT und YZ bis zum Durchschnitt in K , ebenso durch F Parallelen zu denselben Seiten, welche die vorhergezogenen in J und H schneiden, dann läßt sich zeigen, daß $FJ = \frac{1}{2} YZ$ und $FH = \frac{1}{2} ZT$ ist. Zieht man nämlich $CL \parallel YZ$ bis in ZT , so ist wegen Gleichheit der Winkel $\triangle ACL \sim EFJ$, und deshalb $FJ : CL = EF : AC$. Da nun $EF = \frac{1}{2} AC$ ist, so ist auch $FJ = \frac{1}{2} CL = \frac{1}{2} YZ$. (Mittelst einer Parallele durch D zu ZT und der Verbindungslinie DB zeigt man in gleicher Weise, daß $FH = \frac{1}{2} ZT$.) Da nun noch

$\sphericalangle EFH = \sphericalangle Z$ ist, so ist $JFHK$ ein um das Dreieck EFG gelegter Rhombus mit gegebenem Winkel, der also nach A. 274 konstruiert werden kann. Aus diesem läßt sich aber der gesuchte in einfacher Weise ableiten.

277. *Ein Quadrat zu konstruieren, dessen Seiten durch vier auf einer Geraden liegende Punkte gehen.*

Lösung. Sind A, B, C und D diese vier auf einer Geraden liegenden Punkte, so konstruiere man nach A. 213, Zus. zunächst ein Quadrat, dessen eine Ecke etwa in C liegt, dessen Gegenseiten aber durch D und einen zweiten auf der gegebenen Geraden liegenden Punkt E gehen, dessen Entfernung von C gleich der Entfernung AB ist. Durch Parallelen aus A und B erhält man dann das verlangte Quadrat. Da der Punkt E beiderseits von C liegen kann, so erhält man für jeden als Eckpunkt des Hilfsquadrates gewählten Punkt zwei Quadrate.

278. *Um ein (ordinäres) Viereck ein Rechteck zu legen, dessen Seiten ein gegebenes Verhältniß haben,*

279. *das einen gegebenen Inhalt hat,*

280. *das einen gegebenen Umfang hat,*

281. *dessen Seiten eine gegebene Differenz haben.*

Die Lösungen dieser vier Aufgaben werden auf die Lösungen der entsprechenden Aufgaben 213 bis 216 reduziert, indem man zunächst ein den gestellten Bedingungen entsprechendes Rechteck konstruiert, dessen eine Ecke in einem der vier Punkte liegt, dessen Gegenseiten durch einen zweiten dieser Punkte und einen dritten gehen, welcher der Endpunkt einer durch die gewählte Ecke zur Verbindung der beiden übrigen Punkte parallel und gleich gezogenen Geraden ist. Durch Parallelen durch die zwei letzten der vier Punkte wird dann das gesuchte Rechteck erhalten.

282. *Ein Quadrat zu konstruieren, dessen Seiten durch vier (nicht in einer Geraden liegende) Punkte gehen, oder um ein (ordinäres) Viereck ein Quadrat zu beschreiben.*

Lösung entweder nach A. 278, oder man stützt sich auf die Thatsache, daß jedes Rechteck, welches mit seinen Seiten durch die Endpunkte zweier zu einander senkrechten und gleichen Geraden geht, ein Quadrat ist.

283. *Um ein gegebenes Viereck ein anderes zu beschreiben, welches einem dritten ähnlich ist.*

Lösung. Liegen die Ecken A, B, C und D des gegebenen Vierecks in den Seiten EF, FG, GH und HE des gesuchten, so ist durch die bekannten Winkel E, F, G und H über den Seiten AB, BC, CD und DA je ein Kreis als Ort für die unbekannten Ecken F, G, H und E gegeben. Schneidet nun der betreffende Kreis über BC die Diagonale GE in J , und der über DA diese Diagonale in K , so lassen sich diese Durchschnittspunkte aus der Gleichheit der Winkel CDJ und CGJ , sowie der Winkel DCJ und DGJ , andererseits der entsprechende Winkel im andern Kreise bestimmen. Die Verbindungslinie von J und K giebt aber in den Örtern die Punkte G und E .

284 bis 287. *Um ein Quadrat ein anderes zu legen, so daß die Seiten des letztern in den Ecken des gegebenen entweder nach einem gegebenen Verhältnis oder so geteilt werden, daß die Summe oder Differenz der Stücke, oder die Quadratdifferenz oder das Rechteck derselben gegeben sei.*

Lösung. Da für zwei Nachbarecken des gesuchten Quadrates je ein Halbkreis gegeben ist, so reduziert sich die Lösung auf A. 40 oder 45 oder 109 oder 105.

288. *Durch einen Punkt P auf der Mittelsenkrechten einer Geraden AB eine Gerade so zu legen, daß die AB die mittlere Proportionale wird zu den Abschnitten, welche die Gerade auf den in A und B zu AB errichteten Loten bildet.*

Lösung. Die Mittelsenkrechte CP ist die halbe Summe der Abschnitte, als deren mittlere Proportionale die Linie AB gegeben ist. Daher sind die Abschnitte einzeln konstruierbar und zwar mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem die Hypotenuse gleich der halben Summe, und die eine Kathete die mittlere Proportionale ist. Die andere Kathete wird dann gleich der halben Differenz der Abschnitte.

289. *Einen Rhombus, dessen Winkel gegeben sind, zu konstruieren, so daß seine Seiten durch vier in einer Geraden liegende Punkte gehen.*

Lösung ist in ähnlicher Weise, wie bei A. 277 geschehen, der Lösung von A. 276 nachzubilden.

290. *Dieselbe Aufgabe mit der Änderung, daß von dem Rhombus das Verhältnis der Diagonalen gegeben ist.*

Zur Lösung vergleiche A. 275.

291 bis 297. *Ein Rechteck zu konstruieren, dessen Seiten durch vier in einer Geraden liegende Punkte gehen, wenn*

- 291. *eine Seite desselben,*
- 292. *die Diagonale desselben,*
- 293. *das Verhältniß seiner Seiten,*
- 294. *die Differenz seiner Seiten,*
- 295. *die Quadratdifferenz seiner Seiten,*
- 296. *der Umfang desselben,*
- 297. *der Inhalt desselben gegeben sind.*

Die Lösung dieser sieben Aufgaben läßt sich in ähnlicher Weise wie im A. 277 auf die entsprechende Aufgabe 213 bis 216 reduzieren, und aus dem hierdurch erhaltenen Rechteck mittelst zweier Parallelen leicht das gesuchte Rechteck ableiten.

298. *Zu drei gegebenen harmonischen Strahlen den vierten zu konstruieren.*

Lösung. Harmonische Strahlen teilen jede sie schneidende Gerade harmonisch. Man lege daher durch die drei Strahlen eine beliebige Gerade, bestimme zu einem der drei Durchschnittspunkte den konjugierten harmonischen vierten und verbinde diesen mit dem Scheitel.

Zusatz. Sind die gegebenen Strahlen einander parallel, so wird auch der gesuchte vierte zu diesen parallel sein. — Sind zwei von den gegebenen Strahlen zu einander senkrecht, so findet man den vierten Strahl für den Fall, daß diese zwei konjugierte Strahlen werden sollen, einfacher dadurch, daß man an einen von ihnen nach entgegengesetzter Seite im Scheitel einen Winkel anlegt, gleich dem Winkel, den der dritte Strahl mit diesem macht.

299. *Den Scheitel eines harmonischen Strahlenbüschels zu finden, wenn ein Strahl seiner Lage nach und von jedem andern je ein Punkt gegeben ist.*

Lösung. Ist MN der gegebene Strahl und A, B, C Punkte der drei übrigen Strahlen, so verbinde man zwei dieser Punkte, welche Verbindungslinie den gegebenen Strahl in D schneiden möge. Zu diesem und einem der verbundenen Punkte bestimme man irgend einen konjugierten vierten harmonischen Punkt und verbinde diesen mit dem gegebenen dritten Punkt, dann ist der Durchschnittspunkt mit dem gegebenen Strahl der gesuchte Scheitel.

300. *Zu einem gegebenen Punkte die drei zugehörigen harmonischen Punkte zu konstruieren, wenn drei Gerade gegeben sind, in welchen sie liegen.*

Lösung. Die drei gegebenen Geraden mögen sich (was ja im allgemeinen der Fall ist) in den drei Punkten M , N und P durchschneiden. Verbindet man dann den gegebenen einen Punkt A mit zweien jener Durchschnittspunkte, etwa mit M und N , so erhält man dadurch auf der jedesmal dritten Geraden einen Durchschnittspunkt, hier C und D auf NP und MP . Die Verbindungslinie dieser so gewonnenen Durchschnittspunkte giebt auf einer der Geraden den gesuchten einen Punkt, hier A' auf MN ; verbindet man diesen mit dem gegebenen Punkte, so erhält man auf NP den Punkt B , und auf MP den Punkt B' .

Zusatz. Schneiden die gegebenen Geraden einander in zwei Punkten, d. h. sind zwei von ihnen parallel, so ist die Konstruktion entsprechend zu modifizieren.

301. *In die Linie AB eine Strecke $CC' = m$ so einzulegen, daß B zwischen C und C' liegt, und AB in C und C' harmonisch geteilt wird.*

Lösung. Ist O die Mitte von AB und $OC = x$, so ist $OB^2 = \frac{1}{4}a^2 = x(x + m)$, woraus x entweder nach A. 17, Zus. oder nach folgender, an die sectio aurea erinnernden, Konstruktion gefunden wird. Man mache $BM \perp AB$ und gleich $\frac{1}{2}m$, beschreibe mit MB um M einen Kreis, dann ist, wenn $ODME$ gezogen, $OC = OD = x$.

Zusatz. Ist $m = a$, so ist x das größere Stück der nach der sectio aurea geteilten halben Strecke a .

302. *Die Strecke AB in C und C' harmonisch zu teilen, so daß $AC = BC'$ wird.*

Lösung. Wenn B zwischen C und C' fallen soll, und man bezeichnet AC mit x , AB mit a , so folgt aus der Proportion: $a - x : x = x : x + a$ für x der Wert $x = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, d. h. es ist die halbe Diagonale des Quadrates über a ; wenn aber C und C' beide zwischen A und B liegen sollen, so ergibt sich aus der Proportion $a - 2x : x = x : a$ für x der Wert $x = -a + a\sqrt{2}$, d. h. es ist der Überschufs der Diagonale über die Seite obigen Quadrates.

303. *Mit gegebenem Radius einen Kreis zu konstruieren, der durch einen gegebenen Punkt geht und eine Gerade harmonisch teilt.*

Lösung. Ein Kreis, dessen Diameter AB ist, schneidet jeden Kreis durch C und C' , in welchen AB harmonisch geteilt wird, rechtwinklig. Daher ist, weil der Radius des gesuchten Kreises gegeben ist, das rechtwinklige Dreieck gegeben, dessen Katheten $\frac{1}{2} AB$ und der gegebene Radius sind. Die Hypotenuse dieses Dreiecks ist aber die Entfernung des unbekannten Mittelpunktes von der Mitte von AB . Durch den gegebenen Punkt und den gegebenen Radius hat man für den unbekannten Mittelpunkt einen zweiten Ort.

304. *Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Strecken harmonisch teilt.*

Lösung. Man kann (vergl. vorige Lösung) die Entfernung des gesuchten Mittelpunktes von der Mitte jeder der beiden Strecken bestimmen.

305. *Einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Strecken harmonisch teilt.*

Lösung. Die Aufgabe ist identisch mit A. 239.

306. *Auf einem Durchmesser zwei konjugierte Pole zu bestimmen, daß ihre Entfernungen vom Mittelpunkte ein gegebenes Verhältnis haben.*

Lösung nach A. 86, da auch die mittlere Proportionale dieser Entfernungen gegeben ist.

307. *Die Entfernung des äußeren Poles vom Mittelpunkte soll durch den innern nach der sectio aurea geteilt werden.*

Lösung ebenfalls nach A. 86.

308. *Zu zwei Punkten als konjugierten Polen einen Kreis zu beschreiben, daß die Tangente aus dem äußern Pole dem Radius gleich werde.*

Lösung. Sind M und N die gegebenen Pole und X der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, so ist, wenn der Radius XC heißt: $XC^2 = XM \cdot XN$. Ist die Tangente aus N die Linie NC , so ist $NC^2 = NM \cdot NX$, also muß $XM = MN$ sein. Dadurch ist der Mittelpunkt gefunden. Der Radius ist die Verbindungslinie von X mit dem Durchschnitt des in M errichteten Lotes mit dem über NX als Diameter beschriebenen Halbkreise.

309. *Die Tangente soll gleich dem Durchmesser des Kreises werden.*

Lösung. Es findet sich, daß $XM = \frac{1}{4} MN$ sein muß.

310. *Die Tangente soll eine gegebene Länge haben.*

Lösung. Es ist ein rechtwinkliges Dreieck MCN gegeben, worin NC die gegebene Länge der Tangente ist. Man findet hieraus leicht XM und den Radius XC .

311. *Die Tangente soll gleich XM werden.*

Lösung mit Hilfe der sectio aurea.

312. *Der gesuchte Kreis soll XN halbieren.*

Lösung. Man findet $XM = \frac{1}{3} MN$.

313. *Die Entfernung XN soll durch den gesuchten Kreis nach dem Verhältniß $m : n$ geteilt werden.*

Lösung. Bei gleicher Bezeichnung, wie vorhin, ist $XC^2 = XD^2 = XM \cdot XN$. Da nun $XD : XN = m : n$, so ist

$$\frac{m^2}{n^2} \cdot XQ^2 = XM \cdot XN \text{ oder } XM = \frac{m^2}{n^2} \cdot XN,$$

woraus $XM : MN = m^2 : m^2 - n^2$, was konstruiert werden kann.

314. *Die Entfernung der gegebenen Punkte soll durch den gesuchten Kreis nach der sectio aurea geteilt werden.*

Lösung. Die Endpunkte des auf der Verbindungslinie der gegebenen Punkte liegenden Diameters, von denen der zwischen M und N liegende Punkt P konstruiert werden kann, sind zu diesen Punkten die konjugierten harmonischen Punkte. Ist der andere Endpunkt daher X , so muß sein

$$XM : MP = XN : NP \text{ oder} \\ XM : XN = MP : NP,$$

d. h. die unbekannte Linie XN ist im Punkte M , wie MN in P , nach dem goldenen Schnitt geteilt. Zur Bestimmung von X ist also NM über M bis X so zu verlängern, daß die Verlängerung MX mittlere Proportionale werde zwischen der ganzen entstehenden Linie NX und MN .

315. *A , B und C sind drei der Reihe nach auf einer Geraden liegende Punkte. Um C als Mittelpunkt einen Kreis zu beschreiben, der AB harmonisch teilt.*

Lösung. Schneidet der gesuchte Kreis die AB in Y und auf der Verlängerung in X , so ergibt sich leicht, daß

CX gleich einer von C an einen Kreis durch A und B gezogenen Tangente sein muß.

316. *Zu vier Punkten auf einer Geraden zwei Punkte zu bestimmen, wodurch sowohl die Entfernung der beiden ersten als auch der letzten harmonisch geteilt wird.*

Lösung. Sind X und Y diese beiden Punkte, von denen der erstere zwischen A und B , der andere zwischen C und D liegen möge, und man beschreibt durch A und B , und durch C und D je einen beliebigen Kreis, so werden beide von dem Kreise, dessen Diameter XY ist, rechtwinklig geschnitten. Der Mittelpunkt dieses letztern Kreises wird aber durch die gegebene Gerade und die Potenzlinie der beiden durch A und B , sowie durch C und D konstruierten Kreise bestimmt; als Radius ergibt sich die aus dem gefundenen Mittelpunkte an einen der Kreise gezogene Tangente.

317. *Einen Kreis zu konstruieren, von welchem ein Pol, die zugehörige Polare und der Radius gegeben sind.*

Lösung. Ist M der gegebene Pol und das Lot in N auf MN die gegebene Polare, so ist ein Ort für den gesuchten Mittelpunkt X die Gerade MN . Der gesuchte Kreis schneidet aber den Kreis, dessen Diameter MN ist, rechtwinklig. Ist nun B ein Durchschnitt und A die Mitte von MN , so ergibt das rechtwinklige Dreieck XBA , dessen Katheten gegeben sind, die Größe AX , wodurch der Mittelpunkt X bestimmt ist.

318. *Statt des Radius sei eine Tangente des gesuchten Kreises der Lage nach gegeben.*

Lösung. Es ist ein Kreis zu konstruieren, der einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet, eine gegebene Gerade berührt und für dessen Mittelpunkt eine Gerade als Ort gegeben ist, welcher Mittelpunkt selbst auf folgende Weise bestimmt wird. Schneidet der gesuchte Kreis um X die MN in Y und berührt die gegebene Tangente in U , so ist $XY = XU$. Da nun $XY^2 = XM \cdot XN$ sein muß, so auch $XU^2 = XM \cdot XN$; d. h. zu einem durch M und N beschriebenen Kreise muß XU Tangente sein. Das erreicht man, wenn man in der Mitte C von MN zu MN das Lot errichtet, das die gegebene Gerade in O schneiden möge. Dann ist $OU = OM = ON$. Das Lot in U auf der Geraden bestimmt den Mittelpunkt X . XU ist Radius.

319. *Von zwei Kreisen ist die Potenzlinie, der eine Kreis und der Radius des andern gegeben; diesen zu konstruieren.*

Lösung. Ein Ort für den gesuchten Mittelpunkt ist die auf die Potenzlinie vom Mittelpunkte des gegebenen Kreises aus gezogene Senkrechte. Für einen beliebigen Punkt der Potenzlinie erhält man ferner seine Entfernung vom gesuchten Mittelpunkte als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete der gegebene Radius, und dessen andere Kathete gleich der aus diesem Punkte an den gegebenen Kreis gezogenen Tangente ist.

320. *Statt des Radius soll von dem einen Kreise die Lage des Mittelpunktes gegeben sein.*

Lösung. Der unbekannte Radius ergibt sich durch dasselbe rechtwinklige Dreieck, von welchem jetzt statt der einen Kathete die Hypotenuse bekannt ist.

321. *Einen Kreis zu konstruieren, von welchem ein Punkt der Peripherie, ein Pol und die zugehörige Polare gegeben sind.*

Lösung. Jede durch den Pol gelegte Sehne des gesuchten Kreises wird in diesem Punkte und von der zugehörigen Polare harmonisch geteilt. Man hat daher für die durch M und den gegebenen Punkt P gelegte Sehne, welche den Kreis noch in R und die Polare in Q schneidet, $MP : QP = RM : RQ$. Daraus ist Punkt R und also die Sehne PR zu bestimmen. Das Weitere ist einfach.

322. *Einen Kreis zu konstruieren, von welchem ein Pol und die zugehörige Polare gegeben sind, und welcher einen gegebenen Kreis berühren soll.*

Lösung. Ist M der gegebene Pol und N der Fußpunkt der Polare, und schneidet der gesuchte Kreis um X die MN in Y , und berührt den Kreis um O in Z , so ist $XY^2 = XZ^2 = XM \cdot XN$. Daher schneidet ein Kreis durch M , N und Z den Kreis über MN als Durchmesser unterm Durchmesser, den Kreis um O aber rechtwinklig, da X , Z und O in einer Geraden liegen. Ein Ort für den Mittelpunkt dieses Kreises ist daher (cf. Ort 6 hinter A. 228) der dritte Potenzort der Kreise über MN und um O ; da aber der andere die Mittelsenkrechte auf MN ist, so läßt sich dieser Mittelpunkt bestimmen. Der Durchschnitt dieses Kreises mit Kreis O , oder eine Tangente aus diesem Mittelpunkte an den Kreis um O giebt aber den Be-

rührungspunkt Z , und die verlängerte OZ giebt in MN den gesuchten Mittelpunkt X ; der gesuchte Radius ist XZ .

323. *Zwischen zwei Kreise parallel zu ihrer Centrale eine Gerade von gegebener Grösse zu legen.*

Lösung. Liegt X auf dem Kreise um M , Y auf dem um M , so ziehe man $YC \parallel XM$, wodurch man den Punkt C in der Centrale, und, da $CY = MX$ ist, einen Ort für Y findet.

324. *Durch einen Kreis eine zu einer Geraden senkrechte Sekante so zu ziehen, daß die entstehende Sehne und das äussere Stück bis an die Gerade gleich werden.*

Lösung. Steht die Sekante $XYZ \perp AB$, so daß $XY = YZ$ ist, und man zieht den zu Y gehörigen Diameter YMT , welcher die AB in U schneiden möge, so ist $YU = YT$. Zieht man nun die Tangente UV , so ergibt sich leicht $UM = 3r$.

325. *Auf dem Diameter eines Kreises einen Punkt zu bestimmen, so daß die Tangente aus ihm gleich seiner Entfernung von einer gegebenen Geraden werde.*

Lösung. Die Aufgabe ist identisch mit A. 318.

326 und 327. *Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden liegt, der eine andere Gerade berührt und einen gegebenen Kreis rechtwinklig oder unter einem Durchmesser schneidet.*

Lösung. Die Aufgaben sind identisch mit A. 260 und 261, da sich in beiden Fällen eine zweite Berührende bestimmen läßt. Sind aber die beiden Geraden parallel, so ist der Radius des gesuchten Kreises bekannt, wodurch die Lösung in ähnlicher Weise erhalten wird, wie von A. 317. Ist aber der gegebene Ort für den Mittelpunkt ein Diameter des gegebenen Kreises, so ist die Aufgabe identisch mit A. 318.

328 und 329. *Einen Kreis zu konstruieren, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden liegt, der einen Kreis berührt und einen andern unter einem Durchmesser oder rechtwinklig schneidet.*

Lösung. Diese Aufgaben sind identisch mit A. 264 und 265, da sich in beiden Fällen in bezug auf den gegebenen Ort für den gesuchten Mittelpunkt der Gegenkreis zu dem gegebenen Kreise konstruieren läßt, der von dem gesuchten in gleicher Weise geschnitten wird. Für den Fall, daß der gegebene Ort Diameter des zu schneidenden Kreises ist, ergibt sich die Lösung in ganz ähnlicher Weise wie bei A. 322.

330. *Einen Kreis zu konstruieren, der zwei andere berührt, wenn dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden liegen soll.*

Lösung wird durch einen zum gesuchten konzentrischen Kreis durch den Mittelpunkt eines der Kreise auf eine Aufgabe des Berührungsproblems reduziert.

331. *Einen Kreis zu konstruieren, der zwei andere so berührt, daß die Berührungssehne eine gegebene Länge s erhalte.*

Lösung. Werden die beiden Kreise, von denen der um M größer sein möge, als der um M_1 , in den Punkten X und Y berührt, so trifft die Verbindungslinie XY die Centrale MM_1 in einem Ähnlichkeitspunkte A . Zieht man nun von A die gemeinschaftliche Tangente ABC , so ist

$$AY \cdot (AY + s) = AB \cdot AC,$$

wodurch AY in einfacher Weise zu bestimmen ist.

Anmerkung 1. Werden die beiden Kreise gleichartig berührt, so ist A der äußere, sonst der innere Ähnlichkeitspunkt.

Anmerkung 2. Sind die gegebenen Kreise gleich, so ist die Berührungssehne der Centrale parallel, und der Radius des gesuchten Kreises läßt sich in einfachster Weise durch eine Proportion bestimmen; ein Ort für den Mittelpunkt ist aber die Mittelsenkrechte zur Centrale. Auch kann man mit Hilfe von Loten aus den Berührungspunkten auf die Centrale diese Berührungspunkte unmittelbar bestimmen.

332. *Durch einen Punkt auf der Halbierungslinie eines Winkels zwischen die Schenkel desselben eine Gerade von gegebener Größe zu legen.*

Lösung. Ist durch P auf der Halbierungslinie des Winkels O die Gerade $XPX' = a$ gelegt, und man beschreibt den inneren Berührungskreis des Dreiecks OXX' , sowie den zu XX' gehörigen äußeren Berührungskreis, so liegen die Mittelpunkte O' und O'' dieser Kreise auf der Halbierungslinie OP . Berühren nun diese Kreise den einen Schenkel des Winkels in Y und Y' und man zieht PA senkrecht zu diesem Schenkel, so sind O, A, Y und Y' harmonische Punkte. Denn es ist

$$OY : YA = OO' : r, \text{ und} \\ OY' : Y'A = OO'' : r'',$$

Nun ist ferner $OO' : r_1 = OO'' : r_{11}$, also

$OF : FA = OY' : Y'A$, d. h. O, A, Y und Y' liegen harmonisch.

Da nun $YY' = XX' = a$ bekannt, so ist zur Bestimmung der Berührungspunkte auf die bekannte Strecke OA nur A. 301 anzuwenden. Die an die hierdurch erhaltenen Berührungskreise um O' und O'' gezogene gemeinschaftliche Tangente ist die gesuchte XX' .

Andere Lösung. Beschreibt man um OXX' den Kreis, welcher die verlängerte OP in D schneiden möge, zieht DX' und noch $DE \perp XX'$ und $PF \perp OX'$, so ist $\triangle EDX' \sim POF$, also $DX' : \frac{1}{2}a = OP : OF$, wodurch DX' gegeben. Ferner läßt sich aus der Gleichung $OP \cdot PD = \frac{1}{4}a^2$ auch PD bestimmen, also auch Punkt D , und mittelst des gefundenen DX' auch der Punkt X' .

Zusatz. Liegt der gegebene Punkt auf der Halbierungslinie des Nebenwinkels, und man konstruiert an das Dreieck OXX' die zu den Seiten OX und OX' gehörigen äußeren Berührungskreise und außerdem das Lot PA auf den einen Schenkel, welcher diese Kreise in Y' und Y berührt, so läßt sich wiederum leicht nachweisen, daß die Punkte A, O und Y und Y' harmonische Punkte sind. Da nun YY' gleich XX' ist, indem die Differenz zweier aus einem Punkte der Verlängerung der gemeinschaftlichen inneren Tangente zweier Kreise an diese gezogenen Tangenten der inneren Tangente gleich ist (was sehr einfach zu beweisen), so ist $YY' = a$, und man erhält die weitere Konstruktion ganz ähnlich, wie vorhin.

Anmerkung 1. Soll die Gerade q durch einen Punkt gelegt werden, der nicht auf der Halbierungslinie des Winkels der gegebenen Geraden oder ihres Nebenwinkels liegt, so ist Lösung mit den Hilfsmitteln der Planimetrie nicht möglich.

Anmerkung 2. Die Identität obiger Aufgaben mit A. 22 in des Verfassers „Materialien“ ist leicht erkenntlich. Man wolle dieselbe dort nachsehen.

333. *Einen Kreis zu konstruieren, welcher drei andere Kreise berührt* *).

*) Obwohl die Lösung des Apollonischen Taktionsproblems als bekannt vorausgesetzt wird, so mag doch die Lösung des Hauptproblems

Lösung. Es mögen zunächst einige Begriffe und Lehrsätze, welche zum vollen Verständnis der Lösung unerlässlich sind, hier aufgestellt werden, da dieselben sich nicht in allen Lehrbüchern finden dürften.

1) *Ähnlichkeitsstrahl* zweier Kreise heißt jede Gerade, welche von einem Ähnlichkeitspunkte aus durch diese Kreise gelegt ist. Geht derselbe durch den *äußeren* oder *inneren* Ähnlichkeitspunkt, so heißt derselbe *äußerer* oder *innerer* Ähnlichkeitsstrahl.

2) Die Verbindungslinie der drei äußeren Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise, ebenso die Verbindungslinie zweier inneren mit dem dritten äußeren (nach dem Satze von Monge liegen nämlich die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise und ebenso je zwei innere mit dem dritten äußeren in einer Geraden) sind die *Ähnlichkeitsachsen*, jene die *eine äußere*, diese die *drei inneren* der drei Kreise.

3) **Lehrsatz.** Berührt jeder von zwei Kreisen zwei andere beide von außen oder von innen (oder umschließend), so liegt der äußere Ähnlichkeitspunkt der beiden letzten Kreise auf der Potenzlinie der beiden ersten.

Beweis. Berühren die Kreise um K und K' die Kreise C und C' äußerlich in A und A' , sowie in B und B' , so ist der Durchschnitt P der Verbindung der Berührungspunkte A und A' einerseits, und B und B' andererseits der äußere Ähnlichkeitspunkt der Kreise C und C' . Da nun aber A und A' , ebenso B und B' potenzhaltende Punkte sind, also $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$ ist, so ist auch P ein Punkt der Potenzlinie der Kreise K und K' . — Für den Fall einer inneren Berührung ist der Beweis ebenso einfach.

Zusatz. Findet eine ungleichartige Berührung der Kreise C und C' durch die Kreise K und K' statt, so liegt der innere Ähnlichkeitspunkt der Kreise C und C' auf der Potenzlinie der beiden andern. — **Beweis** einfach.

4) **Lehrsatz.** Berührt ein Kreis zwei andere, so liegen die Berührungspunkte mit dem zum ersten Kreise gehörigen Pole der Chordale der beiden anderen in einer Geraden.

dieser Aufgabengruppe nach Steiner hier eine Stelle finden, um die Fruchtbarkeit der Sätze über Ähnlichkeitspunkt, Ähnlichkeitsaxe, Pol und Polare darzuthun.

Beweis. Wenn der Kreis C die Kreise M und N in A und B berührt, und man zieht in A und B Tangenten an M und N , so schneiden sich diese in O , welcher Punkt auf der Chordale von den Kreisen M und N liegt. Nun ist aber am Kreise C die AB Polare des Punktes O , und da sich alle Polaren der Punkte einer Geraden in dem Pole dieser Geraden schneiden, so muß dieser auf der AB liegen.

Die Verbindung dieser Lehrsätze und Begriffe dürfte die nun folgende

Lösung von Steiner verständlich und durchsichtig machen.

Man bestimme das Potenzcentrum der drei gegebenen Kreise, die vier Ähnlichkeitsaxen und für jeden Kreis den zu diesen Axen gehörigen Pol, deren man im ganzen zwölf erhält. Dann geben die Verbindungslinien des Potenzcentrums mit diesen zwölf Polen durch ihre Durchschnitte mit den drei Kreisen die vierundzwanzig Berührungspunkte der im allgemeinen möglichen acht Berührungskreise. Die Mittelpunkte dieser ergeben sich als Durchschnitte der zu diesen Berührungspunkten gezogenen Radien der drei Kreise.

II. Dreieckskonstruktionsaufgaben.

Vorbemerkung. Die folgenden Dreieckskonstruktionen sind insofern einfacher Art, als sich ihre Lösung auf Grund des gebräuchlichen Systems der Planimetrie bewirken läßt, indem sich die Ecken des gesuchten Dreiecks durch Örter bestimmen lassen, die sich unmittelbar aus den Bedingungen der Aufgabe ergeben. Wo dennoch in einzelnen Fällen die Vermittlung dieser Ortsbestimmung die Kenntnis von planimetrischen Thatsachen erfordert, welche wir nicht glauben voraussetzen zu dürfen, haben wir diese an betreffender Stelle beige-fügt. Ferner sei bemerkt, daß die Aufgaben nicht für sich, sondern mit den vorhergehenden fortlaufend numeriert sind.

334. *Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel und der zugehörigen Höhe und Mittellinie. (Aus A , h_a , m_a .)*

Lösung. Durch die Höhe AD (h_a) und die Mittellinie AE (m_a) ist das Dreieck ADE gegeben, zugleich ist die Seite DE ein Ort für jede der beiden Ecken B und C . Da nun,

wenn man AE über E hinaus um sich selbst bis F verlängert, $ABFC$ ein Parallelogramm wird, weil sich in diesem Viereck die Diagonalen halbieren, so erhält man für eine Ecke B oder C den zweiten Ort in einem Kreisbogen über AF für den Peripheriewinkel $2R - A$.

335. *Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Mittellinie, der zugehörigen winkelhalbierenden Transversale und der Differenz der nicht zugehörigen Winkel.* (Aus $m_a, w_a, B - C$.)

Lösung. Da der Winkel zwischen einer Höhe und einem Winkelhalbierer, welche von derselben Ecke auslaufen, dem halben Unterschiede der beiden andern Winkel gleich ist, so ist $\triangle AFD$, in welchem AF eine Höhe und AD ein Winkelhalbierer ist, gegeben, also auch E , der Fußpunkt der zugehörigen Mittellinie. Nun ist das Lot in E auf FE ein Ort für den Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises, ebenso ist AK , welche mit AD denselben Winkel bildet wie AF , ein Ort für denselben. Derselbe ist also bestimmbar, desgleichen der ganze Kreis, da sich auch der Radius desselben ergibt, durch diesen aber die Punkte B und C .

In den folgenden Aufgaben wird die Konstruktion eines Dreiecks verlangt, von welchem bestimmte Punkte der Lage nach gegeben sind. Dabei bezeichnen A, B, C die Ecken des Dreiecks, K und O die Mittelpunkte des um- und des eingeschriebenen Kreises, r und ϱ deren Radien, H den Höhendurchschnitt, H_a, H_b, H_c die Fußpunkte der Höhen in den Seiten a, b, c ; in entsprechender Weise bezeichnen M_a, M_b, M_c und W_a, W_b, W_c die Fußpunkte der Mittellinien und der winkelhalbierenden Transversalen.

336. *Gegeben die Fußpunkte zweier Höhen, der dritte Winkel ($H_b, H_c, \sphericalangle A$) und die Richtung der dritten Seite.*

Lösung. Der die Richtung der dritten Seite angegebende Winkel φ zwischen BC und H_bH_c ist gleich $\sphericalangle B - \sphericalangle C$. Nun ist durch $\sphericalangle A$ auch $\sphericalangle (B + C)$ gegeben, weshalb man diese einzeln konstruieren kann. Es ist aber $\sphericalangle AH_bH_c = B$ und $\sphericalangle AH_cH_b = C$. Daher ist das Dreieck AH_bH_c zu konstruieren und man erhält dann die Punkte B und C durch Lote in H_b und H_c auf AH_a und AH_c .

337. *Gegeben die Fußpunkte zweier Höhen und einer zugehörigen Mittellinie (H_a, H_b, M_a).*

Lösung. Es ist $M_a H_b = M_a B = M_a C$, wodurch B und C gegeben. A wird durch das Lot in H_a und die Gerade CH_b bestimmt.

338. *Gegeben eine Ecke und die Fußpunkte einer Mittellinie und eines Winkelhalbierers in der Gegenseite (A, M_a, W_a).*

Lösung. Lote in M_a zu $M_a W_a$ und in A zu AW_a bestimmen durch ihren Durchschnittspunkt einen Endpunkt eines Diameters des umgeschriebenen Kreises, welcher durch M_a geht. Derselbe ist ein Ort für K . Nun ist auch $\sphericalangle H_a A W_a$ gegeben, wodurch zugleich, da $K A W_a = H_a A W_a$ ist, ein zweiter Ort für K . Da nun AK der Radius des umgeschriebenen Kreises ist, so ist der Kreis selbst konstruierbar und bestimmt die Punkte B und C in der $M_a W_a$.

339. *Gegeben die Fußpunkte zweier Mittellinien und der dritten Höhe (M_a, M_b, H_c).*

Lösung. Schneidet die Höhe CH_c die Verbindungslinie $M_a M_b$ in D , so ist $H_c D = DC$, also C gegeben. Die Parallele durch H_c zu $M_a M_b$ bestimmt die Punkte A und B .

340. *Gegeben die Fußpunkte zweier Mittellinien und einer zugehörigen Höhe (M_a, M_b, H_a).*

Lösung. Das Lot in H_a auf Seite $H_a M_a$ des unmittelbar gegebenen Dreiecks $H_a M_a M_b$ ist ein Ort für A . Zieht man $M_b D \perp H_a M_a$, so ist $H_a D = DC$, also ist C bestimmt. Ferner bestimmt CM_b im Durchschnitt mit dem Lote in H_a die Ecke A , endlich $M_a B = M_a C$ die Ecke B .

341. *Gegeben die Fußpunkte der drei Mittellinien (M_a, M_b, M_c).*

Lösung durch Parallelen durch jeden der Fußpunkte zu der Verbindungslinie der beiden andern.

342. *Gegeben die Fußpunkte zweier Höhen und einer zugehörigen winkelhalbierenden Transversale (H_a, H_b, W_a).*

Lösung. Unmittelbar ist $\triangle H_a H_b W_a$ gegeben. Wie sich leicht ergibt, ist $\sphericalangle H_b H_a W_a = \sphericalangle A$. Daher Punkt A durch einen Kreisbogen über $H_a H_b$ und das Lot in H_a zu bestimmen. Der $\sphericalangle W_a A H_b (= \sphericalangle W_a A B)$ bestimmt B , die Verlängerung von $A H_b$ aber C .

343. *Gegeben die Fußpunkte der drei Höhen (H_a, H_b, H_c).*

Lösung leicht, wenn man berücksichtigt, daß im Dreieck $H_a H_b H_c$ die Winkel H_a , H_b und H_c durch die Höhen des Dreiecks ABC halbiert werden.

Zusatz. Außer $\triangle ABC$ genügen der Forderung auch noch die Dreiecke ABO , BCO und CAO .

344. Gegeben eine Ecke des Dreiecks, die Fußpunkte der zugehörigen Mittellinie und einer nicht zugehörigen Höhe (A , M_a , H_b).

Lösung. $\triangle AM_a H_b$ ist unmittelbar gegeben; desgleichen ein Ort für B in dem Lote in H_b auf AH_b . Zieht man nun $M_a D \parallel AH_b$, wobei D im Lote in H_b liegt, und macht $DB = H_b D$, so hat man nur noch BM_a zu ziehen und bis in AH_b zu verlängern.

345. Gegeben eine Ecke und die Fußpunkte zweier Mittellinien, von denen eine dieser Ecke gegenüber liegt (A , M_a , M_b).

Lösung. $\triangle AM_a M_b$ ist gegeben, ferner $AB \parallel M_a M_b$ und gleich $2 M_a M_b$. C kann dann leicht bestimmt werden.

346. Gegeben eine Ecke und die Fußpunkte der beiden dieser Ecke gegenüber liegenden Höhen (A , H_b , H_c).

Lösung. $\triangle AH_b H_c$ ist gegeben. Die Lote in H_b und H_c bestimmen die Ecken B und C .

347. Gegeben eine Ecke, der Fußpunkt der zugehörigen Höhe und der Fußpunkt einer andern Höhe (A , H_a , H_c).

Lösung. $\triangle AH_a H_c$ gegeben. Durch das Lot in H_a auf AH_a erhält man B , und durch das Lot in H_c auf AH_c den Punkt C .

348. Gegeben eine Ecke, der Fußpunkt des zugehörigen Winkelhalbierers und der Fußpunkt einer nicht zugehörigen Höhe (A , W_a , H_b).

Lösung. $\triangle AW_a H_b$ ist gegeben. Da nun

$$\sphericalangle H_b A W_a = \sphericalangle W_a A B$$

ist, so ist B leicht durch das Lot in H_b auf AH_b zu bestimmen, da die Richtung von AB durch die Gleichheit obiger Winkel bekannt ist. BW_a giebt dann endlich verlängert den Punkt C .

349. Gegeben eine Ecke und die Fußpunkte der beiden nicht zugehörigen Winkelhalbierer (A , W_b , W_c).

Lösung. Gegeben ist $\triangle AW_b W_c$. Da nun, wenn O der Durchschnitt der beiden Winkelhalbierer ist, deren Fußpunkte gegeben sind, $\sphericalangle W_b O W_c = 1R + \frac{1}{2}A$ ist (denn es ist der

Nebenwinkel desselben $W_b OC = \frac{1}{2}(B + C)$, so ist für O durch einen Kreisbogen über $W_b W_c$ ein Ort gegeben, ein anderer ist die Halbierungslinie des Winkels A . Daher ist O bestimmt, und $W_b O$ und $W_c O$ bestimmen in den Seiten AW_c und AW_b die Punkte B und C .

350. *Gegeben der Höhendurchschnitt und die Fußpunkte zweier Höhen (H, H_b, H_c).*

Lösung. Lote in H_b und H_c auf HH_b und HH_c bestimmen die Ecke A ; die Verlängerungen von $H_b H$ und $H_c H$ geben die Punkte B und C .

351. *Gegeben der Durchschnittspunkt der Höhen und die Fußpunkte je einer Höhe und einer Mittellinie auf zwei verschiedenen Seiten (H, H_b, M_a).*

Lösung. Durch M_a ist zwischen die Schenkel des gegebenen rechten Winkels BH_bC eine Gerade zu legen, welche in M_a halbiert wird. Es ist aber $M_a H_b = M_a B = M_a C$. Ecke A wird durch das Lot HH_a auf BC bestimmt.

352. *Gegeben der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, und die Fußpunkte einer Höhe und eines Winkelhalbierers auf derselben Seite (O, H_a, W_a).*

Lösung. Durch OH_aW_a ist der Radius des inneren Berührungskreises gegeben, der also konstruiert werden kann. Ecke A ergibt sich leicht durch die beiden Örter $W_a O$ und das Lot in H_a auf $H_a W_a$. Tangenten aus A bestimmen endlich B und C .

353. *Gegeben der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, eine Ecke und der Fußpunkt der zu dieser Ecke gehörigen Höhe (O, A, H_a).*

Lösung. Die Lage von BC und der eingeschriebene Kreis sind durch das unmittelbar gegebene Dreieck $OA H_a$ leicht zu bestimmen, so daß man auch B und C leicht bestimmen kann.

354. *Gegeben der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises, eine Ecke und der dieser Ecke entsprechende Fußpunkt eines Winkelhalbierers (K, A, W_a).*

Lösung. Das Lot in A auf AK bestimmt in dem durch den Radius AK und den Mittelpunkt K gegebenen umgeschriebenen Kreise den Endpunkt E des Diameters EKD . Der Durchschnitt F eines Halbkreises über KW_a mit diesem Dia-

meter ist die Mitte von BC , daher giebt $W_a F$ die Ecken B und C .

355. *Gegeben der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, eine Ecke und der Fußpunkt eines nicht zu der Ecke gehörenden Winkelhalbierers (O, A, W_b).*

Lösung. $\triangle AOW_b$ ist unmittelbar gegeben; dadurch auch der Radius des eingeschriebenen Kreises, dieser also auch selbst, da sein Mittelpunkt gegeben ist. Punkt B ist der Durchschnitt einer Tangente von A und der Linie $W_b O$, C der Durchschnitt einer Tangente von B und der Linie AW_b .

356. *Gegeben eine Ecke, der Durchschnitt der Höhen und der Fußpunkt der der Ecke entsprechenden Mittellinie (A, H, M_a).*

Lösung. Gegeben $\triangle AHM_a$. Das Lot von M_a auf AH bestimmt die Lage der Seite BC . Nun ist der obere Höhenabschnitt AH gleich der doppelten Mittelsenkrechten $M_a K$. Dadurch ist aber K und durch den Radius AK auch der umgeschriebene Kreis selbst gegeben, der B und C bestimmt.

Zusatz. Dafs der obere Höhenabschnitt AH gleich der doppelten Mittelsenkrechten KM_a ist, wird folgendermaßen bewiesen. Verlängert man die Mittelsenkrechte KM_a über M_a hinaus bis E um sich selbst, zieht CH_c und $M_a M_c$, verlängert ebenfalls KM_c um sich selbst bis L und verbindet L mit E , so ist $\triangle CHA \cong LKE$. Denn es ist zunächst $M_a M_c = \frac{1}{2} LE$ und ebenso $= \frac{1}{2} AC$, also $EL = AC$. Ferner ist $LE \parallel AC$, weil beide parallel zu $M_a M_c$, ferner $KL \parallel CH$, weil beide senkrecht auf AB , woraus folgt, dafs $\sphericalangle KLE = HCA$ ist. Endlich ist $\sphericalangle CHA = KAH$ (N Durchschnitt der Höhe AH_a und KL) $= NKE$.

357. *Gegeben eine Ecke, der Höhendurchschnitt und der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises (A, H, K).*

Lösung. $\triangle AHK$ ist gegeben, desgleichen die Richtung von BC . Da ferner $KM_a = \frac{1}{2} AH$ ist (s. vor. Lösung), so ist auch BC der Lage nach gegeben. Der Kreis um K mit KA bestimmt endlich die Ecken B und C .

358. *Gegeben eine Ecke und die Mittelpunkte der beiden zugehörigen Kreise (A, K, O).*

Lösung. Durch AK ist der umgeschriebene Kreis gegeben und durch AO in diesem Kreise der Punkt D , welcher von B, C und O gleichweit entfernt ist. Die Punkte B und

C sind also, da DO bekannt, in einfachster Weise zu bestimmen.

Zusatz. Die planimetrische Thatsache, daß $DO = DB = DC$ ist, ergibt sich so. Es ist $\sphericalangle BOD = \frac{1}{2}(A + B)$. Nun ist aber $\sphericalangle OBD = \frac{1}{2}B \sphericalangle DBC$, letzterer aber $= \frac{1}{2}A$, weil mit $\frac{1}{2}A$ auf demselben Bogen stehend.

359. *Gegeben eine Ecke, der Fußpunkt des zugehörigen Winkelhalbierers und der Höhendurchschnitt (A, W_a, H).*

Lösung. Die Seite BC ist eine von W_a auf AH gezogene Senkrechte. Da der nach A gezogene Radius KA mit AW_a einen Winkel bildet, welcher gleich HAW_a ist, so ist dadurch ein Ort für K gegeben, ein anderer dadurch, daß $KM_a = \frac{1}{2}AH$ ist. Der so bestimmte Kreis bestimmt die Ecken B und C .

360. *Gegeben der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises, eine Ecke, und der Fußpunkt eines nicht zu der Ecke gehörenden Winkelhalbierers (K, A, W_b).*

Lösung. Der Kreis um K ist gegeben, ebenso durch Verlängerung von AW_b die Ecke C . Durch den Kreis und die Sehne AC ist aber der Winkel ABC gegeben. Daher giebt ein Kreisbogen über AW_b oder CW_b mit dem Peripheriewinkel $\frac{1}{2}B$ den Punkt B .

361. *Gegeben der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, eine Ecke und der Fußpunkt einer nicht zugehörigen Mittellinie (O, A, M_b).*

Lösung. Durch das Dreieck $AO M_b$ ist ϱ gegeben, also auch der Kreis um O ; da $M_b C = A M_b$, so ist auch C bestimmt; B endlich ist der Durchschnitt zweier Tangenten von A und C .

362. *Gegeben der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises und die Fußpunkte zweier Mittellinien (K, M_a, M_b).*

Lösung. Gegeben ist $\triangle K M_a M_b$. Die Lote in M_a und M_b auf $K M_a$ und $K M_b$ geben den Punkt C . Nun ist

$$M_a B = M_a C \text{ und } M_b A = M_b C.$$

363. *Gegeben der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises, eine Ecke und der Fußpunkt einer Höhe aus einer anderen Ecke (K, A, H_b).*

Lösung. Der Kreis um K ist durch den Radius KA gegeben; AH_b giebt C , und das Lot in H_b zu AH_b die Ecke B .

364. *Gegeben eine Ecke und die Fußpunkte der zugehörigen Mittellinie und Winkelhalbierers (A, M_a, W_a).*

Lösung. Die Verbindungslinie AW_a und das Lot in A auf AW_a durchschneiden das Lot in M_a auf M_aW_a in zwei Punkten D und E , welche diametrale Gegenpunkte des umgeschriebenen Kreises sind, und durch welchen man die Punkte B und C bestimmen kann.

365. *Gegeben der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises, eine Ecke und der Fußpunkt der Höhe aus dieser Ecke (K, A, H_a).*

Lösung. Ein Lot in H_a zu AH_a giebt in dem gegebenen Kreise um K die Punkte B und C .

