

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

JAN AWREJCIEWICZ

TAJEMNICE NIELINIOWEJ DYNAMIKI

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
POLITECHNIKA ŁÓDZKA

78057/S



000-078057-00-0

MONOGRAFIE

ŁÓDŹ 1997



**Recenzenci: prof. dr hab. Włodzimierz Kurnik
prof. dr hab. Kazimierz Szabelski**

**KOMITET REDAKCYJNY
WYDAWNICTW POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ**

**Przewodniczący: prof. dr hab. Michał Tadeusiewicz
Redaktor Naukowy Wydziału: prof. dr hab. Tomasz Kapitaniak
Redaktor Serii: prof. dr hab. Michał Tadeusiewicz**



78057/s

**WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
93-005 Łódź, ul. Wólczańska 223**

ISBN 83-87198-07-2

Nakład 140 egz. Ark. wyd. 6,0. Ark. druk. 7,0.
Druk ukończono w maju 1997 r. Zamówienie 40/97.
Wykonano w A.C.G.M. SA. LODART 93-005 Łódź, ul. Wólczańska 223
Nr 908



D-215/97

Spis Treści

WSTĘP	5
1. CHAOS	12
1.1 . Odwzorowania iterowane i metody identyfikacji chaosu	12
1.1.1 . Odwzorowania punktowe - wprowadzenie	12
1.1.2 . Podstawowe pojęcia i definicje	16
1.1.3 . Przesłanki dla pojawienia się chaosu w układach deterministycznych	18
1.1.4 . Wykładniki Lapunowa	22
1.1.5 . Analogie fizyczne	24
1.1.6 . Chaotyczność a stochastyczność	25
1.1.7 . Funkcja autokorelacji	27
1.1.8 . Widmo częstości	28
1.1.9 . Odwzorowanie Bernoulliego - najprostszy prekursor chaosu	28
1.1.10 . Odwzorowania logistyczne	31
1.1.11 . Odwzorowanie okręgu w okrag	37
1.1.12 . Diabelskie schody, drzewo Fareya i liczby Fibonacciego	42
1.1.13 . Znaczenie odwzorowań jednowymiarowych	46
1.1.14 . Odwzorowania dwuwymiarowe	51
1.1.15 . Odwzorowanie Ikedy	59
1.2 . Układy dynamiczne opisane równaniami	
różniczkowymi zwyczajnymi	61
1.2.1 . Wprowadzenie	61
1.2.2 . Oscylator autonomiczny	62
1.2.3 . Oscylator nieautonomiczny liniowy	65

1.2.4 . Oscylator nieautonomiczny o różnych potencjałach $V(y)$	67
1.2.5 . Funkcja Mielnikowa i chaos.....	71
1.2.6 . Dynamika wahadła wymuszanego zewnętrznym momentem.....	75
1.2.7 . Oscylator van der Pola z okresowym wymuszeniem zewnętrznym.....	76
1.2.8 . Atraktor Lorenza	79
2. FRAKTALE.....	84
2.1 . Wprowadzenie	84
2.2 . Odwzorowania afiniczne.	86
2.3 . Szeregi liczbowe a fraktale	88
2.4 . Ciąg Fibonacciego i dynamika niektórych procesów w przyrodzie.....	94
2.5 . Definicja, wymiar i przykłady fraktali.....	96
3. ZAKOŃCZENIE.....	105
3.1 . Chaos, fraktale a nasza rzeczywistość.....	105
LITERATURA	108

*Wszystkie rzeczy są liczbami.**Pitagoras*

Wstęp

Nowe odkrycia w dziedzinie nieliniowej dynamiki rzucają zupełnie nowe światło na tradycyjnie już ugruntowane pojęcia w naukach matematycznych i empirycznych. W zasadzie umożliwiają one nową interpretację jednego z wielu nurtów filozoficznych opartych na determinizmie i indeterminizmie. Jak dotąd pojęcia te były traktowane jako wykluczające się, ale przykłady pojawiania się ruchów chaotycznych w prostych układach deterministycznych fizycznych, chemicznych lub biologicznych wskazują na możliwość związku między nimi. Wprawdzie (teoretycznie) zadanie nadzwyczaj wysokiej dokładności warunków początkowych pozwala na zdeterminowane określone zachowanie się trajektorii ruchu, to jednak (zostanie to zilustrowane później) uzyskanie w praktyce tak wysokiej dokładności okazuje się niemożliwe. Problematyka ta posiada wymiar większy i sięga zasady Maxa Bohra. Każdy stan realny układu określony jest zawsze z pewną niedokładnością i dlatego powinien być opisywany nie za pomocą liczb lecz rozkładu prawdopodobieństwa. Można więc oczekiwać w układzie zdeterminowanym dynamiki typowej dla układów stochastycznych (zostanie to dalej przedyskutowane i zilustrowane na przykładzie prostych odwzorowań i równań różniczkowych zwyczajnych). Właśnie taki ruch układów deterministycznych, w odróżnieniu od układów ze zmiennymi losowymi, nazywamy chaosem deterministycznym.

W tradycyjnej fizyce i mechanice daje się również wyróżnić podział na układy dyskretnie i ciągle. Te pierwsze opisane są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, a te drugie opisane są poprzez równania różniczkowe cząstkowe. Zwolennicy równań różniczkowych. twierdzą, że równania cząstkowe dają się z wystarczającą dokładnością

aproksymować poprzez równania różniczkowe zwyczajne. Zwolennicy równań cząstkowych podają wiele kontrprzykładów i wskazują na potrzebę badania takich równań bez konieczności oparcia się na osiągnięciach tych pierwszych. Bardziej kompromisowo sytuacja przedstawia się w mechanice, gdzie często układy ciągłe aproksymowane są przez układy dyskretne. Na takim podejściu oparta jest choćby metoda sztywnych elementów skończonych i jej odmiany. Na przykład belka może być aproksymowana układem mas punktowych połączonych poprzez bezmasowe sprężyny i często również z uwzględnieniem tłumienia. Aproksymacja ta daje wyniki bardzo dobre - wystarczające dla potrzeb zastosowań. Często stosuje się również podejścia odwrotne. Mając na przykład układ wielu oscylatorów szeregowo połączonych ze sobą poprzez elementy podatne i wykonujący ruch płaski można go (przy dużej liczbie mas) zastąpić układem ciągłym i uzyskać pełne rozwiązanie problemu poprzez znalezienie rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego opisującego drgania tak zamodelowanej belki. Przykład ten wskazuje na względność takich pojęć jak układy ciągłe i dyskretne i możliwość przejścia od jednych do drugich, co może być podyktowane potrzebami badacza. I tutaj również w trakcie procesu "kontynualizacji" tj. przybliżania układu ciągłego poprzez zwiększenie liczby mas i sprężyn nie dąży się do ideału, tj. do liczby mas dążącej do nieskończoności. W praktyce jest to bowiem niemożliwe.

Na bazie prowadzonych wyżej rozważań pojawia się również głębsza refleksja. Klasyczny ideał matematyki polegał na znalezieniu rozwiązań dokładnych i dążenia do ich uzyskania za wszelką cenę. Przyroda podpowiada nam jednak, że ta idealizacja jest nie tylko bardzo kosztowna, ale często wręcz nieosiągalna. Należy raczej pogodzić się z jej wskazówkami i nie próbować podczas symulacji komputerowej zadawać nieskończoną dokładność warunków początkowych by znaleźć "prawdziwą" trajektorię ruchu, a raczej posługiwać się narzędziami przystosowanymi do z góry założonej niedokładności warunków początkowych. Ponadto podejścia takiego nie należy traktować jako bolesną rezygnację z dążenia do ideału, ale jako nowe konkurencyjne

oblicze matematyki w stosunku do jej podejścia klasycznego. Absolutna dokładność to utopia nieosiągalna dla wielu zagadnień nieliniowej dynamiki.

To, w pewnym sensie opozycyjne stanowisko do klasycznego, daje się wyraźnie zauważyć w nowej gałęzi matematyki reprezentowanej przez asymptotologię. W nauce tej świadomie rezygnuje się z osiągnięcia ideałów. Dokładność absolutna może być w niej osiągnięta również, ale tylko wtedy, gdy szeregi asymptotyczne są zbieżne. Główne narzędzia asymptotologii oparte są na fakcie, że wspomniane szeregi nie muszą być wcale zbieżne. W skrócie myśl ta może być interpretowana w sposób następujący: szeregi zbieżne opisane są funkcją $y(t) = y_0$ przy $t \rightarrow \infty$, natomiast szeregi asymptotyczne opisane są funkcją dla $t = t_0$ przy $y \rightarrow y_0$. Jeszcze kilkadziesiąt lat temu idea opisu zjawisk przy pomocy szeregów asymptotycznych rozbieżnych wydawała się śmieszna.

Przytoczymy tu jeszcze jeden argument świadczący przeciw ideałom osiąganym za wszelką cenę. Jeśli nawet mamy kilka (absolutnie dokładnych) rozwiązań szczególnych analizowanego układu dynamicznego, to nie możemy ich w pełni wykorzystać. W układzie nieliniowym nie obowiązuje bowiem zasada superpozycji i generalnie nie możemy znaleźć rozwiązania ogólnego poprzez sumowanie rozwiązań szczególnych.

Podsumujmy więc pierwszą główną myśl, która dalej będzie przewijać się poprzez strony tej książki. Absolutna dokładność jest mile widziana, ale nie za wszelką cenę. Często nie udaje się jej uzyskać i na jej gruncie rodzi się nowa matematyka, fizyka czy mechanika znacznie rozszerzająca zakres stosowania ich podejść klasycznych. Po drugie, nie należy kurczowo trzymać się pojęć determinizm - indeterminizm, stochastyczność - regularność, duży - mały, dokładny - niedokładny, dyskretny - ciągły, itd., pozostając ciągle w ramach jednego z nich. Okazuje się bowiem, że istnieją uprawnione przejścia między nimi prowadzące do głębszego poznania Przyrody.

Drugą główną myślą i celem niniejszej monografii jest wskazanie na istnienie pewnych uniwersalnych reguł i praw dotyczących układów dynamicznych. W fizyce i

mechanice znane są układy powtarzania się pewnych struktur podobnych na różnych poziomach. Jeśli uda się takie struktury "wychwycić" matematycznie np. poprzez zastosowanie metody renormalizacji, to będą posiadać one cechy uniwersalne niezależne od rodzaju opisujących je równań lub odwzorowań punktowych. Własności fizyczne są samopodobne, powtarzają się w coraz mniejszej skali. Na przykład M. Feigenbaum zauważył, że kształt badanego przez niego „drzewa figowego” otrzymanego przy analizie podwajania okresu występującego przy odwzorowaniu logistycznym $x \rightarrow A x(1-x)$ ($A \in [0, 4]$, $x \in [0, 1]$) jest samopodobny. Gałązka tego drzewa posiada kształt podobny do całego drzewa, a przybliżenie (czynniki skalujący) poprawia się ze zmniejszaniem gałązek dążąc do „magicznej” liczby 4.669.... Liczba ta powtórzyła się również podczas analizy odwzorowania trygonometrycznego $x \rightarrow A \sin x$. Okazało się więc, że mając ten czynnik skalujący (który nie zależy od równania) i mając prawo dotyczące budowy takiego „drzewa” można je szybko odtworzyć (i stworzyć). Odpowiedzialne są za to dwie przyczyny: prawo, reguła lub schemat postępowania i liczba (czynnik skalujący).

Nie na próżno starożytni Grecy spędzili mnóstwo lat na analizie figur geometrycznych i liczb [1]. Na przykład główną siłą pitagorejczyków (VI w. p.n.e.) była ich wiedza matematyczna dążąca do poznania budowy i wzajemnych stosunków liczb. To Pitagoras odważył się powiedzieć, że „wszystkie rzeczy są liczbami”. Wielkim przeżyciem estetycznym było dla niego ustalenie związku pomiędzy tonami w muzyce, a liczbami. Objawiły się one dla Pitagorasa nie tylko w dziedzinie wrażeń słuchowych, ale również estetycznych - kształtów i barw. Śledząc tę książeczkę czytelnik z pewnością może się przekonać, że wiele z tych spostrzeżeń znalazło odzwierciedlenie w rozwoju współczesnej dynamiki nieliniowej, teorii chaosu i fraktali.

Według Arystotelesa to liczby były piękne, a piękno to objawiło się właśnie poprzez akustyczną lub optyczną postać. Arystoteles, podsumowując działalność pitagorejczyków pisał, że według tych ostatnich wszystkie rzeczy są liczbami, naśladując lub odtwarzają liczby, a elementy liczb są elementami wszystkich rzeczy (np. związki

parzystości i nieparzystości są elementami liczb). Jedyńka jest podstawą wszystkiego i ona stanowi przyczynę do powstania dwójki, a obie te liczby tworzą przyczynę do powstania wszystkich liczb. A dalej, z liczb powstają punkty, z punktów linie, z linii powierzchnie, itd. Nerozciągliwy punkt stanowił dla nich ogniwo pomiędzy geometryczną, a arytmetyczną postacią świata. Każda liczba naturalna jest w sobie skończona, a tylko szereg tych liczb rozciąga się w nieskończoność. Liczba dziesięć była dla nich arcydoskonała, a $\sqrt{2}$ uwłaczał "świętemu" majestatowi liczb (istnienie tej liczby było długo zachowywane w tajemnicy przez pitagorejczyków) Według szkoły pitagorejskiej cały świat materialny i duchowy jest we władzy liczb naturalnych. Każdą liczbę niewymierną można z dowolnie wysoką dokładnością aproksymować wymierną (patrz paragraf 1.1.11), a ponadto odwzorowanie Bernoulliego składające się z liczb 1 i 2 jest prekursorem chaosu (patrz paragraf 1.1.9). Czyżby po wielu latach tajemnica filozofii pitagorejskiej była ciągle aktualna? Teraz znowu nastąpił powrót zainteresowań do liczb i ciągów liczbowych, ale tym razem zainspirowany rozwojem współczesnej dynamiki nieliniowej. Odżyły na nowo rola i znaczenie liczb, a w tym liczb wymiernych i niewymiernych oraz ich wzajemne położenie (np. na odcinku $[1,0]$), ciągów Frobeniusa i kroków Dedekinda, aproksymacje liczb wymiernych przez niewymierne, zero-jedynkowa aproksymacja liczb rzeczywistych oraz tzw. przesunięcia Bernoulliego. O znaczeniu liczby π oraz złotego podziału chyba nie należy nikogo przekonywać. Tym razem jednak start do rozważań nastąpił z zupełnie innego punktu. Wyszedł on od rozważań dotyczących równań różniczkowych, które stanowią modele matematyczne pewnych układów realnych (fizycznych), bądź też od analizy pewnych odwzorowań, które mogą być otrzymane z równań różniczkowych. Zarówno w równaniach jak i pewnych odwzorowaniach zaobserwowano podwajanie się okresu rozwiązania przy zmianie parametru w efekcie prowadzą do ruchu chaotycznego zgodnie z czynnikiem skalującym równym 4,669... Nikt nie kwestionuje roli liczb niewymiernych i istnienia rozwiązań quasi-okresowych leżących na torusie dwu- lub wielowymiarowym, natomiast liczby wymierne wiąże się z rozwiązaniami okresowymi.



I tu znów nasuwa się analogia do rozważań wcześniejszych. Przy pewnych parametrach układu (krytycznych) torus znika i pojawia się rozwiązanie okresowe: rola liczb niewymiernych została wyparta przez liczby wymierne. Okazuje się, że w przedziale $[0,1]$ prawie wszystkie liczby rzeczywiste mają rozwinięcie dziesiętne, będące przypadkowym, tzn. ciąg kolejnych cyfr w rozwinięciu danej liczby powtarza się. Prawie każda liczba z tego przedziału będzie miała inne rozwinięcie dziesiętne, a wobec tego przypadkowo wybrana liczba będzie miała również przypadkowe rozwiązanie dziesiętne. W praktycznych obliczeniach numerycznych wykrycie ruchu okresowego w interpretacji "języka" liczb oznacza, że startując od danej liczby tj. od jej długiego rozwinięcia dziesiętnego po pewnym czasie (równym okresowi) znowu pojawia się ta liczba (tzn. z takim samym rozwinięciem dziesiętnym). Można udowodnić, że taka własność ma miejsce wówczas, gdy ta liczba jest liczbą wymierną. Obok dwóch dowolnie wybranych liczb wymiernych istnieje cały „ocean” nieskończenie wielu innych liczb wymiernych i niewymiernych, które są między sobą wymieszane. Można pokazać, że dla pewnych odwzorowań niezwykle bliskie liczby (w sensie rozwinięć dziesiętnych) po wielokrotnych odwzorowaniach różnią się od siebie bardzo (zostanie to wyjaśnione bardziej w rozdziale 1).

Uważny czytelnik dostrzeże, że przecież w układzie rzeczywistym czas (zmienna niezależna) "płyne" w sposób ciągły i przechodzi przez wszystkie przemieszane ze sobą liczby wymierne i niewymierne, natomiast procedury numeryczne bazują na modelach dyskretnych lub dynamice dyskretniej. Na szczęście istnieją jednak ściśle związki pomiędzy dynamiką dyskretną, a ciągłą.

Królestwo liczb rozciąga się jeszcze dalej. Liczby ułamkowe odgrywają kluczową rolę w dynamice fraktali poprzez tzw. wymiary fraktalne wprowadzone przez Hausdorffa. Fraktale, wbrew intencji kreatora ich teorii, stanowiły pewną geometryczną metodę badania nieregularnej dynamiki, a w tym i chaosu deterministycznego. Istnieje pewna, choć daleka analogia pomiędzy dynamiką fraktalną i chaotyczną. Scenariusz przejścia do chaosu poprzez kolejne bifurkacje podwojenia okresu nowo powstających



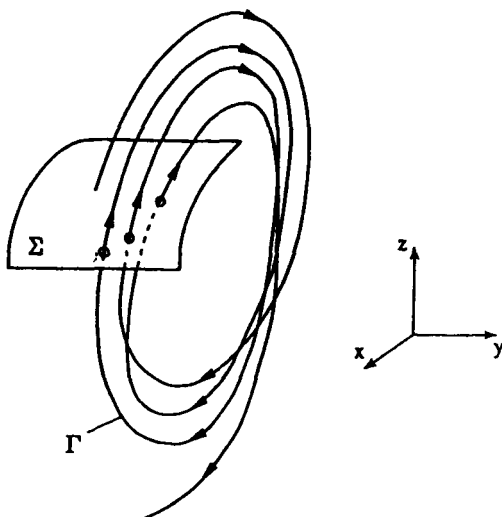
orbit prowadzi w efekcie do współlistnienia nieskończenie wielu orbit okresowych, niestabilnych i utworzenia jakościowo nowej struktury geometrycznej zwanej dziwnym atraktorem. Podobnie jest i w przypadku prostych figur geometrycznych takich, jak np. trójkąty, odcinki czy elipsy i układanie ich w pewnej skali i według pewnego schematu (prawa) prowadzi do powstania jakościowo nowej struktury, w której zmniejszanie się jej podstawowych elementów (koło, trójkąt itd.) prowadzi do utraty ich kształtów na rzecz nowej struktury. Ta ostatnia wykazuje nową własność - samopodobieństwa. Wykazuje ona podobieństwo między jej różnymi pod względem wielkości elementami. Jak już wspomniano, struktura taka charakteryzuje się wymiarem, który nie jest liczbą całkowitą, a jest liczbą ułamkową. Przykładem takiej figury może być płatek śniegu, który posiada bardzo skomplikowaną linię brzegową. Linia ta nie jest jednowymiarową krzywą (wymiar 1) i nie wypełnia całkowicie dwuwymiarowej powierzchni (wymiar 2). Tak więc poszukiwany wymiar leży w przedziale $1 < w < 2$.

1. Chaos

1.1. Odwzorowania iterowane i metody identyfikacji chaosu

1.1.1. Odwzorowania punktowe - wprowadzenie

Zanim przejdziemy do wyjaśnienia pojęcia chaosu w układach zdeterminowanych nieliniowych rozważymy pewne odwzorowanie punktowe, zwane również odwzorowaniem Poincaré. Jest ono obecnie powszechnie stosowane przy analizie układów dynamicznych, a idea jego stosowania polega na wprowadzeniu płaszczyzny (bądź hiperpłaszczyzny), która przecina powracający potok fazowy nigdzie nie stykając się z jakąkolwiek trajektorią tego potoku (rys. 1).



Rys.1 Schemat odwzorowania Poincaré

Trajektorie Γ tego potoku leży w przestrzeni trójwymiarowej, a punkty przecięcia z płaszczyzną należą do niej, czyli odwzorowanie Poincaré reprezentuje odwzorowanie płaszczyzny w siebie. Bezsporną zaletą tego odwzorowania jest

obniżenie wymiaru analizowanej przestrzeni o jeden (otrzymane punkty leżą w płaszczyźnie). W przypadku dwuwymiarowego potoku (czyli leżącego w płaszczyźnie) punkty odwzorowania mogą układać się wzdłuż linii (mówimy wówczas o odwzorowaniu jednowymiarowym).

W praktyce taką płaszczyznę sieczną wprowadzamy w sposób stosunkowo prosty, co zostanie omówione na przykładzie układu nieautonomicznego o jednym stopniu swobody opisanego równaniem różniczkowym

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = F_0 \cos \omega t. \quad (1.1)$$

Okres siły wymuszającej wynosi $T = 2\pi/\omega$ i dla dyskretnych wartości czasu

$$t_n = t_0 + nT \quad (1.2)$$

rejestrujemy wartości prędkości i przemieszczania

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{dx}{dt}(t_n), \\ x_n &= x(t_n). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Jeśli

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \\ v(t_0) &= v_0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

to punkty

$$\begin{aligned} x_n &= x(t_n, x_0, v_0), \\ v_n &= v(t_n, x_0, v_0), \end{aligned} \quad (1.5)$$

należą do płaszczyzny Poincarégo, przy czym $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

W powyższym przypadku odwzorowanie Poincaré jest odwzorowaniem dwuwymiarowym. Dla układu autonomicznego ($F_0 = 0$) i przy założeniu, że siła

$F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ powoduje samowzbudzenie układu, zagadnienie może być w tym przypadku zredukowane do odwzorowania jednowymiarowego. Obserwacji (bądź pomiarów) wartości $x(t_n)$ będziemy dokonywać w chwilach czasowych t_n takich, dla których $v(t_n) = \frac{dx}{dt}(t_n) = 0$. Rozwiązaniu okresowemu układu autonomicznego (orbicie okresowej) odpowiadać będzie stały punkt tego odwzorowania zdefiniowanego powyżej. Jeśli będzie ono stabilne w sensie Lapunowa (teorii stabilności poświęcona jest obszerna literatura [2-7]), to ciąg punktów określonych poprzez warunki początkowe wzięte w jego bliskim otoczeniu będzie do tego punktu dążył ze wzrostem n . Mówimy wtedy o atraktorze, lub inaczej o "przyciągaczu". Jeśli punkt stały odwzorowania będzie niestabilny, to wówczas ciąg punktów będzie od niego "uciekał". Wówczas mówimy, że punkt osobliwy x_0 jest niestabilny w sensie Lapunowa i nazywamy go repilerem (wg. [8]) lub "odpychaczem".

Powyższe proste rozważania dają się znacznie uogólnić. Niech rozwiązanie układu n autonomicznych równań różniczkowych zwyczajnych w postaci normalnej ma postać $x = X(t, x_0)$, gdzie $x_0 = X(t_0, x_0)$. Jeśli zagadnienie Cauchy'ego ma jedno rozwiązanie wyznaczone poprzez wspomniany warunek początkowy i określone dla $t \in (-\infty, +\infty)$, to zachodzą związki:

$$X(t_2, X(t_1, x_0)) = X(t_1 + t_2, x_0), \quad (1.6)$$

co łatwo widać biorąc pod uwagę oznaczenia

$$X(t_1 + t_2, x_0) = x_2, \quad X(t_1, x_0) = x_1, \quad X(t_2, x_1) = x_2. \quad (1.7)$$

Rodzina odwzorowań $X_t(x) = X(t, x)$ wyznaczona przez rozwiązanie $x(t)$ określa układ dynamiczny w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ co zapisujemy $(\mathbb{R}^n, X_t)$. Jeśli $t \in [0, \infty)$, to układ dynamiczny jest ciągły (mówimy wówczas o potoku), natomiast jeśli $t \in \mathbb{N}$, to układ dynamiczny jest dyskretny (mówimy wówczas o kaskadzie).

Powracając do interpretacji geometrycznej płaszczyzny sieciowej okazuje się, że istnieją pewne związki funkcyjne pomiędzy współrzędnymi dwóch kolejnych punktów

przecięcia trajektorii z tą płaszczyzną

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad (1.8)$$

które nieraz mogą być wyrażone w postaci analitycznej. Równanie różnicowe (1.8) opisuje kaskadę i istnieją jednoznaczne związki pomiędzy wyjściowym równaniem różniczkowym, a otrzymanym równaniem różnicowym.

Punkt x_0 nazywamy punktem stałym kaskady (1.8) jeśli

$$F(x_0) = x_0. \quad (1.9)$$

Dla każdego punktu x k -krotne zastosowanie operacji F prowadzi do punktu

$$x(k) = F^k(x). \quad (1.10)$$

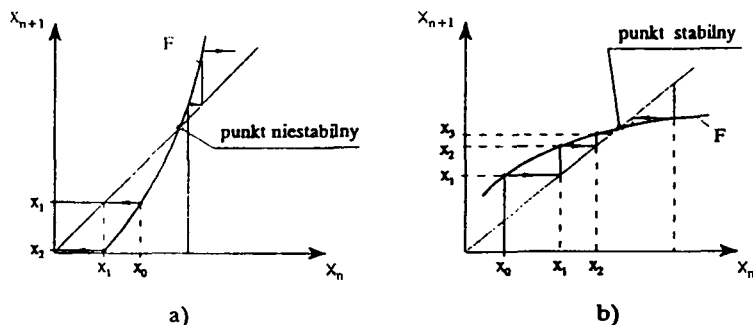
Ciąg $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, gdzie $x_{k+1} = F(x_k)$ nazywamy trajektorią punktu x_0 .

Powiadamy, że punkt x jest okresowym o okresie k , jeśli

$$F^k(x) = x, \quad (1.11)$$

i k jest najmniejszą liczbą naturalną o takiej właściwości. Jeśli $k = 2$ to również kolejne potęgi liczby dwa będą spełniać równanie (1.11). Jeśli wybierzemy x_0 blisko badanego punktu x , i jeśli odległość $\|x(k) - x\| \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$, to wówczas x_0 jest asymptotycznie stabilny.

W oparciu o zależność (1.8) i rysunek 2 łatwo sobie wyobrazić kryteria stabilności stałego punktu odwzorowania.



Rys. 2. Stabilny (b) i niestabilny (a) punkt stały odwzorowania (1.8)

W oparciu o konstrukcję graficzną odwzorowania (1.8) dla $\mathbb{R}^1$ przedstawioną na rysunku 2 łatwo wysunąć wniosek, że punkt stały odwzorowania jest stabilny (niestabilny), jeśli

$$\left| \frac{dx_{k+1}}{dx_k} \right| < 1 (> 1). \quad (1.12)$$

Na koniec warto wspomnieć tu o zaletach odwzorowania Poincaré. Ogólnie rzecz biorąc przy badaniu dynamiki układów opisanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi mamy głównie do czynienia z analizą położenia równowagi lub rozwiązań okresowych. Dla przypadku rozwiązań okresowych warunek stabilności oznacza, że wartości własne macierzy monodromii (multiplikatory) powinny leżeć w kole jednostkowym o promieniu 1, aby rozważany punkt stały (a tym samym orbita okresowa) był stabilny. Często metoda ta stosowana jest przy praktycznym określeniu stabilności uprzednio numerycznie znalezionej orbity, np. przy użyciu metody "strzelania" lub metody Urabe - Reitera ([9]).

1.1.2. Podstawowe pojęcia i definicje

Wprowadzimy obecnie kilka podstawowych pojęć i definicji w oparciu o pracę J. Kudrewicza [8] i A.M. Samoilenko [10].

Definicja 1.

