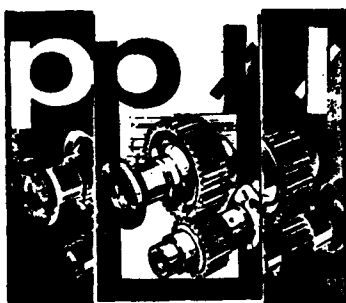


1639/IV



EXUBRIS

politechnika łódzka • łódź • biblioteka



Zbiorów Biblioteki Głównej Politechniki Łódzkiej

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

JAN AWREJCEWICZ

**CHAOS I SYNCHRONIZACJA
W UKŁADACH FIZYCZNYCH**

MONOGRAFIE

Łódź 1995



**Recenzenci: prof. dr hab. Andrzej Radowicz
prof. dr Zbigniew Wesołowski**

**KOMITET REDAKCYJNY
WYDAWNICTW POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ**

**Przewodniczący: dr hab. Andrzej Jopkiewicz, prof.
Redaktor Naukowy Wydziału: dr hab. Jerzy Nowacki, prof.
Redaktor Serii: prof. dr hab. Michał Tadeusiewicz**



1639/W

**WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
93-005 Łódź, ul. Wólczajska 223**

ISBN 83-86453-58-3

Nakład 250 + 41 egz. Ark. wyd. 6,0. Ark. druk. 7,0. Papier offset 70 g 70 × 100
Podpisano do druku 11 VIII 1995 r. Druk ukończono we wrześniu 1995 r.
Zamówienie 95/95.
Wykonano w A.C.G.M. SA. LODART, 93-005 Łódź, ul. Wólczajska 223.



Dr 1639/95

Spis Treści

1. Wstęp	7
2. Identyfikacja chaosu	9
2.1. Podstawowa terminologia	9
2.2. Wykładniki Lapunowa	20
2.3. Widmo częstości	22
2.4. Funkcja autokorelacji	23
3. Układy dyskretne	25
3.1. Wprowadzenie	25
3.2. Odwzorowanie Bernoulliego	30
3.3. Odwzorowania logistyczne	32
3.4. Odwzorowanie okręgu w okrąg	39
3.5. Odwzorowanie Hénona	45
3.6. Odwzorowanie Ikedy	55
4. Układy ciągłe	61
4.1. Wprowadzenie	61
4.2. Oscylator nieautonomiczny o różnych potencjałach $V(y)$	61
4.3. Funkcja Mielnikowa i chaos	65
4.4. Oscylator van der Pola z okresowym wymuszeniem zewnętrznym	69
4.5. Atraktor Lorenza	73
5. Synchronizacja	81
5.1. Wprowadzenie	81
5.2. Proste układy samowzbudne z wymuszeniem	82
5.2.1. Oscylator van der Pola	82
5.2.2. Oscylator van der Pola – Duffinga	84
5.2.3. Oscylator van der Pola – Duffinga ze wzbudzeniem parametrycznym	84
5.2.4. Układy nieautonomiczne z $1\frac{1}{2}$ stopniem swobody	84

5.3. Układy samowzhusdne elektryczne.....	85
5.3.1. Wprowadzenie	85
5.3.2. Metoda funkcji opisujucej.....	85
5.3.3. Dynamika prostych generatorów	86
6. Zastosowanie sygnałów chaotycznych w układach elektronicznych	95
7. Kontrola sygnałów chaotycznych.....	99
Literatura.....	103

Przedmowa

Niniejsza praca przeznaczona jest dla studentów wydziałów mechanicznych oraz dla uczestników studiów doktoranckich prowadzących do nadania stopnia doktora nauk technicznych o kierunku "Mechanika" i "Budowa i eksploatacja maszyn".

Może być ona również przydatna dla studentów i absolwentów Wydziałów Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej.

Materiał zawarty w tej pracy obejmuje tematykę związaną z chaosem deterministycznym i zjawiskiem synchronizacji układów fizycznych. Rozważania teoretyczne uzupełnione zostały licznymi przykładami, głównie z dziedziny mechaniki i elektrotechniki.

Autor



Ze zbiorów Biblioteki Głównej Politechniki Łódzkiej

1. Wstęp

Dynamika chaotyczna i synchronizacja to dwa przeciwstawne procesy obserwowalne w układach fizycznych, biologicznych bądź też chemicznych. Pierwszy z nich wyraża się tendencją do pewnego nieuporządkowania, podczas gdy drugi dążeniem do prostoty i regularności. Poprzez zmiany parametrów lub warunków początkowych istnieje możliwość przejścia od jednego procesu do drugiego. O ile procesy synchronizacji obserwowane były od dawna, a naukowej analizie poddawane były już w wieku XVII poczynając od prac poświęconych analizie synchronizacji tykania zegarów, a następnie badania synchronizacji dźwięku generatorów kamertenowych czy też synchronizacji ruchu planet, to zjawiska chaosu w układach deterministycznych wykryte zostały stosunkowo niedawno. Wiążą się one z pionierskimi pracami Poincaré, Lorenza czy Uedy. W tej monografii omawiane będą te dwa krańcowe procesy na przykładzie odwzorowania jedno- i dwuwymiarowego oraz układów dynamicznych. Jako narzędzia analizy użyte zostały metody analityczne oraz metody numeryczne. Przed przystąpieniem do czytania tej monografii zaleca się czytelnikowi zapoznanie się z metodami analitycznymi stosowanymi podczas analizy dynamiki nieliniowej układów fizycznych odwzorowań punktowych, jak i również oczekiwana jest pewna znajomość metod związanych z bezpośrednią symulacją komputerową odwzorowań lub równań różniczkowych zwyczajnych. Ponadto, w przypadku analizy punktów stałych odwzorowań lub równań różniczkowych korzysta się z metod Newtona lub ich odmian oraz ze znajomości podstawowych pojęć dotyczących stabilności.

Układ materiału zawartego w monografii jest następujący. W rozdziale 2 zdefiniowane i opisane zostały podstawowe pojęcia związane z dynamiką chaotyczną, a następnie opisano podstawowe metody służące do identyfikacji dynamiki chaotycznej. Należy do nich badanie wykładników Lapunowa, widma częstości oraz funkcji autokorelacji i wszystkie one oparte są na analizie numerycznej.

Następnie w rozdziale 3 przedyskutowane zostały odwzorowania punktowe, poczynając od najprostszych jednowymiarowych, a kończąc na odwzorowaniach dwuwymiarowych

Hénona i Ikedy. Już bardzo proste odwzorowania wykazują dynamikę dyskretną chaotyczną i stanowią bardzo dobre wprowadzenie do analizy chaosu deterministycznego. Również na bazie tych odwzorowań przedyskutowano wiele interesujących aspektów dynamiki chaotycznej z jednoczesną ilustracją wyników przy użyciu metod numerycznych.

W rozdziale 4 omówione zostały układy ciągłe, a więc układy, w których zmienna niezależna ma charakter ciągły. Ograniczono się tutaj do prostych układów fizycznych opisanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Opisane zostały proste oscylatory typu Duffinga oraz oscylatory samowzbudne typu van der Pola z wymuszeniem. Omówiono również metodę Mielinikowa umożliwiającą wykrywanie ruchów chaotycznych w tego typu prostych oscylatorach. Szerzej opisana została dynamika nieliniowa układu Lorenza.

Rozdział 5 został poświęcony w całości zjawisku synchronizacji. Po krótkim zarysie historycznym zjawisko to przedyskutowano na podstawie analizy najpierw prostych omawianych już wcześniej oscylatorów czy układów o $1\frac{1}{2}$ stopniach swobody. Następnie szerzej opisano zjawiska synchronizacji w układach samowzbudnych elektrycznych. Na przykładzie takich układów przedstawiona została przybliżona metoda analityczna zmodyfikowana przez Utkina, prowadząca do wyjaśnienia bardzo wielu interesujących zjawisk związanych z synchronizacją w tego typu układach. Omówione zostały również aspekty aplikacyjne (np. stabilizacja częstości modulacji, synchroniczne dzielenie częstości, zapamiętywanie "częstości" krótkotrwałego wymuszenia zewnętrznego).

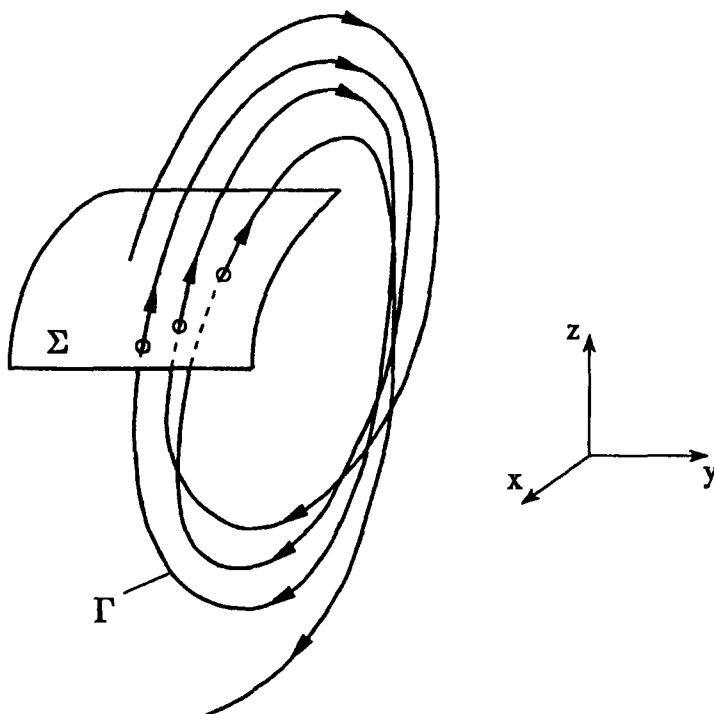
Rozdział 6 poświęcony został zastosowaniu praktycznym sygnałów chaotycznych w układach elektronicznych. Mogą one z powodzeniem zastępować dotychczas stosowane sygnały losowe i w pewnym sensie metody te pozwalają na realizację wymaganego (z góry założonego) kształtu "rozmytego" widma częstości. Omówiono tu również kilka stosowanych w praktyce generatorów mocy. Ponadto opisano układy radarowe służące do ustalenia odległości obiektów latających od punktu pomiarowego ze wskazaniem na korzyści wynikające z zastosowania właśnie sygnałów chaotycznych. Na koniec tego rozdziału uwypuklono rolę i znaczenie sygnałów chaotycznych w przesyłaniu i maskowaniu informacji.

W rozdziale ostatnim omówiono dwie metody kontroli sygnałów chaotycznych. Pierwsza z nich polega na przeprowadzeniu układu ze stanu dynamiki chaotycznej do stanu dynamiki regularnej poprzez wprowadzenie wymuszenia zewnętrznego bez stosowania pętli sprzężenia zwrotnego, a druga związana jest z zastosowaniem pętli sprzężenia zwrotnego.

2. Identyfikacja chaosu

2.1. Podstawowa terminologia

Rozważmy pewne odwzorowanie punktowe, zwane również odwzorowaniem Poincarégo. Jest ono obecnie powszechnie stosowane przy analizie układów dynamicznych, a idea jego stosowania polega na wprowadzeniu płaszczyzny (bądź hiperpłaszczyzny), która przecina powracający potok fazowy nigdzie nie stykając się z jakąkolwiek trajekcją tego potoku (rys.1).



Rys.1. Schemat odwzorowania Poincarégo.

Trajektoria Γ tego potoku leży w przestrzeni trójwymiarowej i należą do niej punkty przecięcia z tą płaszczyzną, czyli jest to odwzorowanie płaszczyzny w siebie. Bezsporną zaletą tego odwzorowania jest obniżenie wymiaru analizowanej przestrzeni o jeden (otrzymane punkty leżą w płaszczyźnie). W przypadku dwuwymiarowego potoku (czyli leżącego w płaszczyźnie) punkty odwzorowania mogą układać się wzdłuż linii (mówimy wówczas o odwzorowaniu jednowymiarowym).

W praktyce taką płaszczyznę sieczną wprowadzamy w sposób stosunkowo prosty, co zostanie omówione na przykładzie układu nieautonomicznego o jednym stopniu swobody opisanego równaniem różniczkowym

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = F_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

Okres siły wymuszającej wynosi $T = \frac{2\pi}{\omega}$ i dla dyskretnych wartości czasu

$$t_n = t_0 + nT, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

rejestrujemy wartości prędkości i przemieszczania

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{dx}{dt}(t_n), \\ x_n &= x(t_n). \end{aligned} \quad (3)$$

Jeśli

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \\ v(t_0) &= v_0, \end{aligned} \quad (4)$$

to punkty

$$\begin{aligned} x_n &= x(t_n, x_0, v_0), \\ v_n &= v(t_n, x_0, v_0), \end{aligned} \quad (5)$$

tworzą mapę Poincaré.

W powyższym przypadku mapa Poincaré jest mapą dwuwymiarową. Dla układu

autonomicznego ($F_0=0$) i przy założeniu, że siła $F(x, \frac{dx}{dt})$ powoduje samowzbudzenie układu, będziemy mieli do czynienia z mapą jednowymiarową, bo obserwacji (bądź pomiarów) wartości $x(t_n)$ będziemy dokonywać w chwilach czasowych t_n takich, dla których $v(t_n) = \frac{dx}{dt}(t_n) = 0$. Rozwiązaniu okresowemu (orbicie okresowej) odpowiadać będzie stały punkt tego odwzorowania. Jeśli będzie ono stabilne w sensie Lapunowa (teorii stabilności poświęcona jest obszerna literatura [2-7]) to ciąg punktów go poprzedzających będzie do niego dążył. Mówimy wtedy o atraktorze, lub inaczej o "przyciągaczu". Jeśli punkt stały odwzorowania będzie niestabilny, to ciąg punktów będzie od niego "uciekał". Wówczas mówimy, że punkt osobliwy x_0 jest niestabilny w sensie Lapunowa i nazywamy go repilerem (wg [1]) lub "odpychaczem".

Powyższe proste rozważania dają się znacznie uogólnić. Niech rozwiązanie układu n równań różniczkowych zwyczajnych w postaci normalnej ma postać $x = X(t, x_0)$, gdzie $x_0 = X(t_0, x_0)$. Jeśli zagadnienie Cauchy'ego ma jedno rozwiązanie wyznaczone przez wspomniany warunek początkowy, to zachodzą związki

$$X(t_2, X(t_1, x_0)) = X(t_1 + t_2, x_0), \quad (6)$$

co łatwo sprawdzić biorąc pod uwagę fakt, że

$$X(t_1 + t_2, x_0) = x_2, \quad X(t_1, x_0) = x_1, \quad X(t_2, x_1) = x_2. \quad (7)$$

Rodzina odwzorowań $X_t(x) = X(t, x)$ wyznaczona przez rozwiązanie $x(t)$ określa układ dynamiczny w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ co zapisujemy $(\mathbb{R}^n, X_t)$. Jeśli $t \in [0, \infty)$, to układ dynamiczny jest ciągły (mówimy wówczas o potoku), natomiast jeśli $t \in \mathbb{N}$, to układ dynamiczny jest dyskretny (mówimy wówczas o kaskadzie).

Powracając do interpretacji geometrycznej płaszczyzny siecznej okazuje się, że istnieją pewne związki funkcyjne pomiędzy współzrędnymi dwóch kolejnych punktów przecięcia trajektorii z tą płaszczyzną o postaci

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad (8)$$

które nieraz mogą być wyrażone przy pomocy związków analitycznych. Równanie różnicowe (8) opisuje kaskadę i istnieją jednoznaczne związki pomiędzy wyjściowym równaniem różniczkowym, a otrzymanym równaniem różnicowym.

Punkt x_0 nazywamy punktem stałym kaskady (8) jeśli

$$F(x_0) = x_0. \quad (9)$$

Dla każdego punktu x n krotne zastosowanie operacji F prowadzi do punktu

$$x(n) = F^n(x). \quad (10)$$

Trajektorią przechodzącą przez dowolny punkt x w przestrzeni fazowej $\mathbb{R}^n$ nazywać będziemy skończony lub nieskończonym zbiorem iteracji (8). Powiadamy, że punkt x jest okresowym o okresie k , jeśli

$$F^k(x) = x, \quad (11)$$

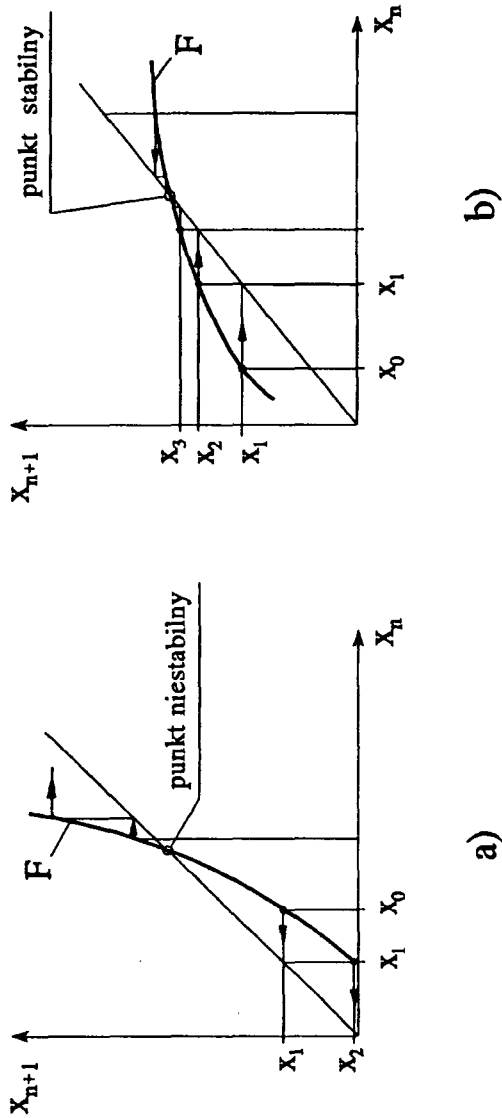
i k jest najmniejszą liczbą naturalną o takiej właściwości. Jeśli $k=2$ to również kolejne potęgi liczby 2 będą spełniać równanie (11). Stabilność takiego punktu wynika z definicji stabilności w sensie Lapunowa; jeśli wybierzemy x_0 blisko badanego punktu x , to odległość $\|x(n) - x\|$ powinna dążyć do zera przy $n \rightarrow \infty$.

W oparciu o zależność (8) i rysunek 2 łatwo sobie wyobrazić kryteria stabilności stałego punktu odwzorowania.

Na podstawie konstrukcji graficznej odwzorowania (8) przedstawionej na rysunku 2 można łatwo wysnuć wniosek, że punkt stały odwzorowania jest stabilny (niestabilny), jeśli

$$\left| \frac{dx_{k+1}}{dx_k} \right| < 1 (> 1). \quad (12)$$

Na bazie otrzymanego kryterium stabilności warto wspomnieć tu o zaletach odwzorowania Poincarégo. Ogólnie rzecz biorąc przy badaniu dynamiki układów opisanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi mamy głównie do czynienia z analizą położenia równowagi lub rozwiązań okresowych. Dla przypadku rozwiązań okresowych warunek ten oznacza, że wartości własne macierzy monodromii (multiplikatory) powinny leżeć w kole jednostkowym o promieniu 1, aby rozważany punkt stały (a tym samym orbita okresowa) był stabilny. Często metoda ta stosowana jest przy praktycznym określeniu stabilności uprzednio numerycznie znalezionej orbity, np. przy użyciu metody "strzelania" lub metody Urabe - Reitera ([2]).



Rys.2. Stabilny (b) i niestabilny (a) punkt stały odwzorowania (8).

Wprowadzimy obecnie kilka podstawowych pojęć i definicji w oparciu o pracę J. Kudrewicza [1] i A.M. Samoilenko [3].

Definicja 1.

Ciąg utworzony z kolejnych punktów odwzorowania $\{F^k(x)\}$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$ nazywać będziemy trajektorią (orbitą) punktu x .

Uwagi:

Zbiór $x_1, F(x_1), F^2(x), F^3(x), \dots$ będzie orbitą punktu x . Jako przykład rozważmy odwzorowanie $F: w[0,1] \rightarrow [0,1]$ o postaci

$$F(x) = x(1-x), \quad (13)$$

to wówczas dla $x = \frac{1}{2}$ orbita wyznaczona jest poprzez punkty $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \dots$

Definicja 2.

Punkt x_Ω nazywać będziemy punktem Ω -granicznym trajektorii $\{F^k(x)\}$ jeśli istnieje taki ciąg liczb $\{k_n\}$ naturalnych (lub całkowitych) dla którego zachodzi

$$\lim_{k_n \rightarrow \infty} F^{k_n}(x) = x_\Omega. \quad (14)$$

Zbiór takich wszystkich punktów nazywamy zbiorem Ω -granicznym trajektorii $\{F^k(x)\}$ i będziemy go oznaczać przez $\Omega(x)$.

Definicja 3.

Zbiorem niezmienniczym Z kaskady nazywamy zbiór spełniający warunek $X(Z)=Z$. Najczęściej zbiorami niezmienniczymi są punkty odpowiadające położeniom równowagi lub rozwiązaniom okresowym.

Komentarza wymagają jeszcze zbiory Ω -graniczne, które mogą być atraktorami lub repilerami.

Definicja 4.

Zbiór niezmienniczy A domknięty i ograniczony nazywamy atraktorem, jeśli istnieje jego otoczenie $\cup(A)$ takie, że dla dowolnego $x \in \cup(A)$ trajektoria $\{F^k(x)\}$ dąży do A przy $k \rightarrow \infty$. Zbiór wszystkich x spełniających powyższy warunek nazywamy zbiorem przyciągania.

Uwagi:

1. Często przy definiowaniu atraktora mówi się, że zbiór spełniający warunki definicji 4 nie da się podzielić na zbiory rozłączne spełniające te warunki.
2. Atraktory chaotyczne - są to takie atraktory, które zawierają co najmniej jedną trajektorię chaotyczną. Trajektorię nazywamy chaotyczną, jeśli co najmniej jeden z wykładników Lapunowa z nią związanych jest dodatni (definicja wykładnika Lapunowa zostanie podana w następnym podrozdziale).
3. Dziwne atraktory - są to atraktory, które posiadają skomplikowaną geometryczną strukturę.
4. Zwykle używa się wyżej wymienionych dwóch określeń wymiennie. Jednak mogą one istnieć niezależnie (patrz Grebogi i inni [4], Jakobson [5]).
5. Często używa się również pojęcia "basenów przyciągania". Układy dynamiczne mogą posiadać kilka współistniejących atraktorów. Jednym z podstawowych zadań w tym przypadku jest określenie obszaru warunków początkowych, dla których potok fazowy będzie przyciągany przez indywidualne atraktory. Okazuje się, że granice pomiędzy basenami przyciągania należącymi do różnych atraktorów mogą mieć bardzo skomplikowane kształty, na przykład mogą one być fraktalami [7].

Definicja 5.

Punkt stały odwzorowania (8) (dla $\mathbb{R}^n$) nazywamy hiperbolicznym, jeśli pochodna DF w tym punkcie posiada wartości własne różne od 1. Jeśli taki punkt jest hiperboliczny i posiada dwie rzeczywiste wartości własne λ_i ($i=1,2$), a w tym $\lambda_1 < 1$ i $\lambda_2 > 1$, to taki punkt jest siodłem (szczegółowa klasyfikacja punktów osobliwych podana jest w [6]). Rozmaitości

$$\begin{aligned} W^S(x, F) &= \left\{ x: \|F^n x - W^S(x, F)\| \rightarrow 0, \text{ jeśli } n \rightarrow +\infty \right\}, \\ W^u(x, F) &= \left\{ x: \|F^n x - W^u(x, F)\| \rightarrow 0, \text{ jeśli } n \rightarrow -\infty \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

nazywamy odpowiednio stabilną i niestabilną, i są one niezmiennicze, czyli

$$\begin{aligned} F(W^S(x, F)) &= W^S(x, F), \\ F(W^u(x, F)) &= W^u(x, F). \end{aligned} \quad (16)$$

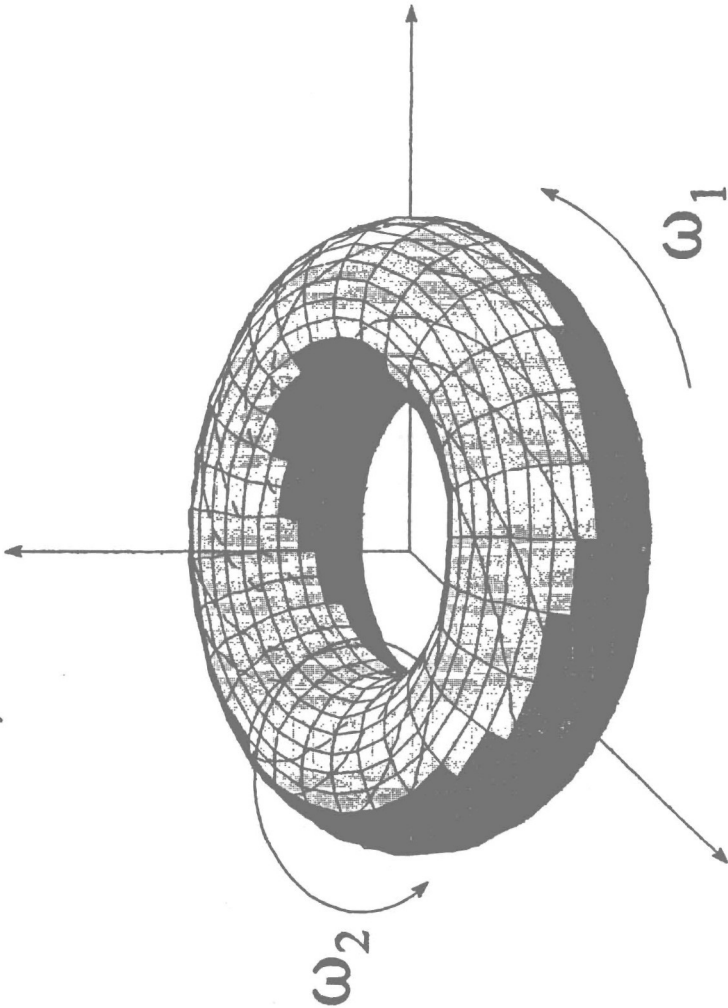
Jeśli dla danego układu dynamicznego opisanego układem równań różniczkowych

zwyczajnych spełnione są warunki Lipschitza i istnieje rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego, to rozwiązanie jest jednoznaczne i dokładnie wyznaczone poprzez warunki początkowe. Nasuwa się tu analogia z pociągiem jadącym po torach, którego ruch w każdej chwili czasowej możemy bez kłopotów określić. A jednak wykryte dziwne atraktory chaotyczne Lorenza, Uedy, Hénona i inne, wydają się zaprzeczać tym oczywistym faktom. Pewna nieokreśloność jest intuicyjnie pojęta dla złożonych układów fizycznych, gdzie w szczególności niewielka zmiana faz może prowadzić do dużych zmian w dynamice układu w przedziale dużych zmian zmiennej niezależnej, czyli czasu. Wyjaśnimy to na przykładzie układu rozważanego przez Landaua. W tym celu rozpatrzmy dwa krańcowe przypadki stanu układu dynamicznego: chaotyczność i synchronizację. Nie wnikając teraz w szczegóły (patrz rozdział 5), przez synchronizację rozumiemy będziemy dążenie podukładów złożonego układu dynamicznego do wykonywania "podobnej" dynamiki np. objawiającej się poprzez ruchy okresowe podukładów o tych samych okresach, w konsekwencji powodujące synchronizację, czyli ruch okresowy o tym samym okresie całego układu. Zjawisko to było obserwowane już przez Huygensa podczas analizy synchronizacji tykania zegarów. Obecnie problematyka ma wymiar szerszy i odnosi się do wzajemnej organizacji układów biologicznych, a w mechanice pojawia się ona przy zagadnieniach synchronizacji drgań wirników i przy stabilizacji ruchu sputników [8-10]. Rozpatrzmy najpierw układ w pełni zsynchronizowany, tzn. taki, że pojawiające się w nim częstości $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ spełniają warunek

$$l_1\omega_1 + l_2\omega_2 + \dots + l_k\omega_k = 0, \quad (17)$$

gdzie $\{l_1, \dots, l_k\} \in \mathbb{C}$ i $\mathbb{C}$ jest zbiorem liczb całkowitych. Mówimy wówczas, że układ jest w pełnym rezonansie, a objawia się to charakterystycznymi wzrostami amplitud drgań dla każdej ω_i z dyskretnego zbioru $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Jeśli jednak każdy podukład będzie drgał niezależnie od innych, tzn. ze swoim własnym okresem (niezależnym od pozostałych) to wówczas układ nie jest zsynchronizowany. W praktyce zagadnienie sprowadza się do istnienia liczb niewymiernych, np. dla $k=2$ i $\omega_1=1$ oraz $\omega_2=\sqrt{2}$ rozwiązanie $x=x(\varphi_1, \varphi_2)$, gdzie $\varphi_1=\omega_1 t$ i $\varphi_2=\omega_2 t$ leży w stanie ustalonym na dwuwymiarowej rozmaitości (torusie), a rozwiązanie $x=x(\varphi_1, \varphi_2)$, gdzie parametrem jest czas, nazywamy rozwiązaniem quasi-okresowym.