366. *Gegeben der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises und die Fußpunkte einer Mittellinie und des zugehörigen Winkelhalbierers (O, M_a, W_a).*

Lösung. Gegeben ist $\triangle OM_aW_a$ und dadurch auch der Kreis um O . Durch M_aW_a ist ein Ort für B und C gegeben. OW_a und das Lot in M_a auf BC schneiden sich im Punkte D , welcher von O, B und C gleichweit entfernt ist. Bestimmung von A durch eine Tangente an den In-Kreis aus B oder C .

367. *Gegeben der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises, eine Ecke und der Fußpunkt einer nicht entsprechenden winkelhalbierenden Transversale (K, A, W_b).*

Lösung. $\triangle KAW_b$ ist gegeben; dadurch auch der umgeschriebene Kreis, der ein Ort für B ist. In seiner Peripherie ergibt sich C durch Verlängerung von AW_b und durch das hierdurch bekannte Verhältnis $AW_b : CW_b$ ein zweiter Ort für B .

368. *Gegeben die Fußpunkte zweier Höhen und einer entsprechenden winkelhalbierenden Transversale (H_a, H_b, W_a).*

Lösung. $\sphericalangle H_bH_aW_a = \sphericalangle A$, wodurch ein Ort für A , nämlich ein Kreisbogen über H_aH_b . In diesem Kreisbogen bestimmt W_aH_a den Punkt B , da H_a, H_b, A und B auf derselben Kreisperipherie liegen. Das Lot in H_b auf BH_b giebt den Punkt A und C .

369. *Gegeben der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises, der Fußpunkt einer Höhe und einer zu einer anderen Seite gehörenden Mittellinie (K, H_a, M_b).*

Lösung. Es ist $M_b H_a = M_b A = M_b C$, also sind die Punkte A und C bestimmt, da die Lage von AC , nämlich senkrecht zu $M_b K$ in M_b bekannt ist. Der Radius KA oder KC bestimmt A .

370. *Gegeben der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises, der Höhendurchschnitt und der Fußpunkt einer Mittellinie (K, H, M_a).*

Lösung. Gegeben ist die Richtung von BC , nämlich senkrecht in M_a zu $M_a K$; ferner die Lage von $A H H_a$, nämlich senkrecht auf BC . Da nun $HA = 2 K M_a$ ist, so ist A selbst gegeben und durch den nun bekannten Radius AK auch die Ecken B und C .

371. *Dieselbe Aufgabe mit der Änderung, daß statt des Fußpunktes einer Mittellinie der einer Höhe gegeben sein soll (K, H, H_a).*

Lösung. Eine Senkrechte in H_a auf $H H_a$ giebt die Lage von BC . Dadurch erhält man $K M_a$, hierdurch aber den Punkt A und den Radius AK , wodurch sich B und C bestimmen lassen.

Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind

372. *eine Seite und die zugehörige Höhe und eine nicht zugehörige Mittellinie (a, h_a, m_b).*

Lösung. $\triangle ADE$, an welchem $BD = m_b$, $DE = \frac{1}{2} h_a$ ist, ist unmittelbar gegeben, und daraus leicht $\triangle ABC$ abzuleiten.

373. *die Halbierungslinie eines Winkels, die zugehörige Höhe und der Radius des umgeschriebenen Kreises (w_a, h_a, r).*

Lösung. $\triangle ADE$, worin $AD = h_a$, $AE = w_a$ ist, ist unmittelbar gegeben. Durch $\sphericalangle DAE = \sphericalangle KAE$ erhält man einen Ort für K , und $AK = r$ gegeben, K selbst. Der Kreis bestimmt in DE die Punkte B und C .

374. *ein Winkelhalbierer und seine Entfernungen von den beiden anderen Ecken.*

1. **Lösung.** Sind E und F die Fußpunkte der Lote aus B und C auf die Winkelhalbierende AD , so ist

$$AE : AF = m : n;$$

desgleichen $ED : DF = m : n$, also $AE : ED = AF : DF$, d. h.

AD ist in E und F nach dem Verhältnis $m : n$ harmonisch geteilt.

2. Lösung. Zieht man $AL \perp AD$ und BH und $CG \parallel AD$, so sind G, A, H gegeben und L hierzu vierter harmonischer Punkt, konjugiert zu A .

375. Die Halbierungslinie eines Außenwinkels und ihre Entfernungen von den beiden andern Ecken.

Lösung ist der zweiten Lösung der vorigen Aufgabe wörtlich nachzubilden, wenn analog bezeichnet wird.

376. Über einer gegebenen Strecke AB ein Dreieck zu konstruieren, so daß $AB^2 : AC^2 : BC^2 = m : n : p$ ist.

Lösung. Aus $AB^2 : AC^2 = m : n$ folgt

$$AB^2 : AC^2 = m^2 : mn$$

und daraus $AB : AC = m : \sqrt{mn}$, woraus sich AC als vierte Proportionale ergibt. In ähnlicher Weise findet man BC .

377. Gegeben eine Seite, die zugehörige Höhe und die Bedingung, daß der untere Höhenabschnitt $\frac{1}{n}$ der ganzen Höhe betragen soll.

Lösung. Es ist $CH = \frac{n-1}{n} h_a$; also CH gegeben; daher auch der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises und durch den Kreis auch C .

378. eine Seite, eine nicht zugehörige Höhe und die dritte Mittellinie (a, h_b, m_c).

Lösung. $\triangle BDC$ gegeben, worin $BD = h_b$ und $BC = a$ ist. Ein Ort für die Mitte E der Seite AB ist der Kreis um C mit m_c als Radius; ein zweiter Ort ist eine Parallele zu DC in einem Abstände $= \frac{1}{2} h_b$.

379. eine Seite, der gegenüber liegende Winkel und das Verhältnis der beiden andern Seiten ($a, A, b : c$).

Lösung. Für die Ecke A ist durch den Winkel A und das Verhältnis $b : c$ je ein Ort gegeben, da die Seite a bekannt ist.

380. eine Seite, das Verhältnis der beiden andern Seiten und der Radius des umgeschriebenen Kreises ($a, b : c, r$).

Lösung. Durch a und r ist $\sphericalangle A$ gegeben, daher A. 379.

381. *das Verhältnis zweier Seiten, der eingeschlossene Winkel, und der Radius des umgeschriebenen Kreises ($b : c, A, r$).*

Lösung ist wiederum einfach auf A. 379 zu reduzieren.

382. *das Verhältnis zweier Seiten, ein nicht eingeschlossener Winkel und die dritte Seite ($b : c, B, a$).*

Lösung sehr einfach.

383. *eine Seite, die zugehörige Höhe und das Verhältnis der andern Seiten ($a, h_a, b : c$).*

Lösung einfach.

384. *das Verhältnis zweier Seiten, eine zugehörige Höhe und die dritte Seite ($b : c, h_b, a$).*

Lösung leicht.

385. *das Verhältnis zweier Seiten, die dritte Seite und die hierzu gehörende Mittellinie ($b : c, a, m_a$).*

Lösung. Die Mittellinie gibt für A den zweiten Ort.

386. *das Verhältnis zweier Seiten, die Halbierungslinie des eingeschlossenen Winkels und die dritte Seite ($b : c, w_a, a$).*

Lösung. Zu C, W_a und B bestimme man den vierten, W_a konjugierten harmonischen Punkt D . Der Punkt W_a ist nämlich in BC durch das Verhältnis $b : c$ konstruierbar. Dann giebt ein Kreis über $W_a D$ als Diameter und ein Kreis um W_a mit w_a als Durchschnitt den Punkt A .

387. *das Verhältnis zweier Seiten, eine zugehörige und die nicht zugehörige Mittellinie ($b : c, m_b, m_a$).*

Lösung. Ist $b : c = m : n$, so folgt $\frac{1}{2}b : c = \frac{1}{2}m : n$, woraus sich ein Ort für A über der Mittellinie CD ergibt. Ist O der Durchschnittspunkt der beiden Mittellinien, so ist $DO = \frac{1}{3}m_b$, also O zu bestimmen. Nun ist $OA = \frac{2}{3}m_a$, wodurch ein zweiter Ort für A gegeben ist. Das Weitere ist einfach.

388. *das Verhältnis zweier Seiten und ihre Projektionen auf die dritte.*

Lösung. Die Summe der Projektionen ist die dritte Seite. Dann sind für A zwei Örter gegeben, ein Kreis und ein Lot.

389. *die Halbierungslinie eines Winkels und die Abschnitte, in welche sie die gegenüber liegende Seite teilt.*

Lösung. Die Abschnitte geben die eine Seite und das Verhältniß der beiden andern. Also A. 386.

390. *der Winkel, welche eine Winkelhalbierungslinie mit der Gegenseite macht und die Stücke, in welche sie diese zerteilt.*

Lösung. Durch die Stücke ist die eine Seite gegeben und für die dritte Ecke erhält man leicht zwei Örter.

391. *die Stücke einer Seite, gebildet von der Halbierungslinie des Gegenwinkels, und die Projektion der Halbierungslinie auf die geteilte Seite.*

Lösung. Die eine Seite ist durch ihre Stücke gegeben. Die dritte Ecke ergibt sich auch hier leicht durch zwei Örter.

392. *das Verhältniß zweier Seiten, das Verhältniß der Halbierungslinie des eingeschlossenen Winkels zu der zugehörigen Höhe und die dritte Seite ($b : c$, $w_a : h_a$, a).*

Lösung. In der gegebenen Seite a (oder BC) läßt sich durch das bekannte Verhältniß $b : c$ der Fußpunkt D des Winkelhalbierers w_a bestimmen. Beschreibt man nun ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck DEF , in welchem die Hypotenuse DF zur Kathete FE sich verhalte wie $w_a : h_a$, so ist DF ein Ort für A . Ein anderer ergibt sich durch das Verhältniß $b : c$.

393. *das Verhältniß zweier Seiten, das Verhältniß der Halbierungslinie des eingeschlossenen Winkels zu ihrer Projektion auf die dritte Seite und diese dritte Seite.*

Lösung der vorigen ganz analog.

394. *das Verhältniß der Halbierungslinie eines Winkels zu ihrer Projektion auf die gegenüber liegende Seite, und die Abschnitte, worin diese Seite durch den Winkelhalbierer geteilt wird.*

Lösung ist leicht auf A. 392 zu reduzieren.

395. *eine Seite, das Verhältniß der nicht zugehörigen Mittellinien und der Winkel dieser Mittellinien.*

Lösung ebenfalls leicht auf A. 392 zu reduzieren, da die oberen Abschnitte der Mittellinien dasselbe Verhältniß haben wie die ganzen.

396. *eine Seite, die zugehörige Höhe und das Verhältniß der nicht zugehörigen Mittellinien (a , h_a , $m_b : m_c$).*

Lösung. Ist S der Durchschnitt der Mittellinien, so ist $\triangle BCS$ leicht zu konstruieren und daraus ABC abzuleiten.

397. eine Seite, die zugehörige Mittellinie und das Verhältnis der beiden andern ($a, m_a, m_b : m_c$).

Lösung. $\triangle BCS$ leicht zu konstruieren aus $BC = a$, $SD = \frac{1}{2}m_a$ und $BS : CS = m_b : m_c$.

398. eine Seite, der Gegenwinkel und das Verhältnis der nicht zugehörigen Höhen ($a, A, h_b : h_c$).

Lösung. Das Verhältnis $h_b : h_c = c : b$, also A. 379.

399. eine Seite, das Verhältnis der nicht zugehörigen Höhen und der Radius des umgeschriebenen Kreises ($a, h_b : h_c, r$).

Lösung. Da durch a und r auch $\sphericalangle A$ gegeben, so ist diese Aufgabe nicht verschieden von A. 398.

400. ein Winkel, das Verhältnis der nicht zugehörigen Höhen und der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises ($\sphericalangle A, h_b : h_c$ und r).

Lösung auf A. 398 zu reduzieren, da sich die Seite a durch $\sphericalangle A$ und r bestimmen läßt.

401. eine Seite, das Verhältnis der nicht zugehörigen Höhen und ein an der gegebenen Seite anliegender Winkel ($a, h_b : h_c, B$).

Lösung. Da $h_b : h_c = c : b$, so erhält man hieraus einen Ort für A , den andern durch $\sphericalangle B$.

402. eine Seite, die zugehörige Höhe und das Verhältnis der andern Höhen ($a, h_a, h_b : h_c$).

Lösung. Es ergeben sich leicht zwei Örter für A ; der eine aus $h_b : h_c = c : b$, der andere aus h_a .

403. eine Seite, die zugehörige Mittellinie und das Verhältnis der nicht zugehörigen Höhen ($a, m_a, h_b : h_c$).

Lösung leicht durch zwei Örter für A .

404. eine Seite, der Winkel zwischen ihr und der Halbierungslinie des Gegenwinkels und das Verhältnis der nicht zugehörigen Höhen.

Lösung wiederum leicht, da sich in einfachster Weise zwei Örter für A bestimmen lassen.

405. eine Seite, eine nicht zugehörige Mittellinie und das Verhältnis der nicht zugehörigen Höhen ($a, m_b, h_b : h_c$).

Lösung. Für die Mitte D der Seite AC lassen sich einfach zwei Örter bestimmen. Ist nämlich G die Mitte von BC , so ist $GD : DC = h_b : h_c$ und DB bekannt.

406. eine Seite, der gegenüber liegende Winkel und das Verhältnis der nicht zugehörigen Mittellinien ($a, A, m_b : m_c$).

Lösung. Durch die Seite a und den Winkel ist als Ort für den Punkt A ein Kreisbogen gegeben; ebenso ist durch das Verhältnis $m_b : m_c$ ein Ort für S , den Durchschnitt der beiden Mittellinien, gegeben. Ein gemeinschaftlicher Ort für S und A ist eine von der Mitte D der Seite BC (oder a) so nach dem ersten Orte (für A) gezogene Gerade, daß sie im Orte für S nach dem Verhältnis $1 : 3$ geteilt wird. Hierzu vergleiche A. 118 und Zusatz.

407. *eine Seite, das Verhältnis der nicht zugehörigen Höhen und der nicht zugehörigen Mittellinien ($a, h_b : h_c, m_b : m_c$).*

Lösung. Nachdem man aus $h_b : h_c = c : b$ und aus $m_b : m_c$ je einen Ort für A und S (s. vorige Aufgabe) abgeleitet hat, ist die Vollendung der Lösung, wie vorhin.

408. *die Summe zweier Seiten und die zu einer gehörige Höhe und Mittellinie ($b + c, h_b, m_b$).*

Lösung. Ist BG die Höhe h_b und BD die Mittellinie m_b , so ist $\triangle BGD$ unmittelbar gegeben. Macht man nun auf DG nach der einen Seite DH , nach der andern DJ beide gleich $\frac{1}{2}(b + c)$, so ist auch $\triangle BHJ$ gegeben und $AJ = \frac{1}{2}c$, denn $DJ = \frac{1}{2}(b + c)$ und $DA = \frac{1}{2}b$. Es ist daher $AJ : AB = 1 : 2$, woraus sich für A in dem Dreieck BJA ein Ort ergibt. Da der andere Ort HJ ist, so ergibt sich A selbst, und aus $DA = DC$ auch C .

409. *die Differenz zweier Seiten und die zu einer gehörige Höhe und Mittellinie ($b - c, h_b, m_b$).*

Lösung. Ist E die Mitte der Seite b des Dreiecks ABC und man schneidet von E aus nach beiden Seiten $EF = EG = \frac{1}{2}(b - c)$ ab, so ist $\triangle FBG$ aus der Grundlinie $FG = b - c$ und der Mittellinie BE und Höhe $BD = h_b$ zu konstruieren. Nun ist $AG = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}(b - c) = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}AB$, woraus sich für A im Dreieck GBA ein Ort ergibt, dessen Durchschnitt mit FG den Punkt A selbst ergibt. Da nun $FC = GA$, so ist auch C bestimmt.

410. *die Summe zweier Seiten, eine zugehörige Höhe und die nicht zugehörige Mittellinie ($b + c, h_b, m_a$).*

Lösung. Macht man $AEF = 2AE = 2m_a$, zieht FBG so, daß $BG = c$ ist, so ist $\triangle AFG$ gegeben, worin $FG = b + c$, $AF = 2m_a$ und $BD = h_b$ vorkommen. B wird bestimmt durch ein Lot zu AG in dessen Mitte, C durch $BE = EC$.

411. *die Differenz zweier Seiten, eine zugehörige Höhe und die nicht zugehörige Mittellinie ($b - c, h_b, m_a$).*

Lösung. Wenn man wiederum $AEF = 2m_a$ gemacht und auf FB von B aus $BG = BA$ abgetragen hat, so ist das Dreieck AFG in gleicher Weise, wie vorhin, konstruierbar und aus ihm in gleicher Weise ABC abzuleiten.

412. *zwei Seiten und das Verhältniß der dritten Seite zur zugehörigen Höhe ($b, c, a : h_a$).*

Lösung. Macht man $BE \perp BA$ und $CE \perp CB$, so ist $\triangle CBE \sim ABD$, woraus sich die Länge BE ergibt. Ein Halbkreis über BE als Diameter und ein Kreis um A mit dem Radius $AC = b$ geben den Punkt C .

413. *eine Seite, die zugehörige Mittellinie und das Verhältniß einer andern Seite zu ihrer Höhe ($a, m_a, c : h_c$).*

Lösung. In ADB , in welchem AD die gegebene Mittellinie m_a ist, ist die Höhe $DF = \frac{1}{2}h_c$. Das Dreieck ist also nach A. 412 zu konstruieren, da von demselben die beiden Seiten $AD = m_a$, $DB = \frac{1}{2}a$ und das Verhältniß $DF : AB = \frac{1}{2}h_c : c$ bekannt ist.

414. *eine Seite, der Gegenwinkel, und das Verhältniß einer andern Seite zu ihrer Höhe ($a, A, c : h_c$).*

Lösung. Macht man $BE \perp BC$ und $AE \perp AB$, so ist $\triangle ABE \sim BCD$; daher $CB : BE = h_c : c$, also ist BE bekannt. Ein Halbkreis über BE als Diameter und ein Bogen über BC mit dem Peripheriewinkel $\sphericalangle A$ sind je ein Ort für A .

415. *eine Seite, die zugehörige Höhe und das Verhältniß einer andern Seite zu ihrer Höhe ($a, h_a, c : h_c$).*

Lösung wie bei A. 414, nur wird der zweite Ort für A durch das Lot h_a bestimmt.

Anmerkung. Die Lösung bleibt dieselbe, wenn statt h_a etwa m_a gegeben ist, durch welche dann der zweite Ort für A bestimmt wird.

416. *Eine Seite, die Höhe zu einer andern Seite und das Verhältniß der dritten Seite zu ihrer Höhe ($a, h_b, c : h_c$).*

Lösung. Macht man $BF \perp a$, und $AF \perp c$, so wird $\triangle ABF \sim BCE$, woraus sich BF konstruieren läßt. Für A ergeben sich dann leicht zwei Örter, der eine als Halbkreis über BF als Diameter, der andere als Tangente von C an den um B mit h_b beschriebenen Kreis.

Zusatz. In A. 414 kann auch statt a oder A der Radius r gegeben sein, ohne daß die Lösung sich änderte, da jedesmal A oder a bestimmt werden kann.

417. *eine Seite, die zu einer andern Seite gehörige Mittellinie und das Verhältniß dieser andern Seite zu ihrer Höhe ($b, m_a, a : h_a$).*

Lösung. Verlängert man die Mittellinie m_a oder AD über D hinaus um sich selbst bis F , so ist, um $\triangle BDF$ zu erhalten, in bezug auf dieses Dreieck A. 412 zu lösen, da $BF = b$, $DF = m_a$ und Lot FG (auf BD) : $BD = h_a : \frac{1}{2}a$ ist.

418. *eine Seite, das Verhältniß einer andern zu der zugehörigen Höhe und die zur dritten Seite gehörende Mittellinie ($a, b : h_b, m_c$).*

Lösung. Verlängert man die Mittellinie m_c oder CD über CD über D bis F , so daß $DF = m_c$, so ist für $\triangle CFB$ oder CFA wiederum A. 412 zu lösen, da BC (oder AF) $= a$, $CF = 2m_c$ ist und das Verhältniß des Lotes von C (oder F) auf FB (oder AC) das gegebene $h_b : b$ ist.

419. *eine Seite, das Verhältniß der beiden andern Seiten und eine zu einer dieser Seiten gehörende Mittellinie ($a, b : c, m_b$).*

Lösung. Durch das Verhältniß $b : c$ und die gegebene Seite a ist ein Ort für A gegeben; ebenso durch m_b ein Ort für E , die Mitte von AC . Man hat nun von C aus bis in den ersten Ort eine Gerade zu legen, welche durch den zweiten Ort halbiert wird, wozu A. 118 und Zusatz zu vergleichen.

Zusatz. Auch kann man, wie bei A. 405, verfahren.

420. *das Verhältniß zweier Seiten und der zwei zugehörigen Mittellinien und die dritte Mittellinie ($b : c, m_b : m_c, m_a$).*

Lösung. Ist D die Mitte von a , E von b und F von c , so ist $ED = \frac{1}{2}c$, und $FD = \frac{1}{2}b$. Man kann je einen Ort für E und F aus $AE : ED = b : c$ und $FD : FA = b : c$ bestimmen, Kreisbogen, deren Mittelpunkte auf AD liegen, welche gegeben ist. Nun halbiert EF die Mittellinie AD in G und wird selbst in G halbiert. Es ist also zur Bestimmung der Punkte E und F nur nötig, durch den bekannten Punkt G zwischen die beiden Peripherieen, welche Örter für diese Punkte sind, eine Gerade zu legen, welche in G halbiert wird. Dann erhält man zunächst $\triangle FED$ und durch die Parallele durch D zu EF das Dreieck ABC .

Zur Konstruktion. Man verbindet G mit dem einen Mittelpunkte, verlängert diese Verbindungslinie um sich selbst, dann ist der Durchschnitt eines um den Endpunkt der Verlängerung mit dem Radius des ersten Kreises beschriebenen Kreises mit dem zweiten Kreise Punkt F oder E .

421. *eine Ecke, der Höhendurchschnitt und der Fußpunkt einer zu einer andern Ecke gehörenden Mittellinie (A, H, M_c).*

Lösung. $\triangle AHM_c$ ist gegeben. Zieht man $HD \perp AM_c$ und verlängert dies Lot um sich selbst bis E , so ist E gegeben, da $HD = DE$ ist, und AE ist Sehne im umgeschriebenen Kreise. Daraus aber ergibt sich ein Ort für K , ein anderer aber ist das Lot in M_c auf AM_c . Der Mittelpunkt K ist also bestimmbar. Da $AM_c = BM_c$ ist, so ist auch B gegeben und das Lot von B aus auf AH giebt die Lage der Seite BC . Die dritte Ecke aber wird durch den Kreis um K mit dem Radius KA bestimmt.

Zusatz. Dafs aber die Verlängerung einer Dreieckshöhe über ihren Fußpunkt bis in den dem Dreiecke umgeschriebenen Kreis gleich dem untern Höhenabschnitte ist, ergibt sich leicht auf folgende Weise. Ist AD die Höhe und DA' ihre Verlängerung, so ist, wenn $KF \perp AA'$ ist, $FH + HA = FD + DA'$. Nun ist, wie im 'Zus. zu A. 356 gezeigt ist, $FD = KM_a = \frac{1}{2}AH$; also $FH + \frac{1}{2}HA = DA'$, d. h. $HD = DA'$.

422. *die Durchschnittspunkte der über ihre Fußpunkte verlängerten Höhen mit der Peripherie des umgeschriebenen Kreises.*

Lösung. Sind A', B', C' diese Durchschnittspunkte, so läfst sich leicht nachweisen, dafs in dem Dreieck $A'B'C'$ die Winkel von den Höhen des gesuchten Dreiecks halbiert werden. Es ist nämlich $\sphericalangle BB'A' = BCA'$; $\sphericalangle BB'C' = BCC'$; nun sind aber $\sphericalangle BCA'$ und $\sphericalangle BCC'$ einander gleich, da $HD = DA'$ und $CD \perp HA'$, also auch $BB'A' = BB'C'$. (Oder: Die Seiten $A'B'$, $B'C'$ und $C'A'$ sind den Seiten des sog. Höhendreiecks parallel, von welchem bekannt ist, dafs seine Winkel durch die Höhen des ursprünglichen Dreiecks halbiert werden.) Da nun der um $\triangle A'B'C'$ konstruierbare Kreis derselbe ist, wie der Kreis um das gesuchte $\triangle ABC$, so lassen sich hiernach die Punkte A, B und C einfach durch Halbierung der Winkel A', B' und C' bestimmen.

423. *eine Seite, der untere Abschnitt der zugehörigen Höhe und der Radius des umgeschriebenen Kreises.*

Lösung. In den gegebenen Kreis läßt sich zunächst die Seite a hineinlegen. Da nun die Verlängerung der Höhe h_a über ihren Fußpunkt H_a bis in diesen Kreis, bis in D , dem untern Höhenabschnitt HH_a gleich ist, so kann man D und dadurch A bestimmen.

424. *der Radius des umgeschriebenen Kreises, eine Mittellinie und der obere Abschnitt der zugehörigen Höhe (r, m_a, AH).*

Lösung. Ist D die Mitte von AH , so ist $\triangle ADM_a$ gegeben, da $DM_a = r$ ist, was daraus folgt, daß $KM_a \perp AD$, und $KA = r$ ist. Ferner ist BC der Lage nach gegeben, da es senkrecht zu AD steht und durch M_a geht. Macht man nun $M_aK \perp BC$ und $= AD$, so ist K der Mittelpunkt und KA der Radius des umgeschriebenen Kreises, welcher B und C bestimmt.

425. *eine Seite, der obere Abschnitt einer nicht zugehörigen Höhe und der Radius des umgeschriebenen Kreises (b, AH, r).*

Lösung. Unmittelbar gegeben ist der Kreis und in ihm die Sehne $AC = b$. Die Höhe h_b schneidet nun verlängert den Kreis in D so, daß $AD = AH$ ist. D läßt sich also konstruieren; das Lot aus D auf AC bestimmt endlich die Ecke B .

426. *der umgeschriebene Kreis, eine Ecke und der Höhendurchschnitt (K , Ecke A und H).*

Lösung. Der Kreis um A mit AH bestimmt in der Peripherie den Punkt B' , in welchem die verlängerte Höhe aus B diesen trifft. Die Verbindungslinie $B'H$ giebt also den Punkt B , und das Lot aus A auf $B'B$ den Punkt C .

427. *In einen Kreis ein gleichschenkliges Dreieck so einzuschreiben, daß die Spitze und der Höhendurchschnitt in zwei gegebene Punkte fallen.*

Lösung. Ist A die gegebene Spitze und H der gegebene Höhendurchschnitt, so ist AH die Richtung der Höhe zur Grundlinie. Das Weitere wie vorhin.

428. *Die gegebene Ecke soll ein Endpunkt der Grundlinie sein.*

Lösung einfach, indem man mit BH als Radius und B als Mittelpunkt den Punkt A' bestimmt, in welchem h_a verlängert den Kreis schneidet. Dadurch erhält man $A'HA$, und das Lot aus B auf diese Gerade giebt die Ecke C .

Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind

429. *die Höhe auf die Grundlinie und die auf einen Schenkel (h_a, h_b).*

Lösung. Zieht man aus D , der Mitte der Grundlinie, die Parallele DF zu h_b , so ist $DF = \frac{1}{2}h_b$, also $\triangle ADF$ gegeben, woraus ABC in einfachster Weise abzuleiten.

Zusatz. Zieht man noch durch E , den Fußpunkt von h_b , die Parallele EG zu BC bis zum Durchschnitt mit DF , so ist DAG ein gleichschenkliges Hilfsdreieck, dessen Seiten die gegebenen Höhen sind.

430. *die Summe des Schenkels und der Grundlinie und der Winkel an der Grundlinie ($b + a, \sphericalangle B$).*

Lösung. Verlängert man den Schenkel AB um $BD = BC$, so ist das Dreieck ADC konstruierbar, da durch einen Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks auch die andern gegeben sind. $\sphericalangle ADC = \frac{1}{2}B$.

Zusatz. Die Verlängerung der Grundlinie um den Schenkel giebt ebenso einfach ein Hilfsdreieck.

431. *die Differenz des Schenkels und der Grundlinie und der Winkel an der Grundlinie ($b - a, \sphericalangle B$).*

Lösung. Macht man auf dem Schenkel BA ein Stück $BD = BC$, so ist $AD = b - a$ und Dreieck ADC , da seine Winkel bekannt sind, gegeben. — Macht man auf BC ein Stück $BE = BA$, so ist $CE = b - a$ und wiederum $\triangle ACE$ gegeben, da $\sphericalangle E = 1R - \frac{1}{2}B$ gegeben ist.

432 u. 433. *die Summe oder Differenz des Schenkels und der Grundlinie und der Winkel an der Spitze ($b \pm a, \sphericalangle A$).*

Lösungen einfach.

434. *die Grundlinie und die Summe des Schenkels und der Höhe auf erstere ($a, b + h_a$).*

Lösung. Verlängert man die Höhe h_a oder DA bis F um b , so ist das rechtwinklige Dreieck DCF durch seine Katheten gegeben. Ein Lot in der Mitte von CF auf CF errichtet giebt die Spitze A .

435. *die Grundlinie und die Differenz des Schenkels und der Höhe auf erstere ($a, b - h_a$).*

Lösung genau dieselbe, wenn man von A auf der Höhe AD den Schenkel AC bis F abträgt.

436. *der Winkel an der Spitze und die zu einem Schenkel gehörende Mittellinie ($\sphericalangle A, m_b$).*

Lösung. Ist D die Mitte von AC , und man zieht $AE \perp BC$, so ist dieses Lot Mittellinie zur Grundlinie und trifft BD in einem Punkte S , so daß $DS = \frac{1}{3}BD$. Über BS und DS bestimmt je ein Kreisbogen mit einem Peripheriewinkel $\frac{1}{2}A$ einen Ort für A , welcher Punkt also durch die zwei Örter gegeben ist. Das Lot von B auf AS und die Verlängerung von AD schneiden einander in C .

Zusatz. Ist statt der Mittellinie zu b der Winkelhalbierer w_b gegeben, so ist $\triangle ABD$ unmittelbar zu konstruieren.

437 u. 438. *Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus der Summe (oder Differenz) des Schenkels und der Höhe zur Grundlinie ($b \pm h_a$).*

Lösung. Verlängert man die Höhe $DA (h_a)$ über A hinaus um $AE = AC$, oder trägt von A aus auf AD das Stück $AE' = AC$ ab, und zieht EC (und $E'C$), so ist in beiden Fällen $\triangle DCE$ (oder DCE') gegeben, woraus das gesuchte in einfacher Weise abgeleitet werden kann.

439 u. 440. *Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren aus der Summe oder Differenz seiner Seite und Höhe ($a \pm h_a$).*

Lösungen beide einfach, da sich in jedem Falle ein Winkel von 15° ergibt.

441. *Das Verhältniß zweier Seiten eines Dreiecks sei gegeben, der eingeschlossene Winkel und die Summe der dritten Seite und der zu ihr gehörenden Höhe; das Dreieck zu konstruieren. ($b : c, \sphericalangle A, a + h_a$.)*

Lösung. Macht man ein Dreieck $AB'C'$, worin $AB' : AC' = c : b$ und $\sphericalangle A$ der gegebene ist, so ist dieses dem gesuchten Dreieck ABC ähnlich. Verlängert man dann die Höhe AD' über D' um $DE' = B'C'$ und $AE = a + h_a$ und zieht durch E Parallelen zu $E'B'$ und $E'C'$, so bestimmen diese die Ecken B und C .

Beweis. Es ist $AC : AB = AC' : AB' = b : c$. Ferner ist $AD' : AD$ (D Fußpunkt der Höhe AD) $= B'C' : BC$ und $AD' : AD = D'E' : DE$. Da nun $D'E' = B'C'$, so ist auch $BC = DE$.

442. *Statt der Summe $a + h_a$ soll die Differenz gegeben sein ($b : c, \sphericalangle A, a - h_a$).*

Lösung und Beweis den vorigen ganz entsprechend.

Zur Konstruktion eines Dreiecks seien gegeben:

443. *das Verhältniß zweier Seiten, der eingeschlossene Winkel und die Summe einer dieser Seiten und der dritten ($b : c$, $\sphericalangle A$, $a + c$).*

Lösung in ähnlicher Weise mit Hilfe eines beliebigen leicht konstruierbaren ähnlichen Dreiecks.

444. *Statt der Summe $a + c$ sei die Differenz $a - c$ (oder $c - a$) gegeben ($b : c$, $\sphericalangle A$, $a - c$).*

445. *die Summe zweier Seiten, der eingeschlossene Winkel und die zu einer jener Seiten gehörende Mittellinie ($b + c$, $\sphericalangle A$, m_b).*

Lösung. Verlängert man BA um $AE = AC$ und verbindet E mit der Mitte D von AC , so ist BE und ein Ort für D gegeben. Letzterer ist ein Kreis um B mit dem Radius m_b . Den Punkt D bestimmt man aber auf folgende Weise. Man zieht von B den Radius BG , so daß $\sphericalangle GBE$ das Supplement von $\sphericalangle A$, macht $BEF = 2BD$, und durch E eine Parallele zu FG , welche den Kreis in D schneidet. Eine Parallele zu BG giebt dann in BE den Punkt A . Punkt C ist dann leicht zu bestimmen.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß $AD = \frac{1}{2}AE$ ist. Nun ist aber $AD : AE = BG : BF$; $BG = \frac{1}{2}BF$, also $AD = \frac{1}{2}AE$.

446. *das Verhältniß zweier Seiten und die zu einer dieser Seiten und die zur dritten Seite gehörende Mittellinie ($b : c$, m_a , m_b).*

Lösung. Sind D und E die Fußpunkte der Mittellinien m_a und m_b , so ist $ED = \frac{1}{2}c$. In dem Dreiecke ADE ist demnach, da sich $AE : ED = b : c$ verhält, und AD gegeben ist, ein Ort für E zu bestimmen. Der Durchschnitt S der beiden Mittellinien und die Größe von SE lassen sich leicht bestimmen, so daß sich ein zweiter Ort für E ergibt.

447. *das Verhältniß zweier Seiten, eine zugehörige Mittellinie und die Höhe zur dritten Seite ($b : c$, m_b , h_a).*

Lösung. AE sei h_a und BD sei m_b . Dann ist $\triangle BDE$ gegeben, denn das Lot DF ist gleich $\frac{1}{2}h_a$. Zugleich ist BF ein Ort für C . Für A ergeben sich leicht zwei Örter: der eine aus dem bekannten Verhältniß $AD : AB = \frac{1}{2}b : c$, der

andere durch die Höhe h_a . AD giebt schliesslich die dritte Ecke C .

448. *die Summe zweier Seiten, die zu einer derselben gehörige Höhe und die zur andern gehörige Mittellinie ($a + b$, h_a , m_b).*

Lösung. Zieht man durch A eine Parallele zu BC bis in den Durchschnitt F mit der verlängerten m_b , und macht auf dieser Parallelen von A aus nach der andern Seite $AG = b$, so ist $\triangle GBF$ gegeben; denn $GF = a + b$, $BF = 2m_b$ und die Höhe von B aus gleich h_a . Verbindet man nun G mit der Mitte E von BF , so ist für den in GF liegenden Punkt A ein zweiter Ort durch das bekannte Verhältnis $AG : AE = 2 : 1$ gegeben. Das Dreieck ABC ergibt sich dann leicht.

449. *die Differenz zweier Seiten, die zu einer derselben gehörende Höhe und die Mittellinie zur andern ($a - b$, h_a , m_b).*

Lösung der vorigen ganz ähnlich, wenn man auf der durch A gezogenen Parallelen $AG = b$ nach der Seite abträgt, auf welcher der Durchschnitt D derselben mit der verlängerten m_b liegt.

450 und 451. *die Summe (oder Differenz) zweier Seiten, die Höhe zur dritten Seite und der Radius des umgeschriebenen Kreises ($b \pm c$, h_a , r).*

Lösung. Verbindet man A mit dem Mittelpunkte K und verlängert diese Verbindungslinie bis in F , welcher Punkt in der Peripherie liegt, so ist aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABF und ADC (AD ist die Höhe h_a) leicht das Rechteck $bc = 2r \cdot h_a$ zu bestimmen. In Verbindung mit der gegebenen Summe oder Differenz $b \pm c$ sind hieraus beide Seiten einzeln zu bestimmen.

452. *In einen Kreis ein Dreieck einzuschreiben, von welchem die oberen Abschnitte zweier Höhen gegeben sind.*

Lösung. Sind die oberen Abschnitte der beiden Höhen h_b und h_c gegeben, so kennt man dadurch auch die Entfernungen der Seiten b und c vom Mittelpunkte K . Nimmt man nun die Ecke A beliebig in der Kreisperipherie an, so erhält man die Ecken B und C durch Tangenten von A an zwei leicht konstruierbare konzentrische Kreise um K .

453. *In einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, von welchem der obere Abschnitt einer Höhe und der untere einer andern gegeben ist.*

Lösung. Ist BH der obere Abschnitt von h_b und trifft die Höhe h_b die Seite c in E und den Kreis in F , so ist $BH = BF$, also für ein beliebig angenommenes B der Punkt F bestimmt. Da nun $FE = EH$ und EH als unterer Höhenabschnitt von h_b gegeben ist, so läßt sich auch Punkt E bestimmen; dadurch aber BA . Das Lot in E zu AB giebt endlich die Ecke C .

454. *In einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, von welchem ein Winkel und der obere Abschnitt einer Höhe gegeben sind.*

Lösung. Durch den Kreis und den Winkel A ist auch die Seite a oder BC gegeben, und durch den oberen Abschnitt der Höhe h_b , nämlich BH , die Entfernung der Seite b vom Mittelpunkte K . Man erhält sie also durch eine Tangente von C aus an einen konstruierbaren Kreis um K . Dann ist auch AB gegeben.

455. *In einen Kreis ein Dreieck einzuschreiben, von welchem ein Winkel und der untere Abschnitt einer Höhe gegeben sind.*

Lösung. HE sei der gegebene untere Abschnitt von h_b . — Durch den Kreis und den Winkel A ist auch die Seite a ihrer Größe nach gegeben; also auch ihre Entfernung vom Mittelpunkte K ; dadurch aber der obere Höhenabschnitt von h_a oder AH ; dadurch aber das rechtwinklige Dreieck AEH , also auch AE . In dem rechtwinkligen Dreiecke EAB ist aber auch noch $\sphericalangle A$ bekannt, also AB zu konstruieren. Die verlängerte AE giebt die Ecke C .

456 und 457. *Zur Konstruktion eines Dreiecks seien gegeben: eine Seite, die Summe (oder Differenz) der beiden andern, und der Radius des umgeschriebenen Kreises ($a, b \pm c, r$).*

Lösung. Durch den Radius r und die Seite a ist zunächst auch der $\sphericalangle A$ gegeben. Verlängert man nun BA um $AD = AC$ oder schneidet $AD' = AC$ ab, so erhält man durch Verbindung der Punkte D und D' mit C in beiden Fällen ein Dreieck CDB (oder $CD'B$), welches aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel konstruiert werden kann. (Dieser Gegenwinkel ist, wenn $b + c$ gegeben, $\frac{1}{2}A$; im andern Falle $180^\circ + \frac{1}{2}A$.) Die Ableitung des gesuchten Dreiecks aus diesem ist einfach.

458 und 459. *Gegeben seien: der Radius des umgeschriebenen Kreises, die Summe (oder Differenz) zweier Seiten und der Gegenwinkel der dritten Seite ($r, b \pm c, \sphericalangle A$).*

Lösung. Aus r und A läßt sich Seite a bestimmen. Dann genau, wie vorhin.

460. *Zur Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks seien gegeben: die Summe aus der Grundlinie und dem Schenkel, sowie die Summe der zugehörigen Höhen ($a + b; h_a + h_b$).*

Lösung. Verlängert man die Höhe h_a (oder AD) um $DF = h_b$, ebenso die Seite b (oder AB) um $BG = a$ (BC) und verbindet G mit F , so ist, da sich in einem Dreiecke zwei Seiten verhalten, wie umgekehrt die zugehörigen Höhen, $AB : BG = AD : DF$, folglich $GF \parallel BD$ und also $\sphericalangle F = 1 R$. Das Dreieck AGF ist also gegeben. Konstruiert man dasselbe auch auf der andern Seite von AF , so erhält man das gleichschenklige Dreieck AGH . Halbiert man in diesem den Winkel G , so trifft die Halbierungslinie die Seite AH in C , und die Parallele durch C zu HG giebt den Punkt B .

461 und 462. *Statt der einen Summe soll ein Winkel des Dreiecks gegeben sein [$\sphericalangle A$ und ($a + h_a$) oder ($a + b$)].*

Lösung. Da durch einen Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks auch die andern gegeben sind, so ist auch in diesen Fällen $\triangle AGF$ gegeben. Die weitere Lösung ist der vorigen ganz entsprechend.

463. *Statt der beiden Summen seien die beiden entsprechenden Differenzen gegeben [$(h_a - h_b)$ und ($b - a$)].*

Lösung. Stellt man diese Differenzen an der Figur in entsprechender Weise dar, wie vorhin die Summe, so erhält man wiederum ein Hilfsdreieck, aus welchem in ähnlicher Weise, wie vorhin, das gesuchte Dreieck abgeleitet werden kann, wenn man statt des Winkels G dessen Nebenwinkel halbiert.

464 und 465. *Statt einer der beiden Differenzen sei ein Winkel des Dreiecks gegeben.*

Lösung. Vergl. die Lösung zu A. 461 und 462.

466. *Zur Konstruktion eines Dreiecks seien gegeben: der Umfang, das Verhältniß zweier Seiten und die Halbierungslinie des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels ($a + b + c, b : c, w_a$).*

Lösung. Verlängert man AB um $AE = AC$ und um $BF = BC$, wodurch man $EF = a + b + c$ erhält, so läßt sich in dieser Geraden der Durchschnitt D des Winkelhalbierers bestimmen, indem $ED : FD = b : c$ ist, was leicht aus $AD : BD = b : c$ abgeleitet werden kann.

Beschreibt man nun um das Dreieck ECF einen Kreis, den die verlängerte Winkelhalbierende CD in G durchschneiden möge, so ist $\angle GCF = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}B$, und $\angle CGF = \frac{1}{2}A$; also $\angle CFG = 1R$, und CG ist Diameter des umgeschriebenen Kreises. Beschreibt man daher um D mit DC als Radius einen Kreis, so werden sich beide Kreise in C berühren, da ihre Centrale der Differenz ihrer Radien gleich ist. Man hat also zur Bestimmung des Punktes C einen Kreis zu konstruieren, der durch E und F geht und den um D mit DC beschriebenen Kreis umschließend berührt, was eine Aufgabe des Apollonischen Berührungsproblems ist.

Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem gegeben sind

467. *eine Seite, die zugehörige Höhe und das Verhältniß der zu den andern Seiten gehörenden Mittellinien ($a, h_a, m_b : m_c$).*

Lösung. Gegeben ist $\triangle BCS$ (S der Durchschnittspunkt der Mittellinien) durch $BC = a$, $BS : CS = m_b : m_c$ und Höhe SG auf BC , welche gleich $\frac{1}{3}h_a$ ist.

468. *eine Seite, die zugehörige Mittellinie und das Verhältniß der beiden andern ($a, m_a, m_b : m_c$).*

Lösung. Der zweite Ort für S wird durch die Mittellinie $SG = \frac{1}{3}m_a$ bestimmt.

469. *eine Seite, die zugehörige Mittellinie und das Verhältniß der nicht zugehörigen Höhen ($a, m_a, h_b : h_c$).*

Lösung. $h_b : h_c = c : b$, daher ist je ein Ort für A aus diesem gegebenen Verhältniß und durch m_a zu bestimmen.

470. *eine Seite, das Verhältniß der beiden andern Seiten und das Verhältniß der hierzu gehörenden Mittellinien ($a, b : c, m_b : m_c$).*

Lösung. Ein Ort für A ist durch $b : c$, ein Ort für S durch $m_c : m_b$ bestimmt. Dann ist durch die Mitte D von BC bis an die Peripherie, welche der Ort für A ist, eine Gerade zu legen, welche durch den Ort für S im Verhältniß $1 : 2$ geteilt wird.

471. *das Verhältniss einer Seite zu ihrer Mittellinie, eine zweite Seite und die dritte Mittellinie ($a : m_a, b, m_b$).*

Lösung. Verlängert man m_b um sich selbst bis F , so ist $\triangle AFS$ konstruierbar. Denn $FS = \frac{1}{2}m_b$; das Verhältniss $AF : AS = a : \frac{3}{2}m_a$ giebt einen Ort für A , den andern ein Kreis um C mit b als Radius.

472. *eine Seite und die Verhältnisse jeder der beiden andern Seiten zu ihrer Mittellinie ($a, b : m_b, c : m_c$).*

Lösung. Für die Dreiecke BCD und BCE , worin D und E die Mitten von b und c bezeichnen, ist je ein Ort für D und E durch die gegebenen Verhältnisse bestimmt. Alsdann ist nach A. 323 zwischen die Peripherieen dieser Ortskreise parallel zur Centrale eine Gerade zu legen, welche gleich $\frac{1}{2}a$ ist. Die Durchschnitte geben die Punkte D und E .

473. *das Verhältniss zweier Seiten und die zugehörigen Mittellinien ($a : b, m_a, m_b$).*

Lösung. Zieht man durch C die Parallele zu m_b bis in F in m_a , so ist $AF = \frac{1}{2}m_a$, $AC : DC = b : \frac{1}{2}a$, woraus sich ein Ort für C ergibt. Ein zweiter Ort ist der aus dem bekannten Punkte F mit einem Radius gleich $\frac{3}{2}m_c$ beschriebene Kreis.

474. *eine Mittellinie, das Verhältniss der beiden andern und der der ersten entsprechende Winkel ($m_a, m_b : m_c, \sphericalangle A$).*

Lösung. Wenn man die Mittellinie $AD (m_a)$ über D bis E um sich selbst verlängert und $DF = DS$ auf DE abträgt, so ist im $\triangle SFC$ das Verhältniss $CS : CF = m_c : m_b$ gegeben, daher ergibt sich ein Ort für C , da $SF = \frac{3}{2}m_a$ gegeben ist. Ebenso erhält man einen zweiten Ort für C aus dem $\sphericalangle ACE = 2R - A$, da $AE = 2m_a$ gegeben ist.

475. *eine Seite und das Verhältniss der drei Mittellinien ($a, m_a : m_b : m_c$).*

Lösung. Das Dreieck BCS lässt sich konstruieren, da $BC = a$ gegeben ist und für S sich zwei Örter angeben lassen, der eine aus dem Verhältniss $BS : SC = m_b : m_c$, der andere in bezug auf $BD = \frac{1}{2}a$ durch das Verhältniss $\frac{3}{2}m_b : \frac{1}{2}m_a$.

476. *eine Mittellinie und die Verhältnisse der beiden andern zu den zugehörigen Seiten ($m_a, m_b : m_c, b : c$).*

Lösung. Konstruiert man, wie bei A. 473, so lässt sich im Dreieck SFC ein Ort für C aus dem Verhältniss $SC : FC =$

$m_c : m_b$ konstruieren; einen zweiten Ort bestimmt in dem Dreiecke AEC das Verhältniß $b : c$.

477. *eine Seite und das Verhältniß der drei Höhen*
($a, h_a : h_b : h_c$).

Lösung. Aus den gegebenen Verhältnissen und der gegebenen Seite lassen sich auch die andern Seiten bestimmen.

478. *eine Höhe, ihr oberer Abschnitt und der Radius des umgeschriebenen Kreises* (h_a, AH, r).