Ciąg utworzony z kolejnych punktów odwzorowania $\{F^k(x)\}$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$ nazywać będziemy trajektorią (orbitą) punktu x .

Jako przykład rozważmy odwzorowanie $F: [0,1] \rightarrow [0,1]$ o postaci

$$F(x) = x(1-x), \quad (1.13)$$

to wówczas dla $x = \frac{1}{2}$ orbita wyznaczona jest poprzez punkty $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \dots$

Definicja 2.

Punkt x_Ω nazywać będziemy punktem Ω -granicznym trajektorii $\{F^k(x)\}$, jeśli

istnieje taki ciąg liczb $\{k_n\}$ naturalnych, dla którego zachodzi

$$\lim_{k_n \rightarrow \infty} F^{k_n}(x) = x_\Omega. \quad (1.14)$$

Zbiór takich wszystkich punktów nazywamy zbiorem Ω -granicznym trajektorii $\{F^k(x)\}$ i będziemy go oznaczać przez $\Omega(x)$.

Definicja 3.

Zbiorem niezmienniczym Z kaskady nazywamy zbiór spełniający warunek $X(Z) = Z$. Najczęściej zbiorami niezmienniczymi są punkty równowagi lub trajektorie okresowe.

Komentarza wymagają jeszcze zbiory Ω -graniczne, które mogą być atraktorami lub repilerami.

Definicja 4.

Zbiór niezmienniczy A domknięty i ograniczony nazywamy atraktorem, jeśli istnieje jego otoczenie $O(A)$, takie że dla dowolnego $x \in O(A)$ trajektoria $\{F^k(x)\}$ dąży do A przy $k \rightarrow \infty$. Zbiór wszystkich x spełniających powyższy warunek nazywamy zbiorem (lub basenem) przyciągania atraktora A .

Uwagi:

Często przy definiowaniu atraktora mówi się, że zbiór spełniający warunki definicji 4 nie zawiera w sobie innego zbioru spełniającego te warunki.

Atraktory chaotyczne - są to takie atraktory, które zawierają co najmniej jedną trajektorię chaotyczną. Trajektorię nazywamy chaotyczną, jeśli co najmniej jeden z wykładników Lapunowa z nią związanych jest dodatni (definicje wykładników Lapunowa podano w 1.1.4).

Dziwne atraktory - są to atraktory, które posiadają skomplikowaną geometryczną strukturę.

Zwykle używa się wyżej wymienionych dwóch określeń wymiennie. Jednak mogą one istnieć niezależnie (patrz Grebogi i inni [11], Jakobson [12]).

Układy dynamiczne mogą posiadać kilka współistniejących atraktorów. Jednym

z podstawowych zadań w tym przypadku jest określenie obszaru warunków początkowych, dla których potok fazowy będzie przyciągany przez indywidualne atraktory. Okazuje się, że granice pomiędzy basenami różnych atraktorów mogą mieć bardzo skomplikowane kształty, na przykład mogą one być fraktalami [12].

Definicja 5.

Punkt stały x_0 odwzorowania (1.8) (dla $\mathbb{R}^3$) nazywamy hiperbolicznym, jeśli pochodna DF w tym punkcie posiada wartości własne różne od 1. Jeśli taki punkt jest hiperboliczny i posiada dwie rzeczywiste wartości własne, λ_i ($i = 1, 2$), a w tym $|\lambda_1| < 1$ i $|\lambda_2| > 1$, to taki punkt jest siodłem (szczegółowa klasyfikacja punktów osobliwych podana jest w [7]). Rozmaitości

$$\begin{aligned} W^S(x_0, F) &= \left\{ x: \|F^n x - W^S(x_0, F)\| \rightarrow 0, \text{ jeśli } n \rightarrow +\infty \right\}, \\ W^n(x_0, F) &= \left\{ x: \|F^n x - W^n(x_0, F)\| \rightarrow 0, \text{ jeśli } n \rightarrow -\infty \right\}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

nazywamy odpowiednio stabilną i niestabilną, przy czym są one niezmiennicze, czyli

$$\begin{aligned} F(W^S(x_0, F)) &= W^S(x_0, F), \\ F(W^n(x_0, F)) &= W^n(x_0, F). \end{aligned} \quad (1.16)$$

1.1.3. Przesłanki dla pojawienia się chaosu w układach deterministycznych

Jeśli dla danego układu dynamicznego opisanego układem równań różniczkowych zwyczajnych spełnione są warunki Lipschitza i istnieje rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego, to rozwiązanie jest jednoznaczne i dokładnie wyznaczone poprzez warunki początkowe. Nasuwa się tu analogia z pociągiem jadącym po torach, którego ruch w każdej chwili czasowej możemy bez kłopotów określić. A jednak wykryte dziwne atraktory chaotyczne Lorenza, Uedy, Hénona i inne, wydają się zaprzeczać tym oczywistym faktom. Pewna nieokreśloność jest intuicyjnie pojęta dla złożonych układów fizycznych, gdzie w szczególności niewielka zmiana faz może prowadzić do dużych zmian w dynamice układu w przedziale dużych zmian zmiennej



niezależnej - czasu. Wyjaśnimy to na przykładzie układu rozważanego przez Landaua. W tym celu rozpatrzmy dwa krańcowe przypadki stanu układu dynamicznego: chaotyczność i synchronizację. Nie wnikając w szczegóły, przez synchronizację rozumieć będziemy dążenie podukładów złożonego układu dynamicznego do wykonywania "podobnej" dynamiki, np. objawiającej się poprzez ruchy okresowe podukładów o tych samych okresach, a w konsekwencji powodujące synchronizację, czyli ruch okresowy o tym samym okresie całego układu. Zjawisko to było obserwowane już przez Huygensa podczas analizy synchronizacji tykania zegarów. Obecnie zjawisko to ma wymiar szerszy i odnosi się do wzajemnej organizacji układów biologicznych, a w mechanice problematyka ta pojawia się przy zagadnieniach synchronizacji drgań wirników i przy stabilizacji ruchu sputników [14-16]. Rozpatrzmy najpierw układ drgający w pełni zsynchronizowany, tzn. taki, że pojawiające się w nim częstotliwości drgań $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ spełniają warunek

$$l_1\omega_1 + l_2\omega_2 + \dots + l_k\omega_k = 0, \quad (1.17)$$

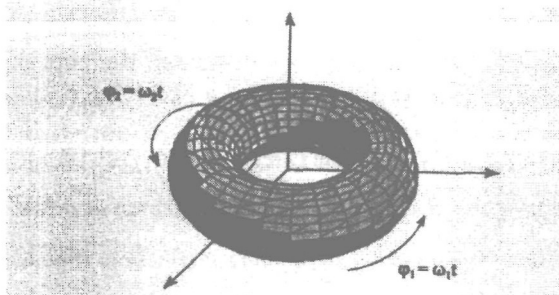
gdzie $\{l_1, \dots, l_k\} \in \mathbb{C}$ i $\mathbb{C}$ jest zbiorem liczb całkowitych. Mówimy wówczas, że układ jest w pełnym rezonansie, a objawia się to charakterystycznymi wzrostami amplitud drgań dla każdej ω_i z dyskretnego zbioru $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$. Jeśli jednak każdy podukład będzie drgał niezależnie od innych, tzn. ze swoim własnym, niezależnym od pozostałych okresem, to wówczas układ nie jest zsynchronizowany. W praktyce brak synchronizacji wiąże się z istnieniem liczb niewymiernych, np. dla $k = 2$ i $\omega_1 = 1$ oraz $\omega_2 = \sqrt{2}$ rozwiązanie $x = x(\varphi_1, \varphi_2)$, gdzie $\varphi_1 = \omega_1 t$ i $\varphi = \omega_2 t$ leży w stanie ustalonym na dwuwymiarowej rozmaitości (torusie), a rozwiązanie $x = x(\varphi_1, \varphi_2)$, gdzie parametrem jest czas, nazywamy rozwiązaniem quasi-okresowym.

Przykład takiej dwuwymiarowej rozmaitości podany jest na rys. 3.

Uwaga:

Problematyka orbit quasi-okresowych została jedynie zasygnalizowana w tej pracy. Zawiera ona jeszcze wiele nie do końca ekonomicznie rozwiązanych problemów,

a zwłaszcza ukierunkowanych na potrzeby obliczeń inżynierskich. Dotyczy to głównie określenia stabilności wielowymiarowych atraktorów - torusów, śledzenie zmian takich orbit towarzyszących zmianom parametrów i ich bifurkacji [17-21].



Rys. 3 Torus i dwie niewspółmierne częstotliwości ω_1 i ω_2

Łatwo sobie teraz wyobrazić, że jeśli dodatkowo fazy $\varphi_1^0, \dots, \varphi_k^0$ ulegają nawet nieznacznym zmianom, to odpowiedź układu $x(\omega_1 t + \varphi_1^0, \dots, \omega_k t + \varphi_k^0)$ może ulegać z czasem zmianom znacznym i prowadzić w efekcie do pojawienia się chaotyczności ruchu.

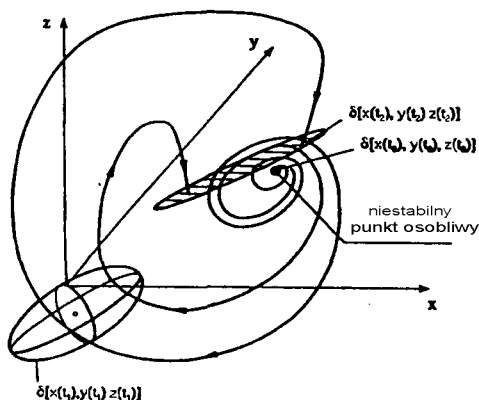
Obecnie wskażemy na inną możliwość pojawienia się chaosu w prostych układach dynamicznych. Dla oscylatorów autonomicznych o jednym stopniu swobody i o trajektorii ograniczonej (wykonującej ruch rekurentny) jedynymi atraktorami mogą być położenia równowagi lub orbity okresowe. Sytuacja jednak ulega dramatycznej zmianie dla układów trójwymiarowych, tj. układów o $1\frac{1}{2}$ stopniu swobody lub tychże oscylatorów z wymuszeniem zewnętrznym. W książce Ch. Hayashiego (tłumaczonej na język polski [22]) na początku rozdziału 6 znajduje się rysunek przedstawiający wykres krzywych rezonansowych dla różnych wartości parametru kontrolnego ω . Okazało się, że dla pewnego zakresu tego parametru wszystkie orbity okresowe są niestabilne. Czyżby zatem dla takich wartości parametrów nie istniało rozwiązanie ustalone w realnym układzie fizycznym? Posługując się tym argumentem Ch. Hayashi zaczął żądać od Y. Uedy (wówczas studenta w jego laboratorium) "racjonalnych", lub lepiej, "oczekiwanych" wyników, czemu ten ostatni nie mógł sprostać. Wykraczało to poza

jego możliwości z tej prostej przyczyny, że ich tam nie było. Był za to zupełnie inny atraktor - dziwny atraktor chaotyczny.

Okazało się zatem, że dla układów trójwymiarowych trajektorie mogą cały czas przebywać w pewnym podobszarze przestrzeni fazowej $\mathbb{R}^3$, ale mogą w niej nieustannie błądzić pomiędzy niestabilnymi położeniami równowagi i niestabilnymi orbitami okresowymi. Wprawdzie z faktu ograniczoności takiej podprzestrzeni wynika, że istnieje taki czas, po którym znajdzie się taka trajektoria dowolnie blisko punktu startu leżącego na atraktorze, ale odpowiedzi, kiedy znajdzie się tam ponownie nie można uzyskać.

Uzbrojeni w wiedzę o roli niestabilności rozpatrzmy obecnie ewolucję (zmiany w czasie) pewnego obszaru warunków początkowych wziętych z obszaru $\delta[x(t_0), y(t_0), z(t_0)]$ który został na rys. 4 zakreskowany.

Obszar $\delta(t_0)$ stanowi bardzo małe otoczenie niestabilnego punktu osobliwego. Dwie wyróżnione trajektorie na tym rysunku eksponencjalnie uciekają od siebie i początkowo mały zbiór warunków początkowych $\delta(t_0)$ zamienia się w zbiór $\delta(t_1)$, a ponieważ trajektorie są ograniczone, to muszą one „zawrócić” i w efekcie dla $z = 0$ dwa punkty, które leżały bardzo blisko siebie (dla $t = t_0$) znalazły się po czasie $t = t_2$ daleko od siebie. Pojawia się pytanie, jak daleko, albo inaczej, jak blisko powinny być oddalone od siebie w punkcie startu, aby znowu znalazły się blisko siebie.



Rys. 4 Przykład błądzenia niestabilnej trajektorii w obszarze ograniczonym $\mathbb{R}^3$

1.1.4. Wykładniki Lapunowa

Zanim odpowiemy na to pytanie powróćmy do starej jeszcze teorii liczb charakterystycznych wprowadzonych przez Lapunowa, które wzięte ze znakiem odwrotnym definiują tzw. wykładniki Lapunowa (szczegóły podane są u Demidowicza [2]). Już wcześniej opisana była eksponencjalna rozbieżność trajektorii i właśnie miarą takiej rozbieżności są wykładniki Lapunowa.

Opisemy tutaj krótko ich własności w oparciu o prace [23-25]. Zgodnie z (1.10) kaskadę (1.8) możemy przedstawić w postaci

$$\mathbf{x}(k+1) = F(\mathbf{x}(k)). \quad (1.18)$$

Każdemu punktowi $\mathbf{x}$ w przestrzeni fazowej możemy przyporządkować macierz $DF^k(\mathbf{x})$ zwaną jakobianem odwzorowania F^k , która powstaje wskutek lokalnej linearyzacji, co w praktyce sprowadza się do obliczenia pochodnych k -tej iteracji dla punktu $\mathbf{x}$. Startując z punktu $\mathbf{x}(0)$ dla k -tej iteracji, macierz ta wyraża się zależnością

$$\mathbf{J}(k) = DF^k(\mathbf{x}(0)), \quad (1.19)$$

przy czym $DF^k(\mathbf{x}(0))$ może być otrzymana jako produkt

$$DF^k(\mathbf{x}(0)) = (DF(\mathbf{x}(k-1)) \dots DF(\mathbf{x}(0))) = DF^k(\mathbf{x}(0)). \quad (1.20)$$

Mając obliczone $\mathbf{J}(k)$ dla małych przyrostów otrzymujemy

$$\mathbf{x}(k+1) \approx DF(\mathbf{x}(k))\mathbf{x}(0) = DF^k(\mathbf{x}(0))\mathbf{x}(0) = \mathbf{J}(k)\mathbf{x}(0). \quad (1.21)$$

Powracając do dyskusji związanej z rys. 4 załóżmy, że w otoczeniu punktu niestabilnego weźmiemy dwa punkty $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$, które po k iteracjach (zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami) przejdą w punkty $\mathbf{x}_1(k)$ i $\mathbf{x}_2(k)$ określone poprzez związek

$$\mathbf{x}_1(k) - \mathbf{x}_2(k) \approx \mathbf{J}(k)(\mathbf{x}_1(0) - \mathbf{x}_2(0)). \quad (1.22)$$

Możemy wziąć cały potok generowany przez warunki początkowe, które leżą np. w kuli (patrz na rys. 4 jako przecięcie kuli z płaszczyzną x, y). W ogólnym przypadku będzie to jednak n -wymiarowa kula $K_0 = K(0)$, która po k -iteracjach przechodzi w elipsoidę $K(k)$ (taka elipsoida dla $n = 3$ oznaczona na rys. 4 jako $\delta(t_2)$). Jeśli teraz zamiast jednego punktu x_0 weźmiemy kulę K_0 i odpowiednio zamiast $x(k+1)$ elipsoidę K_{k+1} , to zgodnie z (1.21) otrzymamy

$$K_{k+1} = DF(\mathbf{x}(k))K_k. \quad (1.23)$$

Elipsoidy K_{k+1} i K_0 posiadają n osi głównych i układ posiada n z nimi związanych wykładników Lapunowa. Aby układ wykazywał chaotyczność wystarczy, żeby jeden z wykładników (największy) był dodatni. Wykładniki Lapunowa określa się ze wzoru

$$\lambda_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log(\alpha_{j,k}), \quad (1.24)$$

gdzie $\alpha_{j,k}$ oznacza długości j -tej osi elipsoidy K_k . Okazuje się, że dla bardzo szerokiej klasy odwzorowań F istnieje granica określona przez (1.24), która dla prawie wszystkich $x(0)$ nie zależy od $x(0)$, czyli nie zależy od warunków początkowych. Wówczas λ jest miarą zmian warunków początkowych i jeśli błąd określenia warunków początkowych wyniósł δ_{x_0} , to po k -tej iteracji będzie on wynosił

$$\Delta x_k \approx 10^{\lambda k} \Delta x(0), \quad (1.25)$$

jeśli tylko $\Delta x(0)$ jest dostatecznie małe, a k jest dostatecznie duże. Niech teraz maksymalny wykładnik Lapunowa wynosi $\lambda = 0.1$, co nie jest zbyt wielkim wymaganiem w odniesieniu do układów dynamicznych i niech $k_* = 10^{10}$ oraz $\Delta x(0) = 10^{-5}$. Zgodnie z (1.25) dla takiej iteracji k_* obliczamy $\Delta x_{k_*} = 10^4$ a z taką

dokładnością obliczeń nie można się pogodzić. Z drugiej strony będziemy chcieli, żeby błąd dla k -iteracji wynosił $\Delta x(k_*) = 10^{-5}$. Zatem zachodzi pytanie, z jaką dokładnością powinniśmy określić warunki początkowe. Posługując się wzorem (1.25) obliczamy, że $\Delta x(0)$ wynosi 10^{-15} , a zachowanie takiej dokładności obliczeń jest niezwykle trudne. Oczywiście niedokładność wzrasta ze wzrostem iteracji.

Zagadnienie sprowadza się więc do wyznaczenia z nieskończoną dokładnością warunków początkowych. Zgodnie z zasadą Maxa Bohra, każdy stan realnego układu fizycznego może być wyznaczony jedynie z pewną dokładnością i określa się raczej poprzez rozkład prawdopodobieństwa zamiast przez liczbę. Jeśli rozpatrywana trajektoria jest stabilna to błąd początkowy szybko z czasem maleje, natomiast jeśli jest niestabilna, to narasta on szybko ze wzrostem iteracji powodując nieprzewidywalność jej zachowania, tj. chaotyczność w układzie zdeterminowanym.

Teraz poświęcimy chwilę na dyskusję możliwości rekurencji (powrotu) trajektorii, w taki sposób, żeby leżała ona na atraktorze. Już wcześniej wspominaliśmy, że dla trajektorii pozostających cały czas w pewnym obszarze ograniczonym musi istnieć z upływem czasu możliwość powrotu w dowolnie bliską okolicę punktu startu.

1.1.5. Analogie fizyczne

Potok trajektorii fazowych można sobie wyobrazić na przykładzie cieczy składającej się z bardzo wielu cząsteczek, nawet w bardzo małej jej objętości. Jeśli w takiej przestrzeni istnieje atraktor będący orbitą okresową, to wprowadzając małą kropelkę kolorowej cieczy w dowolnie wybranym jej punkcie początkowym okaże się, że po pewnym czasie kolor będzie określał tę orbitę. Jeśli natomiast atraktorem będzie dziwny atraktor chaotyczny, to trajektoria leżąca na takim atraktorze zacznie błędzić wzdłuż całej objętości cieczy i ciecz stanie się kolorowa. Zabarwione cząstki zaczną się mieszać z nie zabarwionymi. Proces ten zachodzi w stosunkowo szybkim czasie i wobec tego nie jest wynikiem dyfuzji, a raczej związany jest z turbulentnym ruchem cząsteczek cieczy. Ta analogia jest jeszcze głębsza. Natężenie koloru świadczyć będzie o prawdopodobieństwie znajdowania się punktu fazowego w tym obszarze i nie zależy

ono od położenia początkowego (punktu startu).

Chaotyczność ruchu może pojawić się nie tylko podczas zjawiska turbulencji, ale również po pojawieniu się nieregularnych ruchów cząsteczek gazu, czy generacji liczb przypadkowych przy wykorzystaniu reguł deterministycznych.

1.1.6. Chaotyczność a stochastyczność

Załóżmy, że mamy generator drgań losowych o stałych parametrach. Uruchamiając go kilka razy otrzymujemy za każdym razem inne wykresy drgań. Ta cecha jest również charakterystyczna dla zdeterminowanych układów chaotycznych. Startując, lub lepiej starając się startować ciągle z tych samych warunków początkowych i przy ustalonych pozostałych parametrach układu, nie udaje się nam powtórzyć eksperymentu. Przebiegi drgań są za każdym razem inne.

Powróćmy do generatora drgań losowych. Powtarzając eksperyment wielokrotnie zaczynają pojawiać się pewne prawa probabilistyczne, które są niezależne od losowego rozłożenia stanów początkowych generatora.

Niech stan (wektor stanu $x(t, t_0, x_0)$) naszego chaotycznego układu dynamicznego opisany będzie poprzez funkcje $F(x)$, czyli $dx/dt = F(x)$. Ponieważ $x = x(t, t_0)$ i $x(t_0) = x_0$ to funkcje $F = F(t, t_0, x_0)$, przy czym mała zmiana x_0 prowadzi do dużych i nieregularnych zmian funkcji F (rozważania te prowadzone są w oparciu o pracę [26]). Interesować nas będzie przypadek, gdy istnieje wartość średnia

$$\langle F(x_0) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t, t_0, x_0) dt, \quad \left(\frac{dx}{dt} = F(x) \right) \quad (1.26)$$

która dla prawie wszystkich warunków początkowych x_0 od nich nie zależy.

W przypadku analizy układów stochastycznych obserwuje się w sposób statystyczny częstości pojawiania się pewnych cech charakterystycznych danego układu. W przypadku chaotycznych układów dynamicznych zamiast obserwacji prowadzonych statystycznie rozpatruje się pewne średnie w czasie cechy charakterystyczne trajektorii chaotycznych. Taką cechą charakterystyczną może być np. długość trajektorii T w

określonym małym obszarze przestrzeni fazowej. W przypadku, gdy dla dowolnie wybranego małego obszaru i prawie wszystkich trajektorii istnieje granica (1.26) przy zwiększaniu $T \rightarrow \infty$, która nie zależy od trajektorii, to zbiór utworzony z łuków takich trajektorii nazywać będziemy ergodycznym. Własność ergodyczności pozwala na zamianę uśrednienia ze względu na zbiór takich trajektorii, na uśrednienie względem czasu.

Teoria ergodyczna bada statystycznie własności odwzorowań. Dla dowolnego odwzorowania T^t w przestrzeni X może być ono przedstawione jako suma skończonej liczby niezmienniczych odwzorowań pewnych podprzestrzeni, gdzie na każdej z nich odwzorowanie T^t jest ergodyczne. Okazuje się, że każdy układ dynamiczny może być podzielony na takie podukłady, na których odwzorowanie T^t jest ergodyczne.

Dla układów ergodycznych istnieją związki wprowadzające równoważność średnich w sensie czasu i przestrzeni. Z drugiej strony, jeśli taka równoważność zachodzi, to układ jest ergodyczny. Dla układu ergodycznego trajektoria dla prawie każdego warunku początkowego osiąga mierzalny podukład o mierze dodatniej i przebywa w tym podukładzie w przedziale czasu, który jest proporcjonalny do jego miary.

Warto zwrócić uwagę, że ergodyczność nie zawsze pociąga za sobą stochastyczność. Na przykład orbita quasi-okresowa jest orbitą nie zamkniętą i ruch taki będzie ergodycznym, ale nie chaotycznym.

Podsumowując powyższe rozważania należy zauważyć, że układ dynamiczny wykazuje własności stochastyczne, gdy: a) istnieje pewien rozkład prawdopodobieństwa stanu układu niezależny od rozkładu prawdopodobieństwa związanego z warunkami początkowymi ; b) układ dynamiczny jest ergodyczny ; c) przynajmniej jeden z wykładników Lapunowa jest dodatni.

Układy dynamiczne dzielimy na zachowawcze (konserwatywne) i niezachowawcze. Te pierwsze charakteryzują się stałą wartością energii kinetycznej i potencjalnej, podczas gdy w tych drugich energia od układu jest odbierana (układy



dysypatywne) lub dostarczana (układy samowzbudne). Dla układów zachowawczych potok fazowy nie jest ściśliwy. Z twierdzenia Poincaré o powrotach wynika, że prawie wszystkie trajektorie takiego potoku będą nieskończenie wiele razy przechodzić dowolnie blisko swoich punktów początkowych.

Dla układu dysypatywnego dywergencja pola wektorowego w przestrzeni fazowej jest ujemna, co oznacza, że objętość potoku fazowego jest ściśliwa. Usytuowany w takiej przestrzeni fazowej dziwny atraktor chaotyczny posiada zawsze wymiar mniejszy od wymiaru rozpatrywanej przestrzeni.

1.1.7. Funkcja autokorelacji

Konkurencyjnym narzędziem w porównaniu z wykładnikami Lapunowa stanowi funkcja autokorelacji. Jest ona szeroko opisana w literaturze w szczególności w odniesieniu do równań różniczkowych $dx/dt = F(x)$. Określona jest ona zależnością

$$A(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F[x(t+\tau)]F(x(\tau))d\tau, \quad (1.27)$$

przy założeniu, że analizowany układ jest ergodyczny. Jeśli w $A(t)$ istnieją składowe okresowe bądź quasi-okresowe, to wówczas i w układzie badanym istnieje orbita okresowa lub quasi-okresowa. Jeśli natomiast dwie leżące blisko siebie trajektorie oddalają się od siebie i z upływem czasu poruszają się niezależnie od siebie, to $A(t)$ szybko dąży do zera. Odpowiada to sytuacji, gdy przynajmniej jeden z wykładników Lapunowa jest dodatni.

Warto wymienić kilka charakterystycznych cech funkcji autokorelacji. Jest to funkcja rzeczywista i parzysta z maximum w punkcie $t = 0$, która może przyjmować wartości dodatnie, jak i ujemne.

W przypadku badania procesu stochastycznego ze średnim znaczeniem $\langle x(t) \rangle = 0$, ma ona kształt ostro zarysowanego impulsu.

Dla procesu stochastycznego - białego szumu, funkcja $A(t)$ ma kształt funkcji δ .

Jeśli dla odwzorowań (1.18) zdefiniujemy wartość średnią $\langle x(k) \rangle$ zależną od

$x(0)$ jako

$$\langle x_k \rangle = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^K x(k), \quad (1.28)$$

to funkcja autokorelacji jest określona wzorem

$$A(\ell) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^K (x(k) - \langle x_k \rangle)(x(k+\ell) - \langle x(k) \rangle) \quad (1.29)$$

gdzie $\ell = 0, 1, 2, \dots$

1.1.8. Widmo częstotliwości

W obliczeniach inżynierskich, zarówno przy symulacji komputerowej jak również podczas analizy realnego obiektu w warunkach laboratoryjnych, jedną z najbardziej popularnych metod analizy jest technika oparta na analizie widma częstotliwości. W celu przyspieszenia procesu obliczeń numerycznych korzysta się tutaj z szybkiego przekształcenia Fouriera (FFT). Transformacja danego przebiegu czasowego z dziedziny czasu w dziedzinę częstotliwości może być opisana zależnością

$$W(\omega) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.30)$$

W przypadku ruchów regularnych (okresowych i quasi - okresowych) widmo częstotliwości składa się z dyskretnych komponentów, podczas gdy trajektorii chaotycznej $x(t)$ odpowiada widmo częstotliwości ciągłe.

1.1.9. Odwzorowanie Bernoulliego - najprostszy prekursor chaosu

Rozważmy odwzorowanie F przeprowadzające jednostkowy odcinek w siebie, tzn. $[0,1) \rightarrow [0,1)$ o postaci

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad (1.31)$$



$$F(x_k) = 2x_k \bmod 1, \quad (1.32)$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots$, przy czym funkcja modulo zawęza otrzymane rezultaty do przedziału jednostkowego (bierzemy tylko resztę po podzieleniu przez 1). Odwzorowanie to nosi nazwę odwzorowania Bernoulliego i może być również zapisane w postaci równania różnicowego

$$x(k+1) = \begin{cases} 2x(k) & \text{dla } 0 \leq x(k) < 0.5, \\ 2x(k) - 1 & \text{dla } 0.5 \leq x(k) < 1. \end{cases} \quad (1.33)$$

Odwzorowanie to posiada tylko jeden punkt stały $x_0 = 0$, który jest niestabilny.