Przykład takiej dwuwymiarowej rozmaitości podany jest na rys.3.



Rys. 3. Torus i dwie niewspółmierne częstotliwości.

1639/W
BIBLIOTEKA GŁÓWNA I.Ł.

Uwaga:

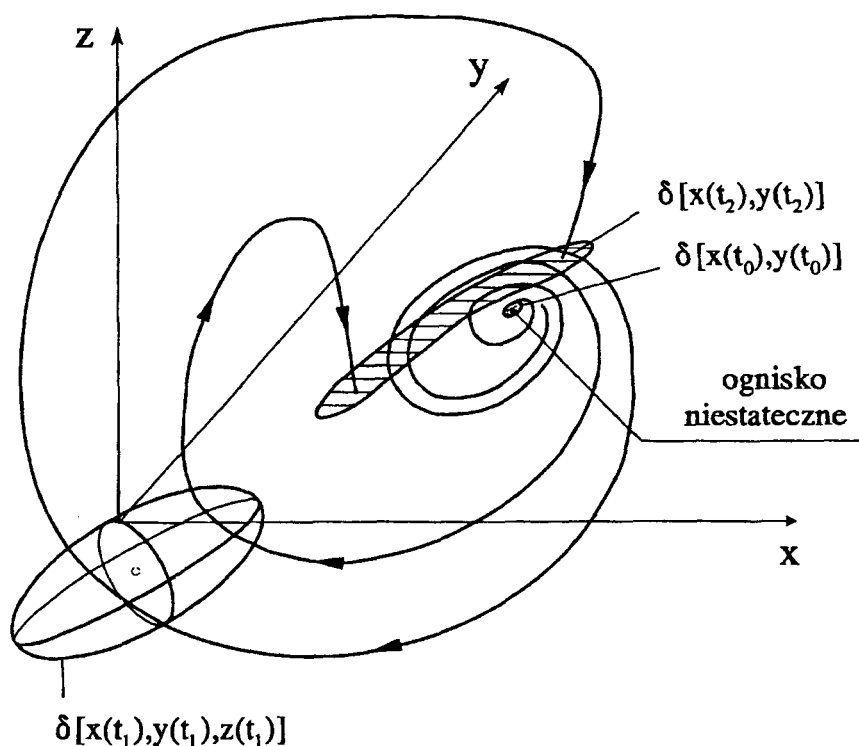
Problematyka orbit quasi-okresowych została jedynie zasygnalizowana w tej pracy. Zawiera ona jeszcze wiele nie do końca ekonomicznie rozwiązanych problemów, a zwłaszcza ukierunkowanych na potrzeby obliczeń inżynierskich. Dotyczy to głównie określenia stabilności wielowymiarowych atraktorów – torusów, oraz śledzenia zmian takich orbit towarzyszących zmianom parametrów i ich bifurkacji [11-15].

Łatwo sobie teraz wyobrazić, że jeśli dodatkowo fazy $\varphi_1^0, \dots, \varphi_k^0$ ulegają nawet nieznacznym zmianom, to odpowiedź układu $x(\omega_1 t + \varphi_1^0, \dots, \omega_k t + \varphi_k^0)$ może ulegać z czasem zmianom znacznym i prowadzić w efekcie do pojawienia się chaotyczności ruchu.

Obecnie wskażemy na inną możliwość pojawienia się chaosu w prostych układach dynamicznych. Dla oscylatorów autonomicznych o jednym stopniu swobody i o trajektorii ograniczonej (wykonującej ruch rekurentny) jedynymi atraktorami mogą być położenia równowagi lub orbity okresowe. Sytuacja jednak ulega dramatycznej zmianie dla układów trójwymiarowych, tj. układów o $1\frac{1}{2}$ stopniu swobody lub tychże oscylatorów z wymuszeniem zewnętrznym. W książce Ch. Hayashiego (tłumaczonej na język polski [16]) na początku rozdziału 6 znajduje się rysunek przedstawiający wykres krzywych rezonansowych dla różnych wartości parametru kontrolnego ω . Okazało się, że dla pewnego zakresu tego parametru wszystkie orbity okresowe są niestabilne. Czyżby zatem dla takich wartości parametrów nie istniało rozwiązanie ustalone w realnym układzie fizycznym? Posługując się tym argumentem Ch. Hayashi zaczął żądać od Y. Uedy (wówczas studenta w jego laboratorium) "racjonalnych", lub lepiej, "oczekiwanych" wyników, czemu ten ostatni nie mógł sprostać. Wykraczało to poza jego możliwości z tej prostej przyczyny, że ich tam nie było. Był za to zupełnie inny atraktor - dziwny atraktor chaotyczny [17].

Okazało się zatem, że dla układów trójwymiarowych trajektorie mogą cały czas przebywać w pewnym podobszarze przestrzeni fazowej $\mathbb{R}^3$, ale mogą w niej nieustannie błądzić pomiędzy niestabilnymi położeniami równowagi i niestabilnymi orbitami okresowymi. Wprawdzie z faktu ograniczoności takiej podprzestrzeni wynika, że istnieje taki czas, po którym znajdzie się taka trajektoria dowolnie blisko punktu startu, ale odpowiedzi kiedy znajdzie się tam ponownie, nie można uzyskać.

Potok trajektorii fazowych można sobie wyobrazić na przykładzie cieczy składającej się z bardzo wielu cząsteczek znajdujących się nawet w bardzo małej jej objętości. Jeśli w takiej przestrzeni istnieje atraktor będący orbitą okresową, to wprowadzając małą kropelkę kolorowej cieczy w dowolnie wybranym jej punkcie początkowym okaże się, że po pewnym czasie kolor będzie określał tę orbitę. Jeśli natomiast atraktorem będzie dziwny atraktor chaotyczny, to trajektoria leżąca na takim atraktorze zacznie błędzić wzdłuż całej objętości



Rys. 4. Przykład błędzenia niestabilnej trajektorii w obszarze ograniczonym $\mathbb{R}^3$.

cieczy i ciecz stanie się kolorowa. Zabarwione cząstki zaczną się mieszać z niezabarwionymi. Proces ten zachodzi w stosunkowo szybkim czasie i wobec tego nie jest wynikiem dyfuzji, a raczej związany jest z turbulentnym ruchem cząsteczek cieczy. Ta analogia jest jeszcze głębsza. Natężenie koloru świadczyć będzie o prawdopodobieństwie znajdowania się punktu fazowego w tym obszarze i nie zależy ono od położenia początkowego (punktu startu).

Uzbrojeni w wiedzę o roli niestabilności rozpatrzmy obecnie ewolucję (zmiany w czasie) pewnego obszaru warunków początkowych wziętych z obszaru płaszczyzny x, y , czyli takiego, że $z=0$ i $\delta=\delta(x, y)$, który został na rys.4 zakreskowany. Obszar $\delta(t_0)$ stanowi bardzo małe otoczenie punktu osobliwego, który jest niestabilnym ogniskiem. Dwie wyróżnione trajektorie na tym rysunku eksponencjalnie uciekają od siebie i początkowo mały obszar $\delta(t_0)$ zamienia się w objętość $\delta(t_1)$, a ponieważ obszar $\mathbb{R}^3$ jest ograniczony, to trajektorie te muszą zawrócić i w efekcie dla $z=0$ dwa punkty, które leżały bardzo blisko siebie (dla $t=t_0$) znajdują się po czasie $t=t_2$ daleko od siebie. Pojawia się pytanie, jak daleko, albo inaczej, jak blisko punkty te powinny być oddalone od siebie w punkcie startu, aby znowu znalazły się blisko siebie.

2.2. Wykładniki Lapunowa

Zanim odpowiemy na to pytanie powróćmy do starej jeszcze teorii liczb charakterystycznych wprowadzonych przez Lapunowa, które wzięte ze znakiem odwrotnym definiują tzw. wykładniki Lapunowa (szczegóły podane są u Demidowicza [18]). Już wcześniej opisana była eksponencjalna rozbieżność trajektorii i właśnie miarą takiej rozbieżności są wykładniki Lapunowa.

Opiszemy tutaj krótko ich własności w oparciu o prace [19-21]. Zgodnie z (10) kaskadę (8) możemy przedstawić w postaci

$$\mathbf{x}(k+1) = F(\mathbf{x}(k)). \quad (18)$$

Każdemu punktowi $\mathbf{x}$ w przestrzeni fazowej możemy przyporządkować macierz $DF^k(\mathbf{x})$ zwaną jacobianem, która powstaje wskutek lokalnej linearyzacji, co w praktyce sprowadza się do obliczenia pochodnych k -tej iteracji dla punktu $\mathbf{x}$. Startując z punktu $\mathbf{x}(0)$ dla k -tej iteracji, macierz ta wyraża się zależnością

$$\mathbf{J}(k) = DF^k(\mathbf{x}(0)), \quad (19)$$

przy czym $DF^k(\mathbf{x}(0))$ może być otrzymana jako produkt

$$DF^k(\mathbf{x}(k-1)) \dots DF(\mathbf{x}(0)) = DF^k(\mathbf{x}(0)). \quad (20)$$

Mając obliczone $J(k)$ otrzymujemy

$$x(k+1) \approx DF(x(k))x(0) = DF(x(0))x(0) = J(k)x(0). \quad (21)$$

Powracając do dyskusji związanej z rys. 4 załóżmy, że w otoczeniu niestabilnego ogniska weźmiemy dwa punkty x_1 i x_2 , które po k iteracjach (zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami) przejdą w punkty $x_1(k)$ i $x_2(k)$ określone poprzez związek

$$x_1(k) - x_2(k) \approx J(k)(x_1(0) - x_2(0)). \quad (22)$$

Możemy wziąć cały potok generowany przez warunki początkowe, które leżą np. w jednostkowej kuli (odpowiada to okręgowi na rys. 4 jako przecięcie kuli z płaszczyzną x, y). W ogólnym przypadku będzie to jednak n -wymiarowa kula $K_0 = K(0)$, która po k -iteracjach przechodzi w elipsoidę $K(k)$ (taka elipsoida dla $n=3$ oznaczona na rys. 4 jako $\delta(t_2)$). Jeśli teraz zamiast jednego punktu x_0 weźmiemy kulę K_0 i odpowiednio zamiast $x(k+1)$ elipsoidę K_{k+1} , to zgodnie z (21) otrzymamy

$$K_{k+1} = DF(x(k))K_k. \quad (23)$$

Elipsoidy K_{k+1} i K_0 posiadają n osi głównych i układ posiada n z nimi związanych wykładników Lapunowa. Aby układ wykazywał chaotyczność wystarczy, żeby jeden z wykładników (największy) był dodatni. Wykładniki Lapunowa określa się ze wzoru

$$\lambda_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log(\alpha_{j,k}), \quad (24)$$

gdzie $\alpha_{j,k}$ oznacza długości j -tej osi elipsoidy K_k . Okazuje się, że dla bardzo szerokiej klasy odwzorowań F istnieje granica określona przez (24), która dla prawie wszystkich $x(0)$ nie zależy od $x(0)$, czyli nie zależy od warunków początkowych. Wówczas λ jest miarą zmian warunków początkowych i jeśli błąd określenia warunków początkowych wyniósł $\Delta x(0)$, to po k -tej iteracji będzie on wynosił

$$\Delta x_k \approx 10^{\lambda k} \Delta x(0), \quad (25)$$

jeśli tylko $\Delta x(0)$ jest dostatecznie małe, a k jest dostatecznie duże. Niech teraz maksymalny wykładnik Lapunowa wynosi $\lambda=0.1$, co nie jest zbyt wielkim wymaganiem w odniesieniu do

układów dynamicznych i niech $k_*=10^{10}$ oraz $\Delta x(0)=10^{-5}$. Zgodnie z (25) dla takiej iteracji k_* obliczamy $\Delta x_{k_*}=10^4$, a z taką dokładnością obliczeń nie można się pogodzić. Z drugiej strony będziemy chcieli, żeby błąd dla k_* iteracji wynosił $\Delta x(k_*)=10^{-5}$. Zatem zachodzi pytanie, z jaką dokładnością powinniśmy określić warunki początkowe. Posługując się wzorem (25) obliczamy, że $\Delta x(0)$ wynosi 10^{-15} , a zachowanie takiej dokładności obliczeń jest niezwykle trudne. Oczywiście niedokładność wzrasta ze wzrostem iteracji.

Zagadnienie sprowadza się więc do wyznaczenia z nieskończoną dokładnością warunków początkowych. Zgodnie z zasadą Maxa Bohra, każdy stan realnego układu fizycznego może być wyznaczony jedynie z pewną dokładnością i określa się raczej poprzez rozkład prawdopodobieństwa zamiast przez liczbę. Jeśli rozpatrywana trajektoria jest stabilna, to błąd początkowy szybko z czasem maleje, natomiast jeśli jest niestabilna, to narasta on szybko ze wzrostem iteracji powodując nieprzewidywalność jej zachowania, tj. chaotyczność w układzie zdeterminowanym.

Teraz poświęcimy chwilę na dyskusję możliwości rekurencji (powrotu) trajektorii tak, żeby leżała ona na atraktorze. Już wcześniej wspominaliśmy, że dla trajektorii pozostających cały czas w pewnym obszarze ograniczonym musi istnieć możliwość powrotu w dowolnie bliską okolicę punktu startu. Okazuje się, że na płaszczyźnie fazowej z taką własnością bardzo łatwo się można spotkać. Chodzi tutaj o punkt osobliwy zwany siodłem. Prekursorem ruchu chaotycznego jest przecięcie stabilnej i niestabilnej rozmaitości punktu siodłowego. Jest to możliwe w układzie co najmniej trójwymiarowym.

2.3. Widmo częstotści

W obliczeniach inżynierskich, zarówno przy symulacji komputerowej jak również podczas analizy realnego obiektu w warunkach laboratoryjnych, jedną z najbardziej popularnych metod jest technika oparta na analizie widma częstotści. W celu przyspieszenia procesu obliczeń korzysta się tutaj z szybkiego przekształcenia Fouriera (FFT). Transformacja danego przebiegu czasowego z dziedziny czasu w dziedzinę częstotści może być opisana zależnością

$$W(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2. \quad (26)$$

W przypadku ruchów regularnych (okresowych i quasi-okresowych) widmo częstości składa się z dyskretnych komponentów, podczas gdy trajektorii chaotycznej $x(t)$ odpowiada widmo częstości ciągłe.

2.4. Funkcja autokorelacji

Konkurencyjnym narzędziem w porównaniu z wykładnikami Lapunowa stanowi funkcja autokorelacji. Jest ona szeroko opisana w literaturze w szczególności w odniesieniu do równań różniczkowych. Określona jest ona zależnością

$$A(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F[x(t; \tau)] F(x(\tau)) d\tau, \quad (27)$$

przy założeniu, że analizowany układ jest ergodyczny. Jeśli w $A(t)$ istnieją składowe okresowe bądź quasi-okresowe, to wówczas i w układzie badanym istnieje orbita okresowa lub quasi-okresowa. Jeśli natomiast dwie leżące blisko siebie trajektorie oddalają się od siebie i z upływem czasu poruszają się niezależnie od siebie, to $A(t)$ szybko dąży do zera. Odpowiada to sytuacji, gdy przynajmniej jeden z wykładników Lapunowa jest dodatni.

Warto wymienić kilka charakterystycznych cech funkcji autokorelacji.

1. Jest to funkcja rzeczywista i parzysta z maximum w punkcie $t=0$, która może przyjmować wartości dodatnie, jak i ujemne.
2. W przypadku badania procesu stochastycznego ze średnim znaczeniem $\langle x(t) \rangle = 0$, ma ona kształt ostro zarysowanego impulsu.
3. Dla procesu stochastycznego - białego szumu, funkcja $A(t)$ ma kształt funkcji δ .
4. Jeśli (średnio rzecz biorąc) opadanie funkcji autokorelacji ma w przybliżeniu charakter eksponencjalny, to stan dynamiczny układu związany jest ze zjawiskiem początku ruchu chaotycznego.

Jeśli dla odwzorowań (18) zdefiniujemy wartość średnią $\langle x(k) \rangle$ zależną od $x(0)$ jako

$$\langle x_k \rangle = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^K x(k), \quad (28)$$

to funkcja autokorelacji ma postać

$$A(\ell) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^K (x(k) - \langle x_k \rangle) (x(k+\ell) - \langle x(k) \rangle) \quad (29)$$

gdzie $\ell = 0, 1, 2, \dots$

3. Układy dyskretne

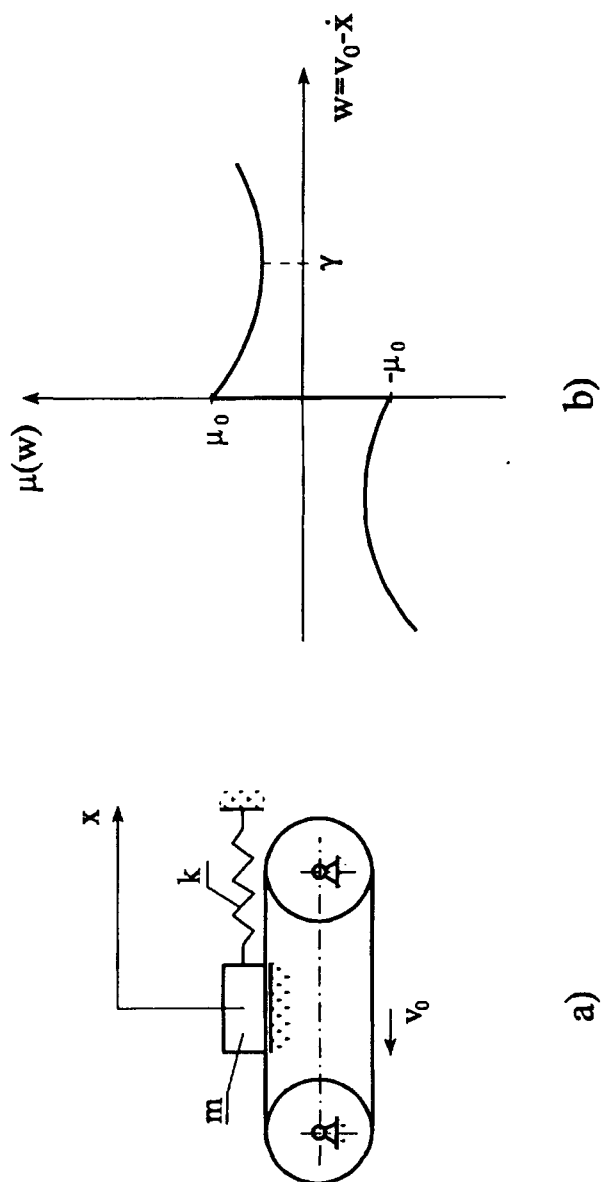
3.1. Wprowadzenie

W ogromnej większości przypadków dynamika układów fizycznych opisana jest równaniami różniczkowymi cząstkowymi lub zwyczajnymi. Te pierwsze często zastępuje się poprzez różne metody redukcji układami równań różniczkowych zwyczajnych. Następnym etapem prowadzącym do dalszej redukcji zagadnienia jest zastąpienie równań różniczkowych poprzez odwzorowania (w tym przypadku jednowymiarowe). Opisana metoda postępowania polega na stosowaniu metod analitycznych.

Inna niezależna metoda badań polega na analizie dynamiki różnego rodzaju najprostszych odwzorowań, na próbie zrozumienia i wyjaśnienia zjawisk dynamiki chaotycznej w oparciu o takie odwzorowania.

Jeśli dysponujemy w szerokim zakresie wiedzą dotyczącą dynamiki odwzorowań jednowymiarowych, to wówczas dynamika (nawet złożonych) układów opisanych równaniami różniczkowymi może być w pełni zrozumiana poprzez odwzorowania jednowymiarowe.

Metody analityczne natrafiają na wiele ograniczeń przy analizie dynamiki nieliniowej, wobec tego w większości przypadków dokonuje się analizy numerycznej. W praktyce oznacza to zastąpienie dynamiki ciągłej (zmienna niezależna, czyli czas, w równaniach występuje jako ciągły) przez dynamikę dyskretną (przy metodach numerycznych wartości czasu są wartościami dyskretnymi). Okazuje się, że istnieją głębokie powiązania pomiędzy "dynamiką ciągłą" i "dynamiką dyskretną". Przy analizie numerycznej wykorzystuje się metodę odwzorowań Poincarégo. Związki łączące punkty otrzymane na płaszczyźnie Poincarégo opisane są poprzez równania różnicowe. Dzięki wprowadzeniu takiego odwzorowania nie tylko obniżono „wymiarowość dynamiki”, ale ponadto w przypadku analizy dynamiki chaotycznej wprowadzenie płaszczyzny Poincarégo pozwoliło na eliminację ruchów okresowych, co w efekcie pozwala na skoncentrowanie uwagi tylko na dynamice chaotycznej.



Rys. 5. Układ mechaniczny o jednym stopniu swobody: klocek leżący na pasie poruszającym się z prędkością v_0 (a) i charakterystyka współczynnika tarcia (b).

Dalszym rozszerzeniem metody dyskretyzacji jest dyskretyzacja stanów, np. poprzez przyporządkowanie liczbom tylko dwóch wartości: zer lub jedynek.

Może się zdarzyć, że przy analizie odwzorowań dwuwymiarowych istnieje również możliwość ich redukcji do odwzorowań jednowymiarowych. Zachodzi to wówczas, gdy takie odwzorowanie w jednym kierunku jest silnie rozciągające, a w drugim silnie ściskające. W tym przypadku punkty ułożą się wzdłuż jednej lub dwóch linii, i można rozpatrywać odwzorowanie jednowymiarowe jednej linii w drugą.

Teraz rozpatrzmy przykłady dynamiki prostych układów fizycznych sprowadzalnych do analizy odwzorowań jednowymiarowych. W układach nieliniowych z tarcieniem istnieje możliwość pojawienia się drgań samowzbudnych. Na rys. 5 przedstawiono taki klasyczny przypadek.

Ciało o masie m (klocek) znajduje się na taśmie o współczynniku tarcia zależnym od prędkości względnej ciała i taśmy z charakterystyką przedstawioną na rys. 5b). Okazuje się, że w zakresie prędkości względnych $0 < w < y$ położenie równowagi klocka staje się niestabilne. Pojawiają się drgania, które zaczynają narastać osiągając cykl graniczny (orbitą okresową). Równanie ruchu układu ma postać

$$m\ddot{x} + kx = mg[\mu_0 - \alpha w + \beta w^3], \quad (30)$$

gdzie po prawej stronie występują siły tarcia opisane analitycznie. Załóżmy teraz, że dla $x=0$ następuje uderzenie, gwałtowna zmiana prędkości ruchu w momencie, gdy $\dot{x} \geq a$ i ponadto będziemy zakładać, że dynamika związana jest z opadającą częścią charakterystyki współczynnika tarcia [22]. Wówczas dynamika rozpatrywanego układu może być przybliżona równaniem

$$\ddot{x} - 2h\dot{x} + \alpha^2 x = 0, \quad (31)$$

$$\dot{x}_+ - \dot{x}_- = -b, \quad (32)$$

gdzie $\dot{x}_+$ i $\dot{x}_-$ oznacza odpowiednio prędkość po i przed uderzeniem o amplitudzie b . Dynamika opisana równaniami (31) i (32) może być przedstawiona za pomocą odwzorowania

$$\bar{y} = qy + \begin{cases} 0, & \text{dla } 0 \leq y < \frac{a}{q}, \\ -b, & \text{dla } y \geq \frac{a}{q}, \end{cases} \quad (33)$$

gdzie

$$\bar{y} = \dot{\bar{x}}, y = \dot{x} \geq 0, q = e^{2h\sqrt{a^2 - h}} > 1. \quad (34)$$

Położenie $y = b(q-1) > a$ jest niestabilnym punktem stałym tego odwzorowania. Dla $y < y_*$ pojawiają się drgania chaotyczne w przedziale zmian $a - b \leq y \leq a$. Powyższy przykład związany był z metodą analityczną, natomiast drugi przykład podany niżej nawiązuje do metod numerycznych.

Rozpatrzmy ruch wahadła o długości ℓ , masie m i masowym momencie bezwładności B (rys.6).

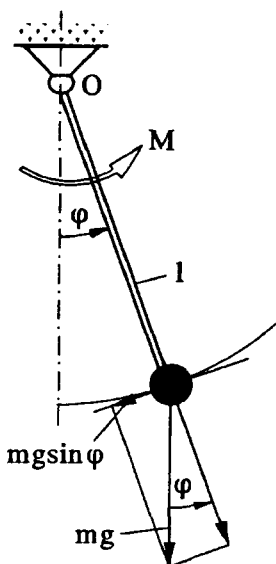
Równanie ruchu ma postać

$$B\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} + mg\ell\sin\varphi = M_0 + M_1\cos\omega t, \quad (35)$$

gdzie c jest zastępczym współczynnikiem tłumienia wiskotycznego otoczenia. Zakładając $mg\ell = B$, równanie to może być sprowadzone do postaci

$$\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} + \sin\varphi = M_1 + M_2\cos\omega t, \quad (36)$$

gdzie:



Rys.6. Ruch płaski wahadła poddanego działaniu momentu pary sił $M = M_0 + M_1\cos\omega t$.

$$h = \frac{c}{B}, \quad M_1 = \frac{M_0}{B}, \quad M_2 = \frac{M}{B}. \quad (37)$$

Dokonyamy aproksymacji

$$\dot{\varphi} = \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}, \quad (38)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}}{(t_{n+1} - t_n)(t_n - t_{n-1})}. \quad (39)$$

Po uwzględnieniu (38) i (39) równanie (36) przyjmie postać (patrz [23])

$$\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1} + hT(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + T^2 \sin \varphi_n = T^2(M_1 + M_2), \quad (40)$$

przy czym: $t_n = T_n = \frac{2\pi}{\omega} n$.

Po wprowadzeniu wielkości

$$R_1 = \frac{T(M_1 + M_2)}{h}, \quad hT = 1 - b, \quad R_2 = T^2, \quad (41)$$

z (40) otrzymujemy

$$\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1} + (1 - b)(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + R_2 \sin \varphi_n = (1 - b)R_1. \quad (42)$$

Równanie (42) może być przedstawione w postaci równoważnej

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= br_n - R_2 \sin \varphi_n, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + R_1 - R_2 \sin \varphi_n + br_n, \end{aligned} \quad (43)$$

gdzie

$$r_n = \varphi_n - \varphi_{n-1} - R_1. \quad (44)$$

Mamy tu ciągle do czynienia z odwzorowaniem dwuwymiarowym, ale dla bardzo dużego tłumienia i takiego, że $hT=1$, otrzymujemy odwzorowanie jednowymiarowe okręgu w okrąg, które będzie omawiane w podrozdziale 3.4.

Na koniec warto podkreślić, że istnieją i są coraz bardziej popularne układy elektroniczne, konstrukcja których oparta jest na zasadzie działania odwzorowań jednowymiarowych, a które służą również dla wytworzenia sygnałów chaotycznych dla realizacji określonych potrzeb aplikacyjnych [24].

3.2. Odwzorowanie Bernoulliego

Rozważmy odwzorowanie F przeprowadzające jednostkowy odcinek w siebie tzn. $[0,1) \rightarrow [0,1)$ o postaci

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad (45)$$

$$F(x_k) = 2x_k \bmod 1, \quad (46)$$

dla $k=0,1,2,\dots$, przy czym funkcja modulo zawęża otrzymane rezultaty do przedziału jednostkowego (bierzemy tylko resztę po podzieleniu przez 1). Odwzorowanie to nosi nazwę odwzorowania Bernoulliego i może być również zapisane w postaci równania różnicowego

$$x(k+1) = \begin{cases} 2x(k) & \text{dla } 0 \leq x(k) < 0.5, \\ 2x(k) - 1 & \text{dla } 0.5 \leq x(k) < 1. \end{cases} \quad (47)$$

Odwzorowanie to posiada tylko jeden punkt stały $x_0=0$, który jest niestabilny.