Lösung. Ist D die Mitte von a , und E die Mitte von AH , F der Fußpunkt von h_a , so ist zunächst $\triangle EFD$ gegeben; denn es ist $ED = r$, wie sich einfach mit Hilfe des Zusatzes zu A. 356 ergibt. Dann läßt sich auch leicht der Mittelpunkt K bestimmen und mit Hilfe des Kreises die Ecken A, B und C .

479. *eine Seite und das Verhältniß zweier Seiten, welches zugleich das umgekehrte Verhältniß der entsprechenden Mittellinien sein soll* ($a, b : c = m_c : m_b = p : q$).

Lösung. Ist D die Mitte von b , E die von c , und man zieht die Parallele DF zu CE bis in die verlängerte BC , so ist $CF = DE = \frac{1}{2}a$ und $BF = 1\frac{1}{2}a$. Aus dem gegebenen Verhältniß $p : q$ ergibt sich nun sowol ein Ort für D über BF , als auch ein Ort für A über BC . Dann ist von C aus bis in den zweiten Ort eine Gerade zu legen, welche durch den ersten Ort (für D) halbiert wird.

Zum Schluß mögen noch einige Aufgaben Platz finden, in denen die Verwandlung eines gegebenen Dreiecks in ein anderes unter gegebenen Bedingungen verlangt wird. Dieselben finden mit Recht ihre Stelle unter den Dreieckskonstruktionsaufgaben, da sie von diesen nicht verschieden sind. Denn in jedem Falle soll ein Dreieck aus den für die Verwandlung gegebenen Bedingungen konstruiert werden, wozu das gegebene und zu verwandelnde Dreieck selbst das dritte Bestimmungsstück liefert, da dasselbe nach seinem Inhalte, seinen Seiten und Winkeln, Transversalen und Radien gegeben ist.

480. *Ein Dreieck ABC in ein anderes zu verwandeln, wovon die Summe zweier Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind.*

Lösung. Zieht man durch die Ecke C des gegebenen Dreiecks eine Parallele zu BA und macht $\angle BAD$ gleich dem

gegebenen, so erhält man zunächst ein Dreieck BAD , welches dem gegebenen an Inhalt gleich ist und den vorgeschriebenen Winkel hat. Soll nun das gesuchte XAY mit diesem Winkel an A dem Dreiecke ABC (oder BAD) an Inhalt gleich sein, so muss $XA \cdot YA = BA \cdot AD = m^2$ sein. Da aber $AX + AY = s$ gegeben ist, so lassen sich aus den beiden Relationen die Größen AX und AY einzeln bestimmen. Man beschreibt über der gegebenen Summe als Diameter einen Halbkreis und legt eine Senkrechte zum Diameter gleich m ein. Diese teilt den Diameter in die beiden Stücke AX und AY .

481. *Statt der Summe der Seiten möge ihre Differenz gegeben sein.*

Lösung. Nachdem man wie anfangs verfahren, wie vorhin, hat man aus dem bekannten Produkte m^2 und Differenz d der beiden Seiten diese einzeln zu konstruieren. Man beschreibt über der Differenz als Diameter einen Halbkreis und bestimmt auf dem verlängerten Durchmesser den Punkt, aus welchem die Tangente gleich m ist. Dann ist der Diameter samt der Verlängerung die eine, die Verlängerung die andere Seite.

482 und 483. *Zur Verwandlung sei statt der Summe oder Differenz außer einem Winkel die Quadratsumme (oder Quadratdifferenz) der einschließenden Seiten gegeben.*

Lösung. Aus der gegebenen Quadratsumme (oder Differenz) in Verbindung mit dem nach Lösung von A. 479 bestimmbaren Produkte der beiden Seiten lassen sich nach A. 71 und 72 die Seiten einzeln bestimmen.

484 und 485. *Es seien zur Verwandlung gegeben das Verhältnis zweier Seiten und die dritte Seite (oder die zur dritten Seite gehörige Höhe).*

Lösung. In dem einen Falle läßt sich mit Hilfe des gegebenen Dreiecks die Höhe, im anderen die dritte Seite bestimmen, so daß man durch eine Parallele in beiden Fällen einen Ort für die dritte Ecke erhält. Der andere Ort ergibt sich aus dem gegebenen Verhältnis.

486. *Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches einen gegebenen Winkel hat und worin die gegenüberliegende Seite ihrer Höhe gleich sein soll.*

Lösung. Die neue Grundlinie, sowie deren Höhe, ist die mittlere Proportionale zu a und h_a des gegebenen Dreiecks.

Man hat also die Seite BC des gesuchten und einen Ort für die dritte Ecke A . Einen zweiten Ort liefert der gegebene Winkel α .

487. *Statt eines Winkels möge die entsprechende Mittellinie gegeben sein.*

Lösung wie vorhin. Den zweiten Ort für A giebt die gegebene Mittellinie.

488. *Statt des Winkels in A. 486 sei eine nicht entsprechende Höhe gegeben.*

Lösung wie vorhin. Ist h_b gegeben, so ist der zweite Ort für A die Tangente aus C an den um B mit h_b als Radius beschriebenen Kreis.

489. *Statt des Winkels in A. 486 sei eine nicht entsprechende Mittellinie gegeben.*

Lösung wie vorhin; nur ist schliesslich, wenn m_b gegeben ist, zur Bestimmung von A von C aus eine Gerade bis an die Parallele, welche der eine Ort für A ist, zu legen, welche durch den um B mit m_b beschriebenen Kreis halbiert wird. Dasselbe geschieht einfach mittelst einer beliebigen von C bis an die Parallele gezogenen Geraden, wenn man durch deren Mitte eine Parallele zur erstern Parallele bis in den Kreis zieht.

490 und 491. *Die Summe (oder Differenz) der Quadrate zweier Seiten soll eine gegebene sein, ausser dafs die Grundlinie ihrer Höhe gleich wird.*

Lösung. Nachdem wie vorhin a und h_a bestimmt sind, bestimmt man aus der Summe der Quadrate $b^2 + c^2$ die Mittellinie m_a und hat dann A. 487 zu lösen; oder man bestimmt aus der Differenz der Quadrate $b^2 - c^2$ den Fußpunkt von h_a .

492. *Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, wovon eine Seite und das Rechteck aus den beiden andern Seiten gegeben sind.*

Lösung. Zu der gegebenen Seite erhält man leicht die zugehörige Höhe als vierte Proportionale, wodurch man ausser zwei Ecken noch einen Ort für die dritte Ecke des gesuchten Dreiecks bekommt. Den andern Ort für die dritte Ecke bestimmt man dadurch, dafs man aus dem gegebenen Produkte $bc = p^2$ und dem Inhalte $\frac{1}{2}a \cdot h_a$ den Winkel ableitet, den b und c mit einander bilden, und zwar am einfachsten auf folgende Weise. Heifst dieser Winkel x , so ist $a \cdot h_a = p^2 \cdot \sin x$,

also $\sin x = \frac{a \cdot h_a}{p^2}$. Setzt man hierin $\frac{h_a}{p^2} = \frac{1}{m}$, so erhält man $m = \frac{p^2}{h_a}$ als dritte Proportionale und $\sin x = \frac{a}{m}$. Konstruiert

man dann aus a und m ein rechtwinkliges Dreieck, worin m die Hypotenuse ist, so ist der der Kathete a gegenüber liegende spitze Winkel oder auch sein Nebenwinkel der Winkel, den die Seiten b und c bilden müssen. Dadurch ist aber für die dritte Ecke ein zweiter Ort gegeben.

493. *Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, wovon das Rechteck zweier Seiten und die Differenz der gegenüber liegenden Winkel gegeben sind.*

Lösung. Bestimmt man nach der vorhin angegebenen Methode aus dem bekannten Rechtecke $b \cdot c = m^2$ und dem gegebenen Inhalte des Dreiecks den Winkel A , so hat man zugleich die Summe $(B + C)$, aus welcher man in Verbindung mit der gegebenen Differenz $(B - C)$ diese Winkel einzeln bestimmen kann.

494 und 495. *Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, in welchem die Grundlinie gleich der Höhe und die Summe (oder Differenz) der beiden anderen Seiten eine gegebene sein soll.*

Lösung. Man bestimme zunächst die Ecken B und C und als Ort für die dritte Ecke eine Parallele zu BC . Dann ist die dritte Ecke der in der Parallele liegende Mittelpunkt des Kreises, welcher durch C und dessen Gegenpunkt in bezug auf jene Parallele geht und, wenn die Summe der Seiten gegeben ist, den um B mit dieser Summe als Radius beschriebenen Kreis berührt; ist die Differenz der Seiten gegeben, so ist der zu berührende Kreis um B mit dieser Differenz als Radius der beschriebene Kreis.

496. *Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.*

Lösung. Man erreicht am einfachsten die Ähnlichkeit, wenn man dafür sorgt, daß die Winkel übereinstimmend werden. Legt man daher in B und C an der Seite BC des zu verwandelnden Dreiecks die entsprechenden Winkel des gegebenen Dreiecks an, so erhält man ein Dreieck BCD , welches dem gegebenen zwar ähnlich, aber nicht gleich ABC ist. Zieht man nun durch A die Parallele AE bis in BD , so ist

$\triangle EBC = \triangle ABC$. Es ist also noch EBC durch eine Parallele zu CD zu verwandeln. Ist nun $A'C'$ diese Parallele, so ist auch $A'C \parallel EC'$, weil $\triangle EC'A' = EC'C$ ist und beide Dreiecke dieselbe Grundlinie EC' haben. Wir haben daher die Proportionen

$$A'B : EB = BC : BC' \text{ und, wenn } EF \parallel CD \text{ gezogen,} \\ A'B : EB = BC' : BF. \text{ Aus beiden folgt}$$

$BC : BC' = BC' : BF$, woraus BC' und also auch die Parallele $C'A'$ bestimmt werden kann.

497 und 498. *Das neue Dreieck soll einen gegebenen Winkel und eine gegebene Summe (oder Differenz) der nicht zugehörigen Höhen haben.*

Lösung. Konstruiert man die Summe (oder Differenz) der Höhen h_b und h_c durch Verlängerung der einen über ihren Fußpunkt um die andere (oder durch entsprechende Abtragung) und man zieht durch den so erhaltenen Endpunkt eine Parallele zu b (oder c) bis in c (oder b), so erhält man ein konstruierbares rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse $b + c$ oder $b - c$ ist. Dadurch ist aber die Aufgabe auf A. 480 oder A. 481 reduziert.

499 und 500. *Das neue Dreieck soll eine gegebene Summe (oder Differenz) zweier Seiten und ein gegebenes Verhältniß der zugehörigen Höhen haben.*

Lösung. In beiden Fällen läßt sich nach vorhin angegebener Konstruktion der Winkel A bestimmen, und dadurch die Aufgabe ebenfalls auf A. 480 oder A. 481 reduzieren.

501. *Ein Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.*

1. Lösung. Die Aufgabe ist als Spezialfall von A. 496 zu behandeln.

2. Lösung. Zieht man durch A eine Parallele zu BC und legt in B an BC einen Winkel von 60° , so erhält man zunächst ein inhaltsgleiches Dreieck BCD , welches unter Beibehaltung des Winkels DBC so zu verwandeln ist, daß die den beibehaltenen Winkel einschließenden Seiten einander gleich werden. Ist nun BX eine dieser Seiten, so muß $BX^2 = BD \cdot BC$ sein, woraus BX in einfacher Weise zu konstruieren ist.

3. Lösung. Beschreibt man über der Seite BC des zu verwandelnden Dreiecks ein gleichseitiges Dreieck BCD mit der Höhe DH , und ist $EF \parallel DC$ so gezogen, daß $\triangle EBF = \triangle ABC$ ist, EJ und AG die entsprechenden Höhen, so ist

$$\begin{aligned} \triangle ABC : \triangle DBC &= AG : DH \quad \text{und} \\ \triangle DBC : \triangle EBF &= DH^2 : EJ^2 \end{aligned}$$

$$\text{also } \triangle ABC : \triangle EBF = AG \cdot DH : EJ^2.$$

Ist nun $\triangle ABC = \triangle EBF$, so muß $EJ^2 = AG \cdot DH$ sein. Daraus ist aber EJ leicht zu konstruieren.



Jan Tymowski

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig. № 23

Brockmann, F. J., vorm. Oberlehrer am königl. Gymnasium zu Cleve,
Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie.
Für Gymnasien und Realschulen bearbeitet. [Mit 46 Holzschnitten
im Text.] Zweite Auflage. [VIII u. 156 S.] gr. 8. 1880. geh.
n. *M.* 1.60.

Herr Dr. Wiegand in Halle sagt am Schlusse einer eingehenden Rezension in der „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“ über dieses schon vielfach eingeführte Buch: „Wir erklären, daß wir es hier mit einem ganz vortrefflichen Schulbuche zu thun haben, das auch polytechnischen Schulen genügen wird und ganz besonders zum Privatstudium empfohlen werden kann. Die Ausstattung ist, wie bei allen Schriften, die aus der Teubnerschen Offizin hervorgehen, ganz vorzüglich, der Druck korrekt und der Preis außerordentlich billig.“

———— **Lehrbuch der elementaren Geometrie für Gymnasien und
Realschulen bearbeitet. 2 Teile. gr. 8. geh. n. *M.* 3.60.**

Einzeln:

- I. Teil: Die Planimetrie. Mit 139 Figuren in Holzschnitt. Dritte verbesserte Auflage. [IX u. 201 S.] 1887. n. *M.* 2.—
II. — Die Stereometrie. Mit 84 Figuren in Holzschnitt. [IV u. 128 S.] 1875. n. *M.* 1.60.

In gleicher Weise wie die mit allseitigem Beifall aufgenommene Trigonometrie hat der Verfasser die Planimetrie nach streng wissenschaftlichen Prinzipien bearbeitet. Das ganze planimetrische System ist klar und übersichtlich geordnet. Die Anordnung und Einteilung des Ganzen weicht von den meisten denselben Stoff behandelnden Lehrbüchern insofern ab, als eine Menge von geometrischen Thatsachen, die nicht notwendig zum Systeme gehören, in den einzelnen Kapiteln in Form von Übungssätzen zusammengestellt ist, um neben der ziemlich reichhaltigen Sammlung systematisch geordneter Aufgaben, deren Auflösungen meistens nur andeutungsweise gegeben sind, dem Schüler als ein reichliches und zu selbständiger Beschäftigung mit dem Gelernten anregendes Material zu dienen.

Um bei Vollständigkeit doch den Umfang des Lehrbuches nicht übermäßig zu erweitern, hat der Verfasser die fruchtbaren Sätze über die Potenzlinie und in gleicher Weise das renommierte Taktionsproblem nicht in einem besonderen Kapitel, sondern in Kürze als Zugabe zu betreffenden Aufgaben behandelt. Die Lehre von der harmonischen Teilung, vom Pol und der Polare beim Kreise, Bernoullis Satz über Transversalen, sowie die wichtigsten Sätze über Maxima und Minima, soweit sie der Elementargeometrie angehören, haben in einem Anhang in einer dem Schulzweck entsprechenden Weise ihre Behandlung gefunden. Den Bau der Parallelentheorie, an welcher bis jetzt die rigorosen Anforderungen der Wissenschaftlichkeit meistens rütteln zu müssen geglaubt haben, meint der Verfasser auf Grund früher entwickelter Vorstellungen so aufgeführt zu haben, daß sich ein nicht zu ängstliches wissenschaftliches Gewissen damit zufrieden gestellt halten dürfte.

Wie in der Planimetrie, so ist auch in der Stereometrie mit einer streng wissenschaftlichen Behandlung eine klare und übersichtliche Anordnung zu verbinden gesucht worden, ist zwischen den erschöpfenden Handbüchern und den aphoristischen Leitfäden die richtige Mitte gehalten und der Zusammenhang der stereometrischen Thatsachen mit den planimetrischen und unter sich in leicht faßbarer Darstellung gebührend hervorgehoben worden.

Die Einteilung der Stereometrie ist die allgemein übliche, auch sind wesentlich andere Gesichtspunkte, als die hergebrachten, nicht aufgestellt. In Rücksicht auf die Bestimmung dieser Schrift konnte der Verfasser sich nicht entschließen, den hergebrachten Lehrgang zu verlassen. Denn ob für ein Lehrbuch, welches zum Gebrauche an Gymnasien und Realschulen bestimmt ist, der gewöhnliche, oder der den Anschauungen der neueren Geometrie angepaßte moderne Schnitt der bessere sei, dürfte vorderhand noch zweifelhaft sein.

Die als Übungsmaterial systematisch zusammengestellten Übungssätze und Aufgaben bilden das letzte Kapitel und können in ihren Abteilungen den einzelnen Kapiteln des Systems mit Auswahl angereiht werden. Da sie vorzugsweise auf die Anregung und Belebung der selbständigen Thätigkeit des Schülers berechnet sind, so fehlen entweder bei den meisten Übungssätzen die Beweise ganz, oder sind doch nur andeutungsweise gegeben; desgleichen sind für die Lösung der Aufgaben die Wege meist nur angedeutet. Wo in einzelnen Fällen Übungssätze ausführlich bewiesen und Aufgaben vollständig gelöst sind, möge man eine

beabsichtigte Erweiterung des aufgestellten Systems erblicken. Bei der Aufstellung der Aufgaben ist auch noch dadurch dem Schüler eine hoffentlich willkommene Gelegenheit selbstständiger Thätigkeit gegeben, daß die spezielle Formulierung einzelner Aufgaben aus einer allgemeinen Gruppe unterlassen ist.

Brockmann, F. J., vorm. Oberlehrer am königl. Gymnasium zu Cleve,
Materialien zu Dreiecksconstructions nebst Anwendung
auf fast vierhundert Aufgaben. [VI u. 88 S.] gr. 8. 1888. geh.
M. 1.20.

Diese Schrift hat den Zweck, den leider nicht zu leugnenden Übelstand, daß die Pflege der Konstruktionsaufgaben auf unseren Schulen durchweg am wenigsten erfreuliche Resultate liefert, vom methodischen, didaktischen und pädagogischen Standpunkte zu bekämpfen. Zunächst sind die Aufgaben auf Dreiecksconstructionen beschränkt. Die hierzu nötigen Materialien sind in verschiedenen Gruppen als Örter, Data, Lehrsätze, Reduktionsaufgaben und algebraische Analysis zusammengestellt und die dann folgenden 360 Aufgaben durch steten Hinweis auf das betreffende Material zur Lösung so durchsichtig vorgearbeitet, daß einerseits die vollständige Durchführung derselben keine Schwierigkeiten mehr bietet, andererseits aber die beständig angestrengte Thätigkeit des Lesers nicht überflüssig wird. — Der Verfasser spricht die Zuversicht aus, daß jeder, welcher diese Schrift vorurteilsfrei mit Ernst und Ausdauer durcharbeitet und dadurch namentlich die „Materialien“ in sich aufnimmt, das von ihm beherrschte Terrain weit über die dem Systeme angehörenden Elementaraufgaben hinaus erweitern und sich in den Stand setzen werde, sich auch für solche Aufgaben, für welche die Materialien hier nicht gegeben sind, durch selbstthätiges Studium die Wege zur Lösung zu ebnen.

—— planimetrische Constructionsaufgaben nebst deren
Lösung. Eine Vorschule zu des Verfassers Materialien. Ent-
haltend 501 Aufgaben nebst deren Lösungen. [VI u. 103 S.] gr. 8.
1889. geh. *M.* 1.50.

Der Verfasser verfolgt den Zweck, den Leser durch Vorführung von vollständigen Lösungen von fünfhundert planimetrischen Konstruktionsaufgaben in das Gebiet der geometrischen Konstruktion in leicht faßlicher Weise einzuführen, namentlich ihn zu befähigen, daß er fortan zielbewußt an die Lösung fernerer Aufgaben und mit Erfolg herantrete. Nur die Kenntnis der Elementaraufgaben des planimetrischen Systems und deren Lösungen, sowie einzelner renommierten Probleme, welche aufs innigste mit dem Systeme zusammenhängen, ist beim Leser vorausgesetzt. Durch die Beschränkung der Lösungen auf die Analysis ist zugleich dem Leser Veranlassung gegeben, durch selbständige Ausführung der Konstruktion und des Beweises, sowie durch Aufstellung einer Determination tiefer in die Aufgabe einzudringen. Der Verfasser hat nur an einzelnen Stellen Winke für diese Teile der Lösung gegeben.

Versuch einer Methodik
zur Lösung
planimetrischer Konstruktionsaufgaben.

Mit zahlreichen Beispielen.

Zusammengestellt von

F. J. Brockmann,
vorm. Oberlehrer am Königl. Gymnasium zu Cleve.

Mit fünf Holzschnitten.



Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1889.

[Das Recht der Übersetzung behalten sich Verleger und Verfasser vor.]

V o r r e d e.

Selten dürfte ein Autor in betreff der Begründung des Erscheinens seiner Schrift so wenig außer Sorgen sein, als wir es bei der Herausgabe des vorliegenden „Versuches einer Methodik für die Auflösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben“ sein dürfen. Wir haben nicht nötig, nach kunstreichen Redewendungen zu suchen, die uns als Begründung dienen sollen; so entschieden tritt nämlich die Sachlage für uns ein.

Denn wenn wir uns in der deutschen Litteratur der Mathematik vergebens nach einer Schrift umsehen, in welcher in systematischer Form eine „Methodik für die Behandlung planimetrischer Konstruktionsaufgaben“ entwickelt wird, so dürfte jeder Versuch, durch Ausfüllung dieser Lücke den Unterricht fruchtbarer zu machen, von den Fachgenossen entschieden gebilligt werden.

So fruchtbar nämlich auch die einschlägige Litteratur in Leitfäden und Lehrbüchern für den systematischen Unterricht in der Geometrie genannt werden muß, in bezug auf eine systematische Methodik für die Auflösung von Konstruktionsaufgaben müssen wir dieselbe steril nennen. Weist dieselbe auch eine stattliche Anzahl von Aufgabensammlungen auf, so verfolgen doch die uns bekannten alle nur den Zweck, entweder die Schule mit hinreichendem Übungsmaterial zu versehen, indem die Aufgaben dieser Sammlung oft nach Tausenden zählen, oder an einzelnen Beispielen für zusammengestellte Gruppen die Art der Behandlung zu zeigen. Wenn wir auch gern zugeben, daß die Sammlungen der letzten Art (beispielsweise die von Hoffmann [Baderborn, bei Schöningh], oder die von Lieber und von Lühmann [Berlin, bei Simion]) sich schon mehr einer Methodik nähern, so ist dieselbe doch nur als latent darin

enthalten zu bezeichnen; von einer wirklich systematischen Methodik kann auch hier keine Rede sein. —

Nun ist es aber eine nicht wegzuleugnende Thatsache, daß die Leistungen unserer Schulen auf dem Gebiete der Konstruktionsaufgaben durchweg zu wünschen übrig lassen. Daher muß es Sache der Schulmathematiker sein, diesen Übelstand in objektivster Weise zu bekämpfen.

Darum haben auch wir in zwei vorausgegangenen Schriften, die kürzlich in demselben Verlage erschienen sind, nämlich in 1) Materialien zu Dreieckskonstruktionen, nebst Anwendung auf fast 400 Aufgaben, und 2) Planimetrische Konstruktionsaufgaben, eine Vorschule zu obigen Materialien, enthaltend 501 Aufgaben nebst deren Lösung, wohlmeinend und in bester Absicht den Kampf gegen genannten unleugbaren Übelstand aufgenommen. In der erstern Schrift haben wir nach entsprechender Erweiterung des gangbaren planimetrischen Systems fast 400 Aufgaben mit Hilfe von aufgestellten Örtern und durch Reduktion mittels Daten und auf eine Anzahl hervorragender Reduktionsaufgaben klar und durchsichtig zur Lösung gebracht, dabei aber der eignen vollen Thätigkeit des Lesers hinreichenden Spielraum gelassen. In der andern Schrift, planimetrische Konstruktionsaufgaben, sind die Lösungen der stattlichen Anzahl von 501 Aufgaben aufgestellt. Dabei haben wir das Prinzip der Lösung, d. i. die Methode, stets so hervorzuheben gesucht, daß dadurch dem aufmerksamen Leser eine Abstraktion der Methodik vermittelt werden könnte. Denn nur durch das sorgfältigste Studium einer nicht zu kleinen Reihe von vorgesehrtten Auflösungen kann man sich für eine selbständige und erfolgreiche Inangriffnahme vorgelegter Konstruktionsaufgaben genügend vorbereiten.

Soll aber der Schüler einer Aufgabe nicht ratlos gegenüber stehn und der Lehrer stets zielbewußt an die Lösung herantreten, so konnte eine bloß latente Methodik nicht genügen. Es war daher notwendig, die vereinzelt vorkommenden und angewandten Methoden zu einer systematischen Methodik zu vereinigen; eine Aufgabe, die um so schwieriger zu lösen ist, da einerseits nach der Natur der Sache eine allgemeine, für alle Aufgaben durchgreifende Methodik nicht aufgestellt werden kann, andererseits aber bei der Aufstellung die verschiedenartigsten Rücksichten zu nehmen sind.

Zunächst ist nämlich bei der Aufstellung einer systematischen

Methode das Bedürfnis des Durchschnittschülers gebührend zu berücksichtigen, da ja das Auflösen einer geometrischen Konstruktionsaufgabe nicht etwa ein Monopol des befähigteren, besonders findig angelegten Schülers ist, noch sein soll; vielmehr auch der minder befähigte, nur mit normalen Geistesfähigkeiten ausgerüstete Durchschnittschüler herangezogen werden kann und soll.

Wenn wir dann an zweiter Stelle auch die Berücksichtigung des Lehrers für notwendig halten, so ist dies damit begründet, daß derselbe in seinem Bildungsgange auf der Universität oft keine Gelegenheit finden konnte, außer mit der höheren Analysis, wie z. B. mit elliptischen und Abelschen Integralen, mit Beta-, Gamma- und Theta-Funktionen, der hypergeometrischen Reihe und anderen sich auch noch mit der Schulmathematik intensiv zu beschäftigen und seine Kenntnisse darin zu vertiefen. Es ist ja in der That leider sehr zu beklagen, daß in dem Bildungsgange der zukünftigen Mathematiklehrer vielfach entweder gar keine, oder doch zu wenig Rücksicht auf ihren späteren Beruf genommen wird. —

Angeichts solcher Schwierigkeiten haben wir allen Grund, um eine nachsichtige Beurteilung des vorliegenden Versuches zu bitten; gleichwohl räumen wir der öffentlichen Kritik gern ein, rückhaltslos zu erklären, in wie weit derselbe als gelungen gelten könne, in wie weit nicht. Jedenfalls beruhigt uns das Bewußtsein, daß diese Arbeit eine Frucht des ungeschwächten Interesses für die Nutzbarmachung des mathematischen Unterrichtes in unsern Schulen ist. Den nötigen Mut zur Abfassung derselben hat uns eine autoritative, günstige Beurteilung unserer „Materialien“ gegeben.

Cleve, 18. Juni 1889.

J. J. Brodmann.

Allgemeine Inhaltsübersicht.

	Seite
Begriff der planimetrischen Konstruktionsaufgabe. Allgemeines über ihre Lösung	1
I. Die geometrische Analysis	2
Methode durch Örter	3
Aufstellung der Örter	5
Beispiele hierzu	10
Methode durch Reduktion	19
Reduktion durch Data	20
Beispiele zur Anwendung	21
Methode durch Parallelverschiebung und Umlegung	28
Beispiele hierzu	29
Umlegung durch Drehung	37
Umlegung durch Multiplikation	38
Reduktion durch die Ähnlichkeitsmethode	41
Beispiele hierzu	42
II. Die Konstruktion und der Beweis	48
Beispiele	49
III. Die Determination	58
Beispiele	60
IV. Übungsbeispiele	65
Fernere Übungsbeispiele gemischterer Natur	78
V. Nachtrag, enthaltend einfache Reduktionsaufgaben	106

Begriff der planimetrischen Konstruktionsaufgabe. Allgemeines über ihre Lösung.

§ 1. Während in den das planimetrische System aufbauenden Lehrsäzen bewiesen wird, daß in einer Figur, in welcher Linien und Winkel gewissen Bedingungen entsprechen, infolge dieser erfüllten Bedingungen auch noch andere Relationen bestehen, (man denke z. B. an den Pythagoreischen Lehrsatz, durch den bewiesen wird, daß in einem Dreieck, welches einen rechten Winkel hat, das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten zusammen ist) versteht man unter einer planimetrischen Konstruktionsaufgabe die Forderung, eine Figur zu konstruieren, deren Seiten oder Winkel u. s. w. gegebenen Bedingungen entsprechen. (Das Wort Figur ist hier in weiterem Sinne zu fassen, indem die gestellte Forderung sich ebensowohl auf Linien oder Winkel einer nicht geschlossenen als auf geschlossene Figuren beziehen kann.) Beispielsweise wäre es eine planimetrische Konstruktionsaufgabe, wenn die Konstruktion eines Quadrates gefordert würde, welches so groß sein soll, wie zwei gegebene Quadrate zusammen. Die Lösung dieser Aufgabe würde sich unmittelbar durch den Pythagoreischen Lehrsatz ergeben, indem man nur die Seiten der gegebenen Quadrate zu Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks zu machen braucht. Die Hypotenuse dieses Dreiecks würde die Seite des gesuchten Quadrates sein.

Indes so einfach und unmittelbar, daß man nur einen entsprechenden Lehrsatz anzuwenden braucht, gestaltet sich die Lösung nur sehr selten, z. B. bei den Fundamentalaufgaben des Systems. Die Lösung einer beliebigen Aufgabe ist darum im allgemeinen schwieriger, da dieselbe einerseits die sichere und stets gegenwärtige Kenntnis des gangbaren planimetrischen Systems voraussetzt, das

in vielen Fällen noch einer entsprechenden Erweiterung bedarf, andererseits aber — und das ist der Hauptgrund der generellen Schwierigkeit — läßt sich der Natur der Sache nach keine allgemein gültige und durchgreifende Methode für die Lösung aufstellen, wie das im Verlaufe unserer Entwicklungen mehr und mehr klar gelegt werden wird.

§ 2. Die für die Lösung aller Aufgaben gültige, also allgemeine, Methodik beschränkt sich nämlich auf das Gesetz, nach welchem jede Lösung, soll sie eine wissenschaftlich strenge sein, vier Teile enthalten muß, nämlich 1) die Analysis, 2) die Konstruktion, 3) den Beweis und 4) die Determination. Wie bei der Aufstellung dieser vier Teile zu verfahren ist oder vielmehr verfahren werden kann, dafür wollen wir versuchen, die gebräuchlichsten und zweckmäßigsten Methoden auseinander zu setzen und diese durch Beispiele illustrieren.

I. Die geometrische Analysis.

§ 3. Die Analysis, der Kern der ganzen Lösung, geht davon aus, daß sie annimmt, es sei das in der Aufgabe Geforderte konstruiert, und entwirft zunächst eine entsprechende Figur, welche zweckmäßig die analytische Figur genannt werden kann. Alsdann sucht man aus dieser Voraussetzung unter Anwendung von zweckmäßigen Hilfskonstruktionen und einschlägiger Lehrsätze Schlüsse auf geometrische Thatfachen zu machen, die entweder unmittelbar konstruiert werden können, so daß sich daraus das Geforderte der Aufgabe als Folge ergibt, oder doch eine Zurückführung (Reduktion) auf frühere Konstruktionen gestatten.

Um hierbei eine analytische Figur zu erhalten, welche den gestellten Forderungen möglichst entspricht, empfiehlt es sich, die gegebenen Stücke so zu nehmen, wie dieselben in der vorher entworfenen analytischen Figur vorkommen. Besonders hat man sich beim Entwerfen der analytischen Figur vor Zufälligkeiten zu hüten; man soll kein gleichschenkliges oder rechtwinkliges Dreieck entwerfen, wenn ein allgemeines Dreieck gefordert wird, um nicht Verhältnisse und Thatfachen in die Figur zu bringen, welche für den vorliegenden Fall nicht zutreffen und daher nur zu verwirrenden Schlußfolgerungen führen könnten.

§ 4. In den seltensten Fällen jedoch gelangt man durch Auf-
findung einer bezüglichen geometrischen Thatsache an der analytischen
Figur zu einer abgeschlossenen Analysis. In den andern (meisten)
Fällen hat man die gebräuchlichen Hilfsmittel für die Analysis
anzuwenden, deren es hauptsächlich zwei giebt, nämlich 1) die geo-
metrischen Örter, 2) die Reduktion.

§ 5. Da in den meisten Fällen bei Aufgaben von nicht
komplizierter Art die Analysis durch Bestimmung eines oder
mehrerer Punkte abgeschlossen werden kann, (auch wenn die Kon-
struktion eines Kreises oder einer Geraden, eines Dreiecks oder
eines Polygons verlangt wird,) so macht man in vielen Fällen
von dem Hilfsmittel der geometrischen Örter Gebrauch, was wir
als Anwendung der „Methode durch geometrische Örter“ be-
zeichnen wollen.

Unter einem geometrischen Orte (oder schlechtweg Orte) für
einen Punkt versteht man im strengen wissenschaftlichen Sinne die
Gesamtheit aller Punkte, welche eine verlangte Eigenschaft besitzen;
für die geometrische Analysis erweitert man diesen Begriff und
versteht unter demselben jede Gerade oder jede Kreisperipherie,
in welcher jener Punkt gemäß einer bestimmten Eigenschaft liegen
muß. Vermag man aus den Bedingungen der Aufgabe für einen
gesuchten Punkt zwei Örter zu bestimmen, so ist der Durchschnitts-
punkt dieser beiden Örter der gesuchte Punkt, so daß man, wenn
beide Örter Gerade sind, einen, wenn aber ein Ort oder beide
Örter Kreise sind, zwei Punkte (im allgemeinen) erhält, welche die
gestellten Bedingungen erfüllen. — Durch die oben angegebene
Erweiterung des Begriffs „geometrischer Ort“ gewinnt derselbe
erst seine Fruchtbarkeit für die geometrische Analysis, da man in
vielen Fällen den Ort eines Punktes im engeren Sinne mit Lineal
und Zirkel gar nicht konstruieren kann.

§ 6. Die vorhin in dem erweiterten Begriffe des geometrischen
Ortes aufgestellte Beschränkung auf eine Gerade und eine Kreis-
peripherie ist durchaus nicht willkürlich, sondern eine wissenschaftlich
begründete Notwendigkeit. Denn die Geometrie kennt nur zwei
Postulate, oder, was dasselbe ist, sie giebt nur zwei Konstruktionen
als unmittelbar möglich zu, nämlich 1) zwei Punkte durch eine
Gerade zu verbinden, und 2) um einen gegebenen Punkt mit einer

begrenzten Geraden als Radius einen Kreis zu beschreiben. Daraus folgt notwendig, daß nur eine Gerade oder eine Kreisperipherie in den geometrischen Konstruktionen als Örter auftreten können. In diesem Sinne ist auch bei den Konstruktionen der Gebrauch zweier mechanischen Hilfsmittel gestattet, des einfachen Lineals und des einfachen Zirkels, welche beiden Instrumente der stete reale Ausdruck jener beiden Postulate sind. Eine Aufgabe, welche sich nicht mit Hilfe dieser Postulate oder der beiden genannten Instrumente lösen läßt, gilt als geometrisch unlösbar, wie z. B. die Dreiteilung eines beliebigen Winkels, die Quadratur des Kreises und die delische Aufgabe, welche fordert, aus der Kante eines gegebenen Würfels die Kante des doppelt so großen Würfels zu konstruieren.

§ 7. Der Ort für einen gesuchten Punkt läßt sich nun entweder aus den Bedingungen der Aufgabe unmittelbar ableiten, oder derselbe muß anderweitig aufgesucht werden. In diesem Falle verbinde man den gesuchten Punkt mit einem bekannten Punkte der analytischen Figur, oder ziehe durch ihn ein Lot oder eine Parallele zu einer bekannten Geraden, betrachte die so gezogenen Geraden als Ort und suche dieselben unter Anwendung einschlägiger Lehrsätze zu konstruieren. Durch den gegebenen Punkt, womit man den gesuchten verbindet, oder durch die gegebenen Geraden, wozu man durch jenen ein Lot oder eine Parallele zieht, ist jedenfalls eine Eigenschaft des gesuchten Ortes gegeben. Zur wirklichen Bestimmung des gesuchten Punktes bedarf es dann nur noch einer zweiten konstruierbaren Eigenschaft.

§ 8. Ist aber in der analytischen Figur kein Punkt unmittelbar gegeben, durch dessen Verbindung mit dem gesuchten Punkte sich ein Ort für diesen ergeben würde, so wähle man dazu einen leicht, etwa mit Hilfe der Elementaraufgaben konstruierbaren Punkt, z. B. die Mitte einer bekannten Strecke, oder den Punkt, welcher eine bekannte Strecke nach bekanntem Verhältnis teilt, oder den Endpunkt einer um sich selbst verlängerten Strecke oder dergl.

§ 9. Als fernerer Weg, entweder unmittelbar einen gesuchten Punkt zu bestimmen, oder doch die Bestimmung eines notwendigen Ortes zu vermitteln, ist die Ausführung der in den Bedingungen der Aufgabe enthaltenen Beziehungen von Linien an der analytischen

Figur zu empfehlen, wie z. B. der Summe oder Differenz zweier Linien, oder ihres Verhältnisses. Letzteres überträgt man, wenn möglich, auf eine andere bekannte Gerade. Bei der Konstruktion der Summe oder Differenz zweier Geraden ist zu unterscheiden, ob dieselben von einem Punkte ausgehen oder nicht. Im erstern Falle stellt man die Summe dar, indem man die eine um die andere über diesen Punkt hinaus verlängert, die Differenz, indem man von diesem gemeinschaftlichen Punkte aus die eine von der andern abträgt. Man kann hierbei auch (geometrisch) die größere von der kleineren abtragen, indem man diese verlängert, bis sie gleich der größeren wird.

Gehen aber die Linien nicht von einem Punkte aus, so mache man dieselben Konstruktionen von einem Punkte aus, in welchem die eine von ihnen durch irgend eine Gerade begrenzt wird, z. B. von einem Fußpunkte der einen, wenn sie eine Senkrechte ist, oder dergl.

Kommt die Summe (oder Differenz) der Quadrate zweier Linien oder ihr Produkt (Rechteck) unter gegebenen Bedingungen vor, so stelle man letzteres durch Übertragung auf andere Linien dar und zwar am besten auf grund des Sehnen- und Sekantensatzes beim Kreise oder mittels Anwendung der Proportionen beim rechtwinkligen Dreiecke, ersteres auf grund des Pythagoreischen Lehrsatzes. Die Differenz zweier Quadrate wird häufig zweckmäßig als das Rechteck aus der Summe und der Differenz der Seiten dargestellt. In besonderen Fällen ist man jedoch der besonderen Darstellung dieser Beziehungen überhoben, wenn sich dieselben nämlich, wie häufig bei Kreis- und Dreiecksaufgaben, schon in der analytischen Figur dargestellt vorfinden, in welchen Fällen nur eine Übertragung erforderlich ist.

§ 10. Hier mögen die Sätze über geometrische Örter eine Stelle finden, welche zur Aufstellung einer Analysis am häufigsten Anwendung finden und bei einer großen Zahl von Aufgaben einfacherer Art zur Vollendung derselben für sich ausreichend sind. Die hauptsächlichsten sind:

1) Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einem festen Punkte eine gegebene Entfernung haben, ist eine Kreisperipherie, welche mit der gegebenen Ent-

fernung als Radius um den festen Punkt als Mittelpunkt beschrieben ist.

Oder

2) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche, mit einem gegebenen Radius beschrieben, durch einen festen Punkt gehen, ist eine mit dem gegebenen Radius um den festen Punkt beschriebene Kreisperipherie.

Die Beweise ergeben sich unmittelbar aus der Definition des Kreises.

3) Der geometrische Ort für die Punkte gleicher Entfernung von zwei festen Punkten ist das in der Mitte der Verbindungslinie der beiden festen Punkte zu dieser errichtete Lot.

Beweis leicht durch Kongruenz.

4) Der geometrische Ort für die Punkte gegebener Entfernung von einer gegebenen Geraden ist eine in der gegebenen Entfernung zu dieser gezogene Parallele.

Beweis. Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich.

Zusatz. Der parallele Ort kann auf beiden Seiten der gegebenen Geraden liegen.

5) Der geometrische Ort für die Punkte gleicher Entfernung von zwei Geraden ist die den Winkel der Geraden halbierende Gerade.

Beweis leicht durch Kongruenz.

Zusatz. Die Geraden bilden zwei Winkel miteinander.

6) Der geometrische Ort für die Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks mit gegebener Hypotenuse als Grundlinie ist die Kreisperipherie, deren Diameter die gegebene Hypotenuse ist.

Beweis. Der Winkel im Halbkreis ist ein rechter.

7) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Sehnen eines Kreises von gegebener Größe ist die Peripherie eines mit diesem Kreise konzentrischen Kreises, dessen Radius gleich der Entfernung einer Sehne von der gegebenen Größe von dem Mittelpunkte des Kreises ist.

Beweis. Das Lot vom Mittelpunkt auf die Sehne halbiert diese; und D. 6.

8) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche eine Gerade in einem gegebenen Punkte berühren, ist das in diesem Punkte zur Geraden errichtete Lot.

Beweis. Das Lot im Berührungspunkt zur Tangente geht durch den Mittelpunkt.

9) Der geometrische Ort für die Punkte, aus welchen an einen gegebenen Kreis Tangenten von gegebener Größe gezogen werden können, ist eine mit der gegebenen konzentrische Kreisperipherie, deren Radius die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ist, deren Katheten der Radius des gegebenen Kreises und die gegebene Länge der Tangenten sind.

Beweis einfach.

10) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berühren, ist der durch diesen Punkt gehende und eventuell verlängerte Durchmesser.

Beweis. Wenn zwei Kreise einander berühren, so liegt der Berührungspunkt auf der Centrale.

Zusatz. Zwei Örter!

11) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise mit gegebenem Radius, welche einen andern gegebenen Kreis berühren, ist ein mit dem gegebenen konzentrischer Kreis, dessen Radius entweder gleich der Summe oder der Differenz der beiden Radien ist

Beweis. Ist die Centrale zweier Kreise der Summe oder der Differenz ihrer Radien gleich, so berühren sich die Kreise.

12) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche zwei gegebene konzentrische Kreise berühren, ist ein dritter konzentrischer Kreis, dessen Radius entweder der halben Summe oder der halben Differenz der gegebenen Kreise gleich ist.

Beweis ganz ähnlich wie bei 11.

13) Der geometrische Ort für die Punkte, für welche die Summe der Quadrate der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten eine gegebene ist, ist ein Kreis,

dessen Mittelpunkt die Mitte der Verbindungslinie jener Punkte ist.

Beweis. Die Summe der Quadrate zweier Dreiecksseiten ist um das halbe Quadrat der dritten Seite größer als das doppelte Quadrat der zur dritten Seite gehörenden Mittellinie.

14) Der geometrische Ort für die Punkte, für welche die Differenz der Quadrate der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten eine gegebene ist, ist ein Lot zu der Verbindungslinie jener Punkte.

Beweis. Die Differenz der Quadrate zweier Dreiecksseiten ist gleich der Differenz der Quadrate ihrer Projektionen auf die dritte.

15) Der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke mit gegebener Grundlinie und gegebenem Winkel an der Spitze ist ein Kreisbogen über der Grundlinie als Sehne, an dessen Peripherie ein Winkel liegt, welcher dem gegebenen Winkel an der Spitze gleich ist.

Beweis. Peripheriewinkel auf demselben Bogen sind gleich.

16) Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zwei parallelen Geraden gleiche Entfernung haben, ist die in der Mitte zwischen ihnen liegende Parallele, die Mittelparallele.

Beweis leicht.

17) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der von einem gegebenen Punkte aus bis an eine gegebene Gerade gezogenen Geraden ist die zur gegebenen Geraden gezogene Parallele, welche den Abstand des Punktes von ihr halbiert.

Beweis. Die Parallele durch die Mitte einer Dreiecksseite zu einer zweiten halbiert auch die dritte.

18) Der geometrische Ort für die Endpunkte der geraden Linien, welche von einem Punkte aus gezogen durch eine gegebene Gerade halbiert werden, ist die Parallele zur gegebenen Geraden, welche gleichen Abstand von ihr hat, wie der gegebene Punkt.

Beweis wie bei 17.

19) Der geometrische Ort für die Endpunkte der Ge-

raden, welche von einem Punkte aus bis an eine gegebene Gerade gezogen in diesem Punkte halbiert werden, ist die zur gegebenen Geraden im doppelten Abstände des Punktes gezogene Parallele.

Beweis wie vorhin.

20) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise mit gegebenem Radius, welche eine gegebene Gerade unter einer gegebenen Sehne schneiden, ist eine Parallele zur gegebenen Geraden in der Entfernung der gegebenen Sehne vom Mittelpunkte eines mit dem gegebenen Radius beschriebenen Kreises.

Beweis. Sehnen eines Kreises sind gleich, wenn sie gleiche Entfernung vom Mittelpunkte desselben haben.

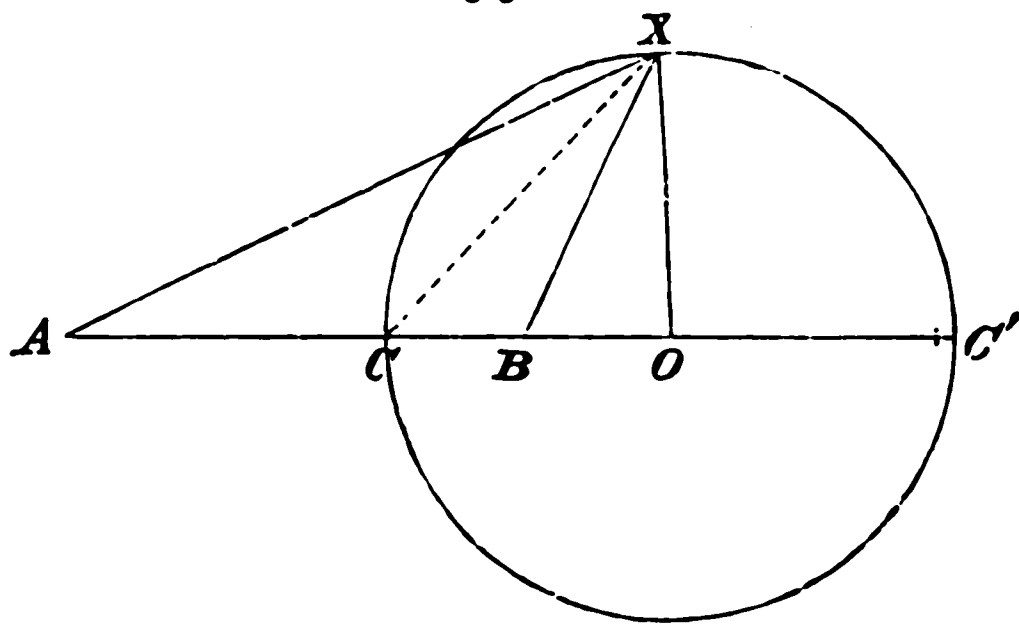
Zusatz. Zwei Örter!

21) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise von gegebenem Radius, welche einen gegebenen Kreis unter einer gegebenen Sehne schneiden, ist ein zum gegebenen konzentrischer Kreis, dessen Radius gleich der Summe oder der Differenz der Abstände der gegebenen Sehne vom Mittelpunkte ist, welche man erhält, wenn man dieselbe in den gegebenen Kreis und in einen mit dem gegebenen Radius beschriebenen Kreis abträgt.

Beweis ergibt sich leicht.

22) Der geometrische Ort für die Punkte, deren Ent-

Fig. 1.



fernungen von zwei festen Punkten ein gegebenes Verhältnis haben, ist ein Kreis, dessen Diameter die Entfernung der beiden Punkte ist, in welchem die Entfernung der festen Punkte in-

nerlich und äußerlich nach jenem Verhältnis geteilt wird.

