

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

**JAN AWREJCEWICZ
VADIM A. KRYSKO**

**TECHNIKI I METODY
ANALIZY DRGAŃ PŁYT I POWŁOK**

**BIBLIOTEKA GŁÓWNA
POLITECHNIKA ŁÓDZKA**

77625/S



000-077625-00-0

MONOGRAFIE

ŁÓDŹ 1996

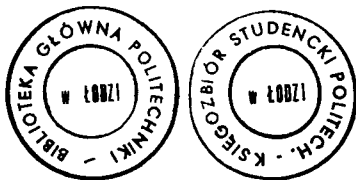


Za zbiorów Biblioteki Głównej Politechniki Łódzkiej

**Recenzenci: prof. dr hab. Zbigniew Starczewski
prof. dr hab. Andrzej Buchacz**

**KOMITET REDAKCYJNY
WYDAWNICTW POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ**

**Przewodniczący: prof. dr hab. Michał Tadeusiewicz
Redaktor Naukowy Wydziału: prof. dr hab. Tomasz Kapitaniak
Redaktor Serii: prof. dr hab. Michał Tadeusiewicz**



77625/s

**WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
93-005 Łódź, ul. Wólczańska 223**

ISBN 83-86453-98-2

Nakład 250 egz. Ark. wyd. 10,0. Ark. druk. 8,75. Papier offset 70 × 100 80 g

Druk ukończono w grudniu 1996 r.

Zamówienie 177/96

Wykonano w A.C.G.M. SA. LODART 93-005 Łódź, ul. Wólczańska 223

Nr 900

Kz - 48 / 97



SPIS TREŚCI

1. WPROWADZENIE	5
2. PRZEGLĄD LITERATURY	7
3. METODY I STANOWISKA SŁUŻĄCE DO BADANIA DRGAŃ	
KONSTRUKCYJNIE NIEJEDNORODNYCH PŁYT I POWŁOK	22
3.1. Metoda teoretyczno-eksperymentalna badań drgań płyt i powłok o złożonym kształcie	22
3.2. Opis stanowisk doświadczalnych	29
3.3. Metody badań eksperymentalnych	36
3.4. Teoretyczno - doświadczalne badanie drgań płyt i powłok z jednoskładnikową niejednorodnością	44
3.4.1. Badanie wpływu niejednorodności mocowania na drgania swobodne płyt i powłok	44
3.4.2. Rozpatrzmy teraz rezultaty badania wpływu otworów na drgania swobodne dla płyt i powłok	53
4. ANALIZA WPLYWU OTWORÓW POŁOŻONYCH NA OBWODZIE PŁYT I POWŁOK NA ICH DRGANIA SWOBODNE.....	66
5. DRGANIA PŁYT I POWŁOK Z NIEJEDNORODNOŚCIĄ WIELOSKŁADNIKOWĄ.....	75
5.1. Wyznaczanie funkcji niejednorodności $\psi_{k,n}$. Wybór metody przeprowadzenia eksperymentu	75
5.2. Wyniki analizy drgań swobodnych płyt i powłok z niejednorodnością wieloskładnikową	82
5.3. Obróbka statystyczna i analiza rezultatów eksperymentu	90
5.4. Analiza modeli eksperymentu wieloskładnikowego	96

6. ANALIZA DRGAŃ SWOBODNYCH PŁYT O ZŁOŻONEJ PŁASZCZYŹNIE	
METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH.....	99
6.1. Sformułowanie problemu i sposobu rozwiązania.....	99
6.2. Algorytm obliczeń MES-u.....	106
6.3. Model elementu skończonego	107
6.4. Rezultaty badań drgań płytek o złożonym kształcie przy zastosowaniu MES	110
7. WYNIKI BADAŃ EKSPERYMENTALNYCH DRGAŃ PŁYTEK I POWŁOK O	
ZŁOŻONYM KSZTAŁCIE I STOSOWANYCH W PRZYRZĄDACH	
TECHNIKI ELEKTRONICZNEJ.....	114
7.1. Obiekty analizy.....	114
7.2. Drgania swobodne.....	116
7.3. Drgania wymuszone.....	120
7.4. Porównanie stosowanych metod.....	124
8. ZAKOŃCZENIE I WNIOSKI	126
9. LITERATURA.....	129

1. Wprowadzenie

W pracy opisane zostały metody teoretyczne i doświadczalne stosowane przy analizie drgań płyt i powłok. Szczególną uwagę poświęcono metodzie teoretyczno-doświadczalnej stosowanej przy analizie wieloskładnikowych niejednorodności oraz metodom doświadczalnym opartym na zastosowaniu laseru. Pokazano, w jaki sposób można stosować metody regresji przy planowaniu eksperymentu i przy określaniu funkcji charakteryzującej niejednorodność ψ_{mn} w przypadku wspomnianej wieloskładnikowej niejednorodności. Zwrócono uwagę również na efektywność stosowanych metod. Dużo uwagi poświęcono opisowi stanowisk doświadczalnych, opartych na wykorzystaniu efektu cętkowania (prążkowania) przy użyciu laserowego źródła promieniowania.

Przedstawione zostały metody analizy otrzymanych prążków i hologramów, prowadzące do określenia częstości i odpowiadających im postaci drgań płyt i powłok. Opisane zostały metody obróbki danych doświadczalnych i oszacowane zostały błędy. Wskazano również na istotne różnice między opisanymi w tej monografii i dotąd stosowanymi metodami.

Dokonano analizy drgań giętych płyt i powłok z jednoskładnikową niejednorodnością (§ 3). Oszacowano wpływ na częstości drgań własnych płyt i powłok następujących rodzajów niejednorodności: otworów i zmian grubości w zarysie płyt i powłok o różnej geometrii - okrągłych, prostokątnych, położonych równolegle (typu PR) i położonych prostopadle (typu PP) do brzegów swobodnych oraz niejednorodności zamocowania brzegów.

Określono pierwszych sześć częstości drgań własnych i odpowiadające im postacie drgań badanych elementów. Wyznaczono zależności zmian widma częstości drgań od wielkości składników konstrukcyjnej niejednorodności $x_1, x_2, \dots, x_7$. Badania przeprowadzono na płytach kwadratowych mosiężnych o wymiarach $(30 \times 30 \times 0,3) \cdot 10^{-3}$ m z dwoma przeciwległymi brzegami utwierdzonymi przy pomocy spawania i dwoma pozostałymi swobodnymi. Badane powłoki pochyle były kwadratowe i wykonane z mosiądzu oraz podparte przegubowo przy pomocy połączeń śrubowych (powierzchnie powłok są swobodne). Otwory wiercone były w środku płyty (powłoki), a zmiany grubości również umiejscowione były w środkowej części powierzchni swobodnej. Rezultaty badań zilustrowano w postaci związków graficznych w zależności od współczynnika niejednorodności ψ_{kn} .

W §4 tej monografii badane są drgania płyt i powłok z wieloskładnikowymi niejednorodnościami. W celu określenia funkcji niejednorodności ψ_{kn} zastosowano metodę planowego eksperymentu. Rozpatrzono zasady wyboru i wybrano eksperyment typu PFE-2^k, który uwzględniał wszystkie możliwe kombinacje poziomów k-składników. Wyniki badań płyt i powłok z dwoma, trzema i siedmioma składnikami niejednorodności posłużyły do określenia ψ_{kn} . Zarówno obróbka statystyczna wyników jak i analiza rezultatów badań doświadczalnych wskazują na możliwość zastosowania tej metody do analizy problematyki drgań płyt i powłok o złożonej niejednorodności.

W §5 dokonano obliczeń płyt z otworami przy pomocy metody elementów skończonych (MES). Jako element podstawowy wybrano element o dwunastu stopniach swobody (element Argyrysa). Zostały zaprezentowane wyniki obliczeń dla wielu płyt o jednej i dwóch niejednorodnościach i wyniki porównano z badaniami eksperymentalnymi.

W §6 analizie poddano płytę i powłokę z różnymi zmianami grubości przy pomocy metody Bubnowa z zastosowaniem przybliżeń wyższego rzędu.

§7 został poświęcony badaniom doświadczalnym drgań swobodnych i wymuszonych elementów konstrukcji stosowanych w technice elektronicznej o skomplikowanych powierzchniach. Zostały określone częstotliwości drgań i odpowiadające im postacie, podane zostały charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe badanych elementów i określone zostały amplitudy drgań przy różnych rodzajach wymuszenia. Porównano wyniki analiz teoretycznych, teoretyczno-doświadczalnych i doświadczalnych.

2. Przegląd literatury

Ze względu na obecne wymogi przemysłu maszynowego zorientowanego na konstrukcje lekkie i wytrzymałe oraz biorąc pod uwagę przyczyny prowadzące do ich zniszczeń w reżimie pracy wysokoczęstotliwościowej, koniecznym wymogiem staje się określanie częstości drgań własnych i odpowiadających im postaci drgań. Drgania konstrukcji są wynikiem obciążeń dynamicznych, które mogą prowadzić bądź do bezpośredniego zniszczenia konstrukcji, lub też do pogorszenia warunków pracy.

Konstrukcje, których zasadniczymi elementami są płyty i powłoki, stosowane są w wielu dziedzinach mechaniki ciał okształcalnych, mechaniki konstrukcji, budowy statków, rakiet itd. Okazuje się jednak, że w przypadku przyrządów techniki elektronicznej (PTE) brakuje takich badań. Okazuje się również, że bezpośrednie przeniesienie i zastosowanie metod doświadczalnych z innych gałęzi (wyżej wymienionych) przemysłu jest bardzo trudne, bo należy uwzględnić specyfikę ich konstrukcji [61, 67]. Do jednej z takich osobliwości należy konstrukcyjna niejednorodność ich elementów (takich jak otwory, wgłębienia, niejednorodność mocowania) wynikająca z konieczności otrzymania żądanych parametrów elektrycznych tych konstrukcji. Oprócz tego, wiele z konstrukcji PTE jest cienkościennych i posiada małe rozmiary, a ponadto często są to materiały o różnych własnościach utrudniających ich łączenie (np. metal ze szkłem lub metal z ceramiką). Również zasady wyboru materiałów różnią się zdecydowanie od zasad stosowanych w innych dziedzinach techniki [84]. Konstrukcje PTE powinny pracować nawet w warunkach szczególnie „trudnych” ze względu na obciążenia dynamiczne - wymienić tu należy szeroki zakres zmian częstości obciążeń dynamicznych (do 5kHz i poziomem zmian obciążeń dynamicznych do 40 jednostek), obciążeń uderzeniowych (do $9,8 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$) i szumów akustycznych (w obszarze częstości do 10 kHz z poziomem natężenia dźwięku do 170 dB).

Większość elementów konstrukcji PTE wykorzystuje płyty i powłoki o złożonym kształcie. Występowanie różnego rodzaju wgłębień i otworów o różnej geometrii (koła, prostokąty i inne), złożoność kształtów zewnętrznej powierzchni, niejednorodność zamocowania brzegów płyt i powłok, jak również dodatkowych lokalnych mocowań w punktach, zdecydowanie wpływają na charakter ich drgań. Dlatego analiza dynamiki tego typu

plyt i powłok z uwzględnieniem obciążeń zmiennych w czasie jest niezmiernie ważna zarówno pod względem teorii jak i praktyki.

Szczególny wkład w dziedzinę dynamiki płyt i powłok wnieśli uczeni rosyjscy, tacy jak Własow W.Z. [13], Bołotin W.W. [7], Wolmir A.S. [14], Timoszenko S.P. [96], Filipow A.P. [99], Saczenkow A.W. [87], Petrov W.W. [66], Krysko W.A. [33] i inni. Dzięki wysiłkowi tych badaczy rozwiązano wiele problemów dynamicznych teorii drgań ciągłych płyt i powłok z „klasycznymi” warunkami brzegowymi w ramach teorii liniowej i nieliniowej. Podano szereg metod dokładnych i przybliżonych rozwiązania wielu problemów. Okazuje się jednak, że drgania płyt i powłok z konstrukcyjnymi niejednorodnościami nie są jeszcze dostatecznie zbadane. Współczesne osiągnięcia mechaniki i matematyki umożliwiły badanie tego typu zagadnień, związanych z analizą konstrukcji cienkościennych, z otworami i zmianami grubości o dowolnym kształcie. Z tego obszaru tematycznego należy wymienić prace Preobrażenskigo I.N. [71-75], Guzja A.N. [19], Rwaczewa W.G. i Kurpy L.W. [83], Konoplewa I.G., Sziszkińska G.G., Szałabanowa A.K. [28-31]. Dokonano w nich systematyzacji rezultatów wielu problemów dynamicznych związanych z konstrukcjami cienkościennymi z otworami, jak również wskazano na nowe metody badań. Z wyżej wymienionych prac wynika, że do najbardziej znanych należą metody określenia częstości drgań własnych płyt okrągłych z otworami. Pierwsze próby analizy drgań płyt prostokątnych z otworami zapoczątkowane zostały przez Takahashiego [116], a powłok z otworami - przez Bresławskiego W.E. [9]. Zbiór prac poświęconych analizie drgań płyt i powłok o złożonym kształcie stosowanych w PTE w latach 1982 ÷ 1984 podano w pracy [27].

W celu ułatwienia prowadzenia dalszych rozważań dotyczących różnych czynników konstrukcyjnej niejednorodności dokonano następującego podziału na klasy zagadnień :

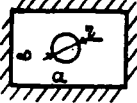
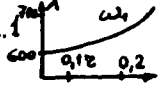
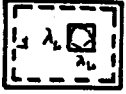
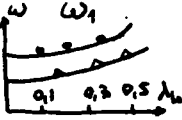
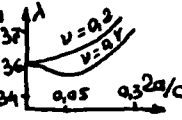
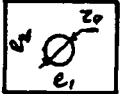
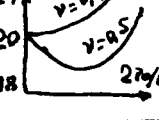
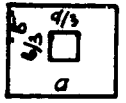
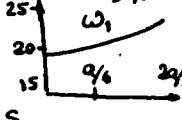
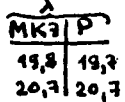
- I. Płyty i powłoki z jednym składnikiem niejednorodności - w konstrukcji występuje tylko jeden składnik charakteryzujący niejednorodność (CN), np. otwór, wgłębienie lub lokalne mocowanie;
- II. Płyty i powłoki z dwoma i więcej składnikami niejednorodności, np. szereg otworów lub otworów i zmian grubości, itd.

Poprzez pojęcie niejednorodności konstrukcyjnej rozumiane jest pojawienie się w konstrukcji następujących cech (składników) : otworów, wgłębień, niejednorodnego mocowania, czy zmiany grubości kształtu.

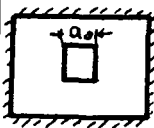
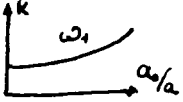
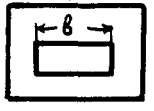
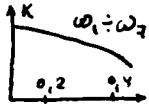
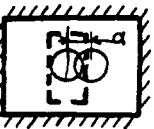
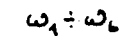
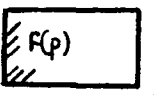
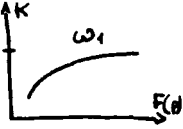
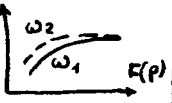
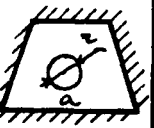
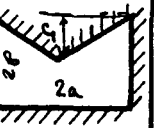
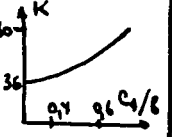
NIEJEDNORODNOŚĆ JEDNOSKŁADNIKOWA.

Podstawowe wyniki badań.

A. Płyty

lp	Schemat obiektów	metoda rozwiązania	Podstawowe rezultaty A. Płyty	Autor, źródło	Uwagi
I	2	3	4	5	6
I.		R-R EKS	I. $2z = 10, 20, 30, 40, 50$ II. $\nu = 0,3$ III. $a/b = 0,5; 5/8 \dots$ IV. C, S, F 	S. Takahashi [116]	
2.		SR (Δ) MES ($\bullet$)	I. $\lambda_b = l/2 \times b/2$ II. $\nu = 0,3$ III. $a/b = 1$ IV. S 	P. Parasivan [72]	
3.		bezpośrednia	I. $2a/c = 0 \div 0,03 - 0,3$ II. $\nu = 0,2 \div 0,4$ III. $c/d = 1$ IV. C, S. 	K. Nagaja [51]	
4.		kolokacji	I. $2z_0/e_1 = 0 \div 0,3$ II. $\nu = 0,1 \div 0,5$ III. $e_1/e_2 = 1$ IV. C-S-C-S; S 	R. Hegarty, T. Ariman [101]	
5.		SR EKS	I. $a/b \div 2a/3$ II. $\nu = 0,3$ III. $a/b = 13/2$ IV. C-S-S-S; S 	G. Aksu, R. Ali [72]	
6.		R-R	I. $0,1 \times 0,1; 0,5 \times 0,5$ II. $\nu = 0,3$ III. $a/b = 1,0$ IV. S 	R. Ali, S. Atwal [72]	

I	2	3	4	5	6
7.		R-R	$\begin{aligned} \text{I. } 0 \div 1 \\ \text{II. } \nu = 0,3 \\ \text{III. } a/b = 1 \\ \text{IV. } C \end{aligned}$	F. Istep, F. Hemmig [72]	
8.		δ - funkcji, EKS	$\begin{aligned} \text{I. } 0 \div 0,8 \\ \text{II. } \nu = 0,3 \\ \text{III. } a/b = 1 \div 1,38 \\ \text{IV. } C, S \end{aligned}$	Preobraże- niskij I.N. [73]	
9.		B-G EKS	$\begin{aligned} \text{I. } R/a = 0,1 \div 0,3 \\ \text{II. } \nu = 0,3 \\ \text{III. } a/b = 1 \\ \text{IV. } S \end{aligned}$	— " —	
10.		EKS, MTE	$\begin{aligned} y_p = \omega a^2 (g/h/b)^{1/2} = f_n(x_1, x_2, x_3) \\ x_1 = \frac{b}{a}; x_2 = \frac{d}{b}; x_3 = \frac{h}{b} \\ \omega_1, \omega_2, \omega_3 \end{aligned}$	Bakulin W.N. i inni [107]	
11.		MTE	$\begin{aligned} \text{I. } 0 \leq g/a \leq 1 \\ 0 \leq a/b \leq 1 \\ \nu = 11050e \\ \text{III. } a/b = 11050e \\ \text{IV. } S \end{aligned}$	Konoplew J.G., Szijskin A.G. [29]	
12.		MTE	$\frac{\omega_0}{\omega_{cnn}} = f_n(\nu, a/b, c/a)$	— " —	
13.		SR	$\begin{aligned} \text{I. } a_0/a = 0,2-0,8 \\ \text{II. } \nu = 0,3 \\ \text{III. } a/b = 11050e \\ \text{IV. } S \end{aligned}$	Zinienko G.P. [23]	

I	2	3	4	5	6
I4.		SR	$I. a/b = 5/13 \times 5/13$ $II. \nu = 0,3$ $III. a/b = 1,0$ $IV. C$ 	Kisłockij W.N. [26]	
I5.		EKS	$I. \gamma_0 \times 80; \gamma_0 \times 160$ $II. \nu = 0,3$ $III. a/b = 1,55$ $IV. C-F-F-F$ 	Kuchto W.A. [37]	
I6.		R- funkcji	$I. R/a = 0,1 \div 0,3$ $II. \nu = 0,3$ $III. a/b = 1; 2$ $IV. C, S$ 	Kurpa L.W. [36]	
I7.		EKS	$I. F(p)$ $II. \nu = 0,3$ $III. a/b = 2$ $IV. F = F(p)$ 	Glikman L.A., Koliszyk A.K. [17]	
I8.		MES, EKS	$I. C.M. C.K.E.M.Y$ $II. \nu = 0,3$ $III. a/b = 1$ $IV. 4 T.Y.K.$ 	Stratonowa M.M., Tołmacz G.U. [92]	
I9.		R- funkcji	$I. 2\gamma/a = 0,2$ $II. \nu = 0,3$ $III. C.M. C.K.E.M.Y$ $IV. C$ Przewidziano widmo i postacie drgań $\omega_1 \div \omega_2$	Waberski A. [121]	
20.		R- funkcji	$I. C_1/b = 0 \div 1,75$ $II. \nu = 0,3$ $III. a/b = 110500$ $IV. C$ 	Rwaczew W.L., Kurpa L.W. [83]	

B. Powłoki

I	2	3	4	5	6
			B. Powłoki		
I.		EKS	Mały wpływ otworów	Bresławski W.E. [9]	
2.		EKS	Mały wpływ otworów	Martynien-ko E.I. [43]	
3.		EKS	Normalny wpływ otworów	Pawlik N.E., Kiczlew E.I. [63]	
4.		EKS	Normalny wpływ otworów	- " -	
5.		EKS	Obniżenie częstości drgań własnych	Malinin A.A. [42]	
6.		SR, EKS	Otrzymano widmo częstości	Brouejen A. i inni [72]	
7.		EKS	Obniżenie częstości drgań własnych o 7-10%	Sziszkin A.G. [105]	
8.		EKS	Obniżenie częstości drgań własnych o 7-10%	- " -	

Tabela 2.

NIEJEDNORODNOŚĆ WIELOSKŁADNIKOWA.

lp	Schemat	Metoda rozwiązania	Podstawowe rezultaty A. Płyty	Autor, źródło	Uwagi
1.		δ - funkcji		Preobrażen- -niskij I.N. [74, 75]	---- mocowanie kulkowe //// mocowanie sztywne
2.		δ - funkcji	 $K = 19,58 + 21,08n$	— " —	
3.		SR	$K = 23,6$ Otrzymano widmo częstości $\omega_1 - \omega_8$ $\omega_1 = 143,6 \text{ Hz}$	Bublik B.H. [10] Samsonowa R.I. [85]	
4.		EKS	Otrzymano widmo częstości	Preobrażen- -niskij I.N. [71]	
5.		MES	$K = 23,6$	Krysko V.A. Pawłow S.P. [34]	
6.		R-R	Otrzymano widmo częstości $\omega_1 - \omega_9$	Samsonowa R.I. [85]	
7.		EKS	Otrzymano widmo częstości $\omega_1 - \omega_9$ i postacie drgań	Sypko W.N. [95]	
			B. Powłoki		
8.		EKS	Mały wpływ otworów	Sziszkin A.G. Tertyszynj G.W. [105]	
9.		MES	 K_0 - parametr krzywizny	Krysko V.A. Pawłow S.P. [34]	
10.		MES	$K_1 = 50,77$; $K_4 = 135,2$ $K_2 = 81,06$; $K_5 = 177,9$ $K_3 = 102,9$; $K_6 = 196,3$	— " —	
11.		R-R, EKS	Mały wpływ otworów	S. Todi [75]	

W tabelach 1 i 2 podane zostały skrótowo rezultaty badań uwzględniające powyższą klasyfikację dla przypadku drgań giętych płyt prostokątnych i powłok.

W tabeli 1 podano podstawowe rezultaty badań płyt i powłok prostokątnych z niejednorodnością jednoskładnikową. Podano również schematy badanych obiektów, metody rozwiązania oraz źródła informacji. Z tabeli tej wynika, że większość prac poświęcono badaniu wpływu okrągłych otworów na częstości drgań płyt i powłok. Znacznie mniej prac związanych jest z analizą innych składników niejednorodności (otworów prostokątnych, wgłębień, niejednorodności mocowania, zmian grubości i dowolność kształtu). Z przeglądu literatury wynika, że nie ma prac poświęconych analizie płyt i powłok o dwóch brzegach swobodnych z konstrukcyjnymi niejednorodnościami.

W tabeli 2 podane zostały podstawowe wyniki badań płyt i powłok z niejednorodnością wieloskładnikową. Wynika z niej, że dynamika tego typu konstrukcji należy do mniej zbadanych w porównaniu do konstrukcji z niejednorodnością jednoskładnikową. Duża część prac z tej dziedziny ukierunkowana jest na badania płyt perforowanych przy użyciu (głównie) metod doświadczalnych. Zauważa się tutaj, podobnie jak i w przypadku niejednorodności jednoskładnikowej, brak badań dotyczących płyt i powłok o brzegach swobodnych, brak analizy wpływu poszczególnych składników niejednorodności na częstości drgań własnych, itd.

Z tabeli 1 i 2 wynika, że do podstawowych metod doświadczalnych i teoretycznych stosowanych do analizy drgań płyt i powłok należą metody: Rayleigha-Ritza, Bubnowa-Galerkina, δ -funkcji, R-funkcji, różnic skończonych, elementów skończonych, a także metody teoretyczno-eksperymentalne.

W celu wprowadzenia do metodologii wyboru najbardziej korzystnych i optymalnych metod badania małych cienkościennych i konstrukcyjnie niejednorodnych płyt i powłok rozpatrzmy niektóre z tych metod bardziej szczegółowo.

Analiza metod teoretycznych drgań płyt i powłok o złożonym kształcie pokazuje, że najbardziej uniwersalną metodą jest Metoda Elementów Skończonych (MES). Należy tu podkreślić wkład naukowy, jaki wnieśli do tej metody uczeni, tacy jak: Postnov V.A., Rozin L.A., Sacharov A.G., Argiris J., Kreiner M., Oden, Kleiber M. i inni. Obecnie metoda ta jest rozpracowana dostatecznie dobrze z punktu widzenia mechaniki i układów mechanicznych, jak i z punktu widzenia aspektów matematycznych [45- 48, 70].

Uwagi odnoszące się do tabeli 1 :

1. Przyjęto następujące oznaczenia podparcia brzegów :
 ///// - sztywne (C); ---- - ruchome (S); _____ - o końcach swobodnych (F);
 - - - - - podparcie punktowe; F(p) - oznacza zmienność sił mocowania.
2. EKS - metody eksperymentalne; R-R - metoda Rayleigha-Ritza; B-G - metoda Bubnowa-Galerkina; δ - metoda oznacza metodę opartą na δ - funkcjach; R- metoda R- funkcji; SR - metoda różnic skończonych; MES - metoda elementów skończonych; MTE - metoda teoretyczno- eksperymentalna.
3. Na wykresie p.t. „Podstawowe rezultaty” przyjęto następujące oznaczenia :
 I - geometria wgłębień; II - współczynnik Poissona; III - strony płyty (powłoki); IV- sposób mocowania; $(\omega_1^0 - \omega_k^0)$ lub $(f_1^0 - f_k^0)$ - oznaczenia częstości drgań własnych.

Przegląd prac ze względu na zastosowanie MES-u do analizy drgań swobodnych i wymuszonych elementów PTE podano w pracy [57].

Należy podkreślić, że wszystkie metody teoretyczne obliczeń, mające zastosowanie do drgań płyt i powłok konstrukcyjnie niejednorodnych, wiążą się z bardzo dużym czasem obliczeń na współczesnych komputerach.

Okazuje się zatem, że najbardziej wygodną i uniwersalną jest metoda eksperymentalno- teoretyczna, w głównej mierze rozpracowana przez Saczenkova A.W. i stosowana do analizy wytrzymałości i stabilności płyt i powłok [87, 88], która została następnie rozszerzona przez Konoplewa J.G., Sziszkina A.G., Szałabanowa A.K. i innych na układy dynamiczne [28-31, 105]. Metoda ta, szeroko stosowana w mechanice płynów, znajduje zastosowanie do analizy płyt i powłok. Ideę tej metody sformułowano w pracach akademika Sedowa L.I. W skrótowym zarysie polega ona na następującym podejściu : „Dla przeprowadzenia prawidłowych eksperymentów i obróbki wyników, rezultaty których mogłyby określić ogólne prawidłowości i mogłyby służyć jako przybliżenie dla przypadków, w których eksperyment nie może być stosowany bezpośrednio, koniecznym jest głębokie wniknięcie w problematykę i dokonanie ogólnej analizy jakościowej. Oprócz tego, samo przeprowadzenie eksperymentów, rezultaty których stanowią zbiory liczb charakteryzujących badane zjawiska, może być oparte tylko na bazie wstępnej analizy teoretycznej. Zarówno możliwość takiej wstępnej jakościowo- teoretycznej analizy i wyboru układu bezwymiarowych parametrów kontrolnych daje teoria skalowania i teoria podobieństwa. Podejście takie może być stosowane do analizy zjawisk złożonych i znacznie ułatwia obróbkę eksperymentów.

Kombinacje oparte na teorii podobieństwa z wynikami uzyskanymi na drodze eksperymentu lub na drodze analizy równań ruchu, niekiedy może prowadzić do fundamentalnych rezultatów. Zazwyczaj metoda skalowania i teoria podobieństwa wnoszą wiele korzyści zarówno w odniesieniu do teorii jak i do praktyki”.

Metoda teoretyczno- eksperymentalna (MTE) posiada szereg zalet [87], a podstawowe z nich to :

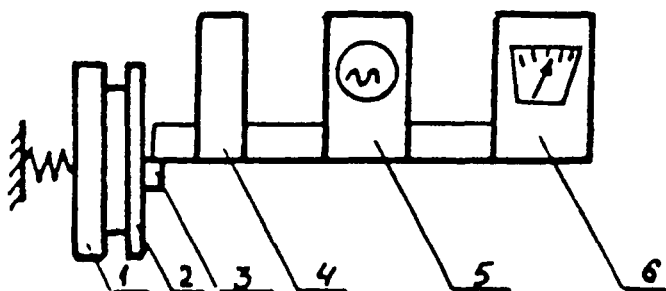
- 1) na bazie wstępnej jakościowej analizy wyjściowych równań pozwala ona na wcześniejsze określenie „zakresu” badań doświadczalnych, niezbędnego dla pełnego rozwiązania problemu;
- 2) metoda ta nie wymaga klasycznych podziałów ze względu na złożoność zagadnień i ich teoretycznej analizy (np. podziału na liniowe i nieliniowe, itd.).

Metody te pozwalają (na bazie jedynie wstępnej teoretycznej analizy równań ruchu) na „... uzyskanie z dokładnością do stałych dowolnych (funkcji) strukturalnych zależności (bez rozwiązywania równań), charakteryzujących osobliwości zachowania się płyt i powłok. Zadaniem eksperymentu jest określenie w strukturze uzyskanych formuł stałych lub funkcji” [88]. Jeśli z punktu widzenia matematyki niemożliwym jest uzyskanie dokładnych rozwiązań zagadnień brzegowych, to okazuje się, że również przybliżone metody rozwiązania tego typu problemów należą do złożonych i trudnych. Oprócz tego, dla oceny stopnia dokładności metod przybliżonych, wykorzystuje się eksperyment (nazywany pasywnym), który je weryfikuje lub odrzuca. Jeśli wyniki teorii są bez zarzutu w badanym obszarze parametrów i są wielokrotnie potwierdzane poprzez praktykę, to sformułowanie nowego zadania w warunkach którego eksperyment będzie spełniał funkcje należące do kompetencji czystej matematyki (określenia stałych funkcji), jest w pełni osiągnięciem metody teoretyczno- eksperymentalnej. W tym przypadku rola eksperymentu pojawia się w charakterze środka do rozwiązania zadań metodami matematycznymi (aktywny eksperyment).

Rozwój nauki i techniki umożliwił opracowanie przeróżnych metod i środków dla badań statycznych i dynamicznych płyt i powłok. Cały zbiór metod eksperymentalnych stosowanych do analizy mechaniki ciała stałego można podzielić na następujące klasy :

- I. Metody kontaktowe. Są to metody oparte na stosowaniu przeróżnych przetworników, czujników piezoelektrycznych i tensometrów oraz urządzeń do pomiarów drgań itd.
- II. Metody oparte na zastosowaniu modeli. Należą do nich polaryzacyjno- optyczne, układy elektryczne zbudowane na bazie teorii podobieństwa, itd.

III. Metody bezkontaktowe. Metody morowe oraz metody optyczne z zastosowaniem optycznych generatorów kwantowych (laserów).



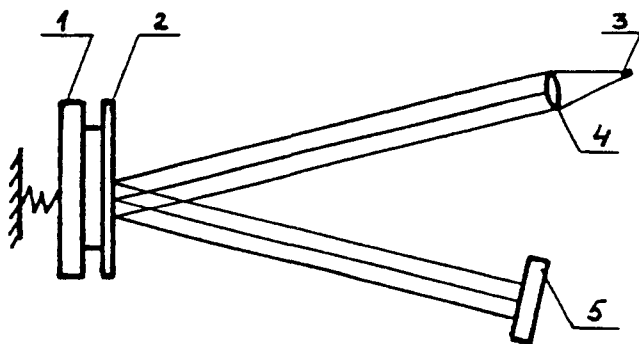
Rys. 1. Schemat blokowy pomiaru parametrów drgań metodą kontaktową :

1 - stanowisko wibracyjne; 2 - badany element; 3 - czujnik;
4 - wzбудnik; 5 - oscylograf; 6 - miernik.

Zalety metod kontaktowych (I) widoczne są na rys.1, na którym przedstawiono schemat blokowy pomiaru drgań przy użyciu tej metody [7]. Należą do nich: a) możliwości badań w szerokim obszarze częstości; b) pomiar amplitud drgań lub przyspieszeń w dowolnym punkcie lub przy dowolnej częstości. Do wad tych metod zaliczamy: a) wpływ masy czujników na pomiary; b) otrzymanie dyskretnego obrazu drgań badanego obiektu.

Druga grupa metod [22, 44] wymaga przygotowania specjalnych modeli (lub naniesienie specjalnego pokrycia na badany obiekt), co w znacznym stopniu ogranicza możliwość ich stosowania.

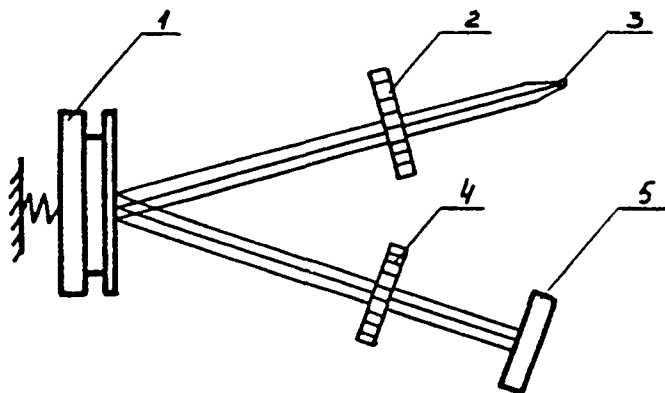
Do najbardziej perspektywicznych metod analizy drgań płyt i powłok należą metody bezkontaktowe: metody oparte na zastosowaniu wstęg morowych i metody laserowe [15, 25, 31, 69, 77]. Warto podkreślić, że podwaliny tych metod zostały podane przez uczonych byłego Związku Radzieckiego (Sokołow W.P. [90], Dylcew R.A. [21], Nowickij W.W.[54], Uszakow W.N. [97] i innych). Spośród innych wymienić należy Teoparis P. [117], Tollenaar D. [118], Nikola W. [119]. Współczesne metody morowe pozwalają na analizę trzech rodzajów problemów dynamicznych: a) drgań swobodnych i wymuszonych płyt; b) określenia geometrii naprężeń i odkształceń w ciałach płaskich i przestrzennych z uwzględnieniem obciążeń niestacjonarnych; c) rozprzestrzeniania się fal sprężystych obciążeniach uderowych. Do rozwiązania problemów pierwszego rodzaju służą metody rozszczepiania pęku wiązki równoległej światła i odbiciowej metodą morową [117].