Rozpatrzmy, jak będzie się zachowywało to odwzorowanie dla $x(0)=1/11$, a więc dla liczby wymiernej. Otrzymujemy następujący ciąg liczb

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{1}{11}, \quad x(1) = \frac{2}{11}, \quad x(2) = \frac{4}{11}, \quad x(3) = \frac{8}{11}, \\ x(4) &= \frac{5}{11}, \quad x(5) = \frac{10}{11}, \quad x(6) = \frac{9}{11}, \quad x(7) = \frac{7}{11}, \\ x(8) &= \frac{3}{11}, \quad x(9) = \frac{6}{11}, \quad x(10) = \frac{1}{11}, \end{aligned} \quad (48)$$

który przedstawia orbitę okresową o okresie 10. Dla $x(0)=\frac{1}{5}$ mamy kolejno

$$x(0) = \frac{1}{5}, \quad x(1) = \frac{2}{5}, \quad x(2) = \frac{4}{5}, \quad x(3) = \frac{3}{5}, \quad x(4) = \frac{1}{5}. \quad (49)$$

Zatem znowu otrzymujemy orbitę okresową, ale tym razem o okresie 4. Okazuje się, że dla wszystkich liczb wymiernych z rozważanego przedziału jednostkowego rezultatem iteracji są punkty stałe. Sytuacja jednak wygląda zupełnie inaczej, jeśli jako punkt startu wybierzemy liczbę niewymierną. Każdemu punktowi zbioru $[0,1]$ możemy przyporządkować nieskończony ciąg $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, zwany adresem, w taki sposób, że

$$a_0 = 0, \quad x(0) = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2^2}a_2 + \frac{1}{2^3}a_3 + \frac{1}{2^4}a_4 + \dots \quad (50)$$

Liczby a_i przyjmują tylko wartości 0 lub 1. Wobec powyższego $x(0)$ może być przedstawione jako ciąg nieskończony zer i jedynek o postaci

$$x(0) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}. \quad (51)$$

Okazuje się, że przy pomocy takiej reprezentacji liczby rzeczywistej możemy wykryć ważną własność odwzorowania (47). Rozpatrzmy to na przykładzie liczby $x(0)=0.32$. Czytelnik może sam bardzo szybko przeprowadzić obliczenia (np. przy użyciu podstawowego kalkulatora) znajdując kolejne wartości a_i , które podano niżej

$$x(0) = 0.32 = \{0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, \dots\}. \quad (52)$$

Po pierwszej iteracji otrzymujemy liczbę $x(1)=0.64$ która posiada następujący adres

$$x(1) = 0.64 = \{1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, \dots\}. \quad (53)$$

Uważny czytelnik dostrzeże pewną prawidłowość. Adres (53) otrzymujemy po przesunięciu w lewo o jedną cyfrę adresu (52). Okazuje się, że ta prawidłowość ma miejsce dla wszystkich liczb z przedziału $[0,1]$. Każda kolejna iteracja wiąże się z przesunięciem w lewo o jedno miejsce poprzedniego adresu. Przesunięcie to nosi nazwę przesunięcia Bernoulliego. Druga uwaga dotyczy skończoności i nieskończoności: skończona liczba wymierna jest tu reprezentowana przez ciąg nieskończony. W odcinku $[0,1]$ większość liczb jest niewymiernych. Liczby te mają przypadkowe rozwinięcia dziesiętne, lub inaczej, prawie wszystkie liczby z odcinka $[0,1]$ mają przypadkowe rozwinięcia dziesiętne.

Zwróćmy uwagę jeszcze na inne analogie podane przez Schustera [23]. Przyporządkujmy liczbie zero orła, a liczbie jeden - reszkę i rozpatrzmy rzut monetą. Rzucając wielokrotnie monetą otrzymujemy np. adres $\{0, R, R, 0, \dots\}$, który odpowiada dokładnie jednej liczbie rzeczywistej z przedziału $[0,1]$.

A teraz rozpatrzmy następujące zadanie. Weźmy dwie liczby $x^{(1)}(0)$ i $x^{(2)}(0)$, które mają np. 10^{16} takich samych liczb po przecinku, czyli podczas obliczeń utożsamiane są jako jednakowe. Stosując 10^{16} iteracji (47) dojdziemy do miejsc o numerze 17 w adresach tych liczb, a więc do miejsc, gdzie one się różnią. Po 10^{16} iteracji liczby te posiadały identyczną

orbitę, potem jednak rządzi przypadkowość, bo dalszy rozkład dziesiętny tych liczb jest przypadkowy. Ich orbity zaczynają być od siebie zupełnie niezależne. Nasuwa się tutaj bardzo wyraźna analogia z obserwowanym zjawiskiem chaosu deterministycznego, bo w każdej kolejnej realizacji tego samego procesu startując z takich samych warunków początkowych (teoretycznie) odpowiedź układu jest ciągle inna.

Drugą własnością liczb niewymiernych i przesunięcia Bernoulliego jest to, że dowolny podzbiór skończony zbioru nieskończonego reprezentującego taką liczbę powtarza ją w tym zbiorze nieskończenie wiele razy, a przesunięcie Bernoulliego stosowane wielokrotnie stara się te podciągi przesunąć w lewo również nieskończenie wiele razy.

Ponadto odwzorowanie Bernoulliego posiada jeszcze jedną cechę typową dla chaosu. Wiąże się ona z operacją rozciągania, a następnie zginania i składania. Jeśli liczby podlegające iteracji znajdują się w przedziale $[0, \frac{1}{2}]$ to odwzorowanie je rozciąga (mnoży się je przez dwa). Jeśli poczynając od jakiejś iteracji znajdują się one w przedziale liczb większych od 1 to następuje proces ich malenia, lub inaczej zginania i składania z powrotem do przedziału $[0,1]$.

Na koniec wspomnijmy o jeszcze jednej charakterystycznej cesze tego odwzorowania, która jest również typowa dla chaosu. Pokazaliśmy, że startując od liczby wymiernej otrzymaliśmy orbity okresowe. Są one niestabilne. Ponieważ w przedziale $[0,1]$ istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych, to również w tym przedziale istnieje nieskończenie wiele orbit okresowych niestabilnych.

3.3. Odwzorowania logistyczne

Stosunkowo szczegółowej analizie doczekało się odwzorowanie logistyczne o postaci

$$x(k+1) = px(k)(1-x(k)), \quad (54)$$

przy czym parametr $p \in [0,4]$. Główną cechą tego odwzorowania jest rozciąganie lub ściskanie odcinka, a następnie zginanie go w połowie. Okazuje się, że dla ustalonej wartości parametru p odwzorowanie powoduje "zawijanie" wyjściowego odcinka i układanie go w przedziale $[0, p/4]$. Dla przykładu rozpatrzmy przypadek $p=1$ i rozważmy liczby najpierw z przedziału $[0, 0.5]$. Liczba zero przechodzi w zero, a 0.5 w 0.25, a pozostałe liczby leżą w przedziale

$[0, 0.25]$. Rozpatrując przedział $(0.5, 1]$ widać, że liczba 1 przechodzi w zero. Weźmy liczbę 0.7 - przechodzi ona w 0.21, natomiast liczba 0.9 przechodzi w 0.09. Na bazie tych trywialnych przykładów widać, że również przedział liczb $(0.5, 1)$ przechodzi w przedział $[0, 0.25]$, przy czym liczby leżące bliżej jedynki odwzorowywane są na liczby leżące bliżej zera. Dla parametru p większego od liczby cztery wartości odwzorowania rozbiegają się do nieskończoności. Dla wartości granicznej $p=4$ rozwiązanie równania (54) można wyrazić w postaci analitycznej

$$x(k) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left[2^k \arccos(1 - 2x(0)) \right] \right). \quad (55)$$

Przeprowadźmy obecnie analizę klasyczną dla nieliniowej dynamiki. Znajdźmy punkty stałe odwzorowania (54) i zbadajmy ich stabilność. Punkty stałe znajdujemy z równań

$$rx_*(1 - x_*) = x_*. \quad (56)$$

Są to dwa następujące punkty

$$x_*^{(1)} = 0, \quad x_*^{(2)} = \frac{r-1}{r}. \quad (57)$$

Każde z wymienionych rozwiązań jest stabilne, jeśli

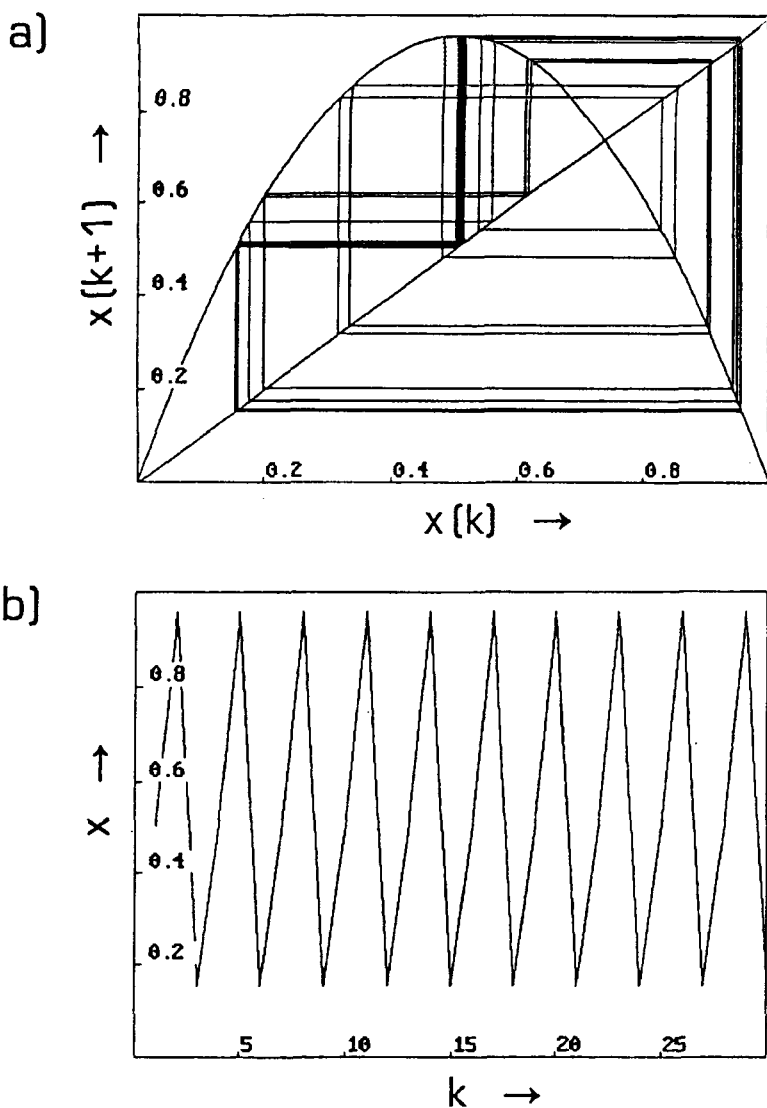
$$\left| \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_*} \right| < 1, \quad (58)$$

gdzie: $f(x) = rx(1 - x)$.

Po przeprowadzeniu prostych obliczeń widać, że

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_*^{(1)}} \right| &= r, \\ \left| \left(\frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_*^{(2)}} \right| &= 2 - r, \end{aligned} \quad (59)$$

i pierwsze rozwiązanie jest stabilne, gdy $|r| < 1$, natomiast drugie, gdy $|2 - r| < 1$.



Rys.7. Wykres pajęczynowy dla odwzorowania logistycznego i dla $r = 3.83$ (a) oraz przebieg okresowy (b) odpowiadający zamkniętej krzywej z rys (a).

A teraz rozpatrzmy kilka przykładów numerycznych związanych z odwzorowaniem logistycznym. Na rys. 7 podano przykład "diagramu pajęczynowego" dla $r = 3.83$. Jak wynika z rozważań poprzednich, dla takiej wartości parametru obydwa punkty stałe odwzorowania są niestabilne. W układzie współrzędnych $x(k)$, $x(k+1)$ narysowano funkcję $f(x)$ oraz przekątną. Służą one do prostego wyznaczania kolejnych punktów odwzorowania po kolejnych iteracjach. Jak widać z tego rysunku, dla warunku początkowego $x(0) = 0.3$ trajektoria odwzorowania dąży do orbity okresowej.

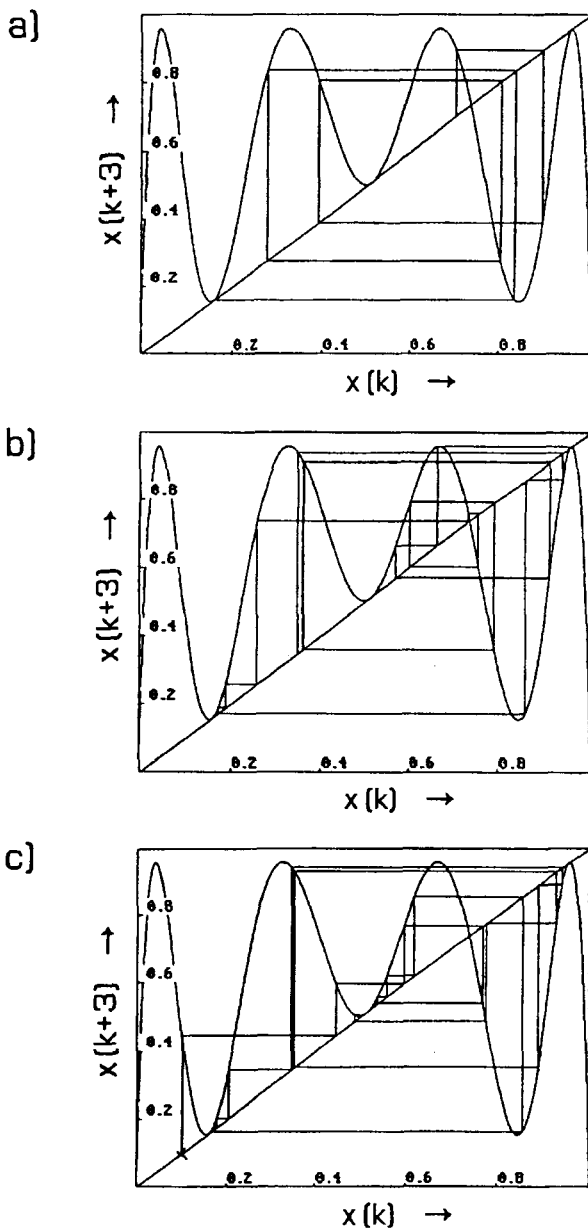
Jeśli rozpatrzmy odwzorowanie opisane funkcją $x(k+3) = f(x(k))$, a na osi pionowej weźmiemy punkt odpowiadający co trzeciej iteracji, czyli $x(k+3)$, to otrzymamy wykres pajęczynowy przedstawiony na rysunku 8. Jak widać z tego rysunku, w zależności od warunków początkowych trajektorie są przyciągane przez jeden z trzech punktów, w których krzywa $f(x)$ jest styczna do przekątnej ramki rysunku.

Dla co piątej iteracji $x(k+5)=f(x(k))$ wykres krzywej $f(x)$ jest bardziej skomplikowany (rys. 9). Trajektoria stosunkowo szybko osiąga stabilną orbitę okresową.

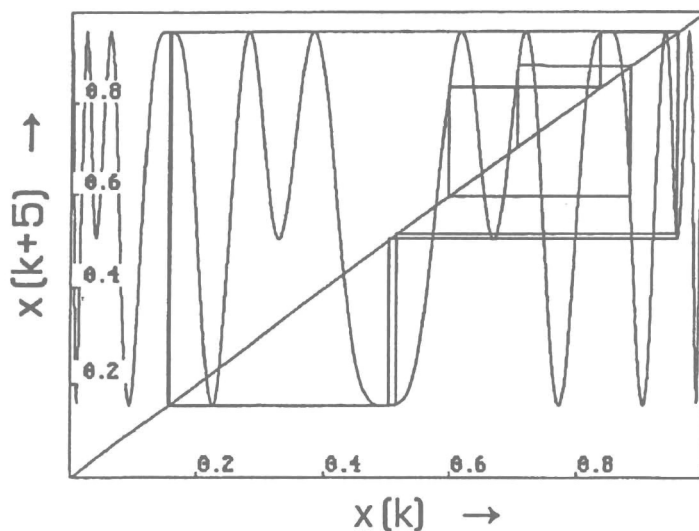
Prześledźmy teraz zachowanie się tego odwzorowania przy zmianach parametru $r \in [2, 4]$. Zgodnie z wcześniejszymi rozwiązaniami punkt stały odwzorowania równy zero jest niestabilny w zakresie rozpatrywanych zmian parametru. Drugi punkt stały jest stabilny, gdy $r \in [2, 3]$. W punkcie $r = 3$ następuje bifurkacja podwojenia okresu. Poprzednie rozwiązanie, choć teoretycznie istnieje, to jest ono niestabilne.

Natomiast pojawia się nowe stabilne rozwiązanie o okresie 4. Przy zmianie parametru znowu traci ono stabilność, a pojawia się orbita o okresie $2^2=8$, itd., aż do orbit o okresie 2^k . Przy $k \rightarrow \infty$ parametr r osiąga wartość graniczną równą $r_g = 3.5699$. Okazuje się, że w obszarze $r \in [r_g, 4]$ podobną kaskadę bifurkacji można zaobserwować dla orbit o okresie 3 i 4, tzn. 3^k i 4^k , gdzie $k=1, 2, 3, \dots$ Są to tzw. okna okresowości, które odpowiadają szczególnym wartościom parametru r . W szerokim obszarze zmian r obserwuje się bowiem chaos.

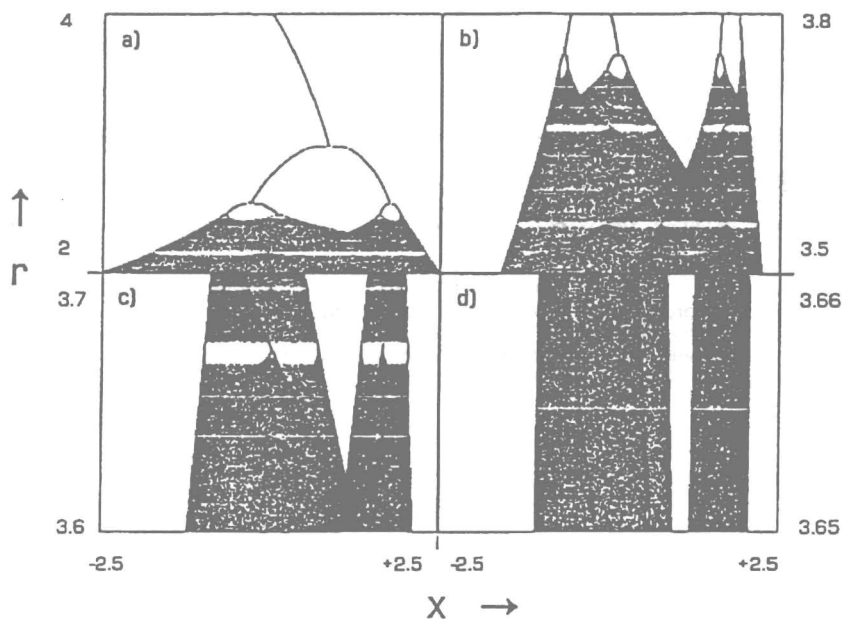
Na rys. 10 przedstawiono tzw. wykres bifurkacyjny, przy czym kolejne rysunki powstały w wyniku powiększenia poprzedniego dla pewnego przedziału parametru r . Widać wyraźnie kaskadę bifurkacji podwajanie okresu, ruchy chaotyczne i okna okresowości.



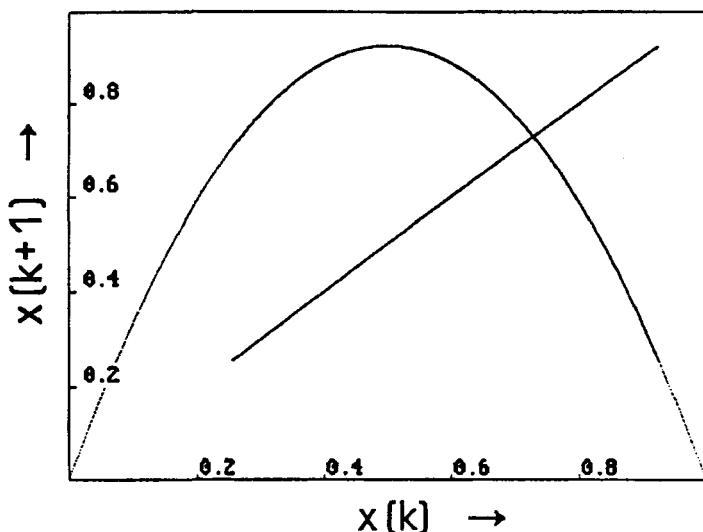
Rys.8. Wykres pajęczynowy dla $r = 3.83$ w układzi współrzędnych $x(k)$ i $x(k + 3)$ dla różnych warunków początkowych: (a) $x(0) = 0.7$; (b) $x(0) = 0.35$; (c) $x(0) = 0.1$.



Rys.9. Wykres pajęczynowy dla odwzorowania logistycznego i co piątej iteracji.



Rys.10. Wykres bifurkacyjny odwzorowania logistycznego dla różnych przedziałów zmian parametru kontrolnego r : (a) $r \in [2, 4]$; (b) $r \in [3.5, 3.8]$; (c) $r \in [3.6, 3.7]$; (d) $r \in [3.66, 3.65]$.



Rys.11. Chaotyczne odwzorowanie logistyczne dla $r=3.7$.

W celu prześledzenia procesu dynamiki chaotycznej tego odwzorowania na rys. 11 przedstawiono odwzorowanie logistyczne dla $r=3.7$. Wykonano około 4 milionów iteracji i jak widać z rysunku atraktor chaotyczny jest częścią odcinka $[0,1]$ i jest wyznaczonym przez rzut na oś poziomą części paraboli zaznaczonej linią grubą. Kolejne punkty otrzymane na drodze iteracji układają się wzdłuż tego odcinka w sposób zupełnie nieprzewidywalny (chaotyczny).

Funkcje autokorelacji $A(l)$ określona jest wzorem (29) dla $r = 4$. Zgodnie z (28) otrzymujemy dla prawie wszystkich warunków początkowych

$$\langle x_k \rangle = \frac{1}{2}. \quad (60)$$

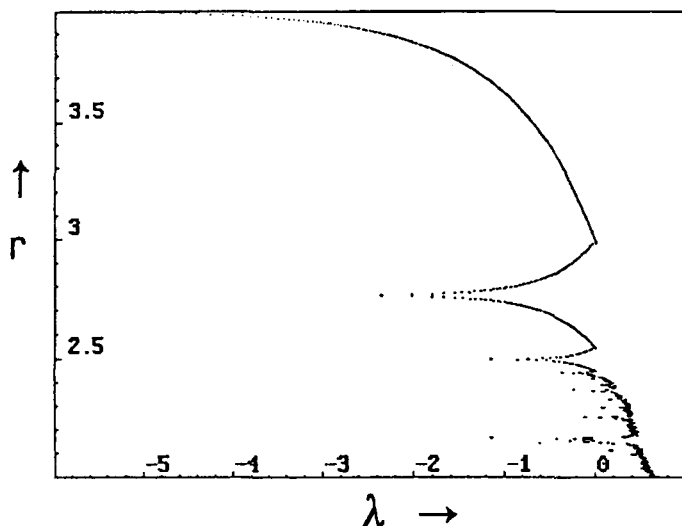
Wobec tego mamy

$$A(l) = \begin{cases} 1/8 & \text{dla } l = 0, \\ 0 & \text{dla } l \neq 0 \end{cases} \quad (61)$$

dla prawie wszystkich warunków początkowych.

Ponieważ rozwiązanie analityczne odwzorowania logistycznego jest ważne dla $r=4$ (patrz 41), to wykładnik Lapunowa dla $r=4$ wynosi

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \left| \frac{x(k)}{x(0)} \right| = \ln 2. \quad (62)$$



Rys.12. Zmiany wykładnika λ towarzyszące zmianom parametru r w przedziale $[2,4]$.

Dla tego parametru wartość wykładnika obliczona numerycznie wynosi $\lambda_n = 0.693144$ dla 206000 iteracji, co w stosunku do wartości dokładnej stanowi błąd $\delta = |\lambda - \lambda_n| = 0.00000318$.

Wartości wykładników Lapunowa dla $r \in [2,4]$ przedstawiono na rys. 12.

Analityczna postać rozwiązania dla $r=4$ (warto zauważyć, że dla tej wartości parametru liczba $1/2$ odwzorowuje się w 1, natomiast w następnej iteracji 1 przechodzi w zero) pozwala poprzez transformację

$$y = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x} \quad (63)$$

sprawdzić odwzorowanie logistyczne dla odwzorowania Bernoulliego (47).

3.4. Odwzorowanie okręgu w okrąg

Jest to kolejne odwzorowanie jednowymiarowe, które będziemy analizować.

Odwzorowanie typu okręgu opisane jest równaniem

$$\phi(k+1) \equiv F(\phi(k)) = \phi(k) + R_1 + R_2 \sin \phi(k) \bmod 2\pi. \quad (64)$$

Odwzorowanie to zależy od dwóch parametrów R_1 i R_2 i może reprezentować transformację fazy oscylatora nieliniowego, przy czym parametr R_1 opisuje stosunek dwóch częstości, natomiast R_2 jest współczynnikiem wzmocnienia oddziaływania nieliniowego [23,25]. To proste odwzorowanie wykazuje wiele interesujących cech nieliniowej dynamiki, a mianowicie dynamikę okresową, quasi-okresową i chaotyczną.

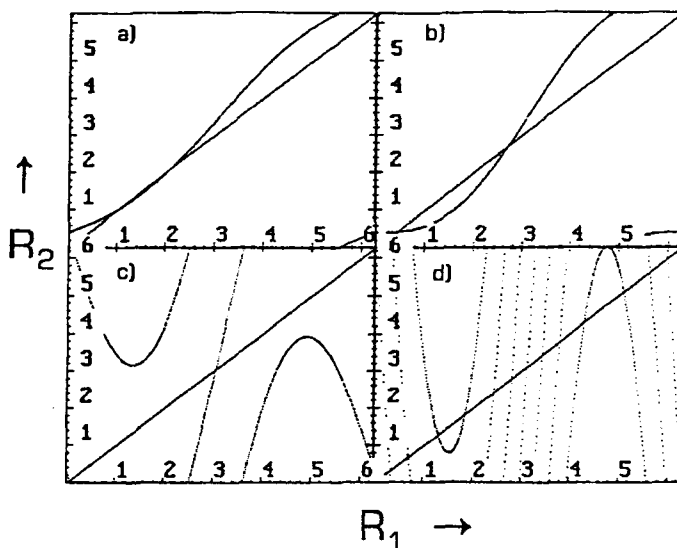
Warto zwrócić uwagę na pewne podstawowe własności odwzorowania (64) [23]:

A. Funkcja F posiada własność

$$F(\phi + 2\pi) = \phi + 2\pi + R_1 + R_2 \sin \phi \bmod 2\pi = 1 + F(\phi). \quad (65)$$

B. Dla $|R_2| < 1$ odwzorowanie $F(\phi)$ istnieje i jest różniczkowalne (jest dyfeomorfizmem).

C. Dla $R_2 = -1$ odwzorowanie odwrotne F^{-1} staje się nieróżniczkowalne, natomiast dla $|R_2| > 1$ jest ono niejednoznaczne.



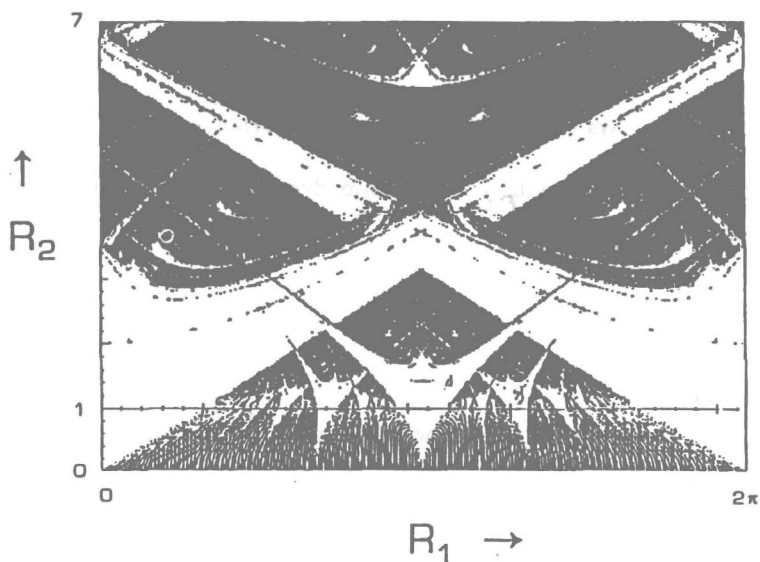
Rys. 13. Odwzorowanie (64) dla $R_1=0.4$ i różnych wartości R_2 : (a) -0.5 ; (b) -1 ; (c) -5 ; (d) -20 .

Na rys.13 dla ustalonej wartości $R_1=0.4$ przedstawiono wykres odwzorowania $F(\phi)$ dla różnych wartości R_2 , który potwierdza wymienione wcześniej własności odwzorowania. Liczbę charakteryzującą średnie przesunięcie o kąt ϕ na każdą iterację określamy ze wzoru

$$w = 2\pi w^* = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F^N(\phi_0) - \phi_0}{N}. \quad (66)$$

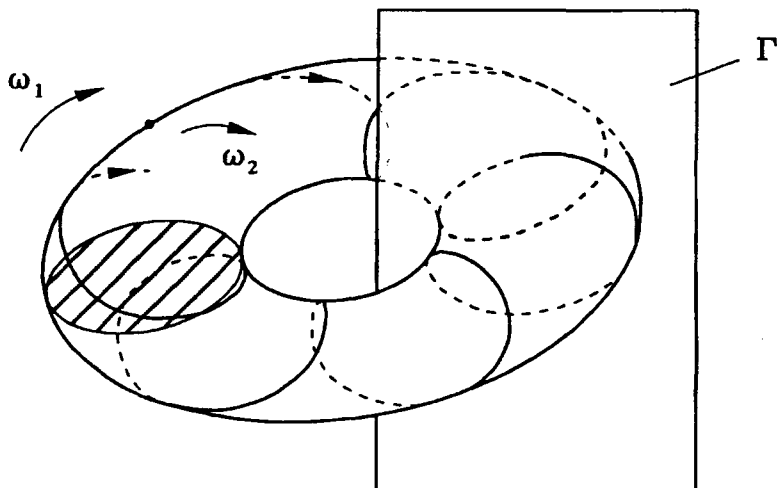
Średni okres przesunięcia obliczamy jako $T_w = 2\pi / w$, gdzie w jest częstością kołową rotacji (winding number). Natomiast częstość rotacji $w^* = 1/w$. Związki te są analogiczne do pojęcia częstości kołowej orbity okresowej nie leżącej na torusie, oraz częstości. Okazuje się [23,25], że dla $|R_2| < 1$ granica określone wzorem (66) zawsze istnieje, ale może być przedstawiona liczbą wymierną lub niewymierną. Jeśli jest to liczba wymierna, to obszar parametrów R_1, R_2 dla których $w = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$ w odniesieniu do odwzorowania (64) nazywamy językami Arnolda.