Beweis. Liegen die Punkte C und C' so auf AB , daß

$AC : BC = AC' : BC' = m : n$ ist, und ist X ein Punkt in der Peripherie des Kreises über CC' als Diameter, dessen Mittelpunkt O , so ergibt sich aus

$$AC' : AC = BC' : BC \text{ zunächst}$$

$$AC : 2CO = BC : 2BO, \text{ und hieraus}$$

$$AO : CO = CO : BO.$$

Nun ist $CO = XO$, also $AO : XO = XO : BO$, woraus folgt, daß $\triangle AXO \sim BXO$, folglich ist $\sphericalangle BXO = A$, also $AXC = BXC$, woraus nach bekanntem Lehrsatz der Planimetrie sich ergibt, daß $AX : BX = AC : BC = m : n$ ist.

Zusatz. Ist $m = n$, so tritt statt dieses Ortes D. 3 auf.

§ 11. Die Anwendung vorstehender Sätze über die gebräuchlichsten geometrischen Örter, welche wir bei späterer Bezugnahme als D. 1, 2 u. s. w. bezeichnen werden, möge an einigen Aufgaben näher gezeigt werden.

Aufgabe 1. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn eine Seite desselben und die zu dieser Seite gehörige Höhe und Mittellinie gegeben sind.

Oder ein Dreieck zu konstruieren aus a , h_a und m_a .

Analysis. Da durch die eine gegebene Seite a (oder BC) die beiden Ecken B und C des Dreiecks gegeben sind, wenn man nur eine Gerade $BC = a$ hinlegt, so fehlt zur Konstruktion nur noch die Bestimmung der dritten Ecke A . Nun ist durch die gegebene Höhe h_a die Entfernung des Punktes A von BC , durch die gegebene Mittellinie aber die Entfernung des Punktes A von der Mitte von BC gegeben. Man kann daher nach D. 4 und D. 1 je einen Ort für A konstruieren. Der Durchschnitt beider Örter giebt den Punkt A , wodurch man das ganze Dreieck ABC erhält.

Aufgabe 2. Durch einen Punkt in einen Kreis eine Sehne von gegebener Größe zu legen.

Analysis. Es ist durch den gegebenen Punkt eine Tangente an den nach D. 7 konstruierten Kreis zu ziehen.

Aufgabe 3. Einen Kreis zu konstruieren, der zwei einander durchschneidende Gerade berührt und dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden oder Kreis-Peripherie liegt.

Analysis. Durch die gegebene Gerade oder Kreisperipherie, worauf der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegen soll, ist unmittelbar ein Ort für den Mittelpunkt gegeben. Ein zweiter Ort ergibt sich nach D. 5. Der Radius des gesuchten Kreises ist das Lot von dem durch die zwei Örter bestimmten Mittelpunkte auf eine der gegebenen Geraden.

Aufgabe 4. Einen Kreis zu konstruieren, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.

Analysis. Soll der gesuchte Kreis durch P gehen und die Gerade MN in A berühren, so ist nach D. 8 das in A zu MN errichtete Lot ein Ort für den gesuchten Mittelpunkt X . Da nun auch $XP = XA$ sein muß, so erhält man einen zweiten Ort für X nach D. 3.

Aufgabe 5. Einen Kreis zu konstruieren, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und einen anderen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt.

Analysis durch Anwendung von D. 10 und 3.

Aufgabe 6. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt.

Analysis durch Anwendung von D. 2 und 4.

Aufgabe 7. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Geraden berührt.

Analysis. Wegen der geforderten Berührung findet D. 5 Anwendung, wegen des gegebenen Radius D. 4.

Aufgabe 8. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und einen andern gegebenen Kreis berührt.

Analysis. Der eine Ort ist nach D. 2 ein Kreis um den gegebenen Punkt mit dem gegebenen Radius; der andere nach D. 1 ein mit dem gegebenen konzentrischer Kreis mit einem Radius, der gleich der Summe zweier bekannten Radien ist.

Aufgabe 9. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Analysis. Durch den gegebenen Radius ist mit Rücksicht auf die Berührung der Geraden für den Mittelpunkt des geforderten Kreises ein Ort nach D. 4 gegeben, mit Rücksicht auf die Berührung des Kreises aber ein solcher nach D. 11.

Aufgabe 10. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu konstruieren, welcher zwei gegebene Kreise berührt.

Analysis. Für den Mittelpunkt des gesuchten Kreises lassen sich nach D. 11 leicht zwei Örter bestimmen.

Aufgabe 11. Einen Kreis zu konstruieren, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und zwei parallele Gerade berührt.

Analysis durch Anwendung von D. 16 und D. 2 einfach.

Aufgabe 12. Einen Kreis zu konstruieren, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.

Analysis. Die letztere Bedingung giebt einen Ort für den gesuchten Mittelpunkt nach D. 8; Anwendung von D. 3 giebt einen zweiten Ort.

Aufgabe 13. Einen Kreis zu konstruieren, der zwei parallele Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Analysis. Außer nach D. 16 ergibt sich, da der Radius des gesuchten Kreises leicht abzuleiten ist, für den Mittelpunkt noch ein zweiter Ort nach D. 11.

Aufgabe 14. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt geht und einen andern Kreis unter einer gegebenen Sehne schneidet.

Analysis. Für den gesuchten Mittelpunkt ergibt sich aus ersterer Bedingung ein Ort nach D. 2, aus der andern nach D. 21.

Aufgabe 15. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade berührt und eine andere unter einer gegebenen Sehne schneidet.

Analysis durch Anwendung von D. 4 wegen der erstern Bedingung; wegen der zweiten Bedingung wende man D. 21 in einer für den vorliegenden Fall leicht erkennbaren Modifikation an.

Aufgabe 16. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der einen von zwei gegebenen Kreisen berührt und den andern unter einer gegebenen Sehne schneidet.

Analysis. Ein Ort für den gesuchten Mittelpunkt wird nach D. 11, der andere nach D. 21 bestimmt.

Aufgabe 17. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei parallele Gerade jede unter einer gegebenen Sehne schneidet und dabei durch einen gegebenen Punkt geht.

Analysis. Wenn man in einem beliebigen Punkte zu den gegebenen Parallelen das gemeinschaftliche Lot zieht und von den Fußpunkten desselben auf jeder Parallelen nach beiden Seiten die halbe entsprechende Sehne abträgt, so ist die Entfernung des Mittelpunktes des Kreises, den man durch die vier Endpunkte der abgetragenen Sehnen legen kann, von einem dieser Endpunkte der Radius des gesuchten Kreises und die Parallele durch dessen Mittelpunkt zu den gegebenen Parallelen der eine Ort für den Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Der andere Ort ergibt sich mittels des gefundenen Radius nach D. 2.

Aufgabe 18. Von einem Punkte außerhalb eines Kreises an diesen eine Sekante zu ziehen, welche von der Peripherie desselben halbiert wird.

1. **Analysis.** Ist AXY die verlangte Sekante, welche in X halbiert wird, und M der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, so läßt sich auf dem Orte MX (für den Punkt X) der Punkt B bestimmen, wenn man MX bis B um sich selbst verlängert. Zieht man dann AB , so ist $AB = MX$. Dadurch erhält man aber für B zwei Örter nach D. 1, da die Entfernungen BA und MB durch den Radius des Kreises gegeben sind. Ist aber B bestimmt, so giebt die Verbindungslinie MB den Punkt X und die ganze Sekante AXY .

2. **Analysis.** Man erhält auch einen zweiten Ort für X (der eine Ort ist unmittelbar durch den Kreis gegeben), wenn man es mit der Mitte C von AM verbindet, wobei sich ergibt, daß XC gleich der Hälfte des Radius des gegebenen Kreises ist.

3. **Analysis.** Eine dritte Ortsbestimmung für X ergibt sich durch folgende Betrachtung. Schneidet der durch A gezogene Diameter den gegebenen Kreis in D und E , und man verbindet X mit der Mitte F von AD und mit der Mitte G von AE , so ist $XF \parallel YD$, und $XG \parallel YE$, also $\angle FXG = 1 R$. Daraus ergibt sich für X , da F und G gegeben sind, ein Ort nach D. 6.

4. Analysis. Auch kann man für Y einen zweiten Ort leicht bestimmen. Zieht man nämlich den Diameter YMT und verbindet T mit A , so ergibt sich, da $\sphericalangle YXT = 1R$ ist, daß AT gleich dem Diameter des gegebenen Kreises. Es ist also T zu bestimmen und TM giebt Y .

Aufgabe 19. Durch einen Punkt in der Peripherie des inneren zweier konzentrischen Kreise in den äußeren eine Sehne zu legen, welche durch die Peripherie des inneren Kreises in drei gleiche Teile geteilt wird.

Ist A der gegebene Punkt und die Sehne $BACD$ so gezogen, daß $BA = AC = CD$ ist, so ergibt sich folgende

Analysis. Verbindet man den Mittelpunkt M mit A und verlängert diese Verbindungslinie über A um sich selbst bis E , so ist EB gleich dem kleineren Radius, EC gleich dem größeren, woraus nach D. 1 sowohl für B als auch für C ein zweiter Ort bestimmt werden kann, da ja für beide Punkte ein erster Ort durch die Kreisperipherie selbst gegeben ist.

Aufgabe 20. Durch einen Durchschnittspunkt zweier Kreise in den einen eine Sehne zu legen, welche durch die Peripherie des andern halbiert wird.

Ist A der betreffende Durchschnittspunkt der beiden Kreise um M und M_1 , so erhält man folgende

1. Analysis. Die Sehne AB möge in den Kreis um M gelegt und in C auf der Peripherie des Kreises um M_1 halbiert sein. Verbindet man M mit C , so ist $\sphericalangle MCA = 1R$, daher ergibt sich ein Ort für C nach D. 6 als Halbkreis über dem Radius AM als Durchmesser.

2. Analysis. Verlängert man MC , bis sie die Peripherie des Kreises M_1 zum zweiten Male in D schneidet, so ist AM_1D Diameter, da $\sphericalangle ACD = 1R$. Der zweite Ort DM für C ist also konstruierbar.

3. Analysis. Verbindet man C mit der Mitte E von AM , so ist EC gleich $\frac{1}{2}MA$, woraus sich nach D. 1 ein Ort für C bestimmen läßt.

4. Analysis. Verbindet man D (s. 2. Analysis) mit B , so ist $DB = AD = \text{Diameter des Kreises } M_1$, woraus sich nach D. 1 ein Ort für B bestimmen läßt.

Aufgabe 21. Zwischen die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks eine gegebene Strecke so zu legen, daß sie von der Hypotenuse halbiert wird.

Analysis. Liegt die gegebene Strecke $DE = a$ so zwischen den Katheten AB und AC , daß sie durch die Hypotenuse BC in F halbiert wird, und man zieht durch F die Parallelen FG und FH zu AB und AC bis in AC und AB , so ergibt sich leicht die Kongruenz der Dreiecke FHD und FGE ; daraus aber, daß $GE = HF = AG$ ist, woraus sich wiederum die Kongruenz von FAG und FEG ergibt. Aus dieser Kongruenz folgt aber, daß $FA = \frac{1}{2}a$ ist, woraus sich nach D. 1 für F der zweite Ort ergibt.

Zusatz. Unmittelbarer ergibt sich, daß $FA = \frac{1}{2}a$ aus dem Umstande, daß DE Hypotenuse wird und nach dem Satze über den Winkel im Halbkreis die Mitte der Hypotenuse von ihren Endpunkten und dem Scheitel des rechten Winkels gleich weit entfernt ist.

Aufgabe 22. Von zwei Punkten außerhalb eines Kreises an diesen zwei Sekanten zu ziehen, von denen die eine die andere rechtwinklig schneidet und halbiert.

Analysis. Wird von den beiden zu einander rechtwinkligen Sekanten PA und $P'B$ die letztere durch die erste halbiert, so ergibt sich leicht, daß $PP' = PB$ ist. Hieraus ergibt sich für B ein zweiter Ort nach D. 1.

Aufgabe 23. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und einer zugehörigen Mittellinie. (Etwa aus a , b und m_b .)

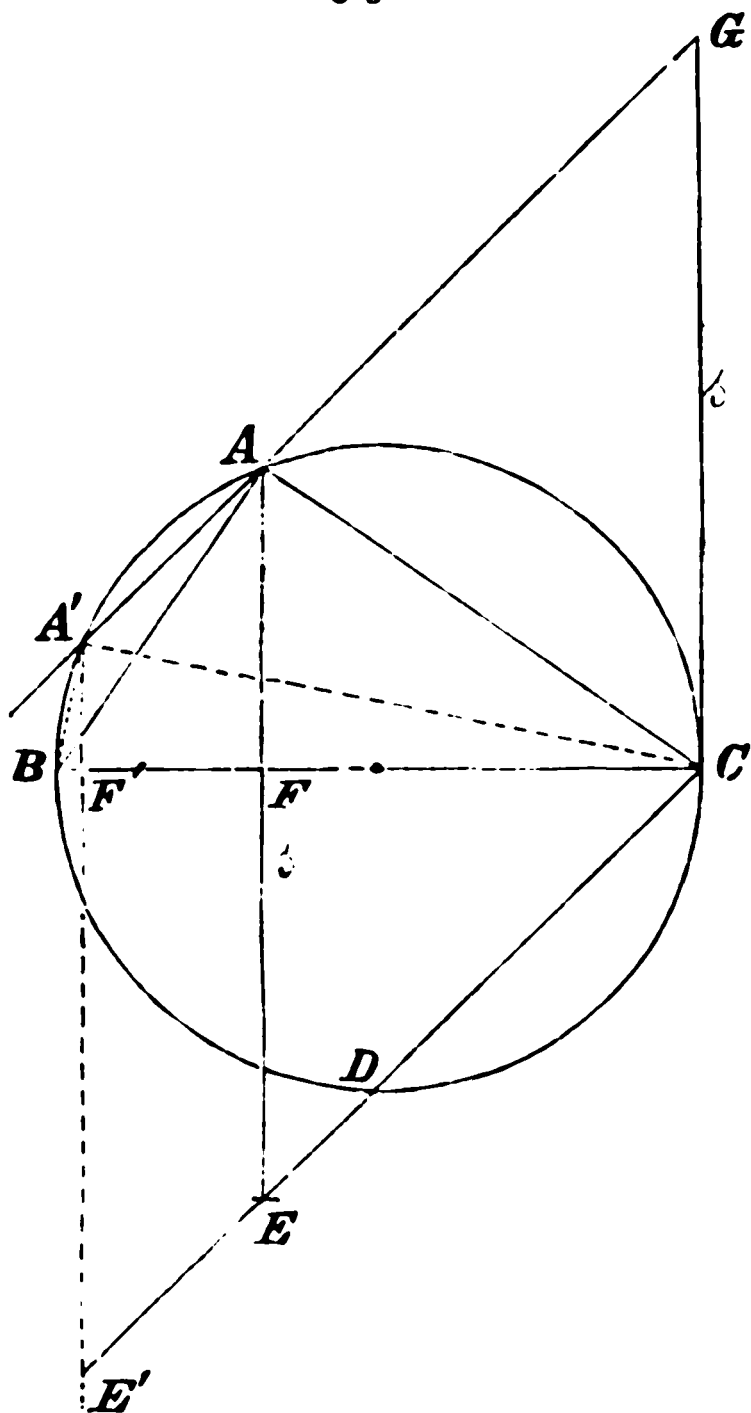
Analysis. Durch a sind die Ecken B und C des Dreiecks gegeben. Für die Mitte D der Seite CA erhält man nach D. 1 zwei Örter, den einen, weil $BD = m_b$, den andern, weil $CD = \frac{1}{2}b$ ist. Ecke A ergibt sich dann leicht.

Aufgabe 24. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, einem anliegenden Winkel und der Höhe von dem Scheitel dieses Winkels aus. (Aus a , $\angle B$ und h_b .)

Analysis. Durch die Seite a sind die beiden Ecken B und C des Dreiecks gegeben; durch den Winkel B die Richtung der

Zwischen diese (konstruierbare) Linie CE und den ersten Ort für A ist nun eine Gerade senkrecht auf BC so zu legen, daß sie

Fig. 3.



gleich $q + h$ wird. Errichtet man daher in C auf BC ein Lot $CG = q + h$, so ist die Parallele durch G zu CE der zweite Ort für A . Ist statt der Summe die Differenz $q - h$ gegeben, so mache man das Lot $CG' = q - h$ und lege dieses Lot in entgegengesetzter Richtung, nachdem man FA über A um AE gleich der gegebenen Differenz verlängert hat; dann ist die durch G' zu CE gezogene Parallele der zweite Ort für A .

Aufgabe 28. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der Höhe zu einer andern und der Mittellinie zur dritten Seite. (Aus a , h_b und m_c .)

Analysis. Durch die Seite a sind die beiden Ecken B und C des gesuchten Dreiecks gegeben. Für die dritte Ecke A ist zunächst ein Ort die von C aus an den um B als Mittelpunkt mit h_b als Radius beschriebenen Kreis gezogene Tangente. Von dem zweiten Orte für A , nämlich der Seite BA läßt sich außer B noch ein Punkt, nämlich die Mitte D bestimmen. Für D hat man zwei Örter, einen durch die bekannte Länge $CD = m_c$ nach (D. 1), den andern in der Parallele durch die Mitte E von BC zu der aus C gezogenen Tangente.

Aufgabe 29. Ein Dreieck zu konstruieren aus den auf einer Seite durch die Höhe gebildeten Abschnitten und einer zu einer andern Seite gehörigen Mittellinie. (Etwa aus p und q [den Abschnitten auf a] und m_b .)

Analysis. Durch die Abschnitte p und q ist ihre Summe, die Seite a , also die Ecken B und C des gesuchten Dreiecks gegeben; außerdem der Fußpunkt D der zugehörigen Höhe. Als ersten Ort für die dritte Ecke A hat man dann zunächst das Lot in D auf BC ; von dem zweiten Orte, Seite CA , wovon der Punkt C bekannt ist, läßt sich mittels zweier Örter noch ein Punkt, die Mitte E , bestimmen. Der eine Ort dafür ist nach D. 1 die Peripherie des um B mit m , beschriebenen Kreises, der andere das in der Mitte F von DC zu DC errichtete Lot. (Der Punkt E ließe sich auch anders bestimmen. Verlängert man die Mittellinie BE um sich selbst bis F und fällt $FG \perp BC$, so läßt sich leicht beweisen, daß $CG = BD = p$ ist. Dadurch erhält man aber zwei Örter für F , den einen nach D. 1, da $BF = 2m$, bekannt ist, und das Lot in dem bestimmbaren Punkt G auf BC .)

Aufgabe 30. An einen Kreis eine Tangente zu ziehen, so daß das Stück derselben zwischen dem Berührungspunkte und einer gegebenen Geraden oder einer anderen Kreisperipherie von gegebener Größe werde.

Analysis. Nach D. 9 erhält man einen Ort für den Punkt, in welchem die Tangente die gegebene Gerade oder die andere Kreisperipherie schneidet.

Aufgabe 31. Zwischen zwei Kreisperipherien eine Gerade von gegebener Größe so zu legen, daß sie Tangente eines der beiden gegebenen Kreise wird.

Analysis wie zu A. 30.

Aufgabe 32. Innerhalb eines Dreiecks einen Punkt zu bestimmen, so daß die Verbindungslinien mit den Ecken des Dreiecks unter sich gleiche Winkel bilden.

Analysis. Es ergibt sich leicht, daß jeder dieser Winkel 120° betragen muß, wonach man zwei Örter für den gesuchten Punkt nach D. 15 erhält.

Aufgabe 33. In einer Dreiecksseite (BC) einen Punkt X zu bestimmen, so daß die Verbindungslinie DE der von X auf AB und AC gefällten Lote der Seite BC parallel wird.

Analysis. Wenn man außer dem Parallelismus von DE und BC noch berücksichtigt, daß $AEXD$ ein Sehnenviereck ist,

und man zieht noch die Diagonale AX , so läßt sich der Winkel AXC oder AXB seiner Größe nach bestimmen und daraus nach D. 15 ein zweiter Ort für X ableiten.

§ 12. Neben der Methode, die Analysis durch geometrische Örter zu bestimmen, ist als zweite Methode die Methode der Reduktion hervorzuheben, welche in allen Fällen anzuwenden ist, in welchen die erstere nicht zum Ziele führt. Diese Methode besteht darin, daß man aus den in der analytischen Figur unmittelbar erkennbaren oder durch zweckmäßige Hilfskonstruktionen erreichbaren Beziehungen entweder die betreffende Aufgabe auf eine frühere direkt reduziert, oder einen Teil der gesuchten Figur, meist in Gestalt eines Hilfsdreiecks, vorab als konstruierbar nachweist, und aus diesem Teile durch schließliche Anwendung von geometrischen Örtern die ganze gesuchte Figur ableitet. Wir engen den Begriff der Methode durch Reduktion dahin ein, daß sie die betreffende Aufgabe entweder direkt auf eine frühere zurückführt, oder doch die vorherige Konstruktion einer Hilfsfigur erfordert. Wo eine Analysis durch bloß mittelbare Ortsbestimmungen aufgestellt ist, wie bei den Aufgaben 28 und 29, rubrizieren wir diese unter die Methode durch geometrische Örter; und heben dies deshalb besonders hervor, weil von manchen Autoren auch in diesen Fällen die Methode der Reduktion erkannt wird.

Der Wege einer solchen Reduktion werden verschiedene betreten. Wir wollen dieselben hier näher besprechen und durch Beispiele illustrieren.

§ 13. Wesentlichen Dienst, namentlich bei Dreieckskonstruktionen, leisten zunächst die sogenannten Data. Unter einem Datum versteht man die Verbindung von drei oder vier planimetrischen Größen, die in der Art voneinander abhängig sind, daß man im ersten Fall (einer Verbindung von drei Größen) aus je zweien derselben ein rechtwinkliges, im andern (einer Verbindung von vier Größen) aus je dreien ein schiefwinkliges Dreieck konstruieren kann, so daß in jenem das dritte, in diesem das vierte Stück mit gegeben erscheint. In beiden Fällen kann man jedes dritte Stück des konstruierbaren rechtwinkligen, oder jedes vierte Stück des schiefwinkligen Dreiecks als mit gegeben betrachten und für die Gewinnung der Analysis verwerten.

Um nur ein Beispiel anzuführen, indem wir uns vorbehalten, die anderweitigen Daten an betreffender Stelle der Anwendung näher hervorzuheben, sei bemerkt, daß beispielsweise eine Dreiecksseite, der gegenüber liegende Winkel und der Radius des umgeschriebenen Kreises, also z. B. a , $\angle A$ und r ein Datum bilden. Denn aus je zweien dieser Stücke läßt sich das rechtwinklige Dreieck konstruieren, welches man erhält, wenn man den Mittelpunkt M des umgeschriebenen Kreises mit einem Endpunkte der Sehne $BC = a$, etwa mit B und mit dem Mittelpunkte D derselben verbindet. Da aber dies Dreieck aus je zwei seiner Stücke, unter welchen indeß eine Linie vorkommen muß, konstruiert werden kann, so bilden je zwei solcher Stücke mit jedem anderen Stücke desselben ein Datum. Man kann also in vorliegendem Falle sagen, daß je zwei obiger Stücke auch mit der Entfernung des Mittelpunktes M von der Seite BC ein Datum bilden und diese als gegeben betrachten.

§ 14. Es möge hier besonders darauf hingewiesen werden, daß wir die Beziehungen der in den Bedingungen gegebenen Größen zu andern, welche entweder nach den Gesetzen der allgemeinen Größenlehre oder durch die nach Fundamentalaufgaben möglichen Konstruktionen aus jenen als neue für die Analysis verwendbare Größen abgeleitet werden können, nicht als Data auffassen, sondern vielmehr als notwendige Konsequenz der Gesetze der allgemeinen Größenlehre. Daß man z. B. aus zwei gegebenen Größen ihre Summe oder Differenz, ihr Rechteck, ihr Verhältniß, die Summe oder Differenz ihrer Quadrate, ihre mittlere, dritte und harmonische Proportionale als gegeben ableiten kann, sei hier als selbstverständlich vorausgesetzt, ohne daß wir nötig haben, den Begriff „Datum“ darauf auszudehnen. In gleicher Weise gelte es als selbstverständlich, daß man aus je zweien dieser abgeleiteten Formen die Größen einzeln ableiten kann. Denn eine Kollision mit der algebraischen Analysis findet hierdurch nicht statt, da man die Größen in jedem Falle der Kombination unmittelbar durch rein geometrische Konstruktionen abzuleiten vermag.

§ 15. Unter den hier folgenden Aufgaben, deren Analysis entweder durch direkte Zurückführung auf eine frühere Aufgabe, oder mit Hilfe von Daten gemacht werden soll, kommen auch solche

wiederholt vor, deren Analysis schon mittels geometrischer Örter bestimmt worden ist.

Aufgabe 34. Durch einen Punkt in der Peripherie des kleineren zweier konzentrischen Kreise in den größeren eine Sehne zu legen, welche durch die Peripherie des kleineren in drei gleiche Teile geteilt wird. (Vergl. A. 19.)

Analysis. Zieht man den Diameter DOE und verlängert EB über B hinaus um sich selbst bis F , so ist die verlangte Sehne $DCAB$ Mittellinie im Dreieck EFD zur Seite EF und, da $BA = \frac{1}{2} AD$ ist, A der Durchschnitt der drei Mittellinien. Es ist also, da auch OAF eine Mittellinie des Dreiecks ist, $AF = 2 \cdot AO$, also Punkt F bestimmbar. Von diesem Punkte F ist nun an den größeren Kreis eine Sekante zu legen, welche in der Peripherie desselben halbiert wird. Das geschieht aber nach A. 18.

Aufgabe 35. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus der Höhe und der Differenz der Abschnitte, welche die Höhe auf der Hypotenuse bildet.

Analysis. Ist AD die Höhe des Dreiecks und man macht $CE = BD$, so ist DE die gegebene Differenz und Dreieck ADE durch seine Katheten gegeben. Da nun die Mitte F von DE zugleich Mitte von BC ist, so ist durch $AF = FC = FB$ je ein Ort für B und C gegeben, wofür die Gerade DE der andere Ort ist.

Aufgabe 36. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Höhe, der zugehörigen Mittellinie und dem Radius des umgeschriebenen Kreises. (Aus h_a , m_a und r .)

Analysis. Ist AD die Höhe h_a und AE die Mittellinie m_a , so ist Dreieck ADE gegeben. Dann hat man für den Mittelpunkt M des umgeschriebenen Kreises zwei Örter, nämlich das Lot in E zu ED und nach D. 2 einen Kreis um A mit r . Durch den Kreis aber werden die Punkte B und C bestimmt.

Aufgabe 37. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der Höhe zu einer andern und der Differenz der Winkel an dieser andern Seite. (Aus c , h_a , $B - C$.)

Analysis. Sei AD die Höhe h_a , und AE der Winkelhalbierer w_a ; dann läßt sich zeigen, daß h_a , w_a und $\frac{1}{2}(B - C)$ ein Datum bilden. Bezeichnen wir nämlich $\sphericalangle BAD$ durch α , $\sphericalangle DAE$ durch δ und $\sphericalangle CAE$ durch β , so ist zunächst $\alpha + \delta = \beta$

oder $\delta = \beta - \alpha$. Nun ist aber $\beta = R - C - \delta$, $\alpha = R - B$, also $\beta - \alpha = B - C - \delta$, woraus sich ergibt $\delta = \frac{1}{2}(B - C)$. Durch das konstruierbare Dreieck ADE ist also die winkelhalbierende Transversale w_a als ein mit gegebenes Stück bestimmt. Konstruiert man $\triangle ADE$ aus der Kathete $AD = h_a$ und $\sphericalangle \delta = \frac{1}{2}(B - C)$, so ist außer DE ein zweiter Ort nach D. 1 durch C gegeben, ebenso dadurch, daß $\sphericalangle \beta = \alpha + \delta$ ist, ein zweiter Ort für C .

Zusatz. Wäre statt h_a die w_a oder auch statt $B - C$ die w_a gegeben, so würde sich auf grund obigen Datums die Aufgabe mit Hilfe des Hilfsdreiecks ADE lösen lassen.

Aufgabe 38 und 39. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus der Hypotenuse und der Summe (oder Differenz) der Katheten. (Aus a und $b \pm c$.)

Analysis. Ist ABC das gesuchte Dreieck und man macht AD auf der Verlängerung von CA und AD' auf AC selbst gleich AB , so ist die Lösung direkt auf die Konstruktion des Dreiecks BCD oder BCD' reduziert. Im ersteren Dreiecke ist nämlich gegeben $BC = a$, $CD = b + c$ und $\sphericalangle D = 45^\circ$, im andern $BC = a$, $CD' = b - c$ und $\sphericalangle D' = 1\frac{1}{2}R$. Für A hat man in beiden Fällen nach D. 3 einen zweiten Ort.

Aufgabe 40 und 41. Ein Quadrat zu konstruieren, wovon die Summe (oder Differenz) der doppelten Seite und der Diagonale gegeben ist. (Gegeben $2a \pm e$.)

Analysis. Verlängert man die Diagonale AC über jeden Endpunkt um die Seite des Quadrates, so daß $AE = AB$ und $CF = CB$ ist, so ist das Dreieck EFB durch die Seite $EF = 2a + e$ und die anliegenden Winkel, deren jeder $\frac{1}{4}R$ beträgt, gegeben. Für die Punkte A und C ergibt sich je ein zweiter Ort nach D. 3. — Stellt man im andern Falle die gegebene Differenz $2a - e$ dadurch dar, daß man AB um sich selbst bis F verlängert, und $AE = AC$ abschneidet, so ist $\triangle EFB$ gegeben durch die Seite $EF = 2a - e$ und die anliegenden Winkel. Es ist nämlich $\sphericalangle EFC = \frac{1}{2}R$ und $\sphericalangle FEC$ das Supplement von $67\frac{1}{2}^\circ$. Für B ergibt sich wiederum ein zweiter Ort nach D. 3; für A ist ein zweiter Ort das Lot in C auf CF .

Aufgabe 42 und 43. Einen Rhombus zu konstruieren, von welchem die Seite und die Summe (oder Differenz) der beiden Diagonalen gegeben sind. (Aus a , $e \pm f$.)

Analysis. Wird in beiden Fällen auf die Konstruktion eines der vier rechtwinkligen Dreiecke reduziert, in welche der Rhombus durch die Diagonalen zerlegt wird. Man kennt davon außer der Hypotenuse die Summe (oder Differenz) der halben Diagonalen, also $\frac{1}{2}(e + f)$ oder $\frac{1}{2}(e - f)$. Folglich A. 38 und 39.

Aufgabe 44. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, der zugehörigen Höhe und der Differenz der durch die Höhe auf der Gegenseite gebildeten Abschnitte. (Aus A , h_a und $p - q$.)

Analysis. Ist D der Fußpunkt der Höhe h_a , und man trägt $CE = q$ von CB ab, so ist $ED = p - q$. Verbindet man nun die Mitte F von DE mit A , so ist $FD = \frac{1}{2}(p - q)$, und $\triangle AEF$ gegeben, daher $p - q$, h_a und m_a ein Datum bilden. Verlängert man dann die hierdurch gegebene Mittellinie AF über F um sich selbst bis G , so ist $ABGC$ ein Parallelogramm und also $\sphericalangle ABG$ das Supplement von A gegeben. Dadurch erhält man aber im Dreieck AGB nach D. 15 einen zweiten Ort für die Ecke B .

Aufgabe 45 und 46. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem gegenüber liegenden Winkel und der Summe (oder Differenz) der den Winkel einschließenden Seiten. (Aus a , $\sphericalangle A$ und $b \pm c$.)

Analysis. Verlängert man CA über A hinaus um $AD = c$ (oder schneidet von A aus $AD' = c$ von AC ab) und verbindet D und D' mit B , so sind die Dreiecke BCD und BCD' durch zwei Seiten und einen Gegenwinkel gegeben, nämlich $BC = a$, $DC = b + c$, $\sphericalangle D = \frac{1}{2}A$; und $D'C = b - c$, $\sphericalangle BD'C = 1R + \frac{1}{2}A$. Für A erhält man in beiden Fällen einen zweiten Ort nach D. 3.

Aufgabe 47 und 48. Ein Dreieck zu konstruieren aus der Summe (oder Differenz) zweier Seiten und den beiden Gegenwinkeln. (Aus $b \pm c$, B und C .)

Analysis. Da durch die zwei Winkel B und C auch der dritte A gegeben ist, so führt die Analysis auf dieselben beiden Hilfsdreiecke, wie die vorhergehende.

Aufgabe 49 und 50. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus einer Kathete und der Summe (oder

Differenz) der Hypotenuse und der andern Kathete. (Aus b und $a \pm c$.)

Analysis. Verlängert man die Kathete AB über B um $BD = BC$ (oder schneidet von B aus auf der Verlängerung von BA über A ein Stück $BD' = BC$ ab), so erhält man in beiden Fällen durch Verbindung von D und D' mit C ein rechtwinkliges Hilfsdreieck ADC (oder $AD'C$) konstruierbar aus seinen Katheten, aus welchem der Übergang zum gesuchten Dreieck mit Hilfe eines zweiten Ortes für B nach D. 3 sehr leicht ist.

Anmerkung. Es wäre in vorliegendem Falle unzweckmäßig, die Hypotenuse um die Kathete zu verlängern, oder letztere von der Hypotenuse abzutragen, da in beiden Fällen der rechte Winkel für die Analysis verloren gehen würde.

Aufgabe 51. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, der zugehörigen Höhe und der Differenz der Abschnitte, welche diese Höhe auf der dem Winkel gegenüber liegenden Seite bildet. (Aus A , h_a und $p - q$.)

Analysis. Beschreibt man um A mit AC als Radius einen Kreis, der CB in E schneidet, so ist $BE = p - q$. Betrachtet man nun BEA als Hilfsdreieck, da die beiden Ecken B und E durch $p - q$ unmittelbar gegeben sind, so ist für die dritte Ecke zunächst ein Ort durch die gegebene Höhe h_a gegeben. (Vergl. D. 4.) In dem zweiten Orte für A , nämlich der Seite CA läßt sich der Punkt G bestimmen, in welchem das in E zu BC errichtete Lot die Seite AC trifft. Es liegt nämlich dieser Punkt auf dem um A mit AC beschriebenen Kreise und es ist daher $EG = 2h_a$. Verbindet man nun diesen konstruierbaren Punkt mit B , so ist, da $\angle BAG = 2R - A$ durch $\angle A$ gegeben ist, für A ein zweiter Ort nach D. 15 gegeben.

Aufgabe 52. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Höhe und der zugehörigen Mittellinie, wenn die hierzu gehörige Seite doppelt so groß sein soll als eine der beiden andern. (Aus h_a , m_a , wenn $a = 2b$.)

Analysis. Ist ABC das verlangte Dreieck, und in demselben $AD = m_a$, $AE = h_a$, so ist Dreieck ADE unmittelbar gegeben, und DE ein Ort für C . Da aber gemäß der Bedingung $a = 2b$ Seite $AC = DC$ sein soll, so ist für C ein zweiter Ort nach D. 3 gegeben.

Aufgabe 53. Ein Dreieck zu konstruieren aus dem Radius des umgeschriebenen Kreises, einer Höhe und der Differenz der beiden nicht zugehörigen Winkel. (Aus r , h_a und $B - C$.)

Analysis. Die Höhe h_a , der zugehörige Winkelhalbierer und die Differenz der beiden anderen Winkel bilden ein Datum (s. A. 37). Es ist daher der Winkelhalbierer AE durch das Dreieck ADE (D Fußpunkt der Höhe h_a) gegeben. Verbindet man nun A mit dem Mittelpunkt M des umgeschriebenen Kreises, so ist $\sphericalangle EAM = DAE$. Denn $\sphericalangle BAE = CAE$ und $\sphericalangle BAD = CAM$, weil ihre Komplemente als Peripheriewinkel auf demselben Bogen AC einander gleich sind. Dadurch ist aber ein Ort für den Mittelpunkt M gegeben, ein anderer durch r nach D. 1.

Aufgabe 54. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind eine Höhe, der entsprechende Winkelhalbierer und die Differenz der durch die Höhe gebildeten Abschnitte der betreffenden Seite. (Aus h_a , w_a , $p - q$ auf a .)

Analysis. Zieht man $AD \parallel BC$ bis in die Peripherie des umgeschriebenen Kreises, so ist $AD = p - q$; ferner $\sphericalangle ACD = B - C$, $DH = h_a$. Da nun $B - C$ durch h_a und w_a gegeben ist (vergl. A. 37), so ist das Hilfsdreieck ADC konstruierbar. Der um ADC konstruierbare Kreis ist ein zweiter Ort für B ; der erstere ist die Parallele durch C zu AD .

Aufgabe 55. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und der Differenz ihrer Projektionen auf die dritte Seite. (Aus b , c , $p - q$.)

Analysis. $\triangle ADC$ (Fig. wie vorhin) ist durch seine drei Seiten gegeben.

Aufgabe 56. Ein Dreieck zu konstruieren aus der Differenz der durch eine Höhe auf einer Seite gebildeten Abschnitte, der Differenz der an dieser Seite anliegenden Winkel und einer der beiden anderen Seiten. (Aus $p - q$, $B - C$ und b [oder c].)

Analysis. Wiederum ist (vergl. vorige Analysis) das Dreieck ADC unmittelbar gegeben.

Aufgabe 57. Ein Dreieck zu konstruieren aus dem Radius des umgeschriebenen Kreises, der Differenz zweier

Winkel und einer anliegenden Seite. (Aus r , $B - C$ und b .)

Analysis. Wiederum Dreieck ADC gegeben, da der Radius, $\angle ACD$ und Seite AD ein Datum bilden. (Vergl. § 13.)

Aufgabe 58. Die vorige Aufgabe mit der Änderung, daß statt $B - C$ die Differenz $p - q$ gegeben ist.

Analysis wiederum durch das Dreieck ADC .

Aufgabe 59. Zwischen die Seiten AB und BC die Gerade $XY = a$ so zu legen, daß $AX : CY = p : q$ wird.

Analysis. Macht man $AY' \parallel XY$ und zieht YY' , so muß auch $DB : BC = p : q$ sein. Dadurch ist aber CD zu konstruieren als ein Ort für Y' , ein zweiter Ort wird durch die gegebene Länge a nach D. 1 bestimmt.

Aufgabe 60. In ein Viered einen Rhombus zu beschreiben, dessen Seiten den Diagonalen des Viereds parallel werden.

Analysis. Sind X , Y , Z und T die Ecken des eingeschriebenen Rhombus in den Seiten AB , BC , CD und DA , so ergibt sich leicht, daß jede Seite in diesen Punkten nach dem Verhältnis der Diagonalen geteilt werde.

Aufgabe 61. Von einem Punkte außerhalb eines Kreises an diesen eine Sekante zu ziehen, welche durch die Peripherie nach dem goldenen Schnitt geteilt wird.

Analysis. Ist O der Mittelpunkt des gegebenen Kreises und AXY die verlangte Sekante, so muß

entweder $AY : AX = AX : XY$

oder $AY : XY = XY : AX$

sein, je nachdem das äußere oder das innere Stück der Sekante der größere Abschnitt sein soll. Im erstern Falle läßt sich der Durchschnitt der Parallele XB zu OY mit AO , sowie die Länge der Parallele bestimmen; im andern Falle ergibt sich, daß die Sehne XY der von A an den Kreis gezogenen Tangente gleich ist.

Aufgabe 62. Von zwei Punkten außerhalb eines Kreises an diesen durch einen gemeinschaftlichen Punkt der Peripherie zwei Sekanten so zu ziehen, daß die Verbindungslinie der andern Endpunkte der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte parallel wird.

Analysis. Der Durchschnitt einer in einem der Endpunkte der einen Sekante an den Kreis gelegten Tangente mit der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte läßt sich mittels einer Proportion bestimmen.

Anmerkung. Es sei bemerkt, daß man auf diese Aufgabe eine Berührungsaufgabe: Durch zwei Punkte einen Kreis zu legen, der einen gegebenen Kreis berührt reduzieren kann.

Aufgabe 63. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und der Halbierungslinie des eingeschlossenen Winkels. (Aus b , c und w_a .)

Analysis. Mit Hilfe der Parallele durch B zu AC bis in die verlängerte w_a (in D) kann man diese Verlängerung als 4. Proportionale konstruieren. Dann das Dreieck ABE (E Endpunkt der Verlängerung), aus diesem ABD und endlich ABC .

Aufgabe 64. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Höhe, Mittellinie und einem Winkelhalbierer, welche alle drei von derselben Ecke ausgehen. (Aus h_a , m_a , w_a .)

Analysis. Sind D , E und F die Fußpunkte von h_a , m_a und w_a , so sind die Dreiecke ADE und ADF gegeben. Für den Mittelpunkt M des dem gesuchten Dreiecke umgeschriebenen Kreises ist ein Ort das in E zu DE errichtete Lot, der andere bestimmt sich dadurch, daß $\angle MAF = FAD$ ist. Der Radius ist AM , und der Kreis bestimmt die Punkte B und C .

Aufgabe 65. Von der Spitze eines Dreiecks zur Grundlinie eine Gerade so zu ziehen, daß sie die mittlere Proportionale zu den von ihr gebildeten Abschnitten der Grundlinie wird.

Analysis. Ist AD die verlangte Gerade, welche über D bis in den um ABC beschriebenen Kreis verlängert diesen in E trifft, so muß $AD = DE$ sein. Verbindet man daher den Mittelpunkt M jenes Kreises mit D , so ist $MD \perp AE$, daher für D gemäß D. 6 ein zweiter Ort zu bestimmen, während die gegebene Seite BC der erste Ort für D ist.

Aufgabe 66. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der Differenz der anliegenden Winkel und der Summe der beiden andern Seiten. (Aus a , $B - C$, $b + c$.)

Analysis. Beschreibt man um A mit der kleineren Seite c einen Kreis, welcher die Seite b in D , ihre Verlängerung in E schneidet, und man verbindet D mit B , so ist $\sphericalangle ABD = \frac{1}{2}(B - C)$. Verbindet man ferner E mit B , so ist $\sphericalangle DBE = 1 R$ und das Hilfsdreieck CBE durch zwei Seiten, nämlich $CE = b + c$, $CB = a$, und den der größern dieser gegenüber liegenden Winkel, $\sphericalangle CBE = 1 R + \frac{1}{2}(B - C)$, gegeben. Für A erhält man dann in einfachster Weise einen zweiten Ort außer der Seite CE nach D. 3.

Aufgabe 67. Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel und der Summe der beiden ungleichen Höhen. (Aus $\sphericalangle A$ [oder B] und $h_a + h_b$.)

Analysis. Verlängert man die Höhe BE (h_b) über E bis F , so daß $EF = AD$ (h_a) wird, und zieht FG bis in BC senkrecht zu BF , so ist $\sphericalangle FBG = \frac{1}{2}A$. Aus dem planimetrischen Satze, daß sich die Höhen eines Dreiecks umgekehrt wie die zugehörigen Seiten verhalten, ergibt sich durch die Proportion $BC : CG = BE : EF$, daß $CG = CA$ ist. Deshalb hat man, wenn Dreieck BFG konstruiert ist, für A einen Ort in der Halbierungslinie des $\sphericalangle FGB$, welcher $= \sphericalangle C$ ist. Nun ist $\sphericalangle ABF$ das Komplement von A , und dadurch ein zweiter Ort für A gegeben. Das Lot von A auf BF bestimmt C .

Aufgabe 68. Statt der Summe der beiden ungleichen Höhen möge ihre Differenz gegeben sein.

Analysis. Wenn man von E aus auf EB das Stück $EF = AD$ abträgt, so ist EB die gegebene Differenz, und wiederum, wenn $FG \perp FE$ gezogen wird (F in BC), das Dreieck GBF gegeben. Für A ergeben sich zwei Örter, einer, weil GA den Nebenwinkel von $\sphericalangle G$ halbiert, der andere durch $\sphericalangle AGC$, welcher sich bestimmen läßt.

§ 16. Wenn in der analytischen Figur die gegebenen Stücke nicht so zusammen liegen, daß sie einen konstruierbaren Teil der gesuchten Figur bilden, so kann man einen solchen häufig dadurch erhalten, daß man die betreffenden Linien in andere Lagen bringt, welche den ursprünglichen parallel sind. Bei einer solchen Verlegung von Geraden bleiben, was ein großer Vorteil ist, die etwa gegebenen Winkel zwischen denselben unverändert erhalten. Mit

etwa vorkommenden Kreisen kann eine derartige Verlegung oder Verschiebung in zweifacher Weise vorgenommen werden. Entweder wird unter Beibehaltung des Radius der Mittelpunkt des Kreises auf einer Geraden von bestimmter Richtung verschoben, oder man verschiebt unter Beibehaltung der Lage des Mittelpunktes die Peripherie gewissermaßen parallel mit sich, indem man den Radius größer oder kleiner nimmt, wobei auch, wenn man den Radius Null werden läßt, der Fall eintritt, daß der ganze Kreis auf seinen Mittelpunkt reduziert wird. Diese letzte Art der Verschiebung eines Kreises ist identisch mit der Hilfskonstruktion konzentrischer Kreise. Verwandt mit dieser Methode ist auch die Umlegung eines Teils der analytischen Figur, um eine bequemere Lage der gegebenen Stücke zu einander zu erhalten. Diese Methode der Verschiebung von Geraden und Kreisen, sowie der Umlegung findet übrigens so häufig mit Vorteil Anwendung und bringt willkommene Erleichterung durch Reduktion, daß sie verdient, als eine Methode der Reduktion unter dem Namen Methode der Parallelverschiebung und der Umlegung besonders hervorgehoben zu werden. Die Art ihrer Anwendung möge an einer Anzahl von Beispielen näher erörtert werden.

Aufgabe 69. Ein Paralleltrapez zu konstruieren, dessen vier Seiten gegeben sind.

Analysis. Verschiebt man eine der nicht parallelen Seiten parallel mit sich so, daß sie von dem einen Endpunkte der andern ausgeht — zieht man zu diesem Zwecke z. B. $CE \parallel DA$, so ist Dreieck EBC durch seine drei Seiten gegeben.

Aufgabe 70. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Mittellinien und der dritten Höhe. (Aus m_b , m_c und h_a .)

Analysis. Verlegt man die Höhe AD in den Fußpunkt der einen Mittellinie, etwa nach F , dem Fußpunkte von m_b , so wird das Lot $FH = \frac{1}{2}h_a$ und Dreieck BFH ist unmittelbar gegeben.

Aufgabe 71. Von den Endpunkten einer Sehne nach einem Punkte der Kreisperipherie zwei Gerade zu ziehen, welche auf einer zweiten Sehne zwischen sich ein Stück von gegebener Länge abschneiden.

Analysis. Sind die Geraden AX und BX so durch CD

gezogen, daß $FG = a$ ist, und man zieht $AH \# FG$, so ist Punkt H bekannt und $HG \parallel AX$. Daher ist $\angle HGB$ gleich dem Peripheriewinkel X , welcher durch die Sehne AB gegeben ist und durch ihn über HB einen Kreisbogen als zweiten Ort für G .

Aufgabe 72. Ein Trapez zu konstruieren aus seinen Diagonalen, dem Winkel derselben und einer Seite.

Analysis. Verlegt man die Diagonale DB nach CE , wo $CE \parallel DB$ ist, so ist Dreieck ACE gegeben, da $\angle ACE$ das Supplement des Winkels der Diagonalen oder auch diesem Winkel selbst gleich ist. Das Trapez selbst ist mit Hilfe der gegebenen Seite, welche es auch sei, in einfachster Weise abzuleiten.

Aufgabe 73. Ein Trapez zu konstruieren aus den Diagonalen und den parallelen Seiten.

Analysis durch dieselbe Verschiebung, wie vorhin.