Rys. 2. Schemat optyczny metody rozproszenia :

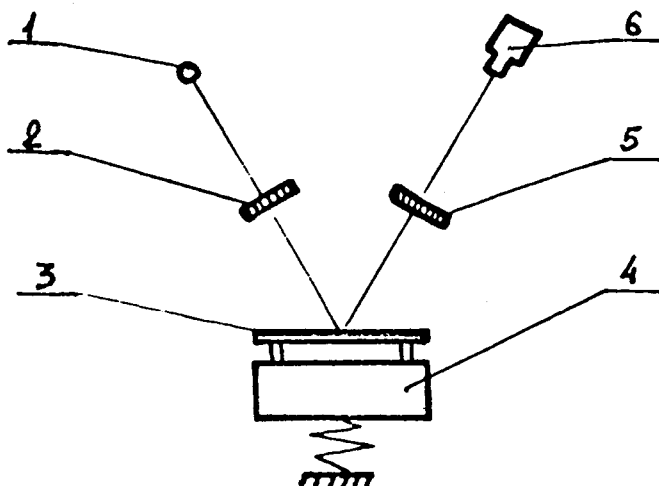
1 - stanowisko wibracyjne; 2 - element badany; 3 - źródło światła; 4 - soczewka; 5 - szkło matowe.

Idea tej metody polega na rozdzieleniu wiązki światła równoległego na dwie: jednej wysyłanej przez źródło i drugiej odbitej od drgającej powierzchni płyty (rys. 2). Części płyty, położenia których podczas drgań nie ulegają zmianie, posiadają na szkło matowym (5) stałą (jednakową) intensywność. I na odwrót, te części, które ulegają deformacjom, powodują ciągłe zmiany kątów odbicia światła i widoczne są na ekranie jako obszary ciemne. Na bazie tej różnicy określa się postacie drgających płyt. Odbiciowa metoda morowa oparta jest na zasadzie interferencji siatki liniowej, która jest projektowana na polerowaną powierzchnię płyty przy pomocy wiązek równoległych światła (rys. 3). Metoda ta pozwala na uzyskanie obrazu linii odpowiadających kątom pochylenia zginanych płyt.



Rys. 3. Schemat optyczny metody morowej :

1 - stanowisko wibracyjne; 2, 4 - siatki; 3 - źródło światła; 5 - szkło matowe



Rys. 4. Schemat optyczny stanowiska do realizacji metody morowej :
 1 - źródło światła; 2, 5 - siatki; 3 - badany element;
 4 - stanowisko wibracyjne; 6 - aparat fotograficzny.

Na rys. 4 przedstawiono schemat blokowy stanowiska do badania dynamicznych właściwości płyt o złożonym charakterze [25] przy użyciu metody morowej.

Grupa metod morowych wyróżnia się dużo większymi możliwościami przy badaniu dynamiki płyt w porównaniu do dwóch pierwszych grup. Do wad tej grupy zaliczamy: a) konieczność dodatkowej obróbki szorstkich powierzchni; b) ograniczenia przy stosowaniu obiektów o małych gabarytach, co wiąże się z koniecznością przeprowadzenia badań na modelach; c) podczas analizy wyższych postaci drgań „obróbka” i interpretacja wyników w postaci prążków morowskich staje się kłopotliwą.

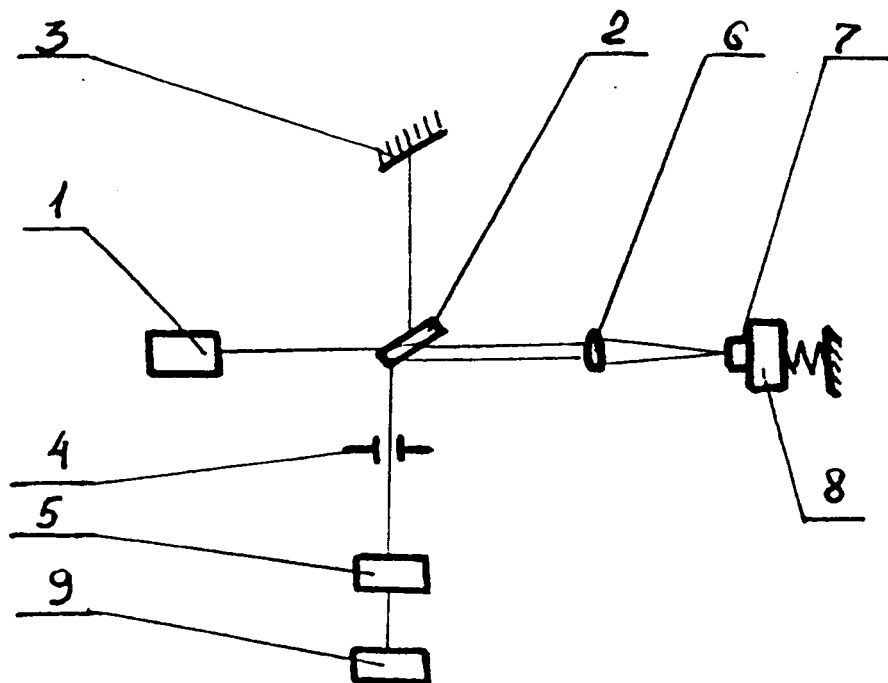
W ostatnich latach szerokie zastosowanie znalazły metody wykorzystujące generatory kwantowe (lasery). Posiadają one zalety grupy metod morowskich, a ponadto pozwalają na: a) otrzymanie bardziej wyraźnych diagramów drganiowych; b) możliwość szybkiego określania widma częstości drgań i ich amplitud w dowolnym punkcie powierzchni; c) możliwość analizy elementów o bardzo małych wymiarach przy dowolnym stanie powierzchni bez jej dodatkowej obróbki.

Dużą rolę w rozwoju metod laserowych odegrali uczeni rosyjscy: Denisiuk J.A., Ostrowskij J.I., Listow W.S. i inni, oraz tacy uczeni jak Stetson K., Olstenberg Ch., Gaborude

i inni. Obecnie istnieje już szeroka literatura poświęcona drganiom płyt i powłok [77]. Analiza stosowanych metod laserowych wskazuje na celowość ich podziału na 4 klasy [15]:

1. Metoda dyfrakcyjna.
2. Klasyczna interferometria.
3. Holograficzna interferometria.
4. Metody z zastosowaniem efektów cętkowania (prążków) - speckl-effect.

Pierwsza z w/w metod posiada zasadniczą wadę, bowiem może być stosowana tylko do rejestracji zmian amplitud drgań na brzegu obiektu. Klasyczna interferometria pozwala na pomiar amplitudy drgań w dyskretnych punktach obiektu i nie pozwala na otrzymanie całościowego obrazu drgań. Oprócz tego, konieczność obliczania dużej liczby wiązek interferencyjnych niewątpliwie obniża możliwość szerokiego stosowania tej metody.



Rys. 5. Schemat optyczny stanowiska holograficznego :

1 - laser; 2 - pryzmat rozszczepiający; 3 - lustro; 4 - diafragma; 5 - fotodioda;
6 - soczewka; 7 - badany element; 8 - stanowisko wibracyjne; 9 - wzmacniacz.

Metody interferometrii holograficznej dają możliwość obserwacji obrazu interferencyjnego w całym obszarze dużych i szorstkich powierzchni, co znacznie rozszerza możliwość interferometrii klasycznej. Różne modyfikacje tej metody dają możliwość pomiaru amplitud w bardzo szerokim zakresie: od 10^{-3} do $100\ \mu\text{m}$, co pozwala na ich stosowanie do małych obiektów. Jako przykład na rys. 5 podano schemat blokowy jednego ze stanowisk holograficznych, stosowanych do badania drgań płyt [103].

Metody określania częstości i postaci drgań z zastosowaniem obrazków z prążkami są podobne do wcześniej opisanej metody wiązki światła równoległego stosowanego w metodach morowych (rys. 2), ale charakteryzują się wyższą jakością. Na szczególną uwagę zasługuje metoda opisana w [114], pozwalająca na otrzymanie kresiek w każdym punkcie powierzchni drgającego obiektu. Dodatkowo kierunek kreskowania pokrywa się z kierunkiem gradientu powierzchni w skrajnych położeniach, przyjmowanych przez obiekt w procesie drgań, a długość kreski jest proporcjonalna do wielkości tego gradientu. Punkty powierzchni, w których nie zmienia się pochyłość w procesie drgań, miejsca wybrzuszeń, punkty siodłowe, miejsca przykryć, są zobrazowane jako miejsca o jednakowej intensywności na tle kresiek.

Analiza metod laserowych wskazuje, że do najbardziej perspektywicznych metod badań konstrukcyjnych niejednorodnych płyt i powłok należy metoda logarytmicznej interferometrii i względnie nowa metoda obrazków prążkowych, służąca do określenia częstości i postaci drgań płyt i powłok [77, 78, 104].

Opisane metody analizy konstrukcyjnie niejednorodnych płyt i powłok wskazują na niejednoznaczny wpływ otworów na częstości drgań własnych. Dla płyt obserwowano zarówno podwyższenie jak i obniżenie częstości drgań własnych w zależności od rodzaju, położenia i wielkości otworu. Dla wielu konstrukcji w badaniach ograniczono się do analizy kilku pierwszych (podstawowych) częstości drgań. Do mało zbadanych należą drgania płyt i powłok z wieloskładnikową niejednorodnością.

Z w/w rozważań wynika aktualność sformułowania nowych badań dotyczących drgań złożonych struktur zarówno na etapie budowy nowych metod teoretycznych, jak również z punktu widzenia aplikacji, w zastosowaniu do drgań dwóch typów płyt i powłok:

- a) pochyłych powłok z jednym lub kilkoma wgłębieniami i otworami powstałymi w wyniku wiercenia;
- b) płyt i powłok o niejednorodnym zamocowaniu i kilkoma wgłębieniami lub przelotowymi otworami.

3. Metody i stanowiska służące do badania drgań konstrukcyjnie niejednorodnych płyt i powłok

3.1. Metoda teoretyczno-eksperymentalna badań drgań płyt i powłok o złożonym kształcie

Rozpatrzmy istotę metody teoretyczno-eksperymentalnej na przykładzie drgań płyty prostokątnej izotropowej z dwoma wybraniem materiału. Metoda teoretyczno-eksperymentalna jest oparta na zastosowaniu metody Rayleigha [18]. Energia potencjalna (V) i kinetyczna (T) zginanej płyty ma postać :

$$V = \frac{1}{2} \iint_S D \left[W_{xx}^2 + W_{yy}^2 + 2\nu W_{xx} W_{yy} + (1-\nu) W_{xy}^2 \right] dx dy \quad (3.1.1)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_S \frac{\gamma h}{g} W^2 dx dy$$

lub w postaci bezwymiarowej :

$$\bar{V} = \frac{1}{2} \iint_S \left[\frac{1}{\lambda_1} \bar{W}_{\bar{x}\bar{x}}^2 + \lambda_1 \bar{W}_{\bar{y}\bar{y}}^2 + 2\nu \lambda_1 \bar{W}_{\bar{x}\bar{x}} \bar{W}_{\bar{y}\bar{y}} + 2(1-\nu) \lambda_1 \bar{W}_{\bar{x}\bar{y}}^2 \right] dx dy \quad (3.1.2)$$

$$\bar{T} = \iint_S \frac{1}{\lambda_1} \bar{W}^2 dx dy$$

Przyjmując poszukiwaną postać rozwiązań :

$$\bar{W}(\bar{x}, \bar{y}, t) = \bar{W}_n(\bar{x}, \bar{y}) \cos \omega_n t \quad (3.1.3)$$

i podstawiając (3.1.3) do (3.1.2) dla maksymalnych wartości $\bar{V}$ i $\bar{T}$ otrzymujemy :

$$\bar{V}_{\max} = \iint_S \left[\frac{1}{\lambda_1} (\bar{W}_n)_{\bar{x}\bar{x}}^2 + \lambda_1 (\bar{W}_n)_{\bar{y}\bar{y}}^2 + 2\nu \lambda_1 (\bar{W}_n)_{\bar{x}\bar{x}} (\bar{W}_n)_{\bar{y}\bar{y}} + 2(1-\nu) \lambda_1 (\bar{W}_n)_{\bar{x}\bar{y}}^2 \right] dx dy \quad (3.1.4)$$

$$\bar{T}_{\max} = \iint_S \omega_n^2 \frac{1}{\lambda_1} (\bar{W}_n)^2 dx dy$$

Łatwo zauważyć, że funkcje, otrzymane po obliczeniu całek w (3.1.4), mogą być przedstawione w postaci [28] :

$$\bar{V}_{\max} = \varphi_n(v_1, \lambda_1) \quad (3.1.5)$$

$$\bar{T}_{\max} = U_n(v_1, \lambda_1)$$

Porównując $\bar{V}_{\max}$ i $\bar{T}_{\max}$ otrzymujemy :

$$\bar{\omega}_n^2 = \frac{\varphi_n(v_1, \lambda_1)}{U_n(v_1, \lambda_1)} = \bar{F}_n(v_1, \lambda_1) \quad (3.1.6)$$

Wzór (3.1.6) pozwala określić widmo częstości drgań płyt prostokątnych. Funkcja $\bar{F}_n$ jest obecnie znana dla wszystkich ciągłych płyt i pochyłych powłok [18]. Np. dla płyty prostokątnej funkcja ta ma postać (przy różnych rodzajach mocowania) :

$$\bar{F}_n(v_1, \lambda_1) = K_n^4 = n^4 \left\{ G_x^4 + \lambda_1^4 G_y^4 + 2\lambda_1^2 \left[v H_x H_y + (1-v) J_x J_y \right] \right\} \quad (3.1.6a)$$

gdzie G_x , G_y , H_x , H_y , J_x , J_y są stałymi zależnymi od wartości drgań (liczba linii węzłowych wynosi m , n wzdłuż osi ox i oy).

W przypadku powłoki pochyłej funkcja ta ma postać :

$$\bar{F}_n(v_1, \lambda_1) = K_n^4 \left(1 + \frac{12 K}{n^2 a^2} \right), \quad (3.1.6b)$$

gdzie :

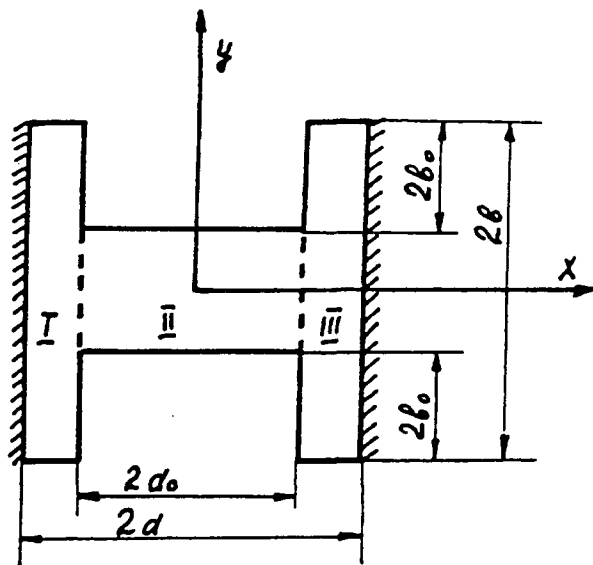
$$K = \frac{\left(\mu_m^2 + \frac{1-v}{2} \delta_m \delta_n \mu_n^2 \right) \left[\mu_n^2 (1-\gamma_n^2) + \frac{1-v}{2} \delta_m \delta_n \mu_m^2 \right] - v^2 \frac{1-v}{2} \delta_m \delta_n \mu_m^4 \gamma_m^2 - \left\{ \left(\mu_m^2 + \frac{1-v}{2} \delta_m \delta_n \mu_n^2 \right) \left(\mu_n^2 + \frac{1-v}{2} \delta_m \delta_n \mu_m^2 \right) - \left(\frac{1-v}{2} \delta_m \delta_n + v \gamma_m \gamma_n \right) \mu_m^2 \mu_n^2 + \right.}{- \mu_m^2 \mu_n^2 \left[v^2 \gamma_m^2 - 2 v \gamma_m \gamma_n \left(\frac{1-v}{2} \delta_m \delta_n + v \gamma_m \gamma_n \right) + \left(\frac{1-v}{2} \delta_m \delta_n + v \gamma_m \gamma_n \right)^2 \right] + \frac{h^2}{12} \left\{ \left[\left(\mu_m^2 + \frac{1-v}{2} \delta_m \delta_n \mu_n^2 \right) + \left(\mu_n^2 + \frac{1-v}{2} \delta_m \delta_n \mu_m^2 \right) \delta_m \right] K_n \right\} \right\} K_n$$

$$\mu_m = \frac{K_m}{\alpha}; \quad \alpha = \frac{e}{a}; \quad \delta_m = \frac{e}{K_m^2} \int_0^c (X'_m)^2 dx; \quad \gamma_m = \frac{e}{K_m^2} \int_0^c X''_m X_m dx$$

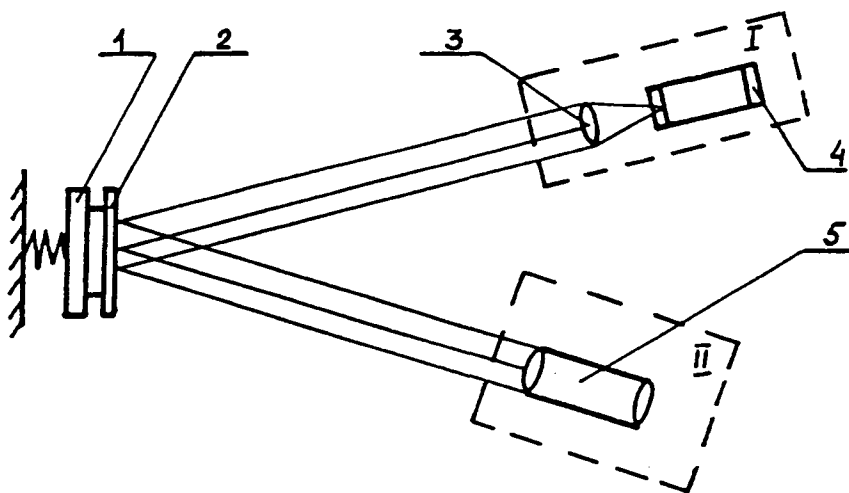
$$X_m \left(\frac{K_m x}{e} \right) - \text{funkcja o } m \text{ węzłach}$$

$K_m = m \pi$ - dla powłoki o opartych brzegach.

Przy ustalonych wartościach v i λ_1 funkcja $\bar{F}_n$ jest stała i może być określona eksperymentalnie [88].



Rys. 6. Płytką z wybraniem materiału.
Obszary podziału oznaczono jako I, II, III.



Rys. 7. Schemat optyczny stanowiska do rejestracji prążków holograficznych :
1 - stanowisko wibracyjne; 2 - badany obiekt; 3 - soczewka; 4 - laser; 5 - układ teleskopowy.

Dla płyty z wybraniem materiału o wymiarach $2a_0 \times 2b_0$ (rys. 6), symetrycznie położonym względem osi oy , wybierzemy funkcję falową o postaci:

$$\bar{W}^0(x, y, t) = \bar{W}_n(x, y) \cos \omega_n t \quad (3.1.7)$$

gdzie funkcja $\bar{W}_n^0$ spełnia warunki graniczne na zewnętrznym konturze płyty i posiada zadane wartości w każdym punkcie wewnętrznego konturu (po wybraniu materiału). Analogicznie do (3.1.4) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{\max}^0 &= \iint_{S_0} [\bar{W}_n^0] d\bar{x} d\bar{y} \\ \bar{T}_{\max} &= \iint_{S_0} (\omega_n^0)^2 \frac{1}{\lambda_1} (\bar{W}_n^0)^2 d\bar{x} d\bar{y} \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

gdzie

$$\bar{W}_n^0 = \frac{1}{\lambda_1} (\bar{W}_n^0)_{\bar{x}\bar{x}}^2 + \lambda_1^2 (\bar{W}_n^0)_{\bar{y}\bar{y}}^2 + 2\nu\lambda_1 (\bar{W}_n^0)_{\bar{x}\bar{x}} (\bar{W}_n^0)_{\bar{y}\bar{y}}^2 + 2(1-\nu)\lambda_1 (\bar{W}_n^0)_{\bar{x}\bar{y}}^2 \quad (3.1.9)$$

Rozdzielając, zgodnie z rys. 6, obszary całkowania, otrzymujemy:

$$\iint_{S_0} [\bar{W}_n^0] d\bar{x} d\bar{y} = \int_{-1}^{-x_3} \int_{-1}^1 [\bar{W}_n^0] d\bar{x} d\bar{y} + \int_{-x_3}^{x_3} \int_{-x_4}^{x_4} [\bar{W}_n^0] d\bar{x} d\bar{y} + \int_{x_3}^1 \int_{-1}^1 [\bar{W}_n^0] d\bar{x} d\bar{y} = \varphi_n^0(\nu, \lambda_1, x_3, x_4) \quad (3.1.10)$$

Analogicznie do energii kinetycznej otrzymamy:

$$\iint_{S_0} \frac{1}{\lambda_1} (\bar{W}_n^0)^2 d\bar{x} d\bar{y} = U_n^0(\nu, \lambda_1, x_3, x_4) \quad (3.1.11)$$

i znajdujemy poszukiwane widmo częstości płyt z wybraniem materiału:

$$(\omega_n^0)^2 = \frac{\varphi_n^0(\nu, \lambda_1, x_3, x_4)}{U_n^0(\nu, \lambda_1, x_3, x_4)} = \bar{F}_n^0(\nu, \lambda_1, x_3, x_4) \quad (3.1.12)$$

Dzieląc (3.1.12) przez (3.1.6) otrzymujemy:

$$\frac{\omega_n^0}{\omega_n} = \psi_{kn}(\nu, \lambda_1, x_3, x_4) \quad (3.1.13)$$

Tak więc, jeśli jest zadany materiał, z którego wykonana jest płyta oraz zadane są rozmiary geometryczne wybrania materiału, to:

$$\psi_{kn}(\nu, \lambda_1, x_3, x_4) = \text{const.} \quad (3.1.14)$$

Jeśli wymiary wgłębień (wybrań materiału) zmieniają się, to:

$$\psi_{kn} = \psi_{kn}(x_3, x_4) \quad (3.1.15)$$

i wówczas:

$$\omega_n^0 = \psi_{kn}(x_3, x_4) \omega_n \quad (3.1.16)$$

Przeprowadzając podobną analizę dla płyty z wieloskładnikową niejednorodnością, można wykazać, że funkcja ψ_{kn} w tym przypadku będzie zależeć od wszystkich czynników niejednorodności, tj.

$$\psi_{kn} = \psi_{kn}(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (3.1.17)$$

gdzie $x_1, x_2, \dots, x_7$ są składnikami (parametrami) niejednorodności.

Wzór podobny do (3.1.17) może być otrzymany również dla powłoki.

A zatem określenie widma częstości drgań konstrukcyjno niejednorodnej płyty lub powłoki może być wyznaczone poprzez widmo częstości drgań płyty ciągłej lub powłoki i funkcji ψ_{kn} , które w przypadku ogólnym zależą od wszystkich parametrów niejednorodności i przedstawiają funkcję wielu zmiennych, określaną na drodze eksperymentalnej.

Zadanie określania takich funkcji dla różnego rodzaju niejednorodności płyt i powłok jest wprawdzie złożone, ale konieczne zarówno ze względów teoretycznych jak i praktycznych. Zbiór takich funkcji i ich klasyfikacja może znacznie uprościć analizę drgań konstrukcyjno niejednorodnych płyt i powłok.

Celowym jest rozbić procesu określenia funkcji ψ_{kn} na 2 etapy:

- a) z jednoskładnikową niejednorodnością;
- b) z wieloskładnikową niejednorodnością.

Każdemu etapowi odpowiada określona metoda wyznaczenia ψ_{kn} . W szczególności, przy wieloskładnikowej niejednorodności zaleca się wykorzystywać metodę planowego eksperymentu [52], pozwalającą przy pomocy niewielu eksperymentów na określenie potrzebnych funkcji dla praktycznie dowolnych składników niejednorodności. Rozpatrzymy obecnie szczegółowo metody określania funkcji ψ_{kn} w zależności od klasy niejednorodności.

A. Niejednorodność jednoskładnikowa

W tym przypadku funkcje niejednorodne mogą być określone poprzez prowadzenie niezbyt złożonych eksperymentów na małej ilości próbek (a nawet tylko na jednej). Zmieniając interesujący nas składnik niejednorodności, otrzymamy na płaszczyźnie szereg punktów eksperymentalnych. Obróbka matematyczna otrzymanych danych eksperymentalnych znanymi metodami [32], pozwala na określenie charakteru funkcji ψ_{1n} . Wielu badaczy określało ψ_{1n} poprzez stałe, co ograniczało znacznie klasę badanych układów. Jak już wcześniej

wspomniano, w pracy [28] podano także funkcje dla otworów (wierceń) w płytach o postaci okręgu, rombu, kwadratu i elipsy:

$$\begin{aligned}\psi_{11}\left(\frac{a_0}{a}\right) &= \begin{cases} 1 + 1,51 \frac{a_0}{a} & , \quad 0 \leq a_0/a \leq 0,4 \\ 1 + 29,5 \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 & , \quad 0,4 \leq a_0/a \leq 0,8 \end{cases} \\ \psi_{11}\left(\frac{\varrho_0}{a}\right) &= \begin{cases} 1 + 1,925 \frac{\varrho_0}{a} & , \quad 0 \leq \varrho_0/a \leq 0,4 \\ 1 + 11,3 \left(\frac{\varrho_0}{a}\right)^{2,92} & , \quad 0,4 \leq \varrho_0/a \leq 1,0 \end{cases} \\ \psi_{11}\left(\frac{a_0}{a}\right) &= \begin{cases} 1 + \frac{a_0}{a} & , \quad 0 \leq a_0/a \leq 0,4 \\ 1 + 1,67 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1,542} & , \quad 0,4 \leq a_0/a \leq 1,0 \end{cases} \\ \psi_{11}\left(\frac{c}{a}\right) &= \begin{cases} 1 + 0,71 \frac{c}{a} & , \quad 0 \leq c/a \leq 0,4 \\ 1 + 3,84 \left(\frac{c}{a}\right)^{2,84} & , \quad 0,4 \leq c/a \leq 0,8 \end{cases} \quad (3.1.17a)\end{aligned}$$

Należy podkreślić, że podane wzory niedostatecznie dokładnie opisują rezultaty eksperymentów w obszarze początkowym. W szczególności, nie opisują one obserwowanego obniżenia wartości częstości badanych płyt niejednorodnych przy małych niejednorodnościach. Podane w pracy [73] związki dla płyt niejednorodnych także posiadają tę wadę. Jednak dla większości zadań funkcje ψ_{kn} nie zostały jeszcze określone i wymagają one dalszych badań.

B. Niejednorodność wieloskładnikowa

Do tego typu niejednorodności odnoszą się zadania badania drgań płyt perforowanych i powłok [71, 74]. Niewiele tego typu zadań doczekało się jak dotąd rozwiązania. Wyniki tych badań nie mogą być uogólnione na inne rodzaje niejednorodności. W tym przypadku zastosowanie metody teoretyczno-eksperymentalnej prowadzi do drastycznego zwiększenia objętości badań doświadczalnych (w porównaniu do analizy niejednorodności jednoskładnikowej). Wykorzystując metody planowego eksperymentu, można istotnie

zwiększyć jego dokładność przy zachowaniu tej samej ilości doświadczeń lub skrócić objętość badań (nawet 10 razy), uzyskując wymaganą dokładność [52, 53]. Optymalne wykorzystanie przestrzeni niezależnych zmiennych - to jedna z zasadniczo nowych idei, którą wprowadziła statystyka matematyczna stosowana do obróbki danych. Dla przykładu rozpatrzmy prosty model liniowy teorii eksperymentu. W tym przypadku plan jednoskładnikowego eksperymentu dla określenia dowolnego parametru dla trzech próbek wygląda następująco [52] :

Tabela 3.

PLANOWANIE EKSPERYMENTU JEDNOSKŁADNIKOWEGO.

lp	A	B	C	Wynik pomiarów	Uwagi
doświadczalne wyznaczanie parametrów					
1	-1	-1	+1	$y_0 + 1$	- wskazuje na pomiary
2	+1	-1	-1		
3	-1	+1	-1	y_2	- brak pomiarów
4	-1	-1	+1		

Natomiast dyspersja rezultatów pomiaru parametru (A) ma postać:

$$\sigma^2\{A\} = \sigma^2\{y_1 - y_0\} = 2\sigma^2\{y\} \quad (3.1.18)$$

gdzie $\sigma^2\{y\}$ oznacza błąd pomiaru parametru.

W przypadku wieloskładnikowego eksperymentu postępuje się w sposób przedstawiony w tabeli 4.

Tabela 4.

PLANOWANIE EKSPERYMENTU WIELOSKŁADNIKOWEGO.

Nr doświadczenia	A	B	C	Wynik pomiaru parametrów
1	-1	-1	+1	y_0
2	+1	-1	-1	y_2
3	-1	+1	-1	y_3
4	+1	-1	+1	

W tym przypadku dyspersja, związana z błędem przeprowadzenia eksperymentu, wynosi (dla przypadku (A)) :

$$\sigma^2\{A\} = \sigma^2\left\{\frac{-y_1 + y_2 - y_3 + y_4}{4}\right\} = \frac{4\sigma^2}{4} = \sigma^2\{y\} \quad (3.1.19)$$

Widać, że przy nowym schemacie pomiarów błąd otrzymuje się dwukrotnie mniejszy niż w przypadku eksperymentu jednoskładnikowego.

Zastosowanie metod eksperymentu planowego wykorzystuje się jeszcze w stopniu niedostatecznym w zadaniach mechaniki ciała odkształcalnego (patrz cykl prac podany w [107]). Stosowanie metody planowego eksperymentu w teoretyczno-eksperymentalnej metodzie może prowadzić nie tylko do dobrych rezultatów, ale pozwala na istotne uproszczenia procedury otrzymania koniecznych dla praktyki przybliżonych zależności dla oszacowania widma częstości drgań płyt i powłok.

3.2. Opis stanowisk doświadczalnych

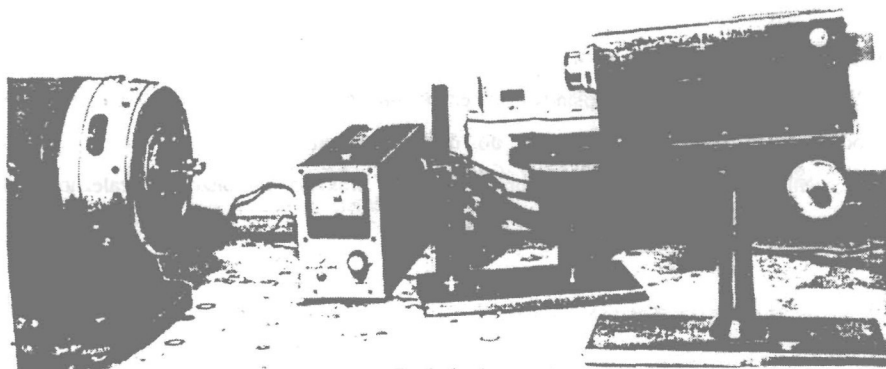
W tym paragrafie opisane zostaną przykłady stanowisk doświadczalnych opartych na trzech metodach z wykorzystaniem laseru: a) wykorzystanie „efektu cętkowania” światła laserowego; b) laserowej interferometrii; c) holograficznej z różnorodnymi modyfikacjami [79, 81, 82].

Na bazie przedstawionych stanowisk określono podstawowe charakterystyki drganiowe elementów PTE w paśmie częstości do 20 kHz. Należą do nich: częstości drgań własnych (rezonansowych), rozkład amplitud drgań wzdłuż powierzchni badanego elementu oraz jego charakterystyka amplitudowo- częstościowa.

A. Stanowisko oparte na wykorzystaniu zjawiska cętkowania

W celu oceny widma częstości rezonansowych i analizy postaci drgań wykonano stanowisko z zastosowaniem „efektu cętkowania” światła laserowego (rys. 7). Zasada pracy tego stanowiska i niektóre wyniki otrzymane eksperymentalnie szczegółowo zostały opisane w pracy [79]. Stanowisko pozwala na określenie (z bardzo wysoką dokładnością) częstości rezonansowych badanych elementów oraz lokalizację miejsc o największych amplitudach drgań. Stanowisko składa się z dwóch bloków: bloku związanego z oświetleniem i bloku obserwacji. Do stanowiska tego może być łatwo dołączony wzбудnik drgań, wzбудzający drgania w kierunku zarówno poziomym jak i pionowym. W drugim przypadku stosuje się dodatkowe lustra do zmian kierunku ruchu promieni. W naszym przypadku obydwie bloki

ulożone były na stole laboratoryjnym. Ogólny widok stanowiska przedstawiono na rys. 8. Blok oświetlenia składa się z laseru (4) typu LG-38 i wymienników, rozszczepiających promienie światła soczewki (3). Obiekt (2) mocowany jest na stole wibracyjnym (1). Blok śledzenia składa się z układu teleskopowego (5), przymocowanego do regulowanego stolika naprowadzającego na obiekt badań.



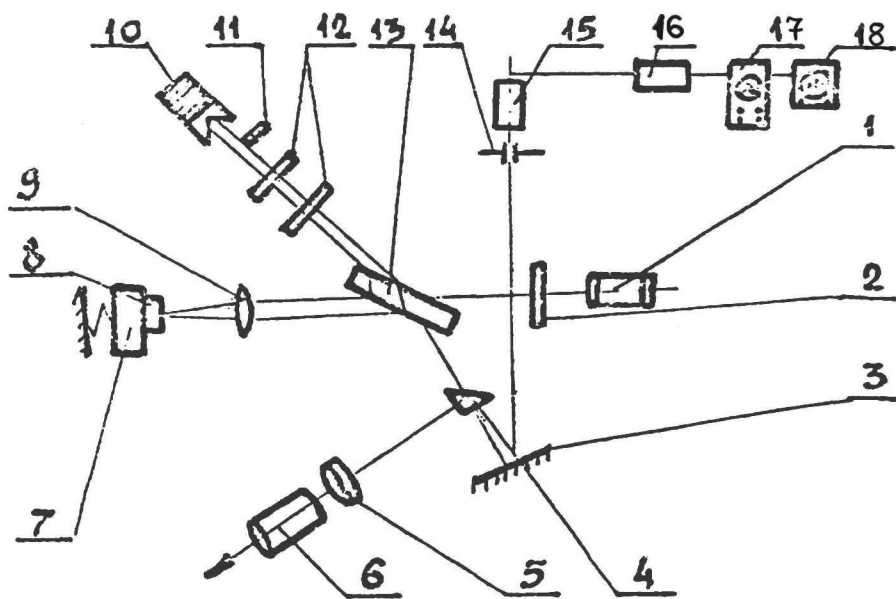
Rys. 8. Widok ogólny stanowiska do rejestracji prążków holograficznych.