Przykłady takich języków przedstawiono na rys.14.



Rys.14. Przykłady języków Arnolda dla $R_2 \in [0, 7]$ i $R_1 \in [0, 2\pi]$. Dla $R_1=1$ mamy do czynienia z dwoma obszarami. Poniżej linii $R_1=1$ ruch jest regularny okresowy lub quasi-okresowy (okresowość występuje w obszarze języków Arnolda - obszarów jasnych), a powyżej tej linii ruch może być chaotyczny i może "współistnieć" z ruchem regularnym.

Rozpatrzmy bliżej dwa układy obszarów A i B z rys.14 dla $k=0.8$. Pierwszym z nich odpowiada orbicie 2-okresowej a drugi 3-okresowej. Oznacza to, że dla ustalonego R_2 mamy taką sytuację, że wzrost q (jeśli w tych obszarach $w=p/q$) szerokość języka Arnoldda zmniejsza się.



Rys.15. Mapa Poincaré - przekrój torusa płaszczyzną Γ .

Rozpatrzmy obecnie bardziej szczegółowo dynamikę trajektorii leżącej na torusie dwuwymiarowym (rys.15).

Niech na przykład

$$w = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q} = \frac{3}{5}. \quad (67)$$

Rozpatrzmy wędrówkę punktu poczynając od płaszczyzny Γ . Punkt ten znowu przebijie tę płaszczyznę po czasie $T_1 = 2\pi / \omega_1$.

Na rysunku 16 przedstawiono kolejne "zdjęcia" stroboskopowe odległe od siebie o czas T_1 .

Rozpatrzmy odwzorowanie

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + w \cdot 2\pi. \quad (68)$$

Dla $w = \frac{3}{5}$ otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= \Theta_0 + \frac{3}{5}2\pi, \\ \Theta_2 &= \Theta_1 + \frac{3}{5}2\pi = \Theta_0 + 2 \cdot \frac{3}{5}2\pi, \\ &\vdots \\ \Theta_5 &= \Theta_0 + 3 \cdot 2\pi,\end{aligned}\tag{69}$$

co oznacza $\Theta_5 \bmod 2\pi = \Theta_0 \bmod 2\pi$, a w ogólnym przypadku

$$\Theta_q = \Theta_0 + p \cdot 2\pi.\tag{70}$$

Dla N -obrotów dochodzimy do definicji częstości kołowej rotacji określonej poprzez (66).

W płaszczyźnie Γ otrzymujemy trzy punkty stałe, natomiast w płaszczyźnie odwzorowania (68) pięć punktów stałych (w płaszczyźnie prostopadłej do Γ też pięć punktów stałych). Zgodnie z (69) w płaszczyźnie (Θ_{n-1}, Θ_n) otrzymujemy pięć punktów stałych $\Theta_1^*, \Theta_2^*, \dots, \Theta_q^*$. Jeśli punkt Θ_i^* należy do orbity q -okresowej, generowanej przez odwzorowanie (64) to zgodnie z (70) mamy

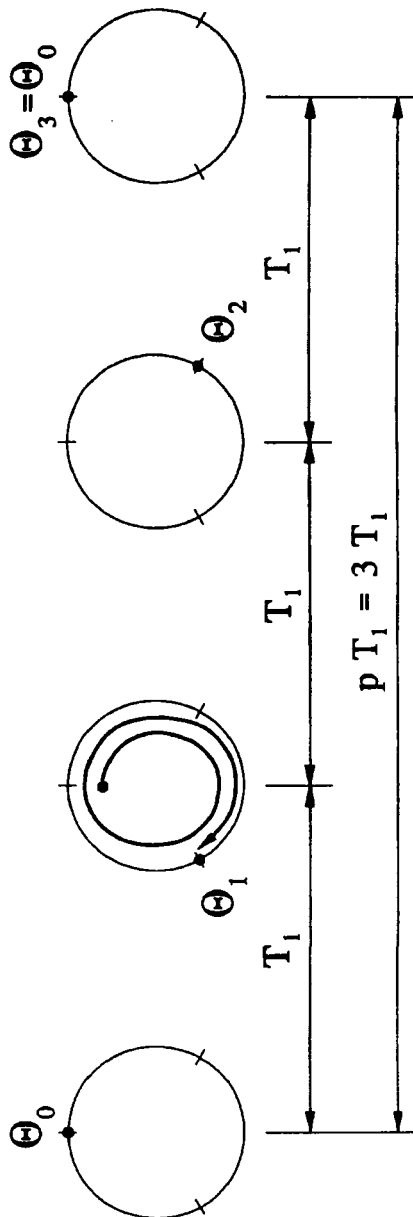
$$F_{R_1, R_2}^q(\Theta_i^*) = 2\pi(p + \Theta_i^*) \bmod 2\pi,\tag{71}$$

gdzie $i=1,2,\dots,q$ oraz F_{R_1, R_2} oznacza, że ta funkcja zależy od parametrów R_1 i R_2 . Oznacza to również, że startując z punktu Θ_i^* wracamy do niego poprzez q iteracji, lub po przesunięciu o kąt $2\pi p$. Przy tej okazji warto powrócić do interpretacji związanej z rys.16. W tym samym punkcie odwzorowania znajdziemy się po q obrotach (z częstością ω_2) lub po przesunięciu o kąt $2\pi p$. Zgodnie z (65) mamy

$$F(\Theta_i^*) = \Theta_i^* + R_1 + R_2 \sin \Theta_i^* \bmod 2\pi,\tag{72}$$

i obliczamy

$$\frac{dF(\Theta_i^*)}{d\Theta_i^*} = 1 + R_2 \cos \Theta_i^* \bmod 2\pi.\tag{73}$$



Rys.16. Ruch punktu w płaszczyźnie Γ obserwowany co okres T_1 . Pomiedzy kolejnymi połozeniami punktu wykonuje $5/3$ obrotu, czyli w czasie $3T_1$ punkt wykona 5 obrotów (w ogólnym przypadku będzie to q obrotów), a potem ruch zacznie się powtarzać

Cała orbita złożona z punktów Θ_i^* , $i = 1, 2, \dots, q$ będzie stabilna, jeśli każdy z tych punktów będzie stabilny, czyli:

$$\prod_{i=1}^q |1 + R_2 \cos \Theta_i^* \bmod 2\pi| < 1. \quad (74)$$

Rozpatrzmy najprostszy przypadek, gdy $w=1$, czyli $p=q=1$. Zgodnie z (72) otrzymujemy

$$\Theta_0^* = \Theta_0^* + R_1 + R_2 \sin \Theta_0^* \bmod 2\pi$$

i

$$R_1 = -R_2 \sin \Theta_0^*$$

Natomiast z warunku (74) mamy

$$|1 + R_2 \cos \Theta_0^*| < 1. \quad (75)$$

Dla $R_2 < 1$ granice utraty stateczności są osiągnięte, gdy

$$R_2 \cos \Theta_0^* = 0, \quad (76)$$

czyli dla $\Theta_0^* = \pm(\pi/2)$. Wobec tego szerokość pierwszego języka Arnolda wynosi

$$R_1 = -R_2 \sin \Theta_0^* = \pm R_2, \quad (77)$$

co potwierdza obserwacja obszaru w okolicach 0 i 2π na rys.16.

3.5. Odwzorowanie Hénona

Odwzorowanie Hénona [26] jest odwzorowaniem dwuwymiarowym i może być traktowane jako rozszerzenie omawianego wcześniej odwzorowania logistycznego. Opisane jest ono równaniem

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= r - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} &= bx_n, \end{aligned} \quad (78)$$

lub

$$(x, y) \rightarrow (r - ax^2 + by, x), \quad (79)$$

gdzie a , b i r spełniają rolę parametrów bifurkacyjnych. Jakobian (78) wynosi

$$\begin{vmatrix} -2ax_n & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = b, \quad (80)$$

i wobec tego dla $|b| < 1$ układ jest dysypatywny. Okazuje się, że dla $0 < b < 1$, $r=1$ i $a > 0$ odwzorowanie posiada dwa punkty stałe określone poprzez równania

$$x_{1,2} = \frac{-(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, \quad y_{1,2} = -bx_{1,2}. \quad (81)$$

Te dwa punkty są rzeczywiste, jeśli $a > (1-b)^2/4$, przy czym jeden z nich jest zawsze niestabilny, a drugi jest niestabilny gdy $a > 0.75(1-b)^2$. Na bazie tego jednego odwzorowania rozpatrzmy bardzo wiele interesujących elementów nieliniowej dynamiki.

1. Niech $r=2.1$, $a=1$, $b=-0.3$. Na rys. 19 na płaszczyźnie (x,y) przedstawiono dziwny atraktor chaotyczny Hénona. Ponadto na kolejnych rysunkach od "a" do "d" krzyżykami oznaczono orbity okresowe odpowiednio o okresach 1, 2, 5 i 10. Metoda poszukiwania takich orbit polega na zastosowaniu metody Newtona lub jej wariantów [27–31].

Jeśli x_* jest punktem stałym odwzorowania F oraz p jest parametrem, to spełnione jest równanie

$$x_* = F(x_*, p). \quad (82)$$

Niech punkt x będzie leżał w pobliżu punktu x_* . Wprowadźmy macierz N

$$N = D_x F(x, p), \quad (83)$$

której elementami są pochodne cząstkowe względem punktu x . Dokonując linearyzacji wokół punktu x otrzymujemy

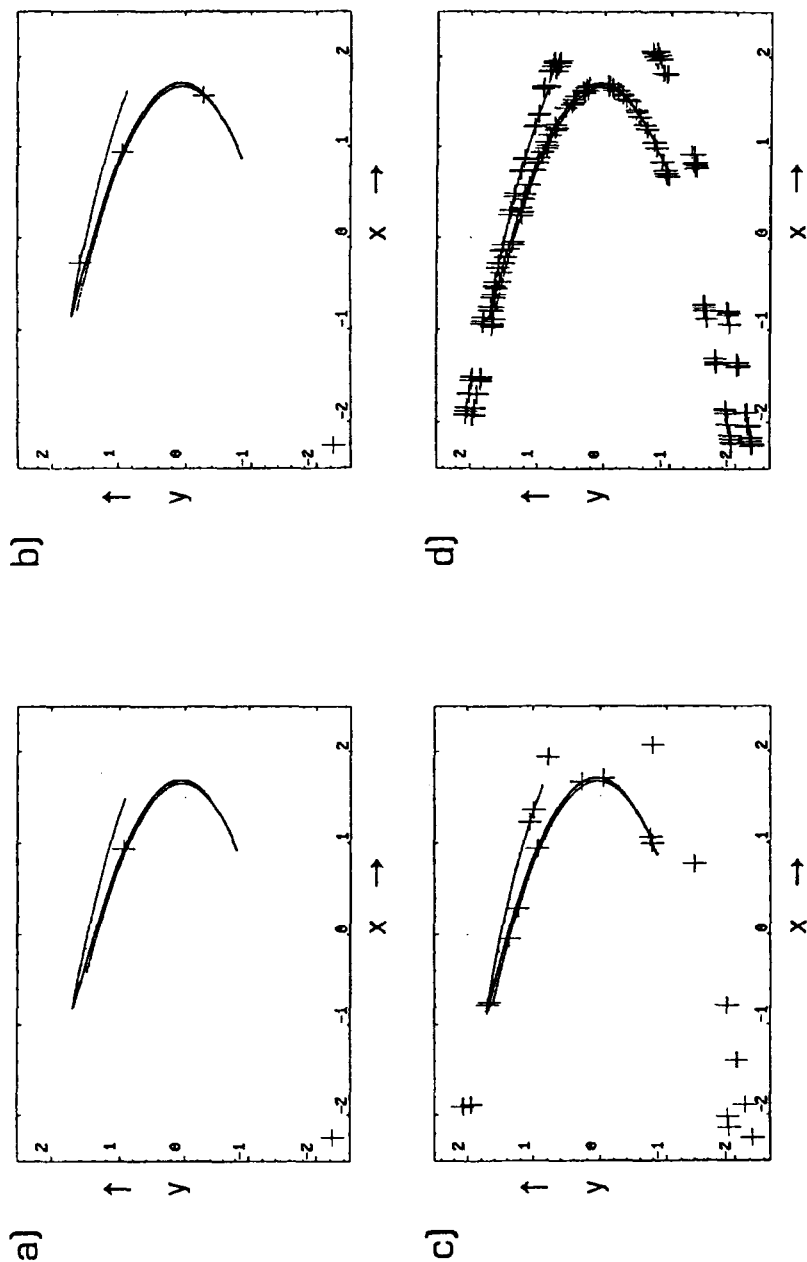
$$F(x, p) + N dx = x + dx, \quad (84)$$

skąd znajdujemy

$$dx = (N - I)^{-1} (x - F(x, p)), \quad (85)$$

i powyżej I jest macierzą jednostkową. Wyrażenie $x - F(x, p) = E$ oznacza błąd obliczeń, który dla $x = x_*$ jest zerem (jest to wartość dokładna). Okazuje się że metoda Newtona nie zawsze umożliwia zmniejszenie błędu w następnym kroku obliczeń. Zmodyfikowana metoda Newtona pozwala na wybranie takiego przyrostu dx , że jej zbieżność jest zachowana.

W przypadku orbit okresowych zaznaczonych krzyżykami na rys. 17 punkty startu dla zmodyfikowanej metody Newtona wybierane były w sposób losowy. Zostały znalezione



Rys. 17. Dziwny atraktor chaotyczny Hénona i punkty stałe odwzorowania Hénona (zaznaczone krzyżykami) o okresach: (a) 1; (b) 2; (c) 5; (d) 10.

2 punkty o okresie 1 (a), 4 punkty o okresie 2 (b), 3 różne orbity o okresie 5 (c), oraz 15 różnych orbit o okresie 10 (d). W tym ostatnim przypadku jako punkty startu dla zmodyfikowanej metody Newtona wybrano losowo 9031 punktów. Warto zauważyć, że wiele ze znalezionych orbit okresowych nie należy do atraktora chaotycznego.

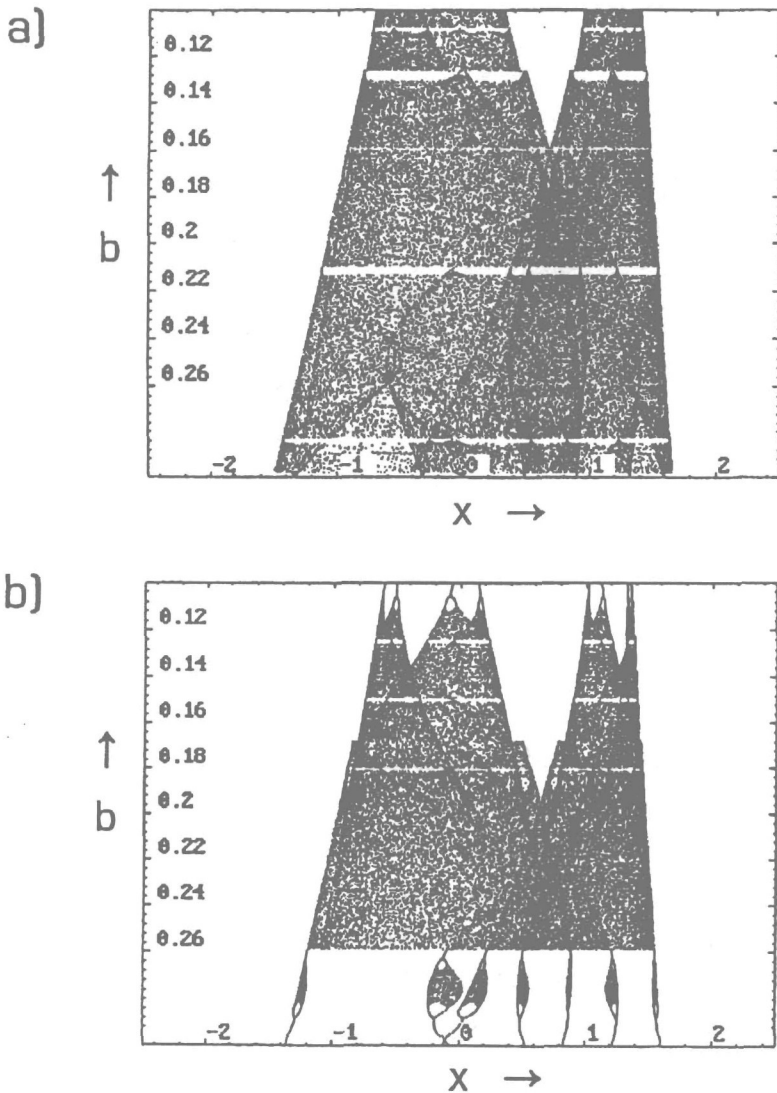
2. Następny przykład wiąże się z wykresem bifurkacyjnym. Na osi pionowej odłożymy parametr b , natomiast na osi poziomej x . W rzeczywistości jest to projekcja trójwymiarowej przestrzeni (b, x, y) na płaszczyznę (b, x) , $0.1 \leq b \leq 0.3$ (patrz rys. 18).

Dla $r=1.3$ dynamika chaotyczna odwzorowania "przerywana" jest dla pewnych wartości b oknami okresowości (jest ich pięć), natomiast ze zmniejszeniem r i dla $b \approx 0.26$ następuje bifurkacja i znika ruch chaotyczny, a pojawia się ruch okresowy. Następnie każda z "gałęzi" podwaja się prowadząc przy dalszym zmniejszaniu b do powstawania tzw. "pęcherzyków" ruchu chaotycznego (rys. 18b).

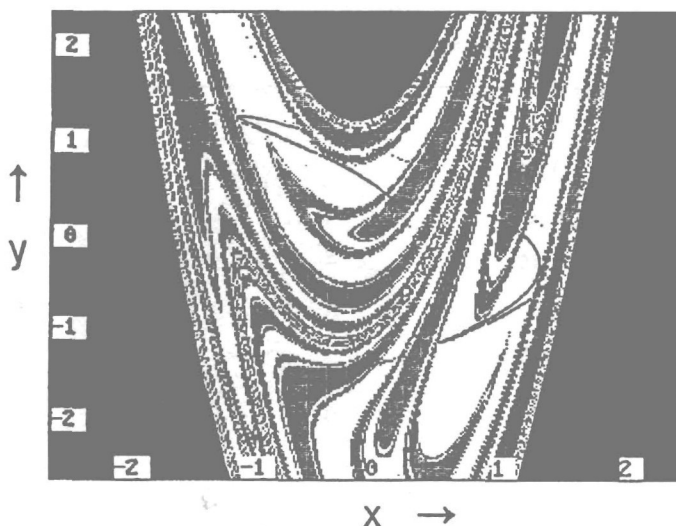
3. Na bazie tego przykładu omówimy pojęcie basenów przyciągania atraktorów. Basenem przyciągania atraktora nazywać będziemy taki zbiór wszystkich warunków początkowych w przestrzeni fazowej, które będą "przyciągane" przez ten atraktor, tzn. po "starcie" z każdego z takich warunków początkowych trajektorie po pewnym czasie znajdują się na atraktorze. Takie baseny przyciągania dla odwzorowania Hénona przedstawiono na rys. 19.

Dla zbioru parametrów jak na rysunku istnieją trzy różne atraktory. Jednym z nich jest ∞ (obszar czarny), stabilna orbita okresowa o okresie osiem (obszar o kolorze szarym) oraz dziwny atraktor chaotyczny, składający się na rysunku z dwóch części, który "przyciąga" warunki początkowe z obszaru białego.

4. Teraz omówimy zagadkowe podobieństwo pomiędzy projekcją atraktora Hénona i rozmaitością niestabilną punktu stałego należącego do tego atraktora. Poprzez stabilną rozmaitość punktu stałego pewnego odwzorowania będziemy rozumieli zbiór punktów zmierzających do tego punktu przy liczbie iteracji dążących do nieskończoności (odpowiada to basenowi przyciągania). Natomiast przez pojęcie niestabilnej rozmaitości punktu stałego pewnego odwzorowania również będziemy taki zbiór punktów, które są przyciągane przez iteracje w odwrotnym kierunku (lub inaczej odpychane przy zastosowaniu tych pierwszych iteracji).



Rys.18. Wykres bifurkacyjny dla odwzorowania Hénona i dla parametrów (a) $r=1.3$; (b) $r=1.25$.



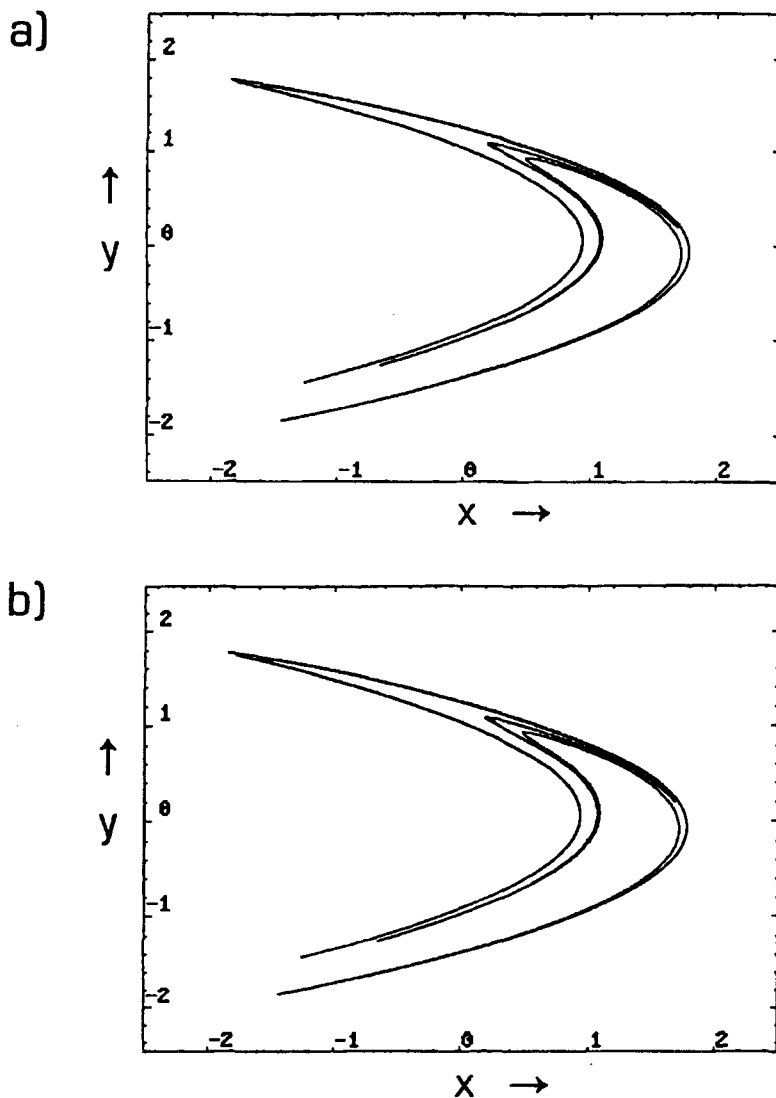
Rys.19. Baseny przyciągania dla odwzorowania Hénona i dla $a=1$, $r=1$, $b=0.48$.

Na rys.20a przedstawiono chaotyczny atraktor Hénona, natomiast na rys.20b przedstawiono zbiór punktów przyciąganych przy odwrotnej iteracji przez niestabilny punkt stały o współrzędnych $(0.855, 0.898)$. Uderzające jest tutaj podobieństwo pomiędzy dwoma zbiorami. Uważa się, że te zbiory są jednakowe, ale nie zostało to udowodnione w sposób ścisły (patrz np. [31]).

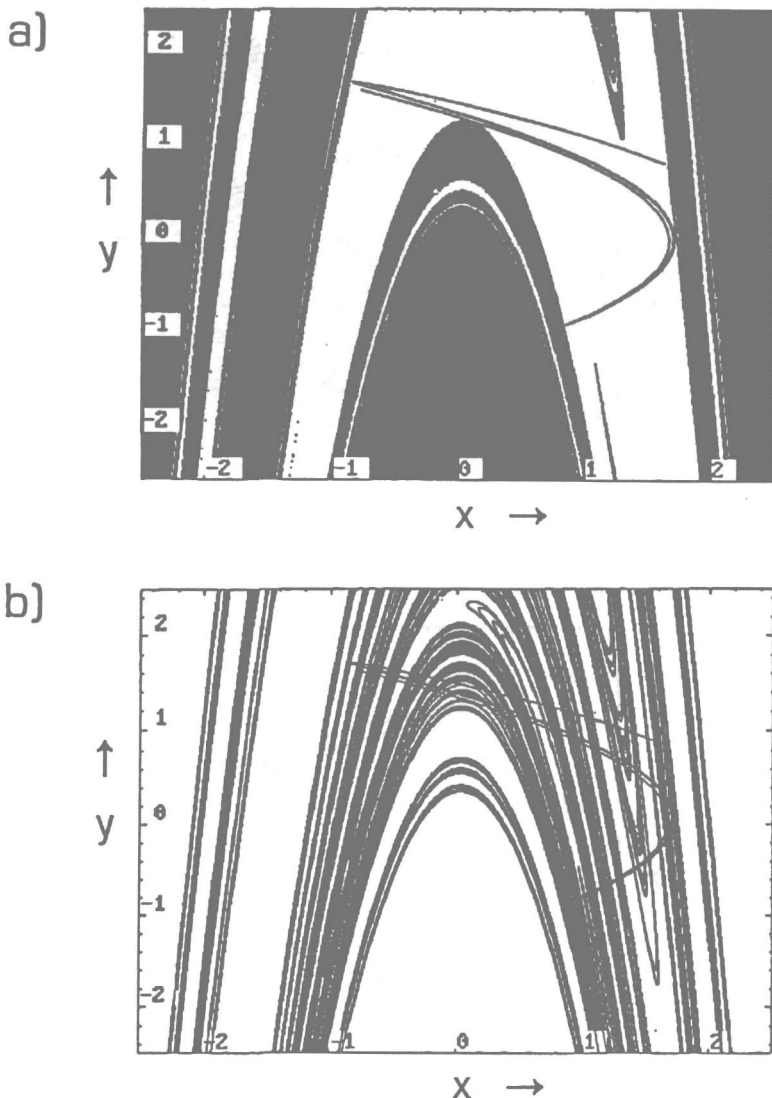
5. Obecnie zwróćmy uwagę na podobieństwo pomiędzy basenem przyciągania przez atraktor Hénona i atraktor będący nieskończonością (∞) (będzie to zbiór punktów, które przy iteracjach dążących do nieskończoności "uciekają" w nieskończoność (rys. 21a)), a basenem przyciągania przez stabilny punkt stały leżący na atraktorze Hénona (rys. 21b). Obliczenia zostały wykonane przy przyjęciu parametrów: $a=1$, $b= -0.32$, $r=2.10$. Widać, że w przybliżeniu basen przyciągania stabilnego punktu na atraktorze Hénona mieści się w basenie przyciągania atraktora chaotycznego Hénona.

6. Istnieje również możliwość pojawienia się trajektorii chaotycznej znajdującej się w obszarze ograniczonym w przestrzeni fazowej, przy czym wszystkie inne trajektorie znajdujące się w jej okolicy "uciekają" do nieskończoności, czyli nie są ograniczone. Taki zbiór niezmienniczy nazywać będziemy siodłem chaotycznym odwzorowania Hénona. Ten zbiór niezmienniczy i zwarty będzie niestabilny, czyli trajektorie z jego otoczenia będą się

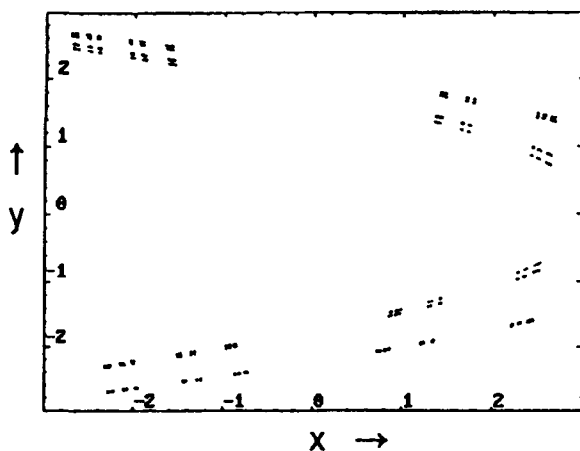
oddalać, a w rozpatrywanym przypadku "uciekać" do nieskończoności.



