

Über additive Massfunktionen in abstrakten Mengen.

Von

Stefan Banach (Lwów).

In einer vor kurzem gemeinsam mit Herrn Kuratowski veröffentlichten Note ¹⁾ haben wir, unter Voraussetzung der Richtigkeit der Kontinuumhypothese $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, die folgende Verallgemeinerung eines bekannten Resultats von Herrn Vitali bewiesen:

Es gibt keine total additive nicht identisch verschwindende Mengenfunktion $m(X)$, welche jeder Teilmenge X der Strecke $(0, 1)$ eine reelle Zahl zuordnet und für alle aus nur einem Punkte bestehenden Mengen den Wert Null annimmt.

In diesem Satze kann die Strecke $(0, 1)$ durch eine beliebige Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums ersetzt werden. Die Funktion $m(X)$, welche wir wegen ihrer geometrischen Bedeutung eine Massfunktion, oder auch ein Mass von X nennen, darf auch negative Werte annehmen.

In der vorliegenden Note beweisen wir einen allgemeineren, für Mengen von beliebiger Mächtigkeit gültigen Satz, wobei wir die Richtigkeit der sog. Hypothese der Alephs, d. h. das Bestehen der Gleichung

$$2^{\aleph_\xi} = \aleph_{\xi+1}$$

für beliebige Ordnungszahlen ξ voraussetzen. Um diesen Satz aussprechen zu können, müssen wir zunächst den Begriff der Massfunktion allgemein definieren.

Wir sagen, dass in einer Menge E eine additive Massfunktion

¹⁾ S. Banach et C. Kuratowski *Sur une généralisation du problème de la mesure* Fund. Math. XIV (1929), pp. 127—131.

definiert ist, falls jeder Teilmenge G von E eine Zahl $|G|$ zugeordnet ist, welche folgende Bedingungen erfüllt:

1. $|G|$ ist nicht identisch null für alle G .
2. Es ist $|G_1 + G_2| = |G_1| + |G_2|$, falls $G_1 \cdot G_2 = 0$.
3. Besteht G aus einem einzigen Element von E , so ist $|G| = 0$.

Eine Massfunktion ist „additiv mit der Mächtigkeit $\aleph_\xi$ “, wenn für disjunkte Mengen G_η stets

$$\left| \sum G_\eta \right| = \sum |G_\eta|. \quad (0 < \eta < \omega_\xi)$$

Eine Massfunktion ist vom Typus $\aleph_\xi$, falls sie mit jeder Mächtigkeit kleiner als $\aleph_\xi$, nicht aber mit der Mächtigkeit $\aleph_\xi$ additiv ist.

Bemerkung 1. Wenn eine Massfunktion mit einer Mächtigkeit $\aleph_\xi \geq \aleph_0$ additiv ist, so ist jede Klasse disjunkter Teilmengen von E , deren jede eine Teilmenge mit von Null verschiedenem Masse enthält, höchstens abzählbar.

Bemerkung 2. Wenn die Menge E von der Mächtigkeit $\aleph_\xi$ ist, so ist jede in E erklärte Massfunktion höchstens vom Typus $\aleph_\xi$. Anderenfalls wäre nämlich das Mass einer beliebigen Teilmenge von E gleich der Summe der Masse ihrer Elemente, d. h. gleich Null.

Wir formulieren nunmehr unseren Satz:

Wenn in einer Menge E eine Massfunktion vom Typus $\aleph_\xi$ sich definieren lässt, so ist $\aleph_\xi$ eine unerreichbare Kardinalzahl¹⁾.

Zum Beweise setzen wir zunächst voraus, dass die Menge E die Mächtigkeit $\aleph_\xi$ besitzt.

Nach der Bemerkung 2. kommt jeder Teilmenge von E deren Mächtigkeit kleiner als $\aleph_\xi$ ist, das Mass Null zu. Daher enthält E eine Teilmenge von der Mächtigkeit $\aleph_\xi$ deren Mass von Null verschieden ist. Da es hier nur auf die Mächtigkeit ankommt, dürfen wir annehmen, dass die Menge E selbst ein von Null verschiedenes Mass besitzt. Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also an, dass $\aleph_\xi$ erreichbar ist. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $\aleph_\xi$ eine Grenzzahl ist oder nicht.