W celu ustawienia obiektu w polu widzenia i rozogniskowania płaszczyzny obserwacji względem powierzchni obiektu, obiektów może być przesuwany w szerokich przedziałach (do 100 mm) wzdłuż osi optycznej względem okularu nieruchomego. Wielkości prążków o rozmiarach średnich, wygodne dla obserwacji, ustalane są przy pomocy zmian średnicy wejściowej „żrenicy” układu optycznego. Przewidziana została również możliwość mocowania aparatu fotograficznego w celu wykonania zdjęć prążków.

B. Stanowisko interferometrii laserowej

Stanowisko to zbudowano przy użyciu zestawów kwantowej elektroniki, a jego schemat przedstawiono na rys. 9. Optyczny schemat stanowiska składa się z interferometru Michelsona, źródła światła koherentnego wytwarzanego przez kwantowy generator optyczny (OKG). Promień z OKG (1) rozszczepia się na półprzezroczystym zwierciadle (13) na dwa promienie - oporowy i sygnałowy. Promień sygnałowy poprzez układ ogniskujący (9) kierowany jest na badany element (8), który jest przymocowany do piezoelektrycznego stołu wibracyjnego (7), wzbudzanego generatorem dźwiękowym (5). Odbite od badanego elementu światło zbierane jest poprzez układ ogniskujący na fotodetektor (15), gdzie również dociera

światło oporowe, którego intensywność może być regulowana w szerokim zakresie filtrem świetlnym (12).



Rys. 9. Schemat optyczny interferometru :

1 - laser; 2 - filtr neutralny; 3 - lustro; 4 - pryzmat; 5 - soczewka; 6 - okular;
7 - stanowisko wibracyjne; 8 - obiekt; 9 - soczewka; 10 - piezoelektryk; 11 - przesłona; 12 - polaroidy;
13 - pryzmat; 14 - diafragma; 15 - fotomnożnik; 16 - wzmacniacz; 17 - oscylograf; 18 - analizator.

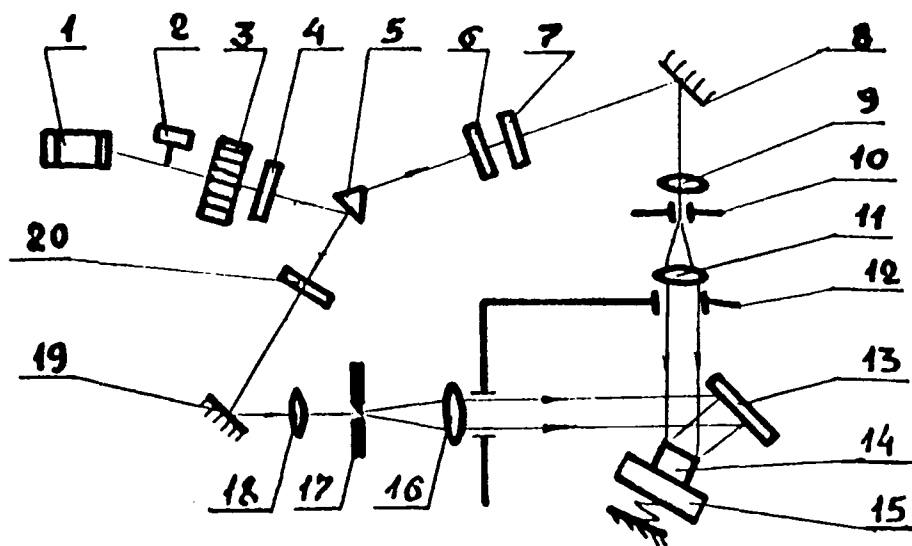
Przy pomocy fotodetektora rejestrowany jest sygnał charakteryzujący częstość różnicy między tymi światłami, dostarczając tym samym informacji o badanym procesie. Sygnał z wyjścia fotodetektora może być podawany na elektroniczny oscylograf (17), przy czym obserwuje się sygnał amplitudowo- częstościowy, dostarczający informacji o częstości i amplitudzie drgań badanego elementu. W celu podwyższenia czułości i zwiększenia stosunku „sygnał - szum” sygnał z wyjścia fotodetektora wysłany jest na wąskopasmowy wzmacniacz (16), a następnie na oscylograf (17), jak również na niskoczęstotliwościowy analizator widma (18). Opisany wyżej układ optyczny został zamontowany na płycie kontrolnej o rozmiarze 450 × 600 mm, która jest podparta na amortyzatorach. Wszystkie elementy optyczne, interferometry, mocowane są w regulowanym łożyskowaniu, pozwalającym na zmianę kątów obrotu elementów w dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyznach. Na tej płycie znajduje się laser LG-18 i stanowisko z piezoelektrykiem. Na platformie stanowiska wibracyjnego przymocowany jest czujnik

piezoelektryczny przyspieszeń typu IS-313, sygnał z którego jest kontrolowany poprzez woltomierz lampowy typu B3-3. Cała aparatura pomiarowa, aparatura rejestrująca i bloki zasilające są rozmieszczone na osobnym stanowisku. W celu obserwacji procesów stosowany był dwukanałowy oscylograf typu C1-16, przy czym na jeden kanał podawany był sygnał badanego procesu, a na drugi - sygnał ze stanowiska wibracyjnego. Otrzymany w ten sposób oscylogram jest bardzo użyteczny przy określaniu parametrów drgań. Na stanowisku można było dokonywać pomiaru amplitudy drgań w „punkcie” o wymiarze $5 \div 30 \mu\text{m}$, w przedziale $0,01 \div 20 \mu\text{m}$ i z dokładnością $0,5 - 1 \%$ w przedziałach częstości $20 - 10000 \text{ Hz}$. Zainstalowany schemat elektroniczny pozwala na automatyzację procesu obliczeń liczby cykli sygnału wyjściowego fotomnożnika, niosących informację o amplitudzie drgań.

C. Stanowisko holograficznej interferometrii

W tym przypadku, jeśli badacza interesuje rozkład amplitud drgań na całej powierzchni badanego obiektu (pole drgań), wydaje się celowym i uzasadnionym stosowanie metod holograficznych. Zaprojektowane i zbudowane uniwersalne stanowisko holograficzne pozwala na realizację, oprócz klasycznej metody Powella- Statsone'a [58], również metody uśrednienia w czasie ze względu na realny czas obserwacji [15, 16] i metodę strobografii. Zastosowanie i wybór którejsz z opisanych metod zależy od charakteru eksperymentu. Schemat optyczny stanowiska pokazano na rys. 10. Światło z laseru (1), przechodząc przez elektromagnetyczną zasuwę (2), ultradźwiękową przegrodkę (3) i półfalową płytkę (4), pada na pryzmę rozszczepiającą (5). Światło odbite od przedniej krawędzi pryzmy tworzy strumień światła oporowy, a strumień przechodzący przez pryzmę - strumień światła podstawowy. Strumień oporowy przechodzi przez polaroid (20), odbija się od lustra (19), zostaje rozszerzony przez układ teleskopowy złożony z mikroobiektywu (18), diafragmy (17) i soczewki (16) i pada na hologram (13). Strumień podstawowy, przechodząc przez płytkę półfalową (6), polaroid (7), po odbiciu od lustra (8) i po rozszerzeniu w układzie teleskopowym (8, 10, 11) oświetla badany obiekt (14). Rozproszone poprzez obiekt światło jest rejestrowane na hologram (13). Maskownice (12) odgradzają obiekt i hologram od naświetlania ich szkodliwymi promieniami pochodzącymi od odbić w układzie optycznym. Dobra jakość (kontrastowość) interferogramu w płaszczyźnie rejestracji zależy od różnicy optycznej interferujących wiązek. Dlatego też układ optyczny zbudowany jest w ten sposób, aby różnica optyczna wiązki od jednostki rozszczepiającej (5) do hologramu wynosiła przykładowo zero. Ale ponieważ różnica taka dla stosowanego laseru LG-38 mogła się

zmieniać w przedziale 20 cm bez pogorszenia kontrastu interferogramu, to zapewniono możliwość zmian położenia obiektu w zależności od jego rodzaju oraz reżimu pracy układu.



Rys. 10. Schemat optyczny holograficznej interferometrii :

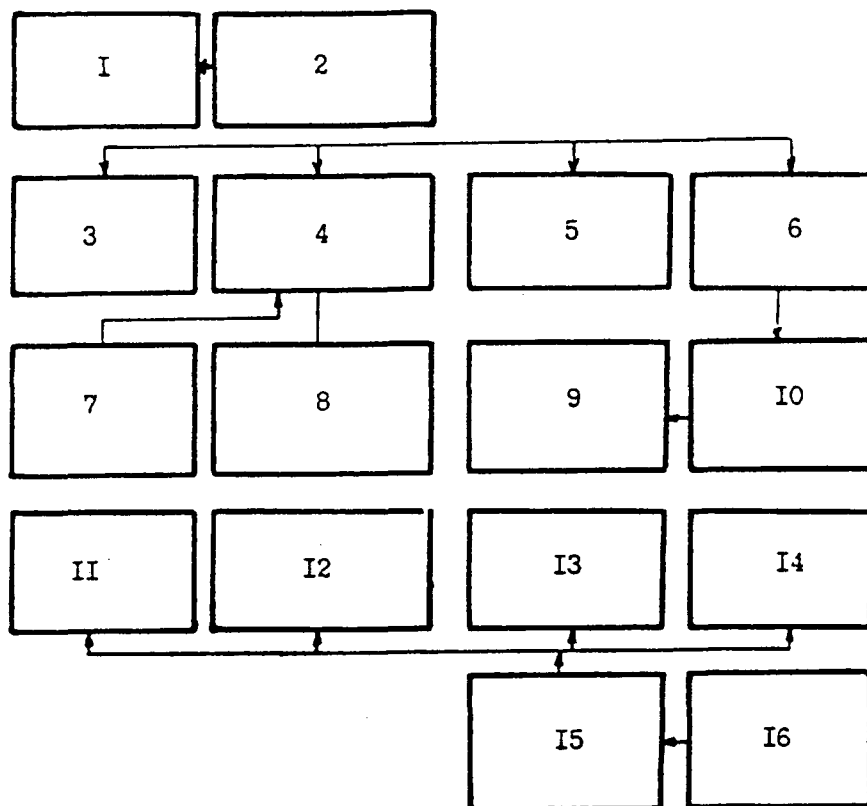
- 1 - laser; 2 - migawka; 3 - przegródka ultradźwiękowa; 4,6,7 - polaroidy; 5 - pryzmat;
- 8 - lustro; 9 - soczewka; 10 - przesłona; 11 - soczewka; 12 - ekran; 13 - hologram;
- 14 - badany obiekt; 15 - stanowisko wibracyjne; 16 - soczewka; 17 - diafragma;
- 18 - soczewka; 19 - lustro; 20 - filtr neutralny.

Aby otrzymać jakościowo dobrą rejestrację interferującej struktury koniecznym jest utrzymywanie określonego stosunku intensywności wiązek podlegających interferencji. Realizuje się to poprzez wprowadzenie elementów (4, 5, 6, 7, 20). Laser wysyła wąską wiązkę światła o średnicy 2-3 mm. W wiązce podstawowej podlega ono rozszerzeniu za pomocą układu teleskopowego składającego się z mikroobiektywu (9) ($40\times$) i długoogniskowej soczewki 11 ($l = 15\text{cm}$, 5cm). Ogniska obydwu soczewek są przesunięte w celu otrzymania wiązki skupionej. Jest to potrzeba dla dobrej interpretacji interferogramów. Przyrząd kolimatora odróżnia się od tradycyjnego poprzez wprowadzenie w ognisko mikroobiektywu punktowej diafragmy (10). Rola punktowej diafragmy polega na przestrzennej filtracji fal świetlnych (z małego otworu wydostaje się idealna fala sferyczna). Diafragma punktowa posiada otwór $D_g = 10\text{ }\mu\text{m}$. Oczywiście, że zerowanie położenia otworu powinno być przeprowadzone bardzo dokładnie zarówno w kierunku poprzecznym, jak i wzdłużnym. Dlatego diafragma mocowana jest w przyrządzie posiadającym trzy stopnie swobody i

zerowanie realizuje się przy pomocy mikrogwintów. W wiązce oporowej układ teleskopowy jest identyczny z wcześniej opisanym. Przy strobolograficznym reżimie pracy stanowiska konieczne jest zsynchronizowanie drgającego obiektu. Osiąga się to przy wykorzystaniu zjawiska dyfrakcji światła na fali akustycznej, będącej okresowym rozłożeniem rozciągania i ściskania ośrodka. Fala akustyczna wytwarza się w specjalnej kuwecie, wypełnionej destylowaną wodą. Kuweta ta (ultradźwiękowa skrzynka) wykonana została z duraluminium ze szklanymi oknami dla przejścia wiązki światła laserowego. Z jednej strony kuwety przymocowano piezoelektryczną wytwornicę (piezoceramika, $40 \times 40 \times 1 \text{ mm}$), a z drugiej strony znajduje się pochłaniacz ultradźwięków z poliuretami, konieczny dla utrzymania reżimu fali biegnącej.

Podczas pracy w reżimie czasu rzeczywistego należy umieścić hologram w miejscu ekspozycji z dokładnością do długości fali światła ($0,63 \mu\text{m}$). Aby uporać się z tym problemem w układzie przewidziano dodatkowe mocowania. Aby można było dokonać dobrej interpretacji interferogramów należy, określić kąty pomiędzy wiązkami światła i obiektem, do czego posłużył specjalnie skonstruowany przyrząd pomiarowy. Schemat blokowy części elektrycznej stanowiska przedstawiony został na rys. 11. Jako źródło światła posłużył helowo-neonowy laser (2) o działaniu ciągłym i mocy 50 MW typu LG-38 z blokiem zasilającym SBP/16M (1). Długość fali światła wynosiła $\lambda_{\lambda} = 6328 \text{ \AA}$. Drgania badanych obiektów wymuszane były przy pomocy wzbudników piezoelektrycznych, składających się ze stalowej podstawy z naklejonym piezoelektrycznym słupkiem (CTS- 1950 $\times$ 1mm). Kontrola przyspieszenia drgań realizowana była przy pomocy wibrocujnika typu IS (14). Wzbudnik piezoelektryczny zasilany był generatorem dźwięku typu G3-33 (7). Sygnał z tego generatora wysyłany był również na modulator (4), gdzie również podawane było napięcie o bardzo wysokiej częstotliwości (5,4 MHz) z generatora G3-41 (8). Modulator służył do zabezpieczenia: a) modulacji napięcia wysokoczęstotliwościowego generatora (7) przed jego wysyłaniem na skrzynkę ultradźwiękową (5) poprzez impulsy prostokątne, zsynchronizowane poprzez sinusoidalne napięcie generatora dźwięku (8); b) powstawania krótkich znormalizowanych impulsów z częstotliwością napięcia generatora dźwięku, podawanych na częstotściomierz (3). Dla wygody modulator utrzymywał stałą amplitudę na wejściu do częstotściomierza niezależnie od napięcia na wyjściu dźwiękowego generatora. Przedział częstotliwości wytwarzanych przez modulator impulsów światła był mniejszy od $1,8 \mu\text{s}$. Blok regulacji (15) realizował następujące zadania: pomiar natężenia światła w wiązkach podstawowej i oporowej; regulował obrotem półfalowej płytki

oraz zadawał czas ekspozycji. Czas ekspozycji mógł być realizowany przy pomocy bloku regulacji w przedziale od 0,1 do 180 s.



Rys. 11. Schemat blokowy części elektrycznej stanowiska holograficznego :

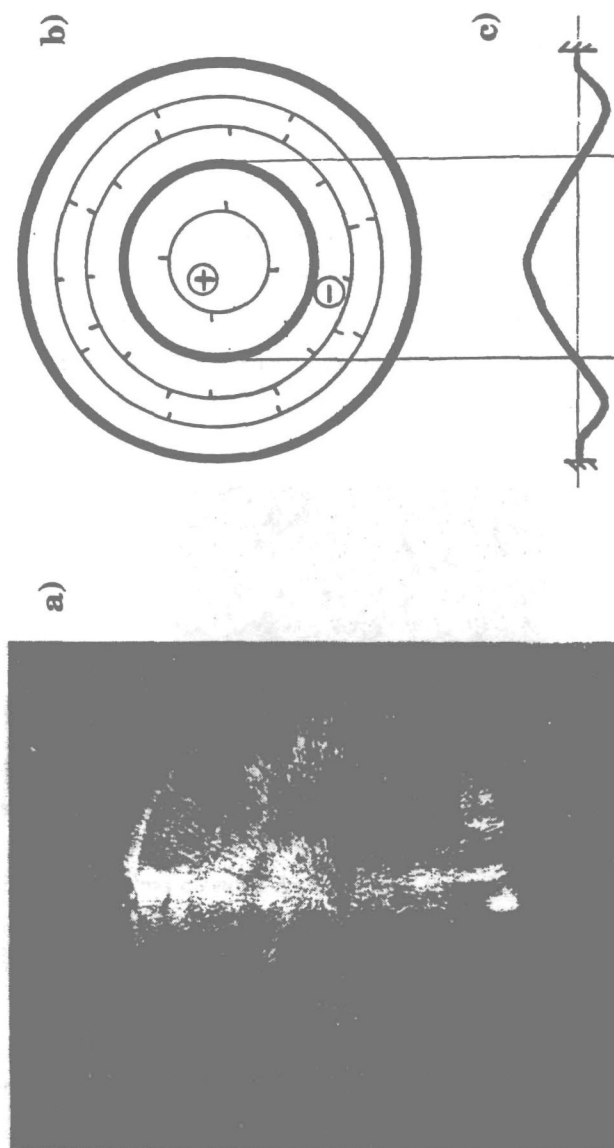
- 1 - blok zasilania laseru; 2 - laser; 3 - częstotściomierz; 4 - modulator; 5 - przegródka ultradźwiękowa;
6 - stanowisko wibracyjne; 7 - generator wysokiej częstotliwości; 8 - generator dźwięku;
9 - miernik drgań; 10 - czujnik drgań; 11 - migawka elektromagnetyczna; 12 - fotodioda 1;
13 - fotodioda 2; 14 - ziemia; 15 - schemat regulacji; 16 - pulpit sterujący.

3.3. Metody badań eksperymentalnych

Obecnie na bazie wcześniej opisanych stanowisk do badań doświadczalnych rozpatrzmy metody prowadzące do uzyskiwania niezbędnych informacji o procesie drgań.

A. Metoda oparta na wykorzystaniu „efektu cętkowania”

Na stanowisku do obserwacji diagramów cętkowanych (prążków) można uzyskać następujące informacje: a) określenie częstości rezonansowych; b) otrzymanie przestrzennych postaci drgań oraz możemy c) dokonać pomiarów amplitud drgań w izolowanych punktach. Określenie częstości rezonansowych przeprowadzono w oparciu o następującą metodę. Podczas zmian częstości wymuszenia obserwowano zmiany prążków. Częstości rezonansowe określano wg maksymalnego wydłużenia szeregu prążków, wydłużających się do kresek. Według skali częstotliwościomierza (dokładnie) lub według skali bloku generatora wzbudnika (zgrubnie) określano poszukiwane wartości częstości rezonansowej. Przy dostrajaniu się do rezonansu wygodnie jest śledzić dowolnie wybrany prążek (kreskę). Dokładność pomiaru częstości wynosiła $1 \div 10$ Hz w przedziale 20-10000 Hz w zależności od „dobroci” badanego elementu. Podczas drgań badanego obiektu w zakresie różnych częstości obraz prążków zmieniał się. Jeśli nie było drgań giętnych, to na powierzchni obiektu obserwowano oddzielne punkty. Przy pojawieniu się zginania punkty te „rozciągały” się do linii (kresek). Ponadto, w każdym punkcie powierzchni obiektu kierunek kreski odpowiadał kierunkowi gradientu powierzchni w skrajnym położeniu przyjmowanym podczas drgań. Długość kreski była proporcjonalna do wielkości tego gradientu, tj. czym większe ugięcie powierzchni, tym dłuższa była kreska. Metoda obróbki rezultatów doświadczalnych jest podobna do metody odbić wstęg morowych. Prowadząc linie, prostopadłe do kresek o równej długości, otrzymujemy linie odpowiadające jednakowym kątom pochylenia powierzchni (relief powierzchni), dzięki którym dostarczana jest informacja o postaciach drgań obiektu. Wypukłości, punkty siodłowe i miejsca bliskie mocowań, posiadają własności miejsc prążków niewymuszonych. Wypukłości i punkty siodłowe łatwo odróżniają się charakterem kresek w ich okolicach. W przypadku wypukłości (i miejsc mocowań) kreski schodzą się ze wszystkich stron, natomiast w pobliżu punktów siodłowych kreski wyginają się i zbliżają się do nich swymi wypukłościami. Na rys.12 podano przykład układu prążków pierwszego obiektu badań (okrągłej płyty) i odpowiadającą mu postać drgań.

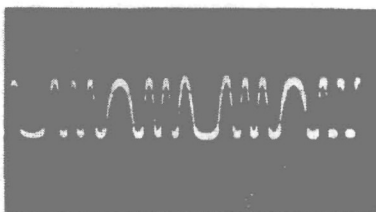


Rys. 12. Przykład hologramu prążkowego okrągłej płytki (a), jej obróbki (b) i otrzymanej postaci drgań (c) przy częstotliwości 2000 Hz.

W celu określenia amplitudy drgań oddzielnych punktów obiektu konieczny jest pomiar długości kresek w wielu punktach powierzchni i następnie cyfrowe całkowanie otrzymanych rezultatów wzdłuż pewnej krzywej na powierzchni obiektu. Jest to stosunkowo złożone zadanie, i dlatego rozwiązuje się je tylko w przypadkach szczególnych i zwykle dla prostych obiektów typu belki. Błąd określenia amplitudy wynosi 20÷30 %. W celu poprawienia dokładności obliczeń poniżej podane zostały inne metody.

B. Metoda laserowej interferometrii

Podczas pracy na stanowisku laserowej interferometrii mogą być wykorzystane dwa bloki: a) schemat N1 - wtedy, gdy sygnał z wyjścia fotodetektora przesyłany jest na oscylograf oraz b) schemat N2 - gdy dla podwyższenia czułości i zwiększenia stosunku „sygnał - szum” sygnał z wyjścia przesyłany jest na wąskopasmowy wzmacniacz i dalej na oscylograf, a także na niskoczęstotliwościowy analizator widma.



Rys. 13. Przykład oscylogramu uzyskanego przy pomocy metody interferometrii
($N = 3$; $A = 0,5537 \mu\text{m}$; $f = 2800 \text{ Hz}$).

Podczas pracy wg schematu N1 rejestrowany sygnał ma postać przedstawioną na rys. 13 i może być opisany równaniem:

$$\alpha_{\Lambda} = b_{\Lambda} J_1(mA) \quad (3.3.1)$$

gdzie

α_{Λ} - sygnał wyjściowy określający częstotliwości pomiaru różnicy przejścia światła;

b_{Λ} - stała proporcjonalna do $\sin K_0 \delta_0$, gdzie δ_0 oznacza średnie znaczenie różnicy przejścia;

$J_1(mA)$ - jest funkcją Bessela pierwszego rzędu ze względu na argument mA ,
gdzie A jest poszukiwaną amplitudą drgań.

Obróbka rezultatów badań dla tego przypadku jest następująca. Amplitudę drgań określa się poprzez miejsca zerowe funkcji Bessela [18]. Następnie buduje się charakterystykę amplitudowo-częstotściową badanego elementu. Porównując ją z charakterystyką

amplitudowo-częstotliwościową stołu wibracyjnego określa się wartości częstotliwości rezonansowej i amplitudy drgań badanego obiektu.

Na rys.13 podano przykład oscylogramu jednego z elementów PTE. Obróbkę oscylogramów, otrzymanych wg schematu N2 przeprowadza się wg formuły:

$$A = \frac{2n+1}{8} \lambda_{\lambda} \quad (3.3.2)$$

gdzie

A - amplituda drgań (μm);

λ_{λ} - długość fali światła laserowego (w naszym przypadku $\lambda_{\lambda} = 0,6328 \mu\text{m}$);

n - liczba pełnych okresów sygnału częstotliwościowo modulowanego.

Dla powierzchni odbitych zwierciadlanie minimalna amplituda zarejestrowanych drgań była rzędu $0,05 \lambda_{\lambda}$. Dla dyfuzyjnie odbitych powierzchni, czułość znacznie się obniżała w związku z naruszeniem przestrzennej koherencji odbitego światła. W tym przypadku dolna granica rejestrowanych amplitud była rzędu $0,1 \div 0,2 \lambda_{\lambda}$.

C. Metoda holograficznej interferometrii

Metoda opisana w punkcie 3.3 daje możliwość otrzymywania holograficznych interferogramów 3 rodzajów. Procedury ich otrzymywania i interpretacji nieco różnią się od siebie i zostaną opisane oddzielnie.

METODA HOLOGRAFII Z UŚREDNIENIEM W CZASIE

Główną cechą charakterystyczną tej metody jest to, że czas ekspozycji hologramu wielokrotnie przewyższa okres drgań obiektu. Na fotopłytkę tworzy się „uśredniony” ze względu na okres drgań obiektu, hologram. Przed ekspozycją hologramu koniecznym jest określenie interesującej nas częstotliwości drgań obiektu, tj. koniecznym jest określenie przedtem częstotliwości rezonansowych dowolną z opisanych wcześniej metodą, np. metodą prążków podaną w p. 3.3. Ekspozycja fotopłytki następuje w specjalnej ruchomej kasecie pozwalającej na zapis na jednej fotopłytkie ok. 10 postaci rezonansowych drgań. Obrobiona fotopłytkę może być badana przy zastosowaniu dowolnej wiązki światła laserowego i posiadającą tę samą konfigurację i orientację względem tej płytki, co i światło oporowe podczas rejestracji. Najprościej ustawić jest płytkę w tym samym miejscu, w którym znajdowała się ona podczas ekspozycji - obserwuje się przy tym obraz interferencyjny na powierzchni obrazu obiektu. W celu określenia interesującej nas projekcji amplitudy w danym punkcie konieczne jest dokonanie pomiaru kąta φ (kąt określony kierunkami oświetlenia i obserwacji) i

przeprowadzenie obliczenia liczby pasemek (N) pomiędzy węzłem (miejszem nieruchomym) części obiektu i tym punktem. Za jedno pasmo (rząd interferencji) przyjmuje się odległość pomiędzy sąsiednimi oświetlonymi pasmami (a ściślej między ich średnimi położeniami). Linie węzłowe charakteryzują się najbardziej jasnymi miejscami (pasmami). Projekcja amplitudy drgań na dwusieczną kąta φ określa się wg przybliżonego wzoru [15]:

$$A_1 = \frac{\lambda_1}{4 \cos \varphi} \left(N + \frac{1}{4} \right) \quad (3.3.3)$$

Błąd określenia A_1 w tym przypadku nie przewyższa 1% dla $N < 6$ i 0,1% dla $N \geq 6$. W przypadku obliczeń dotyczących pasm ciemnych wzór (3.3.3) przyjmuje postać:

$$A_1 = \frac{\lambda}{4 \cos \varphi} \left(N^* - \frac{1}{4} \right), \quad (3.3.4)$$

gdzie N^* oznacza liczbę pasemek ciemnych.

Za pierwsze ciemne pasmo przyjmuje się to, które leży najbliżej najbardziej jasnego pasma (zerowego). W przypadku drgań giętych płyt i powłok rzut A_1 pokrywa się z wielkością amplitudy drgań punktów płyty lub powłoki.

Opisana wyżej metoda jest wygodna w użyciu przy małej liczbie pasemek $N < 10$. Przy dużej liczbie pasm pojawiają się problemy związane z niejednoznacznością przy określaniu amplitudy, ponieważ dla sąsiednich pasemek z dużymi numerami kontrast jest niewielki i nie można jednoznacznie określić, czy następne pasma układają się w kierunku malenia lub też wzrostu amplitudy. Mówiąc inaczej, stosując interferometrię holograficzną z uśrednieniem w czasie niemożliwe jest jednoznaczne określenie położenia wzgórków drgań, chociaż umożliwia ona jednoznacznie określić położenie węzłów drgań.

METODA HOLOGRAFII Z UŚREDNIENIEM W CZASIE - OBSERWACJA W CZASIE RZECZYWISTYM

Według tej metody wykonuje się hologram nieruchomego obiektu, przy czym w czasie ekspozycji fotopłytką leży w miejscu ekspozycji, wypełnionym destylowaną wodą. Płytką „obrabiana” jest w miejscu ekspozycji i obserwuje się obraz interferencyjny między powstałym na bazie hologramu przedmiotem nieruchomym i realnie drgającym obiektem. Amplitudę drgań w tym przypadku określa się (podobnie jak poprzednio) poprzez obliczenie liczby pasemek i pomiar kąta φ wg wzoru [15]:

$$A_1 = \frac{\lambda}{2 \cos \varphi} \left(N - \frac{3}{8} \right), \quad (3.3.5)$$

gdzie N oznacza numer jasnego pasemka, lub:

$$A_1 = \frac{\lambda}{2 \cos \varphi} \left(N^* + \frac{1}{8} \right), \quad (3.3.6)$$

gdzie N^* oznacza numer ciemnego pasemka.

Błędy wzoru (3.3.5) nie przewyższają 1% przy $N \geq 2$ i 0,1% przy $N \geq 3$; wzór (3.3.6) daje 1% przy $N^* \geq 1$ i 0,1% przy $N^* \geq 3$.

Opisana metoda w odróżnieniu od poprzedniej, pozwala na określenie miejsca wypukłości drgań. W tym celu należy obserwować zachowanie się prążków obrazu interferencyjnego przy zmianach w niewielkich przedziałach poziomu wzbudzenia drgań. Prążki zaczynają się ruszać, z wyjątkiem prążka zerowego. Przy wzroście wzbudzenia w węzłach i wypukłościach pojawiają się nowe prążki i wszystkie one przemieszczają się od wypukłości do węzła. Szczególną zaletą tej metody jest to, że na podstawie tylko jednego hologramu, można określić wszystkie częstotliwości rezonansowe danego obiektu. Przeprowadzając dokładne dostrojenie do rezonansu, można łatwo przejść do reżimu strobolograficznego (opisanego niżej), który pozwala na szczegółową analizę drgań.

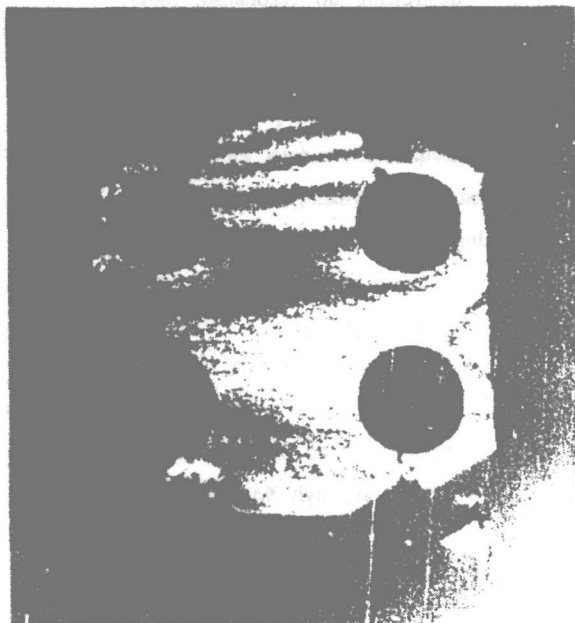
METODA STROBOLOGRAFII

Podobnie jak w metodzie poprzedniej należy najpierw zarejestrować hologram nieruchomego elementu i następnie otrzymaną fotopłytkę obrabiać w miejscu ekspozycji. Cała różnica między tą i poprzednią metodą sprowadza się do tego, że w tym przypadku w czasie obserwacji obrazu interferencyjnego włączony jest modulator światła, zabezpieczający strobolograficznie oświetlenie, zsynchronizowane z drganiami obiektu. Faza impulsu światła względem drgań obiektu może być odpowiednio ustalona, bowiem w niektórych przypadkach (gdy impuls światła włącza się w momencie przejścia powierzchni obiektu przez zerowe wibroprzemieszczenie) nie obserwuje się żadnego obrazu interferencyjnego. Fazę impulsu świetlnego ustala się w ten sposób, aby były widoczne wyraźnie prążki i ich liczba była maksymalna.

W tym przypadku amplituda drgań określa się wg wzoru [15]:

$$A_1 = \frac{\lambda N}{2 \cos \varphi} \quad (3.3.7)$$

Podliczanie prążków i pomiar węzłów przeprowadza się w sposób podobny, jak przy stosowaniu metod opisanych wcześniej. Ciemne i jasne prążki są tutaj równoznaczne. W celu określenia położenia wypukłości i węzłów stosuje się zmianę poziomu wzbudzenia drgań w niewielkich przedziałach, przy czym zachowanie się prążków jest analogiczne do opisanego wcześniej (dotyczącego metody poprzedniej). Przy realizacji opisanych wyżej metod holograficznej interferometrii i określaniu amplitud drgań pojawiają się błędy, głównie związane z określeniem liczby prążków i wielkości kąta φ [15]. Jak wykazały przeprowadzone badania, błędy te charakteryzują się następującymi cechami. W przypadku określania liczby węzłów mamy do czynienia z liniową zależnością - im więcej prążków, tym mniejszy jest popełniany błąd (np. dla $N=300$, $\delta_1 = 0,1\%$, a dla $N=3$, $\delta_1 = 12\%$). W przypadku kąta φ analogiczna zależność ma kształt paraboli. Im dokładniej określamy kąt φ , tym mniejszy błąd wnosimy przy określaniu A_1 (np. dla $\varphi = 10^\circ$, $\delta_2 = 0,3\%$, a dla $\varphi = 70^\circ$, $\delta = 3\%$). Z tych rozważań wynika wniosek, że aby zmniejszyć błąd należy mieć małe kąty φ i duże wartości N . Na rys. 14 pokazany został przykładowy strobologram pewnego wyrobu.



Rys. 14. Przykład hologramu uzyskanego przy pomocy metody strobolografii
($N = 4$, $A = 1.19 \mu\text{m}$, $f = 3890 \text{ Hz}$).

Porównanie omówionych w tym rozdziale stanowisk z dotychczas znanymi w literaturze wskazuje na następujące różnice. Np. w pracy [69] opisany został holograficzny interferometr. Sądząc po interferogramach, stanowisko to jest wprawdzie prostsze od opisanego w punkcie 3.3, ale nie nadaje się do pracy w reżimie strobolograficznym. Dla każdej częstotliwości rezonansowej tworzy się nowy hologram i częstotliwości rezonansowe określone są przy pomocy innej metody. To samo można powiedzieć o stanowiskach przedstawionych w pracach [77, 78, 104]. W pracy [103] omówiono zwykły heterodynowy interferometr z odchyłką częstotliwości na ultradźwiękowej przegródce. Stanowisko to posiada zaletę w stosunku do opisanego w p. 3.3, ponieważ dysponujemy sygnałem prędkości drgań i łatwiej daje się wykrywać aharmoniczność. Jednak posiada następujące wady: a) uciążliwe ustawianie aparatury, wynikające z faktu, że nie ma porównania użytego sygnału z długością fali światła; b) techniczna złożoność stanowiska.