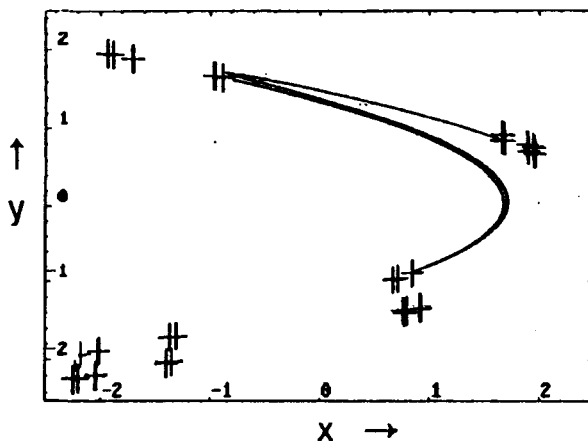
Rys. 20. Atraktor Hénona dla $a=1$, $r=1.38$ i $b=0.32$ (a) oraz rozmaitość niestabilna punktu stałego o współrzędnych $(x,y)=(0.855,0.898)$ (b).



Rys.21. Basen przyciągania przez nieskończoność (∞) oznaczony kolorem czarnym i basen przyciągania przez atraktor Hénona (a) oraz basen przyciągania przez punkt stały stabilny odwzorowania Hénona, który w przybliżeniu wynosi $(0.907, 0.966)$ (b). Na obu rysunkach a i b zaznaczony jest również atraktor Hénona.

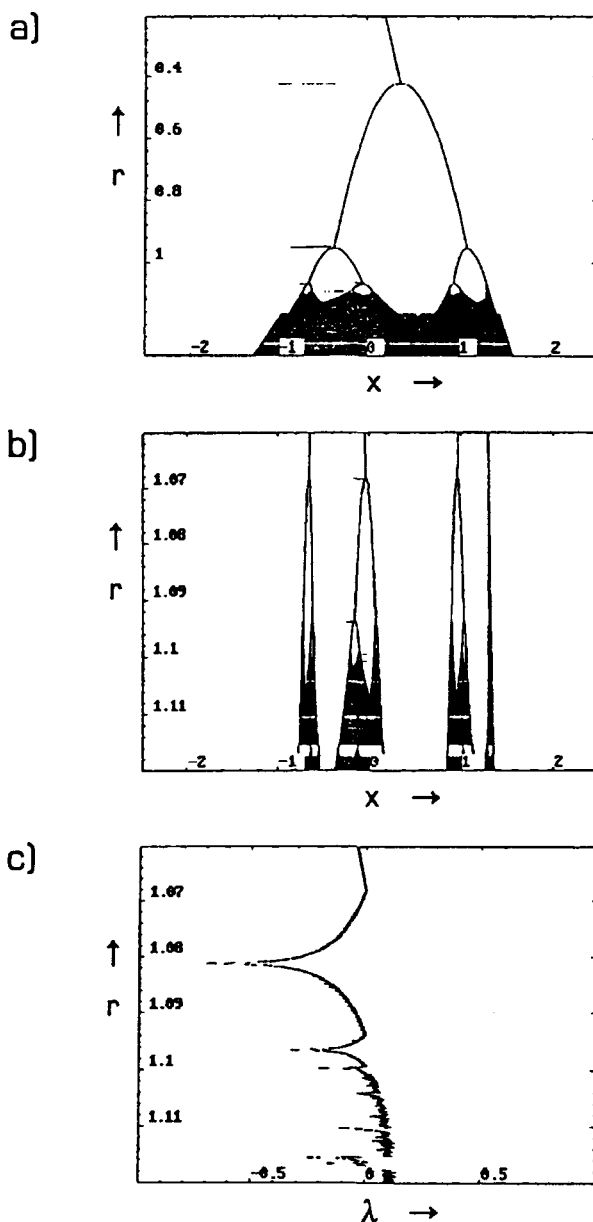


Rys. 22. Niestabilny zbiór niezmienniczy zawierający trajektorię chaotyczną dla odwzorowania Hénona.



Rys. 23. Graniczna trajektoria (zaznaczona krzyżykami) należąca do granic basenów przyciągania przez atraktor Hénona (zaznaczony punktami) i atraktor leżący w "nieskończoności" i posiadający strukturę fraktali.

Na rys. 22 pokazano przykład niestabilnego zbioru zwanego i niezmienniczym na którym leży trajektoria chaotyczna. Obliczenia wykonano dla $a=1$, $b=0.4$ i $r=4$.



Rys.24. Wykres bifurkacyjny ilustrujący kaskadę podwajania okresu prowadzącą do chaosu (a) ; okno z wykresu (a) dla $1.06 \leq r \leq 1.12$ (b) oraz wykładnik Lapunowa odpowiadający (b) rysunkowi (c).

7. Z rys. 22 wynika, że dla pewnych parametrów odwzorowania Hénona istnieją dwa atraktory przyciągające zbiory warunków początkowych. Jednym z nich jest basen warunków początkowych przyciąganych przez atraktor chaotyczny Hénona, a drugim jest basen warunków początkowych "uciekających" z czasem do nieskończoności, lub też przyciągany przez nieskończoność. Istnieją punkty należące jednocześnie do obu granic basenów warunków początkowych i które nie są przyciągane przez żaden ze wspomnianych atraktorów [30]. Taka ograniczona trajektoria została pokazana na rys. 23 dla $a=1$, $b=-0.3$, $r=2.12$.

8. W tym przykładzie na bazie odwzorowania Hénona zilustrowana zostanie droga prowadząca do chaosu poprzez podwajanie okresu. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 24a – c.

Na pierwszym z nich widać drogę prowadzącą do ruchu chaotycznego poprzez kolejne podwajanie okresów drgań. Na podstawie rys. 24a i 24b można policzyć wartości kolejnych stosunków długości krzywych pomiędzy punktami bifurkacji, które wynoszą: $d_2/d_4=4.33$, $d_4/d_8=4.42$, $d_8/d_{16}=4.54$ i jak widać dążą do stałej Feigenbauma wynoszącej w przybliżeniu 4.67. Na rys. 24c przedstawiono wykres zmian wykładnika Lapunowa λ w relacji do rys. 24b, tzn. dla takiego samego przedziału zmian parametru r . Tam gdzie jest on dodatni, tam występuje chaos.

3.6. Odwzorowanie Ikedy

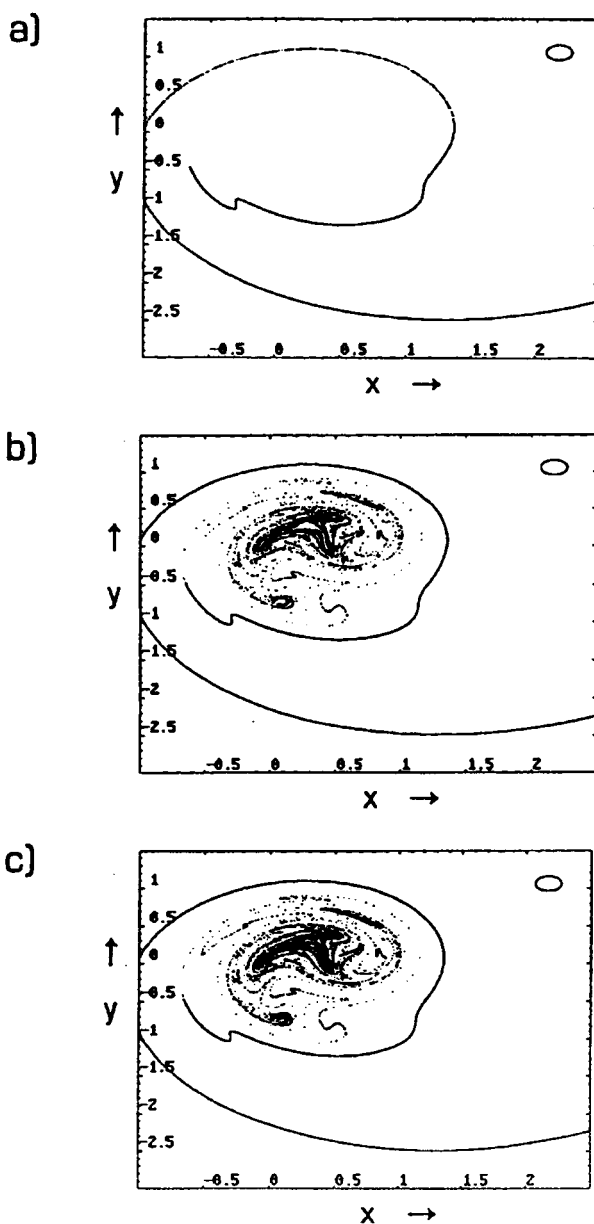
Odwzorowanie Ikedy opisane jest równaniem

$$z \rightarrow \rho + c_2 z \exp \left[i \left(c_1 - \frac{c_3}{1 + (z)^2} \right) \right], \quad (86)$$

gdzie: $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ i $i^2 = -1$.

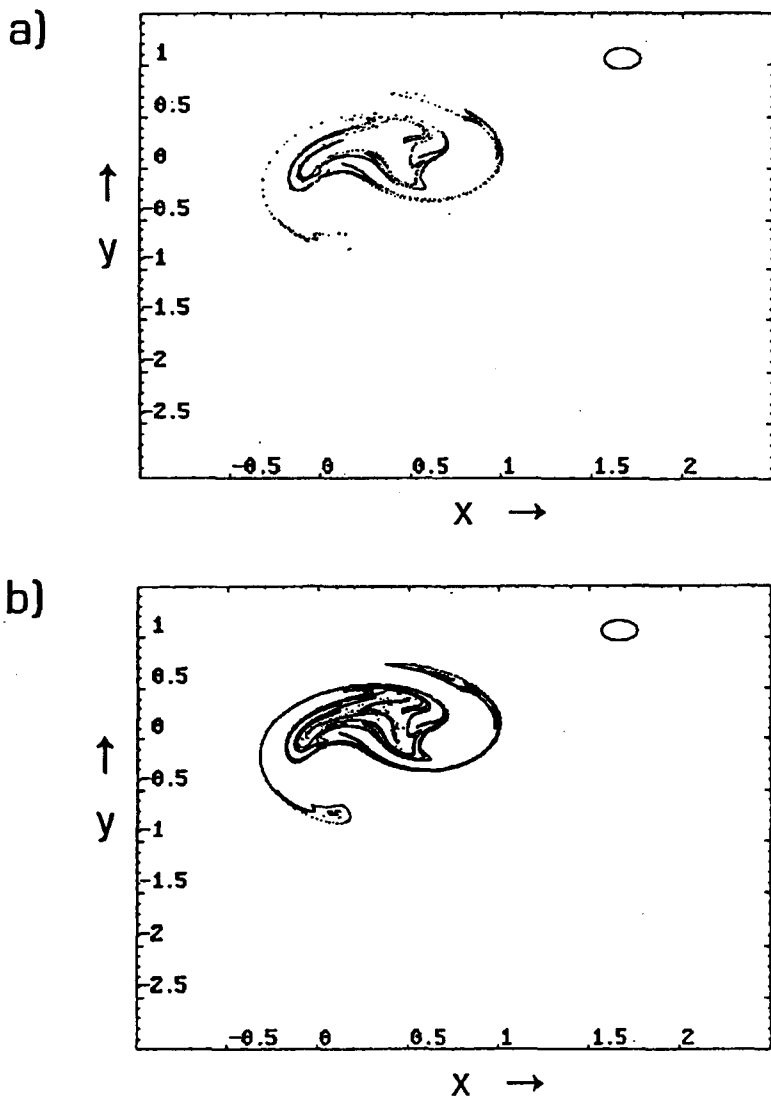
Na rys. 25 przedstawiono trzy kolejne iteracje elipsy znajdującej się w prawym górnym rogu rysunku dla następujących wartości parametrów: $\rho=0.5$, $c_1=0.4$, $c_2=0.9$, $c_3=6$. O ile pierwsza iteracja wskazuje na regularną dynamikę nieustaloną, to w drugiej i trzeciej iteracji wyraźnie uwidacznia się dynamika chaotyczna.

Rozpatrzmy teraz dynamikę odwzorowania (86) dla tych samych parametrów co poprzednio, przy czym teraz iterowana elipsa jest przesunięta w lewo w stosunku do sytuacji



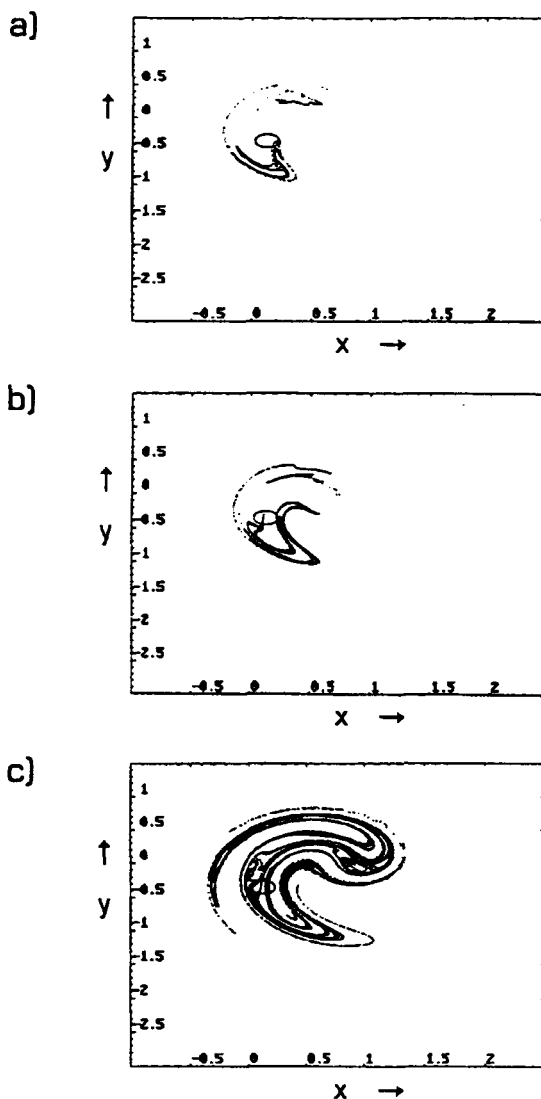
Rys.25. Pierwsza (a), druga (b) i trzecia (c) iteracja elipsy przedstawionej w górnym prawym rogu rysunku dla odwzorowania Ikedy.

poprzedniej (rys.26). Jak widać z tego rysunku dynamika chaotyczna uwidacznia się tutaj znacznie wcześniej.

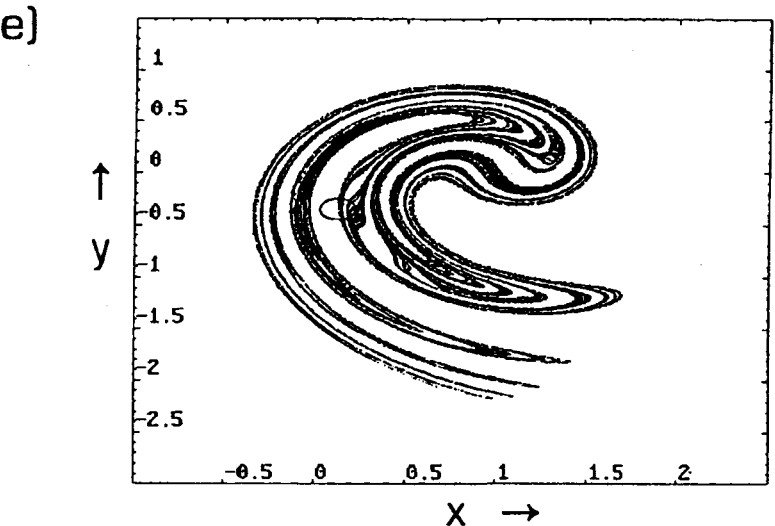
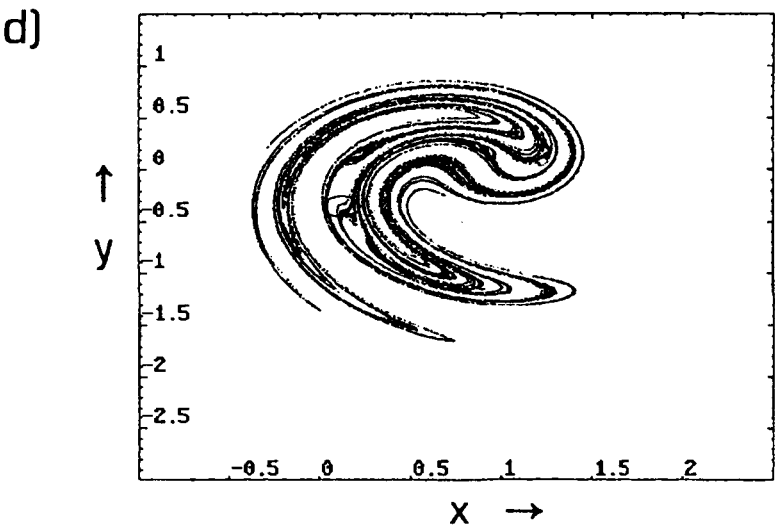


Rys.26. Pierwsza (a) i druga (b) iteracja elipsy dla odwzorowania Ikedy.

Natomiast na ostatnim rysunku (rys.27) przedstawiono tylko pierwszą iterację elipsy, tym razem leżącej na poziomie $y=0.5$, dla różnych wartości parametru kontrolnego ρ .



Rys.27. Pierwsze iteracje elipsy dla różnych wartości parametru ρ : a) 0.6 ; b) 0.7 ; c) 0.8 ; d) 0.9 ; e) 1.

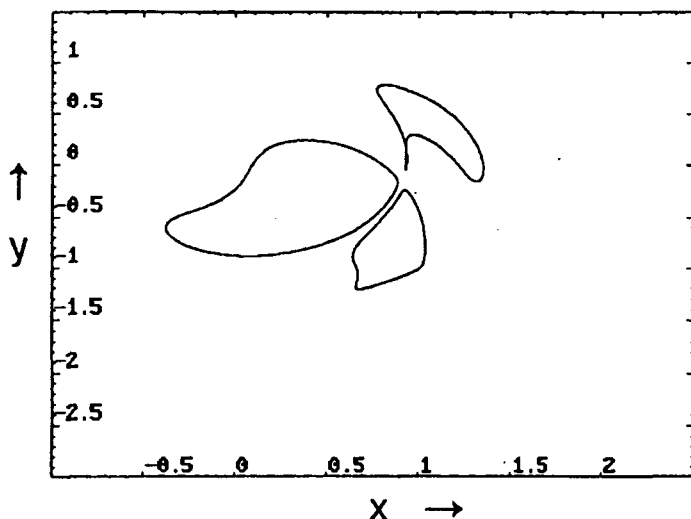


Rys.27. c.d.



Wzrost parametru ρ od 0.5 do 1.0 wpływa na pogłębienie dynamiki chaotycznej odwzorowania Ikedy.

Rysunek 28 przedstawia trzy analogiczne krzywe dla następujących parametrów: $c_1=0.4$, $c_2=0.9$ i $c_3=6$, przy czym podczas wykonywania obliczeń parametr ρ zmieniał się w przedziale $[0.9, 1.9]$. Jest to orbita okresowa o okresie 3 (dla jednej ustalonej wartości ρ na wykresie otrzymaliśmy tylko trzy różne punkty). Stabilność każdej orbity ulega zmianie ze zmianą parametru ρ .



Rys. 28. Orbity okresowe o okresie 3 przy zmianie parametru ρ w przedziale $0.9 \leq \rho \leq 0.9$ dla odwzorowania Ikedy.

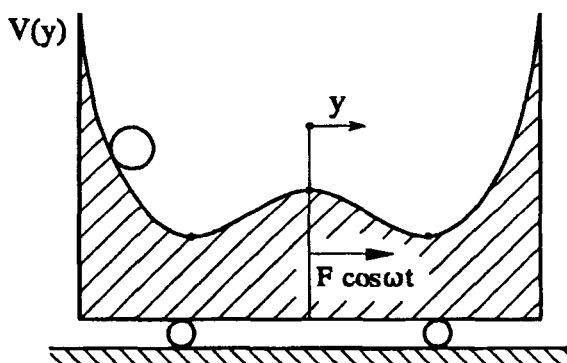
4. Układy ciągłe

4.1. Wprowadzenie

Aby jednoznacznie określić ewolucję w czasie interesującego nas procesu w przyrodzie należy dysponować wiedzą dotyczącą zależności funkcyjnych między funkcją opisującą ten proces i jej pochodną (lub jej pochodnymi) oraz dodatkowo należy dysponować warunkami początkowymi. Zależność funkcyjna pomiędzy nieznaną funkcją i jej pochodną nosi nazwę równania różniczkowego. Obecnie bardzo trudno wyobrazić sobie rozwój wielu dziedzin nauki bez znajomości teorii równań różniczkowych. Istnieje wiele kierunków rozwoju współczesnych teorii równań różniczkowych oraz różne metody ich nauczania w zależności od potrzeb uwarunkowanych kręgiem odbiorców. W tym rozdziale zajęto się jedynie układami równań różniczkowych opisujących dynamikę prostych zdeterminowanych układów fizycznych pod kątem dynamiki chaotycznej. Szersze omówienie dynamiki chaotycznych prostych oscylatorów można znaleźć w pracy W. Szemplińskiej [32].

4.2. Oscylator nieautonomiczny o różnych potencjałach $V(y)$

Wyobraźmy sobie, że kulka znajduje się w naczyniu, którego przekrój zaznaczono na rys. 29.

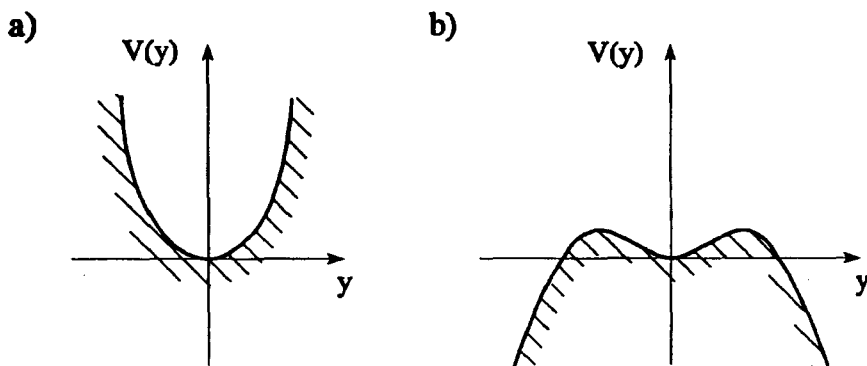


Rys. 29. Ruch kulki w naczyniu wzdłuż potencjału $V(y)$.

Równanie ruchu kulki ma postać

$$\ddot{y} + c\dot{y} + \frac{dV(y)}{dy} = F \cos \omega t. \quad (87)$$

Potencjał $V(y)$ może posiadać dwa minima i jedno maksimum, jak to jest przedstawione na rys. 29 lub też może przybierać inne kształty (rys. 30).



Rys. 30. Typowe kształty potencjału $V(y)$.

Jeśli potencjał opiszemy równaniem

$$V(y) = \frac{\alpha y^2}{2} + \frac{\beta y^4}{4}, \quad (88)$$

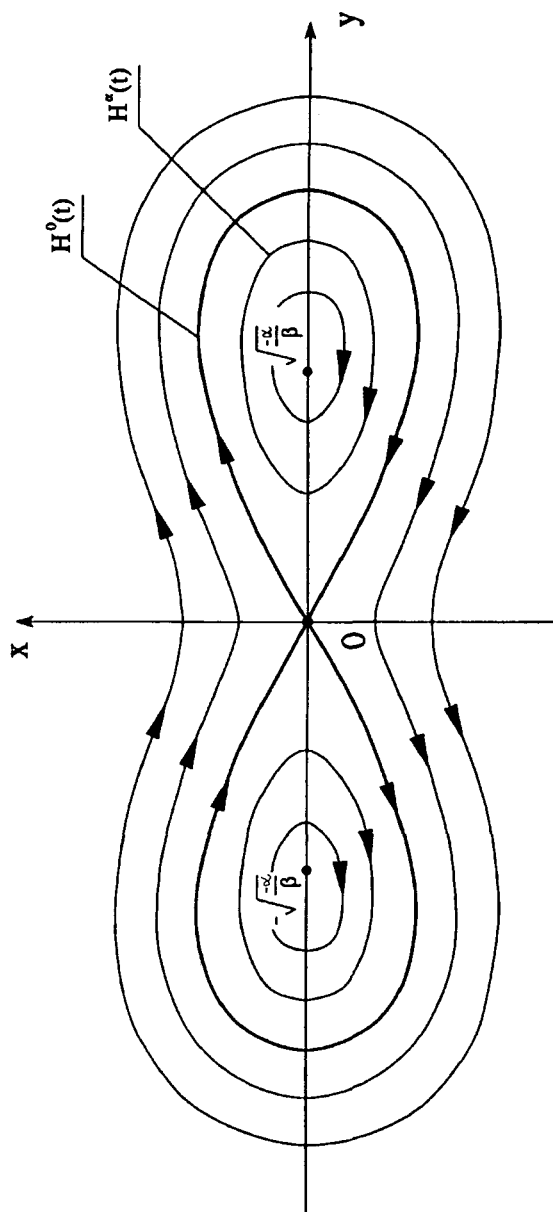
to przypadkowi z rys. 29 odpowiada potencjał z $\alpha < 0$ i $\beta > 0$, natomiast dla potencjału z rys. 30a mamy $\alpha > 0$ i $\beta > 0$, oraz dla potencjału z rys. 30b mamy $\alpha > 0$ i $\beta < 0$. Rozważmy najpierw przypadek braku wymuszenia i braku tłumienia w analizowanym układzie. Wówczas dynamika układu jest opisana równaniami

$$\begin{aligned} \dot{y} &= x, \\ \dot{x} &= -\alpha y - \beta y^3. \end{aligned} \quad (89)$$

Poszukajmy położenia równowagi kulki. Wtedy mamy $\dot{y} = \dot{x} = 0$ i z równań (89) otrzymujemy

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y(\alpha + \beta y^2) &= 0, \end{aligned} \quad (90)$$

co pozwala na znalezienie trzech położenia równowagi: $(y_0, x_0) = (0, 0)$ oraz



Rys. 31. Trzy punkty osobliwe oraz olaczające je trajektorie fazowe.

$(x_0, y_0) = \left(\pm \sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}}, 0 \right)$. Zbadajmy stabilność każdego ze znalezionych położań równowagi. W tym celu przyjmijmy, że δ_x i δ_y są małymi zaburzeniami odpowiednio dla x_0 i y_0 i mamy

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \delta x, \\ y &= y_0 + \delta y, \end{aligned} \quad (91)$$

co po uwzględnieniu (89) prowadzi po linearyzacji (czyli po pozostawieniu tylko członów liniowych ze względu na δ_x i δ_y) do równań

$$\begin{aligned} \delta \dot{y} &= +\delta x, \\ \delta \dot{x} &= -\alpha \delta y - 3\beta y_0^2 \delta y. \end{aligned} \quad (92)$$

Rozwiązań (92) poszukamy o postaci

$$\begin{aligned} \delta x &= X e^{\lambda t}, \\ \delta y &= Y e^{\lambda t}, \end{aligned} \quad (93)$$

co po podstawieniu do (92) prowadzi do równania

$$\begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ \lambda & \alpha + 3\beta y_0^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (94)$$

z którego wyznaczamy następujące pierwiastki

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\alpha - 3\beta y_0^2}. \quad (95)$$

Rozważmy dalej przypadek przedstawiony na rys. 29. Wówczas dla (0,0) mamy $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\alpha}$, a ponieważ $\alpha < 0$, to pierwiastki są rzeczywiste i różnych znaków. Położenie (0,0) jest siodłem. Szersza klasyfikacja punktów osobliwych podana jest w klasycznych podręcznikach poświęconych teorii drgań, a w tym także w pracy autora [7]). Dwóm pozostałym położeniom równowagi odpowiadają wartości własne

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{-2\alpha}; \quad (96)$$

które są wartościami urojonymi. Te położenia równowagi są punktami osobliwymi typu środków. Położenie (0,0) nazywamy hiperbolicznym, a pozostałe położenia równowagi są typu eliptycznego. Trajektorie fazowe wraz z punktami osobliwymi przedstawiono na rys. 31.

Na szczególną uwagę zasługuje tu trajektoria fazowa zamknięta w kształcie ósemki. Trajektorie wychodzące z punktu siodłowego 0 i do niego powracające nazywamy trajektorią

(orbita) homokliniczną. Orbits homokliniczne można opisać analitycznie w postaci dwóch następujących równań:

$$\begin{aligned} y_H(t) &= \sqrt{\frac{-2\alpha}{\beta}} \operatorname{sech}(\pm\sqrt{-\alpha}(t-t_0)), \\ x_H(t) &= -\alpha \sqrt{\frac{2}{\beta}} \operatorname{sech}(\pm\sqrt{-\alpha}(t-t_0)) \tanh(\pm\sqrt{-\alpha}(t-t_0)), \end{aligned} \quad (97)$$

gdzie czas t jest parametrem.

4.3. Funkcja Mielnikowa i chaos

Podstawową ideą metody Mielnikowa [33] jest wykorzystanie rozwiązania całkownego niezaburzonego układu dwóch równań różniczkowych do rozwiązania zaburzonego układu równań. Niech dynamika układu będzie opisana równaniami:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y) + \varepsilon g_1(x, y, t), \\ \dot{y} &= f_2(x, y) + \varepsilon g_2(x, y, t) \end{aligned} \quad (98)$$

Parametr $\varepsilon > 0$, zwany małym parametrem jest wielkością $\varepsilon \ll 1$ i podkreśla "małość" zależnych od czasu zaburzeń g_i ($i=1,2$). W takim układzie może pojawić się ruch chaotyczny, a zbiór parametrów przy których on się pojawia może być wyznaczony w oparciu o poniżej opisaną metodę.