Rozpatrzmy, jak będzie się zachowywało to odwzorowanie dla, $x(0) = \frac{1}{11}$, a więc dla liczby wymiernej. Otrzymujemy następujący ciąg liczb

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{1}{11}, & x(1) &= \frac{2}{11}, & x(2) &= \frac{4}{11}, & x(3) &= \frac{8}{11}, \\ x(4) &= \frac{5}{11}, & x(5) &= \frac{10}{11}, & x(6) &= \frac{9}{11}, & x(7) &= \frac{7}{11}, \\ x(8) &= \frac{3}{11}, & x(9) &= \frac{6}{11}, & x(10) &= \frac{1}{11}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

który przedstawia orbitę okresową o okresie 10. Dla $x(0) = \frac{1}{5}$ mamy kolejno

$$x(0) = \frac{1}{5}, \quad x(1) = \frac{2}{5}, \quad x(2) = \frac{4}{5}, \quad x(3) = \frac{3}{5}, \quad x(4) = \frac{1}{5}. \quad (1.35)$$

Zatem znowu otrzymujemy orbitę okresową, ale tym razem o okresie 4. Okazuje się, że dla wszystkich liczb wymiernych z rozważanego przedziału jednostkowego rezultatem iteracji są okresowe orbity. Sytuacja jednak wygląda zupełnie inaczej, jeśli jako punkt startu wybierzemy liczbę niewymierną. Każdemu punktowi zbioru $[0,1]$ możemy przyporządkować nieskończony ciąg $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, zwany adresem, w taki sposób, że

$$a_0 = 0, \quad x(0) = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2^2}a_2 + \frac{1}{2^3}a_3 + \frac{1}{2^4}a_4 + \dots \quad (1.36)$$

Liczby a_i przyjmują tylko wartości 0 lub 1. Wobec powyższego $x(0)$ może być przedstawione jako ciąg nieskończony zer i jedynek o postaci

$$x(0) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}. \quad (1.37)$$

Okazuje się, że przy pomocy takiej reprezentacji liczby rzeczywistej, możemy zauważyć ważną własność odwzorowania (1.33). Rozpatrzmy to na przykładzie liczby $x(0) = 0.32$. Czytelnik może sam bardzo szybko przeprowadzić obliczenia (np. przy użyciu podstawowego kalkulatora) znajdując kolejne wartości a_i , które podano niżej

$$x(0) \equiv 0.32 = \{0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots\}. \quad (1.38)$$

Po pierwszej iteracji otrzymujemy liczbę $x(1) = 0.64$ która posiada następujący adres

$$x(1) \equiv 0.64 = \{1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots\}. \quad (1.39)$$

Uważny czytelnik dostrzeże pewną prawidłowość. Adres (1.39) otrzymujemy po przesunięciu w lewo o jedną cyfrę adresu (1.38). Okazuje się, że ta prawidłowość ma miejsce dla wszystkich liczb z przedziału $[0,1]$. Każda kolejna iteracja wiąże się z przesunięciem w lewo o jedno miejsce poprzedniego adresu. Przesunięcie to nosi nazwę przesunięcia Bernoulliego.

Zwróćmy uwagę jeszcze na inne analogie podane przez Schustera [28]. Przyporządkujemy liczbie zero orła, a liczbie jeden reszkę i rozpatrzmy rzut monetą. Rzucając wielokrotnie monetą otrzymujemy np. adres $\{0, R, R, 0, \dots\}$, który odpowiada dokładnie jednej liczbie rzeczywistej z przedziału $[0,1]$.

A teraz rozpatrzmy następującą ciekawostkę. Weźmy dwie liczby $x^{(1)}(0)$ i $x^{(2)}(0)$, które mają np. 10^{16} takich samych cyfr po przecinku, czyli 16 takich samych początkowych cyfr w adresie (1.37) i podczas obliczeń utożsamiane są jako jednakowe. Poddając te liczby 10^{16} iteracjom (1.33) dojdziemy do miejsca 17 w adresach tych liczb, a więc do miejsc, gdzie one się różnią. Dalsze iteracje reprezentować już będą owe różne liczby. Nasuwa się tutaj bardzo wyraźna analogia z obserwowanym zjawiskiem

chaosu deterministycznego - w każdej kolejnej realizacji tego samego procesu startując z teoretycznie takich samych warunków początkowych odpowiedź układu jest ciągle inna ze względu na nieuniknione, choć bardzo małe różnice w ich realizacjach.

Odwzorowanie Bernoulliego posiada jeszcze jedną cechę typową dla chaosu. Wiąże się ona z operacją rozciągania, a następnie składania. Jeśli liczby podlegające iteracji znajdują się w przedziale $[0, \frac{1}{2}]$, to odwzorowanie rozciąga odpowiadające im odcinki (mnoży się je przez dwa). Jeśli poczynając od jakiejś iteracji znajdują się one w przedziale liczb większych od $\frac{1}{2}$, to w kolejnych iteracjach wartości ich maleją i liczby te powracają do przedziału $[0, 1]$.

Na koniec wspomnijmy o jeszcze jednej charakterystycznej cesze tego odwzorowania, która jest również typowa dla chaosu. Pokazaliśmy, że startując od liczby wymiernej otrzymaliśmy orbity okresowe. Są one niestabilne. Ponieważ w przedziale $[0, 1]$ istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych, to również w tym przedziale istnieje nieskończenie wiele orbit okresowych niestabilnych.

1.1.10. Odwzorowania logistyczne

Stosunkowo szczegółowej analizy doczekało się odwzorowanie logistyczne o postaci

$$x(k+1) = px(k)(1-x(k)), \quad (1.40)$$

przy czym parametr $p \in [0, 4]$. Główną cechą tego odwzorowania jest rozciąganie lub ściskanie odcinka, a następnie zginanie go w połowie. Okazuje się, że dla ustalonej wartości parametru p odwzorowanie powoduje "zawijanie" wyjściowego odcinka i układanie go w przedziale $[0, p/4]$. Dla przykładu rozpatrzmy przypadek $p = 1$ i rozpatrzmy liczby najpierw z przedziału $[0, 0.5]$. Liczba zero przechodzi w zero, a 0.5 w 0.25, a pozostałe liczby leżą w przedziale $[0, 0.25]$. Rozpatrując przedział $(0.5, 1]$ widać, że liczba 1 przechodzi w zero. Weźmy liczbę 0.7 - przechodzi ona w 0.21, natomiast liczba 0.9 przechodzi w 0.09. Na bazie tych trywialnych przykładów widać, że również przedział liczb $(0.5, 1)$ przechodzi w przedział $[0, 0.25]$, przy czym liczby

leżące bliżej jedynki odwzorowywane są na liczby leżące bliżej zera. Dla parametru p większego od liczby cztery prawie wszystkie ciągi $\{x(k)\}$ rozbiegają się do nieskończoności. Dla wartości granicznej $p = 4$ rozwiązanie równania (1.40) można wyrazić w postaci analitycznej

$$x(k) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left[2^k \arccos(1 - 2x(0)) \right] \right). \quad (1.41)$$

Przeprowadźmy obecnie analizę typową dla nieliniowej dynamiki. Znajdźmy punkty stałe odwzorowania (1.40) i zbadajmy ich stabilność. Punkty stałe znajdujemy z równań

$$px_*(1 - x_*) = x_*. \quad (1.42)$$

Są to dwa następujące punkty:

$$x_*^{(1)} = 0, \quad x_*^{(2)} = \frac{p-1}{p}. \quad (1.43)$$

Każde z wymienionych rozwiązań jest stabilne, jeśli

$$\left| \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_*} \right| < 1, \quad (1.44)$$

gdzie: $f(x) = px(1-x)$.

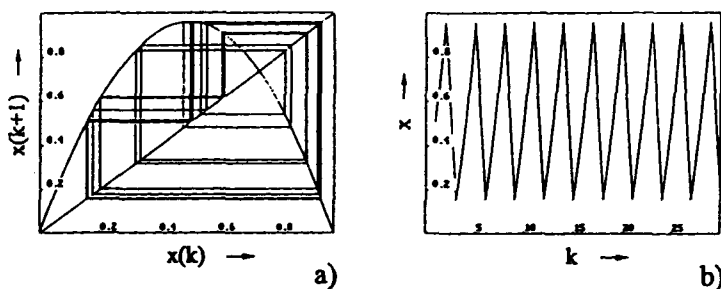
Po przeprowadzeniu prostych obliczeń widać, że

$$\left| \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_*^{(1)}} \right| = p,$$

$$\left| \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_*^{(2)}} \right| = 2 - p, \quad (1.45)$$

i pierwsze rozwiązanie jest stabilne, gd A teraz rozpatrzmy kilka przykładów numerycznych związanych z odwzorowaniem logistycznym. Na rys. 5 podano przykład "diagramu pajęczynowego" dla $r = 3.83$. Jak wynika z rozważań poprzednich, dla takiej wartości parametru obydwa punkty stałe odwzorowania są niestabilne. W układzie współrzędnych $x(k)$, $x(k+1)$ narysowano funkcję $f(x)$ oraz przekątną. Służą one do prostego wyznaczania kolejnych punktów odwzorowania po kolejnych iteracjach. Jak widać z tego rysunku, dla warunku początkowego $x(0) = 0.3$ trajektoria odwzorowania dąży do orbity okresowej $|p| < 1$, natomiast drugie, gdy $|2 - p| < 1$.

Jeśli rozpatrzmy odwzorowanie opisane funkcją $x(k+3) = f^3(x(k))$, a na osi pionowej weźmiemy punkt odpowiadający co trzeciej iteracji, czyli $x(k+3)$, to otrzymamy wykres pajęczynowy przedstawiony na rysunku 6. Jak widać z tego rysunku, w zależności od warunków początkowych trajektorie są przyciągane przez jeden z trzech punktów, w których krzywa $f(x)$ jest styczna do przekątnej ramki rysunku.

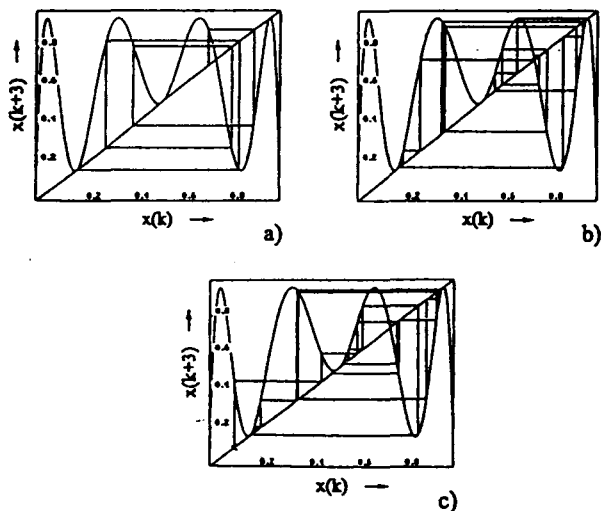


Rys.5 Wykres pajęczynowy dla odwzorowania logistycznego i dla $p = 3.83$ (a) oraz przebieg okresowy (b) odpowiadający zamkniętej krzywej z rys (a).

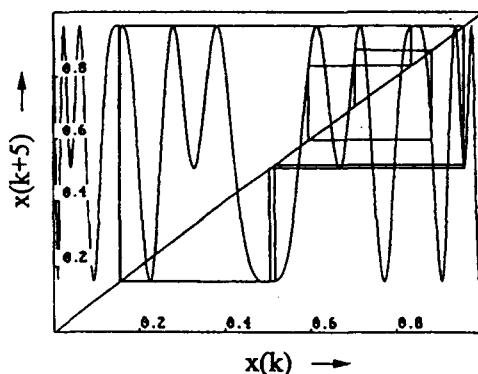
Dla co piątej iteracji $x(k+5) = f^5(x(k))$ wykres krzywej $f(x)$ jest bardziej skomplikowany (rys.7). Trajektoria stosunkowo szybko osiąga stabilną orbitę okresową.

Prześledźmy teraz zachowanie się tego odwzorowania przy zmianach parametru $p \in [2,4]$. Zgodnie z wcześniejszymi rozwiązaniami punkt stały odwzorowania równy zero jest niestabilny w zakresie rozpatrywanych zmian parametru. Drugi punkt stały jest stabilny, gdy $p \in [2,3]$. W punkcie $p = 3$ następuje bifurkacja podwojenia okresu. Poprzedni punkt stabilny staje się teraz niestabilny.

Natomiast pojawia się nowe stabilne rozwiązanie o okresie 4. Przy zmianie parametru znowu traci ono stabilność, a pojawia się orbita o okresie $2^3 = 8$, itd., aż do orbit o okresie 2^k . Przy $k \rightarrow \infty$ parametr r osiąga wartość graniczną równą $p_g = 3.5699$. Okazuje się, że w obszarze $p \in [r_g, 4]$ podobną kaskadę bifurkacji można zaobserwować dla orbit o okresie 3 i 4, tzn. 3^k i



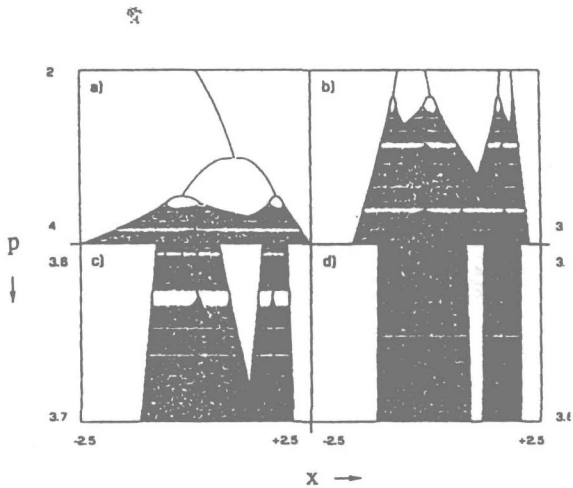
Rys. 6. Wykres pajęczynowy dla odwzorowania logistycznego i dla $r = 3.83$ w układzie współrzędnych $x(k)$ i $x(k+3)$ dla różnych warunków początkowych: (a) $x(0)=0.7$; (b) $x(0)=0.35$; (c) $x(0)=0.1$



Rys.7 Wykres pajęczynowy dla odwzorowania logistycznego i co piątą iteracją

4^k , gdzie $k = 1, 2, 3, \dots$ Są to tzw. okna okresowości, które odpowiadają szczególnym przedziałom parametru p . A zatem dla pewnych nigdzie gęstych podzbiorów parametru p mającego dodatnią miarę obserwuje się chaos.

Na rys. 8 przedstawiono tzw. wykres bifurkacyjny, przy czym kolejne rysunki powstały w wyniku powiększenia poprzedniego dla pewnego przedziału parametru p . Widać wyraźnie kaskadę bifurkacji podwajanie okresu, ruchy chaotyczne i okna okresowości.



Rys.8 Wykres bifurkacyjny odwzorowania logistycznego dla różnych przedziałów zmian parametru kontrolnego p : (a) $p = [2,4]$; (b) $p \in [3.5,3.8]$; (c) $p \in [3.6,3.7]$; (d) $p \in [3.56,3.66]$

W celu prześledzenia procesu dynamiki chaotycznej odwzorowania na rys. 9 przedstawiono odwzorowanie logistyczne dla $p = 3.7$.

Wykonano około 4 milionów iteracji i jak widać z rysunku atraktor chaotyczny jest częścią odcinka $[0,1]$ i jest wyznaczonym przez rzut na oś poziomą części paraboli zaznaczonej linią grubą. Kolejne punkty otrzymane na drodze iteracji układają się wzdłuż tego odcinka w sposób zupełnie nieprzewidywalny (chaotyczny).

Funkcje autokorelacji $A(l)$ określona jest wzorem (1.29) dla $p = 4$. Zgodnie z (1.28) otrzymujemy dla prawie wszystkich warunków początkowych

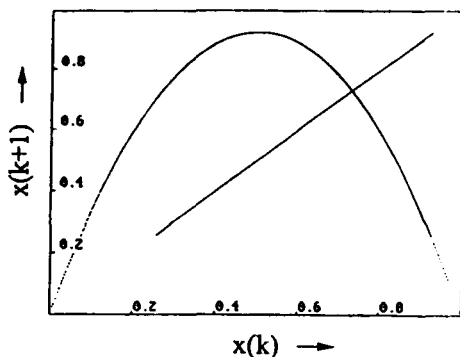
$$\langle x_k \rangle = \frac{1}{2}, \tag{1.46}$$

to

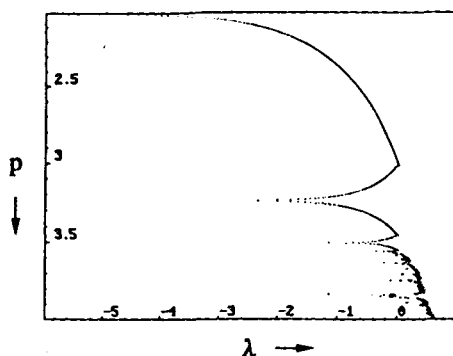
$$A(l) = \begin{cases} 1/8 & \text{dla } l = 0, \\ 0 & \text{dla } l \neq 0 \end{cases} \quad (1.47)$$

Ponieważ rozwiązanie analityczne odwzorowania logistycznego jest ważne dla $p = 4$ (patrz 1.41), to wykładnik Lapunowa dla $r = 4$ wynosi

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |f'(x(i))| = \log 2. \quad (1.48)$$



Rys.9 Chaotyczne odwzorowanie logistyczne dla $p=3.7$ dla prawie wszystkich warunków początkowych.



Rys.10 Zmiany wykładnika λ towarzyszące zmianom parametru p w przedziale $[2,4]$

Dla tego parametru wartość wykładnika obliczona numerycznie wynosi $\lambda_n = 0.693144$ dla 206000 iteracji, co w stosunku do wartości dokładnej stanowi

błąd $\delta = |\lambda - \lambda_n| = 0.00000318$. Wartości wykładników Lapunowa dla $r \in [2,4]$ przedstawiono na rys. 10.

Analityczna postać rozwiązania dla $p = 4$ (warto zauważyć, że dla tej wartości parametru liczba $1/2$ odwzorowuje się w 1, natomiast w następnej iteracji 1 przechodzi w zero) pozwala poprzez transformację

$$y = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, \quad (1.49)$$

sprowadzić odwzorowanie logistyczne do odwzorowania Bernoulliego (1.33).

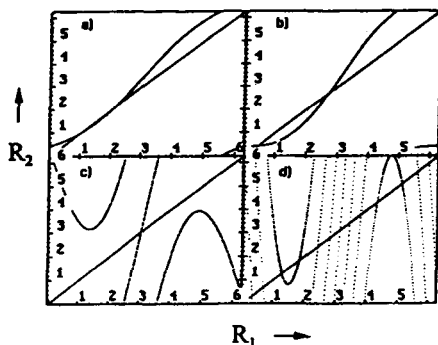
1.1.11. Odwzorowanie okręgu w okrąg

Jest to kolejne odwzorowanie jednowymiarowe, które będziemy analizować.

Odwzorowanie okręgu w okrąg opisane jest równaniem

$$\phi(k+1) = F(\phi(k)) \equiv \phi(k) + R_1 + R_2 \sin \phi(k) \bmod 2\pi. \quad (1.50)$$

Odwzorowanie to zależy od dwóch parametrów R_1 i R_2 i może reprezentować transformację fazy oscylatora nieliniowego, przy czym parametr R_1 opisuje stosunek dwóch częstości, natomiast R_2 jest współczynnikiem wzmocnienia oddziaływania nieliniowego [28,29]. To proste odwzorowanie wykazuje wiele interesujących cech nieliniowej dynamiki, a mianowicie dynamikę okresową, quasi-okresową i chaotyczną.



Rys.11 Odwzorowanie (1.50) w skali $[0,2\pi]$ dla $R_1 = 0.4$ i różnych wartości R_2 : (a) – 0.5; (b) –1; (c) –5; (d) –20

Warto zwrócić uwagę na pewne podstawowe własności odwzorowania (1.50) [18]:

A. Funkcja F posiada własność

$$F(\phi + 2\pi) = \phi + 2\pi + R_1 + R_2 \sin \phi = 2\pi + F(\phi). \quad (1.51)$$

B. Dla $|R_2| < 1$ odwzorowanie $F(\phi)$ istnieje i jest różniczkowalne (jest dyfeomorfizmem).

C. Dla $R_2 = -1$ odwzorowanie odwrotne F^{-1} staje się nieróżniczkowalne, natomiast dla $|R_2| > 1$ jest ono niejednoznaczne.

Na rys. 11 dla ustalonej wartości $R_1 = 0.4$ przedstawiono wykres odwzorowania $F(\phi)$ dla różnych wartości R_2 , który potwierdza wymienione wcześniej własności odwzorowania. Liczbę charakteryzującą średnie przesunięcie o kąt ϕ na każdą iterację określamy ze wzoru

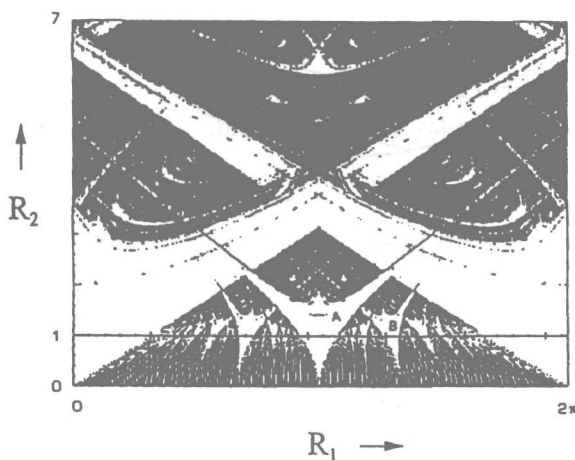
$$w = 2\pi w^* = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F^N(\phi_0) - \phi_0}{N}. \quad (1.52)$$

Średni okres przesunięcia definiujemy jako $T_w = 2\pi/w$, gdzie w jest częstością kołową rotacji (winding number). Natomiast częstotliwość rotacji $w^* = w/2\pi$. Związki te są analogiczne do pojęcia częstości kołowej orbity okresowej nie leżącej na torusie, oraz częstotliwości. Okazuje się [28,29], że dla $|R_2| < 1$ granica określone wzorem (1.52) zawsze istnieje, ale może być przedstawiona liczbą wymierną lub niewymierną. Jeśli jest to liczba wymierna, to obszar parametrów R_1, R_2 dla których, $\omega = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$ w odniesieniu do odwzorowania (1.50) nazywamy językami Arnolda.

Przykłady takich języków przedstawiono na rys. 12.

Dla $R_2 < 1$ widoczne są języki Arnolda (obszary białe), gdzie $w = p/q$ jest liczbą wymierną, co odpowiada dynamice okresowej. Zbiorem parametrów nie należących do języków Arnolda odpowiada dynamika quasi-okresowa. Dla $R_2 > 1$, w odróżnieniu od przypadku poprzedniego, granice języków Arnolda zaczynają się przecinać, a

odwzorowanie (1.51) staje się nieodwracalne. W obszarze tym obserwowalna jest również dynamika chaotyczna (odpowiada ona zbiorom parametrów i obszarów czarnych)



Rys. 12 Przykłady języków Arnoldda dla $R_2 \in [0, 7]$ i $R_1 \in [0, 2\pi]$. Poniżej linii $R_2 = 1$ ruch jest regularny okresowy lub quasi-okresowy (okresowość występuje w obszarze języków Arnoldda - obszarów jasnych), a powyżej tej linii ruch może być chaotyczny i może "współistnieć" z ruchem regularnym

Rozpatrzmy bliżej dwa układy obszarów A i B z rys. 12 dla $R_2 = 0.8$. Pierwszy z nich odpowiada orbicie 2-okresowej, a drugi 3-okresowej. Oznacza to, że dla ustalonego R_2 mamy taką sytuację, że ze wzrostem q (jeśli w tych obszarach $w = p/q$) szerokość języka Arnoldda zmniejsza się.

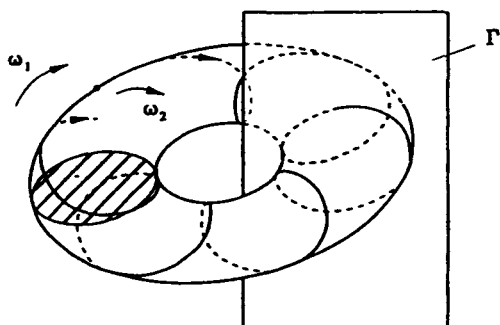
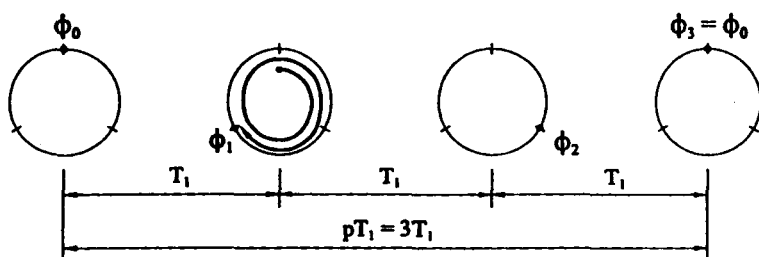
Rozpatrzmy obecnie bardziej szczegółowo dynamikę trajektorii leżącej na torusie dwuwymiarowym (rys. 13) i opisaną równaniem (1.51).

Niech na przykład

$$w = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q} = \frac{3}{5}, \quad (1.53)$$

gdzie ω_1 i ω_2 są częstościami zaznaczonymi na rys. 13.

Rozpatrzmy wędrówkę punktu poczynając od płaszczyzny Γ . Punkt ten znowu przebije tę płaszczyznę po czasie $T_1 = 2\pi/\omega_1$.

Rys.13 Mapa Poincaré - przekrój torusa płaszczyzną Γ Rys.14 Ruch punktu w płaszczyźnie Γ obserwowany co okres T_1 . Pomiedzy kolejnymi położeniami punkt wykonuje $5/3$ obrotu, czyli w czasie $3T_1$ punkt wykona 5 obrotów a potem ruch zacznie się powtarzać

Na rysunku 14 przedstawiono kolejne "zdjęcia" stroboskopowe odległe od siebie o czas T_1 .

Rozpatrzmy odwzorowanie

$$\phi_{n+1} = \phi_n + w \cdot 2\pi. \quad (1.54)$$

Dla $w = \frac{3}{5}$ otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_0 + \frac{3}{5} 2\pi, \\ \phi_2 &= \phi_1 + \frac{3}{5} 2\pi = \phi_0 + 2 \cdot \frac{3}{5} 2\pi, \\ &\vdots \\ \phi_5 &= \phi_0 + 3 \cdot 2\pi, \end{aligned} \quad (1.55)$$

co oznacza $\phi_5 = \phi_0 \bmod 2\pi$, a w ogólnym przypadku

$$\phi_q = \phi_0 + p \cdot 2\pi. \quad (1.56)$$

Dla N -obrotów (patrz rys. 14) dochodzimy do definicji częstości kołowej rotacji określonej poprzez (1.52).

Jeśli punkt ϕ_i^* należy do orbity q -okresowej, generowanej przez odwzorowanie (1.50) to zgodnie z (1.56) mamy

$$F_{R_1, R_2}^q(\phi_i^*) = \phi_i^* + 2\pi p \equiv \phi_i^* \pmod{2\pi}, \quad (1.57)$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, q$ oraz F_{R_1, R_2} oznacza, że ta funkcja zależy od parametrów R_1 i R_2 .