Analogiczna aparatura do opisanej wyżej została przedstawiona w pracy [77], jednak jej możliwości pomiarowe są znacznie gorsze, ponieważ:

- a) wymaga ona jednorodności powierzchni badanego wyrobu;
- b) posiada gorszą czułość progową.

Na bazie opisanego wcześniej materiału można wysnuć następujące wnioski:

1. Metoda teoretyczno- doświadczalna przy zastosowaniu metod eksperymentu planowego pozwala na zbadanie szerokiej klasy konstrukcji, charakteryzujących się wieloskładnikową konstrukcyjną niejednorodnością.
2. Zastosowanie MTE i metod laserowych do badania płyt i pochyłych powłok o złożonym kształcie pozwala na określenie związków potrzebnych dla oszacowania częstotliwości drgań konstrukcji na wcześniejszych etapach projektowania.
3. Bezkontaktowość, wysoka czułość, małe błędy pomiaru, możliwość pomiarów postaci drgań wyrobów o złożonym kształcie typu płyt i powłok wskazują na efektywność metod laserowych przy badaniu drgań własnych i wymuszonych.
4. Przedstawione w tej pracy stanowiska charakteryzują się wysokimi dokładnościami i szerokimi możliwościami w porównaniu z podanymi wcześniej. Błędy w określeniu częstotliwości nie przewyższają 1%, a w przypadku amplitud drgań - 12%.

3.4. Teoretyczno - doświadczalne badanie drgań płyt i powłok z jednoskładnikową niejednorodnością

W tym rozdziale rozpatrzono wpływ otworów, zmian grubości i niejednorodności mocowania na wartości własne i postacie drgań płyt o przekroju kwadratowym i pochyłych powłok. Płyty mocowane są w sposób sztywny, przy pomocy spawania, z dwóch przeciwnych stron, a dwa pozostałe brzegi są swobodne. Wybór brzegów spawanych nie był przypadkowym. Powłoki mocowane były na podporach kulkowych przy pomocy śrub wzdłuż tworzących, brzegi powłok były swobodnymi. Mocowanie to było realizowane przy pomocy śrub M3. Wymuszenie brzegów było kinematyczne.

Badania zostały przeprowadzone na specjalnych próbkach z miedzi i miały wymiary 30x30 mm. Grubość płyt i powłok wynosiła 0,3 mm. Parametry krzywizny badanych powłok były równe $0 \leq \bar{k}_x \leq 60$, $\bar{k}_y = 0$. Zależności częstości drgań od wielkości krzywizny podano w paragrafie (3.1). Otwory i wybranie materiału rozłożone były symetrycznie względem środka płyty i powłoki. Otwory prostokątne rozłożone równoległe do brzegów swobodnych przyjęto dalej oznaczać jako PR, natomiast rozłożone prostopadłe - PP. Podobne oznaczenia przyjęto dla wybranych materiału. Schemat podanych płyt i powłok pokazano na rys.15. Linia przerywaną oznaczono podparcia na kulkach. Ilość próbek branych do badań była większa od 5. Rezultaty badań eksperymentalnych były obrabiane przy użyciu metody najmniejszych kwadratów [32].

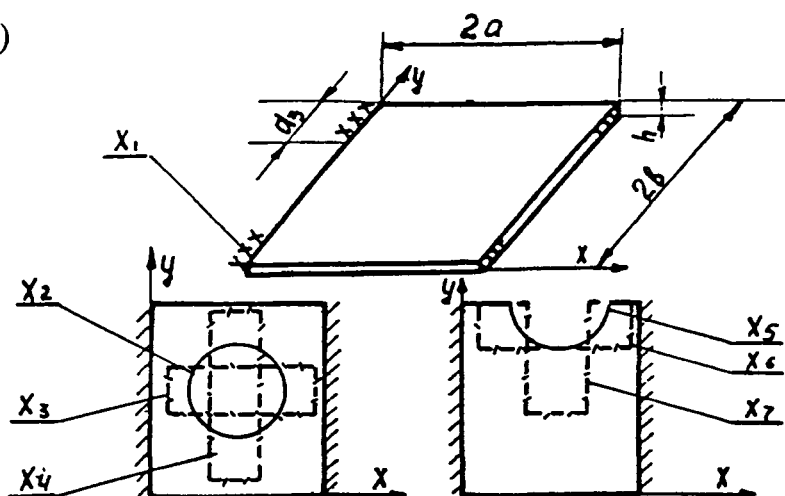
3.4.1. Badanie wpływu niejednorodności mocowania na drgania swobodne płyt i powłok

Niejednorodność mocowania płyty zabezpieczona była poprzez częściowe przerwy w spoiwie na brzegu, przy czym w miejscu przerwy robiony był otwór. Niejednorodność mocowania powłoki była realizowana mniejszą liczbą łączących śrub. Parametry niejednorodności mocowania były zmieniane w przedziałach:

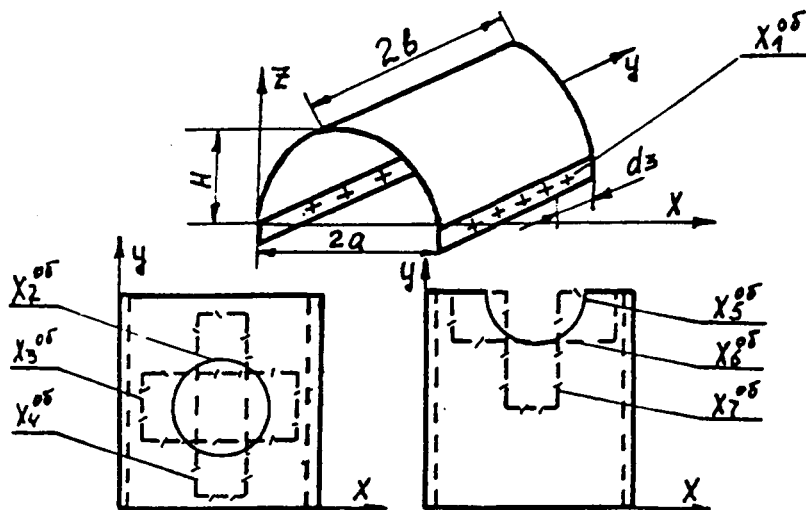
- a) dla płyty $0,15 \leq x_1 \leq 1$;
- b) dla powłoki $0,33 \leq x_1 \leq 1$.

Metoda badań była następująca. Na początku zdejmowane były charakterystyki drgań dla $x_1 = 1$. Następnie osłabiano sztywność mocowania i znowu zdejmowane były charakterystyki na tej samej próbce, itd. Podstawowe rezultaty badań podane zostały w tabelach 5 - 7, które omówimy teraz szczegółowo.

a)



b)



Rys. 15. Schematy badanych płytek (a) i powłok (b) z niejednorodnością jednoskładnikową

a) niejednorodności konstrukcyjne płytki:

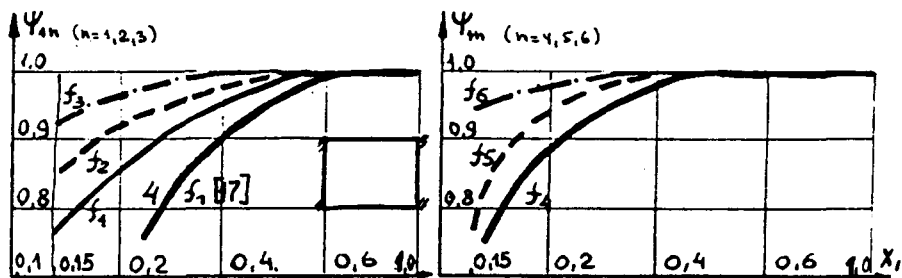
x_1 (niejednorodność mocowania); x_2 (otwór okrągły);

x_3, x_4 (otwory prostokątne typu PR i PP);

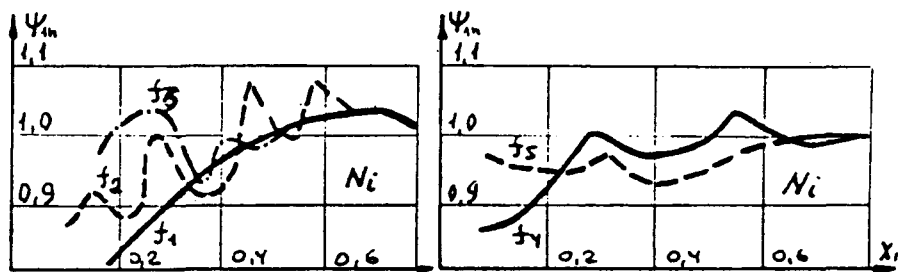
x_5, x_6, x_7 (wybrania materiału: półokrągłe typu PR i PP).

b) niejednorodności konstrukcyjne powłoki.

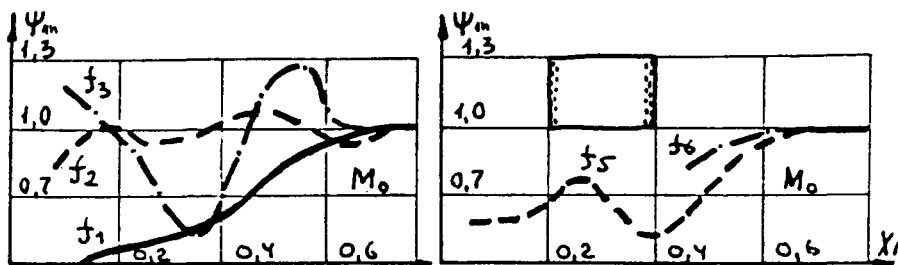
a)



b)



c)

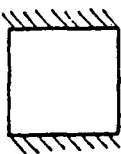
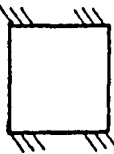
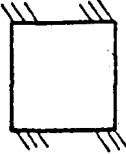
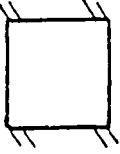


Rys. 16. Wykresy funkcji $\Psi_{1n}(x_1)$ w przypadku :
lutowania (a), spawania (b) i na granicach płytki (c).



Tabela 5.

WARTOŚCI CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH I POSTACI DRGAŃ
PŁYTEK Z NIEJEDNORODNYM MOCOWANIEM.

lp	Schemat	x_k	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]	f_6 [Hz]
1.		$x_1 = 4,0$	1134	1340	2420	3135	3410	4552
2.		$x_1 = 0,5$	1050	1308	2378	2850	3844	4480
3.		$x_1 = 0,33$	948	1069	1974	2265	3209	4356
4.		$x_1 = 0,15$	624	987	brak wyników	1520	1346	brak wyników

A. Płyta

W tabeli 5 podano wartości częstości drgań i odpowiadające im postacie drgań dla pierwszych 6 harmonicznym lutowanej płyty. Grubą linią oznaczono linie węzłowe, natomiast cienką - linie o równych amplitudach. Dla porównania na rys.16 b) i c) podane zostały zależności pierwszych trzech częstości od parametrów niejednorodności x_1 , dla płyty niklowej b) i molibdenowej c), mocowanych przy zastosowaniu dwóch punktowych rzędów spawalniczych położonych po stronie płyty. Z rys.16 wynika, że spawanie punktowe zmieniało wartości częstości drgań w szerokich przedziałach (np. dla płyty niklowej częstości $f_1 - 620 \div 1800$ Hz; $f_2 - 780 \div 3000$ Hz; dla płyty molibdenowej $f_1 - 550 \div 2300$ Hz; $f_2 - 1000 \div 2800$ Hz). Przy tym brak było jakichś charakterystycznych reguł, którym mogłyby one podlegać. Oprócz tego, spawanie punktowe nie zapewniało stabilności (powtarzalności) rezultatów i postacie drgań zależały od technologii spawania i częściej, niż przy połączeniu lutem wiele postaci drgań w ogóle się nie pojawiało. Wynika stąd, że zastosowanie spawania punktowego w elementach wyrobów pracujących w warunkach obciążeń dynamicznych powinno albo być ograniczone, albo należy przeprowadzić kontrolę mocowania za pomocą spawania - dlatego dalej sztywne mocowanie było realizowane przy pomocy lutowania.

Postać drgań płyt z niejednorodnym mocowaniem wzdłuż konturu praktycznie nie ulegała zmianie do wartości $x_1 = 0,5$. Przy mniejszym parametrze niejednorodności linie węzłowe nie zmieniały się, podobnie jak w przypadku poprzednim ($x_1 = 0,5$), ale linie równych amplitud przechodziły w okręgi koncentryczne, co świadczyło, że postacie drgań były kosinusoidalne. Przy małych wartościach $x_1 < 0,33$ nie były wykrywalne drgania o numerach postaci sześć i siedem. Związane to było z faktem, że przy takim punktowym mocowaniu płyty do drgań giętych „dodają się” drgania wyższych postaci i drgania skrętne, które znacznie obniżają amplitudy drgań płyty i niektóre postacie nie wzbudzają się. Możliwym jest również wariant, że przy tych częstościach ulegała znacznej zmianie sztywność gnąca płyty. Linie węzłowe dla postaci o numerze 2, 4, 5 i 8 także znacznie odróżniały się od postaci drgań przy $x_1 \geq 0,33$. Widmo częstości, zbudowane wg metody przedstawionej w pracy [91], tak jak należy oczekiwać, przy zmniejszaniu sztywności przesunęło się w kierunku niższych częstości (rys.17 a).

Na rys.16 a) podano wykresy zależności współczynnika niejednorodności $\psi_{1n} = \frac{\omega_n^0}{\omega_n}$,

od wielkości parametru (składnika) dla pierwszych sześciu postaci drgań. Z rys.16 a) widać, że ze zmniejszeniem sztywności mocowania współczynnik niejednorodności zmniejsza się. I tak

przy $x_1 = 0,4$ współczynnik ψ_{1n} dla pierwszej częstości zmniejszył się o 5%, a dla $x_1 = 0,33$ - o 18%. Największym zmianom ulegała czwarta częstość drgań własnych, która zmniejszyła się o 20% przy $x_1 = 0,15$. Dla mniejszych wartości x_1 zmiany były bardziej istotne, ponieważ przy $x_1 \rightarrow 0$, $\psi_{1n} \rightarrow 0$. Matematyczna obróbka rezultatów badań pozwoliła na określenie funkcji ψ_{1n} :

$$\psi_{1n} = \alpha_n x_1^{\beta_n}, \text{ dla } 0,15 \leq x_1 \leq 1 \quad (3.4.1)$$

Wartości współczynników α_n i β_n podano w tabeli 6.

Tabela 6.

**WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKÓW α_n , β_n DLA ELEMENTÓW
Z MOCOWANIEM NIEJEDNORODNYM.**

lp.	Element	Składnik niejedno- rodności	Numer częstości drgań	α_n	β_n	Błędy δ , %
1	Płyta	x_1	1	1,010	0,130	0,5
2			2	1,010	0,103	6,6
3			3	0,997	0,171	0,5
4			4	1,001	0,202	0,1
5			5	0,997	0,110	0,6
6			6	1,003	0,066	0,46
7	Powłoka	$x_1^{0,5}$	1	1,033	0,167	3,09
8			2	1,044	0,248	4,32
9			3	1,012	0,078	1,1
10			4	1,015	0,141	2,1

Z tabeli 6 widać, że współczynniki α_n są bliskie 1, a współczynniki β_n mogą być przyjęte jako równe i wynoszące 0,13. Wobec tego dla pierwszych sześciu postaci drgań płyty prostokątnej można dokonać oceny wpływu niejednorodności mocowania wg wzoru:

$$\psi_{1n} = x_1^{0,13}, \text{ dla } 0,15 \leq x_1 \leq 1 \quad (3.4.2)$$

Porównanie otrzymanych rezultatów z rezultatami pracy [7] dla płyty typu konsoli pokazuje, że jest ona bardziej wrażliwa na zmiany sztywności mocowania, co jest w pełni zrozumiałe fizycznie i odpowiada to ogólnym podstawom teorii drgań płyt i powłok (krzywa 4 rys. 16 a).

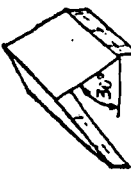
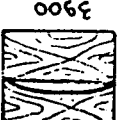
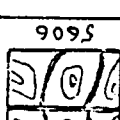
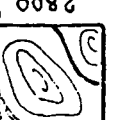
B. Powłoka

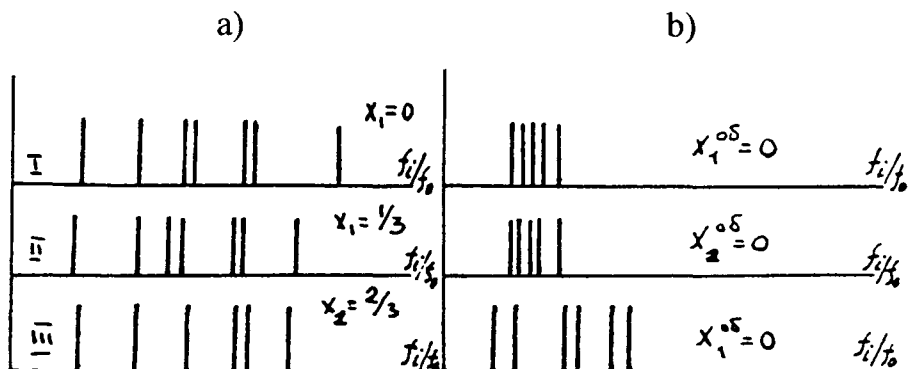
Dla dalszych badań w celu wyboru optymalnej krzywizny pochyłej powłoki w tabeli 7 (pozycja 1-2) podano charakterystyki drgań dla różnych wartości parametru krzywizny $\bar{k}_x$. Analiza rezultatów wskazuje, że ze zwiększaniem $\bar{k}_x$ wartości częstości drgań zwiększają się. W tym przedziale wartości $\bar{k}_x$ zmiany częstości drgań nie przewyższają 4÷16%. W przypadku, jeśli powłoka jest złożona z dwóch płyt („szalas”), jak pokazano w tabeli 7 (pozycja 3) pierwsza częstość drgań własnych uwidacznia się na częstościach, odpowiadających czwartej postaci drgań powłok z $\bar{k}_x = 60$.

A zatem, powłoki z $\bar{k}_x = 60$ mogą być przyjęte dla dalszych badań płyt. Przy tym ich postaci drgań odróżniają się od postaci drgań powłok z $\bar{k}_x = 0,0$. W tabeli 7 pokazano wpływ niejednorodności mocowania powłoki (pozycja 5,6,7). Z tabeli 7 wynika, że przy zmniejszaniu sztywności mocowania o 1/3 ($x_1^{0\sigma} = 0,67$) wartości częstości drgań i odpowiadających im postaci praktycznie się nie zmieniały dla dwóch pierwszych postaci, a także postaci wyższego rzędu 4-7. Linie węzłowe trzeciej postaci pozostały liniami prostymi, ale obróciły się o kąt -30° (poz. 6). Przy dalszym zmniejszaniu sztywności mocowania w sposób istotny (18%) zmieniła się pierwsza częstość drgań swobodnych, chociaż postać drgań nie została zmieniona. Częstości drgań f_3, f_5, f_6 nieco wzrosły. To zjawisko może być wyjaśnione istotnym wpływem warunków brzegowych na pierwszą i drugą częstość drgań. Na wyższe częstości warunki graniczne wykazują wpływ mniejszy, i one zależą bardziej od parametrów geometrycznych i rodzaju materiału powłoki. Widmo częstości, podobnie jak i dla przypadku płyty, przemieszcza się w stronę niskich częstości i rozszerza się (rys. 17 b).

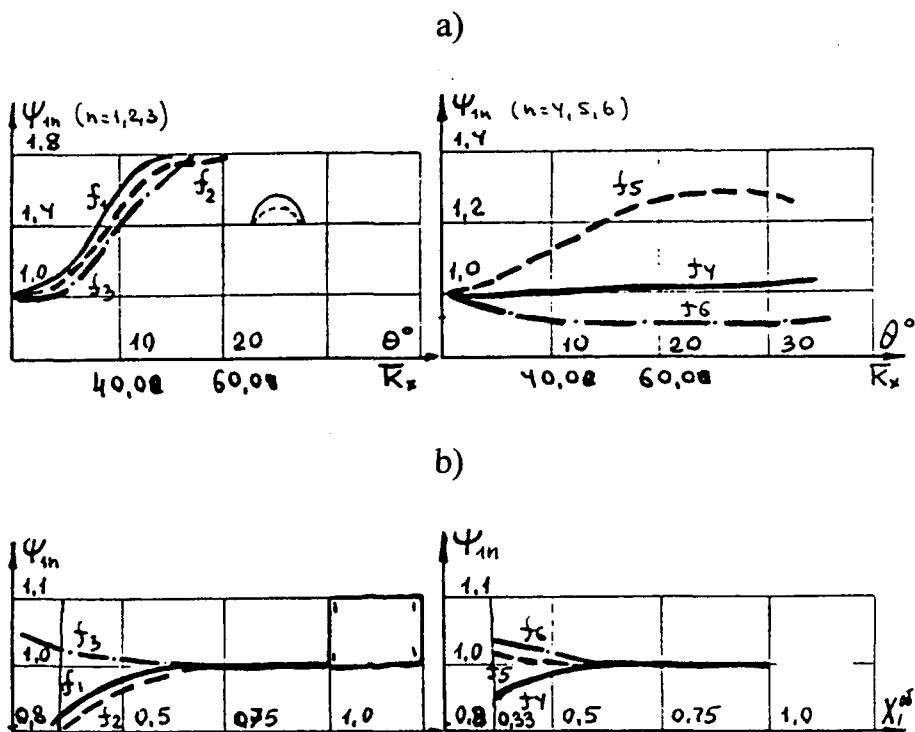
Tabela 7.

WARTOŚCI CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH I POSTACI DRGAŃ POWŁOK ORÓŻNEJ KRZYWIZNIE
(KĄT WZNIOSU) I Z NIEJEDNORODNYM MOCOWANIEM.

lp	Schemat powłoki	x_k	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]	f_6 [Hz]
1.		$\bar{K}_x=40$ ($\theta=10^\circ$) $\chi_1=1$	 2400	 2690	 3210	 3750	 4060	 5050
2.		$\bar{K}_y=60$ ($\theta=20^\circ$) $\chi_1=1$	 2490	 2810	 3190	 4400	 4540	 6040
3.		($\theta=30^\circ$) $\chi_1=1$	 brak wyników	 brak wyników	 brak wyników	 3900	 4250	 5606
4.		$\chi_1^{\circ 5} = 0,33$	 1840	 1720	 2800	 3230	 4390	 5530



Rys. 17. Częstości drgań własnych płyt (a) i powłok (b).



Rys. 18. Wykresy zależności $\psi_{1n}(\Theta)$ (a) i $\psi_{1n}(x_1^{os})$ (b).

Na rys.18 b) pokazano wykresy zależności $\psi_{1n}^{0\sigma}$ od $x_1^{0\sigma}$ dla pierwszych sześciu postaci drgań. Z tego rysunku wynika, że ze zmniejszeniem sztywności zamocowania współczynnik ψ_{1n} także się zmniejsza, przy tym zmiana ta jest mniejsza, niż w przypadku płyty. Na początku określano charakterystyki drgań swobodnych pochyłej płyty (powłoki). Potem, przy użyciu specjalnej oprawki, nie pozwalającej na deformacje płyty (powłoki) wierce się mały otwór ($x_2 = 0,05$). Znowu określa się parametry drgań, po czym powiększa rozmiary otworu, itd. W ten sposób badano identyczność mocowania i maksymalny poziom stanu naprężeniowo- odkształceniowego badanego elementu. Pojawienie się odchyłek w tym stanie charakteryzowało się dużym niestandardowym rozrzutem charakterystyk drgań swobodnych.

3.4.2. Rozpatrzmy teraz rezultaty badania wpływu otworów na drgania swobodne dla płyt i powłok.

A. Płyty

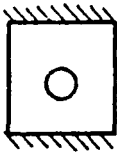
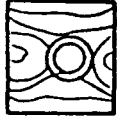
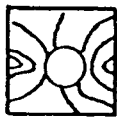
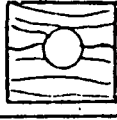
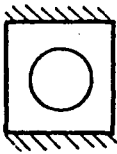
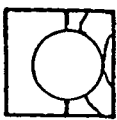
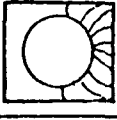
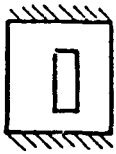
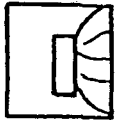
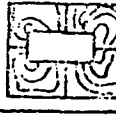
W tabeli 8 podano wartości częstości drgań i odpowiadających im postaci dla pierwszych sześciu postaci jednej z grupy płytek i dla trzech rodzajów otworów: okrągłych, prostokątnych rozłożonych równolegle do brzegu swobodnego płyty (typ PR) i prostokątnych, ułożonych prostopadłe do brzegów swobodnych (typ PP). Przy zmianie boków wgłębienia prostokątnego (typ PR) wzdłuż osi OX, boki wzdłuż osi OY były stałe i wynosiły 0,25a. Analogicznie jest dla przypadku typu PP. Boki, równoległe do osi OX były równe 0,25a. Parametry niejednorodności zmieniały się w następujących przedziałach:

$$0 \leq x_2 \leq 1; \quad 0 \leq x_3 \leq 1; \quad 0 < x_4 \leq 1 \quad (3.4.3)$$

Rozpatrzmy postacie drgań płytki z okrągłym otworem. W tym przypadku postacie drgań praktycznie nie zmieniały się w szerokich przedziałach zmian otworu. Dla pierwszej częstości postać drgań nie zmieniła się do $x_2 = 0,6$, dla od 2 do 6 postaci do $x_2 = 0,4$, a dla 8 postaci do $x_2 = 0,2$. Wynika z tego wniosek, że otwór wywiera największy wpływ dla wyższych postaci drgań. W poprzednim przypadku (3.4.1) było odwrotnie, ponieważ najpierw zmieniały się postacie drgań niskich rzędów. Przy zwiększaniu otworu okrągłego do $x_2 = 0,6$ dla 4 i 5 postaci drgań dało się zauważyć „łączenie” postaci drgań - drgania z dwoma bliskimi częstościami na pewnych częściach powierzchni płytki. Przy zwiększaniu otworu do $x_2 = 0,8-0,9$ zjawisko to zachodziło dla wszystkich częstości, zaczynając od częstości podstawowej.

Tabela 8.

WARTOŚCI CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH I POSTACI DRGAŃ
PLYTEK OSŁABIONYCH OTWORAMI.

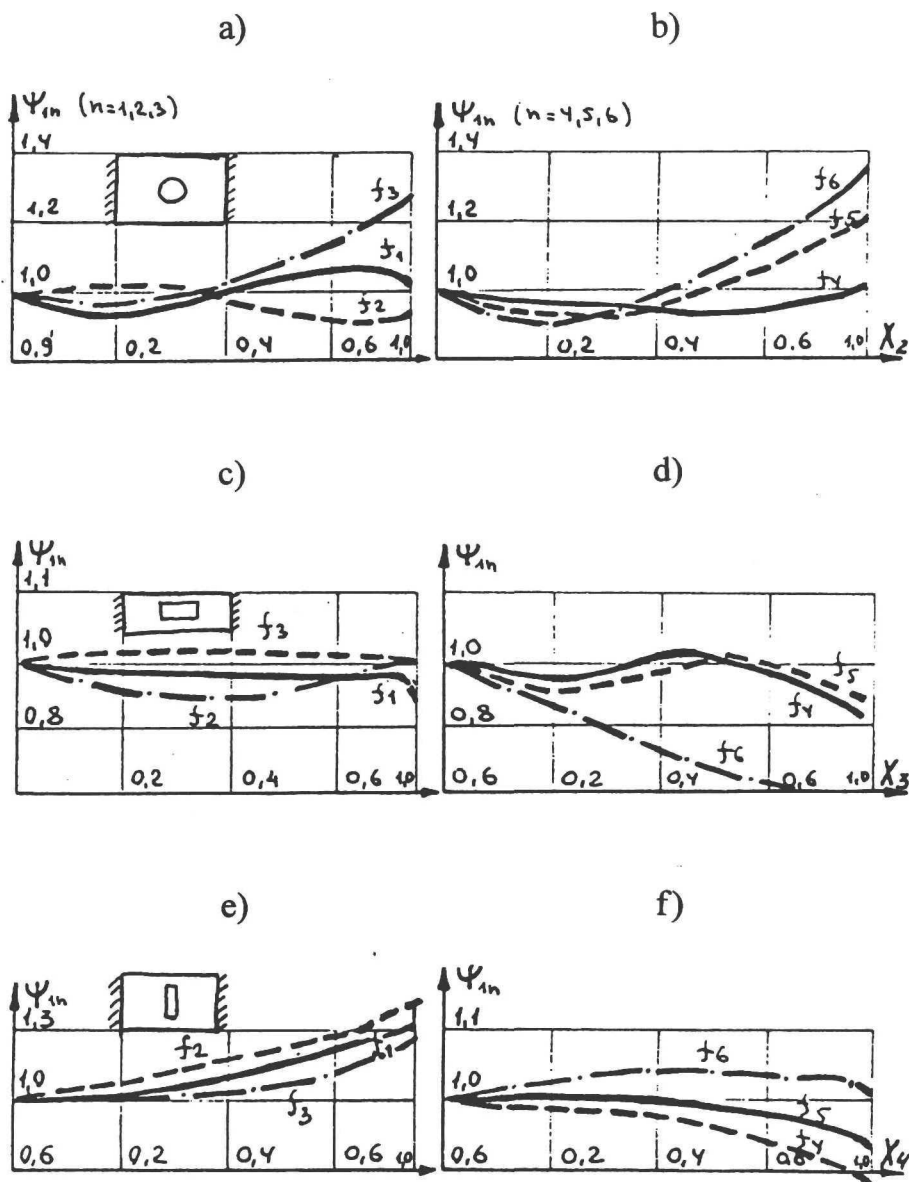
lp	Schemat mocowania	x_k	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]	f_6 [Hz]
1.		$x_2 = 0,4$	1274 	1458 	3085 	3105 	3312 	3963 
2.		$x_2 = 0,8$	1389 	1423 	3241 	3188 	3405 	5265 
3.		$x_3 = 0,6$	1101 	1159 	2275 	2325 	3156 	3119 
4.		$x_4 = 0,6$	1460 	1722 	2454 	1927 	2722 	4588 

Łatwo zauważyć, że i częstotliwości drgań tych postaci zbliżały się do siebie: pierwsza do drugiej, druga do trzeciej itd. Zjawisko to może być wytłumaczone w sposób następujący. Badana płytka jest symetryczna i dla $x_2 \geq 0,8$ praktycznie powstają oddzielne obszary (konsole) o jednakowej sztywności i masie. Niesymetryczność zamocowania płytki i niejednorodność jej materiału przejawiała się w tym przypadku w postaci przemieszczenia linii węzłowych, które były wyraźnie zauważalne przy drugiej, trzeciej i innych postaciach drgań. Jednak pomimo dokładności przeprowadzonych badań doświadczalnych nie udało się wykryć postaci drgań odpowiadających częstotliwości (f_7, f_8) przy różnych wartościach x_2 (w tabeli 8 nie zostały one pokazane). Objaśnia się to w ten sposób, że przy takich kombinacjach wartości częstotliwości wzbudzenia i wielkości otworu istotnie zmieniała się sztywność płytki dla tych częstotliwości i taka postać drgań mogła pojawić się przy drganiach subharmonicznych, lub przy znacznej wartości siły wzbudzającej. Widmo częstotliwości drgań płytki z okrągłym otworem było usytuowane w części środkowej w porównaniu do płytki pochyłej. Dla określenia funkcji współczynnika niejednorodności ψ_{1n} w zależności od x_2 na rys. 19 a, b) podano wykresy takiej zależności dla pierwszych trzech (a) i następnych trzech (b) częstotliwości drgań swobodnych. Z rys. 19 widać, że praktycznie wszystkie częstotliwości f_n ($n = 1, 2, \dots, 6$) przy zwiększaniu okrągłego otworu zwiększają się. Szczególnie intensywnie zwiększa się 3 i 6 częstotliwość (o 29% i 35%). Częstotliwość podstawowa wzrasta względnie mało (8 ÷ 10 %) przy $x_2 = 0,8$. Druga częstotliwość w przedziale $0 \leq x_2 \leq 0,8$ obniża się maksymalnie o 10%, a potem wzrasta. W nieco mniejszym stopniu (0,5 ÷ 3%) obserwuje się obniżenie częstotliwości przy małych częstotliwościach i przy x_2 (dla 1, 4 i 5 częstotliwości drgań własnych). Może to być wyjaśnione zmianą sztywności płytki z powodu istnienia otworu [24].

Matematyczna obróbka rezultatów badań prowadzi do następującej zależności:

$$\psi_{1n} = A_n x_2^2 + B_n x_2 + C_n \quad (3.4.4)$$

Wartości współczynników A_n, B_n, C_n podano w tabeli 9. W tej tabeli pokazano błąd aproksymacji, który nie przewyższa 3,4%. Dla otworów prostokątnych typu PR (pozycja 3 tabeli 8) istotna zmiana postaci drgań była obserwowana dla $x_2 \geq 0,6$. W tym przypadku, tak jak dla otworu okrągłego, obserwuje się „łączenie postaci” i zbliżenie wartości częstotliwości drgań własnych i drgań oddzielnych części. Jednak teraz postaci drgań wyższych harmonicznych (7 i 8) zmieniają się nieznacznie - wykrzywiają się jedynie linie węzłowe. Widmo częstotliwości przemieszcza się w stronę niskich częstotliwości. Wykresy zależności funkcji niejednorodności ψ_{1n} od parametru x_2 pokazane zostały na rys. 19 c, d).



Rys. 19. Wykresy zależności $\Psi_{1n}(x_2)$ (a, b); $\Psi_{1n}(x_3)$ (c, d); $\Psi_{1n}(x_4)$ (e, f).

Tabela 9.

**WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKÓW A_n , B_n , C_n DLA ELEMENTÓW
Z OTWOREM OKRĄGLYM.**

lp	Element	Składnik niejedno- rodności	Numer częstości drgań	A_n	B_n	C_n	Błędy δ , %
1	Płyta	x_2	1	0,426	-0,233	1,013	0,9
2			2	0,822	-0,644	1,048	3,4
3			3	0,406	-0,050	0,991	0,5
4			4	0,783	-0,439	1,031	2,29
5			5	0,565	-0,377	1,028	2,0
6			6	1,586	-0,733	1,037	2,5
7	Powłoka	$x_2^{0\sigma}$	1	0,488	-0,330	1,026	3,2
8			2	0,839	-0,567	1,018	1,4
9			3	0,610	-0,395	1,015	1,3
10			4	-0,247	0,077	0,998	0,3
11			5	-0,246	0,147	0,989	0,8
12			6	0,550	-0,370	1,026	1,8

Na podstawie analizy rys.19 c, d) wynika, że wszystkie częstości drgań własnych przy zwiększeniu otworu typu PR zmniejszają się. Największe zmiany mają miejsce dla częstości f_4 i f_6 - odpowiednio do 20 - 40 % przy $x_3 = 0,8$. Pierwsza częstość zmniejsza się o 13 % ($x_3 = 0,8$). Najmniejsze zmiany zachodzą dla częstości f_2 , f_3 i f_5 w przedziale $0 \leq x_3 \leq 0,4$ (o ok. 5%). Przy tym sztywność płytki znacznie się zmniejsza w porównaniu ze zmianą masy. I odwrotnie, otwory typu PP i okrągłe rozdzielają płytkę na części, które ze wzrostem wielkości otworu dążą do typu konsoli. Przy tym sztywność płytki wzrasta. Po drugie, przy $x_2 \geq 0,8$ i $x_3 \geq 0,8$ obserwowane są drgania na części płytki. Otrzymane rezultaty mogą być jakościowo porównane z rezultatami znanymi, otrzymanymi w pracach [29, 73] dla płytki, sztywno zamocowanej ze wszystkich stron. Obróbka matematyczna rezultatów sprowadza się do następującego związku:

$$\psi_{1n} = A_n x_3^2 + B_n x_3 + C_n \quad (3.4.5)$$

Współczynniki A_n , B_n , C_n podane zostały w tabeli 10. Również tam zostały podane błędy aproksymacji (δ , %) nie przewyższające 9,4%.

Tabela 10.

**WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKÓW A_n , B_n , C_n DLA ELEMENTÓW
Z OTWOREM PROSTOKĄTNYM TYPU PR.**

lp	Element	Składnik niejedno- rodności	Numer częstości drgań	A_n	B_n	C_n	Błędy δ , %
1	Płyta	x_3	1	0,136	-0,288	1,011	0,75
2			2	0,171	-0,458	1,011	0,8
3			3	0,341	0,464	1,079	3,9
4			4	-0,251	-0,060	1,007	0,5
5			5	-1,065	0,819	0,866	8,4
6			6	-0,393	0,194	0,987	1,0
7	Powłoka	$x_3^{0\sigma}$	1	-0,357	0,072	0,998	0,34
8			2	-0,331	0,107	0,996	0,4
9			3	0,686	0,559	0,926	4,2
10			4	0,566	-0,856	1,219	3,2
11			5	-0,006	-0,337	1,188	8,3
12			6	1,179	-1,219	1,281	1,2

Dla otworów prostokątnych typu PP (pozycja 4 z tabeli 8) postaci drgań praktycznie nie ulegały zmianie w porównaniu z linią ciągłą w całym przedziale zmian parametru niejednorodności x_4 , z wyjątkiem ósmej harmonicznej $x_4 \geq 0,6$. Widmo częstości koncentruje się, podobnie jak i dla przypadku otworu okrągłego, w środkowej części.

Na rys. 19 podano zależności funkcji niejednorodności ψ_{1n} od parametru x_4 dla pierwszych sześciu częstości. Z rys.19 wynika, że pierwsze trzy częstości zwiększają się ze zwiększeniem parametru x_4 , podczas gdy częstości f_4 i f_5 ulegają zmniejszeniu. Największy wzrost częstości obserwuje się dla drugiej częstości (ok. 35%), a najmniejsze dla szóstej częstości (4 %). Pierwsza częstość zwiększa się o 20%. Matematyczna analiza rezultatów prowadzi do następującego wzoru:

$$\psi_{1n} = A_n x_4^2 + B_n x_4 + C_n \quad (3.4.6)$$

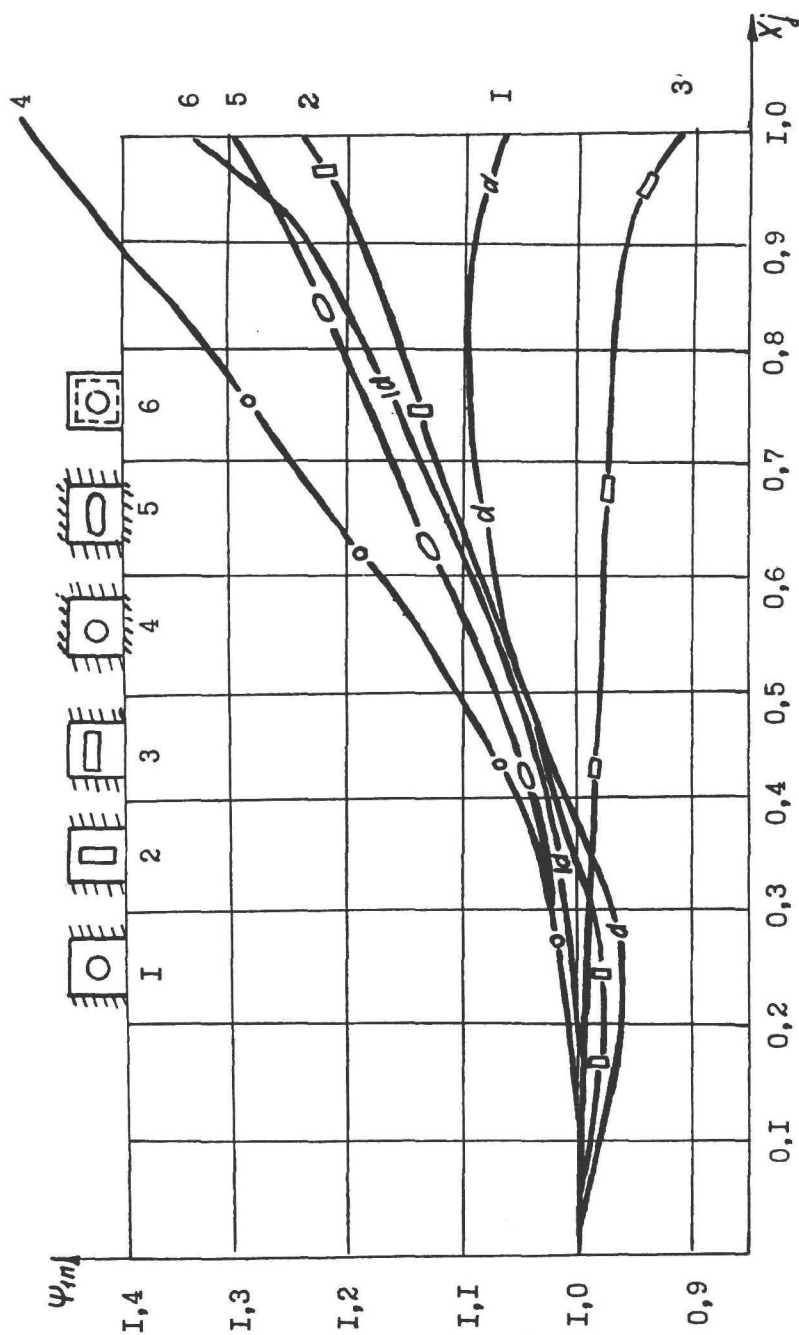
Współczynniki A_n , B_n , C_n podano w tabeli 11. Błędy aproksymacji nie przekraczały 11%.

Tabela 11.

**WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKÓW A_n , B_n , C_n DLA ELEMENTÓW
Z OTWOREM PROSTOKĄTNYM TYPU PP.**

lp	Element	Składnik niejedno- rodności	Numer częstości drgań	A_n	B_n	C_n	Błędy δ , %
1	Płyta	x_4	1	0,737	-0,291	1,015	1,3
2			2	0,968	-0,382	1,024	1,8
3			3	0,359	-0,136	1,007	0,6
4			4	-0,089	-0,089	0,089	0,5
5			5	-1,562	0,825	0,825	11,0
6			6	0,343	-0,299	1,024	1,7
7	Powłoka	$x_4^0 \sigma$	1	0,258	-0,163	1,013	1,3
8			2	0,316	-0,247	1,002	0,6
9			3	0,419	-0,383	1,002	0,4
10			4	-0,250	0,136	1,003	1,0
11			5	0,623	-0,652	1,120	4,0
12			6	0,472	-0,410	1,016	3,0

Otrzymane rezultaty badań pozwoliły na wykrycie niektórych prawidłowości i osobiwości drgań płyt osłabionych otworami. Po pierwsze, obniżenie częstości drgań własnych przy zwiększaniu prostokątnych otworów typu PR oraz ich zwiększenie dla otworów typu PP i otworów okrągłych. Wyniki te wskazują na następującą interpretację fizyczną: przy zwiększaniu otworów typu PR płytka może być traktowana jako zbiór złożony z oddzielnych belek. Na rys.20 dokonano takiego porównania podstawowej częstości i otworów typu PP (krzywa 1), typu PR (krzywa 2), okrągłego (krzywa 3) i okrągłego (4) z pracy [29]. Z rys.20 widać, że dla otworu okrągłego intensywność zmian wartości częstości drgań własnych jest niższa niż w pracy [29], gdzie badana płytka posiadała większą sztywność.



Rys. 20. Wykresy zależności funkcji $\psi_{1\eta}$ od składników niejednorodnych otrzymanych w tej pracy (krzywe 1, 2, 3), w pracy [29] (krzywe 4, 5) i w pracy [73] (krzywa 6).

Związki, otrzymane w pracy [29] składają się ze złożonych ułamków, co powoduje trudności przy stosowaniu ich w praktyce i oprócz tego są one mniej dokładne niż związki (3.4.4 ÷ 3.4.6) dla małych wartości x_2 , x_3 i x_4 .

B. Powłoka

W tabeli 12 podano wartości częstości drgań własnych i odpowiadające im postacie drgań dla powłok ($\bar{k}_s = 60$) dla trzech rodzajów otworów: okrągłych, typu PR, typu PP i dla przypadku płytki. Parametry niejednorodności były zmieniane w następujących przedziałach:

$$0 \leq x_2^{0\sigma} \leq 1; \quad 0 \leq x_3^{0\sigma} \leq 1; \quad 0 \leq x_4^{0\sigma} \leq 1 \quad (3.4.7)$$

Z tabeli 12 widać, że postacie drgań powłok z otworami okrągłymi zaczynają się zmieniać przy wartości 0,4, co objawia się skrzywieniem linii węzłowych (poz. 1, 2) i „zlewaniem” się postaci drgań. W przypadku pochyłej powłoki obserwuje się na wyższych częstościach drgania krótkofalowe. Ich opis matematyczny i fizyczny dla przypadku powłok stożkowych podano w pracy [110]. Okazuje się, że ta sama postać drgań pojawia się dla kilku blisko położonych częstości, co szczególnie wyraźnie było widać w przypadku drugiej postaci drgań. Była ona obserwowana przy częstościach 1907 Hz, 1966 Hz, 1988 Hz przy $x_2^{0\sigma} = 0,17$ i przy częstościach 1918 Hz, 2136 Hz i 2308 Hz przy $x_2^{0\sigma} = 0,34$. Widmo częstości nie ulegało zmianie w porównaniu ze środkową pochyłą powłoką. Zależności funkcji niejednorodności $\psi_{1n}^{0\sigma}$ od parametru $x_2^{0\sigma}$ podano na rys.20 a, b. Z tego rysunku wynika, że dla wartości $x_2^{0\sigma} \leq 0,45$ dla pierwszych trzech częstości drgań własnych parametry niejednorodności $\psi_{1n}^{0\sigma}$ były bliskie 1, czyli wzrastały. Największe ich zwiększenie do wartości 1,2 obserwowane było dla trzeciej częstości drgań własnych. Dla pierwszej (f_1) zwiększenie to było minimalne i wynosiło 1,08. Znacznie większy rozrzut był obserwowalny dla wyższych częstości, przy czym częstości czwarta i piąta obniżały się o 10%, a szósta o 12%.

Aproksymacja krzywych eksperymentalnych pozwoliła na uzyskanie następującej zależności:

$$\psi_{1n}^{0\sigma} = A_n^{0\sigma} (x_2^{0\sigma})^2 + B_n^{0\sigma} (x_2^{0\sigma}) + C_n^{0\sigma} \quad (3.4.8)$$

Współczynniki $A_n^{0\sigma}$, $B_n^{0\sigma}$, $C_n^{0\sigma}$ podane zostały w tabeli 9. Tam został podany również błąd aproksymacji (δ , %), który nie przewyższał 3,2%. Postacie drgań i wartości częstości drgań własnych dla pochyłych powłok z otworami prostokątnymi typu PR podane zostały w tabeli 12.

Tabela 12.

WARTOŚCI CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH I POSTACI DRGAŃ
POWŁOK OSŁABIONYCH OTWOREM.

f_6 [Hz]	4760 	5747 	5060 	5122 
f_5 [Hz]	3493 	3048 	3990 	3990 
f_4 [Hz]	3823 	3023 	3650 	3690 
f_3 [Hz]	2508 	3321 	3180 	3096 
f_2 [Hz]	2736 	2810 	2650 	2580 
f_1 [Hz]	2412 	2524 	2230 	2415 
X_k	$X_2^{0,5} = 0,4$	$X_2^{0,5} = 0,9$	$X_3^{0,5} = 0,9$	$X_4^{0,5} = 0,9$
Schemat powłoki				
lp	1	2	3	4

Z tabeli tej wynika, że postacie drgań praktycznie nie ulegały zmianie do 6 postaci, nawet dla różnych wartości $x_3^{0\sigma}$. Widmo częstości przesunęło się w stronę wysokich częstości dla pierwszych trzech częstości drgań własnych oraz w stronę niskich częstości dla wyższych harmonicznych. Analiza zależności eksperymentalnych $\psi_{1n}^{0\sigma}$ od $x_3^{0\sigma}$ wskazuje, że w tym przypadku, tak jak i w przypadku obecności otworu okrągłego, zmiany współczynników $\psi_{1n}^{0\sigma}$ nie były duże. Np. dla $x_3^{0\sigma} = 0,8$ pierwsza częstość zwiększała się o 1,2%. Trzecia częstość zmniejszała się w przedziale $0,2 \leq x_3^{0\sigma} \leq 0,9$ od 8% do 10%. Wyższe harmoniczne ulegały obniżeniu (maksymalne zmniejszenie czwartej częstości wynosiło 12% przy $x_3^{0\sigma} \geq 0,9$).

Matematyczna obróbka danych eksperymentalnych prowadzi do wyrażenia:

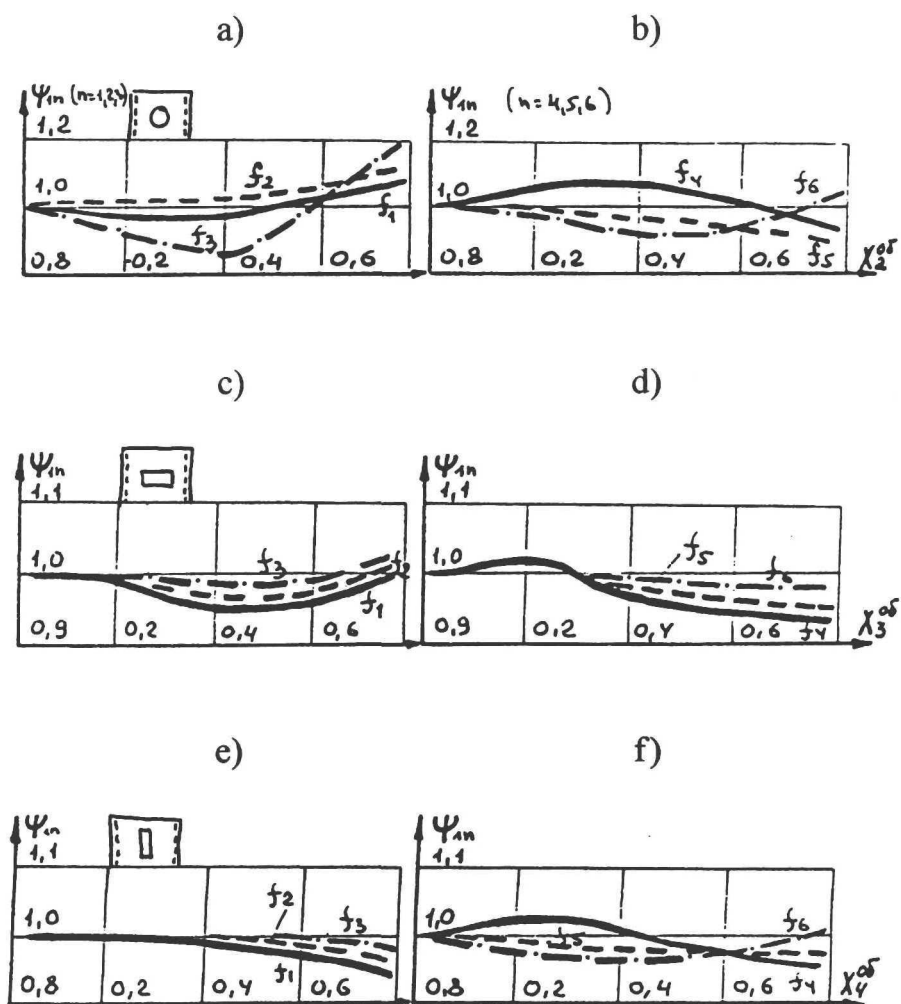
$$\psi_{1n}^{0\sigma} = A_n^{0\sigma} (x_3^{0\sigma})^2 + B_n^{0\sigma} x_3^{0\sigma} + C_n^{0\sigma} \quad (3.4.9)$$

Wartości $A_n^{0\sigma}$, $B_n^{0\sigma}$, $C_n^{0\sigma}$ i błędy aproksymacji podano w tabeli 10. Z tej tabeli wynika, że maksymalny błąd aproksymacji nie przewyższał 8,3%. Otwory prostokątne typu PP praktycznie nie zmieniały postaci drgań ciągłej powłoki do wartości $x_4^{0\sigma} = 0,6$ (tabela 12). Przy większych parametrach otworu obserwowano rozdział drgań na części aż do szóstej postaci. Widmo częstości przesuwane było w kierunku wartości niższych. Na rys.21 podano zależności $\psi_{1n}^{0\sigma}$ od $x_4^{0\sigma}$, z których wynika, że pierwsze trzy częstości zmniejszały się ze zwiększeniem $x_4^{0\sigma}$. Maksymalne zmniejszenie się obserwowane było dla pierwszej częstości (do 10%), a najmniejsze dla trzeciej częstości (do 5%). Wartości wyższych harmonicznych, czwartej i piątej, również obniżały się (np. $f_4^{0\sigma}$ o 18%), a szósta harmoniczna ulegała zwiększeniu o 20%. Aproksymacja $\psi_{1n}^{0\sigma}$ prowadzi do wzoru:

$$\psi_{1n}^{0\sigma} = A_n^{0\sigma} (x_4^{0\sigma})^2 + B_n^{0\sigma} x_4^{0\sigma} + C_n^{0\sigma} \quad (3.4.10)$$

Współczynniki $A_n^{0\sigma}$, $B_n^{0\sigma}$, $C_n^{0\sigma}$ zostały podane w tabeli 11. Wynika z niej, że maksymalne błędy aproksymacji nie przewyższały 4%.

Analiza rezultatów badań płyt i pochyłych powłok z otworami pokazuje, że występowanie otworów może w sposób istotny wpływać na wartości częstości drgań własnych i postaci drgań w zależności od rodzaju otworu, jego położenia oraz parametrów niejednorodności. Płyty największą wrażliwość wykazują na pojawienie się otworów prostokątnych ułożonych równolegle do końców swobodnych. Obserwuje się przy tym przemieszczenie widma częstości w kierunku niskich częstości.



Rys. 21. Wykresy funkcji $\psi_{1n}(x_2^{0\sigma})$ (a, b); $\psi_{1n}(x_3^{0\sigma})$ (c, d); $\psi_{1n}(x_4^{0\sigma})$ (e, f).

Największe zmniejszenie miało miejsce dla częstotliwości f_4 i f_6 (odpowiednio o 20% i 40% przy $x_3^{0\sigma} = 0,9$). Otwory okrągłe i prostokątne typu PP podwyższają częstotliwości drgań własnych. Otwory prostokątne podwyższają niskie częstotliwości (drugą o 35% i pierwszą o 20%), a otwory okrągłe podwyższają wyższe częstotliwości (trzecią i szóstą odpowiednio o 29% i 35%). Dla współczynników niejednorodności 0,4÷0,6 i dla powłok pochyłych wpływ otworów na ich

dynamikę był mało zauważalny. Ponadto, w odróżnieniu od płyt, otwory prostokątne typu PP obniżały wartości częstości drgań własnych, a okrągłe i prostokątne otwory typu PR podwyższały je. Maksymalne zmiany obserwowane były (dla wartości $x_2^{0\sigma}$, $x_4^{0\sigma} = 1$) w przypadku częstości podstawowej o 30% i trzeciej częstości o 20%. Praktycznie wszystkie wyższe harmoniczne przy pojawieniu się otworu ulegały obniżeniu (wyjątek zaobserwowany był dla f_6 przy występowaniu okrągłego i prostokątnego otworu typu PP).

Analiza współczynników aproksymacji krzywych eksperymentalnych pokazuje, że współczynniki C_n są bliskie 1 (przedział ich zmian zarówno dla płyt jak i powłok wynosił od 1,219 do 0,825), podczas gdy A_n i B_n ulegały raczej nieregularnym zmianom. Współczynnik A_n zmieniał się od -1,562 do 1,586, współczynnik B_n ulegał zmianom od -1,219 do 1,365. W znacznie mniejszych przedziałach zmiany te obserwowalne były dla osobnych postaci drgań. Dla pierwszej postaci drgań płyt z otworami okrągłymi i prostokątnymi typu PP współczynniki A_n zmieniały się w przedziałach $0,258 \div 0,488$, współczynniki B_n od -0,163 do -0,33, współczynniki C_n od 1,013 do 1,026. Dla powłok i otworów typu PR i okrągłych $0,126 \leq A_1 \leq 0,337$; $-0,291 \leq B_1 \leq -0,233$; $1,013 \leq C_1 \leq 1,015$.

Dla przypadku pierwszej częstości drgań własnych płyt i powłok można przyjąć następujące związki:

A. Płytki

dla otworów typu PP i okrągłych

$$\psi_{11} = 0,373 x_2^{(4)^2} - 0,247 x_2^{(4)} + 1,02 \quad (3.4.11)$$

dla otworów typu PR

$$\psi_{11} = -0,357 x_3^2 + 0,072 x_3 + 0,998 \quad (3.4.12)$$

B. Powłoka

dla otworów typu PR i okrągłych

$$\psi_{11}^{0\sigma} = 0,587 (x_2^{0\sigma(3)})^2 - 0,262 x_2^{0\sigma(3)} + 1,014 \quad (3.4.13)$$

dla otworów typu PP

$$\psi_{11}^{0\sigma} = 0,136 (x_4^{0\sigma})^2 - 0,288 x_4^{0\sigma} + 1,011 \quad (3.4.14)$$

Otrzymane wyniki potwierdzają wnioski autorów prac [11, 19], gdzie zauważono mały wpływ pojawienia się otworów na częstości drgań własnych, ponieważ w tym przypadku parametry niejednorodności były równe $x_2 \approx 0,16$, co odpowiada naszym rezultatom.

4. Analiza wpływu otworów położonych na obwodzie płyt i powłok na ich drgania swobodne

Badane były otwory na swobodnych krawędziach płyt i na powierzchniach czołowych powłok o następujących kształtach: półokrągłe, prostokątne typu PR, prostokątne typu PP. Technologia przygotowania próbek nie różniła się od opisanej wcześniej. Otwór (wybranie materiału) stanowił 0,25 boku płyty (powłoki) i pozostawał bez zmian. Pozostałe charakterystyki badanych płyt i powłok odpowiadały charakterystykom opisanym w poprzednim paragrafie.

Zmiana składników niejednorodności była następująca:

$$0 \leq x_5, x_6, x_7 \leq 1; 0 \leq x_5^{0\sigma}, x_6^{0\sigma}, x_7^{0\sigma} \leq 1 \quad (4.1)$$

Obecnie rozpatrzmy szczegółowo rezultaty badań.

A. Płyta

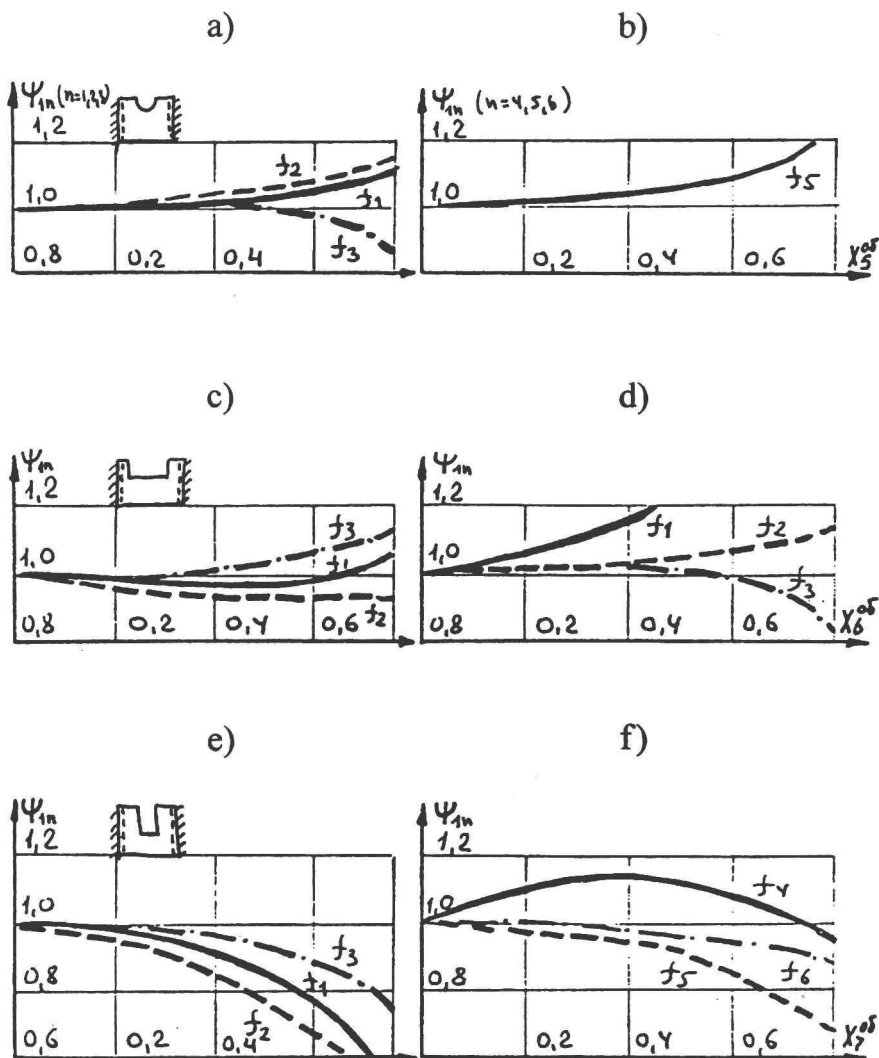
Rezultaty badania płyt z wybraniem materiału na brzegach podano dla trzech różnych rodzajów otworów w tablicy 13. Z tablicy tej wynika, że pojawienie się wybrań materiału na brzegach prowadzi do zmian postaci drgań przy większych wartościach parametru niejednorodności przy płytach ($x_5, x_6, x_7 \geq 0,8$). Zmiany postaci drgań zauważalne były w mniejszym stopniu niż w przypadku płyt z otworami. Charakter zmian ψ_{1n} (rys.22 a +e) jest analogiczny do zmian ψ_{1n} dla płyt z otworami, chociaż intensywność zmian dla poszczególnych częstości jest teraz wyższa. W przypadku wybrania (wykroju) półokrągłego pierwsza częstość drgań zmieniała się nieznacznie na ok. 5% ÷ 6%, druga i trzecia zwiększała się odpowiednio o 20% i 28%. Bardziej intensywnym zmianom ulegały wyższe częstości: f_4 o 32%, f_5 o 30% i f_6 o 43%. Dla przypadku wybrań typu PR zaobserwowano obniżenie częstości f_1, f_2, f_4 i f_6 odpowiednio o 15%, 10% i 8%. Trzecia i piąta częstość uległy podwyższeniu o 30% i 35%. Przy pojawieniu się wybrań typu PP pierwsze częstości (f_1, f_2) zwiększyły się odpowiednio o 40% i 22%, a wartości częstości wyższych (f_3, f_4, f_5) wzrosły o 20%. Wy tłumaczenie zaobserwowanych zjawisk jest podobne do wcześniej opisanego.

Matematyczna obróbka rezultatów badań doprowadziła do wzoru (analogicznego do opisanego wyżej):

$$\psi_{1n} = A_n x_j^2 + B_n x_j + C_n \quad (j = 5, 6, 7) \quad (4.2)$$

Współczynniki A_n , B_n , C_n dla wszystkich typów wybrań materiału podano w tabelach 14÷16.

Maksymalny błąd aproksymacji nie przekracza 10%.



Rys. 22. Wykresy funkcji $\psi_{1n}(x_5^{\sigma\sigma})$ (a, b); $\psi_{1n}(x_6^{\sigma\sigma})$ (c, d); $\psi_{1n}(x_7^{\sigma\sigma})$ (e, f).

Tabela 13.

WARTOŚCI CZĘSTOŚCI DRGAŃ I POSTACI PŁYTKI OSŁABIONEJ
POPRAZ WYBRANIA MATERIAŁU NA BRZEGACH.

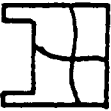
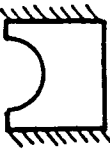
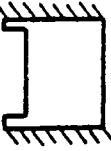
f_6 [Hz]	5687 	6640 	4468 	4192 
f_5 [Hz]	4107 	4820 	3467 	3420 
f_4 [Hz]	3871 	4238 	3065 	2549 
f_3 [Hz]	3329 	3448 	3152 	1922 
f_2 [Hz]	1803 	1910 	1416 	1609 
f_1 [Hz]	1247 	1285 	1097 	1263 
x_k	$x_5 = 0,4$	$x_5 = 0,8$	$x_6 = 0,8$	$x_7 = 0,8$
Schemat płyty				
lp	1	2	3	4

Tabela 17.

WARTOŚCI CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH I ODPOWIEDAJĄCYCH IM POSTACI
POWŁOK OSŁABIONYCH WYBRANIA MATERIAŁU.

Ip	Schemat	x_k	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]	f_6 [Hz]
1.		$x_5^{0.5} = 0.4$	2462	3248	2465	4104	4363	5383
2.		$x_5^{0.5} = 0.8$	2490	3300	2600	brak wyników	4480	brak wyników
3.		$x_6^{0.5} = 0.8$	2265	2695	3248	brak wyników	4360	5230
4.		$x_7^{0.5} = 0.8$	2246	2803	2550	4430	3789	5030

Tabela 14.

**WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKÓW A_n , B_n , C_n DLA PŁYTKI
Z WYBRANIEM MATERIAŁU PÓŁOKRĄGLYM.**

lp	Element	Składnik niejedno- rodności	Numer częstości drgań	A_n	B_n	C_n	Błędy δ , %
1	Płyta	x_5	1	1,054	-0,490	1,009	1,5
2			2	1,931	-0,580	1,018	2,4
3			3	1,849	-0,421	1,009	1,8
4			4	2,649	-0,745	1,020	3,13
5			5	2,469	-0,493	1,007	1,3
6			6	2,260	-0,118	0,905	7,45

Tabela 15.

**WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKÓW A_n , B_n , C_n DLA PŁYTKI
Z WYBRANIEM MATERIAŁU PROSTOKĄTNYM TYPU PR.**

lp	Element	Składnik niejedno- rodności	Numer częstości drgań	A_n	B_n	C_n	Błędy δ , %
1	Płyta	x_6	1	1,367	0,413	0,982	1,0
2			2	-1,098	0,389	0,982	1,2
3			3	0,304	-0,071	1,000	0,3
4			4	-1,240	0,368	0,974	1,2
5			5	-0,433	0,085	0,995	0,3
6			6	2,038	-0,714	1,000	6,4

Tabela 16.

**WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKÓW A_n , B_n , C_n DLA PŁYTKI
Z PROSTOKĄTNYM WYBRANIEM MATERIAŁU TYPU PP.**

lp	Element	Składnik niejedno- rodności	Numer częstości drgań	A_n	B_n	C_n	Błędy δ , %
1	Płyta	x_7	1	1,687	-0,696	1,041	2,5
2			2	0,200	-0,048	1,000	0,3
3			3	1,631	-0,421	1,009	1,6
4			4	-1,400	0,315	0,988	0,7
5			5	-0,442	0,146	0,994	0,6
6			6	-0,273	0,017	0,984	2,4

Tabela 18.

**WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKÓW A_n , B_n , C_n DLA POCHYLEJ POWŁOKI
Z PÓŁOKRĄGLYM WYBRANIEM MATERIAŁU.**

lp	Element	Składnik niejedno- rodności	Numer częstości drgań	A_n	B_n	C_n	Błędy δ , %
1	Powłoka	$x_5^{0\sigma}$	1	0,387	-0,095	1,000	0,9
2			2	1,740	-0,468	1,012	1,7
3			3	0,382	-0,167	1,000	0,95
4			4	0,471	-0,119	1,000	1,1
5			5	0,924	-0,252	1,005	1,1
6			6	1,069	-0,252	1,005	0,6

Tabela 19.

**WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKÓW A_n , B_n , C_n DLA POWŁOKI POCHYLEJ
Z PROSTOKĄTNYM WYBRANIEM MATERIAŁU TYPU PR.**

lp	Element	Składnik niejedno- rodności	Numer częstości drgań	A_n	B_n	C_n	Błędy δ , %
1	Powłoka	$x_6^0 \sigma$	1	0,920	-0,750	1,074	1,1
2			2	3,110	-2,250	1,259	5,1
3			3	1,340	-0,771	1,074	4,6
4			4	-0,898	-0,264	0,988	0,7
5			5	-0,555	-0,207	0,989	0,7
6			6	0,265	-0,064	1,000	0,5

Tabela 20.

**WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKÓW A_n , B_n , C_n DLA POCHYLEJ POWŁOKI
Z PROSTOKĄTNYM WYBRANIEM MATERIAŁU TYPU PP.**

lp	Element	Składnik niejedno- rodności	Numer częstości drgań	A_n	B_n	C_n	Błędy δ , %
1	Powłoka	$x_7^0 \sigma$	1	1,316	-0,743	1,074	1,1
2			2	1,333	-0,775	1,074	0,86
3			3	1,620	-0,761	1,074	1,1
4			4	-0,831	0,122	0,994	0,47
5			5	0,965	-0,214	1,000	1,4
6			6	0,580	-0,268	1,012	0,9

B. Powłoka

Rezultaty badań powłok z wybraniem na powierzchniach czołowych podano w tabelach 17 ÷ 20. Z podanych tabel widać, że wybrania mają największy wpływ na postacie drgań odpowiadające wysokim częstościom. Oddzielnych postaci drgań nie obserwowano. Zależności funkcji niejednorodności od składników niejednorodności ($x_5^{0\sigma}$, $x_6^{0\sigma}$, $x_7^{0\sigma}$) zachowują te same własności, jak i w przypadku otworów wcześniej analizowanych (rys.22). Największe zmiany obserwowane były przy pojawieniu się wybrania prostokątnego typu PP i częstościach f_2 , f_5 (50% i 20% w kierunku zmniejszenia częstości drgań własnych).