Aufgabe 74. Ein Trapez zu konstruieren aus den Diagonalen und den nicht parallelen Seiten.

Analysis. Es sei $ABCD$ das verlangte Paralleltrapez, AB und CD die parallelen Seiten. Bringt man nun durch Parallelverschiebung DA und DB in die Lage CE und CF , so liegen die vier gegebenen Linien zusammen. Es ist dann $AE = DC = BF$ und man würde das verlangte Trapez leicht erhalten, wenn man durch die vier um C mit den gegebenen Linien als Radien beschriebenen konzentrischen Kreise eine Gerade so legen könnte, daß $AE = BF$ würde. Wenn die Gerade die Kreise beziehungsweise zum zweiten Male in den Punkten E', A', B', F' schneidet, und man berücksichtigt, daß je zwei Abschnitte der Geraden, welche zwischen denselben Peripherien liegen, einander gleich sind, so müßte $EA = B'F'$ sein. Bestimmt man nun für den Punkt E in Bezug auf den äußersten Kreis, für Punkt A in Bezug auf den Kreis durch B die (innere) Potenz, so ist jene $EF \cdot EF'$, diese $AB' \cdot AB$; da nun $EF = AB$ ist, so verhält sich $EF' : AB'$ wie die Potenzen der Punkte E und A in den bezeichneten Kreisen. Nun sind diese Potenzen für einen beliebigen Punkt der Peripherien für die bezeichneten Kreise konstant, da die kleinsten Sehnen konstant sind. Man erhält also das Verhältniß dieser Potenzen durch zwei Gerade ausgedrückt, wenn man durch einen beliebigen Punkt in jeder der Peripherien eine Sehne so legt, daß der eine

Abschnitt der einen einem Abschnitte der andern gleich wird. In kurzer Bezeichnung erhalten wir also $EF' : AB' = m : n$ oder $2AE + AB' : AB' = m : n$. Daraus aber ergibt sich $AE : AB' = \frac{1}{2}(m - n) : n$. Hiernach kann man aber bei beliebiger Annahme des Punktes A den Punkt E und B' und so die ganze Gerade bestimmen.

Aufgabe 75. Ein Parallelogramm zu konstruieren aus seinen Seiten und dem Winkel der Diagonalen.

Analysis. Verlegt man DB parallel mit sich nach CF , so ist Dreieck ACF gegeben, da AF die Summe der gegebenen Seiten, die Mittellinie CB eine dieser Seiten und $\angle ACF$ durch den Winkel der Diagonalen bekannt ist. Für C hat man einen Ort nach D. 1, da B und BC gegeben, den andern nach D. 15, da $\angle ACF$ bekannt ist.

Aufgabe 76. Ein Viereck zu konstruieren, von welchem die Seiten und die Verbindungslinie der Mitten seiner Diagonalen der Länge nach gegeben sind.

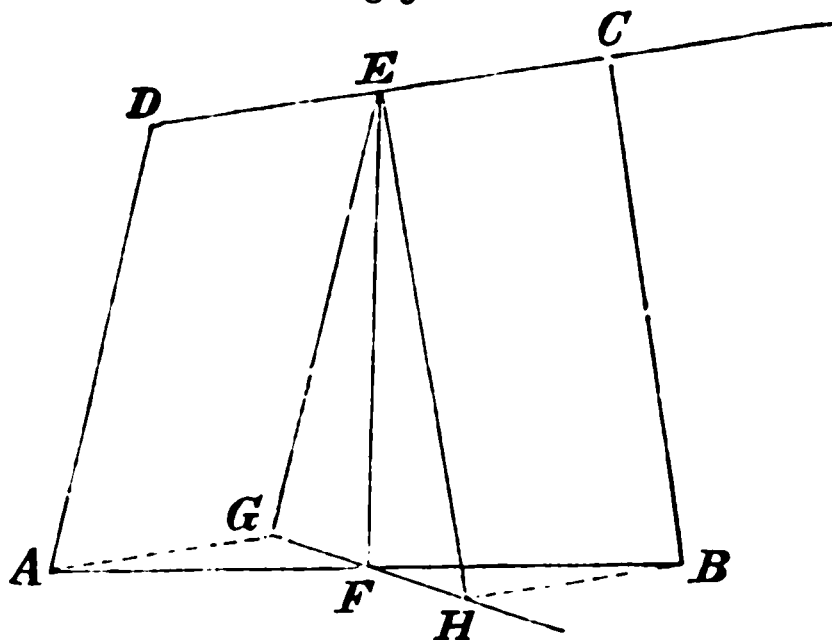
Analysis. Ist $ABCD$ das verlangte Viereck, E und F die Mitten der Diagonalen BD und AC , und man zieht EG (G in BC) parallel zu CD , $FG \parallel AB$ (FG muß nämlich ebenfalls die Mitte G von BC treffen), und in gleicher Weise durch E und F die Parallelen EH und FH zu AD und BC , so sind die beiden Dreiecke EFG und EFH durch ihre drei Seiten gegeben. Nun wird $HG \parallel AC$, also ist die Parallele durch F zu HG ein Ort für C , ein anderer die Parallele durch G zu FH . C bestimmt B , da $CG = GB$, dieses A , da $BH = HA$ ist. Auch für die vierte Ecke ergeben sich leicht zwei Örter, nämlich die Parallele durch A zu HE und eine andere durch C zu GE .

Aufgabe 77. Ein Viereck zu konstruieren aus seinen Seiten und der Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenseiten.

Analysis. Verschiebt man die beiden andern Seiten, etwa DA und CB , parallel bis an die Mitte E der einen Seite (DC), so daß $EG \parallel DA$ und $EH \parallel CB$ ist, so ist, wenn F die Mitte von AB ist, die Verbindung von G mit F , und F mit H eine einzige Gerade, da sich aus der Kongruenz der Dreiecke AGF und BHF die Gleichheit von $\angle AFG$ und BFH ergibt. Aus

derselben Kongruenz folgt auch, daß $FG = FH$, also EF eine Mittellinie des Dreiecks EGH ist, von welchem außerdem noch

Fig. 4.



die Seiten $EG = DA$ und $EH = CB$ gegeben sind. Für das Dreieck EGH ergibt sich aber eine einfache Analysis durch Umlegung. Verlängert man nämlich EF über F um sich selbst bis J , so ist Dreieck EJH durch seine drei Seiten gegeben.

Zusatz. Man kann in den Fällen, wo eine Mittel-

linie zu den Bestimmungsstücken eines Dreiecks gehört, die Verlängerung dieser über ihren Fußpunkt um sich selbst als eine ziemlich sicher erfolgreiche Hilfskonstruktion bezeichnen.

Aufgabe 78 und 79. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, der Summe (oder Differenz) der einschließenden Seiten und der aus dem Scheitel des gegebenen Winkels gezogenen Mittellinie. (Aus A , $b \pm c$ und m_a .)

Analysis wird gemäß Zusatz zu A. 77 auf ein Dreieck reduziert, von welchem statt der Mittellinie die dritte Seite gegeben ist, dessen Analysis in A. 77 ausgeführt ist.

Aufgabe 80. Ein Parallelogramm zu konstruieren aus einer Seite und den beiden Höhen.

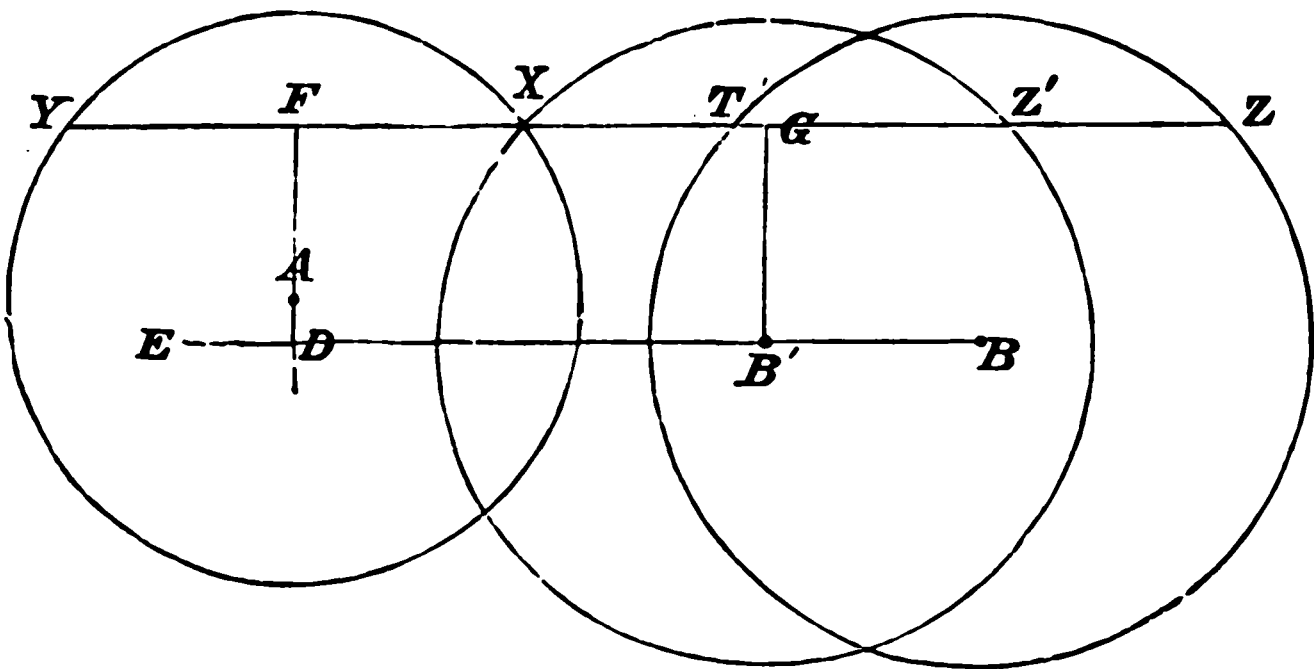
Analysis durch Parallelverschiebung der einen Höhe in den einen Endpunkt der gegebenen Seite.

Aufgabe 81. Durch zwei auseinander liegende Kreise in gegebener Richtung eine Gerade zu ziehen, so daß die entstehenden Sehnen eine gegebene Summe bilden.

Analysis. Verschiebt man den Mittelpunkt B des einen Kreises so, daß seine Entfernung von der gesuchten Geraden dieselbe bleibt, also parallel der die Richtung der gesuchten Geraden angehenden Geraden, so bleibt die Größe der Sehne in demselben ungeändert. Es empfiehlt sich also, durch eine solche Verschiebung die gegebenen Kreise in eine Lage zu einander zu bringen, welche

der Lösung dieser Aufgabe günstiger ist. Eine solche ist aber die, wo sich dieselben auf der Gesuchten durchschneiden. Heißt nun YX die Sehne im Kreise um A , TZ die im Kreise um B , und man verschiebt den Mittelpunkt auf der die Richtung der Gesuchten angegebenen Geraden bis in B' , so daß der Kreis durch X geht und die Sehne XZ' erhält, so ist $XZ' = TZ$, also die Summe $YX + XZ' = YX + TZ$. Fällt man nun von dem Mittelpunkte A und dem neuen Mittelpunkte B' Lote auf die gesuchte

Fig. 5.



YZ , so liegt zwischen deren Fußpunkten F und G eine Strecke, welche der halben gegebenen Summe gleich ist. Da nun das Lot von A auch die BE etwa in D rechtwinklig trifft, welcher Punkt bestimmt werden kann, so ist auch DB' gleich jener halben Summe und der neue Mittelpunkt B' hierdurch gegeben. Konstruiert man dann um B' den verschobenen Kreis, so hat man zur Erhaltung der Gesuchten YZ durch den Durchschnittspunkt X beider Kreise das Lot zu dem Lote zu ziehen, welches man von A auf die ihrer Richtung nach gegebene BE errichtet hat.

Aufgabe 82. Von einem Punkte, der außerhalb zweier getrennt liegenden Kreise liegt, eine Gerade durch diese zu legen, daß die in denselben entstehenden Sehnen einander gleich werden.

Analysis. Könnte man den einen Kreismittelpunkt unter Beibehaltung seiner Entfernung von der gesuchten Geraden so verschieben, daß die gleichen Sehnen aufeinander fielen, so wäre die Aufgabe durch die gemeinschaftliche Sehne in der neuen Lage gelöst.

Das geht aber auf folgende Weise. Verschiebt man den Mittelpunkt N des einen Kreises auf einer Geraden, welche parallel der gesuchten Geraden PD ist, welche im Kreise um M die Sehne AB , im andern die gleich große Sehne CD bildet, bis X , so daß die Sehne CD mit AB zusammenfällt, so ist, wenn man MX zieht, $\angle MXN = 1 R$, wodurch ein Ort für X nach D. 6, nämlich der Halbkreis über der Centrale MN als Diameter gegeben ist. Nun ist die Tangente von P an den Kreis um M gleich der Tangente an den Kreis um X , dessen Radius gegeben ist. Man erhält also durch die konstruierbare Größe PX nach D. 1. einen zweiten Ort für X .

Aufgabe 83. Einen Kreis zu konstruieren, der einen gegebenen Kreis und zwei einander schneidende Geraden berührt.

Analysis. Berührt der Kreis um X den Kreis um A und die beiden Geraden BC und BD und man verschiebt die Peripherie des Kreises um X , was hier mit der Verschiebung der Peripherie des gegebenen Kreises bis auf den Mittelpunkt A gleichbedeutend ist, so erhält man statt des gesuchten einen mit diesem konzentrischen Kreis, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und zwei Gerade, welche von den gegebenen um den Radius des gegebenen Kreises entfernt sind, berührt. Durch die Verschiebung der Kreisperipherie ist also eine Reduktion auf eine einfachere Aufgabe gewonnen.

Aufgabe 84. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei andere berührt und zwar den einen in einem gegebenen Punkte.

Analysis. Berührt der Kreis um X den Kreis um A in B und außerdem den Kreis um C , so wird, wenn man die Peripherie desselben bis in C verschiebt, dieser konzentrische Kreis, außer daß er durch C geht, noch einen um A mit einem Radius, welcher der Differenz der gegebenen beiden Radien gleich ist, beschriebenen Kreis in einem bestimmbar Punkte berühren. Also wiederum eine Reduktion auf eine einfachere Aufgabe.

Aufgabe 85. Ein Viereck zu konstruieren aus seinen Winkeln und zwei gegenüber liegenden Seiten.

Analysis. Verschiebt man die eine der gegebenen Seiten, AB etwa an die andere als DE , so ist Dreieck DCE gegeben,

da $\angle CDE = A + D - 2R$ gegeben ist, wenn $A + D > 2R$ ist, oder $\angle CDE = 2R - (A + D)$ für den Fall, daß $A + D < 2R$ ist. Ist $A + D = 2R$, so ist die Lösung sehr einfach.

Aufgabe 86. Durch zwei aus einander liegende Kreise in gegebener Richtung eine Gerade zu legen, so daß die entstehenden Sehnen eine gegebene Differenz bilden.

Analysis. (Vergl. A. 81.) Verschiebt man den Mittelpunkt B des kleineren Kreises in der gegebenen Richtung bis B' , so daß DB' gleich der halben gegebenen Differenz ist, so ist $B'X$ gleich dem Radius dieses Kreises, also X direkt bestimmbar.

Aufgabe 87. Ein Paralleltrapez zu konstruieren aus den nicht parallelen Seiten, einer Diagonale und dem Verhältnis der parallelen Seiten.

Analysis. Verlegt man die Seite AB nach DE , so sind die drei konzentrischen Kreise um D mit DC , DE und DB gegeben. Man hat in diese eine Sehne BEC zu legen, daß $BE : BC$ das gegebene Verhältnis ist. (S. Nachtr. 14.)

Aufgabe 88. Ein Viereck zu konstruieren aus drei Seiten und den beiden Winkeln an der vierten Seite.

Analysis. Sind DA , AB und BC die gegebenen drei Seiten und D und C die gegebenen Winkel, und man fällt von A und B die Lote AE und BF auf die vierte Seite, so sind durch die konstruierbaren Dreiecke ADE und BCF , in welchen außer der Hypotenuse aus den gegebenen Winkeln D und C sich je ein Winkel ableiten läßt, die beiden parallelen Seiten AE und BF eines Trapezes gegeben, von dem man noch die Seite AB kennt. Dies erhält man durch das Dreieck ABG , in welchem $BG = BF - AE$ ist.

Aufgabe 89. Ein Trapez zu konstruieren aus seinen Diagonalen, der Verbindungslinie der Mitten der nicht parallelen Seiten und einem Winkel.

Analysis. Ist EF die gegebene Verbindungslinie, DB und AC die Diagonalen, B der gegebene Winkel, und man bringt die Diagonale BD in die parallele Lage AK , so wird, wenn man EF bis G in AK verlängert, sich beweisen lassen, daß GH (H Durchschnitt mit AC) gleich EF ist. Es ist also $\triangle AGH$ gegeben, da AG und AH die Hälften der betreffenden Diagonalen sind. Für B ist ein Ort durch $\angle B$ gegeben nach D. 15, wenn man zuvor

AH bis C um sich selbst verlängert, der andere ist die Parallele durch A zu GH . Durch das so bestimmte B erhält man einen Ort für D als Parallele durch B zu AG . Schließlich hat man AG um sich selbst bis K zu verlängern, und KC ist der zweite Ort für D .

Aufgabe 90. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei andere und eine gegebene Gerade berührt.

Analysis. Verschiebt man die Peripherie des gesuchten Kreises bis in den Mittelpunkt des einen der gegebenen Kreise, so ist dieser neue Kreis ein solcher, welcher durch einen gegebenen Punkt geht, eine Gerade und einen Kreis berührt, und der sich als Hilfskreis einfacher konstruieren läßt, als der verlangte. Apollonisches Berührungsproblem!

Aufgabe 91. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und der Differenz der gegenüber liegenden Winkel. (Aus b, c und $B - C$.)

Analysis mittels Umlegung. Legt man das Dreieck ABC so, daß C' in B , und B' in C zu liegen kommt, wobei die Ecke A' in der durch A zu BC gezogenen Parallele liegt, so ist $\triangle AB'A'$ unmittelbar durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gegeben. Es ist nämlich $\sphericalangle AB'A' = B - C$.

Aufgabe 92. In einen gegebenen Kreis ein Viereck zu beschreiben, wovon man zwei gegenüber liegende Seiten und die Summe der beiden andern Seiten kennt.

Analysis durch Umlegung. Bringt man nämlich $\triangle ACD$ in die Lage ACD' , so daß $AD' = CD$ und $CD' = AD$ ist, so liegen beide Paare Seiten, die gegebenen und die nicht gegebenen, mit ihren Endpunkten an einander. Das Dreieck ABD' läßt sich dann unmittelbar konstruieren und die Ecke C bestimmen. Legt man dann das Dreieck ACD' wieder um, so daß $AD = CD'$ und $CD = AD'$ wird, so ist $ABCD$ das verlangte Viereck.

Aufgabe 93. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel und der zugehörigen Höhe und Mittellinie. (Aus $\sphericalangle A, h_a$ und m_a .)

Analysis durch Umlegung in die Lage $A'BC$, wo A' an der andern Seite von BC liegt, und $A'B = AC, A'C = AB$

wird. Es ist dann $ABA'C$ ein Parallelogramm und also $AA' = 2m_a$; ferner $\angle ABA' = 2R - A$.

Aufgabe 94. Ein Quadrat zu konstruieren, wovon zwei Ecken auf einer gegebenen Geraden in gegebenen Punkten liegen, die beiden andern aber in die Peripherie zweier gegebenen Kreise fallen sollen.

Analysis durch Umlegung. Sind nämlich A und B die gegebenen Ecken in der Geraden MN , X und Y die Ecken auf den Peripherien der Kreise um O und O' , so ist $XY \perp AB$. Wenn man daher den Kreis O' mit seinem Mittelpunkt in den Gegenpunkt von O' in bezug auf MN verlegt, so wird derselbe den Kreis O in X durchschneiden.

Aufgabe 95. In einen Kreis ein Viereck einzuschreiben, wenn man von demselben zwei gegenüber liegende Seiten und das Verhältniß der beiden andern kennt.

Analysis durch Umlegung wie bei A. 92.

Aufgabe 96. Ein Tangentenviereck $ABCD$ zu konstruieren aus zwei an einander stoßenden Seiten (AD und AB) und den beiden anliegenden Winkeln (von denen keiner eingeschlossen ist).

Analysis durch Umlegung. Legt man nämlich das Dreieck ADC an die andere Seite der den Winkel A halbierenden Geraden, so wird $D'C'$ in der neuen Lage Tangente bleiben und man erhält ein konstruierbares Dreieck, wovon man die Seite $D'B$ und die beiden anliegenden Winkel kennt. Dadurch aber erhält man auch den dem Vierecke einzuschreibenden Kreis als einen äußern Berührungskreis dieses Dreiecks.

§ 17. Eine Umlegung dieser Art, wie sie schon bei Aufgabe 94 vorkam, pflegt man ihrer besonderen Natur wegen „Umlegung durch Drehung um eine Axe“ zu nennen. In A. 94 war die gegebene Gerade, hier die den Winkel A halbierende Gerade die Axe. Die Vorteile für die Lösung ergeben sich hierbei aus der symmetrischen Lage der ursprünglichen und der durch Drehung erhaltenen Figur zur Drehungsaxe.

In vielen Fällen ergeben sich verwendbare Vorteile für die Lösung einer Aufgabe durch die Drehung einer Figur (d. h. eines Systems von Geraden und Kreisbogen) in weiterem Sinne. Wir

verstehen darunter die Drehung einer Figur in bezug auf einen gegebenen Punkt in der Weise, daß die Verbindungslinie eines jeden Punktes der Figur mit dem gegebenen Punkte um einen bestimmten Winkel (den Drehungswinkel δ), selbstverständlich in demselben Sinne, gedreht wird, und die Entfernungen zweier entsprechenden Punkte vom gegebenen Punkte vor und nach der Drehung in einem konstanten Verhältnis stehen.

Man übersieht die sich hierbei ergebenden Vorteile am sichersten, wenn man den Drehungswinkel δ zunächst gleich Null nimmt. Für diesen Fall reduziert sich die ganze Operation auf die Konstruktion eines Systems, welches in bezug auf den gegebenen Punkt ähnlich liegt, wie das gegebene, wobei man eine direkt ähnliche und eine umgekehrt ähnliche Lage unterscheidet, je nachdem der dem Punkte A des gegebenen Systems entsprechende Punkt A' des neuen mit diesem an derselben oder entgegengesetzten Seite des gegebenen Punktes P liegt.

Da hierbei jede Länge PA' des neuen Systems aus der entsprechenden Länge PA des gegebenen nach der Proportion $PA' : PA = m : n$ gewonnen wird, so daß $PA' = \frac{m}{n} \cdot PA$ ist, so kann man diese Konstruktion passend eine Multiplikation des Systems mit $\pm \frac{m}{n}$ nennen, je nachdem eine direkt oder umgekehrt ähnliche Lage erhalten wird.

Ist die multiplizierte Figur ein Kreis, so lassen sich die durch eine solche Multiplikation sich ergebenden Vorteile am besten übersehen und in ihrer allgemeinen Gültigkeit am einfachsten beweisen. Durch die konstruktive Ausführung einer solchen ergibt sich zugleich, was unter Multiplikation eines Punktes in bezug auf einen gegebenen zu verstehen ist.

Man kann nämlich von je zwei Kreisen in der Ebene jeden als durch Multiplikation des andern entstanden denken. Hierbei heißen homologe Punkte beider Kreise je zwei, welche auf demselben Ähnlichkeitsstrahl liegen; homologe Gerade werden außer den Verbindungslinien homologer Punkte (Ähnlichkeitsstrahlen) je zwei Gerade genannt, von denen die eine zwei Punkte des einen Kreises, die andere die homologen Punkte des anderen verbindet (homologe

Linien der ersten und der zweiten Art!); homologe Winkel endlich heißen die Winkel, welche je eine homologe Gerade der ersten und zweiten Art mit einander bilden.

Alsdann ergibt sich mit Hilfe bekannter Lehrsätze sehr leicht der Beweis für folgende beiden Thatsachen:

- 1) Homologe Gerade (der zweiten Art) sind parallel.
- 2) Homologe Winkel sind einander gleich.

Auf grund dieser Thatsachen ist dann ferner leicht zu erkennen, daß zur Multiplikation einer Geraden nur ein Punkt derselben zu multiplizieren ist, da die Richtung derselben nicht geändert wird, und daß ein Kreis durch Multiplikation seines Mittelpunktes und eines Punktes seiner Peripherie multipliziert wird.

Findet nun in der oben näher bezeichneten Weise noch eine wirkliche Drehung der Figur um den Winkel δ statt, welche Operation, wenn $\frac{m}{n} = f$ gesetzt wird, symbolisch einfach als Multiplikation mit f_δ in bezug auf einen gegebenen Punkt bezeichnet werden kann, so ist leicht zu erkennen, daß auch für diesen Fall obige beiden Thatsachen bestehen bleiben; denn zum Beweise derselben hat man nur auf die geänderte Lage des Ähnlichkeitspunktes Rücksicht zu nehmen.

Die hierdurch begründete Lösungsmethode mag als Methode der Umlegung durch Drehung bezeichnet werden.

Aufgabe 97. In ein Dreieck einen Halbkreis so zu beschreiben, daß derselbe eine Seite in einem gegebenen Punkte berührt und mit seinen Endpunkten auf den beiden andern Seiten liegt.

Analysis. Es sei P der gegebene Berührungspunkt in der Seite AB und XPY das dem gesuchten Halbkreise entsprechende rechtwinklige Dreieck, wovon X in AC , Y in BC liegt. Multipliziert man eine der beiden Seiten AC oder BC , etwa BC in bezug auf P mit -1 (man macht $PB' = PB$ und durch B' die Parallele $B'D$ zu BC), so ist, wenn man YP bis Y' in dieser Parallele verlängert, $\sphericalangle Y'XP = YXP = XPM$ (M Mittelpunkt des Halbkreises) d. h. $XY' \parallel PM$. Wenn man daher PM nach beiden Seiten bis zu den Durchschnitten F und G mit der Seite AC und der Parallele DB' verlängert, so hat man zur

Bestimmung des Punktes X in das Dreieck GDF ein rechtwinkliges Dreieck so zu beschreiben, daß der Scheitel des rechten Winkels in P fällt, und die Hypotenuse $XY' \parallel FG$ werde. Diese Aufgabe wird aber durch die später zu behandelnde Ähnlichkeitsmethode gelöst, weshalb wir auf A. 125 verweisen.

Aufgabe 98. In ein Kreissegment ein einem gegebenen ähnliches Dreieck so zu beschreiben, daß eine Ecke in einen gegebenen Punkt der Sehne fällt.

Analysis. Man berücksichtige die gegebene Form des zu konstruierenden Dreiecks dadurch, daß man den Winkel, dessen Scheitel in den gegebenen Punkt der Sehne fallen soll, sowie das Verhältnis der denselben einschließenden Seiten als gegeben betrachtet. Ist dieser Winkel $= \alpha$ und das Verhältnis der Schenkel desselben $\frac{m}{n} = f$, so multipliziere man den Kreis M , wozu das gegebene Segment gehört, in bezug auf den gegebenen Punkt P der Sehne AB mit f_α , indem man zunächst $\angle BPC = \alpha$ und $PC = f \cdot PB$ macht; alsdann mache man $\angle MPM' = \alpha$ und $PM'' = f \cdot PM'$. Dann ist M'' Mittelpunkt und $M''C$ Radius des durch die Multiplikation erhaltenen Kreises. Derselbe schneidet den Bogen des Segmentes in X ; macht man nun noch $\angle XPY = \alpha$, so ist XPY das verlangte Dreieck.

Der Beweis folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke MPB und $M''PC$, und $PM''X$ und PMY . (M und M'' sind homologe Winkel.)

Zusatz. Soll PXY gleichseitig werden, so vereinfacht sich die Konstruktion wesentlich.

Aufgabe 99. Ein Dreieck mit einer Ecke in einen gegebenen Punkt und mit den beiden andern Ecken auf zwei Kreisperipherien zu legen, so daß es einem gegebenen ähnlich wird.

Analysis. Liegt das Dreieck AXY , dessen Eckpunkt A gegeben ist, mit den Ecken X und Y auf den Peripherien der Kreise um M und N und ist einem gegebenen Dreieck ähnlich, oder, was dasselbe ist, ist $\angle A$ gegeben und ebenso das Verhältnis $AX : AY = m : n$, so kommt die ganze Lösung auf die Bestimmung des Punktes X (oder Y) hinaus. Dreht man nun AN in die Lage AP ,

so daß $\angle NAP =$ dem gegebenen Winkel A ist, so ist auch $\angle PAX = NAY$. Bestimmt man nun AN' so, daß $AN' : AN = m : n$ ist, so muß, damit die Dreiecke $AN'X$ und ANY ähnlich werden, auch $N'X : NY = m : n$ sein. Da nun NY als Radius des Kreises N gegeben ist, so läßt sich $N'X$ bestimmen und dadurch der Punkt X selbst. Zieht man dann AX und macht $\angle XAY = PAN$, so ist AXY das verlangte Dreieck. Denn es ist $\angle N'AX = NAY$, ferner $AN' : AN = m : n$, desgleichen $N'X : NY = m : n$, folglich $\triangle N'AX \sim NAY$, also $AX : AY = AN' : AN = m : n$. Da aber $\angle XAY$ dem gegebenen gleich ist, so entspricht das Dreieck AXY den gestellten Bedingungen.

§ 18. Durch die vorhergehenden Aufgaben zeigt sich, daß die Methode der Parallelverschiebung zum Zwecke einer Reduktion mit besonderem Vorteil bei Vierecksaufgaben angewandt werden kann. Es wird daher zweckmäßig sein, eine allgemeine, in sehr vielen Fällen nutzbringende Verschiebung beim (ordinären) Viereck noch besonders in Kürze hervorzuheben. Man verschiebt zwei Seiten bis in die gegenüber liegende Ecke und die zu dieser Ecke gehörende Diagonale bis in die Nachbarecken. Dadurch erhält man ein Parallelogramm, in welchem viele Stücke des Vierecks in einfacherer und unmittelbarer Verbindung mit einander vorkommen. So sind die Seiten des entstehenden Parallelogramms die Diagonalen des ursprünglichen Vierecks, die von obiger Ecke des Vierecks zu den Ecken des Parallelogramms laufenden Linien sind die Seiten des Vierecks. Die Diagonalen des Parallelogramms sind doppelt so groß wie die die Mitten der gegenüber liegenden Seiten des Vierecks verbindenden Geraden. Auch Winkel des Vierecks kommen in dem Parallelogramm vor; z. B. sind die Winkel des Parallelogramms die Winkel zwischen den Diagonalen des Vierecks. Selbst der Inhalt des Parallelogramms steht in einfachster Beziehung zum Inhalt des Vierecks, indem es doppelt so groß ist.

§ 19. Eine für die Reduktion häufig mit Vorteil anzuwendende Methode ist ferner die sogenannte Ähnlichkeits-Methode. Sie findet in den Fällen Anwendung, in welchen man zwar nicht auf einen vollständig konstruierbaren Teil der gesuchten Figur reduzieren, wohl aber aus den Bedingungen der Aufgabe eine Figur ableiten kann, welcher der gesuchten Figur

oder einem Teile derselben ähnlich ist. Ganz besonders empfiehlt sich diese Methode, wenn zur Konstruktion einer Figur außer einer Länge nur Winkel oder Verhältnisse von Längen gegeben sind. Durch letztere erhält man bei einer beliebig gewählten Länge eine Figur, welche der gesuchten ähnlich ist und aus welcher durch die Einführung der gegebenen Länge meist mittels Parallelen in einfachster Weise die gesuchte Figur abgeleitet werden kann. Wäre beispielsweise die Konstruktion eines Dreiecks verlangt aus zwei Winkeln und irgend einer daran vorkommenden Länge (Seite, Höhe, Mittellinie, einem Winkelhalbierer, einem zugehörigen Radius u. s. w.), so zeichne man vorerst ein beliebiges Dreieck, welches die gegebenen Winkel enthält. Dies beliebige Dreieck ist dem gesuchten ähnlich. Zieht man dann in demselben die der gegebenen entsprechende Linie und macht sie dieser gleich, so läßt sich in einfachster Weise meist durch Parallelen (nur wenn der Radius des umgeschriebenen Kreises die gegebene Länge ist, ist die Ableitung etwas anders) das gesuchte Dreieck ableiten. Außer diesem zur allgemeinen Charakteristik angeführten Beispiele mögen zur näheren Darlegung der Methode noch einige Beispiele folgen.

Aufgabe 100. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem gegenüber liegenden Winkel und dem Verhältnis der beiden andern Seiten. (Aus a , A und $b:c$.)

Analysis. Sieht man zunächst von der gegebenen Länge a ab und konstruiert ein Dreieck $A'B'C'$, worin $\angle A' = A$ und $A'C':A'B' = b:c$ ist, so ist $\triangle A'B'C'$ dem gesuchten ABC ähnlich. Man hat nur in dies Dreieck die gegebene Länge entsprechend einzuführen, indem man etwa $B'C = a$ macht, und durch C die Parallele CA bis in $B'A'$ zu ziehen. Dann ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Aufgabe 101. Zwischen zwei Radien eine Tangente so an den Kreis zu legen, daß sie im Berührungspunkte nach einem gegebenen Verhältnis ($m:n$) geteilt wird.

Analysis. Sind MA und MB die Radien und wird die Tangente CD im Berührungspunkte X so geteilt, daß $CX:DX = m:n$ ist, so wird jede zu CD parallel gezogene, von denselben Radien begrenzte Gerade $C'D'$ in ihrem Durchschnittspunkte X' mit MX nach demselben Verhältnis geteilt. Eine solche Gerade

$C'D'$ läßt sich aber konstruieren, wenn man das beliebige Stück MD' abschneidet und X' durch zwei Örter bestimmt. Der eine ist der Halbkreis über MD' , da $\sphericalangle MX'D' = 1 R$ sein muß, der andere die Parallele zu MA aus einem Punkte E in der beliebigen MD' , welche diese nach dem gegebenen Verhältnisse $m:n$ teilt. MX' giebt dann den Berührungspunkt X und die durch X zu $C'D'$ gezogene Parallele die verlangte Tangente.

Aufgabe 102. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, der zugehörigen Höhe und dem Verhältnisse der durch die Höhe auf der Gegenseite gebildeten Abschnitte. (Aus A , h_a und $p:q$.)

Analysis. Betrachtet man h_a als den Radius und $\sphericalangle A$ als den Centriwinkel eines Kreises, so ist diese Aufgabe von der vorigen nicht verschieden. Etwas anders gestaltet sich folgende Analysis. Eine beliebige Parallele zu BC , etwa $B'C'$, wird von der Höhe AD nach demselben Verhältnisse geteilt. Man kann also zwei Linien $B'D'$ und $D'C'$, welche das gegebene Verhältnisse haben, aneinander legen und, nachdem man das Lot in D' zu $B'C'$ errichtet hat, mittels D. 15 den Punkt A bestimmen. Dann mache man AD gleich der gegebenen Höhe u. s. w.

Aufgabe 103. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, der zugehörigen Höhe und Mittellinie. (Aus A , h_a und m_a .)

Analysis. Ist D der Fußpunkt der Höhe h_a , E die Mitte von BC , so ist durch den Winkel A und den durch das konstruierbare Dreieck AED gegebenen Winkel AED (zwischen der Mittellinie und der zugehörigen Seite) ein Dreieck gegeben, welches dem gesuchten ähnlich ist.

Aufgabe 104. Von einem Punkte einer Kreisperipherie aus eine Sehne zu ziehen, welche eine andere so schneidet, daß die Entfernungen ihres anderen Endpunktes vom Durchschnittspunkte und dem einen Endpunkte der gegebenen Sehne ein gegebenes Verhältnisse haben.

Analysis. Ist von A aus die Sehne AD so durch die gegebene Sehne BC , welche in E geschnitten wird, gezogen, daß $DE:DC = m:n$ ist, so ist durch den Bogen AC der Winkel EDC und durch Hinzunahme des gegebenen Verhältnisses $DE:DC$

das Dreieck DEC seiner Form nach konstruierbar. Konstruiert man nun ein solches in der richtigen Lage, so erhält man Punkt D in einfachster Weise.

Aufgabe 105. Zwischen zwei Dreiecksseiten eine Parallele zur dritten zu legen, so daß dieselbe die mittlere Proportionale werde zwischen den Abschnitten einer der beiden Seiten.

Analysis. Ist $DE \parallel BC$, dann ist $AD : AB = DE : BC$ oder $AD^2 : AB^2 = DE^2 : BC^2$. Ist nun $DE^2 = AD \cdot DB$, so folgt $AD : DB = AB^2 : BC^2$, was sich konstruieren läßt. (S. Nachtrag 10.)

Aufgabe 106. In ein Dreieck ABC eine Gerade XY zwischen AC und BC so zu legen, daß $BX = XY = YC$ wird.

Analysis. Verbindet man B mit Y und zieht durch den beliebigen Punkt D dieser Verbindungslinie die Parallelen DE und DF zu XY und YC , so läßt sich das Viereck $BEDF$ konstruieren, da $\sphericalangle B$ gegeben ist und $BE = ED = DF$ ist. Die Diagonale BD bestimmt dann den Punkt Y , durch welchen $YX \parallel ED$ zu legen ist.

Aufgabe 107 und 108. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel und den Summen, welche jede der einzelnen Seiten mit der dritten macht; speziell ein rechtwinkliges Dreieck aus der Summe der Hypotenuse und jeder Kathete. (Allgemein aus $A, a + b, a + c$.)

Analysis. Stellt man die gegebenen Summen unter Beibehaltung des gegebenen Winkels dar (vergl. Anm. zu Analysis von A. 49 und 50), so erkennt man die Identität dieser beiden Aufgaben mit der vorhergehenden.

Aufgabe 109. Ein Dreieck zu konstruieren aus dem Radius des umgeschriebenen Kreises und dem Verhältnis der drei Seiten zu einander. (Aus r und $a : b : c$.)

Analysis. Durch das gegebene Verhältnis der drei Seiten ist ein Dreieck $A'B'C'$ gegeben, welches dem gesuchten ABC ähnlich ist. Konstruiert man dies und beschreibt darum einen Kreis, dessen Mittelpunkt O sei, so hat man nur die Radien OA' , OB' und OC' bezüglich bis A, B und C zu nehmen, so daß

$OA = OB = OC = r$ ist, um das gesuchte Dreieck ABC zu erhalten.

Aufgabe 110. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem Verhältniß einer zweiten Seite zum Radius des umgeschriebenen Kreises und dem Gegenwinkel der dritten Seite. (Aus $a, b:r$ und C .)

Analysis. Ein dem Dreiecke MDA , in welchem M der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises und D die Mitte von B ist, ähnliches Dreieck, welches konstruiert werden kann, giebt den $\angle DMA = B$. Dadurch sind aber alle Winkel des Dreiecks bekannt.

Aufgabe 111. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem Radius des umgeschriebenen Kreises und dem Verhältniß einer andern Seite zu ihrer Höhe. (Aus a, r und $b:h_b$.)

Analysis. Errichtet man in A und C Lote auf b und a , welche sich in F schneiden, so ist $\triangle CAF \sim BCD$, wobei BD die Höhe h_b ist. CF läßt sich aber durch eine Proportion aus der Ähnlichkeit dieser Dreiecke bestimmen, und, nachdem F bestimmt, lassen sich für Punkt A zwei Örter angeben und zwar nach D. 6 und D. 1 durch den gegebenen Radius.

Aufgabe 112. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite und den Verhältnissen jeder der beiden anderen Seiten zu ihrer Höhe. (Aus $a, b:h_b$ und $c:h_c$.)

Analysis. Außer dem Punkte F (in voriger Analysis) bestimmt man in ähnlicher Weise in dem Lote in B auf BC den Punkt E und hat dann für A zwei Örter, beide nach D. 6.

Aufgabe 113. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem Verhältniß der dritten Seite zu ihrer Höhe. (Aus a, b und $c:h_c$.)

Analysis wie bei den vorhergehenden Aufgaben.

Aufgabe 114. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem Verhältniß der dritten Seite zu einer der Höhen, welche zu einer der gegebenen Seiten gehört. (Aus $a, c, b:h_a$.)

Analysis. Durch die Proportion $b:h_a = a:h_b$ läßt sich die Höhe h_b bestimmen.

Aufgabe 115. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus dem Verhältnis der Quadrate der Katheten und der Höhe auf die Hypotenuse. (Aus $b^2 : c^2$ und h_a .)

Analysis. Da das Verhältnis $b^2 : c^2 = p : q$ ist, so läßt sich ein Dreieck $A'C'B'$, ähnlich dem gesuchten, in einfacher Weise konstruieren.

Aufgabe 116. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der zugehörigen Mittellinie und dem Verhältnis einer der beiden andern Seiten zu ihrer Höhe. (Aus a , m_a und $b : h_b$.)

Analysis wie bei A. 109. Ein zweiter Ort für A ergibt sich nach D. 1 durch m_a .

Aufgabe 117. Ein Dreieck zu konstruieren aus seinem Umfange, dem Verhältnis zweier Höhen und dem Verhältnis der dritten Seite zum Radius des umgeschriebenen Kreises. (Aus $a + b + c$, $h_a : h_b$ und $c : r$.)

Analysis. Durch $c : r$ ist der Winkel C gegeben und durch $h_a : h_b$ das Verhältnis $b : a$. Es ist daher ein Dreieck $CEF \sim ABC$ gegeben. Stellt man an diesem Dreiecke den Umfang dar, indem man EF über E und F bis G und H um EC und FC verlängert, so hat man nur GH bis J zu verlängern, so daß $GJ = a + b + c$ wird und durch eine Parallele JK zu CG bis in CH den Punkt K zu bestimmen, durch welchen eine Parallele KL zu GH ein Dreieck LKC giebt, aus welchem ABC in einfachster Weise abzuleiten ist.

Aufgabe 118. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der zugehörigen Höhe und dem Verhältnis einer andern Seite zu ihrer Höhe. (Aus a , h_a und $b : h_b$.)

Analysis wie A. 114.

Aufgabe 119. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem Flächeninhalt und dem Verhältnis einer andern Seite zu ihrer Höhe. (Aus a , F , $b : h_b$.)

Analysis. Aus F und a bestimmt sich h_a ; dadurch ist diese Aufgabe auf die vorhergehende reduziert.

Aufgabe 120. Ein Viereck zu konstruieren aus einer Seite, dem Verhältnis zweier andern Seiten und den Winkeln. (Aus a , $b : c$, A , B , C .)

Analysis führt leicht auf ein konstruierbares ähnliches Viereck, woraus das gesuchte durch Einführung der gegebenen Seite leicht abgeleitet werden kann.

Aufgabe 121. Ein Sehnenviereck zu konstruieren, wovon gegeben sind eine Seite, das Verhältnis zweier Nachbarseiten und die Winkel. (Aus $a, b:c$ und A und B .)

Analysis. Durch den Winkel C und das Verhältnis $b:c$ ist zunächst ein Dreieck $CB'D'$ gegeben, welches man durch die bekannten Winkel D und B zu einem Sehnenviereck $CB'A'D'$ vervollständigen kann, welches dem gesuchten ähnlich ist. Legt man nun zwischen CB' und CA' die Gerade $BA = a$ und parallel zu $B'A'$, so vollendet die Parallele AD zu $A'D'$ das gesuchte Sehnenviereck $ABCD$.

Aufgabe 122. Ein Dreieck zu konstruieren aus dem Verhältnis zweier Seiten und den zugehörigen Mittellinien. (Aus $a:b, m_a$ und m_b .)

Analysis. Zieht man $CF \parallel m_b$ bis in m_a , so ist $AF = \frac{1}{2}m_a$, $CF = \frac{1}{2}m_b$, und $CD:AC = \frac{1}{2}a:b$. Man hat also leicht für C zwei Örter, einen durch das bekannte FC nach D. 1, den andern durch das bekannte Verhältnis $CD:AC$ nach D. 22.

Aufgabe 123. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem Verhältnis der zugehörigen Mittellinien. (Aus a, b und $m_a:m_b$.)

Analysis. Zieht man $AF \parallel m_b$ bis in a , so ist $CF = 2a$, $DF = 1\frac{1}{2}a$ und $DA:FA = m_a:2m_b$. Unter Hinzunahme von $CA=b$ ergeben sich für A zwei Örter und zwar nach D. 1 und D. 22.

Aufgabe 124. Ein Paralleltrapez zu konstruieren aus den Diagonalen desselben und den Winkeln an einer Grundlinie.

Analysis. Schneiden die verlängerten Seiten AD und BC einander in F , so ist durch die Winkel A und B die Form des Dreiecks ABF gegeben. Berücksichtigt man ferner, daß die Verbindungslinie von F mit dem Durchschnittspunkte E der Diagonalen jede der parallelen Seiten halbiert, und daß sich $AE:BE$ verhält wie die Diagonalen, so läßt sich auch leicht ein Dreieck $A'B'E'$ konstruieren, welches dem Dreiecke ABE ähnlich ist. Daraus aber ist das gesuchte Trapez einfach abzuleiten.

Zusatz. Daß jede Parallele zu AB von FE halbiert wird, zeigt sich am einfachsten, wenn man, was leicht geschehen kann, beweist, daß die Parallele durch E in der That von jener Linie halbiert wird.

Aufgabe 125. In ein Dreieck ABC ein Dreieck DEF so zu beschreiben, daß der Scheitel des gegebenen Winkels F in einen gegebenen Punkt fällt und DE einer gegebenen Geraden parallel wird.

Analysis. Ist DEF das verlangte Dreieck, von welchem der Punkt F auf AB gegeben und DE der Geraden L parallel ist, so ziehe man durch eine Ecke der AB , etwa A , die AH parallel zu L bis in die Gegenseite BC und durch A und H Parallelen zu EF und DF , welche sich in G schneiden. Dieser Punkt G auf der Geraden CF läßt sich durch den Winkel $AGH = F$ bestimmen und dann durch die Parallelen FE und FD zu AG und HG die Punkte E und F .

Zusatz. Soll das Dreieck mit einer Ecke in einem gegebenen Punkte liegen, während die beiden andern auf zwei Geraden liegen, so ziehe man, wenn die beiden Geraden einander schneiden, durch den Punkt eine beliebige, dieselben schneidende Gerade, im andern Falle eine dritte Parallele, wodurch eine Reduktion auf A. 125 erhalten wird.

II. Die Konstruktion und der Beweis.

§ 20. Der zweite Teil einer streng wissenschaftlichen Lösung einer Konstruktionsaufgabe, die Konstruktion, hat die durch die Analysis als konstruierbar festgesetzten Punkte, Geraden oder Kreise wirklich durch eine Zeichnung darzustellen. Je nachdem die Analysis bloß durch geometrische Örter oder durch Reduktion aufgestellt ist, sind im erstern Falle die in der Analysis gefundenen Örter wirklich zu zeichnen und die erforderlichen Punkte dadurch festzustellen; im andern Falle ist die Zeichnung etwa gefundener Hilfsfiguren wirklich auszuführen und daran die Feststellung der erforderlichen Punkte noch mit Hilfe von geometrischen Örtern wirklich zu bewirken. Der Weg der Konstruktion muß offenbar der umgekehrte der Analysis sein, indem diese von den zu bestimmenden

Punkten und Linien ausgehend zu einem aus den Bedingungen der Aufgabe konstruierbaren Punkte oder Linie zu gelangen sucht, jene, ausgehend von der Konstruktion des zuletzt in der Analysis als konstruierbar gefundenen Punktes (oder Linie), in umgekehrter Ordnung die gesuchten Punkte bestimmen muß.