Z rys. 31 widać, że punkt siodłowy hiperboliczny 0 ma taką własność, że $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} H^0(t) = 0$. Wewnątrz H^0 znajduje się rodzina rozwiązań okresowych $H^\alpha(t)$, gdzie $\alpha \in (\alpha_1, 0)$ jest pewnym parametrem i α jest okresem orbity $H^\alpha(t)$. Przy $\alpha \rightarrow \alpha_1$ orbita eliptyczna przechodzi w położenie równowagi (punkt eliptyczny). Opisana sytuacja dotyczy przypadku równań (98), gdy $\varepsilon = 0$. Jeśli $\varepsilon \neq 0$ roznałość (tutaj krzywa) wychodząca z punktu siodłowego i do niego powracająca nie muszą się zamknąć w jedną krzywą, co było przedstawione na rys. 31. Mogą one mieć tylko jeden punkt wspólny, tj. siodłowy, lub też mogą się przeciąć, tj. mieć jeszcze jeden punkt wspólny. Okazuje się, że istnienie takiego dodatkowego punktu przecięcia pociąga za sobą istnienie nieskończenie wielu takich punktów. Jeśli w układzie (98) funkcje wymuszające g_i ($i=1,2$) są okresowe ze względu na czas, natomiast funkcje f_i ($i=1,2$) posiadają orbitę homokliniczną (jak na rys. 31) to funkcja

Mielnikowa określona jest następującym równaniem

$$M(t_0) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(f_1[x_H(t), y_H(t)] g_2[x_H(t), y_H(t), t] \right) + \right. \\ \left. - f_2[x_H(t), y_H(t)] g_1[x_H(t), y_H(t), t] \right\} dt. \quad (99)$$

Jeśli $M(t_0) \neq 0$, to wówczas rozmaitości stabilne i niestabilne poza punktem siodłowym nigdzie się nie przecinają. Jeśli natomiast $M(t_0) = 0$ to do takiego dodatkowego przecięcia dochodzi.

Powróćmy teraz do równania (87) i potencjału (89). Równanie ruchu oscylatora przy takim wyborze potencjału przyjmą postać

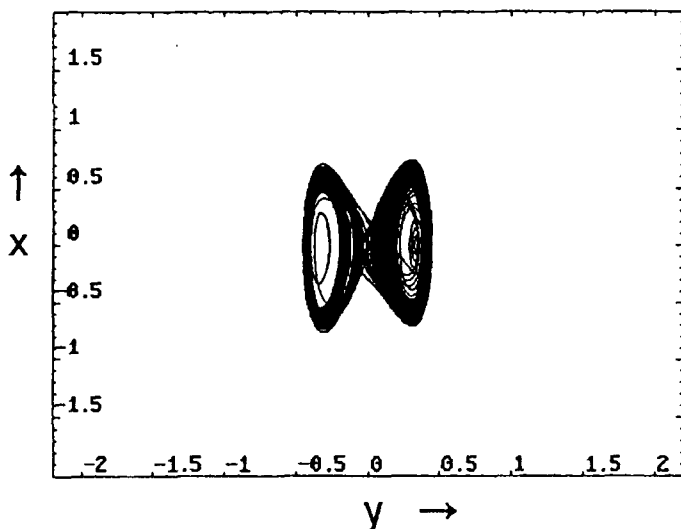
$$\begin{aligned} \dot{y} &= x, \\ \dot{x} &= -\alpha y - \beta y^3 - \varepsilon c x + \varepsilon F \cos \omega t, \end{aligned} \quad (100)$$

gdzie teraz εc i εF podkreślają "małość" wyróżnionych parametrów.

Przyjmując

$$\begin{aligned} f_1 &= x, & f_2 &= -\alpha y - \beta y^3, \\ g_1 &= 0, & g_2 &= \varepsilon (F \cos \omega t - c x), \end{aligned} \quad (101)$$

i korzystając z (99) otrzymujemy



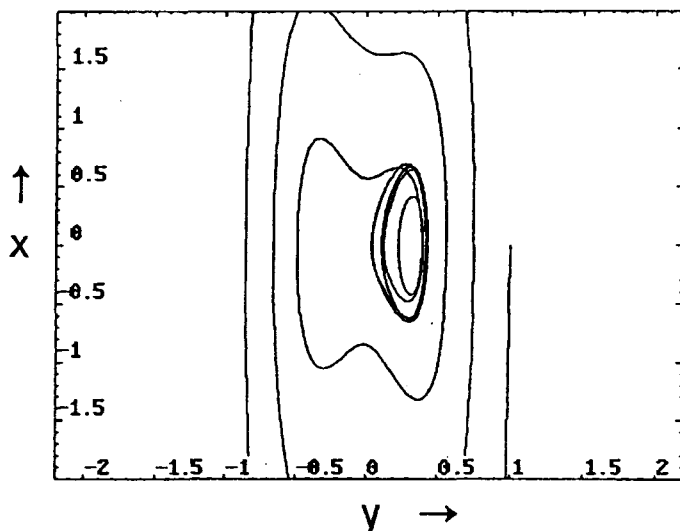
Rys. 32. Portret fazowy dla oscylatora Duffinga opisanego równaniem (100).

$$M(t_0) = \frac{4c\sqrt{(-\alpha)^3}}{3\beta} + \pi F \omega \sqrt{\frac{2}{\beta}} \frac{\sin \omega t}{\cosh \frac{\pi \omega}{2\sqrt{-\alpha}}} . \quad (102)$$

Funkcja $M(t_0)$ zmienia znak przy następującym związku między parametrami

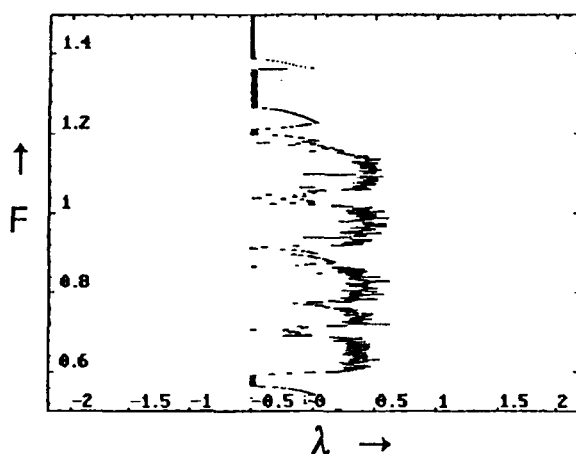
$$F = \frac{4c\sqrt{(-\alpha)^3}}{3\pi\omega\sqrt{2\beta}} \cosh \left[\frac{\pi\omega}{2\sqrt{-\alpha}} \right]. \quad (103)$$

Weźmy do rozważań następujące parametry: $c=1.0$, $\alpha = -10$, $\beta=100$, $\omega=3.5$. Wartość ostatniego parametru obliczamy ze wzoru (103) otrzymując $F=0.79$. Równania (100) rozwiązano dla podanych parametrów numerycznie, a wyniki symulacji numerycznej przedstawiono na rys. 32. Z rys. 32 (dla $F = 0.85$) widać wyraźnie, jak trajektoria fazowa "przeskakuje" w sposób przypadkowy pomiędzy dwoma punktami odpowiadającymi minimum dwóch dołków potencjału $V(y)$. Dla $F = 0.8$ z rys. 33 widać, jak trajektoria fazowa dąży do stabilnej orbity okresowej znajdującej się w prawym "dołku" potencjału. Dalszy wzrost "F" powoduje przesuwanie się orbity ku "górze", aż wreszcie opuszcza ona wspomniany "dołek" potencjału i rozpoczyna się ruch chaotyczny.

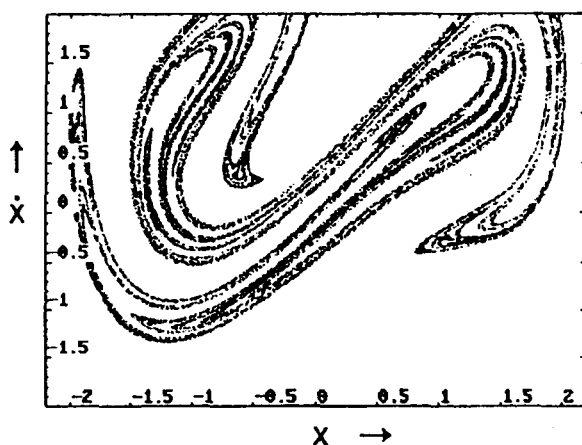


Rys. 33. Wędrowka trajektorii fazowej do stabilnej orbity okresowej znajdującej się w prawym dołku potencjału ($F = 0.8$).

Na rys. 34 przyjęto jako kontrolny parametr amplitudę siły wymuszającej F (pozostałe parametry bez zmian) i wykreślono wartości maksymalnego wykładnika Lapunowa dla $0.5 \leq F \leq 1.5$. Z rysunku widać, że ruch chaotyczny przerywany jest oknami okresowości przy zwiększaniu F .



Rys. 34. Przebieg zmian wykładnika Lapunowa w funkcji parametru F dla oscylatora (100).



Rys.35. Dziwny atraktor chaotyczny odkryty przez Uedę.

Rozpatrzmy jeszcze przypadek potencjału, dla którego $\alpha=0$ i $\beta>0$. Przypadek ten był w szczególności analizowany przez Uedę [34]. Mapa Poincaré dla oscylatora (87) i dla parametrów $c=0.05$, $\alpha=0$, $\beta=1$, $\omega=1$ i $F=7$ została pokazana na rys. 35. Przedstawiony dziwny atraktor chaotyczny bywa często nazywany atraktorem "japońskim".

Drgania wielu prostych układów fizycznych mogą być sprowadzone do równania Duffinga.

Równanie ruchu płaskiego wahadła o masowym momencie bezwładności $B=ml^2$, współczynnika oporu powietrza c wymuszonego momentem $M=M_1\cos\omega t$ ma postać (patrz rys. 18)

$$B\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi - c_0\dot{\varphi} + M_1\cos\omega t. \quad (104)$$

Po podzieleniu przez B otrzymujemy

$$\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} + \beta\sin\varphi = F\cos\omega t. \quad (105)$$

gdzie: $c=c_0/B$, $\beta=mgl/B$, $F=M_1/B$.

Przy $c=F=0$ układ posiada nieskończenie wiele położeń równowagi określonych równaniem

$$(\varphi, \dot{\varphi}) = (k\pi, 0), \quad (106)$$

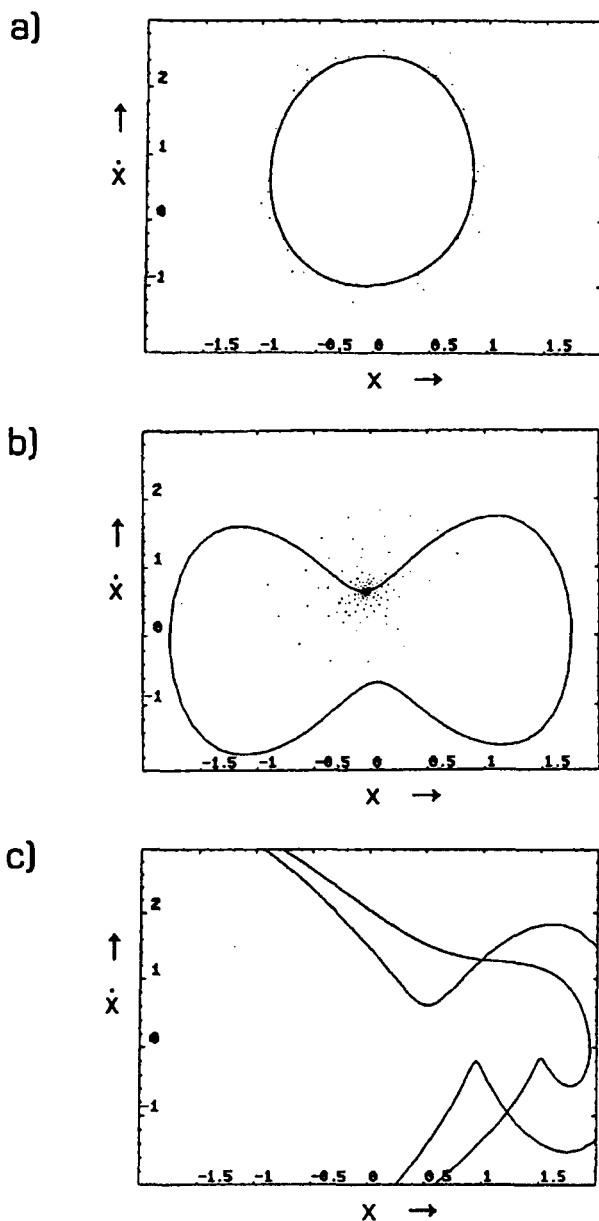
gdzie k jest liczbą całkowitą. Chaotyczna dynamika tego wahadła ma miejsce dla $\omega = 1$, $F = 2.4$, $c = 0.2$, $\beta = 1$.

4.4. Oscylator van der Pola z okresowym wymuszeniem zewnętrznym

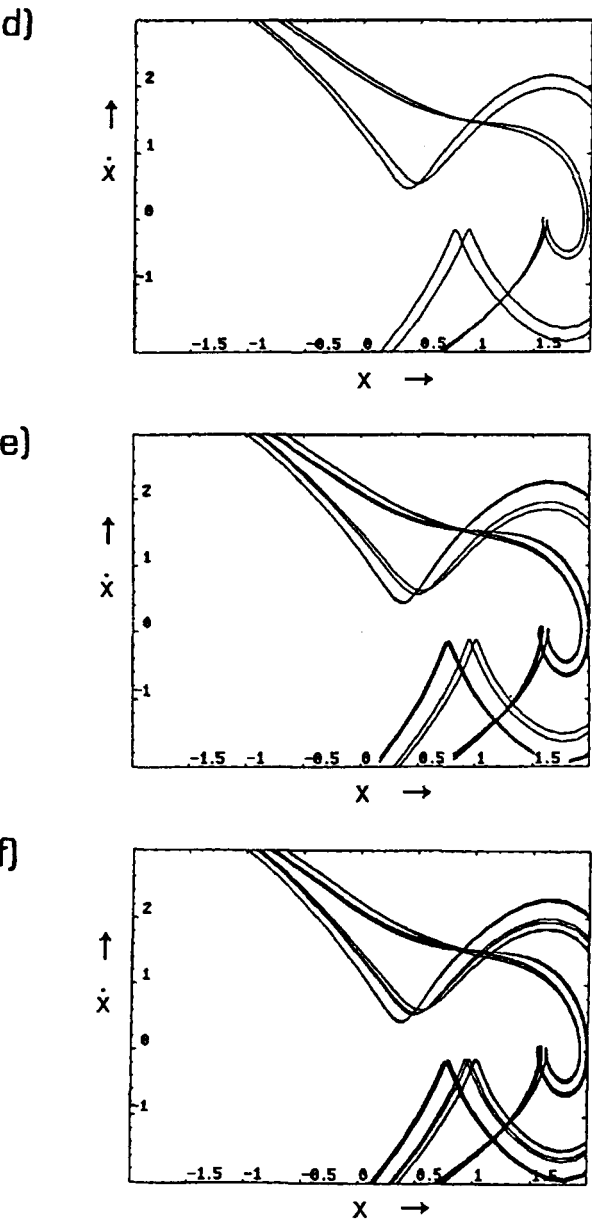
Jeżeli na oscylator samowzbudny działa dodatkowo wymuszenie okresowe zewnętrzne, to w takim układzie może również pojawiać się chaos. Rozpatrzmy więc równanie opisujące dynamikę oscylatora van der Pola i z wymuszeniem zewnętrznym o postaci

$$\ddot{x} - cx(1-x^2)\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F\cos\omega t. \quad (107)$$

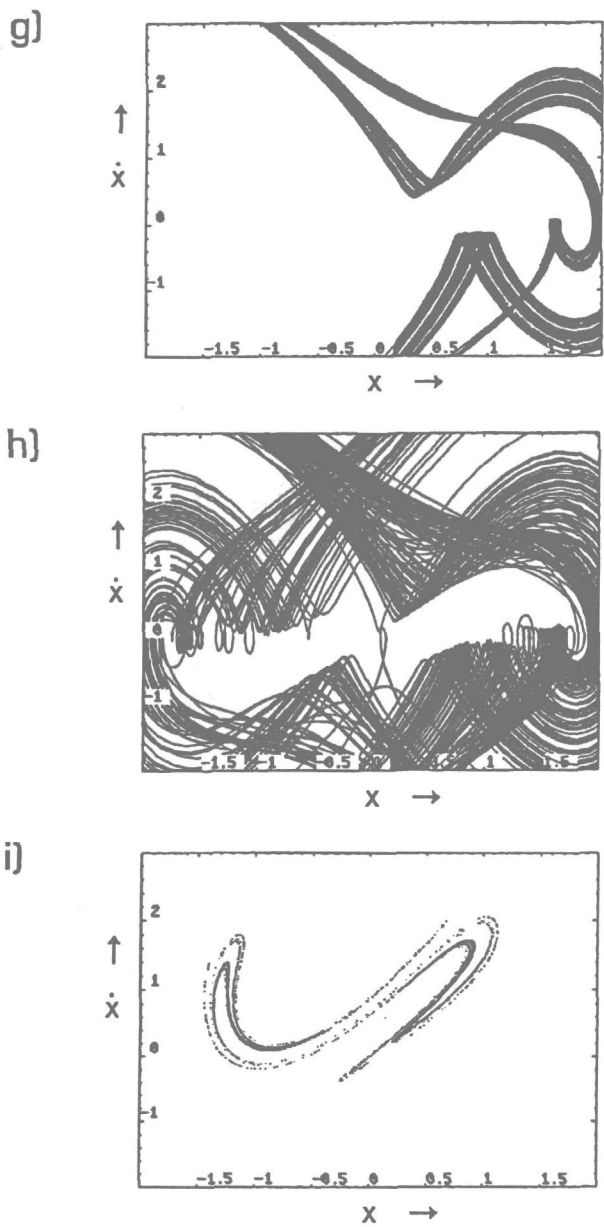
Niech $c=0.1$, $\beta=1$, $F=6$, $\omega=1$. Tym razem jako parametr kontrolny wybierzemy α (rys.36). Dla $\alpha=3.8$ punkty mapy Poincaré (po pominięciu stanu ustalonego) układają się wzdłuż zamkniętej krzywej. Świadczy to o pojawieniu się orbity quasi - okresowej o dwóch niewspółmiernych częstościach, z których jedna jest równa ω .



Rys.36. Mapy Poincaré (a, b, i) oraz trajektorie fazowe dla oscylatora van der Pola z wymuszeniem zewnętrznym dla różnych wartości współczynnika α : a) 3.8 ; b) 3.2 ; c) 0.3 ; d) 0.8 ; e) 0.15 ; f) 0.146 ; g) 0.14 ; h) 0.1 ; i) 0.1.



Rys. 36 c.d.



Rys. 36 c.d.

Atraktor quasi-okresowy znika przy małej zmianie α i dla $\alpha=3.2$ istnieje stabilna okresowa orbita przedstawiona na rys.36b. Jednocześnie na tym rysunku wybrany został jeden z punktów należący do tej orbity z uwzględnieniem poprzedzającego go stanu nieustalonego (kolejne punkty dążą do niego przy $t \rightarrow +\infty$). Dalsze zmniejszanie α powoduje zajście bifurkacji podwojenia okresu i nową orbitę okresową przedstawiono dla $\alpha=0.3$ na rys.36c. Na kolejnych czterech rysunkach od 36d do 36g widać kolejne orbity będące wynikiem podwajania okresu tych poprzednich. Wreszcie dla $\alpha=0.1$ przedstawiono pełną chaotyczną dynamikę tego oscylatora w oparciu o projekcję trajektorii fazowej odwzorowania Poincaré na płaszczyznę $(\dot{x}, x)$ (rys. 36h i 36i).

4.5. Atraktor Lorenza

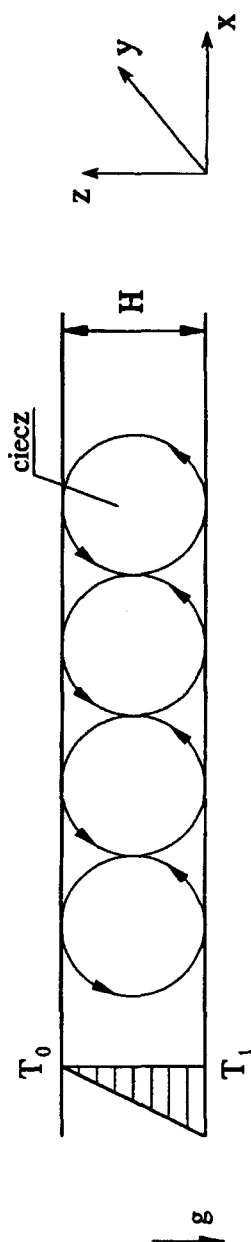
Niewątpliwie przełomową pracę w dziedzinie dynamiki chaotycznej napisał Edward Lorenz [35]. Model Lorenza to układ trzech równań nieliniowych różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Teraz wyprowadzimy te równania w oparciu o stary problem Rayleigha - Bénarda (proces wyprowadzenia równań może być również pominięty przy czytaniu bez uszczerbku dla naszej dalszej analizy dotyczącej dynamiki chaotycznej).

Niech pomiędzy dwoma nieskończenie długimi płytami znajduje się ciecz (rys. 37).

Ciecz podgrzewana jest od dołu. Niech u oznacza prędkość cząsteczek cieczy, T niech będzie polem temperatury, ρ polem gęstości i p ciśnieniem, przy czym T_0 odpowiada ρ_0 i g jest przyspieszeniem ziemskim. Temperatura, gęstość i ciśnienie ulegają zmianom według następujących wzorów (dla $u=0$)

$$\begin{aligned} T_s(z) &= T_0 + \Delta T - \left(\frac{z}{H} \right) \Delta T, \\ \rho_s(z) &= \rho_0 \left[1 - \alpha (T_s(z) - T_0) \right], \\ \nabla p_s(z) &= -\rho_s(z) g \bar{z}, \end{aligned} \tag{108}$$

gdzie $\bar{z}$ jest wektorem normalnym w kierunku z . Najpierw, tzn. przy małym dostarczeniu energii cieplnej, następuje konwekcja laminarna. Następnie tworzą się stabilne wiry, przy czym przyrost temperatury jest nieliniowy o postaci



Rys. 37. Schemat procesu konwekcji Rayleigha - Bénarda służący do wyprowadzenia równań Lorentza.

$$\Theta(x, y, z, t) = T(x, y, z, t) - T_s(z). \quad (109)$$

Prędkość u zmienia się w czasie i dynamika ruchu cieczy opisana jest następującym układem równań różniczkowych cząstkowych

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u &= \alpha \Theta g \bar{z} - \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \nabla \delta p + \nu \nabla^2 u, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\Theta &= \chi \nabla^2 \Theta - u_z \left(\frac{\Delta T}{H} \right), \end{aligned} \quad (110)$$

$$\nabla u = 0.$$

Powyżej δp oznacza zmianę ciśnienia w stosunku do stanu konwekcji, ν jest współczynnikiem kinematycznej wiskotyczności cieczy, χ jest stałą termiczną procesu dyfuzji, a ∇^2 jest operatorem Laplace'a. Ponieważ $u_y = 0$, to pozostałe składowe wektora prędkości mogą być otrzymane z równań

$$u_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (111)$$

Ponadto oryginalnie Lorenz wprowadził następujące warunki brzegowe

$$\Theta(0) = \Theta(H) = \psi(0) = \psi(H) = \nabla^2 \psi(0) = \nabla^2 \psi(H) = 0. \quad (112)$$

Funkcji rozkładu temperatury Θ oraz funkcji strumienia przepływu ψ możemy poszukiwać w postaci następujących szeregów Fouriera

$$\begin{aligned} \Theta(x, y, z, t) &= \sum_{j=1}^J \sin(j\pi z) \Theta_j(x, t), \\ \psi(x, y, z, t) &= \sum_{j=1}^J \sin(j\pi z) \psi_j(x, t). \end{aligned} \quad (113)$$

Lorenz ograniczył się w dalszych rozważaniach do przyjęcia tylko trzech podstawowych rozwiązań i po uwzględnieniu warunków brzegowych otrzymał

$$\begin{aligned} \Theta(x, z, t) &= \frac{\Delta T R_c}{R_a \pi} \left[\sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi x}{H}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) - z(t) \sin\left(\frac{2\pi z}{H}\right) \right], \\ \psi(x, z, t) &= \frac{\sqrt{2}(1+a^2)\chi}{a} X(t) \sin\left(\frac{\pi x}{H}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right), \end{aligned} \quad (114)$$

gdzie R_a oznacza liczbę Rayleigha, a R_c jest jej wartością krytyczną

$$R_a = \frac{\alpha g H^3 \Delta T}{\chi v}, \quad R_c = \frac{\pi^4 (1 + a^2)^3}{a^2}. \quad (115)$$

X, Z i Z są amplitudami zależnymi od czasu trzech kolejnych postaci założonego rozwiązania.

Równania Lorenza otrzymujemy podstawiając (114) do równań (110). Mają one postać

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= \sigma(Y - X), \\ \frac{dY}{dT} &= -XZ + rX - Y, \\ \frac{dZ}{dT} &= XY - bZ, \end{aligned} \quad (116)$$

przy czym

$$T = \frac{\pi(1 + a^2)\chi t}{\chi^2}, \quad \sigma = \frac{\mu}{\chi}, \quad b = \frac{4}{1 + a^2}, \quad r = \frac{R_a}{R_c}. \quad (117)$$

Podczas symulacji komputerowej powyższych równań Lorenz dostrzegł nieregularne oscylacje dla pewnych parametrów tej mocno uproszczonej wersji modelu fizycznego. Zauważył również w płaszczyźnie (X, Y) pewną figurę geometryczną przypominającą nieco ludzką nerkę. Punkt fazowy wędrował okrążając lewą lub prawą nerkę, przy czym przeskoki od jednej do drugiej odbywały się przypadkowo i nie można było ich przewidzieć.

Układ równań Lorenza jest układem autonomicznym (bez wymuszenia zewnętrznego). Postarajmy się wyznaczyć położenia równowagi tego układu oraz prześledzić ich stabilność. Dla $b > 0$, $\sigma > 0$ i $r > 0$ z równań (116) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma(Y - Z) &= 0, \\ -XY + rX - Y &= 0, \\ XY - bZ &= 0. \end{aligned} \quad (118)$$

Jak łatwo sprawdzić $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$ dla $0 < r < 1$. Zaburzając to położenie równowagi i ograniczając się w rozważaniach do równań różniczkowych liniowych zaburzeń otrzymujemy równanie charakterystyczne o postaci

$$[\lambda + b][\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0. \quad (119)$$

Dla $0 < r < 1$ równanie (119) posiada trzy pierwiastki rzeczywiste, które są ujemne. Oznacza to, że analizowane położenie równowagi jest stabilne. Dla $r=1$ następuje rozgałęzienie

rozwiązań - bifurkacja. Dla $r > 1$ mamy następujące rozwiązanie ustalone (położenie równowagi)

$$\begin{aligned} X &= Y = \pm \sqrt{b(r-1)}, \\ Z &= r-1. \end{aligned} \quad (120)$$

Poprzednie rozwiązanie $(0,0,0)$ istnieje nadal, tylko jest niestabilne.

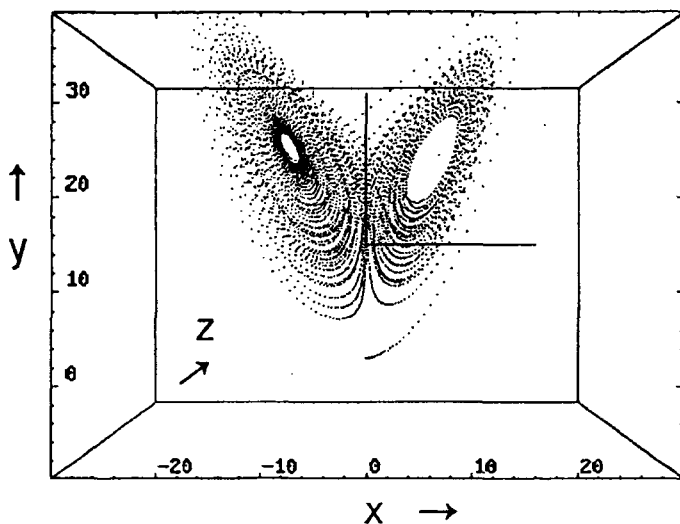
Równanie charakterystyczne w rozważanym przypadku przyjmie postać

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2\sigma b(r-1) = 0. \quad (121)$$

Obydwa położenia równowagi określone równaniem (120) tracą stabilność po przekroczeniu wartości krytycznej parametru.

$$r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}. \quad (122)$$

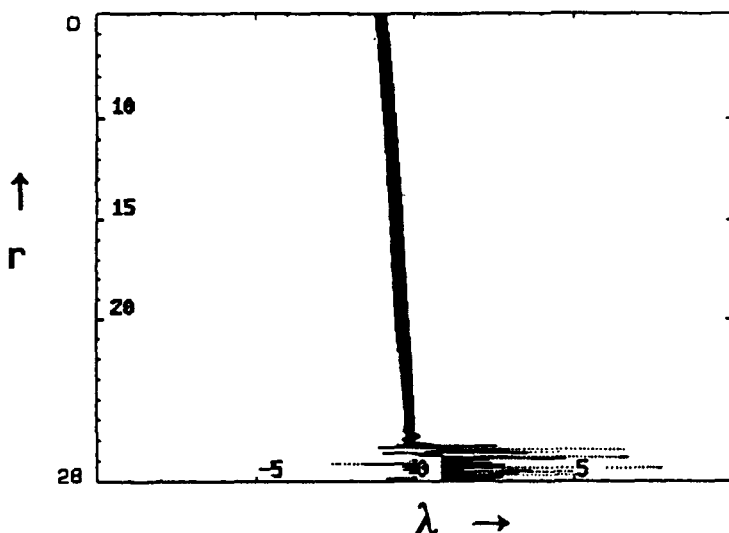
Projekcję atraktora Lorenza przedstawiono na rys. 38.