Funkcja aproksymująca posiada w tym przypadku następującą postać:

$$\psi_{1n}^{0\sigma} = A_n^{0\sigma} (x_j^{0\sigma})^2 + B_n^{0\sigma} x_j^{0\sigma} + C_n^{0\sigma} \quad (4.3)$$

Współczynniki $A_n^{0\sigma}$, $B_n^{0\sigma}$, $C_n^{0\sigma}$ zostały podane dla wybrania każdego typu w tabelach 17÷20. Maksymalny błąd aproksymacji nie przekraczał 5%.

Rezultaty przeprowadzonych badań pozwalają na wyciągnięcie następujących wniosków:

1. Otrzymano nowe wyniki badań dotyczące drgań swobodnych płyt i powłok o swobodnych krawędziach (powierzchniach czołowych) i posiadających niejednorodne mocowanie i otwory trzech rodzajów.
2. Otrzymane za pomocą metod przybliżonych wartości dla częstości drgań zgadzają się z wynikami eksperymentu. Maksymalne błędy aproksymacji dla wszystkich rozpatrzonych przypadków nie przekraczają 4% w przypadku częstości podstawowej i 12% w przypadku wyższych częstości.
3. Ponadto sformułowano następujące wnioski:
 - a) zmniejszenie sztywności mocowania płyt i powłok obniża częstości drgań własnych dla składników niejednorodności $x_1^{0\sigma} = 0,33$ o 10% ÷ 38% w zależności od postaci drgań i rodzaju konstrukcji. Niejednorodność mocowania wykazuje największy wpływ na trzy pierwsze postacie drgań;
 - b) pojawienie się okrągłych i prostokątnych otworów typu PP w płytach oraz okrągłych i prostokątnych typu PR w powłokach podwyższa częstości drgań dla x_2 , $x_2^{0\sigma} \geq 0,4$; $x_3^{0\sigma} \geq 0,8$; $x_4 \geq 0,9$ o ok. 35% ÷ 40%;
 - c) pojawienie się prostokątnych otworów typu PR dla płyt i typu PP dla powłok obniża częstości drgań własnych przy $x_3 \geq 0,6$; $x_4^{0\sigma} \geq 0,8$ o ok. 20% ÷ 40%;

d) wpływ wybrań na krawędziach płyty i powłoki jest analogiczny do wpływu otworów przy zachowaniu charakteru zmian w zależności od składnika niejednorodności.

Maksymalna zmiana częstości zaobserwowana była dla płyty przy $x_5, x_6, x_7 \geq 0,7$ o ok.

30%, a dla powłoki przy $x_7^{0\sigma} \geq 0,8$ o ok. 40%.

4. Dla płyt i powłok z okrągłym otworem i otworami typu PR, dla małych wartości składnika niejednorodności ($x_k \leq 0,4$), obserwowano obniżenie wartości częstości drgań własnych, a przy dużych otworach ($x_k \geq 0,8$) obserwowano „łączenie” postaci drgań oddzielnych części płyt i powłok.

5. Drgania płyt i powłok z niejednorodnością wieloskładnikową

W tym rozdziale dokonano analizy określania funkcji niejednorodności ψ_{kn} przy jednoczesnym wpływie (w płytach i powłokach) kilku rodzajów konstrukcyjnej niejednorodności. W celu określenia współczynników regresji funkcji ψ_{kn} wybrano pewne metody przeprowadzenia eksperymentu. Podano metody opracowania statystycznego i dokonano analizy wyników eksperymentu oceniając wartości częstości drgań własnych płyt i powłok.

W związku z tym, że kombinacje różnych składników niejednorodności mogą być bardzo różnorodne, w pracy tej rozpatrzono trzy typy wieloskładnikowej niejednorodności: dwu i trójskładnikową oraz niejednorodności semiskładnikowe. Kombinacje niejednorodności w badaniach płyt i powłok i ich schematy podano na rys.23. Jako składniki niejednorodności przyjęto x'_5 , x'_6 i x'_7 .

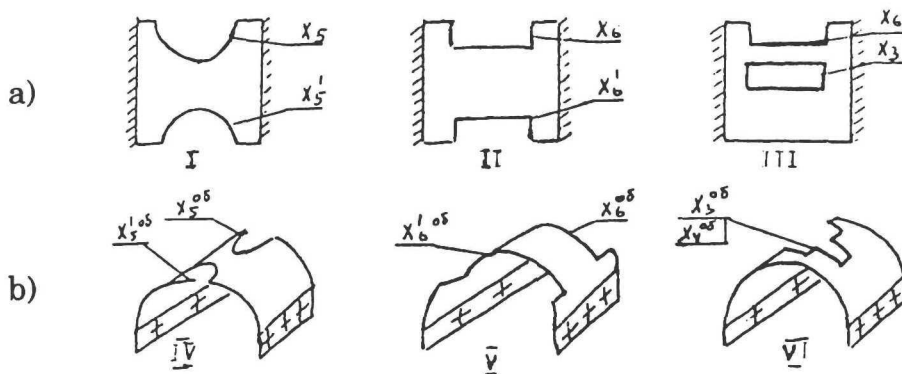
5.1. Wyznaczanie funkcji niejednorodności ψ_{kn} . Wybór metody przeprowadzenia eksperymentu

Jak było pokazane w drugim rozdziale tej pracy, funkcje niejednorodności ψ_{kn} dla kilku składników są funkcjami o wielu zmiennych. Dla dwóch, trzech i semiskładnikowej niejednorodności (k - liczba składników niejednorodności, n - numer postaci) i dowolnej postaci funkcje te opisane są zależnością:

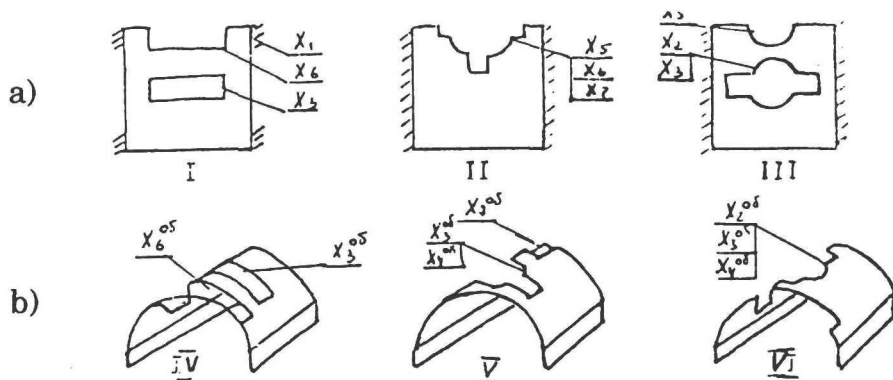
$$\psi_{kn} = \psi_{kn}(x_1, x_2, \dots, x_k), \text{ gdzie } k = 2, 3, 7 \quad (5.1.1)$$

W celu określenia optymalnych wartości współczynników danych funkcji regresji koniecznym jest przeprowadzenie szeregu eksperymentów, nazywanych w teorii eksperymentu planowego eksperymentami ekstremalnymi. Zmienną ψ_{kn} , optymalizowaną w procesie eksperymentu, nazywamy parametrem optymalizacji lub funkcją odchyłki. Zmienne wpływające na optymalizację (x_k) nazywamy składnikami lub zmiennymi wejściowymi.

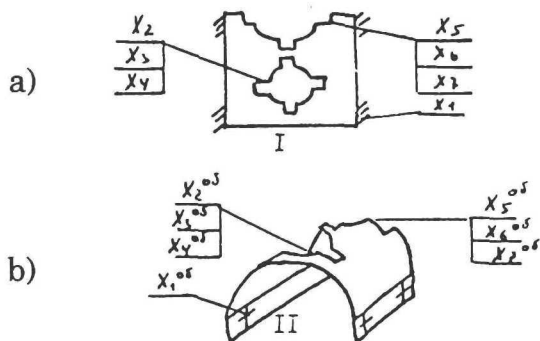
I. 2 - składnikowa niejednorodność



II. 3 - składnikowa niejednorodność



III. 7 - składnikowa niejednorodność



Rys. 23 Płytki (a) i powłoki (b) z wieloskładnikowymi niejednorodnościami konstrukcyjnymi.

Matematyczna teoria eksperymentu planowego pozwala na rozwiązywanie dwóch rodzajów zadań wieloskładnikowych:

1. Otrzymywanie formuł interpolacyjnych (zależności) przy opracowaniu wyników eksperymentu;
2. Optymalizacji parametrów (funkcji odchyłki) dla osiągnięcia celu (np. otrzymanie maksymalnych wartości częstości drgań własnych płyty lub powłoki).

Planowanie eksperymentu polega na wyborze liczby i warunków przeprowadzenia doświadczeń, koniecznych i dostatecznych dla rozwiązania określonego zadania z wymaganą dokładnością. Będziemy zakładać, że podobnie jak w pracy [5], śledzenie funkcji celu w punktach $\bar{x}$ obszaru eksperymentowania przeprowadza się z błędami przypadkowymi $\varepsilon(\bar{x})$, wywołanymi wpływem efektów ubocznych, nie uwzględnianych w eksperymencie:

$$\psi_{k,n}^*(\bar{x}) = \psi_{k,n}(\bar{x}) + \varepsilon(\bar{x}), \quad (5.1.2)$$

gdzie $\psi_{k,n}(\bar{x})$ - śledzone wartości funkcji celu;

$\psi_{k,n}^*(\bar{x})$ - nieznaną badaczowi prawdziwą wartość funkcji celu.

Zakłada się dalej, że $\varepsilon(\bar{x})$ są niezależnymi zmiennymi przypadkowymi z wartością oczekiwaną równą zeru i stałą dyspersją σ^2 , tak że:

$$E\{\psi_{k,n}^*(\bar{x})\} = \psi_{k,n}(\bar{x}), \quad (5.1.3)$$

gdzie E jest wartością oczekiwaną wielkości $\psi_{k,n}^*(\bar{x})$, zmierzoną w punkcie $\bar{x}$.

W tej pracy zastosowano metody eksperymentalnej optymalizacji $\psi_{k,n}(\bar{x})$, zakładając, że

$$E\{\psi_{k,n}^*(\bar{x})\} = \psi_{k,n}(\bar{x}) = \eta(\bar{x}, \bar{\beta}), \quad (5.1.4)$$

gdzie $\eta(\bar{x}, \bar{\beta})$ jest pewną funkcją, zwaną matematycznym modelem badanej zależności, która jest znana z dokładnością do wektora współczynników $\bar{\beta}$.

W ogólnym przypadku w teorii planowego eksperymentu (TPE) rozpatruje się aproksymację funkcji celu za pomocą wielomianu [53]:

$$\eta(\bar{x}, \bar{\beta}) = \beta_0 + \sum \beta_i x_i + \sum \beta_{ij} x_i x_j + \sum \beta_{ii} x_i^2, \quad (5.1.5)$$

gdzie $\bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ są znanymi, zadanymi w obszarze eksperymentu parametrami (składnikami) optymalizacji; $\bar{\beta}(\beta_i, \beta_{ij}, \beta_{ii})$ są współczynnikami regresji podlegającymi określeniu przy znajomości wielkości eksperymentalnych.

Dla rozwiązania większości praktycznych problemów wystarczy następujący zbiór modeli wielomianowych [5]:

1. Model liniowy opisany wzorem

$$\eta(\bar{x}, \bar{\beta}) = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_j, \quad (5.1.5a)$$

2. Model niepełnego wielomianu k - tego stopnia

$$\eta(\bar{x}, \bar{\beta}) = \beta_0 + \sum \beta_j x_j + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq k} \beta_{j_1 j_2} x_{j_1} x_{j_2} + \dots + \beta_{j_1 \dots j_k} x_{j_1} x_{j_2}, \quad (5.1.5b)$$

3. Model niepełnego wielomianu kwadratowego

$$\eta(\bar{x}, \bar{\beta}) = \beta_0 + \sum \beta_j x_j + \sum \beta_{j_1 j_2} x_{j_1} x_{j_2} + \sum_{j=1}^p \beta_{jj} x_j^2, \quad (p \leq k), \quad (5.1.5c)$$

4. Model pełnego wielomianu kwadratowego

$$\eta(\bar{x}, \bar{\beta}) = \beta_0 + \sum \beta_j x_j + \sum \beta_{jj} x_j^2 + \sum \sum \beta_{j_1 j_2} x_{j_1} x_{j_2}. \quad (5.1.5d)$$

W charakterze obszaru planowania wybiera się k - wymiarowy prostopadłościan $A_j \leq x_j \leq B_j$, gdzie A_j, B_j są wartościami dolnego i górnego poziomu zmian składników x_j .

W tej pracy rozpatrzono modele liniowe (5.1.5a) ze zmienną składników na dwóch poziomach (planowanie dwupoziomowe). Przy tym poziom górny (maksymalne znaczenie x_j) będziemy oznaczali dla wygody jako +1 (lub +); zaś poziom dolny (minimalna wartość składnika lub jego brak) będziemy oznaczać przez -1 (lub -). Układ liniowy może być zapisany jako:

$$\tilde{x}_j = \frac{x_j - (A_j + B_j)/2}{(B_j - A_j)/2}. \quad (5.1.6)$$

Powyższy związek przeprowadza prostopadłościan $A_j \leq x_j \leq B_j$ ($j = 1, \dots, k$) w sześcian jednostkowy $\bar{x}$: $|\tilde{x}_j| \leq 1$.

Dla oszacowania parametrów regresji modeli pełnych i niepełnych wielomianów kwadratowych (5.1.5 c,d) koniecznym jest zmienianie składników na 3 poziomach (plan PFEZ^k). Modele takie powinny być rozpatrywane jeśli 5.1.5 a,b nie są adekwatne (tzn. błędy aproksymacji są wyższe od żądanych).

Przykład zastosowania planowania trójpoziomowego dla oszacowania wartości częstości drgań własnych płytki z otworem podano w pracy [107]. Płaszczyzną eksperymentu $\bar{x}$ dla określenia $\bar{\beta}$ będziemy nazywać zbiór punktów $\bar{x}_u$ ($u = 1, \dots, p$) przestrzeni $\bar{x}$,

w których pochodna śledzenia (zbiór wierszy planowania) i odpowiednie wartości W_u określają śledzony zbiór w tych punktach. Liczbę $N = \sum_{u=1}^p W_u$ nazywamy objętością eksperymentu.

Najbardziej prostym planowaniem dwuwymiarowym nazywamy planowanie pełnego składnikowego eksperymentu (PFE) 2^k , który zawiera wszystkie możliwe kombinacje poziomów i składników. Takie planowanie pozwala oszacować wszystkie współczynniki modelu niepełnego wielomianu k -tego stopnia. Jest ono ortogonalne, A-, D-, E- optymalne w obszarze sześciannu $|x_j| \leq 1$. Pod pojęciem A-, D-, E- optymalności w TPE rozumie się takie planowania eksperymentu, które optymalizują odpowiednio diagonalny (wpisany w elipsoidę) prostopadłościan, najdłuższą oś elipsoidy oraz objętość elipsoidy.

Tabela 21.

PLAN EKSPERYMENTU PFE 2^2 .

Macierz planowania planowanie				Oznaczenie kodów	Wektor wyjścia
x_0	x_1	x_2	x_1x_2		
+1	-1	-1	+1	(1)	y_1
+1	+1	-1	-1	(a)	y_2
+1	-1	+1	-1	(b)	y_3
+1	+1	+1	+1	(ab)	y_4

W tabelach 21 i 22 podano rodzaje planowania składnikowego eksperymentu dla $k = 2, 3$. Zakodowane oznaczenia wierszy planowania służą dla skrócenia zapisu macierzy planowania. Wektor wyjścia $\bar{y}$ lub $(\bar{\psi}_{k,n})$ zależy od liczby obserwacji (W_u) w każdym wierszu planowania, które w przypadku ogólnym mogą być dowolne. Planowania PFE 2^k zwykle nie stosuje się dla modeli liniowych ze względu na $\bar{x}$. W podobnych przypadkach dla oszacowania współczynników regresji ($\bar{\beta}$) wystarczy zastosować planowanie typu ułamkowego (składnikowego) eksperymentu lub replik ułamkowych [53], zawierających tylko punkty PFE 2^k , co znacznie zmniejsza objętość eksperymentu.

Na przykład, w celu oszacowania współczynników modeli:

$$\eta(\bar{x}, \bar{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 \quad (5.1.7)$$

wystarczy replika ułamkowa pokazana w tabeli 22 (replika ułamkowa planowania 2^3).

Zawiera ona 4 punkty PFE 2^k , spełniające warunki:

$$x_1 x_2 x_3 = 1 \quad (5.1.7)$$

$$\text{lub } x_3 = x_1 x_2 \quad (5.1.8)$$

Taka replika nazywa się regularną i oznacza się ją jako $RDR 2^{3-1}$. Związki (5.1.7), (5.1.8) nazywamy określonymi poprzez kontrast i związek generujący [53]. Planowanie, zbudowane jako RDR, jak również planowanie PFE 2^k są ortogonalne, A-, D-, E- optymalne na sześcianie jednostkowym dla modelu (5.1.5) [52]. Niekiedy nazywa się je planowaniem efektów głównych.

Tabela 22.

PLAN EKSPERYMENTU PFE 3^2 .

Macierz planowania planowanie								Oznaczenie kodów	Wektor wyjścia
x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$		
+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	(1)	y_1
+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	(a)	y_2
+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	(b)	y_3
+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	(ab)	y_4
+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	(c)	y_5
+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	(ac)	y_6
+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	(bc)	y_7
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	(abc)	y_8

Poniżej podano planowania PFE, zastosowane w tej pracy dla określenia funkcji niejednorodności ψ_k w zadaniach dotyczących drgań płyt i powłok o złożonym kształcie. W przypadku dwuskładnikowej niejednorodności planowanie eksperymentu ma postać przedstawioną w tabeli 21. Planowanie A i D jest tu optymalne [52]. Objętość eksperymentu wynosi $N12$. Dla trójskładnikowej niejednorodności planowanie eksperymentu podano w tabeli 22. Planowanie to jest A-, D- i E- optymalne. Objętość eksperymentu wynosi 24. W przypadku semiskładnikowej niejednorodności planowanie eksperymentu będzie miało charakter przedstawiony w tabeli 23. Jest to optymalne planowanie ze względu na wspomniane rodzaje A-, D-, E-. Objętość eksperymentu wynosi 24.

Tabela 23.

PLAN SEMISKŁADNIKOWEGO EKSPERYMENTU RDR 2⁷⁻⁴.

lp	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	Kod	Wyjście
1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	(a)	y ₁
2	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	(b)	y ₂
3	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	(c)	y ₃
4	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	(d)	y ₄
5	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	(e)	y ₅
6	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	(f)	y ₆
7	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	(g)	y ₇
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	(h)	y ₈

Tzw. planowanie nienasycone głównych efektów, pozwalające na sprawdzenie wiarygodności modelu, może być otrzymane poprzez wykreślenie jednej z kilku kolumn. Np. usuwając z tabeli 22 trzecią kolumnę otrzymujemy dwuskładnikowe planowanie efektów głównych. Jeśli wyjściowe planowanie jest ortogonalne, a co za tym idzie A-, D-, E- optymalne, to nowo otrzymane planowanie będzie miało również te własności [53, 55]. Wykorzystanie w charakterze wyjściowego planowania RDR 2^{k·p} jest celowe, bo pozwala dodatkowo określić współczynniki przy jednoczesnym działaniu niektórych efektów. Takie planowanie w pracy [5] nazywamy kompromisowym. Rozpatrzmy np. RDR 2⁷⁻⁴ generowane poprzez związki:

$$x_4 = x_1 x_2 x_3; \quad x_5 = x_2 x_3; \quad x_6 = x_1 x_3; \quad x_7 = x_2 x_3$$

i opisane w tabeli 23. Pierwsze 4 kolumny regularnej repliki ułamkowej określają nienasycone planowanie ortogonalne określenia współczynników modelu:

$$\psi_{k*}(x_1, x_2, x_3) = \eta(\bar{x}, \bar{\beta}) = \beta_0 + \sum_{j=1}^3 \beta_j x_j \quad (5.1.9)$$

Jeśli model (5.1.9) jest nieadekwatny z danymi eksperymentalnymi, to za pomocą tego planowania można określić współczynniki modelu bardziej dokładnego:

$$\eta(\bar{x}, \bar{\beta}) = \beta_0 + \sum_{j=1}^3 \beta_j x_j + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 \quad (5.1.10)$$

Efektywność stosowanych metod planowania eksperymentu znacznie wzrasta przy zastosowaniu specjalnego zabezpieczenia programowego, zorientowanego na przeprowadzenie planowania i obróbkę rezultatów eksperymentu. Obecnie opracowane są uniwersalne programy analizy regresji przeznaczone do opracowania następujących rezultatów: obliczenia (oszacowania) współczynników regresji, oszacowania ich dyspersji F oraz kryterium Studenta χ [3, 5, 20, 86]. W tej pracy wykorzystano programy opisane w pracy [5].

5.2. Wyniki analizy drgań swobodnych płyt i powłok z niejednorodnością wieloskładnikową

A. Niejednorodność dwuskładnikowa

Wyniki badań eksperymentalnych płyt z niejednorodnością dwuskładnikową pokazano w tabeli 24a, gdzie podano postacie drgań z odpowiadającymi im częstościami. Z tabeli tej wynika, że pojawienie się drugiego składnika niejednorodności w sposób znaczny komplikuje postać drgań płyty, a w szczególności, jeśli drugi składnik różni się od pierwszego (np. poz.3 tabeli 24a: otwór prostokątny i wgłębienie prostokątne). Różnica polega na zakrzywieniu linii węzłowych, pojawieniu się krótkofalowych drgań (drgań oddzielnych części płyty), pojawienie się drgań subharmonicznych itd. W tabeli 21 podane zostały macierze planowania (planowanie eksperymentu i funkcji odchyłki). Opracowanie wyników eksperymentu przy zastosowaniu metody planowania eksperymentu prowadzi do następujących związków dla funkcji niejednorodności ψ_{2a} :

$$\psi_{2a}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \beta_0 + \beta_1 \bar{x}_1^* + \beta_2 \bar{x}_2^*, \quad (5.2.1)$$

$$\text{gdzie } x_1^* [x_3, x_6], \quad x_2^* [x_3, x_5, x_6'].$$

Wartości współczynników regresji $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ dla różnych rodzajów badań niejednorodności płyty podano w tabeli 25 dla trzech pierwszych postaci drgań ($\psi_{21}, \psi_{22}, \psi_{23}$).

W przypadku powłoki pochyłej postacie drgań i wartości częstości drgań podano w tabeli 24b.

Z tabeli wynika, że postacie drgań zmieniają się znacząco przy pojawieniu się drugiego składnika niejednorodności, pojawiają się postacie „diagonalne” (poz.3.1), obserwuje się drgania oddzielnych części płytek (poz.3.3). Wartości częstości drgań własnych zwiększają się. Dla rozpatrywanego przypadku macierz planowania została podana w tabeli 21. Wartości współczynników regresji ($\beta_0^{\sigma}, \beta_1^{\sigma}, \beta_2^{\sigma}$) dla pierwszych trzech postaci drgań podano w tabeli 25.

Tabela 24a.

WARTOŚCI CZĘSTOŚCI I POSTACI DRGAŃ PŁYTKI.

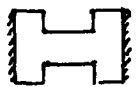
lp	Schemat	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]
1.				
2.				
3.				

Tabela 24b.

WARTOŚCI CZĘSTOŚCI I POSTACI DRGAŃ POWŁOKI.

lp	Schemat	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]
1.				
2.				
3.				

WARTOŚCI WSPÓLCZYNNIKÓW REGRESJI.

lp	Schemat	β_i	Składnik niejednorodności			Uwagi
			Numer częstości drgań			
			I	II	III	
1.	2	3	4	5	6	7
		β_0	1,08	1,16	1,15	$\dot{x}_1^* = x_5$
		β_1	0,09	0,015	0,02	$\dot{x}_2^* = x_5'$
		β_2	0,09	0,015	0,021	
2.		β_0	0,98	1,08	0,910	$\dot{x}_1^* = x_6$
		β_1	-0,23	-0,20	-0,005	$\dot{x}_2^* = x_6'$
		β_2	-0,23	-0,20	-0,005	
3.		β_0	0,92	0,96	1,04	$\dot{x}_1^* = x_6$
		β_1	-0,11	-0,15	0,06	$\dot{x}_2^* = x_3$
		β_2	-0,10	-0,17	0,03	
4.		β_0	1,21	1,16	1,18	$\dot{x}_1^* = x_5^{0\sigma}$
		β_1	0,12	0,03	0,08	$\dot{x}_2^* = x_5'^{0\sigma}$
		β_2	0,12	0,03	0,08	
5.		β_0	0,91	0,90	0,99	$\dot{x}_1^* = x_6^{0\sigma}$
		β_1	-0,16	0,08	0,06	$\dot{x}_2^* = x_6'^{0\sigma}$
		β_2	-0,16	0,08	0,06	
6.		β_0	1,03	0,98	1,01	$\dot{x}_1^* = x_3^{0\sigma}$
		β_1	0,14	0,07	0,07	$\dot{x}_2^* = x_4^{0\sigma}$
		β_2	0,15	0,19	0,08	

B. Niejednorodność trójskładnikowa

Rezultaty badań eksperymentalnych płyty z trzema składnikami niejednorodności podano w tabeli 26. Z tabeli wynika, że pierwszej częstości płyty I,I odpowiada postać podobna do postaci odpowiadającej trzeciej częstości pochyłej płyty, druga - ósmej, a trzecia postać w płycie pochyłej w ogóle nie występuje. Dotyczy to również płytek z trzema składnikami niejednorodności. Częstości drgań własnych płytek o złożonym kształcie są wyższe niż płytek pochyłych nie mniej niż 1,25 razy. Ułożenie linii węzłowych jest bardzo złożone. Macierz planowania dla tego przypadku została podana w tabeli 22.

Opracowanie optymalnych danych prowadzi do wartości współczynników regresji podanych dla trzech pierwszych postaci w tabeli 28.

Postać funkcji niejednorodności jest następująca:

$$\psi_{3,n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \beta_0 + \beta_1 \bar{x}_1^* + \beta_2 \bar{x}_2^* + \beta_3 \bar{x}_3^*; \quad \text{gdzie} \quad \begin{matrix} x_1^* [x_1, x_2, x_3] \\ x_2^* [x_3, x_6, x'_3] \\ x_3^* [x_6, x_7, x_5] \end{matrix} \quad (5.2.2)$$

W przypadku trójskładnikowej niejednorodności powłoki wartości częstości drgań własnych i odpowiadające im postacie drgań podano w tabeli 27. Z tabeli wynika, że dla niektórych kombinacji składników niejednorodności (w tym przypadku 1 i 2) wartości własne obniżają się w porównaniu do powłoki pochyłej. Podobnie jak i w przypadku płytki o złożonym kształcie, nie są wykrywalne pierwsze częstości powłoki pochyłej. Obserwuje się drgania oddzielnych części powłoki.

Macierz planowania i otrzymane wartości odchyłek badanych płyt podano w tabeli 22. Funkcja niejednorodności ma postać wyrażen (3.1.58), przy czym współczynniki $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ i β_3 podano w tabeli 28.

C. Semiskładnikowa niejednorodność

W tabeli 30 podano pierwsze trzy postacie drgań dla płytki (poz.1) i powłoki (poz.2) oraz wartości częstości drgań własnych. Z tabeli wynika, że przy takiej złożoności składników niejednorodności linie węzłowe mają kształty bardziej złożone, niż we wcześniej badanych przypadkach, przy czym postacie drgań płyt i powłok odróżniają się znacznie od siebie. W przypadku płyty obserwowane są drgania jej oddzielnych części (poz.1.2). Postać drgań płytki odpowiadająca trzeciej częstości posiada dwie wygięte linie węzłowe, a postać drgań powłoki odpowiadająca pierwszej częstości - 3 wygięte linie węzłowe.

Tabela 26.

DRGANIA PŁYTEK.

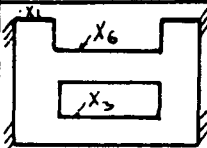
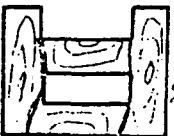
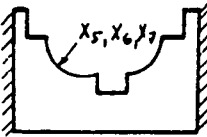
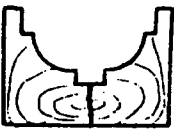
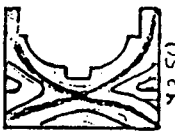
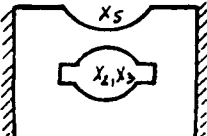
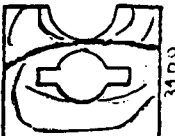
lp	Schemat	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]
1.		 1800	 2200	 5800
2.		 1562	 2150	 4250
3.		 1620	 2200	 3100

Tabela 27.

DRGANIA POWŁOK.

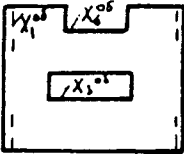
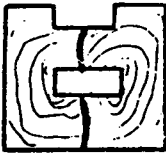
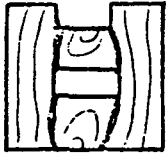
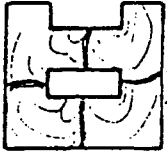
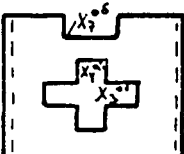
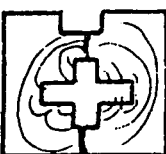
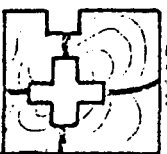
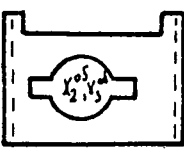
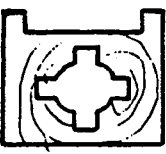
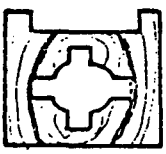
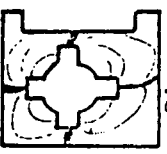
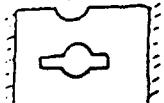
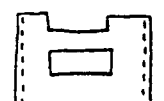
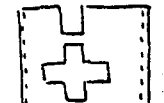
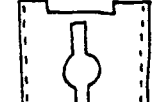
lp	Schemat	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]
1.		 1630	 2100	 3290
2.		 1400	 3420	 4635
3.		 2550	 4500	 5200

Tabela 28.

**WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKÓW REGRESJI DLA
3² SKŁADNIKOWEJ NIEJEDNORODNOŚCI.**

lp	Schemat	β_i	Numer częstości drgań			Uwagi
			I	II	III	
1.		β_0	0,910	0,853	0,963	$\dot{x}_1 = x_1$
		β_1	-0,050	-0,041	-0,127	$\dot{x}_2 = x_3$
		β_2	-0,083	-0,110	-0,080	$\dot{x}_3 = x_6$
		β_3	-0,085	-0,061	0,090	
2.		β_0	1,070	1,010	1,040	$\dot{x}_1 = x_5$
		β_1	0,080	-0,010	-0,050	$\dot{x}_2 = x_6$
		β_2	0,090	-0,009	-0,077	$\dot{x}_3 = x_7$
		β_3	0,080	-0,048	0,080	
3.		β_0	1,038	0,943	0,988	$\dot{x}_1 = x_2$
		β_1	0,055	-0,028	-0,078	$\dot{x}_2 = x_3$
		β_2	0,083	-0,100	-0,097	$\dot{x}_3 = x_5$
		β_3	-0,013	-0,131	-0,161	
4.		β_0	0,904	0,853	0,886	$\dot{x}_1 = x_1^{0\sigma}$
		β_1	-0,099	-0,113	-0,121	$\dot{x}_2 = x_3^{0\sigma}$
		β_2	0,048	0,088	-0,007	$\dot{x}_3 = x_6^{0\sigma}$
		β_3	-0,046	0,018	-0,121	
5.		β_0	1,084	1,074	1,086	$\dot{x}_1 = x_3^{0\sigma}$
		β_1	0,116	0,096	0,041	$\dot{x}_2 = x_4^{0\sigma}$
		β_2	0,004	0,076	0,036	$\dot{x}_3 = x_7^{0\sigma}$
		β_3	0,099	0,044	0,071	
6.		β_0	1,097	1,100	1,049	$\dot{x}_1 = x_2^{0\sigma}$
		β_1	0,010	0,050	-0,099	$\dot{x}_2 = x_4^{0\sigma}$
		β_2	0,103	0,120	0,004	$\dot{x}_3 = x_6^{0\sigma}$
		β_3	0,093	0,126	0,043	

Wartości częstości drgań własnych płytki znacznie wzrosły (przykładowo 1,4 razy), przy czym pierwsza częstość drgań powłoki praktycznie nie uległa zmianie. Macierz planowania eksperymentu w tym przypadku została podana w tabeli 23.

Postać funkcji niejednorodności podano poniżej:

$$\psi_{7,n}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_7) = \beta_0 + \sum_{j=1}^7 \beta_j \tilde{x}_j \quad (5.2.3)$$

Powyżej $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_7$ oznaczają kodowane składniki niejednorodności, odpowiadające płytom i powłokom o złożonym kształcie.

Na bazie przeprowadzonych badań można wysnuć wnioski, że wieloskładnikowość istotnie zmienia postać drgań płyt i powłok w porównaniu do pochyłych płyt i powłok. Linie węzłowe są wygięte i mają złożone kształty. Obserwuje się drgania oddzielnych części konstrukcji i pojawiają się „krótkofalowe” drgania.

NIEJEDNORODNOŚĆ TRÓJSKŁADNIKOWA

Przedział zmian współczynników regresji dla przypadku niejednorodności trójskładnikowej określony jest poprzez nierówności:

$$\begin{aligned} 0,886 \leq \beta_0 \leq 1,10; & \quad -0,121 \leq \beta_1 \leq 0,127; \\ 0,11 \leq \beta_2 \leq 0,120; & \quad -0,161 \leq \beta_3 \leq 0,126. \end{aligned}$$

Kombinację składników niejednorodności obniżają częstości drgań własnych płyty.

Podwyższenie częstości drgań własnych płyt i powłok może być osiągnięte poprzez kombinację składników niejednorodności, co zostało pokazane w tabeli 26 poz.2, 3.

NIEJEDNORODNOŚĆ SEMISKŁADNIKOWA

W tym przypadku współczynniki regresji zmieniają się w przedziałach:

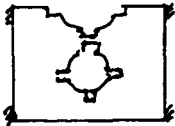
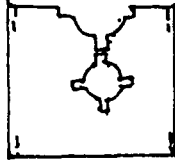
$$\begin{aligned} 0,867 \leq \beta_0 \leq 1,164; & \quad -0,066 \leq \beta_1 \leq 0,099; \\ -0,054 \leq \beta_2 \leq 0,027; & \quad -0,026 \leq \beta_3 \leq 0,027; \\ -0,069 \leq \beta_4 \leq 0,035; & \quad -0,140 \leq \beta_5 \leq 0,076; \\ -0,024 \leq \beta_6 \leq 0,049; & \quad -0,024 \leq \beta_7 \leq 0,098. \end{aligned}$$

Podane kombinacje składników niejednorodności mogą doprowadzić do podwyższenia (ze względu na niejednorodność typu $x_3, x_6, x_7, x_3^{0\sigma}, x_5^{0\sigma}, x_6^{0\sigma}$), jak i obniżenia (ze względu na niejednorodność typu $x_1, x_2, x_4, x_5, x_1^{0\sigma}, x_2^{0\sigma}, x_4^{0\sigma}, x_7^{0\sigma}$) częstości drgań własnych w porównaniu do konstrukcji pochyłych.