¹⁾ Eine Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ nennen wir unerreichbar, falls sie eine Grenzzahl ist und sich nicht, als Summe von Mengen, welche von Mächtigkeit $< \aleph_\alpha$ sind und deren Anzahl $< \aleph_\alpha$ ist, darstellen lässt; d. h. die Anfangszahl ω_α ist regulär und α ist eine Limeszahl.

Die kleinste unerreichbare Kardinalzahl ist $\aleph_0$. Es ist nicht bekannt, ob es noch andere gibt.

Es sei $\aleph_\xi$ eine (erreichbare) Grenzzahl. Die Menge E lässt sich als Summe disjunkter Mengen $\{G_\eta\}$ in der Anzahl $< \aleph_\xi$, welche alle von kleinerer Mächtigkeit als $\aleph_\xi$ sind, darstellen. Da jede dieser Mengen als Summe ihrer Elemente betrachtet werden kann und unsere Massfunktion dem Typus $\aleph_\xi$ angehört, haben alle diese Mengen das Mass Null, also auch die Menge E , gegen die Voraussetzung.

Es sei jetzt $\aleph_\xi$ ($\xi > 1$) ¹⁾ keine Grenzzahl. Wir bezeichnen mit A die Klasse aller Folgen

$$\{\alpha_\eta\} \quad (0 < \eta < \omega_{\xi-1})$$

wo die α_η Ordinalzahlen kleiner als ω_1 sind. Sind $\{\alpha_\eta\}$ und $\{\beta_\eta\}$ zwei Folgen aus A , so schreiben wir

$$\{\alpha_\eta\} < \{\beta_\eta\}$$

wenn für alle η , $\alpha_\eta < \beta_\eta$ ist. Die Mächtigkeit von A ist offenbar

$$\aleph_1^{\aleph_{\xi-1}} = \aleph_\xi.$$

Wir nehmen an, dass die Menge A nach dem Typus ω_ξ wohlgeordnet ist. Wir entfernen nun jedes Element $\{\alpha_\eta\}$, für welches ein in A früher vorkommendes Element $\{\beta_\eta\}$ existiert, derart, dass $\{\alpha_\eta\} < \{\beta_\eta\}$ und bezeichnen mit $\bar{E}$ die Menge der übrigen Elemente von A . Diese Menge $\bar{E}$ besitzt folgende zwei Eigenschaften:

1. Sie ist von der Mächtigkeit $\aleph_\xi$.
2. Ist $\{\alpha_\eta\}$ ein Element aus A , so ist die Menge derjenigen Elemente von $\bar{E}$, welche kleiner als $\{\alpha_\eta\}$ sind, von einer kleineren Mächtigkeit als $\aleph_\xi$.

Unter der Annahme, dass die Mächtigkeit von $\bar{E}$ kleiner als $\aleph_\xi$ ist, kann $\bar{E}$ als eine wohlgeordnete Menge von Folgen $\{\beta_\eta^{\vartheta}\}$, $0 < \vartheta < \omega_{\xi-1}$ dargestellt werden. Sei $\alpha_\eta = \beta_\eta^\eta + 1$; alsdann existiert keine Folge $\{\beta_\eta\}$ aus $\bar{E}$ für welche $\{\alpha_\eta\} \leq \{\beta_\eta\}$ ist, — im Widerspruch mit der Definition der Menge $\bar{E}$.

Ist ferner $\{\beta_\eta\} < \{\alpha_\eta\}$ und $\{\beta_\eta\} \in \bar{E}$, so kommt $\{\beta_\eta\}$ früher in A vor als $\{\alpha_\eta\}$. Die Menge derjenigen Elemente, welche in A früher als $\{\alpha_\eta\}$ vorkommen, ist aber von einer kleineren Mächtigkeit als $\aleph_\xi$.

¹⁾ Für den Beweis im Falle $\xi = 1$ verweisen wir auf die zitierte Note.

Es sei $\alpha < \omega_1$. Wir bezeichnen mit $\bar{E}_\alpha^\eta$ die Menge derjenigen Folgen $\{\beta_\eta\}$ von $\bar{E}$, für welche $\beta_\eta = \alpha$.