Im dann folgenden dritten Teile, dem Beweise, ist der Nachweis zu liefern, daß durch die Konstruktion eine Figur erhalten ist, welche die in der Aufgabe gestellten Bedingungen erfüllt, daß also erhaltene Linien und Winkel die vorgeschriebene Größe haben. Der Beweis schließt sich unmittelbar an die Konstruktion an, und macht darum alle Schlüsse in umgekehrter Folge, wie in der Analysis.

Um die Teile einer Lösung nicht noch mehr auseinander zu reißen, als es durch die Trennung der Analysis schon notwendig wurde und durch die im folgenden Kapitel getrennte Behandlung des vierten Teiles (der Determination) noch ferner notwendig wird, sollen im folgenden Konstruktion und Beweis einer Reihe der vorhergehenden Analysen nacheinander und verbunden angegeschlossen werden. Wir werden dabei diejenigen Analysen unberücksichtigt lassen, bei denen sich die Konstruktion und der Beweis so zu sagen ganz unmittelbar ergeben, und etwa vorkommende Elementarkonstruktionen als bekannt voraussetzen.

Zu Aufgabe 25.

Konstruktion. An einem Endpunkt der hingelegten Seite $BC = a$, etwa in B , lege man den Winkel $CBE = A$, errichte in B auf BE ein Lot, desgleichen ein Lot zu BC in deren Mitte F . Um den Durchschnitt M dieser beiden Lote beschreibe man mit MB als Radius einen Kreis, so ist dieser der eine Ort für A . Dann verbinde man M und C , beschreibe über MC als Diameter einen Kreis und um B einen Kreis mit m , als Radius. Der Durchschnitt D beider Kreise ist die Mitte der Seite CA . Die Verbindungslinie CD schneidet verlängert den ersten Ort in A , und $\triangle ABC$ ist das verlangte.

Beweis. BE ist Tangente und BC Sehne des Kreises um M ; es ist also, da $\angle CBE$ gleich $\angle A$ gemacht ist, jeder Peripheriewinkel an diesem Bogen, dessen Schenkel durch B und C gehen, diesem Winkel gleich. BC ist gleich a gemacht und CA

in D halbiert, da $MD \perp CA$ ist; es ist also BD Mittellinie und gemäß der Konstruktion gleich m_b .

Zu Aufgabe 70.

Konstruktion. Nachdem das rechtwinklige Dreieck BFH , worin die Hypotenuse $FB = m_b$ und die Kathete $FH = \frac{1}{2} h_a$ ist, konstruiert worden, bestimme man in FB den Punkt S so, daß $FS = \frac{1}{3} m_b$. Dann ziehe man durch F zu BH eine Parallele und beschreibe um S mit einem Radius $= \frac{1}{3} m_c$ einen Kreis, der die Parallele in G durchschneidet, ziehe GS und verlängere diese Linie bis in C (in BH), und ziehe endlich CF und BG bis zum Durchschnitt A . Dann ist $\triangle ABC$ das verlangte Dreieck.

Beweis. Weil $GF \parallel BH$ gezogen, ist $GS : SC = FS : SB$, also, da $GS = \frac{1}{3} m_c$, $GC = m_c$. Weil ferner $FG : BC = FS : SB$, so ist $FG = \frac{1}{2} BC$, woraus folgt, daß G und F die Mitten von AB und AC , also $BF = m_b$ und $CG = m_c$ wirklich Mittellinien sind; endlich ist $AD = 2FH = h_a$.

Zu Aufgabe 74.

Konstruktion. Nachdem man gemäß der Analysis das Verhältnis $EF' : AB' = m : n$ gefunden und daraus unter Berücksichtigung, daß $B'E = AF'$ werden soll, das Verhältnis $EB' : B'A = p : q$ festgestellt hat, ziehe man den beliebigen Radius CA , teile diesen in G nach dem gefundenen Verhältnis $p : q$ und bestimme die Länge von GB' durch die Proportion $GB' : CE = q : p + q$. Mit dem gefundenen GB' beschreibe man um G einen Kreis, welcher den Punkt B' bestimmt, wodurch man die gesuchte Gerade erhält. Den Durchschnitt B verbinde man mit C , ziehe durch C zur konstruierten Geraden eine Parallele, auf welcher man endlich mittels einer Parallele durch A zu CE den Punkt D bestimmt. Dann ist $ABCD$ das verlangte Paralleltrapez.

Beweis. Die Seiten AD und CB , sowie die Diagonale CB kommen in dem Viereck, welches, da $CD \parallel AB$ gezogen, ein Paralleltrapez ist, vor, und zwar CB und CA unmittelbar als Radien zweier konzentrischer Kreise, AD als Seite eines Parallelogramms, in welchem die Gegenseite CE gleich der gegebenen Seite genommen ist. Es bleibt bloß zu beweisen übrig, daß die Diagonale $DB = CF$ ist; denn CF ist als die gegebene Länge der Diagonale zum Radius genommen. Nun ist aber gemäß der

Konstruktion $AE = BF = CD$, also auch $DB = CF$, weil auch $CD \parallel AE$ ist.

Zu Aufgabe 76.

Konstruktion. Man konstruiere die Dreiecke EFG und EFH , deren Seiten man kennt, ziehe durch G und F Parallelen zu FH und GH , welche sich in C schneiden. Die Parallele durch H zu FG bestimmt die Ecke A und die Parallelen durch A und C zu EH und GH den Punkt D . CG und AH bestimmen endlich den Punkt B und $ABCD$ ist das verlangte Viereck.

Beweis. Durch F , G und H sind die Parallelen AC zu HG , AB zu FG und BC zu FH gezogen, also sind $FGBH$, $FGHA$ und $FHGC$ Parallelogramme. Also ist $FG = HB = AH$; folglich $AB = 2FG$. In gleicher Weise ergibt sich, daß $BC = 2FH$, und F die Mitte von AC . Weil ferner $CD \parallel EG$ und $AD \parallel EH$, so folgt, daß $DC = 2EG$ und $AD = 2EH$ und außerdem E die Mitte von BD ist. Nun ist EF gemäß der Konstruktion die gegebene Entfernung der Mitten der Diagonalen und die Seiten FG , FH , EG und EH der Reihe nach die halben gegebenen Seiten, weshalb das Viereck die gegebenen Stücke enthält.

Zu Aufgabe 77.

Konstruktion. Man konstruiere das Dreieck EGH , worin EG und EH zweien Gegenseiten des Vierecks gleich sind. Dann nimmt man F als Mitte von HB und beschreibt das Dreieck FBH , worin FB und HB bezüglich die Hälften der gegebenen Seiten AB und CD sind. Dann bestimmt man durch Parallelen durch E zu HB und durch B zu EH den Punkt C , und endlich durch Verlängerung von CE und BF über E und F um sich selbst die Punkte D und A . $ABCD$ ist alsdann das verlangte Viereck.

Beweis. Nach der Konstruktion ist EF gleich der gegebenen Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenseiten, die Punkte E und F aber wirklich die Mitten von CD und AB . Ferner ist $EHBC$ ein Parallelogramm, also $EH = BC$, $HB = EC = \frac{1}{2}CD$. Ferner ist $AGED$ ein Parallelogramm, also $AD = EG$. Da nun die Seiten FB und HB gleich den Hälften der entsprechenden gegebenen Seiten genommen worden sind, so ergibt sich, daß das Viereck die gegebenen Stücke wirklich enthält.

Zu Aufgabe 81.

Konstruktion. Durch den Mittelpunkt B ziehe man eine Gerade BL parallel zu der gegebenen Richtung, fälle darauf von dem Mittelpunkte A des anderen Kreises das Lot AC und nehme auf der Geraden CB' gleich der halben gegebenen Summe. Dann beschreibt man von B' mit dem Radius des gegebenen Kreises B einen Kreis, der den Kreis A in X durchschneidet. Der Kreis B' ist die durch Verschiebung erhaltene neue Lage des Kreises B . Endlich zieht man durch X ein Lot auf AC , so ist diese Gerade die gesuchte.

Beweis. Es ist $CB' = \frac{1}{2}s$, also die Summe der Sehnen in den Kreisen A und B' gleich s . Da nun der Punkt B die gleiche Entfernung von der zu AC senkrecht durch X gezogenen Geraden hat, wie B' , so bleibt auch in dieser Lage die Sehne von derselben Größe und die Summe beider Sehnen gleich s d. i. gleich der gegebenen Summe.

Zu Aufgabe 82.

Konstruktion. Über der Centrale MN beschreibe man einen Halbkreis, dann von P an den Kreis M eine Tangente. Aus dieser Tangente und dem Radius des Kreises N als Katheten konstruiere man ein rechtwinkliges Dreieck und mit dessen Hypotenuse um P als Mittelpunkt einen Kreis, welcher den Halbkreis über MN in X durchschneidet. Dann beschreibe man um X mit dem Radius des Kreises N einen Kreis, welcher den Kreis M in A und B schneidet. Dann ist PAB die Richtung der gesuchten Geraden.

Beweis. Weil die Tangenten von P an die Kreise um M und X gemäß der Konstruktion einander gleich sind, so ist PAB eine Gerade, also AB die gemeinsame Sehne. Durch Verschieben des Kreismittelpunktes X nach N bleibt aber die Sehne ungeändert da $XN \perp XM$ ist, also Sehne $AB = CD$.

Zu Aufgabe 85.

Konstruktion. Man konstruiere $\triangle EDC$, worin ED und DC den gegebenen Gegenseiten und $\angle EDC = A + D - 2R$ ist. Dann bestimme man durch $\angle D$ und $\angle C$ je einen Ort für A und B , die Parallele durch E zu DA bestimmt dann B , und $BA \parallel ED$ giebt A . Dann ist $ABCD$ das verlangte Viereck.

Beweis. Die beiden gegebenen Gegenseiten sind in dem Viereck

enthalten, da $AB = DE$ ist. Ferner sind in D und C die entsprechenden gegebenen Winkel angelegt. Nun ist

$\angle EDC = A + D - 2R = D - (2R - A) = D - ADE$, also $\angle A$ ein gegebener Winkel, folglich auch der vierte Winkel B der gegebene.

Zu Aufgabe 87.

Konstruktion. Um den beliebigen Punkt D beschreibe man drei konzentrische Kreise, wovon der innerste und äußerste als Radien die gegebenen nicht parallelen Seiten haben mögen, der mittlere als Radius die im Viereck von D ausgehende Diagonale. Bezeichnet man die parallelen Seiten BC und DA durch b und d , so ist, wenn man $EF \parallel BD$ zieht, $DF : FC = d : b - d$, ebenso $EF : BD = CF : CD = b - d : b$. Durch diese Proportion läßt sich in dem beliebigen Radius DC der Punkt F bestimmen und auch die Länge von EF , da aus dem gegebenen Verhältnis $b : d$ leicht das hier nötige Verhältnis $d : b - d$ oder $b : b - d$ abgeleitet werden kann. Durch das gefundene EF bestimmt man den Punkt E in der Peripherie des innersten Kreises mittels eines Kreisbogens um F und erhält dann das Trapez in einfachster Weise als das verlangte.

Beweis. Da B, E und C auf der Peripherie der konzentrischen Kreise liegen, so sind die gegebenen Seiten und die eine Diagonale von selbst in dem Trapeze enthalten. Es ist ferner

$BE : EC = DF : FC = d : b - d$ und $EF : BD = d - b : b$, woraus sich ergibt, daß $BE : BC = d : b$. Da nun $BE = AD$, so haben auch die parallelen Seiten das gegebene Verhältnis.

Zu Aufgabe 89.

Konstruktion. Man konstruiere Dreieck AHG , worin AH und AG die halben Diagonalen, und $HG (= EF)$ die gegebene Verbindungslinie der Mitten der nicht parallelen Seiten ist. Schneidet nämlich die Verbindungslinie EF die Diagonale BD in J , so ist nach einem bekannten Lehrsatz der Planimetrie $EJ = HF$, und da $JF = FG$ ist, auch $EF = HG$. Dann verlängere man AH über H um sich selbst bis C und bestimme durch einen Kreisbogen über AC mit Rücksicht auf den gegebenen Winkel B und durch eine Parallele durch A zu HG den Punkt B ; verlängere AG über G um sich selbst bis K und mache $KD = AB$, dann ist $ABCD$ das verlangte Trapez.

Beweis. $AC = 2AH$, $AD = 2AF$, also EF die gegebene Mittellinie. Ebenso sind H und J die Mitten von AC und BD , daher haben auch die Diagonalen die gegebenen Längen. Endlich ist $\sphericalangle B$ gleich dem gegebenen und $AB \parallel CD$, also das Viereck ein Paralleltrapez.

Zu Aufgabe 100.

Konstruktion. Man konstruiere Dreieck $A'B'C'$, worin $\sphericalangle A'$ der gegebene Winkel und $A'C' : A'B' = b : c$ ist. Dann mache man $B'C = a$ und ziehe durch C die Parallele CA zu $C'A'$, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. $\triangle ABC \sim A'B'C'$, also $AC : AB = A'C' : A'B' = b : c$, $BC = a$ und $\sphericalangle A = A'$.

Zu Aufgabe 101.

Konstruktion. Über dem beliebigen Stück MD' des Radius MB beschreibe man einen Halbkreis, teile MD' in E so, daß $ME : ED' = m : n$ (d. h. das gegebene Verhältnis) ist, ziehe durch E eine Parallele zu MA , welche den Halbkreis in X' schneidet; verlängere MX' bis in die Peripherie des Kreises, bis X , und lege in diesem Punkte die Tangente CXD an den Kreis, welche die verlangte sein wird.

Beweis. Es ist $CX : XD = C'X' : X'D' = ME : ED' = m : n$.

Zu Aufgabe 105.

Konstruktion. In B erreichte man auf BA das Lot $BF = BC$, ziehe von B das Lot BG auf AF , und durch G die Parallele GD (bis in AB) zu BF . Die durch D zu BC gezogene Parallele DE ist die gesuchte.

Beweis. Es ist $AD : DE = AB : BC$
 oder $AD^2 : DE^2 = AB^2 : BC^2 = AG : GF = AD : DB$,
 also $AD^2 : DE^2 = AD : DB$, woraus folgt $DE^2 = AD \cdot DB$.

Zu Aufgaben 107 und 108.

Konstruktion. Man konstruiere $\triangle ADE$ aus $AD = a + c$, $AE = a + b$ und dem gegebenen Winkel A . Dann schneide man von DA und EA die beliebigen, aber gleichen Stücke $DF = EG$ ab, beschreibe um F mit FD einen Kreis und verschiebe EG parallel mit sich bis in die Lage HJ , in welcher H in der Peripherie des um F beschriebenen Kreises liegt; verlängere dann die Diagonale

DH , bis sie AE in C schneidet, und ziehe $CB \parallel FH$; dann ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. $DF = FH = HJ$, also auch, da $BC \parallel FH$ und $HJ \parallel AE$ ist, $DB = BC = CE$. Da nun $AD = a + c$, $AE = b + c$ gemacht ist, ist $AB = c$, $AC = b$.

Zu Aufgabe 109.

Konstruktion. Man konstruiere das beliebige Dreieck $A'B'C'$, in welchem die Seiten das gegebene Verhältniß haben, beschreibe darum einen Kreis, dessen Mittelpunkt M sei, und mache MA' , MB' und MC' durch Verlängerung, resp. Verkürzung gleich dem gegebenen Radius. Hierdurch erhält man die neuen Ecken A , B , C und dadurch das verlangte Dreieck ABC .

Beweis. Weil $MA = MB = r$ ist, so ist $MA' : MB' = MA : MB$, also $AB \parallel A'B'$. Ebenso zeigt man, daß $BC \parallel B'C'$ und $AC \parallel A'C'$ ist. Die Seiten AB , BC und CA haben also dasselbe Verhältniß wie $A'B'$, $B'C'$ und $C'A'$ d. h. das gegebene, Ferner ist $MA = MB = MC$ gleich dem gegebenen Radius r gemacht.

Zu Aufgabe 111.

Konstruktion. Aus der Proportion $a : CF = h_b : b$ konstruiere man zunächst CF ; dann errichte man auf a in C ein Lot gleich CF und beschreibe über CF als Diameter einen Halbkreis; bestimme dann mittels des gegebenen Radius den Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises. Der Durchschnitt desselben mit dem Halbkreise ist A und das Dreieck ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. $MA = MB = MC = r$. Weil ferner $\sphericalangle FAC = 1R$ ist (Winkel im Halbkreis), so ist $\triangle CAF \sim CBD$, woraus sich durch eine Proportion in Rücksicht auf die Konstruktion, wodurch CF erhalten wurde, ergibt, daß $b : h_b$ das gegebene Verhältniß ist. Endlich ist $CB = a$ gemacht.

Zu Aufgabe 113.

Konstruktion. In A und B auf b und c errichtete Lote schneiden einander in E . Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ABE und ACD läßt sich die Länge von AE konstruieren; dann konstruiere man $\triangle CAE$, worin $CA = b$ und $\sphericalangle CAE$ ein rechter Winkel ist. Dann beschreibe man über AE als Diameter einen

Halbkreis und um C einen Kreis mit a . Der Durchschnitt beider ist die Ecke B und ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke ABE und ACD ergibt sich, daß $c : h_c$ das gegebene Verhältniß ist, wenn man die Konstruktion von AE berücksichtigt. Es ist aber auch $AC = b$, und $CB = a$.

Zu Aufgabe 115.

Konstruktion. Über einer beliebigen Geraden $B'C'$, die in D' nach dem gegebenen Verhältnisse $p : q$ geteilt wird, beschreibe man einen Halbkreis und errichte in D' auf $B'C'$ das Lot, welches den Halbkreis in A schneidet. Macht man nun auf AD' das Stück AD gleich der gegebenen Höhe und zieht durch D eine Parallele zu $B'C'$, welche die Katheten AB' und AC' in B und C schneidet, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. $\sphericalangle A = 1 R$. $AD = h_a$. Ferner $B'D' : D'C' = p : q$, folglich auch $BD : CD = p : q = AB^2 : AC^2$.

Zu Aufgabe 120.

Konstruktion. Zwei beliebige Linien $D'C'$ und $B'C'$, welche das gegebene Verhältniß haben, setze man unter dem gegebenen Winkel aneinander, und lege in D' und B' an $D'C'$ und $B'C'$ die gegebenen Winkel an. Dadurch erhält man ein Viereck $B'C'D'A$, welches dem gesuchten ähnlich ist. Macht man nun auf AB' das Stück AB gleich der gegebenen Seite und zieht durch B eine Parallele zu $B'C'$, welche die Diagonale AC' in C schneidet, und durch C eine Parallele $C'D'$ bis in den Durchschnitt D mit der (verlängerten) Seite AD' , so ist $ABCD$ das verlangte Viereck.

Beweis. Gemäß der Konstruktion hat AB die gegebene Länge a , $B'C'$ und $D'C'$ haben in gleicher Weise das gegebene Verhältniß, also auch die Parallelen BC und CD . Endlich sind auch die Winkel des Vierecks die gegebenen.

Zu Aufgabe 121.

Konstruktion und Beweis ganz ähnlich wie zu A. 111.

Zu Aufgabe 122.

Konstruktion. Man mache $AF = \frac{2}{3} m_a$; FD auf $FA = \frac{1}{3} m_a$, teile AD innerlich und äußerlich in E und G nach dem Verhältniß $\frac{1}{2} a : b$; beschreibe über EG als Diameter einen Kreis und um F einen Kreis mit einem Radius gleich $\frac{2}{3} m_b$. Der Durchschnitt dieser

beiden Kreise ist die Ecke C . Dann verbinde man C mit D und verlängere CD bis B , so daß $DB = CD$ wird, und verbinde B mit C . Dann ist Dreieck ABC das verlangte.

Beweis. Wegen des Kreises über EG ist $CD : AC = \frac{1}{2}a : b$, also $CB : CA = a : b$. Ferner ist $AF = \frac{2}{3}m_a$, $DF = \frac{1}{3}m_a$, also $AD = m_a$ und gemäß der Konstruktion D die Mitte von CB . Macht man nun auf DA das Stück $DH = DF$, so ist BHJ Mittellinie zu b . Da nun $BH = CF = \frac{2}{3}m_b$ ist, so ist $BJ = m_b$.

Zu Aufgabe 123.

Konstruktion. Auf $CF = 2a$ mache man $CD = \frac{1}{2}a$, teile DF innerlich und äußerlich (in G und H) nach dem Verhältnis $m_a : 2m_b$ und beschreibe über GH als Durchmesser einen Kreis. Ein zweiter Kreis um C mit einem Radius gleich b schneide den erstern in A . Nehmen wir dann die Mitte E von AC und ziehen dadurch die Parallele EB zu AF , so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Es ist $AD : AF = m_a : 2m_b$, E die Mitte von AC , also auch B die Mitte von CF , also $CB = a$; ferner $CA = b$; $EB = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2} \cdot 2m_b = m_b$; also $m_a : m_b$ das gegebene Verhältnis.

Zu Aufgabe 124.

Konstruktion. Man konstruiere das beliebige Dreieck $A'B'F'$, worin die Winkel A' und B' die gegebenen sind. Dann bestimme man in der Mittellinie $F'G$ den Punkt E' so, daß das Verhältnis $A'E' : B'E'$ gleich dem Verhältnis der gegebenen Diagonalen ist. Alsdann mache man $A'E'K$ und $B'E'K$ den Diagonalen gleich. Die Verbindungslinie KL schneide $B'F'$ und $A'F'$ in H und J . Endlich zieht man durch H die Parallele HA zu KA' und verbindet A mit L , dann ist $AB'HL$ das verlangte Trapez.

Beweis. $\sphericalangle B'$ ist gleich einem der gegebenen Winkel gemacht; $\sphericalangle A$ ist $= \sphericalangle A'$, welcher dem andern Winkel gleich gemacht ist. $B'L$ ist die eine gegebene Diagonale, AH die andere, da sie als Gegenseite in einem Parallelogramm gleich $A'K$ ist.

Anschaulicher dürfte folgende

Konstruktion sein. Schneidet die KL (s. vorige Konstruktion) die Mittellinie $F'G$ in G' und man macht $LD = DJ$, $HC = CK$ und zieht durch D und C die Parallelen DA und CB , so ist $ABCD$ das verlangte Trapez.

Beweis. Es ist $DC \parallel AB$, weil $A'E' : A'K = B'E' : B'L$, das Viereck ist also ein Parallelogramm. Da nun G' die Mitte von JH und auch von KL ist, so sind die vier Stücke LD , DJ , HC und CK unter einander gleich, folglich gemäß der Konstruktion $AC = A'K$, $BD = B'L$.

III. Die Determination.

§ 21. Der vierte Teil einer vollständigen wissenschaftlichen Lösung einer Konstruktionsaufgabe, die Determination (welches Wort nach seiner Etymologie soviel bedeutet als „Einschließung in bestimmte Grenzen“ oder „nähere Bestimmung“), untersucht, ob die Aufgabe unter den gegebenen Bedingungen allgemein löslich ist, oder nicht, ob mehrere Lösungen möglich sind, ob unter speziellen Bedingungen die Lösung eine Modifikation erleidet, und stellt die Bedingungen etwaiger Modifikationen, die Bedingungen der allgemeinen oder mehrfachen Auflösbarkeit, sowie die Bedingungen der Auflösungsunmöglichkeit zusammen. Dadurch werden in der That, entsprechend dem etymologischen Begriffe des Wortes, die genauen Grenzen festgesetzt, innerhalb welcher sich die Aufgabe allgemein, einfach oder mehrfach, modifiziert oder gar nicht lösen läßt.

Die hierzu notwendige Untersuchung liefert eine Menge lehrreicher und bildender Momente betreffend die Einsicht in den inneren Zusammenhang zwischen gegebenen und gesuchten Größen, sowie zwischen den gegebenen allein. Aus diesem Grunde muß die Determination als ein hervorragend wichtiger Teil der Auflösung bezeichnet werden.

§ 22. Um diese verschiedenen Ziele der Determination zu erreichen, hat man durch Berücksichtigung einschlägiger Lehrsätze zunächst die Frage nach der allgemeinen Lösungsmöglichkeit zu beantworten, insbesondere, die ganze Konstruktion durchgehend, beim Ziehen irgend einer Geraden, oder beim Beschreiben irgend eines Kreises festzustellen, ob sich die Geraden unter den gegebenen Bedingungen der Aufgabe in jedem Falle ziehen und die Kreise in jedem Falle beschreiben lassen. Ferner ist festzustellen, ob die etwa konstruierten Örter den erforderlichen Durchschnitt ergeben, ob ein Durchschnitt oder mehrere Durchschnitte, wobei namentlich die Bedingungen auf-

gestellt werden müssen, welche die gegebenen Größen unter sich zu erfüllen haben, damit jene Linien und Kreise möglich sind, und daß die konstruierten Örter einen oder mehrere Durchschnitte haben. — Da, wie wir bereits erkannt, nur Gerade und Kreise als Örter vorkommen dürfen und zwei Gerade nur einen Durchschnitt haben können, so ist in dem Falle, in welchem die beiden Örter für einen gesuchten Punkt Gerade sind, nur ein Punkt als gesuchter Punkt möglich; ist aber einer der beiden Örter ein Kreis, oder sind beide Kreise, so sind zur Festsetzung der Anzahl der Durchschnittspunkte oder der Unmöglichkeit eines Durchschnittes die bekannten Sätze über die Lage einer Geraden zu einem Kreise, oder zweier Kreise zu einander (letzteres durch Vergleichung der Summe und Differenz ihrer Radien mit der Centrale) eingehend zu diskutieren.

§ 23. In bezug auf konstruierbare Örter ist zu untersuchen, ob sich, entsprechend den gegebenen Bedingungen, ein Ort oder mehrere Örter für einen gesuchten Punkt konstruieren lassen, woraus eventuell eine mehrfache Lösung hervorgeht. So läßt sich eine Parallele zu einer Geraden in einem gegebenen Abstände auf beiden Seiten derselben konstruieren; auch ist die Halbierungslinie des Nebenwinkels von den Schenkeln des ursprünglichen Winkels in jedem Punkte gleich weit entfernt; ein Kreisbogen läßt sich nach beiden Seiten einer gegebenen Sehne ziehen, und eine Gerade läßt sich in zwei Punkten nach einem gegebenen Verhältnisse teilen. Besonders ist hierbei zu untersuchen und festzustellen, ob die durch verschiedene Durchschnitte zweier Örter sich ergebenden Punkte gesuchte Figuren liefern, die wirklich verschieden sind, oder bei bestehender Kongruenz sich nur durch die Lage unterscheiden. Im letzten Falle darf man nur von einer Lösung der Aufgabe reden.

§ 24. Zur Aufstellung einer erschöpfenden Determination empfiehlt es sich, die gesuchten Linien in ihrer Abhängigkeit von den gegebenen Linien und Winkeln auf algebraischem Wege durch eine Gleichung auszudrücken, wozu, wenn Winkel gegeben oder gesucht sind, auch die Lehrsätze der Goniometrie und Trigonometrie anzuwenden sind, und dann die erhaltene Gleichung in bezug auf ihre Ein- oder Mehrdeutigkeit, Möglichkeit und Unmöglichkeit der Konstruktion zu diskutieren.

§ 25. Um das Verfahren bei der Aufstellung der Determination

etwas näher zu erläutern, wodurch wir zugleich eine Anzahl von Lösungen erhalten, welche, entsprechend dem planimetrischen Gesetze, streng in ihre vier Teile gegliedert erscheinen, soll hier noch die Determination einigen Lösungen hinzugefügt werden, deren drei erste Teile im Vorstehenden bereits aufgestellt sind.

Zu Aufgabe 25.

Determination. Ist der gegebene Winkel ein hohler, d. h. kleiner als $2R$, so läßt sich in jedem Falle aus ihm und der gegebenen Seite a der dem gesuchten Dreiecke umgeschriebene Kreis konstruieren. Nur in dem Falle, daß die gegebene Mittellinie m , eine gewisse Größe nicht erreicht oder eine andere überschreitet, findet ein Durchschnitt des um B mit m beschriebenen Kreises und des über dem Radius MC beschriebenen Halbkreises nicht statt, so daß man also ein Dreieck ABC nicht erhält. Verbindet man nämlich B mit dem Mittelpunkt O von MC , welche Verbindungslinie den Halbkreis zuerst in D' , und zum zweiten Male in D'' schneidet, so bezeichnet BD' den kleinsten, BD'' den größten Wert, den m haben darf, wenn ein Dreieck möglich sein soll. Bezeichnet man diesen kleinsten Wert mit x , so ist, da der Halbkreis über MC die Seite BC in ihrer Mitte E durchschneidet (denn $ME \perp EC$), für diesen minimalen Wert $x(x+r) = \frac{1}{2}a^2$; d. h. dieser Wert ist die um den halben Radius des umgeschriebenen Kreises verminderte Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten jener halbe Radius und die halbe Diagonale des über der Seite a beschriebenen Quadrates sind. Der maximale Wert ist um jenen halben Radius größer als jene Hypotenuse. Diese Resultate ergeben sich, wenn man die quadratische Gleichung $x(x+r) = \frac{1}{2}a^2$ nach x auflöst. Hierbei kann man auch für r setzen $\frac{\frac{1}{2}a}{\sin A}$. Für jeden Wert für m , innerhalb dieser zulässigen Grenzwerte ergiebt der Kreis mit m als Radius zwar zwei Durchschnitte, wenn man den ganzen Kreis über MC als Durchmesser beschreibt, indessen ist nur der eine zu verwenden, da der andere als Winkel an der Spitze nicht den gegebenen Winkel A , sondern dessen Supplement ergäbe. Man erhält also nur eine Lösung.

Zusatz. Auch wenn der gegebene Winkel $A = 1R$ ist, erhält man nur eine Lösung, da das zweite, hier auch zulässige Dreieck dem ersten kongruent ist und nur eine andere Lage hat.

Zu Aufgaben 26 und 27.

Determination. (S. Fig. 3.) Auch der zweite Durchschnitt A' ist eine entsprechende Spitze, sowohl bei gegebener Summe als bei gegebener Differenz. Damit die Parallele durch G zu CE den Kreis über BC wenigstens berühre, also eine Spitze A des gesuchten Dreiecks ergebe, muß $s \leq \frac{1}{2} r \cdot \cot \frac{1}{2} R$ sein. Für die gegebene Differenz ist genau dieselbe Limitation zu machen.

Zu Aufgabe 70.

Determination. Das Dreieck BFH ist immer möglich, wenn nur $m_b > \frac{1}{2} h_a$ ist. Auch läßt sich dann jederzeit durch F die Parallele zu BH ziehen und in FB der Punkt S bestimmen. Damit aber der um S mit dem Radius $\frac{1}{2} m_c$ beschriebene Kreis diese Parallele wenigstens einmal treffe, so muß $\frac{1}{2} m_c \geq \frac{1}{2} h_a$ oder $m_c \geq h_a$ sein. Es muß also eine Mittellinie größer als die halbe Höhe sein; und die andere mindestens gleich der halben Höhe. In diesem Falle erhält man nur ein Dreieck; ist aber die andere auch größer als die halbe Höhe, zwei Dreiecke.

Zu Aufgabe 77.

Determination. Es ergibt sich die Möglichkeit eines Vierecks immer, wenn $\triangle EGH$ konstruiert werden kann. Dies Dreieck ist aber immer möglich, wenn die doppelte Entfernung der Mitten E und F kleiner ist, als die Summe der beiden andern Vierecksseiten.

Zu Aufgabe 81.

Determination. Die Lösung der Aufgabe ist möglich, so lange das Dreieck MXN möglich ist, dessen Ecke N der Mittelpunkt des verschobenen Kreises in seiner neuen Lage ist. Bezeichnet s die gegebene Summe der entstehenden Sehnen, R und r die Radien der gegebenen Kreise, so sind in dem Dreieck MXN die Seiten MX und NX durch r und R , die Seite MN durch $\frac{1}{2} s$ zu bezeichnen. Aus den für die Seiten eines Dreiecks bestehenden Beziehungen ergibt sich also für die gegebene Summe der Sehnen, daß dieselbe kleiner als $2(R + r)$, und größer als $2(R - r)$ sein muß. Liegt daher die gegebene Summe außerhalb dieser Grenzen, so ist die Lösung unmöglich. Dazu sei bemerkt, daß das Maximum $2(R + r)$ für die Sehnen nur dann eintreten kann, wenn die Gerade in der Richtung der Centrale der beiden Kreise gezogen werden soll. Für diese Lage ist aber das Minimum die Sehne

im größeren Kreise, welche verlängert Tangente an dem kleinern ist. Bildet aber die Richtung der gesuchten Geraden mit der Centrale der Kreise in ihrer ursprünglichen Lage den Winkel φ , und bezeichnet c diese Centrale, so ist für die Möglichkeit, in der geforderten Richtung durch beide Kreise eine Gerade zu legen, erforderlich, daß dieser Winkel kleiner sei, als der, den die gemeinschaftliche innere Tangente mit der Centrale macht. Da der Sinus dieses Winkels $= \frac{R+r}{c}$ ist, so muß $\sin \varphi < \frac{R+r}{c}$ sein. Jede Gerade, welche einen größeren Winkel mit der Centrale macht, kann nur einen der beiden Kreise treffen. Das Maximum der Sehnensumme einer zur Centrale geneigten Geraden, die beide Kreise schneidet, wird aber erreicht, wenn diese Gerade durch den innern Ähnlichkeitspunkt geht, das Minimum ist die Sehne des größeren Kreises, welche verlängert den andern berührt.

Zu Aufgabe 82.

Determination. Die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Tangente von P an den einen Kreis und der Radius des andern Kreises sind, muß mindestens gleich der kürzesten Entfernung jenes Punktes von dem Halbkreise über MN und darf höchstens gleich der größten Entfernung desselben von dem Halbkreise sein. Liegt die Hypotenuse außerhalb dieser Grenzen, so findet kein Durchschnitt des Kreises um P mit dem Halbkreise statt, und es läßt sich also dann der Mittelpunkt des verschobenen Kreises in seiner neuen Lage nicht bestimmen.

Zu Aufgabe 85.

Determination. Sind die Nachbarwinkel A und D größer als $2R$, so ergibt sich der Winkel $CDE = A + D - 2R$; sind sie kleiner als $2R$, so wird $\sphericalangle CDE = 2R - (A + D)$; in beiden Fällen ist also das Hilfsdreieck CDE zu konstruieren und das Viereck daraus abzuleiten. Ist aber $A + D = 2R$, so wird das Viereck ein Parallelogramm, zu dessen Konstruktion sich in der Seite DC der Punkt E bestimmen läßt, so daß $DE = AB$ ist, woraus sich das Trapez wiederum leicht ableiten läßt.

Zu Aufgabe 89.

Determination. Damit das ganze Trapez bedingende Dreieck AGH konstruiert werden könne, muß die gegebene Ver-

bindungslinie der Mitten der nicht parallelen Seiten des Trapezes kleiner als die halbe Summe der gegebenen Diagonalen sein.

Zu Aufgabe 100.

Determination. Die Aufgabe kann immer gelöst werden, wenn nur der gegebene Winkel $A < 2R$ ist.

Zu Aufgabe 105.

Determination. Die Lösung ist immer möglich.

Zu Aufgabe 108.

Determination. Heißt x die Hypotenuse des gesuchten Dreiecks, s und s' die gegebenen Summen, so erhält man nach dem Pythagoreischen Lehrsatz für die Hypotenuse leicht den Ausdruck $x = s + s' \pm \sqrt{2s \cdot s'}$. Es ist offenbar, daß zur Konstruktion nur das negative Vorzeichen der Wurzel genommen werden darf. Wiewohl nun der Ausdruck $s + s' - \sqrt{2s \cdot s'}$ für jeden beliebigen Wert von s und s' einen reellen Wert ergeben würde, so ist doch der Wert für x nach den Sätzen über Dreiecksseiten zu limitieren. Nach dem Satz über die Differenz zweier Dreiecksseiten in ihrer Beziehung zur dritten muß nun sein $s - s' < s + s' - \sqrt{2s \cdot s'}$, woraus sich ergibt $s < 2s'$, d. h. die Aufgabe kann immer gelöst werden, so lange die eine der gegebenen Summe kleiner ist, als die doppelte andere.

Zusatz. Für die Aufgabe 107 läßt sich die Determination mit Hilfe des Cosinussatzes, aber bei weitem nicht so einfach, bestimmen.

Zu Aufgabe 109.

Determination. Die Lösung der Aufgabe ist immer möglich.

Zu Aufgabe 111.

Determination. Damit die Lösung dieser Aufgabe möglich sei, muß $r \geq \frac{1}{2}a$ sein.

Zu Aufgabe 112.

Determination. Wenn die beiden Halbkreise über BF und AE einen oder zwei Punkte gemeinsam haben sollen, wodurch die Dreiecksdecke A bestimmt wird, so muß ihre Centrale gleich oder größer als BC (oder Seite a) sein; oder es muß a gleich oder kleiner als die Summe der Radien sein. Nun ist der

Radius des Halbkreises über CF aber $\frac{1}{2} \frac{m}{n} \cdot a$, wenn das Verhältniß $b : h$, durch $m : n$ gegeben ist; in gleicher Weise ist der Radius des Halbkreises über BE , wenn das Verhältniß $c : h_c = p : q$ gegeben ist, $= \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{q} \cdot a$. Es ergibt sich also als Bedingung für die Möglichkeit der Lösung: $2a \leq \frac{m}{n} \cdot a + \frac{p}{q} \cdot a$ oder $2 \leq \frac{m}{n} + \frac{p}{q}$. Ebenso muß $2a \geq \frac{m}{n} \cdot a - \frac{p}{q} \cdot a$ oder $2 \geq \frac{m}{n} - \frac{p}{q}$ sein, welche beiden Bedingungen sich so ausdrücken lassen. Es muß $\frac{m}{n} - \frac{p}{q} < 2 \leq \frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ sein. Für den Fall $\frac{m}{n} - \frac{p}{q} < 2 < \frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ erhält man einen doppelten Durchschnitt und zwei verschiedene Lösungen.

Zu Aufgabe 113.

Determination. Für die Möglichkeit der Lösung ist es notwendig, daß der um C mit b beschriebene Kreis den Kreis über AE treffe, daß also b wenigstens so groß sei, wie die um den Radius $\frac{1}{2} AE$ verminderte Entfernung des Punktes C von der Mitte O der Linie AE . Drückt man diese Beziehung analytisch aus, indem man das gegebene Verhältniß wie vorhin durch $\frac{m}{n}$ bezeichnet, so ergibt sich nach leichter Entwicklung die Bedingnisgleichung $4n^2 + 4mn + m^2 \geq 4n^2 + m^2$. Diese ist aber immer erfüllt, und man erhält daher immer zwei verschiedene Dreiecke.

Zu Aufgabe 116.

Determination. Wollte man durch Verlängerung der gegebenen Mittellinie eine Reduktion versuchen, so würde man finden, daß sich die Aufgabe in sich selbst reduziert, also ein anderer Weg einzuschlagen ist. — Für die Möglichkeit der Lösung muß die gegebene Mittellinie wenigstens so groß sein, als die kleinste Entfernung der Mitte F der Seite BC von dem Kreise über CE , und darf die entsprechende größte Entfernung nicht überschreiten. Analytisch würden sich, wenn man den kleinsten Wert von m_a mit x bezeichnet, die Bedingungen der Möglichkeit der Lösung ergeben durch die Gleichung: $x \left(x + \frac{m}{n} \cdot a \right) = \frac{1}{4} a^2$.

Zu Aufgabe 124.

Determination. Die gegebenen Winkel müssen, je nachdem sie der größern oder der kleinern der parallelen Seiten anliegen sollen, zusammen kleiner oder größer als $2R$ sein; desgleichen müssen die gegebenen Diagonalen verschiedener Größe sein. Wären die gegebenen Winkel zusammen gleich $2R$, so erhielte man statt eines Paralleltrapezes in einfachster Weise ein Parallelogramm, indem man leicht ein Dreieck als Hälfte desselben aus einer Seite (einer gegebenen Diagonale), dem gegenüberliegenden Winkel und der zugehörigen Mittellinie (der Hälfte der andern Diagonale) konstruieren könnte. Sind aber die Diagonalen gleich, so müssen auch die gegebenen Winkel gleich sein, und das gesuchte Paralleltrapez wird ein gleichschenkeliges.

IV. Übungsbeispiele.

§ 26. Im folgenden haben wir eine Anzahl Aufgaben zur Übung zusammengestellt und dieselben so ausgewählt, daß sie sämtlich nach einer der auseinandergesetzten Methode in einfacher Weise aufgelöst werden können. Die von uns etwa beigelegten Winkel zur Lösung beschränken sich auf den Hinweis auf die anzuwendende Methode; die Ausführung ist in jedem Falle dem Leser überlassen. Wo es in einzelnen Fällen zweckmäßig erschien, sind kurze Bemerkungen, betreffend die Determination, hinzugefügt.

Aufgabe 126. In einen gegebenen Kreis ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben, dessen Katheten je durch einen gegebenen Punkt gehen.

Lösung mit Hilfe von D. 6. — Man erhält im allgemeinen zwei verschiedene rechtwinklige Dreiecke.

Aufgabe 127. In einen gegebenen Kreis ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben, von welchem man einen spitzen Winkel und einen Punkt der einen Kathete kennt.

Lösung mit Hilfe von D. 15, nachdem man den gegebenen Punkt der Kathete mit dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises verbunden hat. — Zwei Dreiecke!

Aufgabe 128. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, von welchem die Hypotenusenhöhe, zwei Punkte

der Hypotenuse und je ein Punkt der Katheten gegeben sind.

Lösung mittels D. 6. — Zwei Dreiecke!

Aufgabe 129. Einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene gleiche Kreise umschließend oder von außen berührt.

Lösung durch Verschiebung der Peripherie des gesuchten Kreises in die Mittelpunkte der gegebenen. (Vergl. § 16.)

Aufgabe 130. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite und der zugehörigen Höhe und Mittellinie. (Aus a, h_a, m_a .)

Lösung mittels D. 4 und D. 1.

Aufgabe 131. An einen Kreis eine Tangente zu legen, welche vom Berührungspunkte bis an eine Gerade (oder bis an die Peripherie eines Kreises) von gegebener Länge sei.

Lösung mittels D. 9.

Aufgabe 132. Einen Punkt zu bestimmen, von welchem aus die an zwei Kreise gezogenen Tangenten gegebene Längen haben.

Lösung mittels D. 9.

Aufgabe 133. In ein Dreieck ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Höhe gegeben ist, so einzuschreiben, daß seine Grundlinie der einen Dreiecksseite parallel wird.

Lösung. Die Spitze muß in der Dreiecksseite liegen, welcher die Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks parallel werden soll. Übrigens hilft D. 4.

Aufgabe 134. Innerhalb eines Dreiecks einen Punkt zu bestimmen, dessen Verbindungen mit den Ecken das Dreieck in drei gleiche Teile teilen.

Lösung. Soll $AOB = AOC$ sein, so müssen, da die Grundlinie AO beiden Dreiecken gemeinschaftlich ist, die Lote aus B und C auf AO einander gleich sein. Das ist nur möglich, wenn AO verlängert die Mitte von BC trifft. Daher liegt der gesuchte Punkt auf jeder der drei Mittellinien.

Aufgabe 135. Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem eine Seite, die zugehörige Höhe und das Verhältniß der beiden andern Seiten gegeben sind. ($a, h_a, b:c$.)

Lösung. Für die dritte Ecke des gesuchten Dreiecks erhält

man je einen Ort nach D. 4 (durch h_a) und nach D. 22 durch $b : c$. — Im allgemeinen zwei Dreiecke!

Aufgabe 136. Einen Punkt zu bestimmen, von dem aus drei Kreise unter gleichem Winkel erscheinen.

Lösung. Verbindet man den gesuchten Punkt mit den drei Mittelpunkten und diese mit den Berührungspunkten der aus jenem Punkte an die Kreise gezogenen Tangenten, so entstehen drei ähnliche Dreiecke, woraus sich ergibt, daß die Abstände des gesuchten Punktes von den Mittelpunkten der Kreise sich verhalten wie die Radien. Daher D. 22.

Aufgabe 137. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem gegenüber liegenden Winkel und der zugehörigen Höhe. (Aus a , A und h_a .)

Lösung durch D. 15 und D. 4. — Im allgemeinen zwei Dreiecke!

Aufgabe 138. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn statt der zugehörigen Höhe der vorigen Aufgabe die zugehörige Mittellinie gegeben ist.

Lösung. Statt D. 4 tritt D. 1 ein.

Aufgabe 139. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, der Halbierungslinie desselben und dem Radius des eingeschriebenen Kreises. (Aus A , w_a und ρ .)

Lösung. Man bestimmt den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises mit Hilfe von D. 4.

Aufgabe 140. Statt der Halbierungslinie des Winkels sei die seines Nebenwinkels und statt des Radius des eingeschriebenen Kreises der Radius eines äußeren Berührungskreises gegeben, der eine der den Winkel einschließenden Seiten zwischen ihren Endpunkten berührt.

Lösung genau wie vorhin.

Aufgabe 141. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem Gegenwinkel und der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten. (Aus a , A und $b^2 + c^2$.)

Lösung durch D. 13 und D. 15.

Aufgabe 142. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite und den beiden nicht zugehörigen Höhen. (Aus a , h_b und h_c .)

Lösung durch D. 6 und D. 1.

Aufgabe 143. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem Gegenwinkel und der Differenz der Quadrate der beiden andern Seiten. (Aus a , A und $b^2 - c^2$.)

Lösung durch D. 15 und D. 14.

Aufgabe 144. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der zugehörigen Höhe und der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten. (Aus a , h_a und $b^2 + c^2$.)

Lösung durch D. 4 und D. 13.

Aufgabe 145. Ein Sehnenviereck zu konstruieren aus einer Seite, einem anliegenden Winkel und den Diagonalen.

Lösung. Ist $AB = a$ und $\angle A$ gegeben, so ist durch Hinzunahme der gegebenen Diagonale BD das Dreieck ABD gegeben. Zur Bestimmung der vierten Ecke benutzt man entweder, da durch $\angle A$ auch sein Supplement C gegeben ist, D. 15 und D. 1, oder man bestimmt den Radius des Kreises um das Dreieck ABD , welcher Kreis ein Ort für C ist, und wendet noch D. 1 an. — Im allgemeinen zwei verschiedene Vierecke. Unter Umständen auch vier!

Aufgabe 146. Ein Sehnenviereck zu konstruieren aus einem Winkel, den beiden Diagonalen und dem Winkel, welchen die eine Diagonale mit dem einen Schenkel des gegebenen Viereckswinkels macht.

Lösung. Ein Stück des Vierecks ist unmittelbar gegeben; dadurch der zugehörige Kreis. Die vierte Ecke ergibt sich durch D. 1. — Zwei Vierecke!

Aufgabe 147. Ein Parallelogramm zu konstruieren aus einer Seite und den beiden Diagonalen.

Lösung durch Reduktion auf ein Dreieck, dessen drei Seiten gegeben sind. — Determination!

Aufgabe 148. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der zugehörigen Mittellinie und einer nicht zugehörigen Höhe. (Aus a , m_a und h_b .)

Lösung durch Reduktion auf ein rechtwinkliges Dreieck, wovon die Hypotenuse und eine Kathete bekannt sind. Dann D. 1.

Aufgabe 149. Ein Dreieck zu konstruieren aus der zu derselben Seite gehörigen Höhe und Mittellinie und dem Verhältnis dieser Seite zu einer andern.

Lösung durch Reduktion auf ein rechtwinkliges Dreieck; dann Anwendung von D. 22.

Aufgabe 150. Ein Viereck zu konstruieren aus zwei Nachbarseiten, dem eingeschlossenen Winkel, der von dem Scheitel ausgehenden Diagonale und einem fernern, dem gegebenen nicht gegenüber liegenden Winkel.