Z analizy tabeli 29 wynika, że takie składniki jak $x_2, x_4, x_5, x_2^{0\sigma}, x_4^{0\sigma}, x_7^{0\sigma}$ przy działaniu jednoskładnikowym podwyższają częstotliwości drgań własnych, natomiast przy oddziaływaniu kombinowanym częstotliwości drgań własnych zmieniają się w kierunku zmniejszenia (tabela 27) lub zwiększenia (tabela 24, 26).

Tabela 29.

**WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKÓW REGRESJI
7-io SKŁADNIKOWEJ NIEJEDNORODNOŚCI.**

lp	Schemat	β_i	Numer częstotliwości drgań			Uwagi
			I	II	III	
1.		β_0	1,043	0,867	0,956	
		β_1	-0,099	-0,066	-0,034	
		β_2	-0,024	0,016	-0,054	
		β_3	0,014	-0,016	-0,026	
		β_4	-0,069	0,081	0,035	
		β_5	-0,014	0,076	-0,140	
		β_6	0,031	-0,024	-0,010	
		β_7	0,025	0,098	0,020	
2.		β_0	1,164	1,150	1,040	
		β_1	-0,013	-0,023	-0,003	
		β_2	-0,002	0,027	-0,006	
		β_3	0,094	0,146	0,070	
		β_4	-0,017	-0,012	-0,026	
		β_5	0,025	-0,029	0,031	
		β_6	0,049	0,032	0,039	
		β_7	-0,015	-0,024	-0,017	

**DRGANIA PŁYT I POWŁOK
Z 7-io SKŁADNIKOWĄ NIEJEDNORODNOŚCIĄ.**

lp	Schemat	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]
1.				
2.				

5.3. Obróbka statystyczna i analiza rezultatów eksperymentu

Wyniki eksperymentalne powinny być poddane obróbce statystycznej. Składa się ona z następujących elementów: 1) sprawdzanie wytycznych analizy; 2) oszacowanie współczynników modelu:

$$E\{y(\bar{x})\} = \eta(\bar{x}, \bar{\beta}) = \sum_{j=1}^k \beta_j f_j(\bar{x}) = \bar{\beta}' \bar{F}(\bar{x}); \quad (5.3.1)$$

3) sprawdzenie adekwatności danych eksperymentalnych; 4) sprawdzenie różnych statystycznych hipotez odnośnie współczynników; 5) przewidywanie y_u w niektórych nowych punktach $\bar{x}$.

Rozpatrzmy szczegółowo metody obróbki statystycznej.

A. Prognozy analizy statystycznej i ich sprawdzenie

Zastosowanie metody analizy regresyjnej dla obróbki danych eksperymentalnych jest właściwym wówczas, jeśli błędy przypadkowe $\varepsilon_{ur}(\bar{x})$ spełniają następujące warunki [5]:

1) posiadają wartość oczekiwaną zerową

$$E\{\varepsilon_{ur}(\bar{x})\} = 0; \quad \bar{u} = 1, 2, \dots, p; \quad k = 1, 2, \dots, W_4 \quad (5.3.2)$$

2) posiadają jednakowe dyspersje

$$D\{\varepsilon_{ur}(\bar{x})\} = \sigma^2(y) \quad (5.3.3)$$

3) są niezależne statystycznie;

4) mają rozkład normalny.

Jeśli model (5.1.5) zawiera stałą (tj. $\beta_0 \neq 0$), to $E\{\varepsilon_{ur}(x)\} \neq 0$. Brak spełnienia tego warunku nie prowadzi do dużych błędów analizy [112]. Sprawdzenie stałości dyspersji (5.2) bazuje na porównaniu oszacowania dyspersji:

$$S^2_{u..} = \left\{ \sum_{r=1}^{w_u} \hat{\varepsilon}_{ur}^2(\bar{x}) \right\} / (W_u - 1), \quad (W_u > 1) \quad (5.3.4)$$

$$\text{gdzie} \quad \hat{\varepsilon}_{ur}^2(x) = y_{ur} - \bar{y}_u; \quad \bar{y}_u = \frac{1}{W_u} \sum_{r=1}^{w_u} y_{ur},$$

w tych punktach powierzchni, gdzie doświadczenia pokrywają się ($W_u > 1$).

W charakterze kryterium porównawczego zwykle stosuje się kryteria Bartleta i Kohrena [20] i jeśli rozkład jest normalny, to stosowanie ich jest uzasadnione. Dla sprawdzenia statystycznej niezależności wielkości $\hat{\varepsilon}(\bar{x})$, wstępne wnioski można wysnuć na podstawie zależności graficznych ε podanych w pracy [20].

Sprawdzenie hipotezy normalności rozkładu można przeprowadzić za pomocą kryterium W [5, 100]. Jak wykazują badania [55, 111], to kryterium jest szczególnie efektywne, gdy dysponujemy małą liczbą danych eksperymentalnych.

B. Określenie oszacowań współczynników równania regresji

Najbardziej rozpowszechnioną metodą oceny współczynników modelu (5.1.5) jest metoda najmniejszych kwadratów [1].

Wektor $\hat{\beta} = [\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k]$ określamy jako MNK - oszacowanie, jeśli minimalizuje on sumę wagową kwadratów odchyłek

$$SS_1 = \sum_{u=1}^p W_u [\bar{y}_u - \eta(\bar{x}, \bar{\beta})]^2, \quad (5.3.5)$$

gdzie $\eta(\bar{x}, \bar{\beta})$ jest funkcją składnika niejednorodności w przyjętym modelu $\eta = \sum_{j=0}^k \beta_j x_j$,

średnich wartości eksperymentalnych odchyłek w punktach powierzchni w stosunku do ich aproksymacji określonych wzorem (5.1.5).

MNK - oszacowania otrzymuje się po rozwiązaniu następującego układu równań liniowych (zwanego układem normalnym [5]):

$$|\Phi^T \bar{W}_b \Phi| \hat{\beta} = \Phi^T \bar{W}_b \bar{Y} \quad (5.3.6)$$

gdzie $\bar{W}_b = \text{diag} \{W_1, \dots, W_p\}$,

$$\bar{Y} = [\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_p]^T,$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} & \dots & x_{k1} \\ x_{02} & x_{12} & \dots & x_{k2} \\ \vdots & & & \\ x_{0p} & x_{1p} & \dots & x_{kp} \end{bmatrix},$$

oznaczają odpowiednio diagonalną macierz wagi o wymiarze $[p \times p]$, $\bar{Y}$ - wektor średnich wartości odchyłek w punktach powierzchni, $[\Phi]$ - macierz planowania o wymiarze $[p \times k]$.

Jeśli planowanie eksperymentu nie jest osobliwe, co jest typowe dla większości przypadków stosowanych w praktyce (składniki niejednorodności są statystycznie niezależne), to rozwiązanie układu (5.3.6) ma postać:

$$\hat{\beta} (\Phi^T \bar{W}_b \Phi)^{-1} \Phi^T \bar{W}_b \bar{Y} \quad (5.3.7)$$

C. Analiza statystyczna równań regresji

Po określeniu współczynników regresji należy przeprowadzić analizę statystyczną równań regresji.

Przed wszystkim zacznijmy od określenia końcowej dyspersji charakteryzującej rozkład punktów względem ustalonego równania regresji (dokładność prognozowania):

$$S_1^2 = \frac{SS_1}{f_1^n} = \frac{1}{f_1^n} \sum_{u=1}^p W_u [\bar{y}_u - \bar{\eta}(\bar{x}, \bar{\beta})]^2 = \frac{1}{f_1^n} \sum W_u (\bar{y}_u - \hat{\bar{y}}_u)^2, \quad (5.3.8)$$

gdzie $f_1^n = p - k$ ($p > k$) jest liczbą stopni swobody;

$\bar{y}_u$ jest średnią wartością odchyłki w n-tym wierszu płaszczyzny;

$\hat{\bar{y}}_u$ są prognozowanymi wartościami odchyłek.

Jeśli jest znana dyspersja $S_2^2\{y\}$, charakteryzująca błąd doświadczenia, to można określić F- związki [53] i sprawdzić hipotezę o adekwatności przedstawienia rezultatów przy pomocy wielomianu o zadanym stopniu. Dyspersja charakteryzuje dokładność przeprowadzania eksperymentu, a jego „powtarzalność” określa się związkiem [5]:

$$S_2^2 = \frac{S_u^2}{f_2^n} = \frac{1}{f_2^n} \sum_{r=1}^p \sum_{u=1}^{W_u} (y_{ur} - \bar{y}_u)^2, \quad f_2^n = \sum_{u=1}^p (W_u - 1), \quad (5.3.9)$$

gdzie y_{ur} są wartościami funkcji odchyłek w u -tym wierszu otrzymanym na drodze eksperymentu;

f_2^n określa liczbę stopni swobody z uwzględnieniem „dublowania” eksperymentu.

Miarą adekwatności modelu jest wielkość $F_1 = S_1^2/S_2^2$. Model nazywamy adekwatnym, jeśli:

$$F_1 < F(1 - \alpha; f_1^n; f_2^n), \quad (5.3.10)$$

gdzie $F(1 - \alpha; f_1^n; f_2^n) - 100(1 - \alpha)$ jest parametrem rozkładu Fiszera o liczbach stopni swobody f_1^n, f_2^n ;

α jest wybranym poziomem zależności [53] (w naszym przypadku $\alpha = 0,05$).

Jeśli nierówność (5.3.9) nie jest zachowana, to model jest nieadekwatny.

W tym przypadku, przeprowadzając analizę odchyłek ($\Delta_{ur} = y_{ur} - \hat{\bar{y}}_u$) należy zmienić model lub dobrać lepsze planowanie eksperymentu, lub też przejść do planowania typu PFE2^k. Należy znaleźć przedziały ufności t_j , charakteryzujące błędy w określeniu współczynników regresji i kowariancji $\text{cov}\{\beta_i, \beta_j\}$, określające statystyczną zależność pomiędzy współczynnikami regresji.

Diagonalne elementy macierzy $(\Phi^T \bar{W}_b \Phi)$ określają dyspersję współczynników regresji pomnożonych przez $\sigma^2 \{y\}$.

Elementy niediagonalne określają kowariancję odpowiadających im współczynników regresji. Dlatego macierz $[\Phi^T \bar{W}_b \Phi]$ nazywamy macierzą błędów lub macierzą korelacji. Kowariancje stanowią jakościową miarę tej nieokreśloności, która pojawia się dlatego, że współczynniki regresji określone są niezależnie od siebie. Przy planowaniu ortogonalnym macierz korelacji jest diagonalna i w tym przypadku współczynniki regresji są określane niezależnie od siebie i wszystkie kowariancje są równe zeru $\{\text{cov}\{\beta_i, \beta_j\} = 0\}$.

Dla sprawdzenia znaczenia wartości współczynników stosuje się prawo określania granic ufności dla każdego ze współczynników regresji oddzielnie. Wpływ j -tego składnika określa się jako znaczny przy zadanym poziomie znaczenia α , jeśli [53]:

$$t_j = \frac{\left| \hat{\beta}_j \right|}{\sqrt{c_{jj}} S^2} > t \left(1 - \frac{\alpha}{2}; f^n \right), \quad (5.3.11)$$

gdzie c_{jj} jest j -tą diagonalną wartością macierzy kowariancji otrzymanych na drodze eksperymentu;

$t \left(1 - \frac{\alpha}{2}; f^n \right) - 100 (1 - \alpha) \%$ jest parametrem rozkładu Studenta o f^n stopniach swobody [53];

$$S^2 = \frac{f_1^n S_1^2 + f_2^n S_2^2}{f^n} \text{ jest dyspersją końcową, } f^n = f_1^n + f_2^n.$$

Niekiedy w charakterze wielkości charakteryzującej wkład (znaczenie) współczynników regresji do równania, zawierającego $k+1$ składników, wprowadza się zbiorczy współczynnik korelacji:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - \bar{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2}} \quad (5.3.12)$$

Wielkość R może ulegać zmianie od 0 do +1.

Zbiorczy współczynnik korelacji może być interpretowany jako miara liniowego związku [53] pomiędzy eksperymentalnie obserwowanymi wartościami y i zbiorem wszystkich zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \dots, x_k$, otrzymanych po linearyzacji równania parabolicznego [53].

Jeśli równanie regresji w pełni opisuje wyniki eksperymentu, to $R = 1$. Wpływ przyjętego sposobu analizy na opracowanie statystyczne, a także sposoby unikania błędów opisano w pracach [1, 20, 55].

Jak już wspomniano wcześniej uniwersalne programy analizy regresyjnej zostały rozpracowane i stosuje się je powszechnie w obliczeniach numerycznych. Jako przykład opracowania statystycznego wyników eksperymentu rozpatrzmy przypadek dwuskładnikowej niejednorodności płytki w przypadku analizy pierwszej (podstawowej) częstości drgań (tabela 24 poz.3). Wyniki opracowania podano w tabeli 31. Określimy dyspersję adekwatności wg wzoru (5.3.8):

$$S_1^2 = 3 (0,08)^2 + 3 (0,09)^2 + 3 (0,11)^2 + 0 = 0,08.$$

Dyspersja błędu eksperymentu, zgodnie z (5.3.9):

$$S_2^2 = \frac{1}{f_2^n} \sum_{u=1}^p (2 \cdot 10^{-4} + 75 \cdot 10^{-4} + 41 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-4}) = 15,4 \cdot 10^{-4}.$$

Otrzymujemy stąd $F_1 = 0,5 \cdot 10^2$. Dla $\alpha = 0,05$, $f_1^n = 1$, $f_2^n = 8$ mamy $F = 254,3$. Wobec tego model:

$$y = \psi_{21} = 0,92 - 0,11 \bar{x}_1 - 0,1 \bar{x}_2 \quad (5.3.13)$$

w sposób adekwatny opisuje badany proces.

Tabela 31.

**TABLICA OBRÓBKII WYNIKÓW EKSPERYMENTU DLA 2² SKŁADNIKÓW
NIEJEDNORODNOŚCI PŁYTEK (przypadek poz.3 tabeli 24).**

lp	Plan eksp.	W_u	Y_{ur}	$\bar{Y}$	ε_{ur} $\Delta Y =$ $= Y_{ur} - \bar{Y}$	ε_{ur}^2	$\bar{Y}_u$	$\Delta \bar{Y}_u =$ $= \bar{Y}_{ur} - \bar{Y}_u$	$\Delta \bar{Y}_u^2$	Uwagi
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
1	+1	1	0,99		-0,01	10^{-4}				$Y = 0,92 -$ $-0,11\bar{x}_1 -$ $-0,1\bar{x}_2$ $f_1^n = 4 -$ $-3 - 1$
		2	1,00	1,0	0	0	0,92	0,08	$64 \cdot 10^{-4}$	
		3	1,01		+0,01	10^{-4}				
2	(a)	1	0,98		+0,07	$49 \cdot 10^{-4}$				$f_2 =$ $= \sum_{\alpha=1}^2 (W_{\alpha} -$ $-1) = 8$
		2	0,86	0,91	-0,05	$25 \cdot 10^{-4}$	0,82	0,09	$81 \cdot 10^{-4}$	
		3	0,90		-0,01	$1 \cdot 10^{-4}$				
3	(b)	1	0,96		+0,04	$16 \cdot 10^{-4}$				
		2	0,92	0,92	0	0	0,81	0,11	$121 \cdot 10^{-4}$	
		3	0,87		-0,05	$25 \cdot 10^{-4}$				
4	(ab)	1	0,72		+0,01	$1 \cdot 10^{-4}$				
		2	0,69	0,71	-0,02	$4 \cdot 10^{-4}$	0,71	0	0	
		3	0,71		0	0				

Dla oszacowania znaczenia współczynników korelacji β_j określimy wartości c_{jj} i S wg wzorów (5.3.11):

$$c_{jj} = 12; \quad S^2 = 1,02 \cdot 10^{-2}; \quad t_{\text{tabeln}} = 2,262.$$

Wówczas przedziały ufności zmian współczynników korelacji będą równe:

$$t_0 = 3,03; \quad t_1 = 0,34; \quad t_2 = 0,33.$$

Z powyższych rozważań wynika, że współczynniki β_0 , β_1 i β_2 są znaczące.

Należy podkreślić, że współczynnik β_0 zawiera informację o wzajemnym wpływie składników niejednorodności (w tym przypadku w postaci niejawnej).

Rozpatrzmy teraz model aproksymacji o postaci:

$$\psi_{21}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \beta_0 + \beta_1 \tilde{x}_1 + \beta_2 \tilde{x}_2 + \beta_{12} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \quad (5.3.14)$$

Planowanie eksperymentu PEF 2² pozwala na oszacowanie współczynnika β_{12} . Jednak do oszacowania adekwatności modelu brakuje nam stopni swobody ($f_1^* = 0$).

Rozwiązanie układu (5.3.6) prowadzi do następujących wartości β_i , β_{ij} :

$$\beta_0 = 0,885; \quad \beta_1 = -0,075; \quad \beta_2 = -0,07; \quad \beta_{12} = -0,03.$$

Wówczas:

$$\psi_{21}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 0,885 - 0,075 \tilde{x}_1 - 0,07 \tilde{x}_2 - 0,03 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2. \quad (5.3.15)$$

Dla oszacowania adekwatności i dalszego udokładnienia modelu koniecznym jest stosowanie planowania trójpłaszczyznowego.

5.4. Analiza modeli eksperymentu wieloskładnikowego

Otrzymane w paragrafie 2 związki odniesione są do kodowanego układu eksperymentu wieloskładnikowego. Wobec tego przy ich stosowaniu praktycznym należy przejść do standardowych składników niejednorodności, przyjętych w tej pracy.

Realizuje się to przy pomocy związków (5.1.7). Dla 3³ składnikowej niejednorodności typu poz.1 tabeli 26 (częstość podstawowa) równanie (5.2.2), otrzymane w charakterze zakodowanym ($-0,1 \leq \tilde{x}_j \leq 1,0$):

$$\psi_{31}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = 0,910 - 0,05 \tilde{x}_1 - 0,083 \tilde{x}_2 - 0,085 \tilde{x}_3 \quad (5.4.1)$$

przekształca się w następujące:

$$\psi_{,1}(x_1, x_3, x_6) = 1,146 - 0,120x_1 - 0,166x_3 - 0,170x_6, \quad (5.4.2)$$

gdzie $0,15 \leq x_1 \leq 1,0$, $0 \leq x_3 \leq 1$; $0 \leq x_6 \leq 1$. Porównując związki (5.4.1) i (5.4.2) widać, że w przypadku równania niekodowanego niektóre współczynniki regresji wzrosły dwukrotnie (β_2, β_3) .

Wynika z tego wniosek, że analiza modeli liniowych może być przeprowadzona bez obawy utraty ogólności rozważań, zarówno w przypadku modeli kodowanych, jak i niekodowanych. Oprócz tego zaletą modeli liniowych jest to, że ich analiza sprowadza się do analizy współczynników regresji i do wydzielenia składników niejednorodności, które mają istotne wpływy na funkcję niejednorodności. Im jest większy współczynnik regresji ze względu na wartość bezwzględną, tym większy jest wpływ tego składnika na częstość drgań własnych konstrukcji. Znak współczynnika wskazuje na kierunek zmian częstości.

Bazując na powyższych rozważaniach rozpatrzmy szczegółowo tabele 25, 28 i 29.

NIJEDNORODNOŚĆ DWUSKŁADNIKOWA

Z tabeli 25 wynika, że podobnie jak i w przypadku niejednorodności jednoskładnikowej obniżenie częstości drgań zachodzi przy pojawieniu się otworów i wgłębień typu PR dla płyty i wgłębień typu PP dla powłoki. Przy tym zmiany te obserwowane są dla kilku początkowych wartości częstości drgań. Maksymalne wartości zmian dla analizowanych kombinacji 2^x składnikowych niejednorodności mają płytki (poz.2 tab.25) i powłoki (poz.4,5,6) dla kilku początkowych wartości częstości drgań. Przedziały zmian współczynników są następujące:

$$-0,05 \leq \beta_1 \leq 0,14; \quad -0,005 \leq \beta_2 \leq 0,19; \quad 0,90 \leq \beta_0 \leq 1,21.$$

Jak było wcześniej omówione, jednoczesny wpływ składników niejednorodności był uwzględniany w modelach liniowych w wartościach wyrazu wolnego.

$$\left. \begin{aligned} \psi_{21}^{(1)} &= 0,9 + 0,27x_3 + 0,27x'_3 \\ \psi_{21}^{(2)} &= 1,44 - 0,46x_6 + 0,46x'_6 \\ \psi_{21}^{(3)} &= 1,13 - 0,20x_3 - 0,22x_6 \\ \psi_{21}^{(1\circ\sigma)} &= 0,97 + 0,24x_3^{\circ\sigma} + 0,24x_3'^{\circ\sigma} \\ \psi_{21}^{(2\circ\sigma)} &= 0,91 - 0,32x_6^{\circ\sigma} + 0,32x_6'^{\circ\sigma} \\ \psi_{21}^{(3\circ\sigma)} &= 0,74 + 0,14x_3^{\circ\sigma} + 0,15x_4^{\circ\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (5.4.3)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \psi_{31}^{(1)} &= 1,46 - 0,12 x_1 - 0,166 x_3 - 0,170 x_6 \\
 \psi_{31}^{(2)} &= 0,88 + 0,04 x_3 + 0,18 x_6 + 0,160 x_7 \\
 \psi_{31}^{(3)} &= 0,943 + 0,11 x_2 + 0,106 x_3 - 0,026 x_4 \\
 \psi_{31}^{(1\sigma)} &= 1,069 - 0,265 x_1^{\sigma\sigma} + 0,6 x_3^{\sigma\sigma} - 0,092 x_5^{\sigma\sigma} \\
 \psi_{31}^{(2\sigma)} &= 0,865 - 0,232 x_3^{\sigma\sigma} + 0,008 x_4^{\sigma\sigma} + 0,198 x_7^{\sigma\sigma} \\
 \psi_{31}^{(3\sigma)} &= 0,891 + 0,02 x_2^{\sigma\sigma} + 0,206 x_4^{\sigma\sigma} + 0,186 x_6^{\sigma\sigma}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.4.4)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \psi_{71}^{(1)} &= 1,22 - 0,24 x_1 - 0,048 x_2 + 0,028 x_3 - 0,138 x_4 - \\
 &\quad - 0,028 x_5 + 0,062 x_6 + 0,05 x_7 \\
 \psi_{71}^{(1\sigma)} &= 1,05 - 0,026 x_1^{\sigma\sigma} - 0,004 x_2^{\sigma\sigma} + 0,198 x_3^{\sigma\sigma} - 0,034 x_4^{\sigma\sigma} + \\
 &\quad + 0,05 x_5^{\sigma\sigma} + 0,098 x_6^{\sigma\sigma} - 0,03 x_7^{\sigma\sigma}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.4.5)$$

6. Analiza drgań swobodnych płyt o złożonej płaszczyźnie metodą elementów skończonych

W celu możliwości zastosowania MES-u do badań drgań płyt i powłok o złożonych powierzchniach i porównania efektywności różnych wariantów tej metody rozpatrzmy ich zalety i wady na przykładzie drgań giętych płytki. W charakterze elementu skończonego przyjęto element o postaci prostokątnej i 12-tu stopniach swobody (element Argyrysa). Globalne macierze sztywności (MS) i macierze bezwładności (MM) zostały zbudowane z podziałem płytki na 4, 9 i 16 elementów skończonych. Podano wyniki obliczeń dla płytek o jednej i dwóch niejednorodnościach. Pokazano, że dla płytek z trzema i więcej składnikami niejednorodności, wymagających podziału płytki na większą liczbę elementów skończonych związane jest z pewnymi trudnościami obliczeniowymi, uwarunkowanymi przygotowaniem danych.

6.1. Sformułowanie problemu i sposobu rozwiązania

Rozpatrzmy drgania swobodne gięte płytki o dowolnym kształcie. Będziemy zakładać, że materiał płytki jest izotropowy, a drgania są małe i jesteśmy w zakresie stosowalności praw Kirchhoffa -Lowa. Oprócz tego, z rezultatów eksperymentu wynika, że tłumienie drgań jest małe i można je pominąć.

Zgodnie z ogólną teorią metody elementów skończonych układ ciągły (ograniczony powierzchnią Ω o granicy $\partial\Omega$), dla którego poszukuje się minimum funkcjonału:

$$\delta [E(w)] = 0, \quad E(w) = V_{\max} - \omega^2 T_{\max} \quad (6.1.1)$$

jest aproksymowany zbiorem N elementów o skończonych rozmiarach (dyskretyzacja fizyczna) [12, 45]. Elementy skończone (ES) powinny być dostatecznie małe, aby przemieszczenia $w(x,y,t)$ w dowolnym punkcie elementu można było opisać poprzez przemieszczenia niektórych punktów węzłowych.

A zatem przy stosowaniu MES odszukanie funkcji (nieznanej) $w(x,y,t)$ jest zamienione poprzez określenie jej wartości w skończonej liczbie punktów węzłowych obszaru Ω . Poszukiwana ciągła funkcja opisana jest w sposób przybliżony poprzez parametry

dyskretyzacji. Parametrami dyskretyzacji mogą być przemieszczenia, siły lub czas modelu dyskretnego. W tej pracy wykorzystuje się metodę przemieszczeń, gdzie w charakterze takich parametrów wybiera się wartość funkcji i ich pochodnych w punktach węzłowych. Zbudowane w ten sposób funkcje powinny w sposób jednoznaczny określać wartości funkcji poszukiwanej w dowolnym punkcie podobszaru poprzez jej parametry węzłowe, a także spełniać warunki, zapewniające zbieżność kolejnych przybliżeń rozwiązań do rozwiązania dokładnego przy zmniejszeniu rozmiarów podprzestrzeni (elementów skończonych) lub poprzez wprowadzenie dodatkowych punktów węzłowych. Lokalna aproksymacja funkcji $w(x, y, t)$ na elementach skończonych pozwala rozpatrywać je niezależnie (niezależnie od zachowania innego ES i od tego, jaką pozycję zajmie rozpatrywany ES w obszarze wyjściowym Ω). Kształty ES mogą być dowolne, a nawet krzywoliniowe [45], co jest istotne dla płyt i powierzchni o złożonym kształcie.

Wielu autorów zauważa, że MES jest podobna do metody Ritza, gdzie funkcje poszukiwane określone są nie w całej przestrzeni Ω , a na elementach skończonych [70]. Jednak przy klasycznym wariacie metody Ritza dodanie nowych funkcji współrzędnych nie zmienia współrzędnych funkcji wykorzystywanych wcześniej. W MES dodanie nowych współrzędnych związane jest z innym podziałem na elementy i węzły i może spowodować zmianę wszystkich funkcji. Tak więc w MES-ie przy przechodzeniu od jednego przybliżenia do drugiego nie mamy do czynienia z ciągiem funkcji współrzędnych, jak w metodzie Ritza, a z ciągiem wyborów funkcji współrzędnych. Komplikuje to procedurę przygotowania danych wyjściowych dla złożonych powierzchni Ω .

Z rozważań tych wynika, że MES jest metodą siatkowo-wariacyjną: z jednej strony możliwe jest rozbicie powierzchni na elementy skończone, a z drugiej strony, wariacyjne rozwiązanie problemu. Pozwala to na wyodrębnienie następujących etapów [48, 70]:

1. Idealizacja przestrzeni Ω .

W przestrzeni Ω wybiera się zbiór skończony punktów węzłowych, które oznaczmy jako $T = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, gdzie n jest liczbą węzłów.

Na bazie punktów węzłowych T zostaje naniesiona siatka podziału obszaru na skończoną liczbę podobszarów (elementów skończonych) $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$. Ich zbiór stanowi model całej przestrzeni:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i \quad (6.1.3)$$

Podprzestrzenie są zamknięte i nie przecinające się, czyli:

$$\emptyset = \Omega_i \cap \Omega_j, \quad \text{dla } i \neq j, \quad (6.1.4)$$

gdzie $\emptyset$ oznacza zbiór pusty.

Wybór rozmiaru, kształtu i liczby węzłów dla elementów skończonych zależy od rodzaju rozpatrywanego problemu, rodzaju wyjściowego obszaru, gradientu samej funkcji poszukiwanej i innych składników, które określają dokładność rozwiązania problemu. Warto zauważyć, że zmiana wyjściowej konstrukcji poprzez zbiór ES jest rozumiana w sensie równości energii konstrukcji i jej modelu dyskretnego.

Dla niektórych konstrukcji (łuków, ram i pokryw belkowych) analiza energetyczna prowadzi do otrzymania modelu dyskretnego, dokładnie opisującego zachowanie się wyjściowej (analizowanej) konstrukcji.

2. Wybór podstawowych niewiadomych.

W charakterze podstawowych niewiadomych w wariacie metody przemieszczeń (najbardziej szeroko stosowany wariant MES) stosuje się węzłowe wartości poszukiwanej funkcji i jej pochodnych cząstkowych do m-tego rzędu. Niekiedy, dla zabezpieczenia warunków zbieżności metody wystarczy włączyć w liczbę niewiadomych węzłów tylko część z ogólnej liczby pochodnych $(m - p)$ - tego rzędu i potem je całkowicie wyredukować (np. przy rozwiązywaniu zadań opisanych quasi-harmonicznym równaniem $(2m = 2)$, w charakterze niewiadomej w każdym węźle wystarczy przyjąć wartość określanej funkcji w_i). Ogólna liczba niewiadomych dla elementu skończonego określa się liczbą stopni swobody, od której zależy dokładność uzyskania poszukiwanej funkcji w objętości każdego z elementów skończonych, a co za tym idzie i w całym obszarze (Ω) .

3. Określenie wielomianu interpolacji.

Określenie wielomianu interpolacji, którym przybliża się poszukiwana funkcja $w(x, y, t)$ w objętości elementu skończonego jest podstawowym etapem MES-u. Współczynniki tego wielomianu opisuje się poprzez wartości nieznanych węzłów elementu. Podstawowa trudność określenia wielomianu polega na tym, że otrzymane wielomiany dla każdego elementu skończonego powinny zabezpieczać ciągłość funkcji $w(x, y, t)$ i jej pochodnych do $(m - 1)$ rzędu włącznie w całym obszarze Ω . Jeśli chodzi o pochodne m-tego rzędu, to w każdym z wielomianów interpolacyjnych powinny pozostawać człony, zabezpieczające ich przejście do wartości stałych przy zmniejszeniu rozmiarów ES. Przy tym pochodne m-tego rzędu mogą mieć nieciągłości pierwszego rzędu wzdłuż granic styków ES.

Biorąc pod uwagę te warunki można przy budowie funkcjonału $E(w)$ dla całej powierzchni Ω wykorzystać zależność:

$$E(w) = \sum_{i=1}^N E^i(w), \quad (6.1.5)$$

gdzie $E^i(w)$ jest wartością funkcjonału $E(w)$ w zamkniętej objętości i -tego elementu skończonego.

Ze zwiększeniem liczby ES suma (6.1.5) będzie równomiernie dążyć do dokładnego znaczenia funkcjonału $E(w)$ dla całej przestrzeni Ω .

Załóżmy, że wielomian interpolacyjny dla i -tego ES jest określony i może być przedstawiony w postaci:

$$w^{(i)}(x, y, t) = \sum \varphi_k(x, y) u_k^i(t) = [\varphi(x, y)]^{(i)} \{u(t)\}^{(i)}, \quad (6.1.6)$$

gdzie $\{u\}^{(i)}$ jest wektorem kolumną, składającą się z r nieznanych węzłów i -tego ES;

$[\varphi(x, y)]^{(i)}$ jest wektorem wierszem, elementami którego są nieznane funkcje współrzędnych punktów $\varphi_k^{(i)}(x, y)$.

Postać tych funkcji określa się poprzez geometrię wybranego elementu, klasę problemu i stanu wektora $\{u\}^{(i)}$. Wówczas aproksymację funkcji $w(x, y, t)$ w całej przestrzeni Ω określa się poprzez sumę:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^N w^{(i)}(x, y, t) = [\varphi(x, y)] \{u(t)\}, \quad (6.1.7)$$

gdzie $[\varphi(x, y)] = [[\varphi]^{(1)}, [\varphi]^{(2)}, \dots, [\varphi]^{(N)}]$,

$$\{u(t)\} = \{\{u\}^{(1)}, \{u\}^{(2)}, \dots, \{u\}^{(N)}\} \quad (6.1.8)$$

jest wektorem nieznanych węzłów dla pełnej przestrzeni. Wprowadzając do funkcjonału $E(w)$ wyrażenie (6.1.7) dla funkcji $w(x, y, t)$ otrzymamy pewną określoną funkcję nieznanych węzłów $E(u)$.

4. Układ równań podstawowych.

Minimalizując funkcję $E(u)$ ze względu na wszystkie elementy wektora w całej przestrzeni otrzymujemy:

$$\frac{\partial E(u)}{\partial \{u\}} = \left\{ \frac{\partial E}{\partial u_1}, \frac{\partial E}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial E}{\partial u_n} \right\} = 0, \quad (6.1.9)$$

lub

$$\frac{\partial E(u)}{\partial \{u\}} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial (w^i)}{\partial \{u\}^{(i)}} = 0 \quad (6.1.10)$$

Przy rozwiązywaniu problemów liniowych funkcjonal $E(u)$ jest funkcją kwadratową ze względu na „ u ” i jej pochodne i wobec tego, i -ty składnik lewej części (6.1.10) przyjmie wartość:

$$\frac{\partial E(w^i)}{\partial \{u\}^{(i)}} = [K_0]^{(i)} \{u\}^{(i)} + [M_0]^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\}^{(i)} + \{p\}^{(i)}, \quad (6.1.11)$$

gdzie $[K_0]^{(i)}$; $[M_0]^{(i)}$ są macierzami kwadratowymi o rozmiarach $(r \times r)$, a współczynniki tych macierzy określa się poprzez własności ośrodka;

$\{p\}^{(i)}$ jest wektorem kolumną, charakteryzującym wpływy zewnętrzne i posiada wymiar (r) .

Macierze sztywności i mas elementów skończonych określone są poprzez wzory:

$$[K_0]^{(i)} = \frac{E h^3}{24 (1 - \nu^2)} ([c]^{-1})^T \left(\iint_{\Omega} [Q]^T [D] [Q] dx dy \right) [c]^{-1},$$

$$[M_0]^{(i)} = \frac{\rho h}{2} ([c]^{-1})^T \left(\iint_{\Omega} [\varphi]^T [\varphi] dx dy \right) [c]^{-1}, \quad (6.1.12)$$

przy czym przyjęto następujące oznaczenia:

- [c] jest macierzą współrzędnych węzłów w lokalnym układzie współrzędnych;
- [Q] jest macierzą określoną poprzez związki, wg których wylicza się deformacje poprzez przemieszczenie lub macierz przemieszczeń;
- [D] jest macierzą stałych sprężystości;
- [φ] jest macierzą funkcji postaci;

znak (-1) oznacza odwrócenie macierzy;

znak (T) oznacza transpozycję macierzy.