Oznacza to również, że startując z punktu ϕ_i^* wracamy do niego poprzez q iteracji, lub po przesunięciu o kąt $2\pi p$. Przy tej okazji warto powrócić do interpretacji związanej z rys. 14. W tym samym punkcie odwzorowania znajdziemy się po q obrotach (z częstością ω_2) lub po przesunięciu o kąt $2\pi p$. Zgodnie z (1.51) mamy

$$F(\phi_i^*) = \phi_i^* + R_1 + R_2 \sin \phi_i^*, \quad (1.58)$$

i obliczamy

$$\frac{dF(\phi_i^*)}{d\phi_i^*} = 1 + R_2 \cos \phi_i^*. \quad (1.59)$$

Cała orbita złożona z punktów ϕ_i^* , $i = 1, 2, \dots, q$ będzie stabilna, jeśli każdy z punktów ϕ_i^* będzie stabilny, czyli:

$$\prod_{i=1}^q |1 + R_2 \cos \phi_i^*| < 1. \quad (1.60)$$

Rozpatrzmy najprostszy przypadek, gdy $w = 1$, czyli $p = q = 1$. Zgodnie z (1.58) otrzymujemy

$$\phi_0^* = \phi_0^* + R_1 + R_2 \sin \phi_0^* \quad (1.61)$$

i

$$R_1 = -R_2 \sin \phi_0^*. \quad (1.62)$$

Natomiast z warunku (1.60) mamy

$$|1 + R_2 \cos \phi_0^*| < 1. \quad (1.63)$$

Dla $R_2 < 1$ granice utraty stateczności są osiągnięte, gdy

$$R_2 \cos \phi_0^* = 0, \quad (1.64)$$

czyli dla $\phi_0^* = \pm(\pi/2)$. Wobec tego zgodnie z (1.62) mamy, że szerokość pierwszego języka Arnolda wynosi

$$R_1 = -R_2 \sin \phi_0^* = \pm R_2, \quad (1.65)$$

co potwierdza obserwacja obszaru w okolicach 0 i 2π na rys. 14.

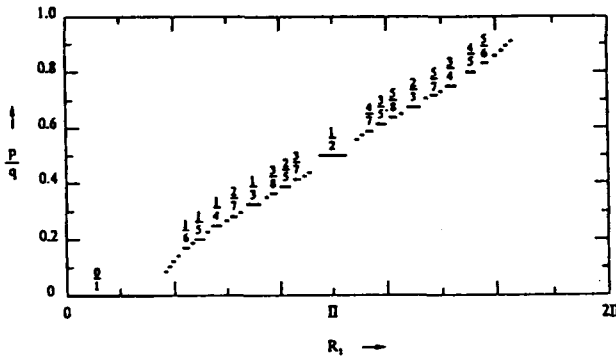
1.1.12. Diabelskie schody, drzewo Fareya i liczby Fibonacciego

W pracach [30-32] poddano podobnej analizie rozważane wcześniej odwzorowanie okręgu w okrąg dla różnych wartości liczby rotacji $w = p/q$ i dla $R_2 < 1$. Okazało się, że każdej wymiernej wartości w i dla każdego R_2 z rozważanego przedziału q -okresowa orbita jest stabilna w pewnym przedziale parametru $\Delta R_1(w, R_2)$. Natomiast dla $|R_2| = 1$ okazało się, że suma tych wszystkich przedziałów dla wszystkich wymiernych liczb w wynosi 2π , co pokazano na rys.15 i wykres ten nazwano diabelskimi schodami.

W strukturze z rys. 15 dają się zauważyć inne charakterystyczne cechy: (a) długość przedziałów odpowiadających danym wartościom p/q zwiększa się z maleniem q ; (b) jeśli weźmiemy dwie liczby $w_1 = p_1/q_1$ i $w_2 = p_2/q_2$, to między nimi znajduje się liczba wymierna $w = (p_1 + p_2)/(q_1 + q_2)$. Na przykład biorąc $w_1 = \frac{1}{3}$ i $w_2 = \frac{2}{5}$



otrzymujemy $w = \frac{3}{8}$ i jest to liczba, której odpowiada długość przedziału z rys. 15 pomiędzy w_1 i w_2 , a jednocześnie jest liczbą wymierną o najmniejszym mianowniku leżącą między w_1 i w_2 . Konstrukcja ta umożliwia utworzenie tzw. drzewa Fareya, co pokazano na rys. 16.

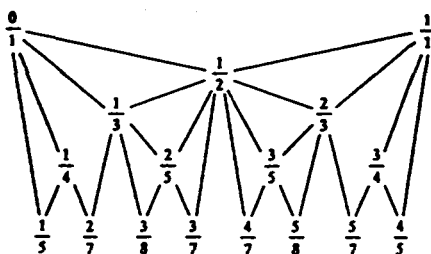


Rys.15 Struktura odwzorowania okręgu w okrąg dla $R_2 = -1$ (tzw. diabelskie schody)

Interpretacja fizyczna rezultatów z rysunku 15 jest następująca: pojawia się taka synchronizacja układu, że zmiany parametru R_1 (a w układzie rzeczywistym częstości ω_1 i ω_2) w pewnym zakresie nie prowadzą do zmian wielkości p i q , a tym samym do zmian częstości (okresu) orbity okresowej. Parametrom odpowiadającym miejscom ciemnym z rys. 12 dla $R_2 < 1$ odpowiada quasi-okresowa. Obecnie przedyskutujemy możliwość aproksymacji dynamiki quasi-okresowej poprzez dynamikę okresową, co związane jest z możliwością aproksymacji liczb niewymiernych przez ciąg liczb wymiernych [33]. Ogólnie rzecz biorąc dowolna liczba rzeczywista "a" może być reprezentowana przez ułamek łańcuchowy $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ o postaci

$$a = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}}, \quad (1.66)$$

przy czym liczby a_i należą do zbioru liczb naturalnych.



Rys.16 Drzewo Fareya umożliwiające wprowadzenie uporządkowania pomiędzy liczbami z przedziału $[0,1]$

Dla liczb będących wymiernymi ułamek łańcuchowy jest skończony, a dla liczb niewymiernych jest on nieskończony. W praktyce pojawienie się dużej liczby a_i w (1.66) oznacza szybką zbieżność ułamka do tej liczby. Najwolniejszą zbieżnością ułamka charakteryzuje się liczba $w = (\sqrt{5} - 1)/2$, która jest liczbą odpowiadającą złotemu podziałowi. Odpowiada ona podziałowi odcinka o długości L na dwie części ℓ i $L - \ell$ w taki sposób, że $w = \ell/L = (L - \ell)/\ell$. Liczba ta odgrywa ważną rolę w dynamice chaotycznej i teorii fraktali, a jej ułamek łańcuchowy jest nieskończonym zbiorem składającym się z samych jedynek za wyjątkiem $a_0 = 1$.

Dla $0 < w < 1$ liczba "w" może być przybliżona ułamkiem łańcuchowym

$$w \cong \frac{r_k}{s_k} = [a_1, a_2, \dots, a_k], \quad (1.67)$$

przy czym r_k i s_k są liczbami naturalnymi obliczanymi kolejno ze wzorów

$$r_k = a_k r_{k-1} + r_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (1.68)$$

$$s_k = a_k s_{k-1} + s_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (1.69)$$

gdzie: $r_1 = 1$, $r_0 = 0$, $s_0 = 1$, $s_1 = a_1$.

Rozpatrzmy to na przykładzie liczby $1/\sqrt{2}$, dla której $w \cong 0.7071068\dots$ Kolejno obliczamy $a_1 = \text{INT}(1/w) = \text{INT}(1.4142\dots) = 1$ (bierzemy tu część całkowitą z tak otrzymanej liczby). Następnie obliczamy

$$a_2 = \text{INT} \left[\frac{w}{1 - wa_1} \right] = \text{INT}(2.414215365) = 2, \quad (1.70)$$

a następnie a_3 jako

$$a_3 = \text{INT} \left[\frac{1 - wa_1}{w(1 + a_1 a_2) - a_2} \right] = \text{INT}(2.414211) = 2, \quad (1.71)$$

$$a_4 = \text{INT} \left[\frac{w(1 + a_1 a_2) - a_2}{1 + a_2 a_3 - w[a_1(1 + a_2 a_3) + a_3]} \right] = \text{INT}(2.414213489) = 2 \quad (1.72)$$

i możemy kontynuować ten proces obliczeń dalej.

Korzystając ze wzorów (1.68) i (1.69) otrzymujemy $r_2 = 2$, $s_2 = 3$, $r_3 = 5$, $s_3 = 7$; ..., $r_6 = 29$; $s_6 = 41$; $r_7 = 70$; $s_7 = 99$. Kończąc obliczenia na siódmym wyrazie widać, że $1/\sqrt{2}$ może być aproksymowane wielkością

$$w \cong \frac{r_7}{s_7} = 0.707070707, \quad (1.73)$$

co daje błąd równy w przybliżeniu 0.000036. W ogólnym przypadku prawdziwa jest nierówność

$$\left| w - \frac{r_k}{s_k} \right| \leq \frac{1}{s_k s_{k-1}}. \quad (1.74)$$

Dla przypadku złotego podziału mamy $a_k = 1$

$$r_k = r_{k-1} + r_{k-2}, \quad (1.75)$$

$$s_k = s_{k-1} + s_{k-2}, \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (1.76)$$

gdzie: $r_1 = 1$, $r_0 = 0$, $s_0 = 1$, $s_1 = 1$. Obliczamy kolejno

$$r_2 = r_1 = 1; \quad r_3 = r_2 + r_1 = 2; \quad r_4 = r_3 + r_2 = 3; \quad r_5 = 5; \dots$$

$$s_2 = 2; \quad s_3 = s_2 + s_1 = 3; \quad s_4 = s_3 + s_2 = 5; \quad s_5 = 8 \dots \quad (1.77)$$

i otrzymane rezultaty mogą być uogólnione jako

$$r_k = r_{k-1} + r_{k-2}, \quad (1.78)$$

$$s_k = r_{k+1} = r_k + r_{k-1}. \quad (1.79)$$

Kolejne wyrazy ciągu liczb aproksymujących w_* definiujemy jako

$$w_k = \frac{r_k}{s_k} = \frac{r_k}{r_{k+1}} = \frac{r_k}{r_k + r_{k-1}} = \frac{1}{1 + \frac{r_{k-1}}{r_k}}, \quad (1.80)$$

które są zbieżne do wartości

$$w_* = \lim_{k \rightarrow \infty} w_k, \quad (1.81)$$

przy czym ciągi (1.68) i (1.69) są ciągami Fibonacciego. Zgodnie z (1.80) i (1.81) otrzymujemy równanie

$$w_* = \frac{1}{1 + w_*}, \quad (1.82)$$

którego jednym z pierwiastków jest właśnie $(\sqrt{5} - 1)/2$.

1.1.13. Znaczenie odwzorowań jednowymiarowych

W ogromnej większości przypadków dynamika układów fizycznych opisana jest równaniami różniczkowymi cząstkowymi lub zwyczajnymi. Te pierwsze często zastępuje się (poprzez różne metody redukcji) do układu równań różniczkowych zwyczajnych. Następnym etapem prowadzącym do dalszej redukcji zagadnienia jest zastąpienie równań różniczkowych poprzez odwzorowania. Opisana metoda postępowania polega na stosowaniu metod analitycznych.

Inna niezależna metoda badań polega na analizie dynamiki różnego rodzaju



najprostszych odwzorowań, w tym wypadku jednowymiarowych, i w szczególności na próbie możliwie najgłębszego zrozumienia dynamiki chaotycznej w oparciu o takie odwzorowania.

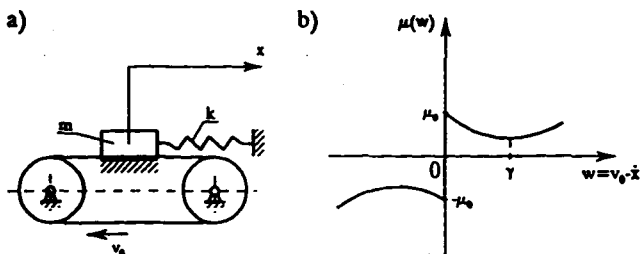
Jeśli dysponujemy w szerokim zakresie wiedzą dotyczącą dynamiki odwzorowań jednowymiarowych, to wówczas dynamika (nawet złożonych) układów opisanych równaniami różniczkowymi może być czasami zrozumiana poprzez odwzorowania jednowymiarowe.

Metody analityczne natrafiają na wiele ograniczeń przy analizie dynamiki nieliniowej, wobec tego w większości przypadków dokonuje się analizy numerycznej. W praktyce oznacza to zastąpienie dynamiki ciągłej (zmienna niezależna czyli czas w równaniach występuje jako ciągły) przez dynamikę dyskretną (przy metodach numerycznych wartości czasu są wartościami dyskretnymi). Okazuje się, że istnieją głębokie powiązania pomiędzy "dynamiką ciągłą" i "dynamiką dyskretną". Przy analizie numerycznej wykorzystuje się metodę odwzorowań Poincaré. Związki łączące punkty otrzymane na płaszczyźnie Poincaré opisane są przez równania różnicowe. Dzięki wprowadzeniu takiego odwzorowania nie tylko obniżono wymiarowość dynamiki, ale ponadto w przypadku analizy dynamiki chaotycznej wprowadzenie płaszczyzny Poincaré'go pozwoliło na eliminację ruchów okresowych do punktów, co w efekcie pozwala na skoncentrowanie uwagi tylko na dynamice chaotycznej. Dalszym rozszerzeniem metody dyskretyzacji jest dyskretyzacja stanów, np. poprzez przyporządkowanie liczbom tylko dwóch wartości: zer lub jedynek (patrz paragraf 1.9)

Często przy analizie odwzorowań dwuwymiarowych istnieje również możliwość ich redukcji, a mianowicie wtedy, gdy takie odwzorowanie w jednym kierunku jest silnie rozciągające, a w drugim silnie ściskające. W tym przypadku może się zdarzyć, że punkty ułożą się wzdłuż jednej lub dwóch linii, i można rozpatrywać odwzorowanie jednowymiarowe jednej linii w drugą.

Teraz rozpatrzmy przykłady dynamiki prostych układów fizycznych sprowadzalnych do analizy odwzorowań jednowymiarowych. W układach nieliniowych

z tarcie istnieje możliwość pojawienia się drgań samowzbudnych. Na rys. 17 przedstawiono taki klasyczny przypadek.



Rys.17 Układ mechaniczny o jednym stopniu swobody: klocek leżący na pasie poruszającym się z prędkością v_0 (a) i charakterystyka współczynnika tarcia (b)

Ciało o masie m (klocek) znajduje się na taśmie o współczynniku tarcia zależnym od prędkości względnej ciała i taśmy z charakterystyką przedstawioną na rys. 17b). Okazuje się, że w zakresie prędkości względnych $0 < w < \gamma$ położenie równowagi klocka staje się niestabilne. Pojawiają się drgania, które zaczynają narastać osiągając cykl graniczny (orbitę okresową). Równanie ruchu układu ma postać.

$$m\ddot{x} + kx = mg[\mu_0 - \alpha w + \beta w^3], \quad (1.83)$$

gdzie po prawej stronie występują siły tarcia opisane analitycznie (patrz rys. 17b). Rozważania powyższe wskazują na istnienie tzw. „tłumienia ujemnego” - odpowiada to takim wartościom prędkości $\dot{x}$, dla których $0 < v_0 - \dot{x} < \gamma$. Załóżmy teraz, że dla $x=0$ następuje uderzenie, gwałtowna zmiana prędkości ruchu w momencie, gdy $\dot{x} \geq a$ i ponadto będziemy zakładać, że dynamika związana jest z opadającą częścią charakterystyki współczynnika tarcia [34]. Wówczas dynamika rozpatrywanego układu może być przybliżona równaniem

$$\ddot{x} - 2h\dot{x} + \alpha^2 x = 0, \quad (1.84)$$

$$\dot{x}_+ - \dot{x}_- = -b, \quad (1.85)$$

gdzie $\dot{x}_+$ i $\dot{x}_-$ oznacza odpowiednio prędkość po i przed uderzeniem o amplitudzie b , $\beta = 0$, $\alpha^2 = k/m$, $2h = g$ a drgania mierzone są od położenia równowagi statycznej $mgk^{-1} = (\mu_0 - v_0)$. Dynamika opisana równaniami (1.84) i (1.85) może być przedstawiona za pomocą odwzorowania

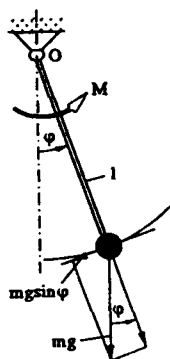
$$\bar{y} = qy + \begin{cases} 0, & \text{dla } 0 \leq y < \frac{a}{q}, \\ -b, & \text{dla } y \geq \frac{a}{q}, \end{cases} \quad (1.86)$$

gdzie:

$$\bar{y} = \dot{x}, \quad y = \dot{x} \geq 0, \quad q = e^{2h\sqrt{\alpha^2 - h}} > 1. \quad (1.87)$$

Porównując odwzorowanie (1.86) z (1.40) widać, że jest ono logistyczne. Ponadto położenie $y_* = b/(q-1) > a$ jest niestabilnym punktem stałym tego odwzorowania. Dla $y < y_*$ pojawiają się drgania chaotyczne w przedziale zmian $a - b \leq y \leq a$. Powyższy przykład związany był z metodą analityczną, natomiast drugi przykład podany niżej nawiązuje do metod numerycznych.

Rozpatrzmy ruch wahadła o długości ℓ , masie m i masowym momencie bezwładności B (rys. 18).



Rys. 18. Ruch płaski wahadła poddanego działaniu momentu pary sił
 $M = M_0 + M_1 \cos \omega t$

Równanie ruchu ma postać:

$$B\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} + mg\ell\sin\varphi = M_0 + M_1\cos\omega t, \quad (1.88)$$

gdzie c jest zastępczym współczynnikiem tłumienia wiskotycznego otoczenia.

Zakładając $mg\ell = B$, równanie to może być sprowadzone do postaci

$$\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} + \sin\varphi = M_1 + M_2\cos\omega t, \quad (1.89)$$

gdzie

$$h = \frac{c}{B}, \quad M_1 = \frac{M_0}{B}, \quad M_2 = \frac{M_1}{B}. \quad (1.90)$$

Dokonyamy aproksymacji

$$\dot{\varphi} = \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}, \quad (1.91)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}}{(t_{n+1} - t_n)(t_n - t_{n-1})}. \quad (1.92)$$

Po uwzględnieniu (1.91) i (1.92) równanie (1.89) przyjmie postać (patrz [18])

$$\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1} + hT(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + T^2 \sin\varphi_n = T^2(M_1 + M_2), \quad (1.93)$$

przy czym: $t_n = T_n = \frac{2\pi}{\omega} n$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Po wprowadzeniu wielkości

$$R_1 = \frac{T(M_1 + M_2)}{h},$$

$$hT = 1 - b,$$

$$R_2 = T^2,$$

$$(1.94)$$

z (1.93) otrzymujemy

$$\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1} + (1-b)(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + R_2 \sin \varphi_n = (1-b)R_1. \quad (1.95)$$

Po wprowadzeniu nowych wielkości równanie (1.95) może być przedstawione w postaci równoważnej

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= br_n - R_2 \sin \varphi_n, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + R_1 - R_2 \sin \varphi_n + br_n, \end{aligned} \quad (1.96)$$

gdzie:

$$r_n = \varphi_n - \varphi_{n-1} - R_1. \quad (1.97)$$

Mamy tu ciągle do czynienia z dwuwymiarowym odwzorowaniem, ale dla bardzo dużego tłumienia i takiego, że $hT = 1$ otrzymujemy odwzorowanie jednowymiarowe okręgu w okrąg opisane przez (1.50).

Na koniec warto podkreślić, że istnieją i coraz bardziej są popularne układy elektroniczne, konstrukcja których oparta jest na zasadzie działania odwzorowań jednowymiarowych, a które służą do wytworzenia sygnałów chaotycznych do określonych potrzeb aplikacyjnych [35].

1.1.14. Odwzorowania dwuwymiarowe

Z takim odwzorowaniem spotkaliśmy się już w rozdziale poprzednim - podczas analizy ruchu płaskiego wahadła poddanego działaniu zmiennego w czasie momentu.

Innym ważnym dwuwymiarowym odwzorowaniem, któremu poświęcimy więcej uwagi jest odwzorowanie Hénona [36], które może być traktowane jako rozszerzenie omawianego wcześniej odwzorowania logistycznego. Opisane jest ono równaniem

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= r - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} &= bx_n, \end{aligned} \quad (1.98)$$

lub

$$(x, y) \rightarrow (r - ax^2 + y, bx), \quad (1.99)$$

gdzie a , b i r spełniają rolę parametrów bifurkacyjnych. Jakobian odwzorowania (1.98) wynosi

$$\det \begin{vmatrix} -2ax_n & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b, \quad (1.100)$$

i wobec tego dla $|b| < 1$ układ jest dysypatywny. Okazuje się, że dla $0 < b < 1$, $r = 1$ i $a > 0$ odwzorowanie posiada dwa punkty stałe określone poprzez równania

$$x_{1,2} = \frac{-(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, \quad y_{1,2} = -bx_{1,2}. \quad (1.101)$$

Te dwa punkty są rzeczywiste, jeśli $a > (1-b)^2/4$, przy czym jeden z nich jest zawsze niestabilny, a drugi jest niestabilny gdy $a > 0.75(1-b)^2$. Na bazie tego odwzorowania rozpatrzmy bardzo wiele interesujących elementów nieliniowej dynamiki.

1. Niech $r = 2.1$, $a = 1$, $b = -0.3$. Na rys. 19 na płaszczyźnie (x, y) przedstawiono dziwny atraktor chaotyczny Hénona. Ponadto na kolejnych rysunkach od "a" do "d" krzyżykami oznaczono orbity okresowe odpowiednio o okresach 1, 2, 5 i 10.

Metoda poszukiwania takich orbit polega na zastosowaniu metody Newtona lub jej wariantów [37–40].

Jeśli x_* jest punktem stałym odwzorowania $F(x, p)$ zależnego od parametru p , to spełnione jest równanie:

$$x_* = F(x_*, p). \quad (1.102)$$

Niech punkt x będzie leżał w pobliżu punktu x_* . Wprowadźmy macierz N

$$N = D_x F(x, p), \quad (1.103)$$

której elementami są pochodne cząstkowe względem punktu x . Dokonując linearyzacji wokół punktu x otrzymujemy

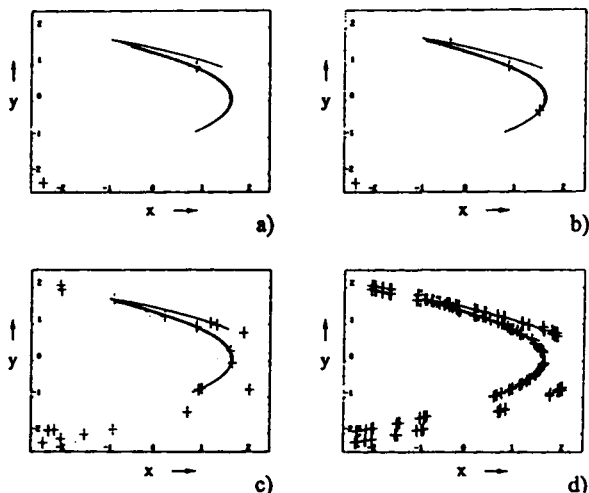


$$F(x,p) + Ndx = x + dx, \quad (1.104)$$

skąd znajdujemy

$$dx = (N-I)^{-1}(x-F(x,p)), \quad (1.105)$$

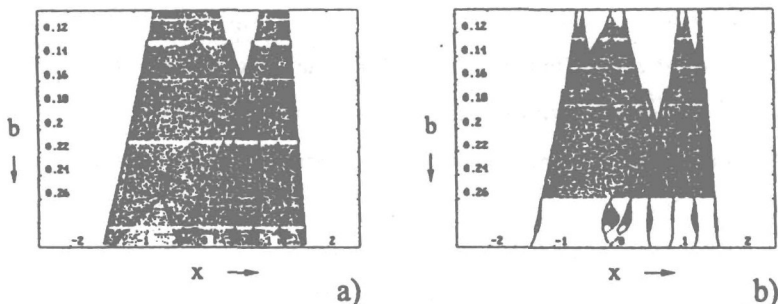
i powyżej I jest macierzą jednostkową. Wyrażenie $x - F(x,p) = E$ oznacza błąd obliczeń, który dla $x = x_*$ jest zerem (jest to wartość dokładna). Okazuje się że metoda Newtona nie zawsze umożliwia zmniejszenie błędu w następnym kroku obliczeń. Zmodyfikowana metoda Newtona pozwala na wybranie takiego przyrostu dx , że jej zbieżność jest zachowana.



Rys.19. Dziwny atraktor chaotyczny Hénona i punkty okresowe odwzorowania Hénona (zaznaczone krzyżykami) o okresach: (a) 1 ; (b) 1, 2 ; (c) 1, 2, 5 ; (d) 1, 2, 5, 10.

W przypadku orbit okresowych zaznaczonych krzyżykami na rys. 19 punkty startu dla zmodyfikowanej metody Newtona wybierane były w sposób losowy. Zostały znalezione 2 punkty o okresie 1 (a), 4 punkty o okresie 2 (b), 3 różne orbity o okresie 5 (c), oraz 15 różnych orbit o okresie 10. W tym ostatnim przypadku jako punkty startu dla zmodyfikowanej metody Newtona wybrano losowo 9031 punktów. Warto zauważyć, że wiele ze znalezionych orbit okresowych nie należy do atraktora chaotycznego.

2. Następny przykład wiąże się z wykresem bifurkacyjnym. Na osi pionowej odłożymy parametr b , natomiast na osi poziomej x . W rzeczywistości jest to rzut rodziny atraktorów zależny od parametru b na płaszczyznę (b, x) , $0.1 \leq b \leq 0.3$ (patrz rys. 20).

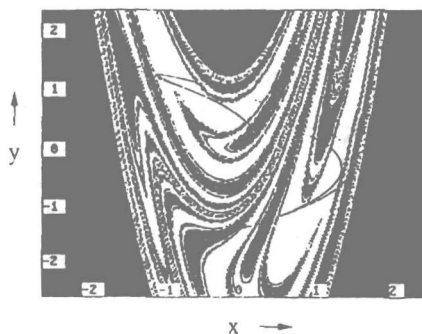


Rys. 20 Wykres bifurkacyjny dla odwzorowania Hénona i dla parametrów (a) $r=1.3$; (b) $r=1.25$

Dla $r = 1.3$ dynamika chaotyczna odwzorowania "przerywana" jest dla pewnych wartości b oknami okresowości (których jest nieskończenie wiele), natomiast ze zmniejszeniem r i dla $b \approx 0.26$ następuje bifurkacja i znika ruch chaotyczny, a pojawia się ruch okresowy. Następnie każda z "gałęzi" podwaja się prowadząc przy dalszym zmniejszaniu b do powstawania tzw. "pęcherzyków" ruchu chaotycznego (rys. 20b).

3. W oparciu o odwzorowanie Hénona omówimy pojęcie basenów przyciągania atraktorów. Basenem przyciągania atraktora nazywać będziemy taki zbiór wszystkich warunków początkowych w przestrzeni fazowej, które będą "przyciągane" przez ten atraktor, tzn. po "starciu" z każdego z takich warunków początkowych trajektorie po pewnym czasie znajdą się na atraktorze. Takie baseny przyciągania dla odwzorowania Hénona przedstawiono na rys. 21.

Dla zbioru parametrów jak na rysunku istnieją trzy różne atraktory. Jednym z nich jest ∞ (obszar czarny), stabilna orbita okresowa o okresie osiem (obszar o kolorze szarym) oraz dziwny atraktor chaotyczny, składający się na rysunku z dwóch części, który "przyciąga" warunki początkowe z obszaru białego.