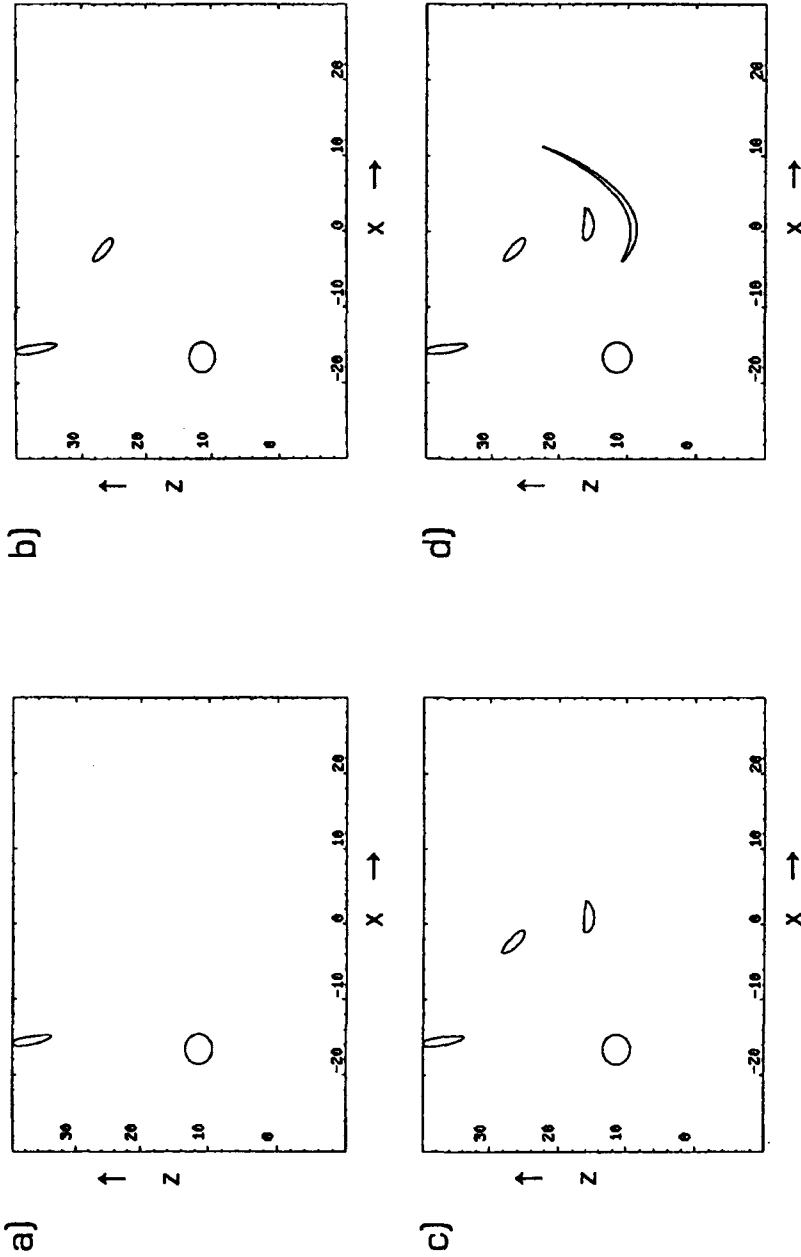
Rys.38. Projekcja atraktora Lorenza dla $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 2.67$.

Obliczony numerycznie wymiar atraktora wynosi $d = 1.768 \pm 0.071$. Na rys. 39 przedstawiono wykres wartości wykładnika Lapunowa λ w zależności od parametru kontrolnego r . Dla dużych wartości przyjmuje on wartości dodatnie, co świadczy o ruchu chaotycznym.

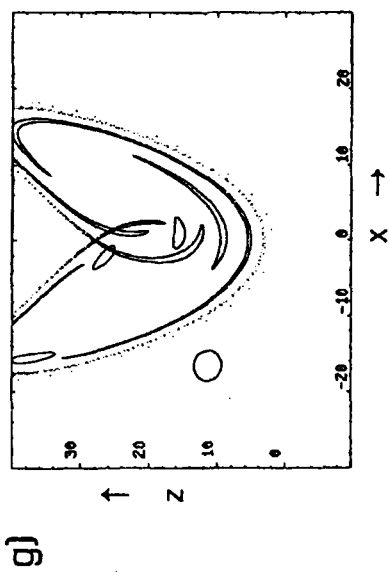
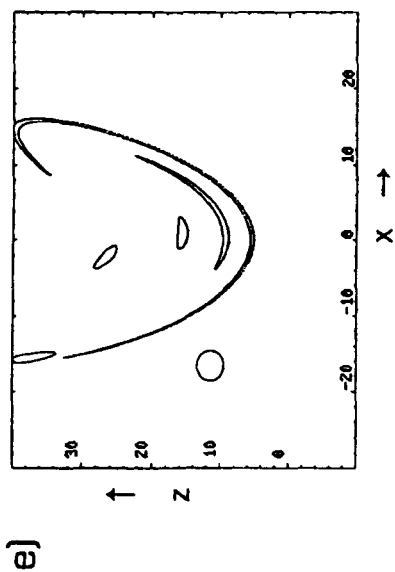
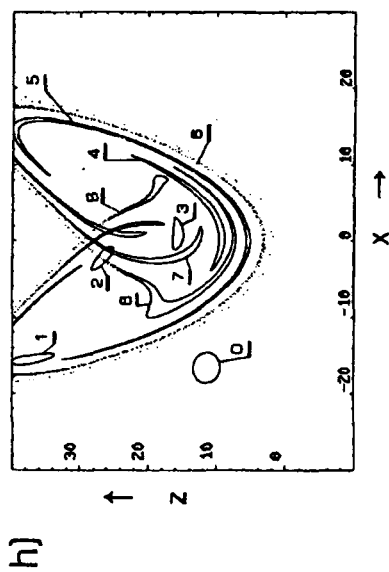
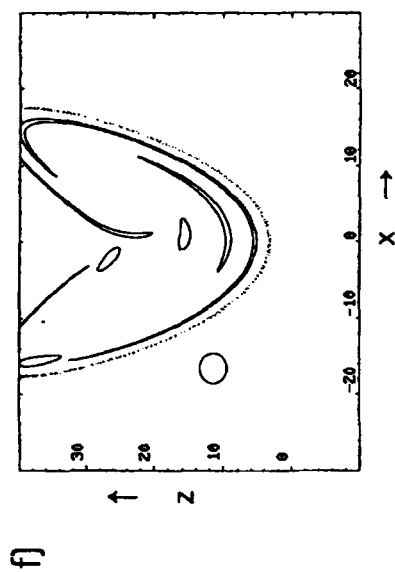
1639/W

Rys. 39. Wykładnik Lapunowa λ w funkcji parametru r .

Prześledźmy teraz dynamikę zbioru punktów. W tym celu wybierzmy jako zbiór punktów początkowych punkty leżące na elipsie (rys. 40). Po pierwszej iteracji otrzymujemy zbiór punktów oznaczony jako 1, zbiór ten poddany kolejnej iteracji oznaczamy przez 2, itd. Widać w kolejnych iteracjach efekty rozciągania i zginania. Nasuwa to również analogię zamieszania łyżeczką kropli herbaty w szklance, co było szerzej już dyskutowane.



.40. Ośmiem kolejnych iteracji elipsy (a - g) oraz rysunek zbiorczy



Rys. 40. c.d.

5. Synchronizacja

5.1. Wprowadzenie

Do jednych z pierwszych badaczy zjawisk synchronizacji należał Huygens [10]. Obserwował on dwa zegary wahadłowe wiszące na lekkiej belce, których ruch po pewnym czasie był synchroniczny. Ściślej, obydwa wahadła poruszały się z jednakową częstością i ruch odbywał się w przeciwnych fazach. Okazało się, że drgania jednego zegara na drugi przekazywane były poprzez łączącą je belkę.

Duży wkład w poznanie i rozwój teorii dotyczących synchronizacji włożył Rayleigh i van der Pol. Pierwszy z nich badał zjawiska synchronizacji w układach akustycznych oraz generatorach kamertonowych, natomiast drugi zajmował się badaniem synchronizacji generatorów lampowych.

W celu wprowadzenia do teorii synchronizacji rozważmy synchronizację układów dynamicznych w oparciu o równania [10]

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}^{(s)} &= \mathbf{x}^{(s)} \left[\mathbf{x}^{(s)} + \mathbf{F}^{(s)}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}) \right], \\ \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{U}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}), \quad s = 1, \dots, k\end{aligned}\tag{123}$$

gdzie: $\mathbf{x}^{(s)} = [X_1^{(s)}, \dots, X_{r_s}^{(s)}]$, $\mathbf{F}^{(s)} = [F_1^{(s)}, \dots, F_{r_s}^{(s)}]$, $\mathbf{U} = [U_1, \dots, U_m]$. Równania (123) opisują dynamikę k połączonych ze sobą obiektów, przy czym obiektowi o numerze s przyporządkowany jest r_s wymiarowy wektor $\mathbf{x}^{(s)} = [x_1^{(s)}, \dots, x_{r_s}^{(s)}]$, przy czym składowe tego wektora są współzrędnymi stanu. Wektor $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ posiada składowe opisujące połączenia między obiektami. Funkcje $\mathbf{F}$ i $\mathbf{U}$ opisują sprzężenia między obiektami.

W układzie dynamicznym (123) można wyróżnić przypadek wewnętrznej i zewnętrznej synchronizacji. W pierwszym przypadku udział poszczególnych obiektów w procesie synchronizacji jest podobny i synchronizacja całego układu jest wynikiem procesów synchronizacji pomiędzy poszczególnymi obiektami. W drugim przypadku jeden z obiektów ma wpływ dominujący na proces synchronizacji i może być on traktowany jako obiekt

zewewnętrzny – wpływ oddziaływań na niego od pozostałych obiektów jest pomijalnie mały.

Generalnie można wyróżnić dwa scenariusze prowadzące do synchronizacji rozumianej jako tendencji do coraz to bardziej uporządkowanego ruchu. Pierwszy scenariusz związany jest ze zmianą jakościową dynamiki w sposób skokowy i procesowi temu zwykle towarzyszy zjawisko histerezy. Drugi scenariusz związany jest z ciągłym przejściem do pełnej synchronizacji.

5.2. Proste układy samowzbudne z wymuszeniem

Jeśli prosty oscylator samowzbudny jest poddany wymuszeniu zewnętrznemu harmonicznemu o częstotliwości ω , to najbardziej typową odpowiedzią układu jest uzyskanie rezonansu o częstotliwości drgań ω/n (rezonans subharmoniczny).

5.2.1. Oscylator van der Pola

Rozważmy oscylator van der Pola z amplitudą siły wymuszającej proporcjonalną do drugiej potęgi częstotliwości wymuszenia o postaci

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - \alpha x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega^2 P \cos \omega t. \quad (124)$$

Poszukajmy przybliżonego rozwiązania powyższego równania o postaci

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (125)$$

gdzie amplitudę A i przesunięcie fazowe φ otrzymuje się po rozwiązaniu następujących równań uśrednionych

$$\dot{A} = \frac{\varepsilon}{2} \left[1 - \left(\frac{A}{A_0} \right)^2 \right] A - \frac{1}{2} \omega P \sin \varphi, \quad (126)$$

$$\dot{\varphi} = \Delta - \frac{\omega P}{2A} \cos \varphi.$$

Powyżej $A_0 = 2/\sqrt{\alpha}$ (jest to amplituda drgań samowzbudnych - przy $P = 0$), $\varepsilon \ll \omega_0$,

$(\omega_0 - \omega) \ll \omega_0$, $P \ll A_0$, $\Delta = (\omega_0^2 - \omega^2)/2\omega \approx \omega_0 - \omega$. Z ostatniego układu równań można

wyznaczyć obszar zmian $|\Delta| \leq \Delta_*$, dla którego "poprawka" częstotliwości drgań $\dot{\varphi} = 0$, co oznacza

region synchronizacji, bowiem wtedy częstota drgań układu jest dokładnie równa częstotliwości drgań wymuszenia.

Jeśli amplituda siły wymuszającej spełnia warunek

$$\frac{P\omega}{\epsilon A_0} \ll 1, \quad (127)$$

to w układzie pojawia się reżim niesynchroniczny, zwany reżimem bicia (dwie częstotliwości niewspółmierne). Średnia częstotliwość bicia dla takiego reżimu wynosi

$$\dot{\varphi} = \omega_* = \Delta \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta_*}{\Delta}\right)^2}, \quad (128)$$

$$\Delta_* = \frac{P\omega}{2A_0}. \quad (129)$$

Jeżeli amplituda siły wymuszającej spełnia warunek

$$\frac{\omega P}{\epsilon A_0} \gg 1, \quad (130)$$

to wówczas

$$\omega_* = \begin{cases} 0 & \text{dla } \Delta \ll \Delta_*, \\ \Delta & \text{dla } \Delta > \Delta_*, \end{cases} \quad (131)$$

$$\Delta_* = \omega_0 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}P}{\Delta_0}} \right]. \quad (132)$$

Podsumowując powyższe rezultaty można zauważyć, że dla małej amplitudy siły wymuszającej częstotliwość drgań samowzbudnych "synchronizuje" z częstotliwością wymuszeń. Ponadto proces ten zachodzi w sposób ciągły zarówno wtedy, gdy Δ maleje lub P rośnie. Taka synchronizacja związana jest z rezonansem (czyli ruchem okresowym) na torusie (patrz rys.3)

W przypadku dużej amplitudy siły wymuszającej również mamy do czynienia z synchronizacją, ale tym razem wskutek stłumienia drgań samowzbudnych. Teraz, w odróżnieniu od pierwszego przypadku, synchronizacja pojawia się skokowo przy łagodnym zmniejszaniu Δ lub wzroście P . Poziom synchroniczny odpowiada drganiom okresowym, natomiast reżim asynchroniczny (albo reżim "bicia") odpowiada drganiom quasi-okresowym. Przejście od pierwszego do drugiego wiąże się z bifurkacją prowadzącą do pojawienia się rozwiązania quasi – okresowego leżącego na torusie. Procesem przeciwnym do procesu synchronizacji jest proces chaotyzacji. Przykład chaotycznej odpowiedzi oscylatora van der

Pola podano na rys. 36.

5.2.2. Oscylator van der Pola – Duffinga

Jeśli do układu rozpatrywanego poprzednio dodamy nieliniową sztywność typu Duffinga to otrzymamy równanie van der Pola – Duffinga o postaci

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - \alpha x^2)\dot{x} + \omega_0^2(1 + \gamma x^2)x = \omega^2 P \cos \omega t. \quad (133)$$

Ueda [34] pokazał, że oprócz wyżej omawianych zjawisk synchronizacji może mieć miejsce proces krańcowo różniący się od omawianego, czyli proces chaotyzacji (patrz rys. 35).

5.2.3. Oscylator van der Pola – Duffinga ze wzbudzeniem parametrycznym

Równanie ruchu takiego oscylatora ma postać

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - \alpha x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega^2 P \cos \omega t, \quad (134)$$

gdzie: $\omega_0 = \omega_* + \Omega F(t)$.

Jak widać, współczynnik stojący przy x ulega zmianom okresowym, ponieważ $F(t) = F(t + T)$, gdzie $T = 2\pi/\gamma$. Dla $P = 0$ w układzie pojawiają się drgania o częstości ω_* i γ , odpowiadające dwóm źródłom ich wzbudzenia. Tej sytuacji odpowiada równanie quasi-okresowe leżące na torusie. Jeśli dodatkowo mamy do czynienia z wymuszeniem zewnętrznym, które nie synchronizuje z dwoma rodzajami wymuszeń, to torus będzie trójwymiarowy.

5.2.4. Układy nieautonomiczne z $1\frac{1}{2}$ stopniem swobody

W pracy Landy [36] rozważane były drgania następującego układu.

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\varepsilon - b)y\dot{x} + \omega_0^2 x &= \omega_0^2 P \cos \omega t, \\ \dot{y} + \gamma y &= \alpha x^2. \end{aligned} \quad (135)$$

Dla ε i γ znacznie mniejszych od ω_0 udało się znaleźć rozwiązanie przybliżone (135) odpowiadające reżimowi synchronizacji. W uśrednionych równaniach różniczkowych otrzymanych z (135) Kaptsov [37] w oparciu o analizę numeryczną wskazał na istnienie dziwnego atraktora chaotycznego.

5.3. Układy samowzbudne elektryczne

5.3.1. Wprowadzenie

Obecnie zajmujemy się analizą drgań w układach samowzbudnych z wymuszeniem zewnętrznym w generatorach elektrycznych z punktu widzenia synchronizacji. Już w układach o jednym stopniu swobody w doświadczeniach obserwowano zjawisko synchronizacji z wymuszeniem zewnętrznym z podstawową lub krotną częstotścią, jak również zjawisko synchronicznego "wygaszania" lub "wzbudzania" drgań.

Analizowane były również układy generatorów o kilku stopniach swobody, gdzie wykryto zjawiska synchronizacji drgań odpowiadające rezonansom, subharmonicznym i ultrasubharmonicznym, oraz badany był wpływ wzbudzenia parametrycznego na zjawisko synchronizacji [38].

Problematyka związana z badaniem zjawisk synchronizacji w takich układach posiada duży aspekt aplikacyjny. Generatory składające się z dwóch podukładów posiadających w przybliżeniu częstotści drgań własnych krotne (tzn. $\omega_1/\omega_2 \approx k/l$, $k, l \in \mathbb{N}$) mogą być użyte do generowania stabilnej częstotści jednego z podukładów (tzn. do dzielenia lub mnożenia stabilnej częstotści).

Generatory posiadające podukłady z możliwością pojawienia się rezonansów ultrasubharmonicznych oraz generatory parametryczne umożliwiają stabilizację częstotści modulacji, co ma duże znaczenie przy przesyłaniu sygnałów.

Złożone generatory mogą być również wykorzystane do "zapamiętywania" częstotści krótkotrwałego wymuszenia zewnętrznego.

5.3.2. Metoda funkcji opisującej

Dynamika układów automatyki, a w tym i generatorów drgań, może być opisana równaniem

$$u(t) = W(p)e(u, t) \quad (136)$$

gdzie $e(u)$ oznacza napięcie odpowiednie na wejściu i wyjściu generatora, a $W(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$

jest funkcją przejścia, przy czym $p = d/dt$. Powyższe równanie daje się rozwiązać analitycznie tylko dla bardzo prostych $W(p)$. Zagadnienie daje się znacznie zredukować po wprowadzeniu

zespolonych i zmiennych w czasie amplitud $U_k(t)$ i $E_k(t)$, w taki sposób, że

$$u(t) = \sum \left[U_k(t) e^{i\omega_k t} + U_k^*(t) e^{-i\omega_k t} \right], \quad (137)$$

gdzie ω_k jest częstością równą rezonansowej i gwiazdką oznaczono amplitudy sprzężone [38].

Częstości ω_k obliczamy z równań

$$Q(i\omega_k) = 0. \quad (138)$$

Podstawiając (137) do (136) i po wykonaniu operacji uśrednienia ze względu na okresy $T_k = 2\pi/\omega_k$ otrzymujemy następujący układ równań [38]:

$$\begin{aligned} U_k &= W(i\omega_k + p) E_k(U_1, U_2, \dots), \\ U_k^* &= W(-i\omega_k + p) E_k^*(U_1, U_2, \dots), \end{aligned} \quad (139)$$

gdzie:

$$E_k = \frac{1}{T_k} \int_{t_1-t_k}^{t_1} [e(u, t) e^{-i\omega_k t}] dt; \quad E_k^* = \frac{1}{T_k} \int_{t_1-t_k}^{t_1} [e(u, t) e^{+i\omega_k t}] dt \quad (140)$$

Ponieważ równanie dla amplitud zespolonych sprzężonych otrzymuje się z pierwszego równania układu (139) poprzez zmianę znaków wielkości urojonych, to wystarczy tylko rozpatrzeć układ

$$U_k = W_k(\mu) E_k(U_1, U_2, \dots), \quad k = 1, 2, \dots \quad (141)$$

oraz $\mu = i\omega_k + p$. W przypadku wymuszenia poprzez natężenie prądu równania przyjmą postać

$$U_k = W_k(\mu) I_k(U_1, U_2, \dots), \quad k = 1, 2, \dots \quad (142)$$

5.3.3. Dynamika prostych generatorów

Rozpatrzmy schemat generatora przedstawiony na rys. 41.

Równania dynamiki tego generatora mogą być otrzymane z układu (136). Tutaj jednak posłużymy się metodą opartą na bilansie energii [38].

Przyrost w czasie Δt energii ΔE_+ w obwodzie na rys. 41 spowodowany działaniem prądu wychodzącego z elementu nieliniowego N i przy ograniczeniu się tylko do pierwszej harmonicznej wynosi

$$\Delta E_+ = \frac{1}{2} U I_a \Delta t, \quad (143)$$

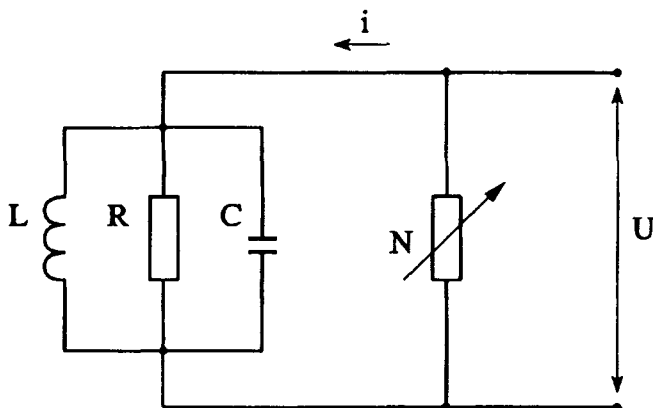
gdzie $I_a = I \cos \varphi$ jest składową prądu będącego w fazie z napięciem w obwodzie.

Straty energii w obwodzie spowodowane istnieniem oporności R wynoszą

$$\Delta E_- = \frac{U^2 \Delta t}{2R}. \quad (144)$$

Całkowite zmiany energii wynoszą

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left(UI_a - \frac{U^2}{R} \right) \Delta t. \quad (145)$$



Rys.41. Schemat generatora z nieliniowym elementem.

Z drugiej strony energia zgromadzona w obwodzie wynosi

$$E = \frac{CU^2}{2}. \quad (146)$$

Dzieląc obie strony równania (145) przez Δt i przechodząc do pochodnej oraz różniczkując otrzymujemy

$$T \frac{dU}{dt} = (S_a - 1)U, \quad (147)$$

gdzie: $T = 2CR$, $S_a = RUI_a$.

Z drugiej strony wiadomo, że częstość drgań w obwodzie wynosi

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (148)$$

Różniczkując (148) i przyjmując $d\omega/dc \approx \Delta\omega/\Delta C$ otrzymujemy

$$\frac{\dot{\psi}}{\Delta C} = -\frac{1}{2} \frac{\omega}{C}, \quad (149)$$

gdzie $\dot{\psi} = \Delta\omega$.

Ponieważ

$$I_r = -\omega U \Delta C, \quad (150)$$

to

$$T\dot{\psi} = S_r R, \quad (151)$$

gdzie $S_r = I_r U^{-1}$.

W przypadku charakterystyki nieliniowej $i(U) = C_1 U - C_3 U^3$ mamy $S_a = C_1 - \frac{3}{4} C_3 U^2$ i z równania (147) otrzymujemy

$$T\dot{X} = K_0 (b - X^2) X, \quad (152)$$

gdzie

$$X = \frac{U}{U_*}, \quad U_* = \sqrt{\frac{4C_1}{3C_3}}, \quad b = 1 - \frac{1}{C_1 R}, \quad K_0 = C_1 R.$$

Ponieważ $S_r = 0$, to poprawka na częstotliwość $\dot{\psi} \equiv 0$, co oznacza, że drgania w obwodzie odbywają się z częstotliwością drgań własnych. W stanie ustalonym amplituda drgań wynosi $X = \sqrt{b}$.

W przypadku charakterystyki twardej

$$i(U) = C_1 U + C_3 U^3 - C_5 U^5, \quad (153)$$

otrzymujemy

$$S_a = C_1 [1 + X^2 - aX^4], \quad (154)$$

gdzie

$$X = \frac{U}{U_*}, \quad U_* = \sqrt{\frac{4C_1}{3C_3}}, \quad a = \frac{10C_1 C_5}{9C_3}.$$

Zmiany amplitudy drgań w czasie opisuje równanie

$$T\dot{X} = K_0 [b + X^2 - aX^4]. \quad (155)$$

W stanie ustalonym amplitudy drgań wynoszą

$$X = \pm \frac{\sqrt{1 \pm \sqrt{1 + 4ab}}}{2a}. \quad (156)$$

Na podstawie analizy powyższego równania można zauważyć, że dla $b < 0$ zależność $X(b)$ nie jest jednoznaczna i pojawia się pętla histerezy.

Częstość drgań samowzbudnych wynosi

$$\omega = \omega_0 + \dot{\psi}, \quad (157)$$

gdzie: $\dot{\psi} = K_r T^{-1}$, $K_r = S_r R$. Poprawka na częstość $\dot{\psi}$ pojawia się tylko wtedy, gdy $S_r \neq 0$. Względą niestabilność częstości drgań można znaleźć z wyrażenia

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_r} = \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} + \frac{K_r}{T\omega_0} \left(\frac{\Delta K_r}{K_r} - \frac{\Delta T}{T} \right), \quad (158)$$

i jak widać, zależy ona od względnej niestabilności współczynnika K_r oraz względnej niestabilności stałej czasowej. W przypadku generatorów złożonych z kilku generatorów prostych na nieliniowym elemencie każdego z nich uwidacznia się wpływ zmian napięć pochodzących od pozostałych generatorów.

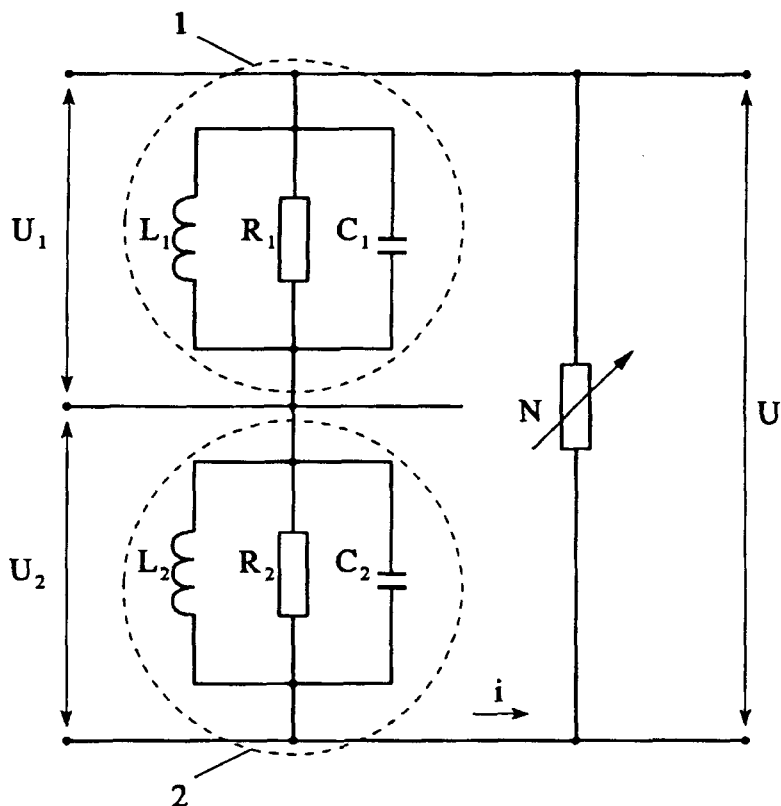
W takim układzie można otrzymać drgania quasi-okresowe, chaotyczne lub pełną synchronizację objawiają się rezonansem subharmonicznym lub ultrasubharmonicznym.

Szczegółowiej omówione zostaną drgania w generatorze złożonym z dwóch podukładów będących prostymi generatorami połączonymi poprzez nieliniowość jak na rys. 42.

Badania doświadczalne takich generatorów wykazały, że obserwowane są drgania o krotnych częstościach, co prowadzi do synchronizacji drgań.