Lösung durch Reduktion auf ein Dreieck, von welchem zwei Seiten und ein Gegenwinkel gegeben sind, dann D. 1. — Unter Umständen zwei verschiedene Vierecke!

Aufgabe 151 und 152. Ein Sehnenviereck zu konstruieren aus den beiden Diagonalen, dem Radius des zugehörigen Kreises und der Summe (oder Differenz) zweier benachbarten Seiten.

Lösung durch Reduktion mittels eines Datums, wenn man in den gegebenen Kreis die Diagonale als Sehne einlegt, welche dem Winkel der Seiten gegenüber liegt, deren Summe (oder Differenz) gegeben ist. Dieser Winkel ist dann durch ein Datum gegeben und ermöglicht die Konstruktion eines Dreiecks, dessen Grundlinie jene als Sehne eingelegte Diagonale ist, deren Gegenwinkel bekannt und dessen eine Seite die gegebene Summe (oder Differenz) ist. Schließlich wird zur Bestimmung der vierten Ecke noch D. 1 angewandt.

Aufgabe 153. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, der Differenz der einschließenden Seiten und der Differenz ihrer Projektion auf die dritte Seite. (Aus A , $b - c$, $p - q$.)

Lösung durch Reduktion auf ein Dreieck, von welchem zwei Seiten und ein Gegenwinkel bekannt sind. Man erhält dies Hilfsdreieck, wenn man um A mit c einen Kreis beschreibt, der b in D , a in E schneidet. In demselben ist $CD = b - c$, $CE = p - q$, $\angle DEC = \frac{1}{2} A$. Letzteres erkennt man durch das Sehnenviereck $BEDF$, worin F der Durchschnitt der verlängerten CA mit dem um A beschriebenen Kreise ist. — Zwei Dreiecke!

Aufgabe 154. Durch zwei Punkte einen Kreis zu beschreiben, der eine durch den ersten Punkt gehende Gerade in einem Punkte schneidet, dessen Verbindungslinie mit einem dritten Punkte Tangente an dem Kreise wird.

Lösung. Sind A, B, C die drei gegebenen Punkte, und schneidet ein durch A und B konstruierter Kreis die Gerade durch A in D so, daß DC Tangente an diesem Kreise ist, so ist $\sphericalangle CDB = \sphericalangle BAD$, also D. 15. — Zwei Kreise!

Aufgabe 155. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkelhalbierer, dem Verhältnis der Summe der den betreffenden Winkel einschließenden Seiten zur dritten Seite und der Differenz der beiden andern Winkel. (Aus $w_a, b + c : a$ und $B - C$.)

Lösung. Ist AD der Winkelhalbierer w_a , so ist $DC : DB = b : c$ oder $DC : a = b : b + c$ oder $DC : b = a : b + c$. Da nun, wenn $AE \perp BC$ ist, der Winkel EAD bekannt und also $\triangle AED$ zu konstruieren ist, so hat man für C , wofür ED der eine Ort ist, einen zweiten nach D. 22.

Aufgabe 156. Ein Viereck zu konstruieren, von welchem die Projektionen des Durchschnittes der Diagonalen auf die vier Seiten gegeben sind und die Winkel der Gegenseiten.

Lösung. Der Winkel zwischen zwei auf zwei gegenüberliegende Seiten gefällten Loten setzt sich aus den Supplementen zweier Viereckswinkel zusammen, oder ist auch das Supplement des Winkels, den jene gegenüberliegenden Seiten miteinander bilden. Also D. 15.

Aufgabe 157. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem zugehörigen Winkelhalbierer und der Summe der beiden andern Seiten. (Aus a, w_a und $b + c$.)

Lösung. Ist AD der Winkelhalbierer w_a und die Verlängerungen von CA und BA über A hinaus, nämlich AE und AF , bezüglich gleich c und b , so ergibt sich leicht aus den Winkeln E und F , daß EB und FC beide zu AD parallel sind. Dann ergibt sich aber $BD : BA = a : b + c$ und ebenso $CD : CA = a : b + c$. Durch den Durchschnitt der beiden hierdurch gewonnenen Kreise als Örter für B und C ist dann zur Bestimmung dieser Punkte eine Gerade $= a$ zwischen die Peripherien so zu legen, daß zu den entstehenden Sehnen beider Kreise gleiche Peripheriewinkel gehören. (Vergl. Nachtrag 15.)

Aufgabe 158. In ein Viereck ein Parallelogramm zu beschreiben, dessen Mittelpunkt der Lage nach gegeben ist.

Lösung. Man hat durch den gegebenen Mittelpunkt zwischen die Schenkel zweier Winkel je eine Gerade zu legen, welche in jenem Punkte halbiert werden. (S. Nachtrag 1.)

Aufgabe 159. Durch zwei konzentrische Kreise eine Gerade so zu legen, daß die kleinere Sehne halb so groß wird wie die größere.

Lösung durch Reduktion, indem man vom Mittelpunkte das Lot auf die Sehne und im Endpunkte der kleineren Sehne das Lot auf ihr errichtet bis in einen zum entsprechenden Endpunkte der größeren Sehne gehörigen Radius.

Aufgabe 160. Ein Parallelogramm zu konstruieren, von welchem zwei Gegeneckpunkte gegeben sind, und dessen beiden andern Gegenecken auf der Peripherie eines gegebenen Kreises liegen sollen.

Lösung leicht, wenn man bedenkt, daß die Verbindungslinie der Mitte einer Sehne mit dem Kreismittelpunkte auf der Sehne senkrecht steht.

Aufgabe 161. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel und zwei Mittellinien.

Für die Analysis ist zu unterscheiden, ob eine der beiden Mittellinien zu dem gegebenen Winkel gehört oder nicht. Ist nämlich $\angle A$, m_a und m_b gegeben, und man legt $BE = m_b$ hin, so hat man für A einen Ort durch den gegebenen $\angle A$ nach D. 15. Da ferner der Durchschnittspunkt S der beiden Mittellinien bekannt ist, so giebt die bekannte Länge $AS = \frac{2}{3}m_a$ den zweiten Ort. Wegen der zwei Durchschnitte beider Örter erhält man zwei Punkte A und daraus zwei verschiedene Dreiecke, welche leicht abzuleiten sind, die die gegebene Mittellinie enthalten; aber das eine enthält statt des Winkels A sein Supplement. Ist dagegen $\angle A$, m_b und m_c gegeben, so löst man durch Reduktion. Durch den Winkel A hat man für A einen Ort als Kreisbogen über der Sehne $BD = m_b$. Beschreibt man dann um den bekannten Durchschnittspunkt S mit einem Radius $= \frac{2}{3}m_c$ einen Kreisbogen, so hat man durch D zwischen beide Peripherien eine Gerade zu legen, die in D halbiert wird. (Vergl. Nachtrag 2.)

Aufgabe 162. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem Verhältnis der beiden andern und dem Radius des umgeschriebenen Kreises. (Aus $a, b:c$ und r .)

Lösung. Der umgeschriebene Kreis mit der Seite BC als Sehne in demselben ist gegeben. Ein zweiter Ort für A ist die Verbindungslinie des Mittelpunktes des Bogens BC mit dem Punkte D , in welchem BC nach dem Verhältnis $b:c$ geteilt wird.

Aufgabe 163. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Mittellinie und den Verhältnissen derselben zu jeder der nicht zugehörigen Höhen. (Aus $m_a, m_a:h_b$ und $m_a:h_c$.)

Lösung nach der Ähnlichkeitsmethode auf die Aufgabe zu reduzieren: Durch einen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels zwischen diese Schenkel eine Gerade zu legen, welche in dem Punkte halbiert wird. (Nachtrag 2.) Fällt man nämlich vom Fußpunkte D der gegebenen Mittellinie m_a die Lote DE und DF auf b und c , so läßt sich aus den rechten Winkeln E und F und den Verhältnissen $AD:DE = m_a:\frac{1}{2}h_b$ und $AD:DF = m_a:\frac{1}{2}h_c$ eine Figur $AE'D'F'$ konstruieren, an welcher $AD'E' \sim ADE$ und $AD'F' \sim ADF$ ist. Der Winkel A wird aber dadurch bestimmt, und es kann der Punkt D auf AD' bestimmt werden, durch den BC so zu legen ist, daß $BD = CD$ wird.

Aufgabe 164. Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem der Schwerpunkt (der Durchschnitt der Mittellinien) und eine Ecke der Lage nach, und für dessen beiden andern Ecken je eine Gerade oder eine Kreisperipherie als Ort gegeben sind.

Lösung durch Reduktion. Durch die Ecke A und den Schwerpunkt S ist auch der Fußpunkt D der einen Mittellinie gegeben, durch welchen eine Gerade zwischen die gegebenen Örter zu legen ist, welche in D halbiert wird. (Nachtrag 1 oder 2.)

Aufgabe 165. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, der zugehörigen Höhe und dem Verhältnis der von dieser Höhe auf der Gegenseite gebildeten Abschnitte. (Aus A, h_a und $p:q$.)

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode, indem man zunächst ein beliebiges Dreieck $B'C'A$ konstruiert, welches den gegebenen

Winkel A enthält, und deren Abschnitte $B'D'$ und $C'D'$ das gegebene Verhältniß $p : q$ haben.

Aufgabe 166. In einen Halbkreis ein Viereck, ähnlich einem gegebenen, so einzutragen, daß zwei Ecken desselben auf dem Diameter liegen.

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode mit Hilfe eines in gleicher Lage um das gegebene Viereck beschriebenen Halbkreises.

Aufgabe 167. In ein Dreieck einen Rhombus einzubeschreiben, der mit dem Dreiecke einen Winkel gemeinsam hat.

Lösung durch Halbierung dieses gemeinsamen Winkels, wodurch man in der Gegenseite die Gegenecke des Rhombus erhält.

Aufgabe 168. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, dem Verhältniß der zugehörigen Höhe zu einer andern und der dritten Höhe. (Aus $\angle A$, $h_a : h_b$ und h_c .)

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode. Ein rechtwinkliges Dreieck $AB'E'$, worin $B'E'$ der Höhe h_b entspricht, und A der gegebene Winkel ist, ist seiner Form nach gegeben. Bestimmt man nun nach der Proportion $h_a : h_b = AD' : B'E'$ die AD' als vierte Proportionale, so erhält man auch ein Dreieck $AB'D'$, und durch Verlängerung von AE' und $B'D'$ ein Dreieck $AB'C'$, welches dem gesuchten ähnlich ist.

Aufgabe 169. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der zugehörigen Mittellinie und dem Verhältniß der nicht zugehörigen Höhen. (Aus a , m_a und $h_b : h_c$.)

Lösung durch Reduktion; denn durch $h_b : h_c$ ist $c : b$ gegeben.

Aufgabe 170. Ein Dreieck zu konstruieren aus den Verhältnissen einer Mittellinie zur zugehörigen Seite und zu einer andern, sowie der dritten Seite. (Aus $m_a : a$, $m_a : b$ und c .)

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode. Aus den gegebenen beiden Verhältnissen $m_a : a$ und $m_a : b$ läßt sich nämlich das Verhältniß $a : b$ bestimmen, so daß von dem Dreieck ADC , in welchem $AD = m_a$ ist, das Verhältniß der drei Seiten bekannt ist.

Aufgabe 171. Ein Dreieck zu konstruieren aus den Verhältnissen einer Höhe zur zugehörigen und zu einer

nicht zugehörigen Mittellinie, und der dritten Mittellinie. (Aus $h_a : m_a$, $h_a : m_b$ und m_c .)

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode. Ein dem Dreiecke ADE , worin $AD = h_a$ und $AE = m_a$ ist, ähnliches Dreieck $AD'E'$ ist nämlich gegeben, und aus diesem mit Hilfe des zweiten Verhältnisses $h_a : m_b$ leicht ein Dreieck $AB'C'$ abzuleiten, das dem gesuchten ähnlich ist.

Aufgabe 172. Ein Dreieck zu konstruieren aus den Verhältnissen einer Seite zu den nicht zugehörigen Mittellinien und der dritten Mittellinie. (Aus $a : m_b$, $a : m_c$ und m_a .)

Lösung mittels Reduktion durch Örter. Für den Durchschnittpunkt S der drei Mittellinien sind zwei Örter bekannt.

Aufgabe 173. Ein Dreieck zu konstruieren aus den Verhältnissen einer Höhe zu den nicht zugehörigen Mittellinien und der dritten Mittellinie. (Aus $h_a : m_b$, $h_a : m_c$ und m_a .)

Lösung durch Parallelverschiebung der Höhe in den Durchschnittpunkt S der Mittellinien; alsdann die Ähnlichkeitsmethode.

Aufgabe 174. Ein Dreieck zu konstruieren aus dem Verhältnis einer Seite zur Halbierungslinie eines anliegenden Winkels, der Differenz der beiden andern Winkel und der andern am halbierten Winkel anliegenden Seite. (Aus $c : w_a$, $B - C$ und b .)

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode und Ort 22, da durch die gegebene Winkeldifferenz ein dem Dreiecke ADE , in welchem D und E die Fußpunkte von h_a und w_a sind, ähnliches Dreieck $AD'E'$ gegeben ist. Das entsprechende C' erhält man nach D. 22 aus obigem Verhältnis in Verbindung mit dem konstruierten AE' . Dadurch aber findet man dann leicht ein Dreieck $AB'C'$, welches dem gesuchten ähnlich ist.

Aufgabe 175. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, dem Verhältnis der zugehörigen Höhe zum Umfange und dem Radius des eingeschriebenen Kreises. (Aus $\angle A$, $h_a : \frac{1}{2}s$ und ρ .)

Lösung durch Reduktion und Ähnlichkeitsmethode. Stellt man nämlich den Umfang des Dreiecks als DE durch Verlängerung

der Seite BC über B um $BD = BA$, und über C um $CE = CA$ dar, so ist $\sphericalangle DAE = 1 R + \frac{1}{2} A$ und die Aufgabe reduziert auf die andere: Ein Dreieck aus einem Winkel, der zugehörigen Höhe und der Grundlinie zu konstruieren, indem man nämlich über einer beliebigen als Umfang angenommenen Linie $D'E'$ ein Dreieck $A'D'E'$ konstruiert, welches den Winkel $A' = A$ und eine Höhe $A'F$ enthält, welche man nach der Proportion $\frac{1}{2}s : h_a = \frac{1}{2} D'E' : A'F$ konstruiert. Bestimmt man hieraus das dem gesuchten entsprechende Dreieck $A'B'C'$, so findet man aus diesem mittels des eingeschriebenen Kreises leicht das gesuchte $A'BC$.

Aufgabe 176. Ein Dreieck zu konstruieren aus den Verhältnissen einer Mittellinie zu der zugehörigen und einer nicht zugehörigen Seite und der dritten Seite. (Aus $m_a : a$, $m_a : b$ und c .)

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode, da ein dem Dreieck ADC , in welchem D der Fußpunkt von m_a ist, ähnliches Dreieck durch das Verhältnis seiner Seiten gegeben ist.

Aufgabe 177. Ein Dreieck zu konstruieren aus den Verhältnissen einer Seite zu ihrer zugehörigen Höhe und Mittellinie, und dem Radius des umgeschriebenen Kreises. (Aus $a : h_a$, $a : m_a$ und r .)

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode, nachdem man aus den gegebenen beiden Verhältnissen das Verhältnis $h_a : m_a$ bestimmt hat.

Aufgabe 178. Ein Dreieck zu konstruieren aus den Verhältnissen einer Seite zu den Radien des ein- und umgeschriebenen Kreises und einer Höhe. (Aus $a : r$, $a : \rho$ und h_a .)

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode, da durch das Verhältnis $a : r$ resp. $\frac{1}{2}a : r$ der Winkel A gegeben ist. Konstruiert man einen die Schenkel des Winkels berührenden Kreis und legt an diesen zwischen die beiden Tangenten eine dritte a' , welche, wenn der Radius des konstruierten Berührungskreises ρ' ist, aus der Proportion $\rho : a = \rho' : a'$ abzuleiten ist, so erhält man ein Dreieck $AB'C'$, welches dem gesuchten ähnlich ist. Die hierzu erforderliche Kenntnis der Lösung der

Aufgabe 179. Zwischen zwei Tangenten eines Kreises eine dritte so zu legen, daß das begrenzte Stück eine gegebene Länge erhalte

wird vermittelt durch die geometrische Thatsache, daß das Stück einer gemeinschaftlichen inneren Tangente zwischen den gemeinschaftlichen äußeren der Länge einer äußern zwischen den beiden Berührungspunkten gleich ist.

Aufgabe 180. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, dem Verhältniß der zugehörigen beiden Radien und der dem Winkel entsprechenden Höhe. (Aus $\angle A$, $r : \rho$ und h_a .)

Lösung durch Reduktion auf A. 176. Denn durch $\angle A$ ist das Verhältniß $r : a$ gegeben; aus der Verbindung dieses Verhältnisses mit dem gegebenen $r : \rho$ kann man aber auch $\rho : a$ ableiten.

Aufgabe 181. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, dem Verhältnisse seiner Halbierungslinie zum Umfange und dem Radius des umgeschriebenen Kreises. (Aus $\angle A$, $w_a : \frac{1}{2}s$ und r .)

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode. Beschreibt man nämlich den äußeren Berührungskreis an das gesuchte Dreieck, welcher die Schenkel des gegebenen Winkels A in F und G trifft, so ist bekanntlich $AF = AG =$ dem halben Umfang des gesuchten Dreiecks. Es ist also, wenn D der Fußpunkt des Winkelhalbierers w_a ist, allezeit ein Dreieck $AD'G' \sim ADG$ zu konstruieren, da von demselben ein Winkel ($= \frac{1}{2}A$) und das Verhältniß von $AD' : AG'$ (das Verhältniß des Winkelhalbierers zum halben Umfang) gegeben ist. Aus diesem erhält man aber mittels einer Tangente von D' aus an den in G' und F' berührenden Kreis ein Dreieck $AB'C'$, welches dem gesuchten ähnlich ist.

Aufgabe 182. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, dem Verhältniß der zugehörigen Mittellinie zur Summe der den Winkel einschließenden Seite und einer winkelhalbierenden Transversale. (Aus $\angle A$, $m_a : b + c$ und w_a oder w_b oder w_c .)

Lösung durch Reduktion nach der Ähnlichkeitsmethode. Man verlängert nämlich die Mittellinie AD über D hinaus bis E um sich selbst, verbindet E mit C und verlängert AC bis F um $CF = CE$. Dann ist im Dreieck AEF das Verhältniß $AE : AF$ bekannt, nämlich $2m_a : b + c$, ferner der Winkel F aus A bestimmbar. Man kann daher zunächst ein Dreieck $AE'F' \sim AEF$

konstruieren und erhält durch die Verbindung der Mitte D' von AE' mit dem Punkte, in welchem das in der Mitte von $E'F'$ zu dieser Linie errichtete Lot AF' schneidet, leicht ein dem gesuchten ähnliches Dreieck $AB'C'$.

Aufgabe 183. Statt des Verhältnisses $m_a : b + c$ möge das Verhältniß $m_a : b - c$ gegeben sein.

Lösung der vorhergehenden ganz analog, wenn man $CF' = CE$ von CA abschneidet.

Aufgabe 184. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, dem Verhältniß der Gegenseite zur zugehörigen Höhe und der Summe der den Winkel einschließenden Seiten. (Aus $\angle A$, $a : h_a$ und $b + c$.)

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode. Über einer beliebigen $B'C'$ als Sehne beschreibe man einen Kreisbogen für den Peripheriewinkel $= A$, bestimme dann aus der Proportion $a : h_a = B'C' : x$ die entsprechende Höhe AD' , wodurch man ein Dreieck $AB'C'$ erhält, welches dem gesuchten ähnlich ist. Um hieraus das gesuchte Dreieck abzuleiten, hat man noch AB zu bestimmen. Das erhält man aber durch die Proportion $AC' + AB' : b + c = AB' : AB$. Eine Parallele durch B zu $B'C'$ vollendet das Dreieck ABC .

• **Aufgabe 185.** Statt der Summe $b + c$ soll die Differenz $b - c$ gegeben sein.

Lösung der vorigen ganz analog.

Dem aufmerksamen Leser kann es nicht entgangen sein, daß bei vielen der vorhergehenden Aufgaben die Lösung auf die Konstruktion eines Dreiecks reduziert werden konnte, das dem gesuchten Dreieck ähnlich war, und daß man aus diesem meist in einfachster Weise das gesuchte Dreieck ableiten konnte. Darum dürfen wir auch die Ähnlichkeitsmethode eine fruchtbare Methode der Reduktion nennen. —

Wenn man in den vorhergehenden Aufgaben unter Beibehaltung der Stücke oder Bedingungen, aus welchen das ähnliche Hilfsdreieck abgeleitet werden konnte, an Stelle des dritten Stückes, welches zur definitiven Bestimmung der Größe des gesuchten Dreiecks diente und stets eine Länge war, irgend eine andere am Dreiecke vorkommende Länge oder eine Kombination solcher Längen, in Gestalt von Summe oder Differenz, als gegeben annimmt, so erhält man

statt jeder einzelnen Aufgabe so viele, als wie viele verschiedene dritte Stücke man als gegeben annimmt. Auf diese Weise kann man aus den vorhergehenden Aufgaben leicht mehrere hundert aufstellen, wenn man von den zahlreichen Geraden, welche an einem Dreieck vorkommen, und deren Kombinationen irgend eine als drittes gegebenes Stück annimmt. Die Aufstellung einer Reihe dieser Aufgaben und ihre Lösung ist zur Übung sehr zu empfehlen.

§ 27. Es soll hier noch eine zweite Gruppe von Übungsbeispielen folgen, die mehr gemischter Natur sind, während in der vorhergehenden Gruppe Dreieckskonstruktionen und Konstruktionen anderer geschlossener Figuren prävalierten. Zur Lösung derselben sind nur in den Fällen ausführlichere Andeutungen gemacht, in welchen sich entweder größere Schwierigkeiten zeigten, oder die Art der Lösung ein hervorragendes Interesse darbot.

Aufgabe 186. Einen Rhombus zu konstruieren, von welchem zwei Seiten auf zwei gegebenen Parallelen liegen, und dessen beiden anderen Seiten jede durch einen gegebenen Punkt gehen sollen.

Zur Lösung berücksichtige man, daß ein Rhombus zwei gleiche Höhen hat. Da die eine gegeben, so giebt die Tangente aus einem der gegebenen Punkte an den um den andern mit dieser Höhe als Radius beschriebenen Kreis die Lage der dritten Seite. — Zwei Auflösungen!

Aufgabe 187. Auf einer von zwei Parallelen ist ein Punkt gegeben, ein anderer außerhalb derselben. Man soll ein Parallelogramm konstruieren, wovon zwei Gegenseiten auf den Parallelen liegen und eine Ecke in dem auf der einen Parallelen gegebenen Punkte; die Gegenseite dieser Ecke soll durch den andern Punkt gehen und das Parallelogramm einen gegebenen Umfang erhalten.

Lösung. Ist $ABCD$ das gesuchte Parallelogramm, und liegen AB und CD auf den Parallelen, A in dem gegebenen Punkte, und geht BC durch den andern Punkt P , und man verlängert AB um $BE = BC$, so ist AE der halbe Umfang, also E bekannt; ferner ist $\triangle BEC$ gleichschenkelig, und daher die Höhe von E gleich der Höhe von C , also gegeben. Eine Tangente

durch P an einen um E zu beschreibenden Kreis giebt dann den Punkt B ; aber nur die eine.

Aufgabe 188. Das unter gleichen Bedingungen hinsichtlich seiner Lage zu konstruierende Parallelogramm soll eine gegebene Seitendifferenz haben.

Lösung mittels der andern Tangente.

Aufgabe 189. Das Verhältniß der Seiten des zu konstruierenden Parallelogramms soll gegeben sein.

Lösung. Aus dem Seitenverhältniß ergibt sich das Verhältniß der Höhen, von denen die eine bekannt ist. Ein Kreis um A und eine Tangente von B an diesen vollenden die Lösung.

Aufgabe 190. Einen Kreisbogen so zu teilen, daß die zu den Teilen gehörigen Sehnen ein gegebenes Verhältniß haben.

Lösung einfach.

Aufgabe 191. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Höhe, der zugehörigen Mittellinie und dem zugehörigen Winkelhalbierer. (Aus h_a , m_a und w_a .)

Lösung mittels des umgeschriebenen Kreises.

Aufgabe 192. Durch zwei Punkte einen Kreis zu beschreiben, der einen andern so schneidet, daß die gemeinsame Sehne Tangente eines zweiten gegebenen Kreises wird.

Lösung. Der Durchschnitt der gemeinschaftlichen Sehne mit der Verbindung der gegebenen Punkte ist das Potenzzentrum des einen gegebenen, des gesuchten und jedes dritten durch die gegebenen Punkte gehenden und den ersten Kreis berührenden Kreises. Dieser Durchschnittspunkt läßt sich also in einfachster Weise bestimmen. Die Tangente aus diesem Punkte an den andern gegebenen Kreis schneidet den ersten unter der gemeinschaftlichen Sehne, und ein Kreis durch die gegebenen Punkte und jene Durchschnittspunkte, was immer möglich ist, ist der gesuchte. — Zwei Kreise!

Aufgabe 193. Ein Dreieck, kongruent einem gegebenen, so zu konstruieren, daß zwei Seiten desselben durch gegebene Punkte gehen und die Halbierungslinie des eingeschlossenen Winkels Tangente eines gegebenen Kreises werde.

Lösung. Beschreibt man über der Verbindungslinie der Punkte B' und C' , durch welche die Seiten AB und AC des gesuchten Dreiecks gehen sollen, als Sehne einen Kreis, der über $B'C'$ einen Peripheriewinkel gleich dem bekannten Winkel A faßt, so ist die Mitte des Bogens $B'C'$ (auf der anderen Seite) ein Punkt des Winkelhalbierers, welcher also, da er auch Tangente an einem gegebenen Kreise sein soll, seiner Lage nach bestimmt ist.

Aufgabe 194. In einen gegebenen Kreis ein Viereck zu beschreiben, das zugleich ein Tangentenviereck ist, wenn von demselben eine Diagonale und der Winkel der Diagonalen gegeben ist.

Lösung. Legt man die gegebene Diagonale AC in den Kreis, so kennt man, da die Richtung der andern Diagonale BD gegeben ist, die Mitten der zu BD gehörigen Bogen. Dadurch sind aber die Linien bekannt, welche die Winkel A und C des gesuchten Vierecks halbieren und einander in dem Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises schneiden. Die Verbindung dieses so gefundenen Mittelpunktes mit den Mitten der zu AC gehörigen Bogen giebt die Diagonale DB .

Aufgabe 195. Ein Sehnenviereck zu konstruieren aus seinen Diagonalen, einem Winkel und dem Winkel, den die vom Scheitel des gegebenen Winkels ausgehende Diagonale mit einer Gegenseite macht.

Lösung. Durch die Diagonale DB und $\angle A$ ist der umgeschriebene Kreis gegeben; und man erhält durch den andern Winkel entweder BA oder DA , jedenfalls also den Punkt A .

Aufgabe 196. Ein Viereck zu konstruieren aus drei Seiten und den Winkeln an der vierten Seite.

Lösung durch Parallelverschiebung. Ist nämlich AD die vierte Seite, an welcher die bekannten Winkel A und D liegen, und man verschiebt AB in die parallele Lage DB' , so ist das Dreieck $DB'C$ durch seine zwei Seiten DB' und DC und den eingeschlossenen Winkel CDB' , der sich aus A und D ableiten läßt, gegeben. Aus der bekannten Richtung DA und der gegebenen Länge CB erhält man je einen Ort für B .

Aufgabe 197. Ein Viereck zu konstruieren aus seinen

Diagonalen, dem Winkel derselben und den Winkeln, welche eine Diagonale mit zwei Gegenseiten macht.

Lösung durch Parallelverschiebung. Sind die Winkel zwischen der Diagonale AC und den Gegenseiten BC und AD die gegebenen, so bringe man die andere Diagonale DB durch Parallelverschiebung in die Lage CB' . Alsdann ist $\triangle ACB'$ gegeben, da $\sphericalangle BCB'$ bestimmbar ist. Für B und D hat man ferner je einen Ort durch die Winkel, welche AC mit den Gegenseiten BC und AD bildet, zwischen welche man $DB \parallel CB'$ zu legen hat.

Aufgabe 198. Auf einer Geraden einen Punkt zu bestimmen, so daß die von ihm an zwei Kreise gezogenen Tangentenpaare unter sich gleiche Winkel bilden.

Lösung durch D. 22, was man erkennt, wenn man den gesuchten Punkt mit den Mittelpunkten der beiden Kreise verbindet.

Aufgabe 199. In zwei Kreisen zwei parallele Radien so zu ziehen, daß dieselben von einem Punkte außerhalb der Kreise unter gleichen Winkeln erscheinen.

Lösung durch Umlegung. Sind die parallelen Radien AX und BY so gezogen, daß $\sphericalangle APX = \sphericalangle BPY$ ist, macht dann $PAA' = PB$ und legt Dreieck PAX so an B , daß $BC = PA$ und $\sphericalangle BCD = \sphericalangle APX$ wird, so hat man durch Y die Parallele YP' zu ziehen, damit der Schenkel des Winkels BCD durch Y gehe. Dann ist $\sphericalangle BP'Y = APX = BPY$ und also Y mittels des Kreises durch B , P und P' bestimmbar, da P' selbst leicht zu bestimmen ist.

Aufgabe 200. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkelhalbierer und den beiden Differenzen zwischen den andern Seiten und den Abschnitten der von jenem geteilten Dreiecksseite.

Lösung. Ist AD der gegebene Winkelhalbierer, und man macht auf BC sowohl $BE = BA$, als auch $CF = CA$, so sind DE und DF die gegebenen Differenzen, und AE und AF die Grundlinien zweier gleichschenkligen Dreiecke. Hieraus folgt, daß der AEF umgeschriebene Kreis konzentrisch ist mit dem ABC eingeschriebenen Kreise. Den Durchmesser ADG jenes Kreises bestimmt man aus der Gleichung $DE \cdot DF = AD \cdot DG$, woraus man zunächst DG findet. Dann legt man in den so bestimmten

Kreis das Dreieck AEF , bestimmt den Radius des dem Dreiecke ABC eingeschriebenen Kreises (er ist das Lot vom Mittelpunkte des erstern Kreises auf EF), beschreibt diesen und vollendet ABC durch Tangenten an diesen.

Aufgabe 201. Ein Trapez zu konstruieren aus seinen Diagonalen, dem Winkel derselben und der Summe zweier aneinander stoßenden Seiten.

Lösung durch Parallelverschiebung der einen Diagonale in die Ecke, wo die beiden Seiten zusammenstoßen, deren Summe gegeben ist. Verschiebt man z. B. DB in die Lage CE , wenn $CD + CB$ bekannt, so ist $\triangle ACE$ gegeben. Macht man nun EBF gleich der gegebenen Summe, so ist $BF = BC$, also B leicht zu bestimmen, wenn man FC zieht.

Aufgabe 202. Dieselbe Aufgabe mit der Änderung, daß statt jener Summe die entsprechende Differenz gegeben sein soll.

Lösung in analoger Weise einfach; nur hat man die gegebene Differenz auf der EB in entgegengesetzter Richtung abzutragen.

Aufgabe 203. Zu zwei Punkten auf der Peripherie eines Kreises einen dritten so zu bestimmen, daß das Rechteck aus den Entfernungen desselben von den beiden ersten Punkten gleich sei dem Quadrate über der die beiden ersten Punkte verbindenden Sehne.

Lösung. Durch die Punkte A und B auf der Kreisperipherie ist der Winkel AXB gegeben. Durch diesen und das Produkt der einschließenden Seiten ist auch der Inhalt des Dreiecks ABX gegeben, so daß man, wenn man AB als Grundlinie dieses Dreiecks ansieht, die zugehörige Höhe finden kann.

Zusatz. Bezeichnet man den konstanten Winkel AXB durch α , die Höhe von X auf AB durch h , AB selbst durch a , so ist der Inhalt des Dreiecks $AXB = \frac{1}{2} AX \cdot BX \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} a \cdot h$, woraus sich ergibt: $h = a \cdot \sin \alpha$. Soll das Rechteck $AX \cdot BX$ irgend einem gegebenen Quadrate, etwa m^2 , gleich sein, so erhält man $m^2 \sin \alpha = ah$, woraus h als vierte Proportionale zu konstruieren ist. — Das Maximum jenes Rechteckes ist leicht zu bestimmen.

Aufgabe 204. Auf einer Kreisperipherie einen Punkt zu bestimmen, dessen Verbindung mit den Endpunkten zweier gegebenen Strecken gleiche Dreiecke bilden.

Lösung. Aus den gegebenen Strecken AB und CD läßt sich das Verhältnis der Höhen von dem gesuchten Punkte aus bestimmen, daraus ein Ort für diesen Punkt. — Auch wenn das Verhältnis der entstehenden Dreiecke ein gegebenes sein soll, etwa $m:n$, so läßt sich das Verhältnis dieser Höhen bestimmen. Man findet $h:h' = m \cdot CD : n \cdot AB$, wenn h und h' zu AB und CD gehören. Das Verhältnis $m \cdot CD : n \cdot AB$ läßt sich aber leicht in ein lineares Verhältnis $p:q$ umwandeln.

Aufgabe 205. Von einer Geraden aus an einen Kreis eine Sekante zu ziehen, welche auf der Geraden senkrecht steht und durch die Kreisperipherie halbiert wird.

Lösung mittels einer Tangente, welche zwischen der gegebenen Geraden und dem Kreise eine Länge hat, welche dem Diameter des Kreises gleich ist; der Berührungspunkt ist der diametrale Gegenpunkt des Endpunktes der Sekante.

Aufgabe 206 bis 208. Von dem einen Durchschnittspunkte zweier Kreise in jeden eine Sehne zu legen, so daß dieselben einen gegebenen Winkel miteinander bilden und

Aufgabe 206 eine gegebene Summe bilden.

Lösung mittels Drehung des einen Kreises in eine Lage, in welcher die beiden Sehnen eine Gerade bilden. Diese Drehung läßt sich in zweifacher Weise ausführen. — Haben die gegebenen Kreise die Mittelpunkte M und M' , ist P der Durchschnittspunkt, von welchem aus die Sehnen PX und PY so gezogen sind, daß $\angle XPY = \alpha$ und $PX + PY = s$ ist, so verlängere man XP über P hinaus bis Y' , so daß $PY' = PY$ ist, und mache $\triangle PY'C \cong PYM'$ und zwar so, daß C und M' an verschiedenen Seiten von XPY' liegen. Beschreibt man dann um C als Mittelpunkt mit $CP = CY'$ als Radius einen Kreis, so ist dies der Kreis M' in der neuen Lage, in welcher die gesuchten Sehnen eine einzige Gerade bilden. Der Mittelpunkt C ist aber leicht zu bestimmen, da sich in einfachster Weise ergibt, daß $\angle M'PC = 2R - \alpha$ ist. In die Kreise M und C läßt sich aber leicht durch P die Gerade XPY' so legen, daß $XP + PY' = s$ wird. Dann hat

man in den Kreis M' die Sehne PY nur so zu legen, daß $\angle XPY = \alpha$ wird. Es ist alsdann $PY = PY'$, also $XP + PY = s$. Oder man legt PY als PY'' auf PX und konstruiert $\triangle PC'Y'' \cong PYM'$ so, daß C' und M' an derselben Seite von PY'' liegen. Dann ist C' der Mittelpunkt des dem Kreise M' kongruenten Kreises, in welchen man von P aus eine Sehne zu legen hat, welche mit der in den Kreis M fallenden Sehne die gegebene Summe bildet. — Die erstere Umlegung ist vorzuziehen.

Aufgabe 207 eine gegebene Differenz bilden.

Lösung in ganz analoger Weise mittels der ersten Umlegung des einen Kreises.

Aufgabe 208 einander gleich sind.

Lösung ebenfalls mittels derselben Umlegung.

Aufgabe 209. Durch einen Punkt innerhalb des kleineren zweier konzentrischen Kreise zwischen die beiden Peripherien eine Gerade zu legen, die in diesem Punkte halbiert wird.

Lösung mittels eines leicht zu konstruierenden Parallelogramms. — Zwei Lösungen!

Aufgabe 210. Durch einen der Durchschnittspunkte zweier Kreise in den einen eine Sehne zu legen, welche durch die Peripherie des andern nach einem gegebenen Verhältnisse geteilt wird.

Lösung. Schneidet die Sehne PY im Kreise M' die Peripherie des Kreises M in X , und die durch Y zu MX gezogene Parallele die Verlängerung von PM in Z , so läßt sich mittels Proportionen sowohl der Punkt Z , als auch die Länge von ZY , und hierdurch der Punkt Y bestimmen.

Aufgabe 211. Auf der Verlängerung eines Diameters einen Punkt zu bestimmen, dessen Entfernung von einem gegebenen Punkte auf dem Durchmesser gleich ist der aus ihm an den Kreis gezogenen Tangente.

Lösung reduziert sich auf die Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem man eine Kathete und den Überschuß der Hypotenuse über die andere Kathete kennt. Diese Konstruktion erreicht man am einfachsten, wenn man die bekannte Differenz dadurch darstellt, daß man die Hypotenuse auf die andere Kathete legt, so daß dieselbe als wirklicher Überschuß erscheint.

Zur Determination sei bemerkt, daß der gesuchte Punkt nur auf derselben Seite vom Mittelpunkt liegen kann, auf welcher der gegebene Punkt liegt.

Aufgabe 212. Von zwei Punkten außerhalb eines Kreises zwei Sekanten durch denselben Punkt der Peripherie zu ziehen, so daß die Sehne zwischen den Endpunkten derselben von gegebener Größe sei.

Lösung einfach mit Hilfe von D. 15, da der Peripheriewinkel über einer der Größe nach gegebenen Sehne eines Kreises gegeben ist.

Aufgabe 213. Durch zwei Punkte auf der Peripherie eines Kreises zwei Sehnen zu demselben dritten Punkte zu ziehen, so daß sie nötigenfalls verlängert ein gleichschenkliges Dreieck bilden, dessen Grundlinie auf einer gegebenen Geraden liegt.

Lösung einfach, wenn man durch einen der gegebenen Punkte eine Parallele zur gegebenen Geraden zieht.

Aufgabe 214. In einen Kreis eine Sehne von gegebener Größe so zu legen, daß sie durch eine andere Sehne halbiert wird.

Lösung leicht.

Aufgabe 215. Durch einen der Durchschnittspunkte zweier Kreise eine Gerade so zu legen, daß auf den entstehenden Sehnen gleiche Peripheriewinkel stehen.

Lösung mittels eines Lotes im gegebenen Durchschnittspunkt zur gesuchten Geraden, welches den Winkel zwischen den zu jenem Durchschnittspunkte gehörigen Durchmessern der beiden Kreise halbiert.

Aufgabe 216. Zu den parallelen Seiten eines Trapezes eine Parallele so zu legen, daß sie durch die Diagonalen desselben in drei gleiche Teile geteilt wird.

Lösung. Ist $XYZT \parallel AB$ und CD so gezogen, daß $XY = YZ = ZT$ ist, so ist stets, wenn nur $XT \parallel AB$ ist, $XY = ZT$, wie sich leicht beweisen läßt. Es kommt also darauf an, zwischen Seite AD und Diagonale BD die $XZ \parallel AB$ so zu legen, daß sie durch AC halbiert werde, daß also $XY = YZ$ werde. Ist nun E der Durchschnittspunkt der Diagonalen, so hat man wegen Ähnlichkeit der Dreiecke YZE und CDE zunächst die

Proportion: $YZ : DC = YE : EC$. Auch besteht die Proportion $XY : DC = AY : AC$. Soll nun $YZ = XY$ sein, so ergibt sich $AY : YE = AC : CE$, d. h. Punkt Y ist vierter harmonischer Punkt zu A , E und C , und zwar konjugiert zu C .

Zusatz. Hierdurch ist auch die Aufgabe gelöst: Zwischen zwei Dreiecksseiten in gegebener Richtung eine Gerade zu legen, welche durch die dritte Seite halbiert wird. Auch ist die Lösung durch vorstehende gegeben, wenn statt der Gleichheit der Stücke XY und YZ ihr Verhältniß $m : n$ gegeben ist. Man erhält für diesen Fall $AY : YE = m \cdot AC : n \cdot EC$.

Aufgabe 217. Zwischen zwei Parallelen eine Gerade von gegebener Länge so zu legen, daß sie die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks wird, dessen Spitze ein zwischen den Parallelen gegebener Punkt ist.

Lösung mittels einer durch jenen Punkt zwischen die Parallelen gelegten Geraden, welche jene gegebene Größe hat, und eines auf dieser Geraden in jenem Punkte errichteten und bis zur Mittelparallele verlängerten Lotes.

Determination. Der Punkt muß außerhalb der Mittelparallele liegen. Derselbe darf auch außerhalb der Parallelen liegen.

Aufgabe 218. An einen Kreis eine zu einer gegebenen Geraden senkrechte Sekante so zu ziehen, daß dieselbe durch die Peripherie nach einem gegebenen Verhältniß (unter andern nach der sectio aurea) geteilt werde.

Lösung. Ist XYZ diese auf der gegebenen Geraden senkrechte Sekante, so läßt sich in jedem Falle der Durchschnitt des zu Z gehörigen Diameters mit der gegebenen Geraden aus dem gegebenen Verhältniß bestimmen.

Aufgabe 219. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade durch die Schenkel eines Winkels zu legen, daß die von den Schenkeln abgeschnittenen Stücke ein gegebenes Rechteck bilden.

Lösung durch Umlegung. Ist $\angle MAN$ der gegebene, P der gegebene Punkt, dessen Lage wir innerhalb des Winkels annehmen, und schneidet die Gerade XPY von den Schenkeln AM und AN die Stücke AX und AY ab, so daß $AX \cdot AY = m \cdot n$ ist, so ziehe man PC und PD parallel zu AN und AM bis in AM

und AN und außerdem $YE \parallel DX$ bis in AM . Dann sind C und D bekannte Punkte. Ferner ist $AD : AY = AX : AE$, woraus sich, da $AY \cdot AX = m \cdot n$ gegeben ist, der Punkt E bestimmen läßt. Nun ist $PC = AD$, also $AD : AY = PC : AY$ und $PC : AY = CX : AX$. Daher ist auch $CX : AX = AX : AE$ und dadurch ein Verhältniß auf eine bekannte Gerade umgelegt. Aus dieser Proportion erhält man aber

$AX - CX : AX = AE - AX : AE$, oder $AC : AX = EX : AE$, woraus man den Punkt X bestimmen kann, indem man AE in X so teilt, daß das Rechteck aus den beiden Stücken dieser Strecke einem bekannten Rechtecke ($AC \cdot AE$) gleich wird. Das geschieht aber dadurch, daß man die mittlere Proportionale zwischen AC und AE in einen über AE als Diameter beschriebenen Halbkreis senkrecht auf dem Diameter einlegt. Der Fußpunkt derselben ist der Teilpunkt.

Zusatz. Liegt der Punkt P außerhalb des Winkels, so mache man die entsprechenden Konstruktionen und stelle die entsprechenden Proportionen auf, beachte aber bei der Ableitung der Schlußproportion die geänderte Lage der Punkte.

Aufgabe 220. Zwischen die Schenkel eines Winkels eine Gerade in gegebener Richtung so zu legen, daß die Entfernungen ihrer Endpunkte von einem gegebenen Punkte einander gleich sind. (Vergl. N. 217.)

Lösung. Man bestimme die Mitte der einzulegenden Geraden durch zwei Örter. Der eine Ort ist die von dem gegebenen Punkte auf die gegebene Richtung gefällte Senkrechte (diese Richtung kann als Gerade durch den Scheitel des Winkels gegeben sein). Der andere Ort ist die Verbindungslinie des Scheitels mit der Mitte einer beliebigen, aber in der gegebenen Richtung zwischen die Schenkel gelegten Geraden.

Aufgabe 221. Einen Punkt zu bestimmen, von welchem aus zwei gegebene Strecken unter gegebenen Winkeln erscheinen. (Ptolemäische Aufgabe.)

Lösung mittels D. 15.

Zusatz. Die Aufgabe wird unbestimmt, wenn die gegebenen Winkel sich zu $2R$ ergänzen.

Aufgabe 222. Einen Punkt zu bestimmen, von welchem

aus zwei gegebene Kreise unter gegebenen Winkeln erscheinen.

Lösung durch Reduktion auf die vorhergehende Aufgabe.

Aufgabe 223. Einen Kreis zu konstruieren, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden liegt, und dessen Peripherie gegebene Abstände von zwei gegebenen Geraden hat.

Lösung. Die Differenz der Abstände des Mittelpunktes des gesuchten Kreises von den beiden Geraden ist bekannt, und daraus läßt sich ein Ort für denselben ableiten. Dieser Ort ist nämlich die Halbierungslinie des Winkels, den die entferntere Gerade mit der andern macht, wenn man dieselbe um die gegebene Differenz parallel verschiebt.

Aufgabe 224. Einen Kreis zu beschreiben, der die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks berührt, durch den Scheitel des rechten Winkels geht, und dessen Mittelpunkt auf einer Kathete liegt.

Lösung sehr einfach.

Aufgabe 225. In einem Viereck einen Punkt zu bestimmen, dessen Entfernungen von dem einen Paare Gegenseiten eine gegebene Summe bilden, während die Entfernungen desselben von dem andern Paare ein gegebenes Verhältniß haben.

Lösung leicht mit Hilfe zweier Örter, von denen der eine aus der gegebenen Summe, der andere aus dem gegebenen Verhältniß abgeleitet wird. Der der gegebenen Summe entsprechende Ort ist die Halbierungslinie des Winkels, den die um diese Summe parallel verschobene eine Gerade mit der andern macht. Der andere Ort, welcher dem gegebenen Verhältniß entspricht, ist die Verbindungslinie des Durchschnittes der betreffenden Geraden mit einem beliebigen Punkte, dessen Entfernungen das gegebene Verhältniß haben. Ein solcher Punkt ist aber in einfachster Weise zu bestimmen. (S. Nachtrag 12.)

Zusatz. Die Aufgabe ist in ähnlicher Weise zu lösen, wenn die beiden Paare Entfernungen zwei gegebene Summen, Differenzen oder Verhältniß, oder eine Kombination dieser Größen bilden sollen. Man stelle diese fünf Aufgaben auf und löse dieselben!

Aufgabe 226. Von einem Punkte aus durch zwei Dreiecksseiten eine Gerade zu legen, so daß die Durchschnittpunkte mit den Ecken an der dritten Seite die Ecken eines Sehnenvierecks bilden.

Lösung einfach.

Aufgabe 227. Auf einer Geraden einen Punkt zu bestimmen, der gleiche Entfernung von einem gegebenen Punkte und einer gegebenen Geraden hat.

Lösung durch einen Kreis, welcher durch den gegebenen Punkt und dessen Gegenpunkt in bezug auf die Gerade geht, in welcher der Mittelpunkt liegen soll, und die andere Gerade berührt; also Apollonisches Berührungsproblem.

Aufgabe 228. Durch zwei Kreise eine Gerade zu legen, so daß die entstehenden Sehnen gegebene Größen erhalten.

Lösung mittels einer gemeinschaftlichen Tangente an zwei leicht zu bestimmende, mit den gegebenen konzentrische Kreise.

Aufgabe 229. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu legen, welche durch den Durchschnittspunkt zweier Geraden geht, ohne daß man hierzu diese Geraden bis zu ihrem Durchschnitt verlängert.

Lösung. Zieht man durch die Geraden zwei beliebige Parallelen, die eine durch den gegebenen Punkt, und teilt die andere nach demselben Verhältnis, nach welchem die erstere durch den Punkt geteilt wird, so geht die Verbindungslinie beider Teilpunkte durch den Durchschnittspunkt der Geraden.