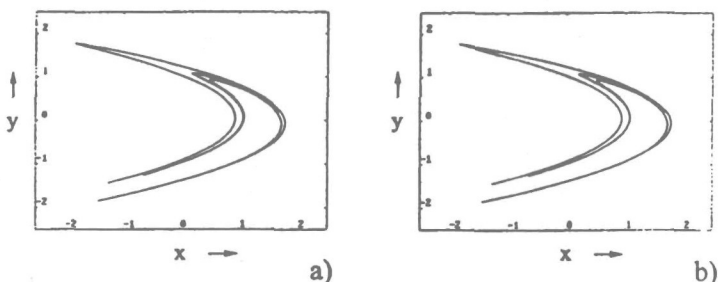
Rys. 21. Baseny przyciągania dla odwzorowania Hénona i dla $a = 1$, $r = 1$, $b = 0.48$

4. Teraz omówimy zagadkowe podobieństwo pomiędzy atraktorem Hénona i rozmaitością niestabilną punktu stałego leżącego w obrębie tego atraktora. Poprzez stabilną rozmaitość punktu stałego pewnego odwzorowania będziemy rozumieli zbiór punktów zmierzających do tego punktu przy liczbie iteracji dążących do nieskończoności określających odwzorowanie Hénona.

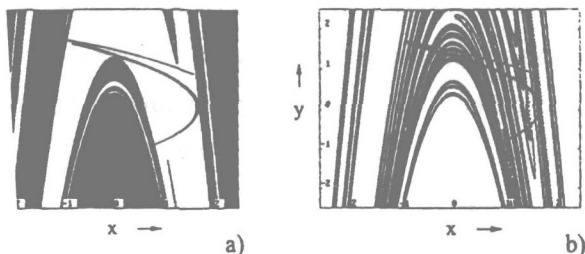
Natomiast przez pojęcie niestabilnej rozmaitości punktu stałego pewnego odwzorowania będziemy rozumieli taki zbiór punktów, które są przyciągane przez iteracje w odwrotnym kierunku (lub inaczej odpychane przy zastosowaniu tych pierwszych iteracji).

Na rys. 22a przedstawiono chaotyczny atraktor Hénona, natomiast na rys. 22b przedstawiono zbiór punktów przyciąganych przy odwrotnej iteracji przez niestabilny punkt stały o współrzędnych $(0.855, 0.898)$. Uderzające jest tutaj podobieństwo pomiędzy dwoma zbiorami. Uważa się, że te zbiory są jednakowe, ale nie zostało to udowodnione w sposób ścisły (patrz np. [41]).

5. Obecnie zwrócimy uwagę na podobieństwo pomiędzy basenem przyciągania przez atraktor Hénona i atraktor będący nieskończonością (∞) (będzie to zbiór punktów, które przy iteracjach dążących do nieskończoności "uciekają" w nieskończoność (rys. 23a)), a basenem przyciągania przez stabilny punkt stały leżący w obszarze atraktora Hénona (rys. 23b).



Rys. 22. Atraktor Hénona dla $a = 1$, $r = 1.38$ i $b = 0.32$ (a) oraz rozmaitość niestabilna punktu stałegoo współrzędnych $(x, y) = (0.855, 0.898)$ (b)

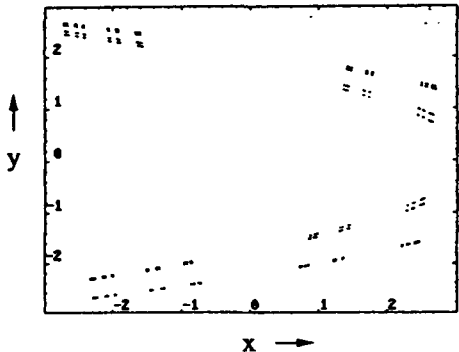


Rys. 23. Basen przyciągania przez nieskończoność (∞) oznaczony kolorem czarnym i basen przyciągania przez atraktor Hénona (a) oraz basen przyciągania przez punkt stały stabilny leżący w obszarze odwzorowania Hénona, który w przybliżeniu wynosi $(0.907, 0.966)$ (b). Na obu rysunkach a i b zaznaczony jest również atraktor Hénona

Obliczenia zostały wykonane przy przyjęciu parametrów: $a = 1$, $b = -0.32$, $r = 2.10$. Widać, że w przybliżeniu basen przyciągania stabilnego punktu na atraktorze Hénona mieści się w basenie przyciągania atraktora chaotycznego Hénona.

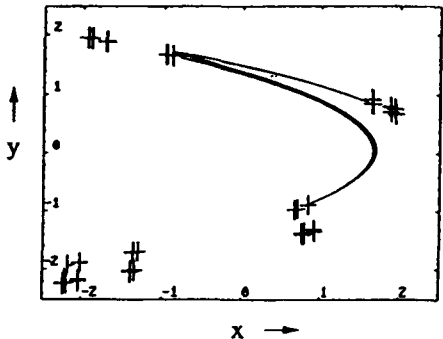
6. Istnieje również możliwość pojawienia się trajektorii chaotycznej znajdującej się w obszarze ograniczonym w przestrzeni fazowej, przy czym wszystkie inne trajektorie znajdujące się w jej okolicy "uciekają" do nieskończoności, czyli nie są ograniczone. Taki zbiór niezmienniczy nazywać będziemy siodłem chaotycznym odwzorowania Hénona. Ten zbiór niezmienniczy i zwarty będzie niestabilny, czyli prawie wszystkie trajektorie z jego otoczenia będą się oddalać, a w rozpatrywanym przypadku "uciekać" do nieskończoności.

Na rys. 24 pokazano przykład niestabilnego zbioru zwartego i niezmienniczego na którym leży trajektoria chaotyczna. Obliczenia wykonano dla $a = 1$, $b = 0.4$ i $r = 4$.



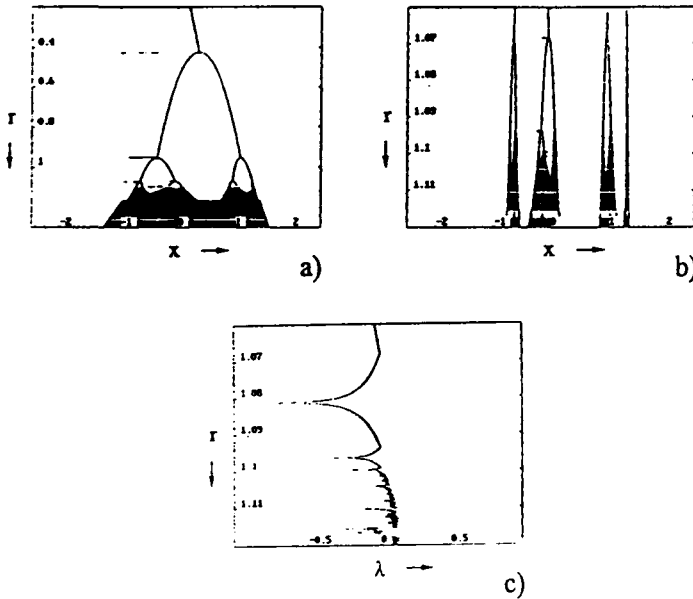
Rys. 24. Niestabilny zbiór niezmienniczy zawierający trajektorię chaotyczną dla odwzorowania Hénona

7. Z rys. 23 wynika, że dla pewnych parametrów odwzorowania Hénona istnieją dwa atraktory przyciągające zbiory warunków początkowych. Jednym z nich jest basen warunków początkowych przyciąganych przez atraktor chaotyczny Hénona, a drugim jest basen warunków początkowych "uciekających" z czasem do nieskończoności, lub też przyciągany przez nieskończoność. Istnieją punkty należące jednocześnie do obu granic basenów warunków początkowych i które nie są przyciągane przez żaden ze wspomnianych atraktorów [40]. Taka ograniczona trajektoria została pokazana na rys. 25 dla $a = 1$, $b = -0.3$, $r = 2.12$.



Rys. 25. Graniczna trajektoria (zaznaczona krzyżykami) należąca do granic basenów przyciągania przez atraktor Hénona (zaznaczony punktami) i atraktor leżący w "nieskończoności".

8. W tym przykładzie w oparciu o odwzorowanie Hénona zilustrowana zostanie droga prowadząca do chaosu poprzez podwajanie okresu. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 26a, b i c.



Rys. 26. Wykres bifurkacyjny ilustrujący kaskadę podwajania okresu prowadzącą do chaosu (a) ; okno z wykresu (a) dla $1.06 \leq r \leq 1.12$ (b) oraz wykładnik Lapunowa odpowiadający (b) rysunkowi (c)

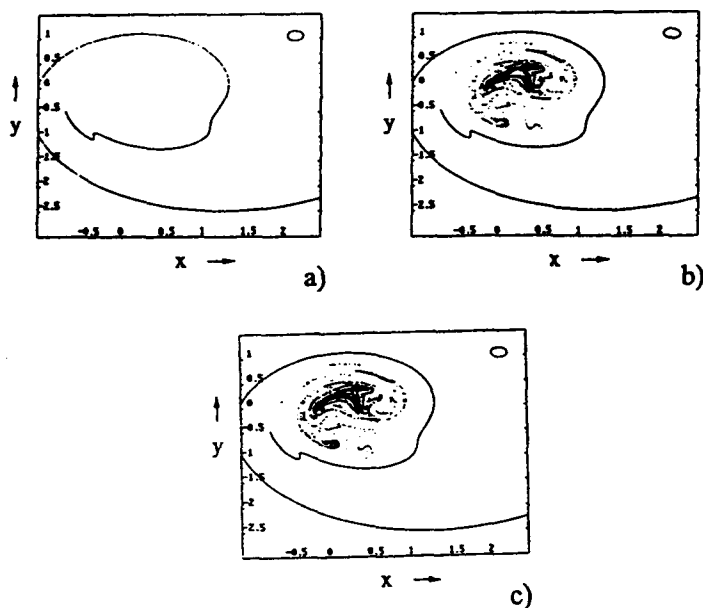
Na pierwszym z nich widać drogę prowadzącą do ruchu chaotycznego poprzez kolejne podwajanie okresów drgań. Na podstawie rys. 26a i b można policzyć wartości kolejnych stosunków długości krzywych pomiędzy punktami bifurkacji, które wynoszą: $d_2/d_4 = 4.33$, $d_4/d_8 = 4.42$, $d_8/d_{16} = 4.54$ i jak widać dążą do stałej Feigenbauma wynoszącej w przybliżeniu 4.67. Na rys. 26c przedstawiono wykres zmian wykładnika Lapunowa λ w relacji do rys. 24b, tzn. dla takiego samego przedziału zmian parametru r . Tam gdzie jest on dodatni, tam występuje chaos.

1.1.15. Odwzorowanie Ikedy

Odwzorowanie Ikedy opisane jest równaniem

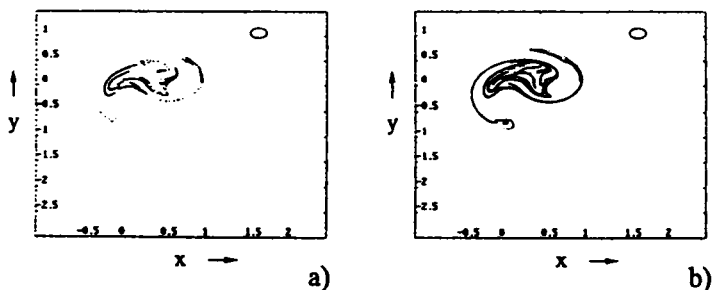
$$z \rightarrow \rho + c_2 z \exp \left[i \left(c_1 - c_3 (1 + z^2)^{-1} \right) \right], \quad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1. \quad (1.106)$$

Na rys. 27 przedstawiono trzy kolejne iteracje elipsy znajdującej się w prawych górnych rogach rysunków dla następujących wartości parametrów: $\rho = 0.5$, $c_1 = 0.4$, $c_2 = 0.9$, $c_3 = 6$. Kolejne iteracje elipsy coraz wyraźniej uwidoczniają dynamikę chaotyczną.

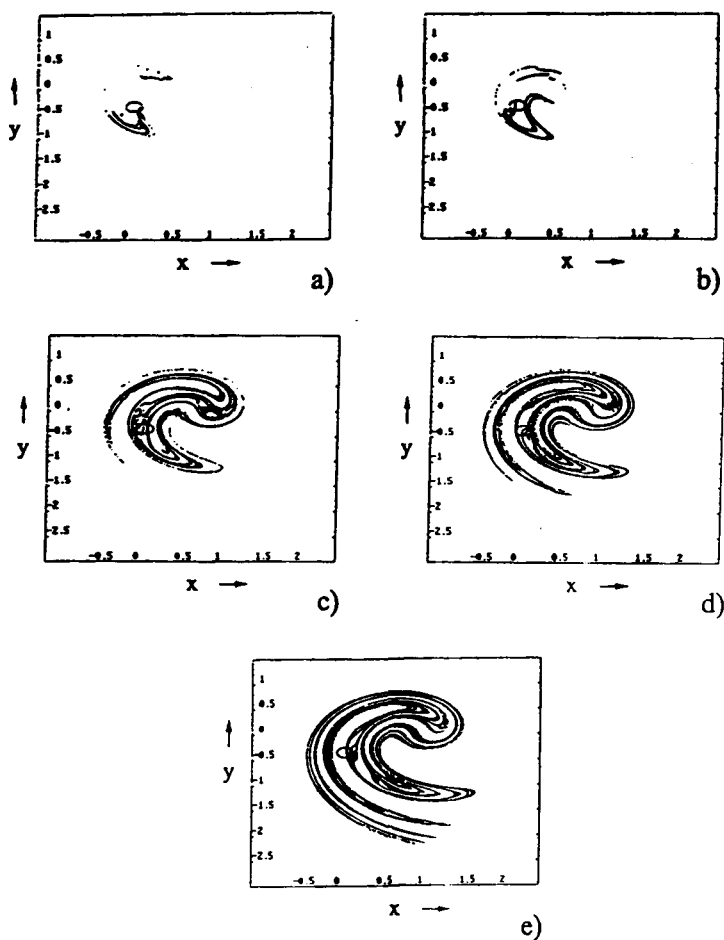


Rys. 27. Pierwsza (a), druga (b) i trzecia (c) iteracja elipsy przedstawionej w prawych górnych rogach rysunku dla odwzorowania Ikedy

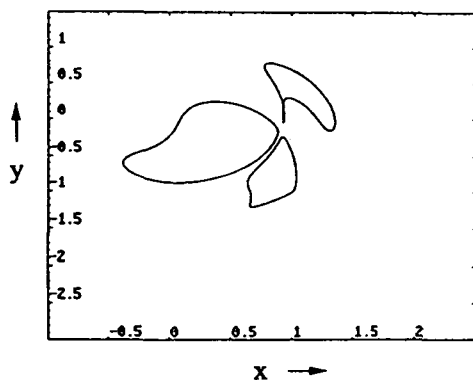
Rozpatrzmy teraz dynamikę odwzorowania (1.106) dla tych samych parametrów co poprzednio, przy czym teraz iterowana elipsa jest przesunięta w lewo w stosunku do sytuacji poprzedniej (rys. 28). Jak widać z tego rysunku dynamika chaotyczna uwidacznia się tutaj znacznie wcześniej.



Rys. 28. Pierwsza (a) i druga (b) iteracja elipsy dla odwzorowania Ikedy



Rys. 29. Pierwsze iteracje elipsy dla różnych wartości parametru ρ : a) 0.6 ; b) 0.7 ; c) 0.8 ; d) 0.9 ; e) 1



Rys. 30. Orbits okresowe o okresie 3 przy zmianie parametru ρ w przedziale $0.9 \leq \rho \leq 1.9$ dla odwzorowania Ikedy

Natomiast na ostatnim rysunku (rys. 29) przedstawiono tylko pierwszą iterację elipsy, tym razem leżącej na poziomie $y=0.5$, dla różnych wartości parametru kontrolnego ρ . Wzrost parametru ρ od 0.5 do 1.0 wpływa na pogłębienie dynamiki chaotycznej odwzorowania Ikedy.

Rysunek 30 przedstawia trzy analogiczne krzywe dla następujących parametrów: $c_1 = 0.4$, $c_2 = 0.9$ i $c_3 = 6$, przy czym podczas wykonywania obliczeń parametr ρ zmieniał się w przedziale od 0.9 do 1.9. Jest to orbita okresowa o okresie 3 (dla jednej ustalonej wartości ρ na wykresie otrzymaliśmy tylko trzy różne punkty). Stabilność każdej orbity ulega zmianie ze zmianą parametru ρ .

1.2. Układy dynamiczne opisane równaniami różniczkowymi zwyczajnymi

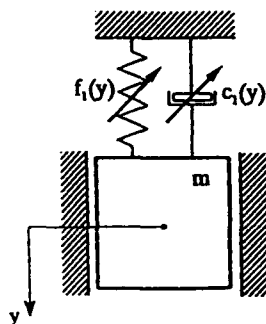
1.2.1. Wprowadzenie

Aby jednoznacznie określić ewolucję w czasie interesującego nas procesu w przyrodzie należy dysponować wiedzą dotyczącą zależności funkcyjnych między funkcją opisującą ten proces i jej pochodną (lub jej pochodnymi) oraz dodatkowo należy

disponować warunkami początkowymi. Zależność funkcyjna pomiędzy nieznaną funkcją i jej pochodną nosi nazwę równania różniczkowego. Obecnie bardzo trudno wyobrazić sobie rozwój wielu dziedzin nauki bez znajomości teorii równań różniczkowych. Istnieje wiele kierunków rozwoju współczesnych teorii równań różniczkowych oraz różne metody ich nauczania w zależności od potrzeb uwarunkowanych kręgiem odbiorców. W tym rozdziale zajęto się jedynie układami równań różniczkowych opisujących dynamikę prostych układów zdeterminowanych fizycznych pod kątem dynamiki chaotycznej. Szersze omówienie dynamiki chaotycznych prostych oscylatorów można znaleźć w pracy W. Szemplińskiej [42].

1.2.2. Oscylator autonomiczny

Rozpatrzmy drgania prostego układu mechanicznego o jednym stopniu swobody (rys. 31). Na rys. 31 ciało o masie m posiada możliwość ruchu tylko w kierunku pionowym, co określa jego ilość stopni swobody.



Rys. 31. Drgania układu autonomicznego o jednym stopniu swobody

Równanie ruchu układu z rys. 31 ma postać

$$m\ddot{y} + c_1(y)\dot{y} + f_1(y)y = 0, \quad (1.107)$$

gdzie „ $-m\ddot{y}$ ” jest siłą bezwładności, „ $c_1(y)\dot{y}$ ” jest siłą pochodzącą od tłumienia oraz „ $f_1(y)y$ ” jest siłą generowaną przez nieliniową sprężynę. Nazwa autonomiczny

pochodzi stąd, że po wprowadzeniu warunków początkowych układ jest pozostawiony sam sobie - nie oddziałuje na niego żadne zewnętrzne wymuszenie. Po podzieleniu (1.107) przez „m” otrzymujemy

$$\ddot{y} + c(y)\dot{y} + f(y)y = 0 \quad (1.108)$$

Okazuje się, że dla powyższego równania można podać warunki, przy których położenie równowagi $y=y_0$ jest niestabilne i istnieje stabilne rozwiązanie okresowe. Są one następujące: a) obie funkcje c i f są ciągłe ze względu na y oraz $c(0) < 0$; b) $yf(y) > 0$ dla $y \neq 0$; c) $F(y) \rightarrow \infty$, gdzie $F(y) = \int_0^y f(z)dz$ (przypadek $c = 0$ został np. szczegółowo rozpatrzony w pracy [7]).

Szczególnym przypadkiem równania (1.108) jest równanie

$$\dot{y} = x, \quad (1.109)$$

$$\dot{x} = a(1 - y^2)x - by^n, \quad a > 0, b > 0.$$

Dla $n = 1$ równanie to nazywamy równaniem van der Pola i opisuje ono drgania samowzbudne w układzie z rys. 31. Ponieważ położenie równowagi ciała o masie m jest niestabilne, to nieskończenie małe zakłócenie spowoduje drgania układu, które będą narastać aż do osiągnięcia orbity okresowej (drgań ustalonych).

Jeżeli w równaniu (1.108) $c = 2h = \text{const}$ i $f = \alpha_0^2 = \text{const}$ to otrzymamy równanie drgań swobodnych o postaci:

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \alpha_0^2 y = 0. \quad (1.110)$$

Rozwiązaniem szczególnym takiego równania jest

$$y = e^{\alpha t} \quad (1.111)$$

i po podstawieniu (1.111) do (1.110) otrzymujemy tzw. równanie charakterystyczne o postaci

$$r^2 + 2hr + \alpha_0^2 = 0, \quad (1.112)$$

z którego wyznaczamy pierwiastki

$$r_{1,2} = -h \pm i\lambda, \quad (1.113)$$

gdzie:

$$\lambda = \sqrt{\alpha_0^2 - h^2}, \quad i^2 = -1. \quad (1.114)$$

W przypadku $|\alpha_0| \leq |h|$ ruch układu nie jest ruchem drgającym.

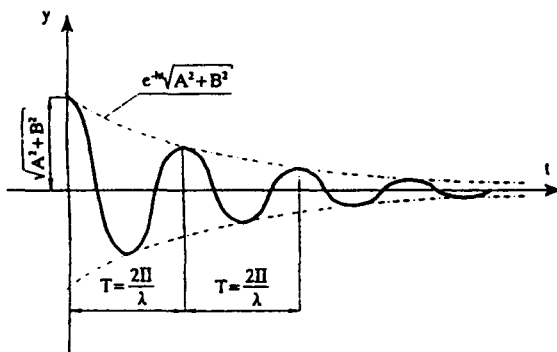
Jeśli jako rozwiązanie ogólne weźmiemy kombinację dwóch jego rozwiązań szczególnych

$$y = A \frac{e^{r_1 t} + e^{r_2 t}}{2} + B \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{2i}, \quad (1.115)$$

to otrzymamy następującą postać rzeczywistą $y(t)$ opisującą przemieszczenie wspomnianego układu o jednym stopniu swobody

$$y = e^{-ht} (A \cos \lambda t + B \sin \lambda t). \quad (1.116)$$

Przebieg takich drgań ilustruje rys. 32.



Rys. 32. Przebieg gasnących drgań swobodnych układu o jednym stopniu swobody

Na rys. 32 zaznaczono okres czasu T jaki upływa pomiędzy pojawieniem się kolejnych maksymalnych wychyleń. Zaleca się czytelnikowi sprawdzenie, że jest on wielkością stałą i równą $2\pi/\lambda$.

1.2.3. Oscylator nieautonomiczny liniowy

Jeśli na układ o jednym stopniu swobody działa wymuszenie harmoniczne, a siły tłumiące oraz siła pochodząca od oddziaływania sprężyny są liniowe, to dynamika takiego układu opisana jest równaniem

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = P \cos \omega t, \quad (1.117)$$

gdzie c jest współczynnikiem tłumienia wiskotycznego, k jest współczynnikiem sztywności sprężyny, a P jest amplitudą siły wymuszającej o częstości ω . Układ (1.107) jest układem nieautonomicznym, bo oddziałuje na niego zewnętrzne wymuszenie $P \cos \omega t$ (zainteresowanego czytelnika układami drgającymi o jednym stopniu swobody odsyłamy do wielu klasycznych podręczników poświęconych teorii drgań, a w tym i pracy autora [9], tutaj ograniczymy się tylko do analizy rozwiązania okresowego o częstości ω). Wspomnimy tu jedynie tylko o zjawisku rezonansu, który zachodzi dla częstości wymuszenia ω bliskiej lub równej częstości drgań własnych $\alpha_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Np. przy $c = 0$ i $\omega = \alpha_0$ amplituda drgań rośnie do nieskończoności. Dla $\omega \neq \alpha_0$ równanie (1.117) przyjmie postać

$$\ddot{y} + \alpha_0^2 y = q \cos \omega t. \quad (1.118)$$

gdzie

$$\alpha_0^2 = \frac{k}{m}, \quad q = \frac{P}{m}. \quad (1.119)$$

Podstawiając rozwiązania szczególne o postaci

$$y = a \cos \omega t \quad (1.120)$$

do równania (1.118) otrzymujemy

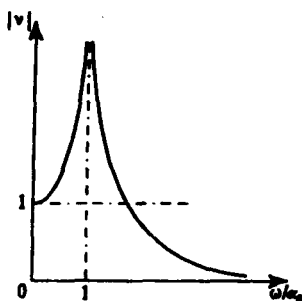
$$a = \frac{q}{\alpha_0^2 - \omega^2}. \quad (1.121)$$

Z tej ostatniej równości widać, że $a \rightarrow \infty$ dla $\alpha_0 \rightarrow \omega$.

Równanie (1.121) można przekształcić do postaci

$$v \equiv \frac{a}{x_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_0}\right)^2}, \quad (1.122)$$

gdzie: $x_{st} = P/k$ i wykres $v(\omega/\alpha_0)$ przedstawiono na rys. 33.



Rys. 33. Wykres rezonansowy dla układu bez tłumienia

Jeśli $\omega < \alpha_0$ to ruch ciała o masie m i zmiana siły wymuszającej są w fazie, natomiast dla $\omega > \alpha_0$ są one w przeciwfazie.

Równanie ruchu układu nieautonomicznego z "liniowym" tłumieniem i „liniową” sztywnością przyjmie postać

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = P \cos \omega t, \quad (1.123)$$

które sprowadzamy do postaci

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \alpha_0^2 y = q \cos \omega t, \quad (1.124)$$

gdzie

$$2h = \frac{c}{m}, \quad \alpha_0^2 = \frac{k}{m}, \quad q = \frac{P}{m}. \quad (1.125)$$

Poszukując rozwiązania (1.124) o postaci

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (1.126)$$

podstawiamy (1.123) do (1.124) a następnie przyrównujemy wyrazy stojące przy $\sin \omega t$ i $\cos \omega t$ otrzymując dwa równania, z których znajdujemy A i B . Rozwiązanie (1.126) może być przedstawione również w postaci

$$y = a \cos(\omega t + \beta), \quad (1.127)$$

gdzie

$$a = \frac{q}{\alpha_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{h}{\alpha_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\alpha_0}\right)^2}},$$

$$\beta = \arctg \frac{A}{B} = \arctg \frac{2 \frac{h}{\alpha_0} \frac{\omega}{\alpha_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_0}\right)^2}. \quad (1.128)$$

Wprowadzając jak poprzednio $v = a/x_0$ można zbudować wykres $v = v(\omega/\alpha_0)$, gdzie h/α_0 występuje jako parametr (rys. 34). Z wykresu tego wynika, że maksymalne wartości amplitud układają się wzdłuż krzywej zaznaczonej linią przerywaną.

1.2.4. Oscylator nieautonomiczny o różnych potencjałach $V(y)$

Wyobraźmy sobie, że kulka (punkt materialny) znajduje się w naczyniu, którego przekrój zaznaczono na rys. 35.

Równanie ruchu kulki ma postać

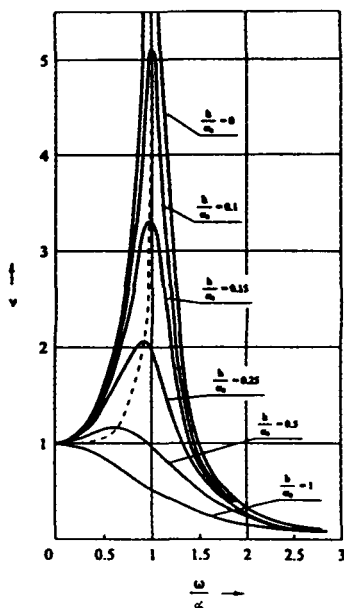
$$\ddot{y} + c\dot{y} + \frac{dV(y)}{dy} = F \cos \omega t. \quad (1.129)$$

Potencjał $V(y)$ może posiadać dwa minima i jedno maksimum, jak to jest przedstawione na rys. 35 lub też może przybierać inne kształty (rys. 36).

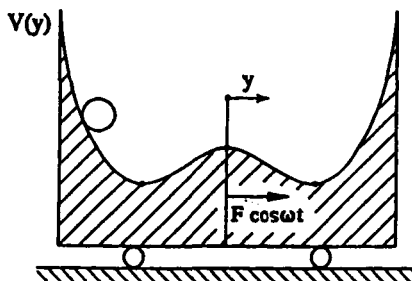
Rys. 35 jest dobrą fizyczną interpretacją równania (1.129) tylko wówczas, gdy „kulka” nie odrywa się od linii $V(y)$.