Es ist klar, dass

$$\bar{E} = \sum_{0 < \alpha < \omega_1} \bar{E}_\alpha^\eta.$$

Da nach 1. die Mengen E und $\bar{E}$ von gleicher Mächtigkeit sind, so lässt sich in $\bar{E}$ eine Massfunktion vom Typus $\aleph_\xi$ erklären derart, dass $|\bar{E}| \neq 0$ ist. Die Menge aller α besitzt die Mächtigkeit $\aleph_1$. Daher gibt es nach der Bemerkung 1. eine Ordnungszahl $\alpha_\eta < \omega_1$ derart, dass für jedes η

1. $|\bar{E}_\alpha^\eta| = 0$ für $\alpha \geq \alpha_\eta$,
2. $|G| = 0$ für jede Teilmenge G eines $\bar{E}_\alpha^\eta$ ($\alpha \geq \alpha_\eta$).

Wir setzen

$$\bar{E}' = \sum_{0 < \eta < \omega_{\xi-1}} \sum_{\alpha \geq \alpha_\eta} \bar{E}_\alpha^\eta.$$

Da die Teilmengen von $\bar{E}_\alpha^\eta$ vom Mass Null sind und die obige Summe aus Mengen von der Mächtigkeit $\aleph_{\xi-1}$ besteht, so ist $|\bar{E}'| = 0$.

Die Menge $\bar{E} - \bar{E}'$ enthält nur diejenigen Folgen von $\bar{E}$, welche kleiner als $\{\alpha_\eta\}$ sind. Die Anzahl dieser Folgen ist, nach der zweiten Eigenschaft der Menge $\bar{E}$, höchstens $\aleph_{\xi-1}$. Daher ist $|\bar{E} - \bar{E}'| = 0$, also

$$|\bar{E}| = |\bar{E}'| + |\bar{E} - \bar{E}'| = 0$$

— gegen die Voraussetzung.

Damit ist der Beweis unseres Satzes für den Fall, dass die Menge E die Mächtigkeit $\aleph_\xi$ besitzt, erledigt. Um daraus den Beweis für den allgemeinen Fall abzuleiten, bemerken wir, dass aus der Voraussetzung unseres Satzes leicht die Existenz einer Klasse disjunkter Teilmengen E_η ($0 < \eta < \omega_\xi$) von E folgt, für welche:

$$\left| \sum_{0 < \eta < \omega_\xi} E_\eta \right| \neq \sum_{0 < \eta < \omega_\xi} |E_\eta|.$$

Nach der Bemerkung 1. haben nur abzählbar viele Mengen E_η ein von Null verschiedenes Mass. Wir bezeichnen die übrigen mit G_η .

Es ist klar, dass

$$|G_\eta| = 0$$

und

$$\left| \sum G_\eta \right| \neq \sum |G_\eta| = 0$$

ist.

Wir bezeichnen mit W die Menge aller Ordnungszahlen, welche kleiner als ω_ξ sind. In dieser Menge, deren Mächtigkeit $\aleph_\xi$ beträgt, definieren wir eine Massfunktion vom Typus $\aleph_\xi$ folgendermassen:

Ist M eine Teilmenge von W , so setzen wir

$$|M| = \left| \sum G_\eta \right|$$

wobei die Summe über alle Ordnungszahlen von M erstreckt ist. Da nach der vorletzten Relation $|W| \neq 0$ ist, so folgt aus unserem früheren Ergebnis, dass $\aleph_\xi$ eine unerreichbare Kardinalzahl ist, w. z. b. w.

Auf Grund dieses Satzes beweist man leicht mit Hilfe der Bemerkung 2. folgendes Korollar:

Es sei $\bar{\aleph}$ die kleinste unerreichbare Kardinalzahl, welche grösser als $\aleph_0$ ist. Wenn E eine Menge von einer kleineren Mächtigkeit als $\bar{\aleph}$ ist und wenn in E eine Massfunktion erklärt ist, so ist diese Massfunktion vom Typus $\aleph_0$, d. h. es ist nicht immer

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} E_n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|$$

für disjunkte Mengen E_n .