Aufgabe 230. In einen Kreis ein Dreieck einzuschreiben, wenn die Mittelpunkte der zu den Seiten gehörigen Bogen gegeben sind.

Lösung. Die Verbindungslinien der gegebenen Mitten mit dem Mittelpunkte des Kreises stehen auf den Seiten des gesuchten Dreiecks senkrecht. Daraus ergibt sich aber, daß die Winkel, welche diese Verbindungslinien machen, die Supplemente der Winkel des gesuchten Dreiecks sind. Man kann also in einfachster Weise einen dieser Winkel und durch ihn die gegenüberliegende Dreiecksseite der Größe nach bestimmen und dieselbe entsprechend einlegen. Die dritte Ecke ist dann leicht zu bestimmen.

Eine elegante Lösung erhält man durch Anwendung der

Drehung. Dreht man nämlich etwa die Ecke A zuerst um γ , so daß der Punkt um ebenso viel jenseits γ liegt, wie jetzt diesseits, dann weiter um α und endlich um β (α , β und γ bezeichnen die Mitten der Bögen BC , CA und AB), so kehrt A in seine anfängliche Lage zurück. Macht man nun dieselbe Operation mit einem Punkte D der Peripherie zwischen A und β , so wird nach Vollendung derselben D in einen Punkt D' fallen, der an der andern Seite von A in gleicher Entfernung liegt, wie D . Man kann nun von einem beliebigen Punkte D ausgehen und die durch die Drehung erzielte Lage D' bestimmen; dann ist die Mitte des Bogens DD' die Ecke A , worauf die beiden andern Ecken B und C leicht zu bestimmen sind.

Aufgabe 231. Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu konstruieren, daß die Ecken auf die Verlängerungen dreier gegebenen Radien fallen.

Lösung. Ist M der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, XYZ das verlangte Dreieck und sind α , β und γ bezüglich die Winkel der gegebenen Radien und der Berührungsradien, so läßt sich die Differenz je zweier dieser Winkel bestimmen, und da ihre Summe bekannt ist, auch jeder Winkel einzeln. Dadurch erhält man aber zunächst einen Berührungspunkt, durch den das gesuchte Dreieck gegeben ist.

Aufgabe 232. Auf der Potenzlinie zweier Kreise einen Punkt zu bestimmen, so daß die zwei aus diesem Punkte durch zwei in den Peripherien gegebene Punkte gezogenen Sekanten die Kreise zum zweiten Male in Punkten schneiden, deren Verbindungslinie senkrecht zur Potenzlinie ist.

Lösung mittels Drehung. Ist nämlich X der gesuchte Punkt und sind XAC und XBD die gesuchten Sekanten, so drehe man den Kreis, auf welchem A liegt, um die Potenzlinie, dann fallen A und C auf bekannte Punkte A' und C' . Nun sind die Vierecke $ABDC$ und $C'A'BD$ Sehnenvierecke; denn auch $XA' \cdot XC' = XB \cdot XD$. Leicht ergibt sich alsdann, daß $\angle XA'A = \angle XBA$ ist, woraus folgt, daß auch $XA'BA$ ein Kreisviereck ist, und also der Kreis durch A , A' und B den Punkt X bestimmt. — Zwei Lösungen!

Aufgabe 233. Auf einer Geraden außerhalb eines Kreises, auf welcher ein Punkt A gegeben ist, einen zweiten Punkt X so zu bestimmen, daß die Entfernungen desselben von der Kreisperipherie und dem gegebenen Punkte ein gegebenes Verhältniß haben.

Lösung. Schneidet die Verbindungslinie des gesuchten Punktes X mit dem Mittelpunkte M des gegebenen Kreises diesen in Y , und ist $XY : XA = m : n$, so ist auch, wenn die Parallele MB zu AY bis in die gegebene Gerade gezogen wird, $MY : AB = r : AB = m : n$. Daraus läßt sich AB und BM bestimmen. Die Parallele durch A zu BM bestimmt dann im allgemeinen zwei Punkte Y , deren jedem ein X auf der Geraden entspricht.

Zusatz. Ist die größte Entfernung des gesuchten Punktes von der Kreisperipherie (statt der oben gewählten kleinsten) gemeint, so ist die Lösung ganz analog. Das zu konstruierende AB fällt in dem Falle nach der andern Seite von A .

Aufgabe 234. Von zwei Punkten außerhalb eines Kreises zwei Sekanten, welche sich auf der Peripherie schneiden, so zu ziehen, daß die Sehne zwischen den beiden andern Durchschnittspunkten von gegebener Größe sei.

Lösung durch Örter. Durch die gegebene Größe der Sehne ist der zugehörige Peripheriewinkel, durch diesen aber ein Kreisbogen über der Verbindungslinie der gegebenen Punkte als Sehne als Ort für den gemeinsamen Durchschnitt beider Sekanten mit der Peripherie gegeben.

Aufgabe 235. Auf einer Sehne eine gegebene Strecke so abzutragen, daß die von den Endpunkten der Strecke aus gezogenen Diameter zwischen ihren Endpunkten eine Sehne enthalten, welche der gegebenen parallel ist.

Lösung. Die Mitte der Strecke ist der Fußpunkt des Lotes vom Mittelpunkte des Kreises auf die gegebene Sehne.

Aufgabe 236. Die entstehende Sehne soll von gegebener Größe sein.

Lösung. Ist M der Mittelpunkt des gegebenen Kreises und XY die auf der Geraden abgetragene Strecke, so kennt man von dem Dreiecke MYX die Grundlinie XY , die Höhe MC und durch

die gegebene Größe der entstehenden Sehne auch den Winkel an der Spitze. Durch die Konstruktion dieses Dreiecks erhält man MX und MY , wodurch die Lage der Punkte X und Y auf der Geraden bestimmt wird. — Zwei verschiedene Lagen!

Aufgabe 237. Die gegebene Strecke auf der Sehne so abzutragen, daß die von den Endpunkten derselben auf einen gegebenen Durchmesser gefälltten Lote gleiche Sehnen in dem Kreise bilden.

Lösung. Die Mitte der Strecke ist der Durchschnitt der gegebenen Geraden mit dem im Kreismittelpunkte zum gegebenen Diameter errichteten Lote.

Aufgabe 238 und 239. Die aus den Endpunkten der abgetragenen Strecke an den Kreis gezogenen Tangenten sollen einander gleich (oder parallel) werden.

Lösung für beide Aufgaben leicht. Dieselbe wird für die letztere vermittelt durch einen zur gegebenen Geraden parallel gezogenen und bis in die Tangenten verlängerten Diameter. — Die gegebene Strecke muß in diesem Falle mindestens gleich dem Diameter sein.

Aufgabe 240. Durch zwei gegebene Punkte auf einer Kreisperipherie zwei einander auf der Peripherie schneidende Sehnen so zu ziehen, daß sie ein gleichschenkliges Dreieck bilden, dessen Grundlinie auf einer gegebenen Geraden liegt.

Lösung. Zieht man durch den einen der gegebenen Punkte, etwa A , eine Parallele zur gegebenen Geraden bis in die andere Sehne, die in Y geschnitten werden möge, so läßt sich die Größe des Winkels AYB aus dem durch die Sehne AB gegebenen Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks ableiten, wodurch man einen zweiten Ort für Y erhält.

Aufgabe 241. Durch die zu ziehenden zwei Sehnen soll auf der gegebenen Geraden eine gegebene Strecke abgeschnitten werden.

Lösung durch Parallelverschiebung und D. 15.

Aufgabe 242. Die zu ziehenden Sehnen sollen auf einem gegebenen Durchmesser vom Mittelpunkte aus gleiche Stücke abschneiden.

Lösung. Schneiden die Sehnen AX und BX auf dem Diameter CD die gleichen Stücke MY und MZ ab, und man zieht den Diameter AE , so ist $\angle EZB$ als Supplement des durch die Punkte A und B gegebenen Peripheriewinkels bekannt, daher ein Ort für Z nach D. 15 gegeben.

Aufgabe 243. Die Sehnen sollen in analoger Weise gleiche Stücke auf einer gegebenen Sehne abschneiden.

Lösung der vorigen ganz entsprechend, wenn man, statt den Diameter von A aus zu ziehen, A mit der Mitte der gegebenen Sehne verbindet und diese Verbindungslinie um sich selbst bis A' verlängert. Es ist dann wiederum $\angle A'ZB$ und durch diesen ein Ort für Z nach D. 15 gegeben.

Aufgabe 244. Zu zwei Sekanten PAB und PCD eine dritte PXY so zu ziehen, daß Bogen $AX = DY$ wird.

Lösung. Man erkennt leicht, daß die Sehne $XY = AD$ sein muß, da die zugehörigen Bogen gleich sind.

Aufgabe 245. In ein gleichschenkliges Dreieck drei Kreise so zu beschreiben, daß jeder zwei Seiten des Dreiecks und die beiden andern Kreise berührt.

Lösung. Die Mittelpunkte der die Grundlinie und je einen Schenkel berührenden Kreise sind die Durchschnitte der Halbierungslinien der Winkel an der Grundlinie einerseits und der Halbierungslinie der von der Höhe an der Grundlinie gebildeten rechten Winkel andererseits. Der dritte Kreis ergibt sich dann leicht.

Zusatz. Für ein gleichseitiges Dreieck erledigt sich hiernach die Lösung in einfachster Weise. Die Kreise werden natürlich gleich, und ihre Mittelpunkte liegen in den drei Höhen so, daß ihr Abstand vom Fußpunkte gleich der halben Seite ist.

Anmerkung. Die entsprechende allgemeine Aufgabe: In ein beliebiges Dreieck drei Kreise zu beschreiben, welche sich gegenseitig und je zwei Seiten des Dreiecks berühren — das sogenannte Malfatti'sche Problem — ist in einfacher Weise nicht gelöst. Denn die von Steiner gegebene Lösung ist trotz ihrer Eleganz doch ziemlich kompliziert, und Malfatti's eigene Lösung ist trigonometrisch und durchaus nicht einfach. Wir dürfen deshalb auf die Lösung dieser allgemeinen Aufgabe hier verzichten.

Aufgabe 246. In einen gegebenen Kreis drei gleiche

Kreise so zu beschreiben, daß jeder die beiden andern und den gegebenen berührt.

Lösung. Die Berührungspunkte in dem gegebenen Kreise sind die Endpunkte dreier Radien, welche miteinander Winkel von 120° machen. Diese sind also zunächst zu bestimmen. Die Berührungspunkte der Kreise unter sich sind aber die Durchschnittspunkte der Halbierungslinien der Winkel, welche die ursprünglich gezogenen Radien mit den Verbindungslinien der Berührungspunkte im gegebenen Kreise bilden. Aus den so bestimmbarren Berührungspunkten ergeben sich die Mittelpunkte der gesuchten Kreise sehr leicht.

Aufgabe 247. In ein Quadrat vier gleiche Kreise so zu beschreiben, daß jeder von ihnen zwei derselben und zwei Seiten des Quadrats berührt.

Lösung leicht. Die Mittelpunkte der gesuchten Kreise sind die Mitten der halben Diagonalen des gegebenen Quadrates.

Aufgabe 248. In ein Quadrat fünf gleiche Kreise so zu beschreiben, daß einer die vier übrigen und jeder dieser vier noch zwei Seiten des Quadrates berührt.

Lösung. Der Durchschnitt O der Diagonalen ist offenbar der Mittelpunkt des einen Kreises, der die vier andern berührt. Die Mittelpunkte der andern vier Kreise liegen auf den Diagonalen. Ist nun X auf OA der Mittelpunkt eines der vier übrigen Kreise und Y dessen Berührungspunkt auf AB , so ist, wenn man OY zieht und bis in die verlängerte DA , bis in Z verlängert, wie sich leicht ergibt, $AZ = \frac{1}{2} AO$. Hiernach sind also die Berührungspunkte in den Seiten, und daraus die Mittelpunkte der gesuchten Kreise leicht zu bestimmen.

Aufgabe 249. In ein reguläres Fünfeck fünf gleiche Kreise zu beschreiben, von denen jeder zwei der übrigen und zwei Seiten des Fünfecks berührt.

Lösung. Die Mittelpunkte der gesuchten Kreise liegen auf den großen Radien des Fünfecks und zugleich auf der Halbierungslinie des rechten Winkels, den das von einer Ecke des Fünfecks auf die Gegenseite gefällte Lot (oder auch der kleine Radius mit dieser Seite) bildet. Der Radius ergibt sich dann leicht.

Aufgabe 250. In ein reguläres Fünfeck sechs gleiche

Kreise zu beschreiben, von denen einer die fünf übrigen und jeder von diesen noch zwei Seiten des Fünfecks berührt.

Lösung ähnlich wie in A. 248 durch Bestimmung der Berührungspunkte in den Seiten.

Aufgabe 251 und 252. In ein reguläres n -eck n gleiche Kreise, wie in A. 249, und $(n + 1)$ Kreise, wie in A. 250 zu beschreiben.

Lösung. Im erstern Falle ergeben sich die Mittelpunkte der gesuchten Kreise, welche sämtlich auf den großen Radien des n -ecks liegen, durch Halbierung des rechten Winkels, den der kleine Radius mit der Seite des Polygons macht; im andern Falle werden die Berührungspunkte auf den Seiten durch ein ähnliches Verfahren bestimmt, wie bei A. 250 geschehen ist.

Aufgabe 253. Von zwei Punkten auf der Peripherie eines Kreises nach einem dritten Punkte zwei Sehnen so zu ziehen, daß zwischen den Durchschnitten ihrer Verlängerungen mit der Peripherie eines zweiten Kreises eine Sehne von gegebener Größe entsteht.

Lösung durch Parallelverschiebung. Schneiden die Sehnen AX und BX des Kreises M verlängert die Peripherie des Kreises O in Y und Z so, daß YZ die gegebene Größe s hat, und man verschiebt YA parallel mit sich bis in die Lage ZA' , so liegt der Durchschnitt zwischen OA' und der Kreisperipherie O um den durch die Sehne s gegebenen Bogen vom Durchschnitte der Centrale OM mit derselben Peripherie entfernt. Es ist also die Lage von OA' gegeben, und da $AA' = s$ ist, auch Punkt A' . Verbindet man nun A' mit B , so ist $BZA' = X$, welcher Winkel durch die Punkte A und B gegeben ist. Der Punkt Z ist also bestimmbar.

Zusatz. Für die Determination ist zu berücksichtigen, daß die Größe der Sehne sich auf die Sehne zwischen den ersten, zweiten Durchschnitten, und je einem ersten und zweiten Durchschnitte beziehen kann.

Aufgabe 254. Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt und eine andere Gerade unter einer gegebenen Sehne schneidet.

Lösung mittels des Tangentensatzes, wenn die gegebenen Geraden konvergent sind; sind dieselben parallel, so sind die Endpunkte der abzuschneidenden Sehne unmittelbar gegeben.

Aufgabe 255. Einen Kreis zu beschreiben, der einen andern Kreis in einem gegebenen Punkte berührt und eine gegebene Gerade unter einer gegebenen Sehne schneidet.

Lösung mit Hilfe der gemeinsamen Tangente im gegebenen Berührungspunkte durch den Tangentensatz.

Aufgabe 256. Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei Punkte geht und eine Gerade unter einer gegebenen Sehne schneidet.

Lösung mit Hilfe des Sekantensatzes, wenn die Verbindungslinie der Punkte der gegebenen Geraden nicht parallel ist; im andern Falle wie in A. 254.

Aufgabe 257. Einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt geht, eine gegebene Gerade unter gegebener Sehne schneidet, und dessen Mittelpunkt auf einer andern gegebenen Geraden liegt.

Lösung durch Reduktion auf A. 255, da sich leicht ein zweiter Punkt der Peripherie des gesuchten Kreises bestimmen läßt.

Aufgabe 258. Um einen Punkt einen Kreis zu beschreiben, so daß die von zwei andern Punkten an denselben gezogenen Tangenten einen gegebenen Winkel bilden.

Lösung mittels D. 15.

Aufgabe 259. Um ein Parallelogramm ein Rechteck so zu beschreiben, daß zwei durch zwei Gegenecken des Parallelogramms gehende Seiten desselben in diesen Punkten halbiert werden.

Lösung leicht.

Aufgabe 260. Von dem Durchschnittspunkte zweier Tangenten aus an den Kreis eine Sekante so zu ziehen, daß die Bogen zwischen den Berührungspunkten und den Durchschnitten der Sekante mit dem Kreise gleich werden.

Lösung. Es ergibt sich leicht, daß das innere Stück der Sekante der Berührungsehne gleich sein muß.

Aufgabe 261. Von dem Durchschnittspunkte zweier

Sekanten aus eine dritte so zu ziehen, daß die Bogen zwischen einem Durchschnitte dieser dritten Sekante mit der Peripherie und einem Durchschnitte der erstern Sekanten einander gleich werden.

Lösung. Es läßt sich das innere Stück der dritten Sekante ähnlich wie bei A. 260 bestimmen.

Aufgabe 262. Zu einer Sekante eine zweite von demselben Punkte aus so zu ziehen, daß die Bogen zwischen den Durchschnitten beider mit dem Kreise eine gegebene Summe bilden.

Lösung durch Reduktion. Ist PAB die gegebene, PXY die gesuchte Sekante, so daß $AX + BY$ eine gegebene Größe ist, so mache man Bogen $YC = AX$, also BC gleich der gegebenen Summe, und löse für die Sekanten PB und PC die A. 261.

Aufgabe 263. In einen Kreisabschnitt ein Viereck zu beschreiben, dessen eine Seite die Sehne des Abschnittes ist, wenn noch in der verlängerten Sehne der Durchschnittpunkt mit der Gegenseite und der Winkel der Diagonalen gegeben ist.

Lösung. Aus dem Winkel der Diagonalen und dem durch die Sehne gegebenen Peripheriewinkel ist der Peripheriewinkel über der Gegenseite, also auch diese selbst bestimmbar.

Aufgabe 264. Die A. 262 mit der Abänderung, daß statt der Summe die Differenz der entstehenden Bogen eine gegebene sein soll.

Lösung durch Parallelverschiebung und Berücksichtigung, daß zwischen zwei parallelen Sehnen gleiche Bogen liegen.

Aufgabe 265. Aus vier gegebenen Strecken als Seiten ein Viereck so zu konstruieren, daß eine Diagonale einen Winkel halbiert.

Lösung leicht durch einfache Umlegung einer der Seiten, welche den halbierten Winkel einschließen, auf die andere.

Aufgabe 266. Zwei Dreiecksseiten so zu durchschneiden, daß ein doppelt zentrisches Viereck (Sehnen- und Tangentenviereck zugleich) abgeschnitten wird.

Lösung. Die Richtung der an den eingeschriebenen Kreis zu ziehenden Tangente ist gegeben.

Anmerkung. Auch die Verlängerungen zweier Dreiecksseiten über die dritte kann man zu gleichem Zwecke durchschneiden.

Aufgabe 267. Zu drei Punkten auf der Peripherie eines Kreises einen vierten so zu bestimmen, daß ein Tangentenviereck entsteht.

Lösung reduziert sich auf die Konstruktion eines Dreiecks aus Grundlinie, Gegenwinkel und Differenz der beiden anderen Seiten.

Aufgabe 268. Zu drei Tangenten an einem Kreise eine vierte so zu konstruieren, daß ein Sehnenviereck entsteht.

Lösung wie zu A. 266.

Aufgabe 269. In einen Kreis ein rechtwinkliges Dreieck so zu beschreiben, daß die Katheten jede durch einen gegebenen Punkt gehen.

Lösung durch D. 6.

Aufgabe 270. Ein Dreieck aus einer Höhe und der zugehörigen Mittellinie so zu konstruieren, daß die zugehörige Seite doppelt so groß wird, wie eine der anderen Seiten. (Aus h_a , m_a und $a = 2b$.)

Lösung einfach.

Aufgabe 271. Um ein Quadrat ein anderes zu beschreiben, dessen Seite gegeben ist.

Lösung durch die Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Hypotenuse und der Summe der Katheten.

Aufgabe 272. Einen Kreis zu konstruieren, so daß zu zwei Sehnen von gegebener Größe Bogen gehören, von denen der eine doppelt so groß ist, als der andere.

Lösung. Wenn man sich die gegebenen Sehnen von einem Punkte aus eingelegt denkt, so lassen sich die Endpunkte derselben bestimmen. Ein Kreis um das so erhaltene Dreieck ist der gesuchte.

Aufgabe 273. Auf einer Geraden zwei Punkte in gleicher Entfernung von einem gegebenen Punkte so zu bestimmen, daß ihre Entfernung in einem andern gegebenen Punkte unter gegebenem Winkel erscheint.

Lösung sehr leicht mittels D. 15.

Aufgabe 274. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem

Winkel, der Differenz der einschließenden Seiten und der Differenz der Abschnitte, in welche die gegenüber liegende Seite durch die betreffende Höhe geteilt wird.

Lösung. Trägt man von A aus auf AB und AC die gegebenen Differenzen als AD und AE ab, so läßt sich aus der Gleichheit von BD , BE und BC die Größe des Winkels AED bestimmen. Derselbe ist gleich $2R - \frac{1}{2}B$, wenn B der gegebene Winkel ist.

Aufgabe 275. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem Gegenwinkel und der Summe aus einer der beiden andern Seiten und einem Vielfachen der dritten Seite. (Aus a , A und $b + n \cdot c$.)

Lösung. Verlängert man Seite b über A hinaus um $n \cdot c$ bis D , so ist Dreieck BAD seiner Form nach gegeben. Dann legt man von C aus die gegebene Seite a mit dem andern Endpunkte auf DB und kann das verlangte Dreieck durch eine Parallele erhalten.

Aufgabe 276. Ein Sehnenviereck zu konstruieren aus zwei gegenüber liegenden Seiten und den beiden Diagonalen.

Lösung. Ist $ABCD$ das verlangte Sehnenviereck, von welchem die Gegenseiten $BC (= b)$ und $DA (= d)$, sowie die Diagonalen $AC = e$ und $BD = f$ gegeben sind, und man zieht $BF \parallel CD$ bis in DA , so läßt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BDF und ABC die Länge DF , sowie das Verhältniß $BA : BF (= e : f)$ bestimmen. Der Punkt B ist dann durch zwei Örter zu konstruieren und auch die vierte Ecke C leicht zu bestimmen.

Aufgabe 277. Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem die Durchschnittspunkte seiner Höhen mit der Peripherie des umgeschriebenen Kreises gegeben sind.

Lösung. Die Lote aus dem Mittelpunkte des Kreises auf die Verbindungslinien der Durchschnittspunkte geben die Ecken des gesuchten Dreiecks.

Aufgabe 278. In einem Kreise einen Diameter so zu ziehen, daß das Lot auf denselben von einem Punkte außerhalb des Kreises die mittlere Proportionale zwischen seinen Abständen werde.

Lösung. Ist M der Kreismittelpunkt, PX das Lot auf dem

Diameter AMB und XY Tangente des Kreises, so ergibt sich $PX^2 = XY^2 = MP^2 - MX^2 = MX^2 - r^2$ und daraus $2MX^2 = MP^2 + r^2$, woraus sich MX der Größe und Lage nach ergibt.

Aufgabe 279. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, einem anliegenden Winkel und der Differenz zwischen der Gegenseite dieses Winkels und der Höhe auf die erste Seite. (Aus a , B und $b - h_a$.)

Lösung. Verlängert man die Höhe h_a über a hinaus, so daß $AE = AC$ wird, so ist die dritte Ecke A des gesuchten Dreiecks der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch C geht und die Parallele, welche durch E zu a gezogen wird, berührt.

Aufgabe 280. In einen Kreis ein Dreieck zu konstruieren, von dem eine Seite der Größe und Richtung nach gegeben ist, wenn die Halbierungslinie des Gegenwinkels durch einen gegebenen Punkt gehen soll.

Lösung ergibt sich leicht, da die Mitte des Bogens BC ein zweiter Punkt des Winkelhalbierers ist.

Aufgabe 281. Zur Konstruktion eines Dreiecks sei die Richtung einer Seite, die Halbierungslinie des gegenüber liegenden Winkels und ein Punkt dieser gegeben.

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode, da eine beliebige Sehne des Kreises von der gegebenen Richtung der Seite a die Mitte des zugehörigen Bogens bestimmt.

Aufgabe 282. Zwischen zwei Dreiecksseiten eine gegebene Strecke so einzulegen, daß die Abschnitte dieser an der dritten Seite ein gegebenes Verhältnis haben.

Lösung. Ist XY diese Strecke zwischen AB und BC und $AX : CY = m : n$, so nehme man CD beliebig und die Parallele DE zu AB so, daß $DE : DC = m : n$ ist, und bestimme in CE den Punkt Y' mittels eines Kreises um A , dessen Radius die gegebene Strecke ist. Dann giebt die Parallele durch Y' zu DE den Punkt Y .

Aufgabe 283. Ein Dreieck zu konstruieren, wovon eine Ecke, der Höhendurchschnitt und der Punkt gegeben ist, in welchem der zu jener Ecke gehörige Radius des umgeschriebenen Kreises die Gegenseite trifft. (Gegeben Ecken A , H und D_a .)

Lösung. Unmittelbar gegeben sind die Dreiecke AHD_a und AH_aD_a (H_a ist der Fußpunkt der Höhe aus A). Da nun der obere Höhenabschnitt doppelt so groß ist, wie die Mittelsenkrechte auf der Gegenseite, so läßt sich der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises, dieser selbst und durch diesen die Eckpunkte B und C leicht bestimmen.

Aufgabe 284. Statt D_a in der vorigen Aufgabe soll D_b gegeben sein. (Dreieck aus A , H und D_b .)

Lösung. Unmittelbar gegeben ist $\triangle AHD_b$. Beschreibt man um ABC den Kreis und verlängert BD_b bis in E in die Peripherie desselben, so ist $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ACE = \sphericalangle HAD_b$. Daraus ergibt sich für B ein Ort, der andere ist das Lot von H auf AD_b .

Aufgabe 285. In ein Dreieck ein einem anderen ähnliches so zu beschreiben, daß eine Ecke desselben in einen gegebenen Punkt einer Seite fällt.

Lösung. Ist DXY das verlangte Dreieck und D die gegebene Ecke in BC , und man beschreibt um dasselbe den Kreis, so entstehen am Durchschnitt E desselben mit der Verbindungslinie DA die Winkel XED und YED , welche bekannten Winkeln gleich sind. Wenn man daher in einem beliebigen Punkte E' jener Verbindungslinie diese Winkel durch $E'X'$ und $E'Y'$ anlegt, so wird $X'Y'$ der gesuchten XY parallel, daher ist die Aufgabe auf A. 125 reduziert, welche man auch so lösen kann: Um das beliebige Dreieck $E'X'Y'$ beschreibe man einen Kreis. Dieser schneide DA in D' , dann sind DX und DY Parallelen zu $D'X'$ und $D'Y'$.

Aufgabe 286. In ein Parallelogramm einen Rhombus zu beschreiben, dessen Diagonalen ein gegebenes Verhältnis haben.

Lösung auf die vorige Aufgabe zurückzuführen, da das Parallelogramm und der einzuschreibende Rhombus denselben Diagonalendurchschnitt haben.

Aufgabe 287. In ein Dreieck ein anderes zu beschreiben, dessen Seiten zu den Seiten des ersten senkrecht stehen.

Lösung wie zu A. 285, wovon diese Aufgabe ein spezieller Fall.

Aufgabe 288. Durch zwei Punkte bis an zwei einander schneidende Gerade zwei Gerade so zu legen, daß die Stücke bis an die Geraden ein gegebenes Verhältniß haben und die Geraden einen gegebenen Winkel miteinander bilden.

Lösung. Sind AX und BY durch A und B bis an die Geraden MC und NC so gelegt, daß $AX:BY = m:n$ ist und daß sie den gegebenen Winkel φ einschließen, so verschiebe man XA und YB parallel mit sich nach CA' und CB' , wodurch die Aufgabe auf A. 275 reduziert wird, da $\angle A'CB' = \varphi$ wird.

Aufgabe 289 und 290. In ein Kreissegment ein gleichschenkliges Dreieck so einzuzichnen, daß die Spitze desselben im Mittelpunkte der zugehörigen Sehne liege und die Grundlinie und Höhe desselben eine gegebene Summe (oder Differenz) bilden.

Lösung. Verlängert man im erstern Falle die Höhe CF des gesuchten Dreiecks um die Grundlinie, so läßt sich der Durchschnitt der Verbindungslinie des Endpunktes der Verlängerung mit einem Endpunkte der Grundlinie und der Sehne einfach bestimmen. — Im andern Falle lege man die Grundlinie auf die Höhe und verfähre ebenso.

Aufgabe 291. Von einem Dreiecke sei die Seite $AB = c$ der Größe und Lage nach gegeben, ferner der Winkel A und der Durchschnitt D der Seite AB mit dem zu C gehörigen Durchmesser des umgeschriebenen Kreises; dasselbe zu konstruieren.

Lösung. Ist M der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises, so erkennt man leicht, daß $\angle BMD$ ein gegebener ist. Der Mittelpunkt ist also durch zwei Örter gegeben.

Aufgabe 292. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite (a) und dem gegenüber liegenden Winkel (A), wenn die Stücke bekannt sind, in welche eine Transversale AD den Winkel A und die Seite a teilt.

Lösung. Durch den bekannten umgeschriebenen Kreis kann man mit Hilfe der gegebenen Winkelstücke in einfachster Weise außer D einen zweiten Punkt der Transversale bestimmen.

§ 28. Schließlich möge noch das renommierte Berührungsproblem des Apollonius hier eine Stelle finden, damit wir dem sonst berechtigten Vorwurfe entgehen, eine fühlbare Lücke gelassen zu haben. Nach dem Berichte des Pappus hatte Apollonius in zwei verloren gegangenen Büchern $\pi\epsilon\rho\iota\ \epsilon\pi\alpha\varphi\omega\nu$ sein Problem behandelt: Wenn von Punkten, Geraden und Kreisen irgend drei der Lage nach gegeben sind, einen Kreis zu beschreiben, welcher durch die gegebenen Punkte geht und die gegebenen Geraden und Kreise berührt.*)

In diesem Berichte vereinfacht Pappus das Problem des Apollonius gleichsam als Vorbereitung auf dasselbe dahin, daß er statt dreier Elemente nur zwei als gegeben annimmt und einen Kreis zu konstruieren verlangt, dessen Radius gegeben ist. Dieses so modifizierte Problem des Pappus umfaßt sechs Aufgaben, nämlich:

Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher

Aufgabe 293. Durch zwei gegebene Punkte geht,

Aufgabe 294. Durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt,

Aufgabe 295. Durch einen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt,

Aufgabe 296. Zwei Gerade berührt,

Aufgabe 297. Eine Gerade und einen Kreis berührt,

Aufgabe 298. Zwei gegebene Kreise berührt.

Die Lösung dieser sechs Aufgaben läßt sich durch alleinige Anwendung einfach zu bestimmender Örter bewirken.

Zum Übergang zum eigentlichen Berührungsproblem des Apollonius ist indes noch eine andere Modifikation desselben sehr zweckmäßig, nämlich die Lösung der Aufgabe:

Gegeben sind drei obiger Elemente, und zwar stets darunter ein Punkt auf einer Geraden oder auf der Peripherie eines Kreises; einen Kreis zu konstruieren, welcher die gegebene Gerade oder den

*) Eine Wiederherstellung der verlorenen Schrift des Apollonius hat bekanntlich Franciscus Vieta durch die im Jahre 1600 herausgegebene Schrift versucht: Apollonius Gallus, seu exsuscitati Apollonii Pergaei $\pi\epsilon\rho\iota\ \epsilon\pi\alpha\varphi\omega\nu$ geometria.

gegebenen Kreis in dem auf diesem Elemente gegebenen Punkte berührt.

Wiederum ergeben sich sechs Aufgaben, nämlich:

Einen Kreis zu beschreiben, dessen Berührung mit der Geraden oder dem Kreise in dem gegebenen Punkte stattfindet, wenn gegeben sind

Aufgabe 299. Ein Punkt und eine Gerade mit einem Punkte auf ihr,

Aufgabe 300. Ein Punkt und ein Kreis mit einem Punkte in seiner Peripherie,

Aufgabe 301. Zwei Gerade und ein Punkt auf einer derselben,

Aufgabe 302. Eine Gerade und ein Kreis mit einem Punkte auf der Geraden,

Aufgabe 303. Ein Kreis und eine Gerade mit einem Punkte auf der Peripherie des Kreises,

Aufgabe 304. Zwei Kreise und ein Punkt auf dem Umfange des einen Kreises.

Die Lösung auch dieser sechs Aufgaben ist einfach. A. 299 wird nämlich gelöst durch D. 3 und 8; A. 300 durch D. 3 und 10; A. 301 durch D. 5 und 8; A. 302 und 303 finden ihre Erledigung durch einfache Bestimmung des jedesmaligen anderen Berührungspunktes; denn wenn ein Kreis eine Gerade und einen anderen Kreis berührt, so liegen die Berührungspunkte in einer Geraden mit dem einen Endpunkte des auf der Geraden senkrechten Diameters des berührten Kreises. Auch bei A. 304 läßt sich der Berührungspunkt auf dem andern Kreise bestimmen, da beide mit einem Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreise in einer Geraden liegen. Einen anderen Weg der Lösung erhält man, wenn man diese Aufgaben als spezielle Fälle des eigentlichen Berührungsproblems ansieht, das nun folgen soll.

Da drei Elemente sich mit Wiederholung zu drei auf $\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ Arten kombinieren lassen, so enthält die Apollonische Berührungsaufgabe zehn Aufgaben, nämlich

Einen Kreis zu beschreiben, welcher

Aufgabe 305. Durch drei gegebene Punkte geht,

Aufgabe 306. Durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt,

Aufgabe 307. Durch zwei Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt,

Aufgabe 308. Durch einen Punkt geht und zwei Gerade berührt,

Aufgabe 309. Durch einen Punkt geht und eine Gerade und einen Kreis berührt,

Aufgabe 310. Durch einen Punkt geht und zwei Kreise berührt,

Aufgabe 311. Drei Gerade berührt,

Aufgabe 312. Zwei Gerade und einen Kreis berührt,

Aufgabe 313. Eine Gerade und zwei Kreise berührt,

Aufgabe 314. Drei Kreise berührt.

Die Aufgaben 305 und 311 dürfen wir, da sie als im planimetrischen Systeme unerläßliche Elementaraufgaben vorausgesetzt werden, hier übergehen. Die Lösungen der übrigen wollen wir kurz andeuten.

Zu Aufgabe 306.

Schneidet die Verbindungslinie der gegebenen Punkte B und A die gegebene Gerade in C , so kann man in der Geraden den Berührungspunkt auf Grund des Tangentenatzes bestimmen. Zwei Lösungen!

Ist die Verbindungslinie der Punkte parallel zur gegebenen Geraden, so läßt sich der Berührungspunkt leichter bestimmen. Eine Lösung!

Zu Aufgabe 307.

Die gemeinschaftliche Tangente und die Verbindungslinie der gegebenen Punkte schneiden einander im Potenzzentrum, welches man durch einen beliebigen Kreis durch die gegebenen Punkte einfach bestimmen kann. Die Tangenten aus denselben an den gegebenen Kreis bestimmen die Berührungspunkte. Zwei Lösungen!

Zu Aufgabe 308.

Lösung auf A. 307 zu reduzieren, da der gesuchte Kreis auch durch den Gegenpunkt des gegebenen Punktes in Bezug auf die den Winkel der beiden Geraden halbierenden Gerade gehen muß. Sind die gegebenen Geraden parallel, so ist die Lösung einfacher.

Zu Aufgabe 309.

Lösung ähnlich wie zu A. 302 oder 303.

Zu Aufgabe 310.

Lösung mittels eines konzentrischen Kreises auf A. 307 zu reduzieren.

Zu Aufgabe 312.

Lösung mittels eines konzentrischen Kreises auf A. 308 zu reduzieren.

Zu Aufgabe 313.

Lösung durch einen konzentrischen Kreis auf A. 309 zu reduzieren.

Zu Aufgabe 314.

Lösung durch einen konzentrischen Kreis auf A. 310 zu reduzieren.

V. Nachtrag.

§ 29. Damit der strengen Wissenschaftlichkeit genügt werde, mögen hier noch einige Aufgaben Behandlung finden, auf welche wir im Vorhergehenden wiederholt Lösungen reduziert haben, die man aber trotz der Einfachheit ihrer Lösung nicht zu den Elementaraufgaben des Systems zu rechnen pflegt. Wegen ihrer Bedeutung für die Reduktion infolge ihrer häufigen Anwendbarkeit werden wir dieselben ausführlich behandeln, zumal dieselben als frühestes Übungsmaterial bestens empfohlen werden können.

1. Durch einen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels eine Gerade so zwischen die Schenkel zu legen, daß sie in jenem Punkte halbiert wird.

Lösung. Ist die Gerade XY zwischen den Schenkeln AB und AC des Winkels BAC in P halbiert, und man legt etwa durch X eine Parallele zu AC , dann wird jede durch P zwischen den Schenkel AC und die Parallele gelegte Gerade EPD in P halbiert. Es läßt sich also mittels einer beliebigen PD , die man über P bis E um sich selbst verlängert, und durch die Parallele durch E zu AC der Punkt X bestimmen. (Meist findet man bei der Lösungsangabe dieser Aufgabe als die willkürliche Gerade die Verbindung des Punktes P mit dem Scheitel des Winkels. Der Vorteil dieser Geraden besteht dann darin, daß die Parallele durch

den Endpunkt ihrer Verlängerung zu jedem der beiden Schenkel gezogen werden kann.)

Zieht man durch P eine Parallele zu AC bis in AB , so wird AX halbiert, woraus sich eine andere Art ergibt, den Punkt X zu bestimmen.

Zusatz. Sollen die Stücke XP und PY das Verhältniß $m : n$ haben, so ergibt die Betrachtung der entsprechenden Dreiecke, welche in diesem Falle ähnlich sind, ebenso einfache Lösungen. — Für die Determination ist zu beachten, daß die Lösung der Aufgaben für zwei parallele Gerade im allgemeinen unmöglich ist; denn das Verhältniß der Stücke einer jeden zwischengelegten Geraden ist konstant. — Die Lösung bleibt für beide Fälle analog und einfach, wenn der gegebene Punkt außerhalb des Winkels liegt, und die zu ziehende Gerade durch den einen Schenkel halbiert oder nach einem gegebenen Verhältniß geteilt werden soll.

2. Zwischen zwei Kreisperipherien eine Gerade zu legen, welche in einem gegebenen Punkte halbiert (oder nach einem gegebenen Verhältnisse geteilt) wird.

Lösung. Ist XY die gesuchte Gerade, welche so zwischen den Peripherien der Kreise M und M_1 liegt, daß $XP = PY$ ist, so verlängere man MP über P bis N um sich selbst. Die Betrachtung des Parallelogramms $XMYN$ giebt leicht die Analysis für den erstern Fall. Im zweiten Falle erhält man leicht zwei ähnliche Dreiecke MXP und NYP , welche ebenfalls eine einfache Analysis ergeben.

Zusatz. Statt des einen der beiden Kreise kann auch eine Gerade gegeben sein, was die Lösung nur unwesentlich modifiziert. — Behufs der Determination beachte man den doppelten Durchschnitt einer Geraden mit einer Kreisperipherie!

3. Durch einen Punkt innerhalb eines Kreises eine Sehne zu legen, welche in diesem Punkte halbiert wird.

Lösung leicht, wenn man berücksichtigt, daß die Verbindungslinie des Mittelpunktes einer Sehne mit dem Kreismittelpunkte auf der Sehne senkrecht steht.

4. Auf einer Geraden (oder einer Kreisperipherie) einen Punkt zu bestimmen, von welchem aus die Tangente an einen gegebenen Kreis von gegebener Länge sei.

Lösung. Die Entfernung des gesuchten Punktes vom Mittelpunkte des berührten Kreises läßt sich als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks bestimmen, dessen Katheten gegeben sind. — Ist im erstern Falle die Entfernung des Mittelpunktes M von der gegebenen Geraden $= a$, so muß die gegebene Länge der Tangente mindestens $\sqrt{a^2 - r^2}$ sein; eine obere Grenze giebt es nicht. Wird aber der Punkt auf der Peripherie eines Kreises mit dem Radius r' gesucht, und ist die Centrale beider Kreise $c = r + r' + d$, so muß t mindestens $= \sqrt{(r + d)^2 - r'^2} = \sqrt{(c - r')^2 - r'^2}$ sein und darf die Größe $\sqrt{(c + r')^2 - r'^2}$ nicht überschreiten.

5. In einen gegebenen Kreis eine Sehne von gegebener Größe so zu legen, daß sie zu einer gegebenen Geraden parallel ist (oder auf ihr senkrecht steht).

Lösung einfach, da sich in beiden Fällen ein konzentrischer Kreis bestimmen läßt, an welchem die gesuchte Sehne Tangente sein muß, und sich in jedem Falle leicht der Berührungspunkt angeben läßt.

6. Von einer Geraden aus an einen Kreis eine Sekante zu ziehen, welche in der Peripherie halbiert wird.

Lösung. Eine solche Sekante ist von jedem Punkte der Sekante zwischen den Punkten A und B , deren Entfernung vom Mittelpunkte des Kreises dessen dreifachem Radius gleich ist, möglich und in einfachster Weise zu konstruiren; auch von jenen Punkten selbst aus.

Zusatz. Soll die Kreisperipherie die Sekante nach dem Verhältnisse $m : n$ teilen, so ist die Lösung analog. Wenn das Stück zwischen der Geraden und dem Kreise kleiner werden soll, als die entstehende Sehne, so liegen die Punkte der Geraden, von denen aus die geforderte Sekante möglich ist, innerhalb der oben angegebenen Grenzen, im umgekehrten Falle rücken diese Grenzen weiter hinaus.

7. Die Sekante soll von der Peripherie eines zweiten Kreises aus gezogen werden.

Lösung. Die Grenzen, innerhalb welcher die Punkte auf der Peripherie des zweiten Kreises liegen müssen, daß die verlangte Sekante möglich sei, kann man, wie vorhin, in einfacher Weise

festsetzen. — Für den Fall eines gegebenen Verhältnisses ist ein ähnlicher Zusatz zu machen, wie vorhin.

8. Zwischen zwei Kreisperipherien eine Gerade von gegebener Länge parallel der Centrale einzulegen.

Lösung mittels eines konstruierbaren Parallelogramms, wenn man die gegebene Länge von einem Mittelpunkte aus auf der Centrale abträgt. — Man berücksichtige die vier verschiedenen Lagen der Geraden, welche diese infolge des doppelten Durchschnittes mit jedem Kreise haben kann; für jede Lage ist die gegebene Länge in der angegebenen Weise abzutragen.

Zur Determination sei bemerkt, daß das absolute Minimum der gegebenen Länge d , das absolute Maximum $c + r + r'$ beträgt, wenn wir, wie in 4, bezeichnen.

9. Die gegebene Länge soll parallel einer andern gegebenen Geraden eingelegt werden.

Lösung wird in ähnlicher Weise wie bei 8 erhalten, wenn man die gegebene Gerade parallel mit sich in den einen Mittelpunkt verschiebt. Auch hier sind die vier verschiedenen Lagen zu berücksichtigen.

Die Determination hängt von dem Winkel ab, den die gegebene Gerade mit der Centrale der beiden Kreise macht. Derselbe darf überhaupt nicht größer sein, als der Winkel zwischen der Centrale und der gemeinschaftlichen innern Tangente. (Vergl. Determination zu N. 81.)

10. Eine gegebene Strecke so zu teilen, daß die Teile sich wie zwei Quadrate ($m^2 : n^2$) verhalten.

Lösung. Macht man aus m und n als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck ABC , so wird die Hypotenuse desselben BC durch das Lot AD so geteilt, daß $BD : CD = m^2 : n^2$ ist. Das Weitere ist nach der Ähnlichkeitsmethode leicht auszuführen, indem man die gegebene Strecke parallel zu BC als Hypotenuse einlegt und AD bis in diese verlängert.

11. Eine gegebene Strecke so zu teilen, daß die Quadrate der Stücke sich wie zwei Gerade ($m : n$) verhalten.

Lösung. Ist a die zu teilende Strecke und x der eine Teil, so daß $x^2 \cdot (a - x)^2 = m : n$, so setze man $x^2 : (a - x)^2 = m^2 : mn$,

oder wenn $mn = p^2$ ist, $x : a - x = m : p$, woraus man erhält $x : a = m : m + p$, was leicht zu konstruieren ist.

Oder man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Kathetenprojektionen sich wie $m : n$ verhalten, und teile alsdann die gegebene Strecke nach dem Verhältniß der Katheten dieses Dreiecks. — Der Anschaulichkeit wegen dürfte diese zweite Lösung vorzuziehen sein.

12. Den geometrischen Ort für die Punkte zu bestimmen, deren Entfernungen von zwei gegebenen Geraden ein gegebenes Verhältniß haben.

Lösung. Mittels zwei Parallelen zu den gegebenen Geraden in Abständen von denselben, die das gegebene Verhältniß haben, bestimme man einen Punkt dieser Art, dann ist die Verbindungslinie desselben mit dem Durchschnitt der Geraden der gesuchte Ort. — Für zwei parallele Gerade ist eine dritte Parallele, welche ein gemeinschaftliches Lot zu den gegebenen Parallelen nach dem gegebenen Verhältniß teilt, der gesuchte Ort.

13. Von einem Punkte zu einer Kreisperipherie eine Gerade zu ziehen, welche von einer gegebenen Geraden halbiert (oder nach einem gegebenen Verhältniß geteilt) wird.

Lösung wird leicht gefunden, wenn man den gegebenen Punkt mit dem Kreismittelpunkte, diesen mit dem Durchschnitte (man beachte beide möglichen Durchschnitte) der gesuchten Geraden verbindet, und durch den Durchschnitt mit der gegebenen Geraden eine Parallele zu jenem Radius zieht. In beiden Fällen läßt sich der Durchschnitt dieser Parallele mit der ersten Verbindungslinie und ihre Größe bestimmen.

14. Von einem Punkte in dem Umfange des äußeren zweier konzentrischen Kreise nach der Peripherie des innern eine Gerade zu ziehen, welche durch die Peripherie des letztern halbiert (oder nach gegebenem Verhältniß geteilt) wird. (Vergl. A. 209.)

Lösung. Verbindet man den gegebenen Punkt A mit dem gemeinsamen Mittelpunkte M , diesen mit den beiden Durchschnittspunkten X und Y auf der Peripherie des inneren Kreises und zieht $XB \parallel MY$ bis in AM , so läßt sich in beiden Fällen sowohl der Punkt B als auch die Länge BX bestimmen.

15. Durch einen Durchschnittspunkt zweier Kreise in diese eine Gerade zu legen, daß die entstehenden Sehnen eine gegebene Summe bilden und beide zu gleichen Peripheriewinkeln gehören. (S. A. 156.)

Lösung. Ist durch den Durchschnitt D der beiden Kreise um M und M' die Gerade BDC so in die Kreise gelegt, daß $BD + DC = a$ ist, und nachdem $ME \perp BD$, $M'F \perp DC$ gezogen, $\angle DME = \angle DM'F$, so ist $\frac{ED}{r} = \frac{DF}{r'}$, d. h. die Sehnen müssen sich wie die entsprechenden Radien verhalten; es muß also sein: $DB : DC = r : r'$. Da nun $DE + DC = a$ gegeben ist, so lassen sich mit Hilfe des bekannten Verhältnisses die Sehnen einzeln bestimmen. Man erhält nämlich $BD : a = r : r + r'$, und $DC : a = r' : r + r'$.

Zusatz. Die Lösung bleibt ebenso einfach, wenn statt der Summe der Sehnen ihre Differenz, ihr Rechteck, Quadratsumme, Quadratdifferenz oder eine andere Kombination ähnlicher Art gegeben ist. (Vergl. § 14.)