Jeśli potencjał opiszemy równaniem

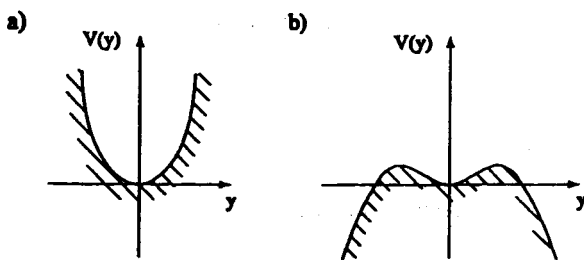
$$V(y) = \frac{\alpha y^2}{2} + \frac{\beta y^4}{4}, \quad (1.130)$$



Rys. 34. Wykres rezonansowy dla układu z tłumieniem



Rys. 35. Ruch kulki w naczyniu wzdłuż potencjału $V(y)$

Rys. 36. Typowe kształty potencjału $V(y)$

to przypadkowi z rys. 35 odpowiada potencjał z $\alpha < 0$ i $\beta > 0$, natomiast dla potencjału z rys. 36a mamy $\alpha > 0$ i $\beta > 0$, oraz dla potencjału z rys. 36b mamy $\alpha > 0$ i $\beta < 0$.

Rozważmy najpierw przypadek braku wymuszenia i braku tłumienia w analizowanym układzie. Wówczas dynamika układu jest opisana równaniami

$$\begin{aligned}\dot{y} &= x, \\ \dot{x} &= -\alpha y - \beta y^3.\end{aligned}\tag{1.131}$$

Poszukajmy położenia równowagi kulki. Wówczas $\dot{y} = \dot{x} = 0$ i z równań (1.131) otrzymujemy

$$\begin{aligned}x &= 0, \\ y(\alpha + \beta y^2) &= 0,\end{aligned}\tag{1.132}$$

co pozwala na znalezienie trzech położenia równowagi: $(y_0, x_0) = (0, 0)$ oraz $(x_0, y_0) = (\pm \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}, 0)$. Zbadajmy stabilność każdego ze znalezionych położenia równowagi. W tym celu przyjmijmy, że δ_x i δ_y są małymi zaburzeniami odpowiednio dla x_0 i y_0 i mamy

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \delta x, \\ y &= y_0 + \delta y,\end{aligned}\tag{1.133}$$

co po uwzględnieniu (1.131) prowadzi po linearyzacji (czyli po pozostawieniu tylko

członów liniowych ze względu na δ_x i δ_y) do równań

$$\begin{aligned}\delta\dot{y} &= +\delta x, \\ \delta\dot{x} &= -\alpha\delta y - 3\beta y_0^2\delta y.\end{aligned}\tag{1.134}$$

Rozwiązań (1.124) poszukamy o postaci:

$$\begin{aligned}\delta x &= X e^{\lambda t}, \\ \delta y &= Y e^{\lambda t},\end{aligned}\tag{1.135}$$

co po podstawieniu do (1.134) prowadzi do równania

$$\begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ \lambda & \alpha + 3\beta y_0^2 \end{vmatrix} = 0,\tag{1.136}$$

z którego wyznaczamy następujące pierwiastki

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\alpha - 3\beta y_0^2}.\tag{1.137}$$

Rozważmy dalej przypadek przedstawiony na rys. 35. Wówczas dla $(0,0)$ mamy $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\alpha}$, a ponieważ $\alpha < 0$, to pierwiastki są rzeczywiste i różnych znaków. Położenie $(0,0)$ jest siodłem. Szersza klasyfikacja punktów osobliwych podana jest w klasycznych podręcznikach poświęconych teorii drgań, a w tym także w pracy autora [7]). Dwóm pozostałym położeniom równowagi odpowiadają wartości własne

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{-2\alpha},\tag{1.138}$$

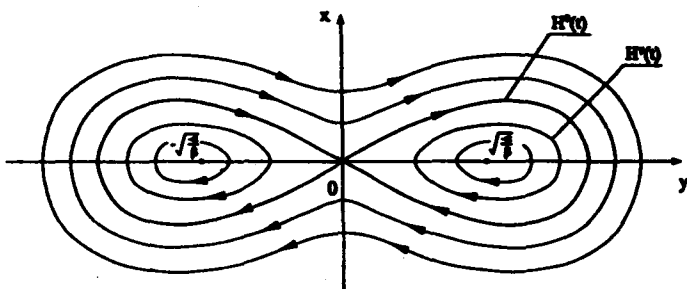
które są wartościami urojonymi. Te położenia równowagi są punktami osobliwymi typu środek. Położenie $(0,0)$ nazywamy hiperbolicznym, a pozostałe położenia równowagi są typu eliptycznego. Trajektorie fazowe wraz z punktami osobliwymi przedstawiono na rys. 37.

Na szczególną uwagę zasługują tu dwie trajektorie fazowe zamknięte w kształcie pętli ósemki. Trajektorie wychodzące z punktu siodłowego 0 i do niego powracające

nazywamy trajektorią (orbitą) homokliniczną. Orbity homokliniczne można opisać analitycznie w postaci dwóch następujących równań

$$\begin{aligned} y_H(t) &= \sqrt{\frac{-2\alpha}{\beta}} \operatorname{sech}(\pm\sqrt{-\alpha}(t-t_0)), \\ x_H(t) &= -\alpha\sqrt{\frac{2}{\beta}} \operatorname{sech}(\pm\sqrt{-\alpha}(t-t_0)) \tanh(\pm\sqrt{-\alpha}(t-t_0)), \end{aligned} \quad (1.139)$$

gdzie czas t jest parametrem. Wzór (1.139) jest nie tylko parametrycznym równaniem orbit homoklinicznych, ale również rozwiązaniem równania (1.131) odpowiadającym separatrysom źródła.



Rys. 37. Trzy punkty osobliwe oraz otaczające je trajektorie fazowe

1.2.5. Funkcja Mielnikowa i chaos

Podstawową ideą metody Mielnikowa [5] jest wykorzystanie rozwiązania całkowalnego niezaburzonego układu dwóch równań różniczkowych do rozwiązania zaburzonego układu równań. Niech dynamika układu będzie opisana równaniami:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y) + \varepsilon g_1(x, y, t), \\ \dot{y} &= f_2(x, y) + \varepsilon g_2(x, y, t) \end{aligned} \quad (1.140)$$

Parametr $\varepsilon > 0$ zwany małym parametrem jest wielkością $\varepsilon \ll 1$ i podkreśla "małość" zależnych od czasu zaburzeń g_i ($i = 1, 2$). W takim układzie może pojawić się ruch chaotyczny, a zbiór parametrów przy których on się pojawia może być wyznaczony

w oparciu o poniżej opisaną metodę.

Dla $\varepsilon = 0$ układ niezaburzony posiada dwie orbity homokliniczne $H^0(t)$ do punktu siodłowego $(0,0)$. Wnętrze orbit homoklinicznych wypełnione jest jednoparmetrową rodziną orbit okresowych $H^\gamma(t)$ o okresach T^γ , zależnych od parametru $\gamma \in (\gamma_1, 0)$ - patrz rys. 37.

Jeśli $\varepsilon \neq 0$ rozmaitość (tutaj krzywa) wychodząca z punktu siodłowego i do niego powracająca nie muszą się zamknąć w jedną krzywą, co było przedstawione na rys. 37. Mogą one mieć tylko jeden punkt wspólny, tj. siodłowy, lub też mogą się przeciąć, tj. mieć jeszcze jeden punkt wspólny. Okazuje się, że istnienie takiego dodatkowego punktu przecięcia pociąga za sobą istnienie nieskończenie wielu takich punktów. Jeśli w układzie (1.140) funkcje wymuszające g_i ($i = 1, 2$) są okresowe ze względu na czas, natomiast funkcje f_i ($i = 1, 2$) posiadają orbitę homokliniczną (jak na rys. 37) to funkcja Mielnikowa określona jest następującym równaniem:

$$M(t_0) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(f_1 \left[x_{H^0}(t-t_0), y_{H^0}(t-t_0) \right] g_2 \left[x_{H^0}(t-t_0), y_{H^0}(t-t_0), t \right] \right) - f_2 \left[x_{H^0}(t-t_0), y_{H^0}(t-t_0) \right] g_1 \left[x_{H^0}(t-t_0), y_{H^0}(t-t_0), t \right] \right\} dt. \quad (1.141)$$

Jeśli funkcja $M(t_0)$ nie przyjmuje wartości zerowych, to wówczas rozmaitości stabilne i niestabilne poza punktem siodłowym nigdzie się nie przecinają. Jeśli natomiast równanie $M(t_0) = 0$ ma rozwiązania, to do takiego dodatkowego przecięcia dochodzi.

Powróćmy teraz do równania (1.129) i potencjału (1.130).

Równanie ruchu oscylatora przy takim wyborze potencjału przyjmie postać

$$\begin{aligned} \dot{y} &= x, \\ \dot{x} &= -\alpha y - \beta y^3 - \varepsilon c x + \varepsilon F \cos \omega t, \end{aligned} \quad (1.142)$$

gdzie teraz εc i εF podkreślają "małość" wyróżnionych parametrów.



Przyjmując

$$f_1 = x, \quad f_2 = -\alpha y - \beta y^3,$$

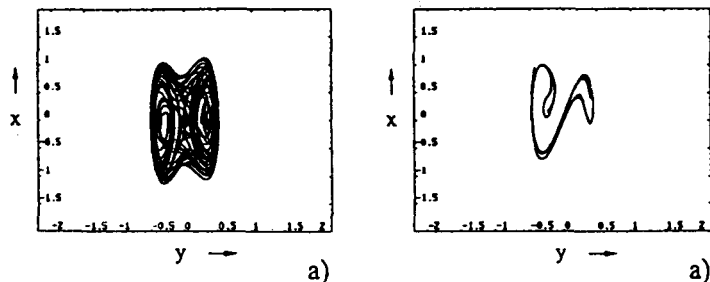
$$g_1 = 0, \quad g_2 = \varepsilon(F \cos \omega t - cx), \quad (1.143)$$

i korzystając z (1.141) otrzymujemy

$$M(t_0) = \frac{4c\sqrt{(-\alpha)^3}}{3\beta} + \pi F \omega \sqrt{\frac{2}{\beta}} \frac{\sin \omega t_0}{\cosh \frac{\pi \omega}{2\sqrt{-\alpha}}}. \quad (1.144)$$

Funkcja $M(t_0)$ zmienia znak przy następującym związku między parametrami

$$F > \frac{4c\sqrt{(-\alpha)^3}}{3\pi\omega\sqrt{2\beta}} \cosh \left[\frac{\pi\omega}{2\sqrt{-\alpha}} \right]. \quad (1.145)$$



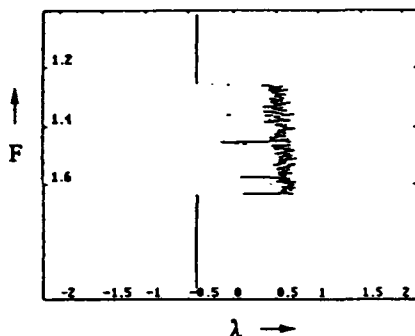
Rys. 38. Trajektoria fazowa (a) i mapa Poincaré (b) dla oscylatora Duffinga opisanego równaniem (1.132)

Weźmy do rozważań następujące parametry: $c = 0.8$, $\alpha = -12$, $\beta = 100$, $\omega = 3.3$. Wartość ostatniego parametru obliczamy ze wzoru (1.145) otrzymując $F = 1.3295$. Równania (1.142) rozwiązano dla podanych parametrów numerycznie, a wyniki symulacji numerycznej przedstawiono na rys. 38.

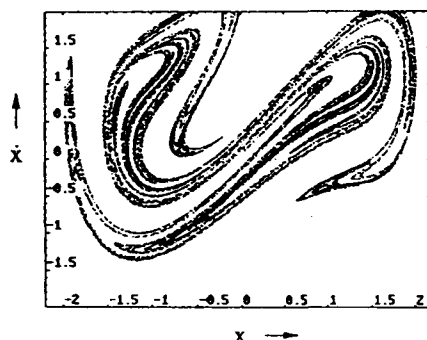
Z rys. 38 widać wyraźnie, jak trajektoria fazowa "przeskakuje" w sposób przypadkowy pomiędzy dwoma punktami odpowiadającymi minimum dwóch dołków

potencjału $V(y)$. Na rys. 38b przedstawiono dziwny atraktor chaotyczny na płaszczyźnie w postaci nieskończonego zbioru punktów, przy czym odległość w czasie pomiędzy dwoma kolejnymi punktami wynosi $T = 2\pi/\omega$ (jest to mapa Poincaré).

Na rys. 39 przyjęto jako kontrolny parametr amplitudę siły wymuszającej F (pozostałe parametry bez zmian) i wykreślono wartości maksymalnego wykładnika Lapunowa dla $1 \leq F \leq 2$. Widać, że dla $F = 1.33$ pojawia się chaos, a potem znika w okolicach $F \cong 1.62$.



Rys. 39. Przebieg zmian wykładnika Lapunowa w funkcji parametru F dla oscylatora (1.142)



Rys. 40. Dziwny atraktor chaotyczny odkryty przez Uedę

Rozpatrzmy jeszcze przypadek potencjału, dla którego $\alpha = 0$ i $\beta > 0$. Przypadek ten był w szczególności analizowany przez Uedę [44]. Mapa Poincaré dla oscylatora (1.129) i dla parametrów $c = 0.05$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\omega = 1$ i $F = 7.5$ została pokazana na rys. 40.

Przedstawiony dziwny atraktor chaotyczny bywa często nazywany atraktorem "japońskim".

1.2.6. Dynamika wahadła wymuszanego zewnętrznym momentem

Równanie ruchu płaskiego wahadła o masowym momencie bezwładności $B = ml^2$, współczynnika oporu powietrza c wymuszonego momentem $M = M_1 \cos \omega t$ ma postać (patrz rys. 18)

$$B\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi - c_0 \dot{\varphi} + M_1 \cos \omega t. \quad (1.146)$$

Po podzieleniu przez B otrzymujemy

$$\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} + \beta \sin \varphi = F \cos \omega t. \quad (1.147)$$

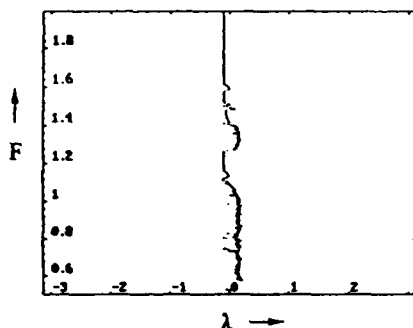
gdzie: $c = c_0/B$, $\beta = mgl/B$, $F = M_1/B$.

Przy $c = F = 0$ układ posiada nieskończenie wiele położeń równowagi określonych równaniem

$$(\varphi, \dot{\varphi}) = (k\pi, 0), \quad (1.148)$$

gdzie k jest liczbą całkowitą.

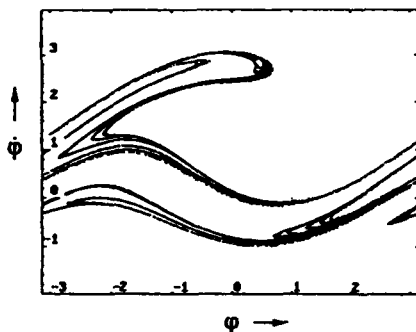
Rozpatrzmy przypadek $c = 0.2$, $\beta = 1$, $\omega = 0.8$. Następnie jako kontrolny parametr weźmiemy F , które będziemy zmieniać w przedziale $0.5 \leq F \leq 2.0$.



Rys. 41. Przebieg zmian wartości maksymalnego wykładnika Lapunowa λ w funkcji parametru F

Z rys. 41 widać, że w dużym obszarze zmian parametru F wykładnik Lapunowa jest dodatni, co świadczy o dynamice chaotycznej wahadła. Okazuje się jednak, że wyraźna chaotyczna dynamika tego wahadła ma miejsce dla $\omega = 1$, $F = 2.4$, $c = 0.2$, $\beta = 1$.

Mapę Poincaré atraktora dla tych parametrów przedstawiono na rys. 42.



Rys. 42. Dziwny atraktor chaotyczny otrzymany na drodze symulacji równania (1.147) opisującego dynamikę wahadła

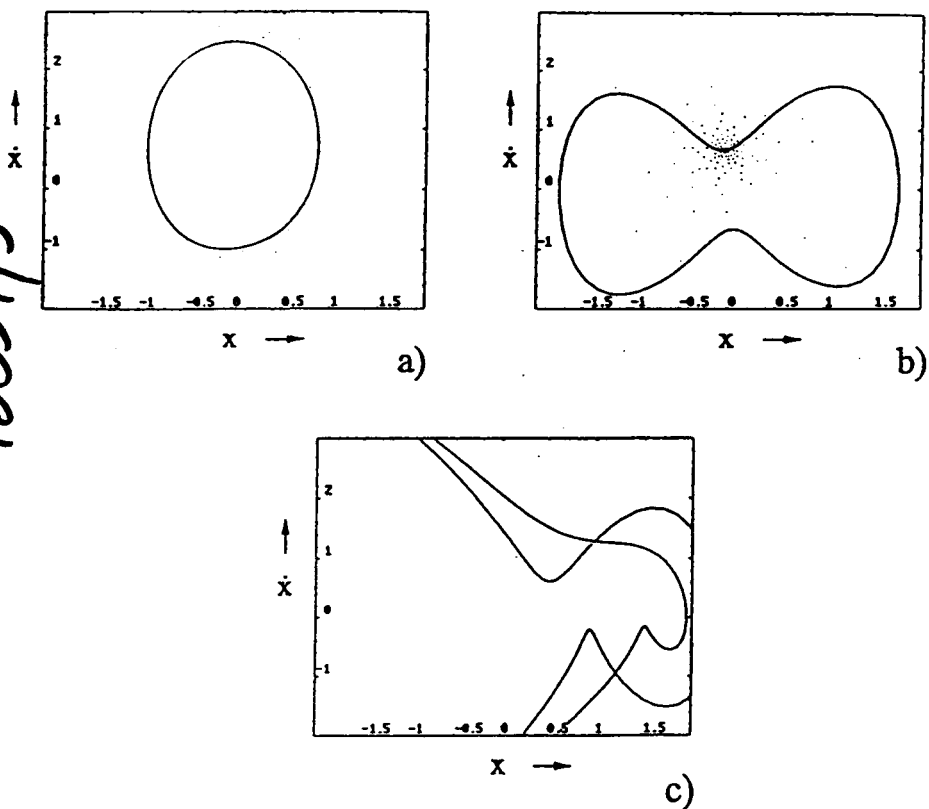
1.2.7. Oscylator van der Pola z okresowym wymuszeniem zewnętrznym

W paragrafie 1.2.2 rozważaliśmy oscylacje samowzbudne oscylatora autonomicznego o jednym stopniu swobody. W takim układzie nie może pojawić się ruch chaotyczny. Możliwość taka istnieje, jeżeli na taki oscylator działa dodatkowo wymuszenie okresowe zewnętrzne. Rozpatrzmy więc równanie opisujące dynamikę oscylatora van der Pola i z wymuszeniem zewnętrznym o postaci

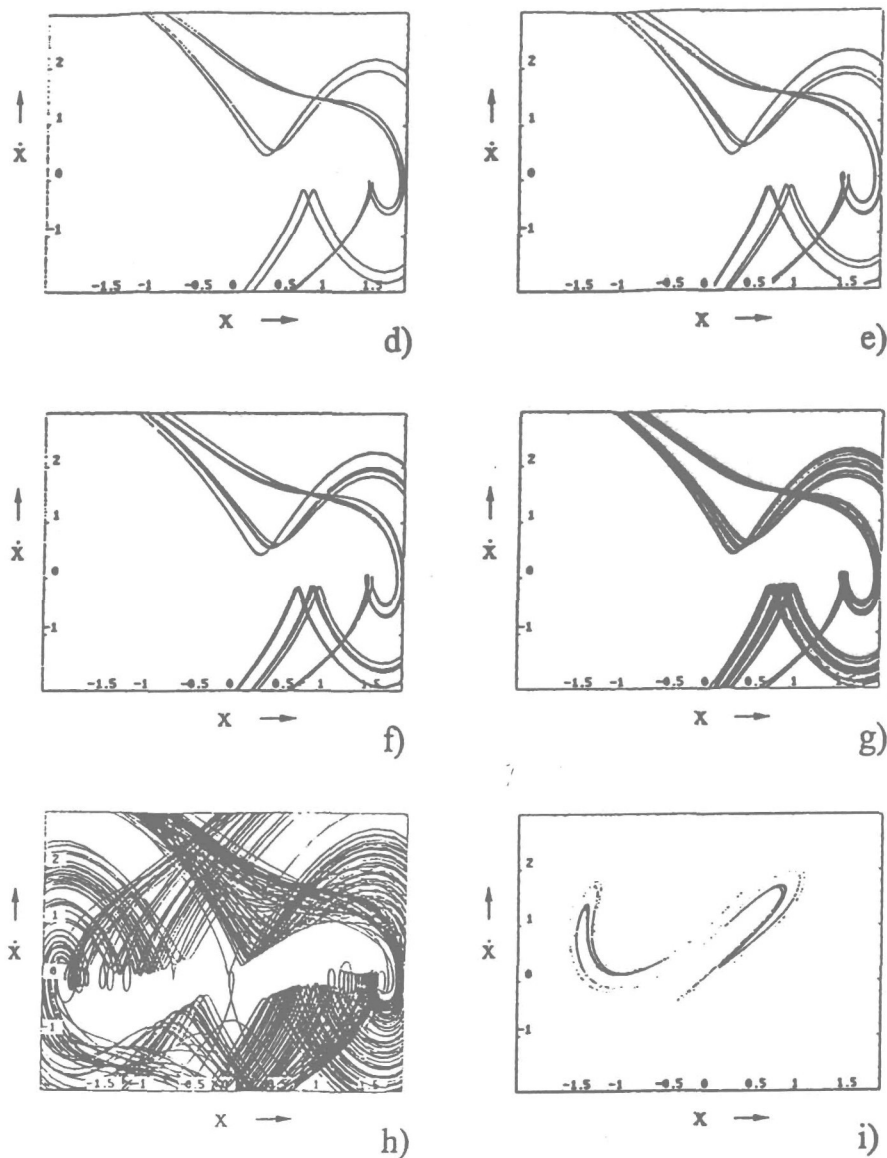
$$\ddot{x} - c x(1 - x^2)\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F \cos \omega t. \quad (1.149)$$

Niech $c = 0.1$, $\beta = 1$, $F = 6$, $\omega = 1$. Tym razem jako parametr kontrolny wybierzemy α (rys. 43). Dla $\alpha = 3.8$ punkty mapy Poincaré (po pominięciu stanu nieustalonego) układają się wzdłuż zamkniętej krzywej. Świadczy to o pojawieniu się orbity quasi - okresowej o dwóch niewspółmiernych częstościach, z których jedna jest równa ω . Atraktor quasi-okresowy znika przy małej zmianie α i dla $\alpha = 3.2$ istnieje stabilna okresowa

orbita przedstawiona na rys. 43b. Jednocześnie na tym rysunku wybrany został jeden z punktów należący do tej orbity z uwzględnieniem poprzedzającego go stanu nieustalonego (kolejne punkty dążą do niego przy $t \rightarrow +\infty$). Dalsze zmniejszanie α powoduje zajście bifurkacji podwojenia okresu i nowo powstałą orbitę okresową przedstawiono dla $\alpha = 0.3$ na rys. 43c. Na kolejnych czterech rysunkach od 43d do 43g widać kolejne orbity będące wynikiem podwajania okresu tych poprzednich. Wreszcie dla $\alpha = 0.1$ przedstawiono pełną chaotyczną dynamikę tego oscylatora w oparciu o rzut rozwiązania równania (1.149) na płaszczyznę $(\dot{x}, x)$ (rys. 43h i 43i).



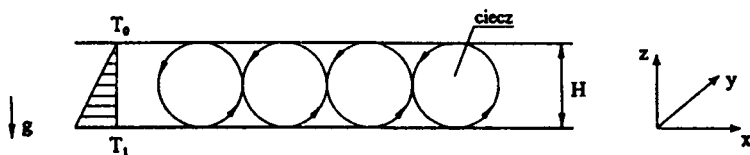
Rys. 43. Mapa Poincaré (a, b) oraz rzut rozwiązania równania (1.149) na płaszczyznę $(\dot{x}, x)$ dla oscylatora van der Pola z wymuszeniem zewnętrznym dla różnych wartości współczynnika α : a) 3.8, b) 3.2, c) 0.3



Rys. 43. (c.d.). Mapa Poincaré (i) oraz rzut rozwiązania równania (1.149) na płaszczyznę $(\dot{x}, x)$ dla oscylatora van der Pola z wymuszeniem zewnętrznym dla różnych wartości współczynnika α : d) 0.8 ; e) 0.15 ; f) 0.146 ; g) 0.14 ; h) 0.1 ; i) 0.1.

1.2.8. Atraktor Lorenza

Niewątpliwie przełomową pracę w dziedzinie dynamiki chaotycznej napisał Edward Lorenz [45]. Model Lorenza to układ trzech równań nieliniowych różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Teraz wyprowadzimy te równania w oparciu o stary problem Rayleigha - Bénarda (proces wyprowadzenia równań może być również pominięty przy czytaniu bez uszczerbku dla naszej dalszej analizy dotyczącej dynamiki chaotycznej).



Rys. 44. Schemat procesu konwekcji Rayleigha - Bénarda służący do wyprowadzenia równań Lorenza

Niech pomiędzy dwoma nieskończenie długimi płytami odległymi o H znajduje się ciecz (rys. 44). Ciecz podgrzewana jest od dołu. Niech u oznacza prędkość cząsteczek cieczy, T , niech będzie polem temperatury, ρ , polem gęstości i p , ciśnieniem, przy czym T_0 odpowiada ρ_0 i g jest przyspieszeniem ziemskim. Temperatura, gęstość i ciśnienie ulegają zmianom według następujących wzorów (dla $u = 0$), ΔT jest przyrostem liniowym temperatury.

$$\begin{aligned} T_s(z) &= T_0 + \Delta T - \left(\frac{z}{H} \right) \Delta T, \\ \rho_s(z) &= \rho_0 \left[1 - \alpha (T_s(z) - T_0) \right], \\ \nabla p_s(z) &= -\rho_s(z) g \bar{z}, \end{aligned} \quad (1.150)$$

gdzie $\bar{z}$ jest wektorem normalnym w kierunku z . Najpierw (tzn. przy małym dostarczeniu energii cieplnej), następuje konwekcja laminarna. Następnie tworzą się stabilne wiry, przy czym przyrost temperatury jest nieliniowy o postaci

$$\Theta(x, y, z, t) = T(x, y, z, t) - T_s(z). \quad (1.151)$$

Prędkość u zmienia się w czasie i dynamika ruchu cieczy opisana jest następującym układem równań różniczkowych cząstkowych

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u &= \alpha \Theta g \bar{z} - \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \nabla \delta p + \nu \nabla^2 u, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\Theta &= \chi \nabla^2 \Theta - u_z \left(\frac{\Delta T}{H} \right), \\ \nabla u &= 0. \end{aligned} \quad (1.152)$$

Powyżej δp oznacza zmianę ciśnienia w stosunku do stanu konwekcji, ν jest współczynnikiem kinematycznej wiskotyczności cieczy, χ jest stałą termiczną procesu dyfuzji, a ∇^2 jest operatorem Laplace'a. Ponieważ $u_y = 0$, to pozostałe składowe wektora prędkości mogą być otrzymane z równań:

$$u_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.153)$$

Ponadto Lorenz wprowadził następujące warunki brzegowe:

$$\Theta(0) = \Theta(H) = \psi(0) = \psi(H) = \nabla^2 \psi(0) = \nabla^2 \psi(H) = 0. \quad (1.154)$$

Funkcji rozkładu temperatury Θ oraz funkcji strumienia przepływu ψ możemy poszukiwać w postaci następujących szeregów Fouriera:

$$\begin{aligned} \Theta(x, y, z, t) &= \sum_{j=1}^J \sin(j\pi z) \Theta_j(x, t), \\ \psi(x, y, z, t) &= \sum_{j=1}^J \sin(j\pi z) \psi_j(x, t). \end{aligned} \quad (1.155)$$

Lorenz ograniczył się w dalszych rozważaniach do przyjęcia tylko trzech podstawowych rozwiązań układu (1.152) i po uwzględnieniu warunków brzegowych otrzymał

$$\begin{aligned}\Theta(x, z, t) &= \frac{\Delta T R_c}{R_a \pi} \left[\sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a x}{H}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) - z(t) \sin\left(\frac{2\pi z}{H}\right) \right], \\ \psi(x, z, t) &= \frac{\sqrt{2}(1+a^2)\chi}{a} X(t) \sin\left(\frac{\pi a x}{H}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right),\end{aligned}\quad (1.156)$$

gdzie R_a oznacza liczbę Rayleigha, a R_c jest jej wartością krytyczną:

$$R_a = \frac{\alpha g H^3 \Delta T}{\chi \nu}, \quad R_c = \frac{\pi^4 (1+a^2)^3}{a^2}. \quad (1.157)$$

X, Z i Z są amplitudami zależnymi od czasu trzech kolejnych postaci założonego rozwiązania. Równania Lorenza otrzymujemy podstawiając (1.156) do równań (1.152). Mają one postać:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{d\tau} &= \sigma(Y - X), \\ \frac{dY}{d\tau} &= -XZ + rX - Y, \\ \frac{dZ}{d\tau} &= XY - bZ,\end{aligned}\quad (1.158)$$

przy czym

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{\pi(1+a^2)\chi t}{\chi^2}, \quad \sigma = \frac{\mu}{\chi}, \\ b &= \frac{4}{1+a^2}, \quad r = \frac{R_a}{R_c}.\end{aligned}\quad (1.159)$$

Podczas symulacji komputerowej powyższych równań Lorenz dostrzegł nieregularne oscylacje dla pewnych parametrów tej mocno uproszczonej wersji modelu fizycznego. Zauważył również w płaszczyźnie (X, Y) pewną figurę geometryczną przypominającą nieco ludzką nerkę. Punkt fazowy wędrował okrążając lewą lub prawą nerkę, przy czym przeskoki od jednej do drugiej odbywały się przypadkowo i nie można było ich przewidzieć.