Równania opisujące dynamikę takiego generatora mają postać [38]

$$\begin{aligned} T_i \dot{U}_i &= (S_{ia} R_i - 1) U_i, & i &= 1, 2 \\ T_2 \dot{\phi} &= \Delta + S_{2r} R_2 - \frac{h_1}{h_2} S_{1r} R_1, \\ T_1 \dot{\psi}_1 &= S_{1r} R_1, \end{aligned} \quad (159)$$



Rys. 42. Generator składający się z dwóch podzespołów 1 i 2 o częstotliwościach $\omega_i = L_i^{-1}C_i^{-1}$ ($i = 1, 2$) w przybliżeniu krotnych, tj. $\omega_2 = (n/m)\omega_1 + \Omega$.

gdzie

$$h_i = \frac{\omega_i L_i}{R_i},$$

$$u = U_1 \cos \tau + U_2 \cos \left(\frac{n}{m} \tau + \varphi \right),$$

$$\tau = \omega_1 t + \psi_1,$$

$$\varphi = \psi_2 - \frac{n}{m} \psi_1 + \Omega t,$$

$$S_i = \frac{I_i}{U_i} = S_{ia} + iS_{ir},$$

$$\begin{aligned}
S_{ia} &= \frac{1}{U_1} \left[I_{1,0} + \frac{1}{2} I_{0,m/n} \cos \frac{m}{n} \varphi + \frac{1}{2} \sum_r (I_{m-1,rm} + I_{m+1,rm}) \cos rm\varphi \right], \\
S_{ir} &= \frac{1}{U_1} \left[\frac{1}{2} I_{0,m/n} \sin \frac{m}{n} \varphi + \frac{1}{2} \sum_r (I_{m-1,rm} - I_{m+1,rm}) \sin rm\varphi \right], \\
S_{2a} &= \frac{1}{U_2} \left[I_{0,1} + \frac{1}{2} I_{n,1-m} \cos m\varphi + \frac{1}{2} \sum_r (I_{rn,rm+1} + I_{rn,rm-1}) \cos rm\varphi \right], \\
S_{2r} &= \frac{1}{U_2} \left[-\frac{1}{2} I_{n,1-m} \sin m\varphi + \frac{1}{2} \sum_r (I_{rn,rm+1} - I_{rn,rm-1}) \sin rm\varphi \right].
\end{aligned} \tag{160}$$

I_{ki} są współczynnikami rozwinąć w podwójne szeregi Fouriera. W ogólnym przypadku współczynniki S_i są zespolone. Przyjmują one wartości rzeczywiste dla $\varphi = 0, \pi, 2\pi$ lub dla małych amplitud drgań, gdy charakterystykę nieliniową można dostatecznie dobrze przybliżyć poprzez charakterystykę liniową. Zagadnienie sprowadza się do analizy trzech pierwszych równań różniczkowych układu (159), bo nie zależą one od ψ_1 . Ograniczymy się dalej do analizy wpływu poszczególnych parametrów na stan synchronizacji, w którym amplitudy drgań są stałe, a nowe częstotliwości pozostają dokładnie w stosunku

$$\omega'_2 = \frac{n}{m} \omega'_1, \tag{161}$$

gdzie

$$\omega'_i = \omega_i + \dot{\psi}_i.$$

Stan synchronizacji opisany jest poprzez równania

$$S_{ia} R_i = 1, \quad i = 1, 2,$$

$$\Delta + S_{2r} R_2 = \frac{h_1}{h_2} S_{1r} R_1, \tag{162}$$

$$T_1 \dot{\psi}_1 = S_{1r} R_1,$$

przy czym $\dot{\psi}_1 = \text{const.}$

Załóżmy najpierw, że $\Omega = 0$, czyli $\Delta = 0$ i $\omega_2 = \frac{n}{m} \omega_1$. Z trzeciego równania układu (162) otrzymujemy

$$h_2 S_{2r} R_2 = h_1 S_{1r} R_1. \tag{163}$$

Powyższe równanie jest spełnione tożsamościowo, gdy $S_{1r} = S_{2r} = 0$, co zachodzi dla $\varphi = \varphi_0 = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$. Z czwartego równania (162) widać, że $\dot{\psi}_1 = 0$ i wobec tego

prawdziwy jest związek $m\omega_2 = n\omega_1$. Z dwóch pierwszych równań otrzymujemy wartości amplitud U_i ($i = 1, 2$) odpowiadające takiej synchronizacji. Rozpatrzmy teraz, jak zmienia się stan pełnej synchronizacji, jeśli związek (163) nie będzie prawdziwy, czyli gdy pojawi się dodatkowo $\Delta \neq 0$. Powtórzmy tutaj rozważania przeprowadzone w pracy [38]. Małej zmianie Δ odpowiada również mała zmiana φ_0 . Po podstawieniu do równań $\varphi = \varphi_0 + \xi$, rozwinięciu ω w szeregi Taylora oraz ograniczeniu się tylko do pierwszych wyrazów rozwinięć otrzymujemy następujące związki

$$\begin{aligned} |S_{ir}|_{\varphi_0} &= \left| \frac{\partial S_{ia}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi_0} = 0, \\ S_{ir} &= \sigma_i \xi, \\ S_{ia} &= S_{ia}(\varphi_0), \\ \sigma_i &= \left| \frac{\partial S_{ir}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi_0}. \end{aligned} \quad (164)$$

Z równań (162) po uwzględnieniu (164) otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_{ia}(\varphi_0)R_i &= 1, \quad i = 1, 2 \\ \Delta + \left(\sigma_2 R_2 - \frac{h_1}{h_2} \sigma_1 R_1 \right) \xi &= 0 \\ T_1 \dot{\psi}_1 &= \sigma_1 R_1 \xi. \end{aligned} \quad (165)$$

Z trzeciego równania układu (165) znajdujemy

$$\xi = \frac{h_2 \Delta}{(\sigma_2 h_2 R_2 - h_1 \sigma_1 R_1)}, \quad (166)$$

co po podstawieniu do ostatniego równania układu (165) prowadzi do określenia częstotści

$$\omega' = \omega_1 + \dot{\psi}_1 = \frac{\omega_1}{1 - \frac{h_1 \sigma_1 R_1}{\sigma_2 h_2 R_2}} + \frac{\omega_2 \left[\frac{\sigma_1 R_1 h_1}{\sigma_2 R_2 h_2} (\Omega - \omega_2) \right]}{1 - \frac{\sigma_1 R_1 h_1}{\sigma_2 R_2 h_2}}. \quad (167)$$

Przy wyprowadzeniu powyższej zależności skorzystano ze związku

$$\frac{\Delta}{T_1} = \frac{\Omega T_2}{T_1} = \frac{\Omega \omega_1 h_1}{\omega_2 h_2}, \quad (168)$$

ponieważ: $T_i = 2C_i R_i$, $\omega_i = \frac{1}{\sqrt{L_i C_i}}$, $h_i = \frac{\omega_i L_i}{R_i}$ ($i = 1, 2$).

Biorąc pod uwagę fakt, że Ω jest małe, to ostatecznie otrzymujemy przybliżony wzór określający częstość

$$\omega' = \frac{\omega_1}{1-C} - \frac{n}{1-C} \omega_2 C, \quad (169)$$

gdzie

$$C = \frac{\sigma_1 R_1 h_1}{\sigma_2 R_2 h_2}. \quad (170)$$

Z równania (170) wynika, że dla $C \gg 1$ częstości ω' i $\omega'' = \frac{n}{m} \omega'$ są generowane poprzez częstość ω_2 . Natomiast dla $C \ll 1$ są one generowane poprzez częstości ω_1 . W przypadku, gdy $C \approx 1$ częstości generowane poprzez generator zależą od ω_1 i ω_2 .

Pewne ogólne wnioski dotyczące szerokości obszaru synchronizacji można wyciągnąć w oparciu o trzecie równanie układu (162), które przyjmie postać

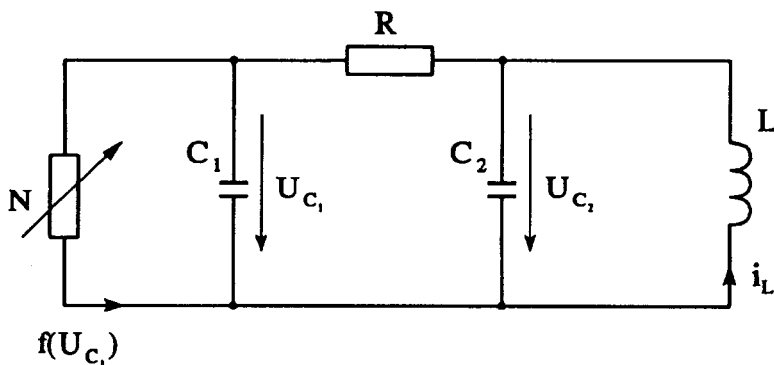
$$\frac{2\Omega}{\omega_2} = S_{1r} R_1 h_1 - S_{2r} R_2 h_2. \quad (171)$$

Wielkości S_{ir} są ustalone i zależą od U_1 , U_2 i φ . Wobec tego, jeśli tłumienia h_1 i h_2 znacznie się od siebie różnią, to szerokość obszaru synchronizacji reprezentowana przez Ω będzie wprost proporcjonalna do większego z tłumień h_i . Obwód elektryczny z małym tłumieniem (patrz rys. 42) odgrywa rolę czynnika stabilizującego synchronizację.

6. Zastosowanie sygnałów chaotycznych w układach elektronicznych

Drgania chaotyczne nie zawsze muszą być szkodliwe, a jak okaże się dalej w tym rozdziale, mogą być one wykorzystywane w technice. W szczególności w układach elektronicznych sygnały chaotyczne wykorzystywane są do generacji szumu losowego z "rozmytym" i płaskim widmem częstotści.

Do wytworzenia sygnału chaotycznego używa się często obwodu Chuy, który należy do prostszych (i tym samym tanich) układów elektronicznych służących do generowania sygnałów chaotycznych (rys. 43).



Rys. 43. Obwód Chuy.

Dynamika obwodu opisana jest równaniami

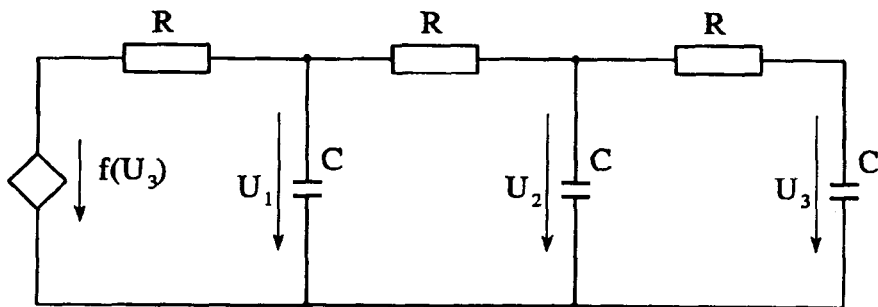
$$\begin{aligned} \frac{dU_{C1}}{dt} &= \frac{R}{C_1} (U_{C2} - U_{C1}) - \frac{1}{C_1} f(U_{C1}), \\ \frac{dU_{C2}}{dt} &= \frac{R}{C_2} (U_{C2} - U_{C1}) - \frac{1}{C_2} i_L, \\ \frac{di_L}{dt} &= -\frac{1}{L} U_{C2}, \end{aligned} \quad (172)$$

gdzie funkcja nieliniowa jest kawałkami liniowa

$$f(U_{C_1}) = \begin{cases} R_b U_{C_1} + (R_b - R_a) U_p, & U_{C_1} < -U_p, \\ R_a U_{C_1}, & -U_p \leq U_{C_1} \leq U_p, \\ R_b U_{C_1} - (R_b - R_a) U_p, & U_p < U_{C_1}. \end{cases} \quad (173)$$

Obwód Chuy w szerokim zakresie zmian parametrów generuje sygnał chaotyczny.

Innym alternatywnie prostym układem elektronicznym jest układ złożony z trzech oporników R i trzech kondensatorów C i z nieliniowym źródłem napięcia $f(U_3)$ [39] (rys. 44).



Rys. 44. Obwód elektroniczny składający się z trzech oporników i kondensatorów służący do generowania sygnału chaotycznego.

Równania dynamiki tego układu są następujące

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{dt} &= \frac{1}{RC} [-2U_1 + U_2 + f(U_3)], \\ \frac{dU_2}{dt} &= \frac{1}{RC} [U_1 - 2U_2 + U_3], \\ \frac{dU_3}{dt} &= \frac{1}{RC} [U_2 - U_3], \end{aligned} \quad (174)$$

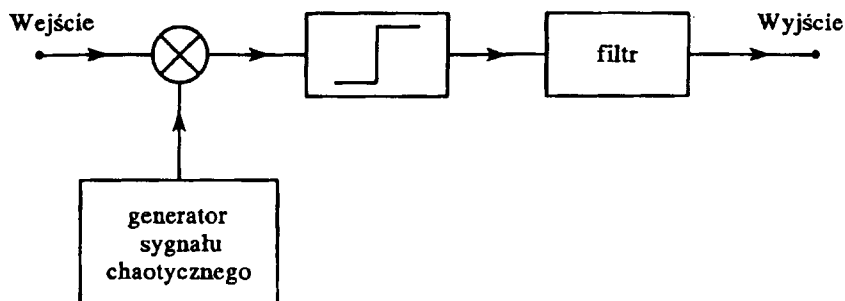
gdzie

$$f(U_3) = \begin{cases} BU_3 + (B - A)U_p, & U_3 < -U_p \\ AU_3, & -U_p \leq U_3 \leq U_p, \\ BU_3 - (B - A)U_p, & U_p < U_3 \end{cases} \quad (175)$$

Na rys. 45 został schematycznie przedstawiony wzmacniacz sygnału chaotycznego

Zasada działania takiego wzmacniacza jest następująca. Do sygnału wejściowego

dodawany jest poprzez sumator sygnał chaotyczny i otrzymany sygnał przechodzi przez element przełączający, a następnie poprzez filtr o niskim paśmie przepustowości.



Rys. 45. Wzmacniacz sygnału chaotycznego

Można wykazać, że charakterystyka statyczna wejście–wyjście takiego wzmacniacza jest określona poprzez charakterystykę funkcji rozkładu propabilistycznego sygnału z generatora. Tego typu wzmacniacz może być użyty do generowania nieliniowych charakterystyk poprzez dodanie sygnału typu szumu (chaosu) lub jako generator mocy. Użycie szerokopasmowych sygnałów wpływa na poprawę efektów filtrowania i wygładzania charakterystyk. Do innych układów wykorzystujących szumy chaotyczne należą układy radarowe służące do mierzenia odległości obiektów na zasadzie odbicia sygnałów. Sygnał szerokopasmowy jest emitowany przez anteną radarową. Odbije się on od obiektu i następnie z opóźnieniem czasowym powraca. Opóźnienie czasowe służy do pomiaru odległości obiektu. Okazuje się, że zastosowanie sygnałów chaotycznych posiada następujące zalety w stosunku do metod klasycznych: a) umożliwia łatwą pracę ciągłą; b) daje możliwość wysyłania sygnałów o wyższej energii; c) jest rozwiązaniem tańszym niż dotąd stosowane podejścia klasyczne.

Sygnały chaotyczne odgrywają ważną rolę w przesyłaniu informacji i jej maskowaniu. Są one generowane na podstawie praw deterministycznych i mogą być odtwarzane w odbiorniku. Dla obserwatora zewnętrznego są one zwykle odbierane jako sygnały losowe nie przenoszące żadnej informacji. Ponadto sygnały chaotyczne są przy pewnym doborze

parametrów "mocno" odporne na sygnały zakłócające. W pracy [40] opisano możliwości kodowania informacji w sygnałach chaotycznych.

Metody generowania oraz wykorzystywania sygnałów chaotycznych w układach elektronicznych opisane zostały w pracy [24].

7. Kontrola sygnałów chaotycznych

Kontrola dynamiki chaotycznej wiąże się z zastosowaniem małych perturbacji, które powodują pojawienie się ruchu regularnego. Obecnie w literaturze poświęconej tej tematyce uwaga koncentruje się głównie na dwóch metodach kontrolowania sygnałów chaotycznych. Pierwsza metoda polega na wyprowadzeniu układu ze stanu dynamiki chaotycznej do stanu dynamiki regularnej poprzez wprowadzenie wymuszenia zewnętrznego bez stosowania pętli sprzężenia zwrotnego [41–45]. Druga metoda kontroli związana jest z wprowadzeniem pętli sprzężenia zwrotnego [46–48].

Rozpatrzmy układ dynamiczny opisany równaniami

$$\frac{dX_i}{dt} = F_i(X_1, \dots, X_n, \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (176)$$

gdzie α jest pewnym parametrem kontrolnym. Problematyka kontroli układu (176) bez wprowadzenia pętli sprzężenia zwrotnego związana jest z poszukiwaniem takiego wymuszenia zewnętrznego, które spowoduje "przyciąganie" lub "odpychanie" potoku fazowego generowanego przez (176) poprzez z góry wybrany stabilny (atraktor) lub niestabilny (repiler) podzbiór rozważanej przestrzeni fazowej.

W celu wprowadzenia w problematykę ograniczmy się do $x \in \mathbb{R}^2$ i rozpatrzmy układ równań o postaci [49]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_2 \left[x_1^4 (1 + 2b) - \frac{1}{8} (1 - b) \right] - x_1, \end{aligned} \quad (177)$$

gdzie $0 \leq \alpha \ll 1$ i b są pewnymi parametrami. Powyższy układ równań może modelować nieliniowy generator stosowany w układach radiowych [50].

Dynamika układu (177) w zależności od parametru b przedstawia się następująco.

1. Układ posiada stabilne ognisko, jeśli $b < -1/2$.
2. Jeśli $b \in (-0.5, 1)$ to oprócz stabilnego ogniska w układzie istnieje niestabilna orbita okresowa.
3. Jeśli $b > 1$, to w układzie istnieje jedynie niestabilne ognisko.

Z powyższych rozważań widać, że w szerokim zakresie zmian współczynnika b nie istnieje stabilna orbita okresowa.

Po dokonaniu perturbacji parametrycznej układu (177) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_2 \left[x_1^4 (1 + 2h \cos 2\omega\Theta) - \frac{1}{8} (1 - h \cos 2\omega\Theta) \right] - x, \\ \dot{\Theta} &= 1,\end{aligned}\tag{178}$$

gdzie h jest amplitudą wzbudzenia parametrycznego, $\omega = (1 + \alpha\eta)^{-1/2}$ i $\eta > 0$ jest pewną stałą.

Po wprowadzeniu zamiany zmiennych według wzorów

$$\begin{aligned}\varphi &= \omega\Theta, \\ x_1 &= y \cos(z + \varphi), \quad x_2 = y,\end{aligned}\tag{179}$$

i przeprowadzeniu operacji uśrednienia otrzymujemy [49]:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\varphi} &= \alpha Y(y, z) = \alpha \frac{y}{16} (y^4 - 1) \left(1 + \frac{h}{2} \cos 2z \right), \\ \frac{dz}{d\varphi} &= \alpha Z(y, z) = \alpha \left[\frac{\eta}{2} + \frac{h}{32} (5y^4 + 1) \sin 2z \right].\end{aligned}\tag{180}$$

Zgodnie z metodą uśrednienia punkty stałe układu (180) określone są równaniami

$$\begin{aligned}Y(y_0, z_0) &= 0, \\ Z(y_0, z_0) &= 0, \\ \left. \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(y, z)} \right|_{\substack{y=y_0 \\ z=z_0}} &\neq 0,\end{aligned}\tag{181}$$

i odpowiadają orbitom okresowym układu (178). Możemy teraz, w nowym zmodyfikowanym układzie, prześledzić jego zmiany dynamiki ze wzrostem wzbudzenia parametrycznego h . Okazuje się [49], że w pewnych przedziałach zmian parametru h pojawiają się stabilne orbity okresowe leżące na torusie. Wynika z tego ważny wniosek, że poprzez wzbudzenie parametryczne można przeprowadzić stan niestabilny układu w stan stabilny.

Podobny proces może zachodzić podczas stabilizacji dynamiki chaotycznej. Rozpatrzmy to na przykładzie układu Rösslera o postaci [43]

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \frac{1}{5}x_2, \\ \dot{x}_3 &= -\alpha x_3 - x_1 x_3 - \frac{1}{5}.\end{aligned}\tag{182}$$

Przy zmianie parametru kontrolnego α można "przeprowadzić układ ze stanu dynamiki chaotycznej do stanu dynamiki regularnej (okresowej). Wiąże się to ze stabilizacją orbit okresowych istniejących w obszarze dynamiki chaotycznej.

Metoda kontroli orbit chaotycznych poprzez wprowadzenie pętli sprzężenia zwrotnego posiada przewagę nad metodą wcześniej omawianą, ponieważ pozwala na stabilizację dowolnej z orbit niestabilnych leżących w obszarze atraktora chaotycznego.

Problematyka związana z kontrolą orbit chaotycznych posiada wiele atrakcyjnych aspektów aplikacyjnych w takich dziedzinach, jak przekazywanie informacji czy samoorganizacja.



Literatura

1. J. Kudrewicz, *Fraktale i chaos*. WNT, Warszawa 1993.
2. J. Awrejcewicz, *Matematyczne metody mechaniki*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1995.
3. A.M. Samoilenko, *Elementy matematycznej teorii mnogocastotnych kolebanij*. Nauka, Moskwa 1987.
4. C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan, J.A. Yorke, *Strange attractors that are not chaotic*. Physica D 11, 1984, 261-268.
5. M.V. Jakobson, *Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one dimensional maps*. Commun. Math. Phys. 81, 1981, 39-88.
6. J. Awrejcewicz, *Dynamika nieliniowa maszyn*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1994.
7. S.W. McDonald, C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, *Fractal basin boundaries*. Physica D 17, 1985, 125-153.
8. A.N. Molcanov, *O rezonansnoi strukture Solnečnoj sistemy. Sovreimionnyje problemy niebiesnoi mechaniki i astronautyki*. Nauka, Moskwa 1973.
9. I.I. Blechman, *Sinchronizacja dynamiceskich sistem*. Nauka, Moskwa 1971.
10. I.I. Blechman, P.S. Landa, M.G. Rosenblum, *Synchronization and chaotization phenomena in oscillatory and rotatory dynamical systems*. W książce: J. Awrejcewicz (red.), *Nonlinear dynamics: new theoretical and applied results*. Akademie Verlag, Berlin 1995.
11. L. Dieci, J. Lorenz, R.D. Russel, *Numerical calculation of invariant tori*. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 12, 1996, 607-622.
12. L.O. Chua, A. Ushida, *Algorithms for computing almost periodic steady-state response of nonlinear systems to multiple input frequencies*. IEEE Trans. Circ. and Sys. CAS-28, 1981, 953-988.
13. Chr. Kaas – Petersen, *Computation, continuation and bifurcation of torus solutions for dissipative maps and ordinary differential equations*. Physica 25D, 1987, 288-306.

14. R.K. Tavakol, A. S. Tworkowski, *On the occurrence of quasi-periodic motion on three tori*. Phys. Lett. A 100, 1984, 65-69.
15. F.H. Ling, *Quasi-periodic solutions calculated with the simple shooting technique*. J. of Sound and Vibration 144 (2), 1991, 293-304.
16. Ch. Hayashi, *Drgania nieliniowe w układach fizycznych*. PWN, Warszawa 1963.
17. Y. Ueda, *The road to chaos*. Science Frontier Express Series, Aerial Press, Santa Cruz 1994.
18. B.P. Demidowicz, *Matematyczna teoria stabilności*. WNT, Warszawa 1972.
19. V.I. Oseledec, *A multiplicative ergodic theorem. Liapunov characteristic numbers for dynamical systems*. Trans. Moscow Math. Soc. 19, 1968, 197-231.
20. G.L. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J.-M. Strelcyn, *Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems ; a method for computing all of them*. Part 1: *Theory*. Meccanica 15, 1980, 9-20. Part 2: *Numerical application*. Meccanica 15, 1980, 21-29.
21. A. Wolf, *Quantifying chaos with Lyapunov exponents*. W książce A.V. Holden (red.), *Chaos*. Manchester University Press, Manchester 1986, 273-290.
22. Yu.I. Neimark, *Dinamiceskije sistemy i upravliaemyje procesy*. Nauka, Moskwa 1978.
23. H.G. Schuster, *Deterministic chaos. An introduction (second revised version)*. VCH, Weinheim 1989.
24. T. Kiliyas, A. Mögel, W. Schwarz, *Generation and application of broadband signals using chaotic electronic systems*. W książce: J. Awrejcewicz (red.), *Nonlinear dynamics: new theoretical and applied results*. Akademie Verlag, Berlin 1995.
25. W.H. Steeb, *Chaos and fractals. Algorithms and computations*. B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich 1992.
26. M. Hénon, *A two-dimensional map with a strange attractor*. Commun. Math. Phys. 50, 1976, 69-75.
27. R. Seydel, *From equilibrium to chaos. Practical bifurcation and stability analysis*. Elsevier, Amsterdam 1988.
28. J. Awrejcewicz, *Bifurcation and chaos in simple dynamical systems*. World Scientific, Singapore 1989.



29. J. Awrejcewicz, *Bifurcation and chaos in coupled oscillators*. World Scientific, Singapore 1991.
30. H.E. Nusse, J.A. Yorke, *Dynamics: numerical explorations*. Springer - Verlag, New York 1994.
31. C. Simo, *On the Hénon-Pomeau attractor*. J. Stat. Phys. 21, 1979, 465-494.
32. W. Szemplińska - Stupnicka, *The behaviour of non-linear vibrating systems*. Vol. I, II. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1990.
33. J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector fields*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg 1983.
34. Y. Ueda, *Explosion of strange attractors exhibited by Duffing's equation*. Annals of the New York Academy of Sciences 357, 1980, 422-423.
35. E.N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*. Journal of Atmospheric Science 20, 1963, 130-141.
36. P.S. Landa, *Self-oscillations in systems with lumped parameters*. Nauka, Moscow 1980.
37. L. Kaptsov, *The appearance of pike regime in nonautonomous generator with inertial nonlinearity*. Radiotekhnika i Elektronika 20(12), 1975, 2496-2499.
38. G.M. Utkin, *Awtokolebatylnyje sistemy i wolnowyje usiliteli*. Moskwa, Sovietskoye Radio 1978.
39. M.O. Ogorzałek, *Order and chaos in third order rc - ladder network with nonlinear feedback*. IEEE Trans. Circuit Sys., CAS - 36, 1989, 1221-1230.
40. M. Hasler, *Synchronization principles and applications*. W pracy *Proceedings of the IEEE*. Vol. 63, July 1975, 996-1010.
41. A.Yu. Loskutov, J. Phys. A26, 1993, 4581-4594.
42. A.Yu. Loskutov, A.I. Shishmarev, Uspekhi Mat. Nauk, 48, 1993, 169-170.
43. R. Lima, M. Petlini, Phys. Rev. A41, 1990, 726-733.
44. Yu. S. Kivshar, F. Rödelberger, H. Benner, Phys. Rev. E49, 1994, 319-324.
45. E.A. Jackson, A. Hübler, Physica D54, 1992, 253-265.
46. E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke, Phys. Rev. Lett. 64, 1990, 1196-1199.
47. T. Shinbrot, Nonlinear Science Today 3, 1993, 1-8.
48. T. Shinbrot, J.M. Otlino, Phys. Rev. Lett. 71, 1993, 843-846.

49. A.Yu. Loskutov, *Non-feedback controlling complex behaviour: an analytical approach*.
W książce: J. Awrejcewicz (red), *Nonlinear dynamics: new theoretical and applied results*. Akademie Verlag, Berlin 1995.
50. Yu.I. Neimark, P.S. Landa, *Stochastic and chaotic oscillations*. Kluwer, Amsterdam 1992.



1639/W

Chaos and synchronisation in physical systems

Summary

There are two opposed processes observed in physical systems, i.e. synchronisation and chaos. The present work addresses some of key problems from research field of synchronisation, chaos and their bifurcations.

In Chapter 2 the fundamental definitions and descriptions related to chaotic dynamics are given (Lyapunov exponents, power spectra and autocorrelation functions).

In Chapter 3 one and two dimensional maps are discussed and their relation to physical systems is illustrated. Numerical examples support the observations of discrete dynamics governed by Bernoulli, logistic, circle, Hénon and Ikeda maps.

In Chapter 4 continuous systems, i.e. those governed by nonlinear ordinary differential equations, are considered. First, the nonautonomous simple oscillators with different potentials are analysed, and then the Melnikov function and its relation to prediction of chaotic behaviour is described. Also a nonlinear van der Pol's periodically driven oscillator is analysed from the point of view of chaotic dynamics, and finally a derivation of Lorenz equations and chaotic dynamics of the Lorenz attractor are outlined.

In Chapter 5 synchronisation phenomena in physical systems are discussed. Based on the examples of simple self-excited and externally driven simple oscillators (such as van der Pol, van der Pol-Duffing, as well as van der Pol-Duffing oscillator with parametric excitations), many various aspects of synchronization dynamics are illustrated. Self-excited electrical systems are taken in order to present an analytical approach and to analyse synchronised dynamics of simple electrical generators.

Chapter 6 includes some examples of applications of chaotic signals in electrical systems, whereas Chapter 7 discusses the methods of chaotic dynamics control.



Ze zbiorów Biblioteki Głównej Politechniki Łódzkiej