Układ równań Lorenza jest układem autonomicznym (bez wymuszenia zewnętrznego). Postarajmy się wyznaczyć położenia równowagi tego układu oraz prześledzić ich stabilność. Dla $b > 0$, $\sigma > 0$ i $r > 0$, z równań (1.158) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sigma(Y - Z) &= 0, \\ -XY + rX - Y &= 0, \\ XY - bZ &= 0.\end{aligned}\tag{1.160}$$

Jak łatwo sprawdzić $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$. Zaburzając to położenie równowagi i ograniczając się w rozważaniach do równań różniczkowych liniowych zaburzeń otrzymujemy równanie charakterystyczne o postaci

$$[\lambda + b][\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0.\tag{1.161}$$

Dla $0 < r < 1$ równanie (1.161) posiada trzy pierwiastki rzeczywiste, które są ujemne. Oznacza to, że analizowane położenie równowagi jest stabilne. Dla $r = 1$ następuje rozgałęzienie rozwiązań (rzeczywistych) równań (1.160). Dla $r > 1$ mamy następujące rozwiązanie ustalone (położenie równowagi)

$$\begin{aligned}X &= Y = \pm \sqrt{b(r - 1)}, \\ Z &= r - 1.\end{aligned}\tag{1.162}$$

Poprzednie rozwiązanie $(0, 0, 0)$ istnieje nadal, tylko jest niestabilne.

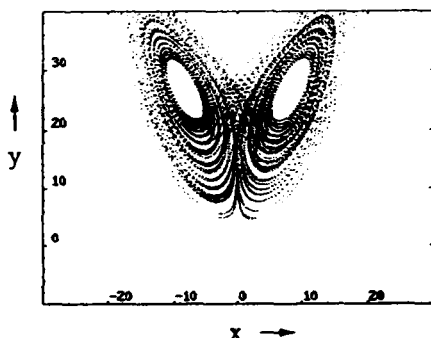
Równanie charakterystyczne w rozważanym przypadku (to jest dla równań Lorenza zlinearyzowanych w otoczeniu punktów (1.162)) przyjmie postać

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0.\tag{1.163}$$

Obydwa położenia równowagi określone równaniem (1.162) tracą stabilność po przekroczeniu wartości krytycznej parametru.

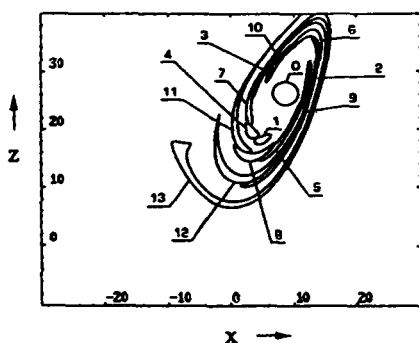
$$r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}.\tag{1.164}$$

Projekcję atraktora Lorenza przedstawiono na rys. 45.



Rys. 45. Projekcja atraktora Lorenza na płaszczyznę (X,Y) dla $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 2.67$

Obecnie na bazie dynamiki układu Lorenza powrócimy na chwilę do wstępnych uwag i spostrzeżeń związanych z rys. 5 z paragrafu 1.1.5. W tym celu wybierzmy jako zbiór punktów początkowych punkty leżące na elipsie i oznaczone jako "0" na rys. 46.



Rys. 46. Projekcja na płaszczyznę (x,z) trzynastu kolejnych iteracji elipsy "0" dla układu Lorenza ($r = 28$, $b = 2.67$, $\sigma = 10$)

Po pierwszej iteracji otrzymujemy zbiór punktów oznaczonych jako 1, a zbiór ten poddany kolejnej iteracji oznaczamy przez 2, itd. Widać w kolejnych iteracjach efekty rozciągania i zginania. Nasuwa to również analogię zamieszania łyżeczką kropli herbaty w szklance, co było szerzej dyskutowane w paragrafie 1.1.5.

2. Fraktale

2.1. Wprowadzenie

Poprzez pojęcie fraktala rozumieć będziemy skomplikowaną matematycznie figurę, która wykazuje własności samopodobieństwa. Praktycznie własność samopodobieństwa oznacza, że dowolny mały element całego fraktala jest podobny do całości (wykazuje wszystkie charakterystyczne cechy całości). Bardzo wiernie ta właściwość została wyrażona w strofach wiersza poety Chantala Spleissa [46]:

*"To ja jestem częścią części, która istnieje,
Samodzielnie i przenika bycie całości.
Bezustannie przynależna, bezustannie ofiarowywana,
Podobna do małego i do dużego,
Będąca częścią części, która istnieje"*

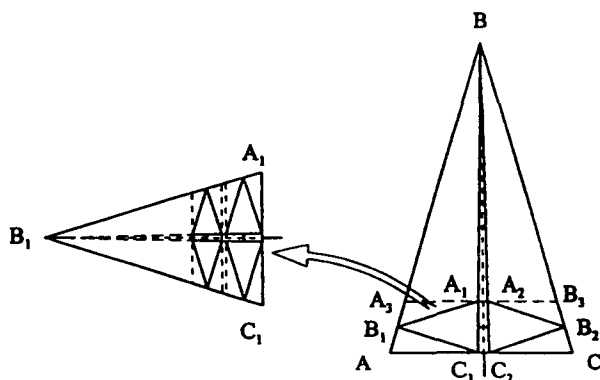
Przykładów fraktali spotykanych w naturze jest bardzo wiele. Wymieńmy tu np. drzewo, pień, gałęzie, gałązki, gałązeczki itd. Ludzkie płuca z tysiącami „rurek” i odgałęzień wykazują również strukturę samopodobną.

Twórca teorii fraktali, Benoit Mandelbrot [47] po raz pierwszy wskazał na nieregularność struktury rzeczywistości. O ile Galileusz uważał, że trójkąty, koła i inne proste figury geometryczne są typowe dla natury, to Mandelbrot odważnie stwierdził, że ani chmury nie są kołami, góry stożkami, a linia brzegowa kołem. Mają one natomiast strukturę fraktali.

Fraktale, w odróżnieniu od prostych figur geometrycznych, wykazują tę samą strukturę przy ich zmniejszaniu lub zwiększaniu. Jeśli znamy prawo tworzenia takich struktur, to możemy wykryć i zrozumieć geometryczną strukturę zjawisk nieregularnych.

Inaczej mówiąc, jeśli w naturze wykryjemy strukturę samopodobną, to aby samemu móc ją utworzyć, należy wykryć reguły matematyczne umożliwiające jej tworzenie. Ponieważ fraktale są obiektami geometrycznymi, to problem sprowadza się nie do napisania równań różniczkowych, ale na wprowadzeniu układu iterowanych odwzorowań. Czytelnika chcącego bardziej zgłębić teoretyczne podstawy teorii fraktali odsyłamy do pracy M. Barnsleya [48].

Rozpatrzmy teraz konstrukcję paproci Barnsleya. Na rys. 47 przedstawiono trójkąt ABC , a ponadto zaznaczono trójkąty $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$.



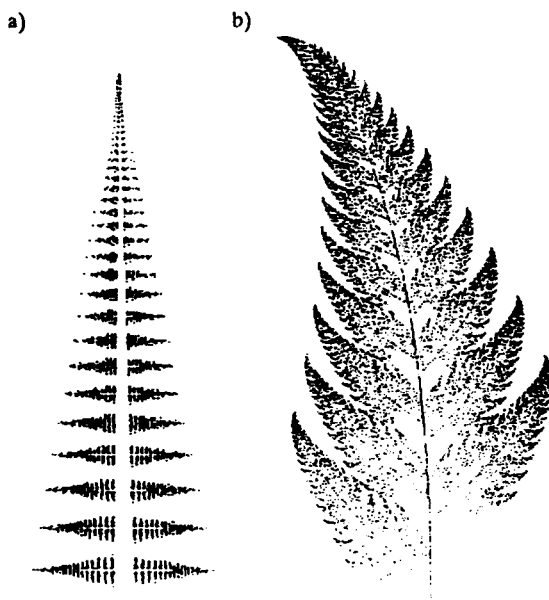
Rys.47. Schemat prowadzący do konstrukcji paproci Barnsleya

Jak widać z tego rysunku trójkąty A_3BB_3 , $A_1B_1C_1$ oraz A_2B_2C są podobne. W przypadku tych dwóch ostatnich są one również, po zmniejszeniu o wielkość A_1C_1/AC , obrócone o kąt 90° odpowiednio przeciwnie i zgodnie z kierunkiem ruchu zegara. Każdy liść takiej paproci (w kształcie trójkąta), zawiera małe listki (trójkąciki). Istnieje wiele innych podobieństw, ale wszystkie one są kombinacją wspomnianych trzech. Po wprowadzeniu czwartej specyficznej transformacji liść paproci w rezultacie geometrycznej konstrukcji może w dużym stopniu przypominać oryginalną paproć (rys. 48).

2.2. Odwzorowania afiniczne.

Odwzorowaniem afinicznym [8] na płaszczyźnie będziemy nazywać takie przekształcenie, które dowolnemu punktowi (x,y) przyporządkowuje nowy punkt $(\bar{x},\bar{y})$, taki, że:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= ax + by + c, \\ \bar{y} &= dx + ey + f.\end{aligned}\tag{2.1}$$



Rys. 48. Liść paproci z wykorzystaniem trzech (a) i czterech (b) transformacji

W zależności od relacji między współczynnikami $a+f$ dowolna płaska figura może po takim przekształceniu być przesunięta, rozciągnięta, bądź ściśnięta, powiększona lub zmniejszona, obrócona o pewien kąt, lub lustrzanie odbita względem pewnej osi. Często również punkty zaznaczamy dużymi literami i wówczas punkt $\bar{A}$ otrzymujemy z A po odwzorowaniu

$$\bar{A} = \phi(A).\tag{2.2}$$

Jeśli istnieje odwzorowanie odwrotne, to wówczas

$$\phi^{-1}\phi = I, \quad (2.3)$$

gdzie I jest odwzorowaniem tożsamościowym.

Po odwzorowaniu (2.1) linie proste i równoległe odwzorowują się również w linie proste i równoległe. Przy konstruowaniu fraktali stałe $a+f$ muszą być wyznaczone, co nieraz jest kłopotliwe.

Najprostsze odwzorowanie składa się z czynnika mnożącego (wydłużenia bądź skrócenia), obrotu i przesunięcia i wówczas

$$\begin{aligned} \bar{x} &= ax - by + e, \\ \bar{y} &= bx + ay + f. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Współczynnik wydłużenia lub skrócenia może być wyznaczony jako

$$s = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.5)$$

a kąt obrotu α może być wyznaczony ze związków:

$$\begin{aligned} a &= s \cos \alpha, \\ b &= s \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.6)$$

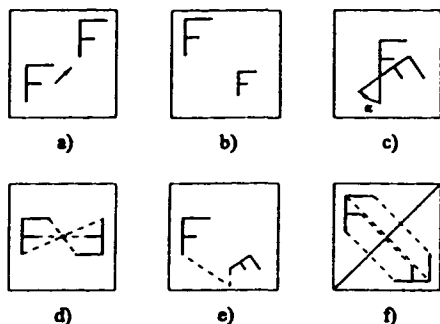
W przypadku odwzorowania z czynnikiem mnożącym i odbicia lustrzanego równania odwzorowania przyjmują postać

$$\begin{aligned} \bar{x} &= ax + by + e, \\ \bar{y} &= bx - ay + f. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Brak obrotu powoduje zerowania współczynnika ($b = 0$). Dla czystego obrotu o kąt α mamy

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ \bar{y} &= x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Na rys. 49 przedstawiono proste afiniczne odwzorowania litery F.



Rys. 49. Odwzorowanie afiniczne litery F: a) przesunięcie równoległe; b) zmniejszenie lub zwiększenie; c) obrót; d) odbicie; e) obrót połączony ze zmniejszeniem (lub zwiększeniem); f) odbicie osiowe

Najbardziej jednak ciekawe formy fraktali powstają przy nieliniowych związkach pomiędzy punktem a jego odwzorowaniem (obrazem).

2.3. Szeregi liczbowe a fraktale

Zajmijmy się bliżej równaniem kwadratowym

$$y^2 = y + 1. \quad (2.9)$$

Niech σ będzie jego pierwiastkiem, to wówczas

$$\sigma^2 = \sigma + 1. \quad (2.10)$$

Mnożąc obydwie strony powyższego równania przez σ^n mamy

$$\sigma^{n+2} = \sigma^{n+1} + \sigma^n. \quad (2.11)$$

Rozpatrzmy teraz kolejne potęgi σ

$$\sigma^0 = 1,$$

$$\sigma^1 = \sigma,$$

$$\sigma^2 = \sigma + 1 \text{ (patrz 2.10)}$$

$$\sigma^3 = \sigma\sigma^2 = \sigma(\sigma+1) = \sigma^2 + \sigma = 2\sigma + 1, \quad (2.12)$$

$$\sigma^4 = \sigma(\sigma^2 + \sigma) = \sigma^3 + \sigma^2 = 3\sigma + 2,$$

$$\sigma^5 = \sigma(\sigma^3 + \sigma^2) = \sigma^4 + \sigma^3 = 5\sigma + 3,$$

$$\sigma^6 = \sigma(\sigma^4 + \sigma^3) = \sigma^5 + \sigma^4 = 8\sigma + 5.$$

$$\sigma^7 = \sigma(\sigma^5 + \sigma^4) = \sigma^6 + \sigma^5 = 13\sigma + 8$$

Powyższy ciąg może być przedstawiony w formie

$$\sigma^n = a_n \sigma + a_{n-1}, \quad n \in \{2, 3, 4, 5, \dots\}, \quad (2.13)$$

przy czym współczynniki tego szeregu spełniają związki:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad (2.14)$$

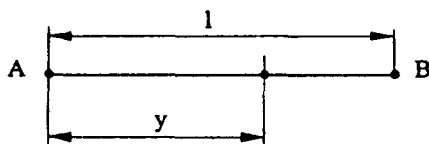
a wyrazami początkowymi są: $a_1 = a_2 = 1$.

Kolejnymi wyrazami tego szeregu są:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots \quad (2.15)$$

Ciąg ten nazywamy ciągiem Fibonacciego (patrz rozdział 1.1.12)

Równanie (2.9) związane jest z tzw. złotym podziałem (rys. 50).



Rys. 50. Odcinek AB o długości 1 jest podzielony według "złotego podziału", jeśli stosunek dwóch powstałych z podziału odcinków $(1-y)/y$ jest taki sam jak dłuższego z nich do całości

Zgodnie z definicją złotego podziału podaną pod rys. 50 mamy

$$\frac{1-y}{y} = \frac{y}{1}, \quad (2.16)$$

co prowadzi do równania

$$y^2 = 1 - y \quad (2.17)$$

Pierwiastkami tego równania są

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad (2.18)$$

a sens fizyczny ma pierwiastek $\rho = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (bo jest dodatni). Liczbą odwrotną do ρ oznaczmy jako

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad (2.19)$$

i $y_1 = \rho$ jest pierwiastkiem równania (2.9). Drugim pierwiastkiem równania (2.17) jest $y_2 = -\sigma$.

Natomiast pierwiastkami równania (2.9) są: $y_1 = \sigma$ i $y_2 = -\rho$. Wobec tego zgodnie z równaniem (2.9) mamy

$$(-\rho)^2 = (-\rho) + 1, \quad (2.20)$$

i analogicznie do (2.13) otrzymujemy

$$(-\rho)^n = a_n(-\rho) + a_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, 5, \dots \quad (2.21)$$

Odejmując stronami (2.13) i (2.21) otrzymujemy

$$\sigma^n - (-\rho)^n = a_n(\sigma + \rho). \quad (2.22)$$

Zgodnie z (2.19) mamy

$$\sigma + \rho = \sqrt{5}, \quad (2.23)$$

i ostatecznie otrzymujemy jawny wzór na wyrazy szeregu Fibonacciego w postaci

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\sigma^n - (-\rho)^n \right]. \quad (2.24)$$

A zatem n -tą liczbę Fibonacciego określoną szeregiem (2.24) otrzymujemy jako różnicę n -tych potęg pierwiastków równań kwadratowych (2.9) i (2.17). Dla dużego n ponieważ $\sigma > 1$ i $|\rho| < 1$ otrzymujemy

$$a_n \cong \frac{1}{\sqrt{5}} \sigma^n. \quad (2.25)$$

Zgodnie z (2.25) otrzymujemy

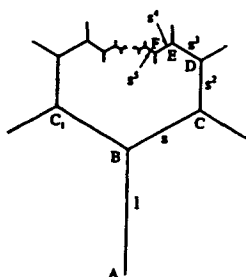
$$a_{n+1} \cong \frac{1}{\sqrt{5}} \sigma^{n+1}, \quad (2.26)$$

a dzieląc stronami dwa powyższe równania i przechodząc do granicy przy $n \rightarrow \infty$, otrzymujemy

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \quad (2.27)$$

Ponieważ σ związane jest ρ przez (2.19), natomiast ρ związane jest bezpośrednio ze złotym podziałem wobec tego zgodnie z (2.27) "złoty podział" może być przybliżony poprzez wartość graniczną otrzymaną z (2.27).

Jak do tej pory wskazaliśmy na szczególną rolę pierwiastków σ i ρ dwóch równań kwadratowych, oraz na rolę liczby niewymiernej $(\sqrt{5})$ związanej ze złotym podziałem. Obecnie wskażemy na związki pomiędzy złotym podziałem, a powstawaniem fraktali. Rozpatrzmy pierwotny odcinek jednostkowy o długości 1, w którego punkcie następuje "rozgałęzienie" i pojawiają się dwa mniejsze odcinki o długościach s ułożone symetrycznie i o kącie między nimi równym 120° , gdzie s jest współczynnikiem zmniejszenia (rys. 51)



Rys. 51. Schemat konstrukcji prowadzącej do powstania drzewa Pitagorasa

Nowo powstałe odcinki BC i BC_1 ulegają dalszym rozgałęzieniom tworząc po dwa nowe odcinki o długościach s^2 i o kątach między nimi również 120° , itd. Z konstrukcji widać, że łamana CDEFG.... podąża w granicy w kierunku prostej pionowej AB. Wobec tego rzutując kolejno powstające odcinki na oś poziomą otrzymujemy

$$s \cos 30^\circ = s^3 \cos 30^\circ + s^4 \cos 30^\circ + s^5 \cos 30^\circ + s^6 \cos 30^\circ + \dots, \quad (2.28)$$

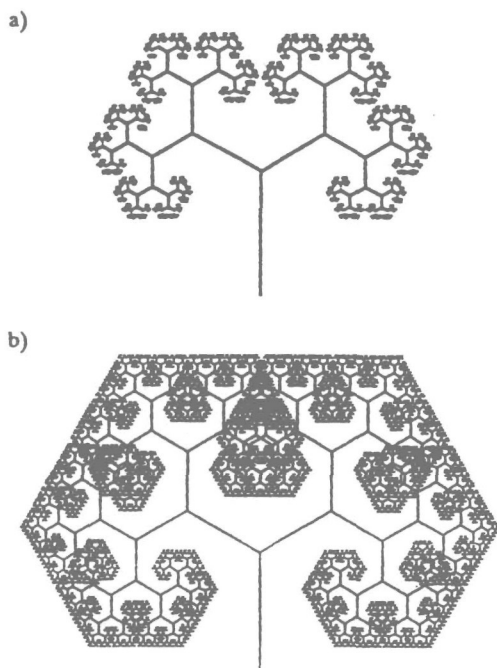
co prowadzi do równania

$$1 = s^2 (1 + s + s^2 + \dots). \quad (2.29)$$

Szereg w nawiasie jest szeregiem geometrycznym, a ponieważ $|s| < 1$, to jego suma wynosi $\frac{1}{(1-s)}$, co zgodnie z (2.18) prowadzi do równania kwadratowego

$$s^2 = 1 - s, \quad (2.30)$$

a więc do dyskutowanego już równania (2.17), którego pierwiastkiem jest $s = \rho$. Nieznaczna modyfikacja opisanej konstrukcji prowadzi do tzw. drzewa Pitagorasa (rys. 52). W przypadku, gdy kąt między kolejnymi położeniami odcinków wynosi 45° , a współczynnik zmniejszenia wynosi $1/\sqrt{2}$, to kształt drzewa Pitagorasa przedstawiono na rys. 52b).

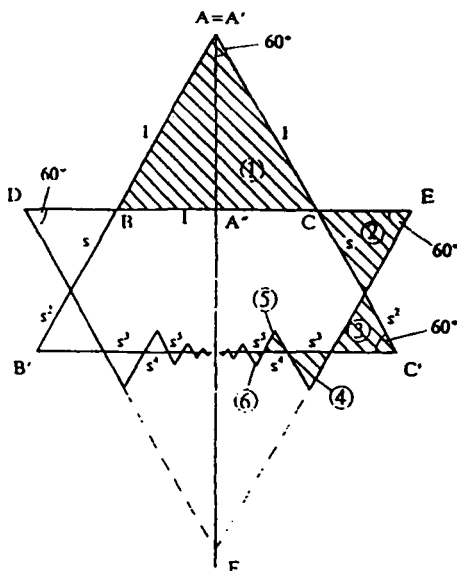


Rys. 52. Drzewo fraktalne

Innym przykładem fraktala, konstrukcja którego również związana jest ze złotym podziałem, jest fraktal trójkątny. Konstrukcja prowadząca do takiego fraktala trójkątnego jest następująca (rys. 53). Trójkąt równoboczny $AB'C'$ przetnijmy innym trójkątem równoramiennym DEF , w taki sposób, że powstają trzy równoboczne trójkąty o bokach odpowiednio 1, s i s^2 . Wielkość s (współczynnika zmniejszenia) znajdziemy z warunku, aby przedstawiona na rysunku łamana zbliżała się przy liczbie trójkątów dążących do nieskończoności do prostej pionowej AA'' .

Z rys. 53 widać, że

$$\begin{aligned}
 s \cos 60^\circ + s \cos 60^\circ + s^2 \cos 60^\circ &= \\
 &= 2(s^2 \cos 60^\circ + s^3 \cos 60^\circ + s^4 \cos 60^\circ + s^5 \cos 60^\circ + \dots).
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$



Rys. 53. Schemat prowadzący do wyznaczenia współczynnika zmniejszenia s przy konstrukcji fraktala trójkątnego.

Uwzględniając, że $|s| < 1$, otrzymujemy

$$1 + s + s^2 = 2 \frac{s^2}{1 - s}, \quad (2.32)$$

co prowadzi do równania trzeciego stopnia

$$s^3 + 2s^2 - 1 = 0. \quad (2.33)$$

Jak łatwo zauważyć $s = -1$ jest pierwiastkiem tego równania i wobec tego po podzieleniu go przez $s + 1$ otrzymujemy (2.30), którego pierwiastkiem jest $s = \sigma$.

2.4. Ciąg Fibonacciego i dynamika niektórych procesów w przyrodzie

Okazuje się, że liczby płatków wielu kwiatów wykazują zadziwiającą prawidłowość [49-51]. Lilie posiadają 3 płatki, jaskry maja ich 5, nagietki mają 13

płatków, podczas gdy astry 21, większość z odmian stokrotek mają ich 34, 55 lub też 89. Porównując te liczby z (2.14) widać, że są one kolejnymi wyrazami ciągu Fibonacciego. Można jednak wymienić wiele innych kształtów, których liczba płatków nie ma nic wspólnego z liczbami Fibonacciego.

Patrzac np. na tarczę słonecznika, można zauważyć, że kwiaty układają się wzdłuż dwóch rodzin wzajemnie nakładających się na siebie spiral. Jedne z nich nawijają się w kierunku ruchu wskazówek zegara, a inne w kierunku przeciwnym. Tych pierwszych jest 34, a tych drugich 55. Są to liczby z ciągu Fibonacciego. Liczby te zmieniają się ze zmianą gatunku słonecznika, ale też należą do ciągu Fibonacciego [49].

A teraz prześledźmy dynamikę wzrostu rośliny. W środku wierzchołka znajduje się stożek wzrostu. Wokół niego skupione są niewielkie grudki - zawiązki. Z czasem zawiązki oddalają się od stożka wzrostu i potem rozwijają się w liść lub płatek. Okazuje się, że zawiązki ułożone są wzdłuż spirali zwanej spiralą generującą. Prowadząc proste przechodzące przez środek każdego zawiązku i środek stożka wzrostu i następnie mierząc kąty pomiędzy kolejnymi zawiązkami z punktu będącego środkiem stożka wzrostu [49] okazało się, że zawiązki są w przybliżeniu równo odległe o wielkość stałego kąta zwanego kątem dywergencji. Właśnie ten kąt dywergencji jest "złotym kątem". Ze złotym podziałem związana jest liczba $\rho = 1/\sigma = 0.618033$, a "złotemu kątowi" odpowiada kąt $\varphi = 360^\circ(1-\rho) = 137.5^\circ$.

Jeśli teraz ramiona kolejnych kątów odległe będą od siebie o złoty kąt, to kolejne punkty przecięcia kolejnych ramion kolejnych kątów przetną się ze spiralą generującą wzdłuż wcześniej wspomnianych dwóch rodzin spiral (liczba tych spiral jest również "złotą").

Jeśli zachodzą wspomniane wyżej związki to ułożenia ziaren lub płatków w rozważanej roślinie jest najbardziej efektywne. Jeśli ρ byłaby dowolną liczbą wymierną, to pomiędzy ziarnkami byłoby dużo niewykorzystanej przestrzeni.

Jako kolejny przykład rozpatrzmy drzewo genealogiczne trutnia [46]. Truteń

zapładnia królową, a z jajka pszczelego powstają zawsze dwa osobniki, męski (σ) i żeński (ϕ). Osobnik płci męskiej musi dążyć do zapłodnienia płci odmiennej, stąd strzałka zawsze od osobnika płci męskiej będzie prowadzić do osobnika płci żeńskiej. Takie drzewo genealogiczne trutnia przedstawiono na rys. 54.

Dla różnych poziomów n otrzymujemy kolejne liczby ciągu Fibonacciego. Można przypuszczać (o ile byłoby to biologicznie uzasadnione), że w granicy otrzymujemy liczbę ϕ . Tak więc rys. 54 przedstawia fraktalne drzewo genealogiczne trutnia.

2.5. Definicja, wymiar i przykłady fraktali

Podanie ścisłej definicji fraktali nie jest zadaniem prostym [8].

Definicja (Mandelbrot)

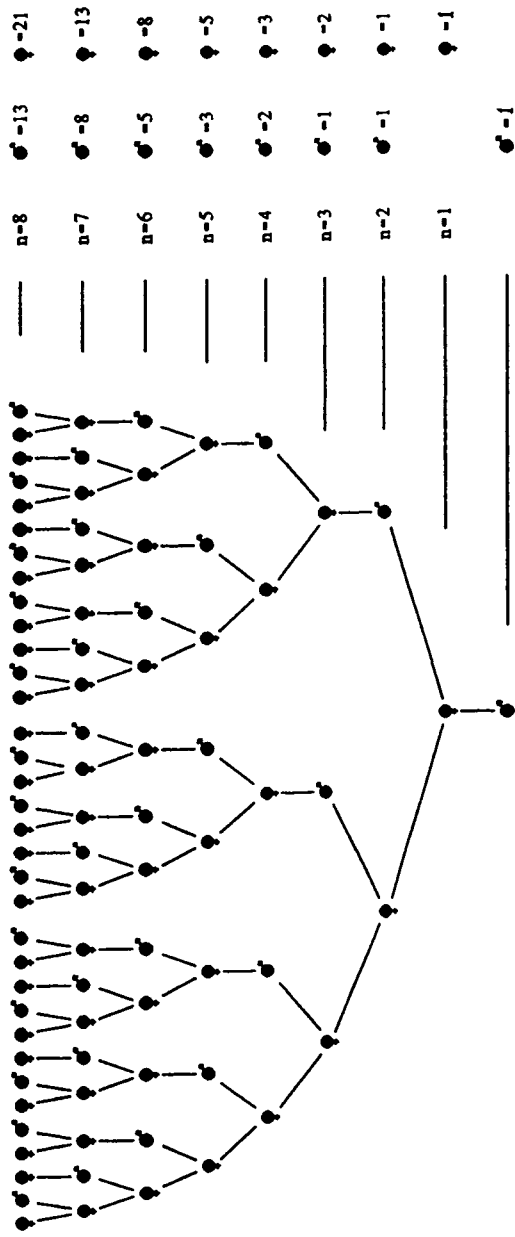
Fraktalami nazywamy takie zbiory geometryczne, które są określone poprzez zależność rekurencyjną (a nie poprzez wzór matematyczny), posiadają cechę samopodobieństwa oraz ich wymiar nie jest liczbą całkowitą.

Definicja powyższa składa się z trzech własności. Dwie pierwsze z nich zostały już wcześniej dyskutowane w tym rozdziale. Warto tu podkreślić, że własności te nie charakteryzują w pełni jedynie fraktali, bo takie własności mogą niekiedy posiadać twory geometryczne nie będące fraktalami (chyba, że przyjąć zasadę, że wszystkie obiekty geometryczne są fraktalami, a wymienione twory są fraktalami osobliwymi).

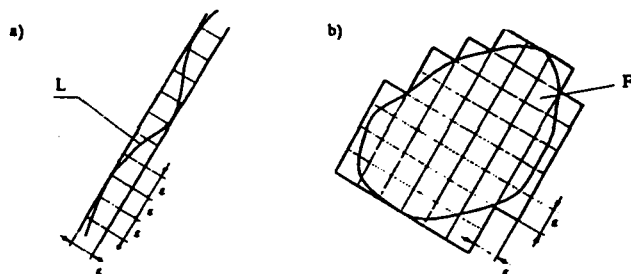
Jeśli chodzi o wymienioną własność, to przypomnijmy, że np. punkt lub skończony zbiór punktów posiada wymiar równy zeru, odcinek ma wymiar jeden, dowolny wymiar płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ ma wymiar dwa, podobnie jak płaszczyzna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Okazuje się, że fraktale posiadają wymiar, który nie jest liczbą całkowitą. Kudrewicz [8] zauważa, że obecnie istnieje tak wiele definicji wymiaru, że praktycznie wymiar stał się funkcją charakteryzującą fraktal. W definicji wymiaru występuje parametr $\alpha \in (0, \infty)$ i wobec tego wymiarem jest funkcja tego parametru.

Załóżmy, że chcemy wyznaczyć wymiar tworu geometrycznego znajdującego się w n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Pokryjemy go częściami n -wymiarowymi o boku ε .

Niech $N(\epsilon)$ będzie liczbą minimalną takich kostek potrzebnych do pokrycia badanego tworu (rys. 55).



Rys. 54 Drzewo genealogiczne trutnia



Rys. 55. Pokrycie kwadratami o boku ε linii (a) i obiektu dwuwymiarowego (b)

Jak widać z rysunku 55a) dla $\varepsilon \rightarrow 0$ kwadraty coraz lepiej układają się wzdłuż linii L, a ich liczba $N(\varepsilon)$ będzie proporcjonalna do $1/\varepsilon$. Im mniejsze ε , to liczba N rośnie odwrotnie proporcjonalnie do ε . Dla obiektu dwuwymiarowego proporcjonalność ta opisana jest związkiem $N(\varepsilon) \approx (1/\varepsilon)^2$, natomiast dla obiektów trójwymiarowych zachodzi zależność $N(\varepsilon) \approx (1/\varepsilon)^3$. Do tej pory wykładnikiem proporcjonalności była liczba całkowita. W ogólnym przypadku

$$N(\varepsilon) \approx \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d, \quad (2.34)$$

gdzie d nie musi być liczbą całkowitą. Zgodnie z (2.34) mamy (jest to propozycja Kołmogorowa)

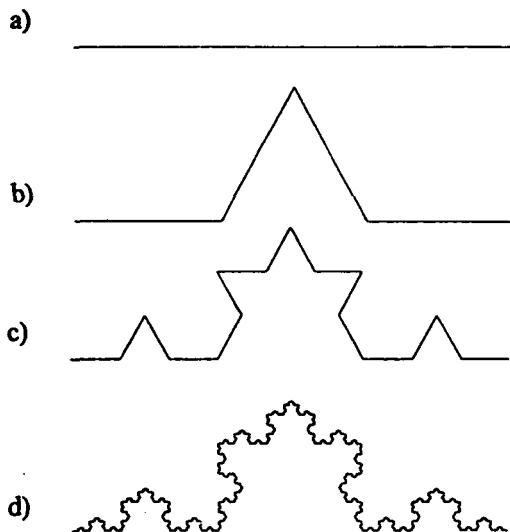
$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}, \quad (2.35)$$

gdzie d jest wymiarem (pojemnościowym).

Rozpatrzmy teraz kilka podstawowych fraktali i obliczmy dla niektórych z nich odpowiadający im wymiar.

A. Krzywa von Kocha (1904 r.)

Konstrukcja krzywej von Kocha jest stosunkowo prosta (rys. 56).



Rys. 56. Kolejne etapy konstrukcji krzywej von Kocha

Za konstrukcję odpowiedzialna jest liczba 3. Dowolny odcinek dzielimy na 3 części i z części środkowej tworzymy trójkąt równoboczny o boku równym długości $1/3$ wyjściowego odcinka. W podobny sposób postępujemy z czterema nowo powstałymi odcinkami. Jeśli wyjściowy odcinek ma długość 1 to łamaną na rys. 56d można pokryć czterema kwadratami o boku $1/3$ lub też ogólniej, 4^n kwadratami o boku $\varepsilon = (1/3)^n$. Zgodnie z (2.35) otrzymujemy

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(4^n)}{\log(3^n)} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26186 \quad (2.36)$$

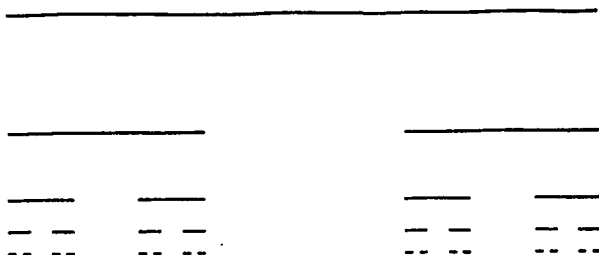
B. Zbiór Cantora (1883r.)

Zbiór Cantora konstruujemy w sposób nieco podobny do krzywej von Kocha (rys. 57).

Wyjściowy odcinek (o długości 1) dzielimy na 3 części i usuwamy środkową część podziału. W podobny sposób postępujemy z dwoma pozostałymi odcinkami, itd. Otrzymany zbiór przy liczbie podziałów dążącej do nieskończoności nazywamy zbiorem Cantora. Zbiór ten posiada długość równą zero, jest on nigdzie gęsty i posiada

nieprzeliczalną liczbę punktów. Jak widać z rys. 57 zbiór ten daje się pokryć dwoma kwadratami o boku $1/3$, albo 4 kwadratami o boku $1/9$, albo 2^n kwadratami o boku $(1/3)^n$, czyli

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n}{\log 3^n} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.63093. \quad (2.37)$$



Rys. 57. Ilustracja konstrukcji prowadzącej do zbioru Cantora

C. Trójkąt Sierpińskiego.

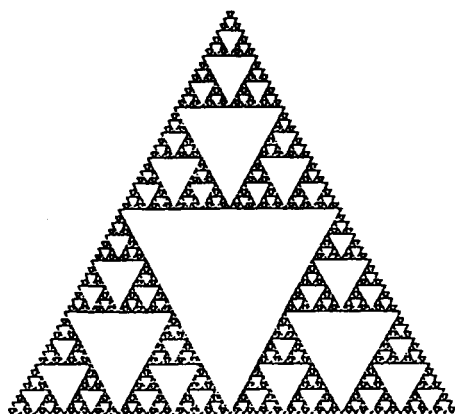
Rozpatrzmy równoboczny trójkąt o boku długości 1. Łącząc środkowe punkty każdego z jego trzech boków otrzymamy nowy trójkąt równoboczny, który usuwamy. Podobnie postępujemy z pozostałymi trzema trójkątami, itd. (rys. 58)

Opierając się na dwóch poprzednich przykładach i korzystając ze wzoru (2.35) wyznaczamy wymiar

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3^n)}{\log(2^n)} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.58496. \quad (2.38)$$

Istnieje jednak inna i prostsza metoda określenia wymiaru. Już wcześniej wspominaliśmy o współczynniku zmniejszenia lub kontrakcji, który jest składnikiem ciągu transformacji prowadzących do powstania fraktala. Jeśli istnieje kilka takich współczynników kontrakcji $s_1, s_2, \dots, s_n$, to muszą one być związane poprzez jedną liczbę, zwaną wymiarem Hausdorffa według wzoru:

$$s_1^D + s_2^D + \dots + s_m^D = 1. \quad (2.39)$$



Rys. 58. Konstrukcja oparta na trójkącie Sierpińskiego prowadząca do powstania siła fraktalnego

W ogólnym przypadku pojęcie wymiaru Hausdorffa jest trudniejsze niż wymiaru pojemnościowego, ale na szczęście dla prostych fraktali wymiar pojemnościowy i wymiar Hausdorffa są sobie równe ($d = D$), chociaż w ogólnym przypadku prawdziwa jest nierówność $d \geq D$.

Powróćmy na chwilę do krzywej von Kocha. Z rys. 56 widać, że cała krzywa Kocha składa się z czterech części ($m = 4$), a każda część jest zmniejszona o wartość $1/3$. Zgodnie z (2.39) mamy

$$4\left(\frac{1}{3}\right)^D = 1, \quad (2.40)$$

skąd znajdujemy $D = d = 1.26186$.

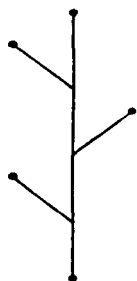
W przypadku rozważanego trójkąta Sierpińskiego (rys. 58) widać wyraźnie trzy trójkąty, które są następnie zmniejszane ze współczynnikiem kontrakcji $1/2$. Wobec tego mamy

$$3\left(\frac{1}{2}\right)^D = 1, \quad (2.41)$$

i otrzymujemy $D = d = 1.58496$.

D. Fraktale Lindenmayera (1989r.).

Holenderski biolog A. Lindenmayer wskazał na pewną nową metodę opisu struktur roślin. Metoda ta polega na wprowadzeniu szeregu symboli opisującej dynamikę wzrostu rośliny lub jak okaże się dalej, dynamiki tworzenia fraktali. Niech L wytycza kierunek wzrostu rośliny, niech "+" "-" oznacza zmianę kierunku wzrostu początkowej gałęzi w lewo (prawo). Przyporządkowując symbolom "+" i "-" określone wartości kątów możemy również otrzymać interpretację graficzną takiego procesu wzrostu (rys. 59).



Rys. 59. Model krzaka oparty na symbolach Lindenmayera

Dynamika wzrostu takiej rośliny związana jest z kolejnością ułożenia symboli Lindenmayera. Rozpatrzmy przykładowe kolejne zbiory takich symboli:

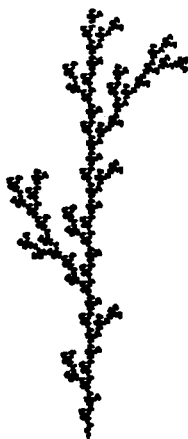
Faza 1 wzrostu	L
Faza 2 wzrostu	-L+L~
Faza 3 wzrostu	--L~+-L--
Faza 4 wzrostu	+L~+-L~ -+- -L~+-L+

Każdej z wymienionych wyżej faz można przyporządkować określony rysunek charakteryzujący daną fazę wzrostu. Przykład takiej struktury krzewu fraktalnego przedstawia rys. 60.

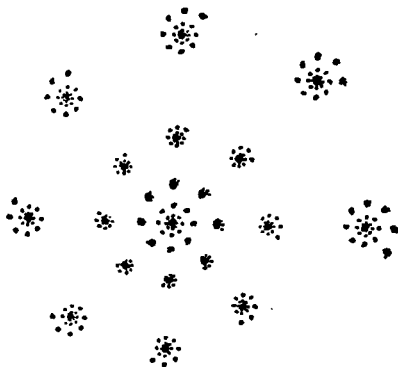
E. Fraktalne chmury w kształcie spiral.

Jako kolejny przykład fraktala rozpatrzymy sposób tworzenia fraktalnych chmur, z których każda jest w kształcie spirali (rys. 61).





Rys. 60. Krzew Lindenmayera



Rys. 61. Chmury w kształcie spiral

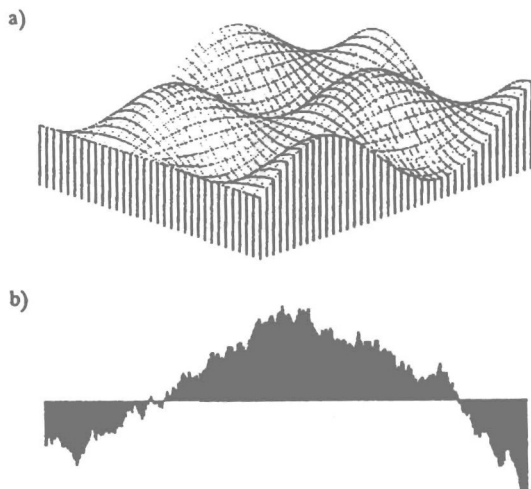
Konstrukcja tego fraktala opiera się na wykorzystaniu dwóch współczynników s_1 i s_2 , przy czym prawdopodobieństwo "p" realizacji jednej z dwóch transformacji określone jest wzorem

$$\frac{p}{1-p} = \frac{s_1}{s_2}. \quad (2.42)$$

F. Krajobrazy i fraktale.

Na koniec przykładów związanych z tworzeniem fraktali nawiążemy do struktury otaczającego nas świata. Mandelbrodt wyraźnie dał do zrozumienia, że natura

nie składa się z wyidealizowanych obiektów geometrycznych takich jak koło, trójkąt, kwadrat itd. Za pomocą specyficznych odwzorowań można tworzyć fraktalne fałszerstwa natury. Na rys. 62a i 62b przedstawiono fraktalny krajobraz terenu pofałdowanego i terenu górskiego. Jak widać z tego rysunku, konstrukcja fraktalna w dużym stopniu przypomina krajobraz rzeczywisty.



Rys. 62. Fraktalny krajobraz terenu pofałdowanego (a) i terenu górskiego (b)

3. Zakończenie

3.1. Chaos, fraktale a nasza rzeczywistość

Z obydwu wcześniejszych rozdziałów łatwo zauważyć, że zarówno teoria chaosu jak i teoria fraktali dotyczą opisu zjawisk związanych z dynamiką i strukturą nieregularną. O ile w pierwszym przypadku niewątpliwie dominuje dynamika, to w drugim przewagę posiada geometria. Obydwie te teorie wzajemnie się uzupełniają i wzbogacają. Jednym z przykładów łączących obydwie te dziedziny jest zbiór Cantora. Jest on fraktalem, a jednocześnie dziwnym atraktorem chaotycznym.

Fascynacja fraktalami doprowadziła do zupełnie nowego widzenia struktury przyrody i wszechświata. Struktura drzew i krzewów połączona z dynamiką wzrostu, reprezentacje gór, powierzchni terenu i krajobrazów, układy chmur czy kształt płatka śniegu, dają się w bardzo przekonujący sposób przybliżyć strukturami fraktalnymi.

Być może rozkład galaktyk we wszechświecie jest fraktalem. Zjawisko dynamiki fraktalnej obserwować możemy podczas powstawania przepływu turbulentnego. Energia wody przechodzi od dużych do coraz to mniejszych i mniejszych fraktalnie podobnych wirów. Niektóre cechy turbulencji mogą być nawet mierzone poprzez wymiary fraktalne.

Nasuwa się na koniec również pewna refleksja filozoficzna. Została ona w pewnym sensie wyrażona przez kilka zdań cytowanego wcześniej poety C. Spleissa. Człowiek jako jedna mała część wszechświata jednocześnie do niego należy i jednocześnie go kreuje. Podlega on prawom wielkiego Fraktala-Wszechświata i jest mu ciągle ofiarowywany, a jednocześnie istnieje samodzielnie i w dużym stopniu sam decyduje o swoim życiu i przyszłości, choć nie do końca. Człowiek traktowany może być jako punkt przecięcia realizacji determinizmu i indeterminizmu, dwóch

konkurencyjnych światopoglądów reprezentowanych w filozofii. Matematyczny kod realizacji (tworzenia) fraktala związany jest z determinizmem, podczas gdy próby czynione przez człowieka w celu oderwania się od tej struktury mogą być interpretowane jako indeterminizm wprowadzony przez Naturę, chociaż z punktu widzenia Jednostki są one w pełni zdeterminowane. Nasuwa się tutaj analogia pomiędzy wizją widzenia świata zaproponowaną przez Sorokina w artykule "Zasada zmiany immanentnej". Nasz los jest deterministycznie wyznaczony, choć dopuszcza on zmiany immanentne, które z pozoru wskazują na pełną swobodę działania, a przecież realizują tylko ten jeden nieodgadniony cel dynamiki wielkiego fraktala, którym jest wszechświat. Kontynuując ten tok myślenia nieco dalej można wysunąć wniosek, że skoro człowiek jest jedną znikomo małą cząstką takiego fraktala i podlega bez względu na swą wolę realizowanej dynamice Jego istnienia, to być może prawo tego istnienia jest poza możliwością poznania człowieka.

Często poprzez stronicę tej książki przewijała się liczba po raz pierwszy wyraźnie wskazana przez Pitagorasa i uznana przez jego uczniów. Liczby towarzyszyły tej pracy bardzo wyraźnie i realizowały się poprzez chaos i fraktale. Przypomnijmy sobie rolę liczby w przesunięciach Bernoulliego, rolę liczby 3 w tworzeniu chaosu [52] i niektórych fraktali, rolę (będących liczbami) wymiarów fraktalnych czy wykładnika Lapunowa, rolę liczb niewymiernych i dynamiki quasi-okresowej, itd.

Być może dalszy rozwój dynamiki chaotycznej i fraktalnej coraz wyraźniej wykaże słusność idei Pitagorasa, który figury geometryczne charakteryzował liczbami i widział możliwość wyrażania poprzez liczby wrażeń estetycznych, kształtów i barw. Bardzo wyraźnie takie widzenie całej rzeczywistości prezentuje polski artysta- malarz Roman Opalka. Podjął on próbę opisu czasu poprzez liczby reprezentujące szereg nieskończony w opozycji do szeregu liczb skończonego reprezentującego życie. Pitagorejska liczba 1 pojawiła się w lewym górnym rogu jego pierwszego obrazu, który zawierał 35327 liczb. Ta samorealizacja poprzez liczby jest dla Opalki jedynym rzeczywistym sensem życia na drodze ku samemu sobie. Jego przeżycia estetyczne,



życie codzienne, wrażenia słuchowe i dotykowe są utrwalane za pomocą ciągu liczb. Nawet "Rysunki z podróży" to ciągi liczb pisane piórem na papierze. Czyż zatem poprzez życie i działalność tego twórcy nie realizuje się twierdzenie Pitagorasa, że "Wszystkie rzeczy są liczbami"?

Literatura

1. A.Krokiewicz, *Zarys filozofii greckiej*. Instytut Wydawniczy PAX, Warszawa 1971.
2. B.P. Demidowicz, *Matematyczna teoria stabilności*. WNT, Warszawa 1972.
3. S. Kaliski (red.), *Drgania i fale w ciałach stałych*. PWN, Warszawa 1966.
4. L. Meirovitch, *Analytical methods in vibrations*. The Mac-Millan Company, New York 1967.
5. J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector fields*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1983.
6. G. Iooss, D. Joseph, *Elementary stability and bifurcation theory*. Springer-Verlag, New York 1980.
7. J. Awrejcewicz, *Dynamika nieliniowa maszyn*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1994.
8. J. Kudrewicz, *Fraktale i chaos*. WNT, Warszawa 1993.
9. J. Awrejcewicz, *Matematyczne metody mechaniki*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1995.
10. A.M. Samoilenko, *Elementy matematycznej teorii mnogocastotnych kolebanij*. Nauka, Moskwa 1987.
11. C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan, J.A. Yorke, *Strange attractors that are not chaotic*. Physica D 11, 1984, 261-268.
12. M.V. Jakobson, *Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one dimensional maps*. Commun. Math. Phys. 81, 1981, 39-88.
13. S.W. McDonald, C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, *Fractal basin boundaries*. Physica, D 17, 1985, 125-153.
14. A.N. Molcanov, *O rezonansnoi strukture Solnečnoj sistemy. Sovreimionnyje problemy niebiesnoi mechaniki i astronautyki*. Nauka, Moskwa, 1973.
15. I.I. Blechman, *Synchronizacja dynamических систем*. Nauka, Moskwa 1971.



16. I.I. Blechman, P.S. Landa, M.G. Rosenblum, *Synchronization and chaotization phenomena in oscillatory and rotatory dynamical systems*". W książce: J. Awrejcewicz (red.), *Nonlinear dynamics: new theoretical and applied results*. Akademie Verlag, Berlin 1995.
17. L. Dieci, J. Lorenz, R.D. Russel, *Numerical calculation of invariant tori*. SIAM J. Sci. Stat Comput. 12, 1996, 607-622.
18. L.O. Chua, A. Ushida, *Algorithms for computing almost periodic steady-state response of nonlinear systems to multiple input frequencies*. TEET Trans. Circ. and Sys. Cas-28, 1981, 953-988.
19. Chr. Kaas – Petersen, *Computation, continuation and bifurcation of torus solutions for dissipative maps and ordinary differential equations*. Physica 25D, 1987, 288-306.
20. R.K. Tavakol, A. S. Tworkowski, *On the occurrence of quasi-periodic motion on three tori*. Phys. Lett. A 100, 1984, 65-69.
21. F.H. Ling, *Quasi-periodic solutions calculated with the simple shooting technique*. J. of Sound and Vibration 144(2), 1991, 293-304.
22. Ch. Hayashi, *Drgania nieliniowe w układach fizycznych*. PWN, Warszawa 1963
23. V.I. Oseledec, *A multiplicative ergodic theorem. Liapunov characteristic numbers for dynamical systems*. Trans. Moscow Math. Soc. 19, 1968, 197-231.
24. G.L. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J.-M. Strelcyn, *Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems : a method for computing all of them*. Part 1. Theory. Meccanica 15, 1980, 9-20. Part 2. Numerical application. Meccanica 15, 1980, 21-29.
25. A. Wolf, *Quantifying chaos with Lyapunov exponents*. W książce A.V. Holden (red.), *Chaos*. Manchester University Press, Manchester, 1986, 273-290.
26. M.I. Rabinovic, D.I. Trubeckov, *Wwiedeniye w teorii kolebanij woln*. Nauka Moskwa 1984.
27. I. Stewart, *Czy Bóg gra w kości? Nowa matematyka chaosu*. PWN, Warszawa 1994.



28. H.G. Schuster, *Deterministic chaos. An introduction (second revised version)*. VCH, Weinheim 1989.
29. W.H. Steeb, *Chaos and fractals. Algorithms and computations*. B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich 1992.
30. P. Bak, T. Bohr, M.H. Jensen, D.V. Christiansen, *Josephson junctions and circle maps*. Solid State Commun. 51, 1984, 231-236.
31. P. Bak, M.H. Jensen, *Mode locking and the transitions to chaos in dissipative systems*. Physica Scripta T9, 1985, 50-55.
32. M.H. Jensen, P. Bak, T. Bohr, *Complete devil's staircase, fractal dimension and universality of mode locking structures*. Phys. Rev. Lett. 50, 1983, 1637-1646.
33. A.V. Khinchin, *Continued functions*. University of Chicago Press, Chicago, 1964.
34. Yu.I. Neimark, *Dinamiceskije sistemy i upravliaennyye procesy*. Nauka, Moskwa 1978.
35. T. Kiliyas, A. Mögel, W. Schwarz, *Generation and application of broadband signals using chaotic electronic systems*. W książce J. Awrejcewicz (red.) *Nonlinear dynamics: new theoretical and applied results*. Akademie Verlag, Berlin 1995.
36. M. Henon, *A two-dimensional map with a strange attractor*. Commun. Math. Phys. 50, 1976, 69-75.
37. R. Seydel, *From equilibrium to chaos. Practical bifurcation and stability analysis*. Elsevier, Amsterdam 1988.
38. J. Awrejcewicz, *Bifurcation and chaos in simple dynamical systems*. World Scientific, Singapore 1989.
39. J. Awrejcewicz, *Bifurcation and chaos in coupled oscillators*. World Scientific, Singapore 1991.
40. H.E. Nusse, J.A. Yorke, *Dynamics: numerical explorations*. Springer - Verlag, New York 1994.
41. C. Simo, *On the Hénon-Pomeau attractor*. J. Stat. Phys. 21, 1979, 465-494.
42. W. Szemplińska - Stupnicka, *The behaviour of non-linear vibrating systems*. Vol. I,



- II. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
43. K.L. Janicki, *Zjawiska bifurkacji subharmonicznych, ucieczki i przejścia do chaosu w nieliniowym oscylatorze. Metody perturbacyjne a eksperyment numeryczny*. Praca doktorska, Warszawa 1994.
44. Y. Ueda, *Explosion of strange attractors exhibited by Duffing's equation*. Annals of the New York Academy of Sciences 357, 1980, 422-423.
45. E.N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*. Journal of Atmospheric Science 20, 1963, 130-141.
46. H. Walser, *Der Goldene Schnitt*. Verlag der Fachvereine *Einblick in die Wissenschaft*, Zürich 1993.
47. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*. W.H. Freeman and Corp., New York 1983.
48. M. Barnsley, *Fractals everywhere*. Academic Press, New York 1988.
49. I. Stewart, *Matematyczne rekreacje*. Świat nauki 3(43), 1995, 87-90.
50. P. Prusinkiewicz, A. Lindenmayer, *The algorithmic beauty of plants*. Springer-Verlag, New York 1990.
51. St. Douady, Y. Couder, *La Physique des spirales vegetales*. Le Recherche 24, 250, 1993, 26-38.
52. T.-V. Li, J.A. Yorke, *Three implies chaos*. Amer Math. Monthly 82, 1975, 985-991.



78057/s