Całkowanie przy określaniu $[K_0]^{(i)}$ i $[M_0]^{(i)}$ przeprowadza się na płaszczyźnie ES na średniej powierzchni. Ponieważ przedstawienie w jawnej postaci wszystkie macierze sztywności i mas rozpatrywanych elementów praktycznie nie jest możliwe, to poniżej podano ich wartości dla konkretnie rozpatrywanych zadań.

Dla zadań nieliniowych macierze $[K_0]^{(i)}$, $[M_0]^{(i)}$ są funkcją wektora $\{u\}^{(i)}$.

Dla całej konstrukcji mamy (w przypadku drgań giętnych):

$$[K] \{u\} + [M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} + \{P(t)\} = 0, \quad (6.1.13)$$

gdzie $[K]$, $[M]$ są macierzami quasi-diagonalnymi rzędu $(r \times n)$;

$\{P(t)\}$ jest wektorem o wymiarze $(r \times N)$.

Równanie (6.1.13) zostało zapisane w lokalnym układzie współrzędnych. W celu dalszych uproszczeń celowym jest przejście od lokalnego układu do globalnego układu współrzędnych.

Jeśli oznaczymy przez $\{\bar{u}\}$ wektor podstawowych niewiadomych w globalnym układzie współrzędnych, to związek $\{u\}$ z $\{\bar{u}\}$ zapiszemy w postaci [121]:

$$\{u\} = [H] \{\bar{u}\}, \quad (6.1.14)$$

gdzie $[H]$ jest macierzą o wymiarze $(r \times N)$. Jej struktura określa się poprzez geometrię elementu, klasę zagadnienia brzegowego i przyjętym porządkiem numeracji dla elementów wektora $\{u\}$ i $\{\bar{u}\}$.

W tym przypadku równanie (6.1.12) przyjmie postać:

$$[\bar{K}] \{\bar{u}\} + [\bar{M}] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\bar{u}\} + \{P(t)\} = 0, \quad (6.1.15)$$

gdzie

$$\begin{aligned} [\bar{K}] &= [H]^T [K] [H], \\ [\bar{M}] &= [H]^T [M] [H], \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

są globalnymi macierzami współczynników przy podstawowych niewiadomych w ogólnym układzie współrzędnych dla całego obszaru Ω .

Równanie (6.1.5) uzupełnia się poprzez zbiór m warunków brzegowych na powierzchni ograniczającej obszar Ω [118]:

a) głównych lub kinematycznych

$$G_i \left(w, \dots, \frac{\partial^{\alpha+\beta} w}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}, x, y \right) = f_i(x, y) \quad (6.1.17)$$

$$(1 \leq \alpha + \beta \leq m-1, \quad i = 1, 2, \dots, r)$$

b) rzeczywistych lub siłowych

$$E_i \left(w, \dots, \frac{\partial^{\alpha-\beta} w}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}, x, y \right) = f_i(x, y) \quad (6.1.18)$$

$$(m \leq (\alpha + \beta)_{\max} \leq (2m-1), \quad j = r+1, \dots, m)$$

i warunkami początkowymi

$$w|_{t=0} = f^{(1)}(x, y); \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = f^{(2)}(x, y) \quad (6.1.19)$$

5. Określenie częstości drgań własnych i odpowiadających im postaci.

Po uwzględnieniu warunków początkowych i brzegowych równanie ruchu w MES-ie nieco się upraszcza do postaci:

$$[K_G] - \omega^2 [M_G] = 0 \quad (6.1.20)$$

Z równania (6.1.20) wynika równanie:

$$\det([K_G][M_G]^{-1} - \omega^2 [E]) = 0 \quad (6.1.21)$$

służące do określenia częstości drgań własnych. Dla znalezionych częstości określa się postacie drgań własnych. MES pozwala na oszacowanie częstości drgań własnych z góry [124].

Zatrzymajmy się na niektórych osobliwościach stosowania MES-u, przy obliczeniach stosowanych w analizie dynamicznej.

Przyjmuje się, że numeracja węzłów poszczególnych elementów powinna być przeprowadzona w określonym porządku (wg określonego prawa) co prowadzi do pasmowej struktury macierzy globalnych sztywności i mas. Zależność szerokości pasma ma postać [89]:

$$B = (R + 1)Q', \quad (6.1.22)$$

gdzie B jest szerokością pasma; Q' jest liczbą stopni swobody w węźle; R jest maksymalną liczbą największej różnicy pomiędzy numerami węzłów w oddzielnym elemencie. Jednak w pracy [47] zakłada się, że struktura macierzy sztywności i mas może być dowolna (niekoniecznie pasmowa).

Istnieją dwie możliwości określenia funkcji postaci [70]:

a) w postaci jawnej (np. $\varphi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \dots$);

b) w postaci niejawnej (np. przy pomocy funkcji Hermita).

W naszym przypadku stosuje się funkcje postaci jawnej.

Rozróżnia się trzy sposoby przedstawienia macierzy sztywności i mas [57]:

a) utworzenie bezpośrednich wyrażeń dla energii potencjalnej i kinetycznej, przy czym współczynnikami macierzy sztywności i mas są współczynniki stojące przy odpowiednich niewiadomych;

b) drogą określenia stanów;

c) sposobem analitycznym.

W naszym przypadku wykorzystano pierwszy i trzeci sposób.

Utworzenie globalnych macierzy mas i sztywności jest możliwe przy zastosowaniu teorii grafów [32], lub macierzy przejścia $[A]_i$. W tej pracy wykorzystano metodę macierzy przejścia, a zasada jej budowy została podana niżej.

Przy rozwiązywaniu dużej liczby równań stosuje się metodę Gaussa lub Choleckiego [32]. W tej pracy stosowano te dwie metody. Najbardziej efektywna okazała się druga metoda.

6.2. Algorytm obliczeń MES-u

Opiszemy algorytm rozwiązania problemu drgań giętych płytek o złożonym kształcie.

1. W obszarze wypełnionym przez kształt płytki wprowadzamy prostokątną siatkę (elementy skończone) i określamy współrzędne węzłów $\{x_i, y_i\}$.
2. Zadajemy w węzłach ES przemieszczenia w zależności od wybranego modelu. W naszym przypadku jest to ugięcie normalne płyty i kąty obrotu normalnej $W, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}$.
3. Aproksymujemy funkcję przemieszczeń normalnych średniej płaszczyzny płyty wewnątrz elementu skończonego z numerem (i) wielomianu:

$$W(\zeta, \eta, t) = \sum_{i=1}^{12} \varphi_i(\zeta, \eta) u_i(t), \quad (6.2.1)$$

gdzie $\varphi_i(\zeta, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2 \zeta + \alpha_3 \eta + \dots$

4. Określamy współczynniki α_i ($i = 1 + 12$) z warunku jednakowych $W, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}$ z przemieszczeniami czterech węzłów ES.
5. Budujemy macierze pomocnicze: $[C]$, $[Q]$, $[D]$, $[\varphi]$.
6. Odwracamy macierz $[C]$ przy pomocy programu standardowego.
7. Budujemy macierze $[K_o]^{(ii)}$ i $[M]^{(ii)}$ wg wzorów (6.1.22).
8. Budujemy macierze przejścia od układu lokalnego do globalnego (macierze $[A_i]$ ($i = 1 + N$)).
9. Tworzymy globalne macierze sztywności $[\bar{K}]$ i mas $[\bar{M}]$ układu (płytki) z uwzględnieniem styku ES.

10. Dokonujemy korekcji globalnych macierzy $[\bar{K}]$ i $[\bar{M}]$ z uwzględnieniem warunków brzegowych płytki. Otrzymujemy macierze: $[K_G]$ i $[M_G]$.

11. Otrzymujemy równanie dla określenia częstości drgań własnych:

$$\det \{ [K_G][M_G]^{-1} - \omega^2 [E] \} = 0 \quad (6.2.2)$$

12. Obliczamy częstości drgań własnych przy użyciu metody Choleckiego lub Gaussa.

13. Określamy postacie drgań wg wzoru (6.1.7).

6.3. Model elementu skończonego

W charakterze przykładu zastosowania algorytmu MES-u rozpatrzmy obliczenie drgań giętych płytki przy jej podziale na 4 elementy skończone. Niech płytka pochyła zamocowana na sztywno wzdłuż dwóch przeciwległych stron i swobodna ze względu na dwa pozostałe brzegi posiada wymiar $2a \times b \times 2h$. Grubość płytki jest stała (rys.24 a). Jako element skończony wybierzmy ćwiartkę płytki (prostokąt 1), o współrzędnych: $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)$.

Przemieszczenie dowolnego punktu wewnątrz MS w lokalnym układzie współrzędnych ma postać (rys.24 b):

$$W(\zeta, \eta, t) = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \dots + \varphi_{18} u_{18}$$

gdzie $\varphi_i(\zeta, \eta)$ są funkcjami określającymi postać ugięcia płytki ($i = 1 + 16; 13 + 18$), a

$u_i(t)$ oznacza przemieszczenie węzłów elementu.

Z rys.24 b wynika, że dla elementu 1 mamy:

$$W(a_0, b_0) = u_1; \quad W(a_0, b_0) = u_4; \quad W(a_0, b_0) = u_{13}; \quad W(a_0, b_0) = u_{16};$$

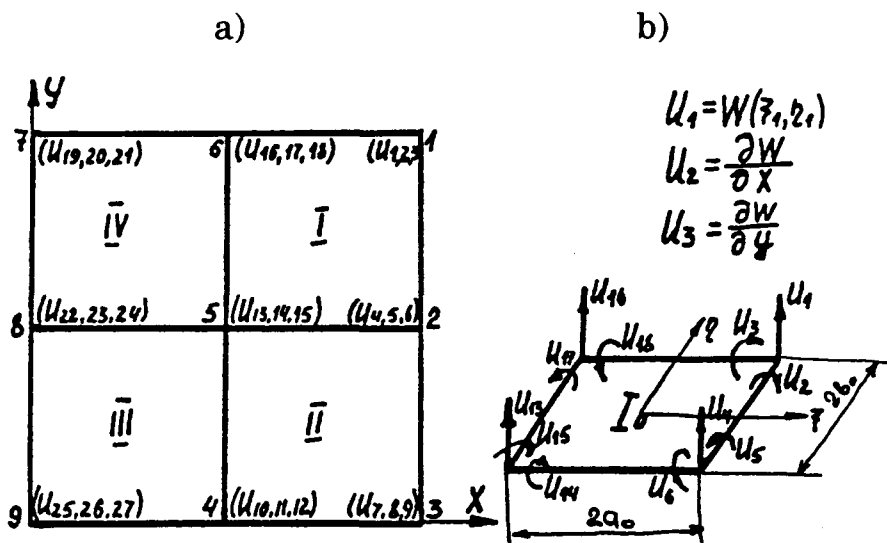
$$\left. \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right|_{w.T.1} = u_2; \quad \left. \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right|_{w.T.2} = u_5; \quad \left. \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right|_{w.T.5} = u_{15}; \quad \left. \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right|_{w.T.6} = u_{17}; \quad (6.3.1)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \eta} \right|_{w.T.1} = u_3; \quad \left. \frac{\partial W}{\partial \eta} \right|_{w.T.2} = u_6; \quad \left. \frac{\partial W}{\partial \eta} \right|_{w.T.5} = u_{14}; \quad \left. \frac{\partial W}{\partial \eta} \right|_{w.T.6} = u_{18};$$

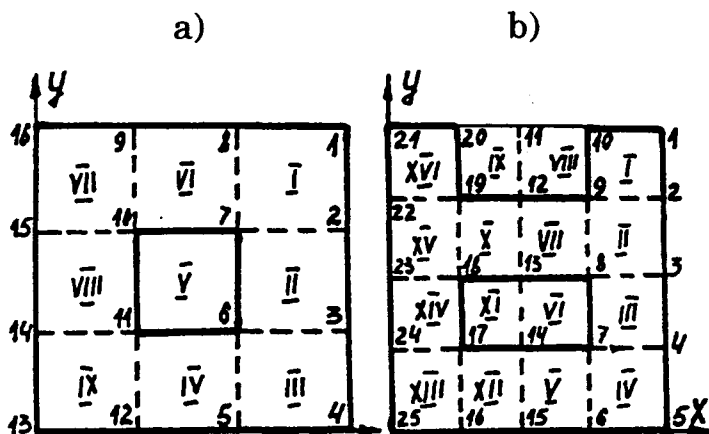
φ_i w tych węzłach były równe 1, a w pozostałych -zero. Ponieważ element skończony posiada

12 stopni swobody, to wyrażenie ogólne dla φ przyjmiemy w postaci [70]:

$$\varphi(\zeta, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2 \zeta + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \zeta^2 + \alpha_5 \zeta \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \zeta^3 + \alpha_8 \zeta^2 \eta + \alpha_9 \zeta \eta^2 + \alpha_{10} \eta^3 + \alpha_{11} \zeta^3 \eta^3 + \alpha_{12} \zeta^2 \eta^3 \quad (6.3.2)$$



Rys. 24. 4^x elementowy model płytki (a) i element Argyrisa (b) -
- obliczenia z zastosowaniem MES.



Rys. 25. Modele płytki dla MES-u z jednym (a) i dwoma (b)
składnikami niejednorodności.

Aby określić dla każdej wartości φ_i dowolne stałe α_i należy rozwiązać 12 układów z 12-toma niewiadomymi.

Rozwiązując te równania przy pomocy programów standardowych otrzymujemy wartości φ_i i przemieszczenia dowolnego punktu wewnątrz elementu. W naszym przypadku będą one miały postać:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{\zeta \eta}{a_0 b_0} + \frac{3\zeta^2 \eta}{a_0^2 b_0} + \frac{3\zeta \eta^2}{a_0 b_0^2} + \frac{2\zeta^3 \eta}{a_0^3 b_0} + \frac{2\zeta \eta^3}{a_0 b_0^3}, \\ \varphi_2 &= -\frac{\zeta^2 \eta}{a_0^2 b_0} + \frac{\zeta^3 \eta}{a_0^3 b_0}, \\ \varphi_3 &= -\frac{\zeta \eta^2}{a_0 b_0^2} + \frac{\zeta \eta^3}{a_0 b_0^3}, \\ \varphi_4 &= \frac{3\zeta^2}{a_0} + \frac{\zeta^3}{a_0^2} + \frac{\zeta^2 \eta}{a_0 b_0} - \frac{\zeta^3 \eta}{a_0^2 b_0}, \\ \varphi_5 &= \frac{\zeta^2}{a_0} + \frac{\zeta^3}{a_0^2} + \frac{\zeta^2 \eta}{a_0 b_0} - \frac{\zeta^3 \eta}{a_0^2 b_0}, \\ \varphi_6 &= \frac{\zeta \eta}{a_0} + \frac{2\zeta^2 \eta}{a_0 b_0} - \frac{\zeta \eta^3}{a_0 b_0^2}, \\ \varphi_{13} &= \frac{\zeta \eta}{a_0 b_0} + \frac{3\eta^2}{b_0^2} - \frac{3\zeta^2 \eta}{a_0^2 b_0} - \frac{3\zeta \eta^2}{a_0 b_0^2} - \frac{2\eta^3}{b_0^3} + \frac{2\zeta^3 \eta}{a_0^3 b_0}, \\ \varphi_{14} &= \frac{\zeta \eta}{b_0} + \frac{2\zeta^2 \eta}{a_0 b_0} - \frac{\zeta^3 \eta}{a_0^2 b_0}, \\ \varphi_{15} &= -\frac{\eta^2}{b_0} + \frac{3\eta^2}{a_0 b_0} + \frac{2\eta^3}{b_0^2} - \frac{2\eta^3}{a_0 b_0^2}, \\ \varphi_{16} &= 1 - \frac{3\zeta^2}{a_0^2} + \frac{2\zeta^3}{a_0^3} + \frac{\zeta \eta}{a_0 b_0} - \frac{2\zeta^3}{a_0^3} + \frac{3\zeta^2 \eta}{a_0^2 b_0} + \frac{3\zeta \eta^2}{a_0 b_0^2} + \frac{2\eta^3}{b_0^3} + \frac{2\zeta^3 \eta}{a_0^3 b_0} + \frac{\zeta \eta^3}{a_0 b_0^3}, \\ \varphi_{17} &= \zeta - \frac{2\zeta^2}{a_0} + \frac{\zeta \eta}{b_0} + \frac{\zeta^3}{a_0^2} + \frac{2\zeta^2 \eta}{a_0 b_0} - \frac{\zeta^3 \eta}{a_0^2 b_0}, \\ \varphi_{18} &= \eta - \frac{\zeta \eta}{a_0} + \frac{2\eta^2}{b_0} + \frac{\eta^3}{b_0^2} + \frac{2\zeta \eta^2}{a_0 b_0} - \frac{\zeta \eta^3}{a_0 b_0^2}. \end{aligned} \right. \quad (6.3.3)$$

Podstawiając W w wyrażeniu na energię kinetyczną i potencjalną dla płyt lub do równań (6.1.10) otrzymujemy wartości $[K_0]^{(i)}$ i $[M_0]^{(i)}$. Analogicznie wartości $[K_0]^{(ii)}$ i

$[M_0]^{(i)}$ można otrzymać, wykorzystując związki (6.1.12). W tym przypadku koniecznym jest zbudowanie macierzy pomocniczych $[C]$, $[Q]$, $[D]$, $[\phi]$ [70, 89]. W tabelach N1.34,35 podano macierze sztywności i mas ES w postaci liczb dla rozpatrywanej płytki z parametrami:

$$2a = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}; \quad 2b = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}; \quad 2h = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m};$$

$$E = 3,46 \cdot 10^7 \text{ kPa}; \quad \rho = 10,2 \cdot 10^{-6}; \quad \nu = 0,33.$$

Dla elementów skończonych II, III i IV macierze mas i sztywności buduje się w sposób podobny.

6.4. Rezultaty badań drgań płytek o złożonym kształcie przy zastosowaniu MES

Analizę drgań płytek o złożonym kształcie rozpatrzmy na przykładzie obliczeń częstości drgań własnych płytki z prostokątnymi otworami. Niech płytka prostokątna będzie osłabiona centralnie położonym otworem o wymiarze $2a_0 \times 2b_0$. Rozpatrzmy przypadek sztywnego mocowania płytki z dwóch przeciwległych brzegów i dwóch pozostałych - swobodnych. Podzielimy badaną płytkę na 9 prostokątnych elementów skończonych, jak to pokazano na rys.25 a. Rzymskie cyfry na rys.25 określają numer elementu skończonego, natomiast arabskie - numery węzłów. W tym przypadku będziemy mieli 4 grupy elementów skończonych: A. Elementy I, II, VII, IX; B. Elementy IV, VI; C. Element V. Zbudujemy, jak było pokazane w poprzednim paragrafie, macierze sztywności i mas elementów skończonych, które dla każdej z grup A - B będą jednakowe. Dla elementu V, określającego otwory, macierze sztywności i mas będą niezerowe. Biorąc pod uwagę, że w każdym węźle ES mamy 3 stopnie swobody otrzymujemy dla całej konstrukcji płytki 48 stopni swobody. Przejście od macierzy lokalnych do globalnych następuje wg wzorów (6.1.16).

Dla obliczenia macierzy przejścia $[H_i]$ wprowadzimy uogólniony układ współrzędnych jak pokazano na rys.25.

W przypadku 4-ech elementów modelu ($i = 4$) mogą one mieć postać:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & & & 0 \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 \\ 0 & & & & & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & & & 0 \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 \\ 0 & & & & & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.4.1)$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & & 0 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ 0 & & & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad H_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & & 0 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 1 & 1 \\ 0 & & & & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Z postaci macierzy (6.2.2) widać, że macierze $[H_i]$ mają wymiary macierzy globalnych $[\bar{K}]$ i $[\bar{M}]$ i składają się z zer, za wyjątkiem tych wierszy i kolumn, które odpowiadają węzłom ES, gdzie elementy macierzy są równe 1.

Po zbudowaniu macierzy podstawowych $[\bar{K}]$ i $[\bar{M}]$ w nowym układzie współrzędnych należy uwzględnić warunki brzegowe dla całej płytki. Rozpatrywana płytka jest sztywno zamocowana z dwóch przeciwnych brzegów i dlatego odpowiednie przenumeryowania 1, 2, 3, ..., 12 i 37, 38, ..., 48 są równe zeru. Wykreślając odpowiednie kolumny i wiersze w $[\bar{K}]$ i $[\bar{M}]$ otrzymujemy globalne macierze sztywności $[K_G]$ i mas $[M_G]$ o wymiarach 24×24 .

Częstości drgań własnych są określane z równań (1.5.1.24).

Z tabeli 32 widać, że pierwsze dwie wartości częstości drgań własnych dla płytki pochyłej dostatecznie dokładnie określone są przez model 4-ro elementowy. Błędy oszacowania wynoszą odpowiednio 3,1% i 1,6%. Wyższe częstości określane są z błędem powyżej 5,2%. Zarówno 4- elementowe jak i 16- elementowe modele praktycznie w bardzo niewielkim stopniu wpływają na poprawienie dokładności kilku pierwszych częstości, ale zmniejszają błędy oszacowań odpowiednio 3-ech kolejnych częstości do 5,2%.

Analogiczny przykład był dyskutowany w pracy [70] przy podziale płytki na 2 i 4 elementy skończone przy określaniu podstawowej częstości drgań własnych.

Z powyższych rozważań wynika, że dla oszacowania pierwszych 5-ciu wartości częstości drgań własnych pochyłej płytki wystarczy wykorzystać model 9-cio elementowy. Prowadzi to do znacznego skrócenia czasu obliczeń.

W charakterze przykładów stosowania 9-cio i 16-to elementowego modelu do obliczeń płytek z jedno- i dwuskładnikową niejednorodnością w tabeli 36 podano przykłady obliczeń pierwszych pięciu wartości częstości drgań własnych i rezultaty badań metodami eksperymentalnymi.

Tabela 32.

WYNIKI OBLICZEŃ CZĘSTOŚCI DRGAŃ PŁYTEK O ZŁOŻONYM KSZTAŁCIE ZA POMOCĄ MES-u.

Ip	Schemat płyty	Metoda badania	Liczba ES	Wartości częstotliwości [Hz]					
				f ₁	f ₂	f ₃	f ₄	f ₅	f ₆
1		MES	4	1386,1	1610	2942,1	3186,2	3996,3	5232,3
			9	1229,3	1590	2712,2	3106,4	3878,5	5044,6
		EKS	16	1263,1	1528	2641,1	3496,2	3741,1	4814,1
		błąd	%	1281	1503	2505	3419	3669	4625
2		błąd		3,1	1,6	8,5	7,5	5,8	5,2
		MES	9	1214,2	1305,6	2738,3	3089,3	3604,4	4791,0
			16	1208,3	1346,1	2518,2	3323,1	4156,2	4512,8
		EKS		1177	1327	2466	3241	3965	4200
3		błąd	%	3	9	2,8	4,9	9	8
		MES	9	1280,2	2508,1	2991,9	3691,5	4348,1	5510,2
			16	1265,1	2341,3	2632,1	3581,4	4367,2	5541,1
		EKS		1221	2131	2570	3402	4321	4478
4		błąd	%	5	10,9	2,4	8,5	1	24
		MES	9	1147,2	2304,6	2900,3	3421,9	4949,8	6205,1
			16	1130,2	2394,2	2920,2	3381,4	4628,4	6167,2
		EKS		1051	2378	2850	3244	4480	5080
5		błąd	%	2,1	3	1,7	7	10,0	21,6
		MES	9	1409	2355,9	3099,1	3959	4562,4	6916,8
			16	1526,3	1941,2	2936,4	3916,2	4818,3	6814,1
		EKS		1507	1762	2798	3638	4419	5883
		błąd	%	6,6	14	10,7	8,2	9	16,6

Z tabeli 36 wynika, że błędy obliczeń przy pomocy MES nie przekraczają 9% dla pochyłej płytki i płytki z otworami (kwadratowymi) do piątej częstości i dla podstawowej częstości wszystkich badanych płytek. Inne wartości częstości drgań własnych określone są z dokładnością do $10,9 \pm 24\%$.

Metoda teoretyczno- doświadczalna prowadzi w tym przypadku do wyników dokładniejszych. Błędy obliczeń częstości drgań własnych przy zastosowaniu tej metody nie przekracza $10\% \pm 15\%$.

Na podstawie danych przytoczonych w tym rozdziale można wysnuć następujące wnioski:

1. Synteza metody teoretyczno- eksperymentalnej z aparatem teorii eksperymentu planowego pozwala na zbadanie klasy problemów związanych z drganiami płytek i powłok i związanych z pojawieniem się w nich niejednorodności konstrukcyjnych.
2. Podano liniowe modele (związki) prowadzące do oceny częstości drgań własnych płytek i powłok o dwóch, trzech i semiskładnikowych niejednorodnościach.

Eksperymenty prowadzą do wniosków, że przy zastosowaniu otrzymanych związków błędy obliczeń nie przekraczały 16%.

3. Otrzymane związki pozwalają na oszacowanie wpływu dowolnego składnika niejednorodności (większy współczynnik regresji odpowiada większemu wpływowi) na wartości częstości drgań własnych płytki lub powłoki.

Oprócz tego, znak tego współczynnika wskazuje na zwiększenie (jeśli +) lub zmniejszenie (jeśli -) wartości częstości drgań własnych, ze względu na rozpatrywany składnik niejednorodności.

4. Zastosowanie teorii planowego eksperymentu pozwala również rozwiązywać problemy optymalizacji konstrukcyjnie - niejednorodnych płytek i powłok.

7. Wyniki badań eksperymentalnych drgań płytek i powłok o złożonym kształcie i stosowanych w przyrządach techniki elektronicznej

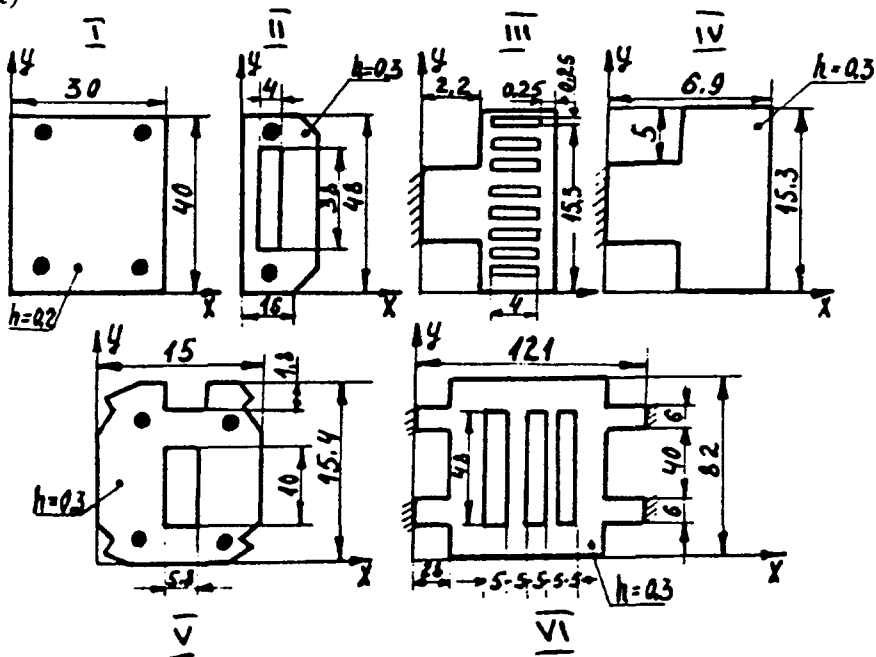
W tym rozdziale podane są rezultaty badań eksperymentalnych drgań swobodnych i wymuszonych płytek i powłok, stanowiących elementy przyrządów techniki elektronicznej (PTE). Podane zostały wartości częstości drgań własnych i amplitudy, oraz zbudowano dla niektórych elementów charakterystyki amplitudowo- częstościowe.

7.1. Obiekty analizy

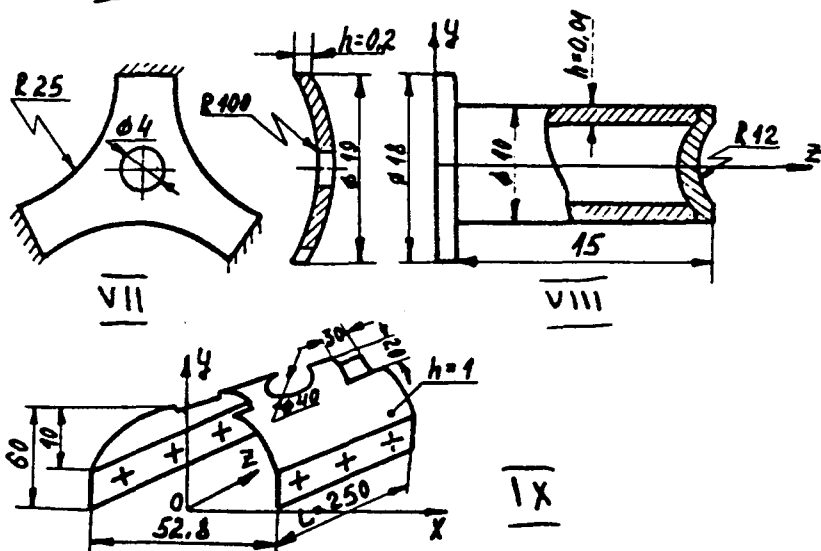
Schematy badanych płytek i powłok podano na rys. 26 a, b. Z rys. 26 a wynika, że badane płytki posiadają stałą grubość oraz prostokątne otwory, wyfrezowania na obrzeżach oraz lokalne mocowania. Płytki wykonane były z molibdenu o następujących charakterystykach mechanicznych: $E = 3,46 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}^2$; $\rho = 10,2 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$; $\nu = 0,33$. Badanymi powłokami (rys.31 b) były zarówno walcowe (poz. VIII) jak i pochyłe (poz. VII, IX). Materiałem powłok 1, 2 był molibden; powłoki 3 spawy typu DIT o następujących charakterystykach mechanicznych: $E = 0,6 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}^2$; $\rho = 2,6 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$; $\nu = 0,34$. Badane płytki i powłoki posiadały następujące wymiary i osobliwości konstrukcyjne.

1. Płytką N1. Wymiary płytki 40×30 mm, grubość 0,2 mm. Mocowanie płytki w przyrządzie realizuje się w 4-ech „punktach” o średnicy 2 mm.
2. Płytką N2. Jest analogiczna do płytki N1, ale posiada defekty wyrobu w postaci braku smarowania.
3. Płytką N3 posiada wymiary 4,8×1,6 mm, grubość 0,1 mm. Wymiary otworu prostokątnego wynoszą 0,4×5,8 mm. Mocowanie dwupunktowe. Fazki płytki pod kątem 45° o wymiarach 0,5 mm.
4. Płytką N4 posiada wymiary 15,4×6,9 mm i grubość 0,3 mm. Wybrania materiału symetryczne z dwóch stron o wymiarach 2,2×5 mm. Prostopadłe do najdłuższej strony w odległości 0,25 mm od krawędzi znajduje się 11 prostokątnych otworów o wymiarach 4×0,25 mm. Mocowanie płytki jest sztywne (spaw) wzdłuż krótszego boku.

a)



b)



Rys. 26. Schematy badanych płytek i powłok.

5. Płytką N6 posiada wymiary 15,4×6,9 mm i grubość 0,3 mm. Wymiary prostokątnego otworu centralnie położonego wynoszą 5,8×10,4 mm. Wymiary wybrania materiału na krawędzi wynoszą 5,8×1,8 mm. Mocowanie w wyrobie zrealizowane było w 4-ech „punktach” o wymiarze 2 mm.
6. Płytką N7 posiada wymiary 121×82 mm i grubość 0,3 mm. Centralnie położone wybrania materiału na krawędzi mają wymiary 40×28 mm. Płytką posiada trzy prostokątne, symetrycznie rozłożone względem środka płytki otwory o wymiarach 5×48 mm każdy. Mocowanie w wyrobie jest sztywne wzdłuż krótkich części płytki. W badanych płytkach „punktowe” mocowanie zrealizowano konstrukcyjnie przy pomocy sztywnych ceramicznych prętów, wstawionych w otwory płytki i łączonych poprzez nawęglanie. Średnica mocowania wynosi 2 mm.
7. Powłoka N1 jest sferyczną pochyłą powłoką o średnicy 19 mm. Promień krzywizny powłoki jest równy 100 mm. Średnica otworu centralnego wynosi 4 mm. Promień symetrycznie położonych (pod kątem 120°) wybrań materiału wynosi 25 mm. Grubość powłoki 0,2 mm. Mocowanie powłoki w wyrobie jest sztywne.
8. Powłoka N2 jest cylindryczną o średnicy zewnętrznej 10 mm i grubości 0,1 mm. Z jednej strony krawędź powłoki jest przymocowana na sztywno do masowej podstawy, a z drugiej strony mocowany jest segment sferyczny ($R = 12\text{mm}$) wygięty w stronę powłoki i posiadający sztywność znacznie wyższą niż sztywność powłoki cylindrycznej. Długość cylindrycznej powłoki wynosi 15 mm.
9. Powłoka N3 jest pochyłą cylindryczną o wymiarach: promień 40 mm, wysokość 60 mm, szerokość 80 mm, długość 250 mm. Grubość powłoki wynosi 1 mm. Wyfrezowania materiału są jednakowe o wymiarach 30×20 mm. Średnica otworu położonego centralnie wynosi 40 mm. Mocowanie powłoki w wyrobie realizuje się za pomocą śrub M3 z każdej strony.

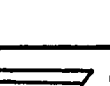
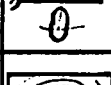
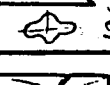
7.2. Drgania swobodne

A. Płyty

Rezultaty badań drgań swobodnych niektórych płytek o złożonym kształcie podano w tabeli 33, w której, podobnie jak w przypadkach poprzednich, oznaczono częstotliwości drgań własnych i odpowiadające im postacie drgań.

Tabela 33.

WARTOŚCI CZĘSTOŚCI I POSTACI DRGAŃ ELEMENTÓW PTE.

lp	Schemat	x_i	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_4 [Hz]	f_5 [Hz]
1.	I	x_1	 1700	 2100	 3880	 4800	 5000
2.	I	x_1	 1420	 1420	 1900	 3200	 4250
3.	II	x_1 x_3	 5701	 7050			
4.	III	x_1 x_3	 1664	 2241	 3594	 4089	 9864
5.	IV	x_1	 1082	 4439	 3499	 3733	 4584
6.	V	x_1 x_4 x_3	 2580	 3840	 2830		
7.	VI	x_1 x_4	 1850	 2500	 6900	 7400	 15500
8.	VII	x_1^{os} x_2^{os}	 6090	 13000			
9.	VIII	x_1^{os}	 9864	 10065	 19660		
10.	IX	x_1^{os} x_2^{os} x_3^{os} x_5^{os}	 1392	 3060	 4172		

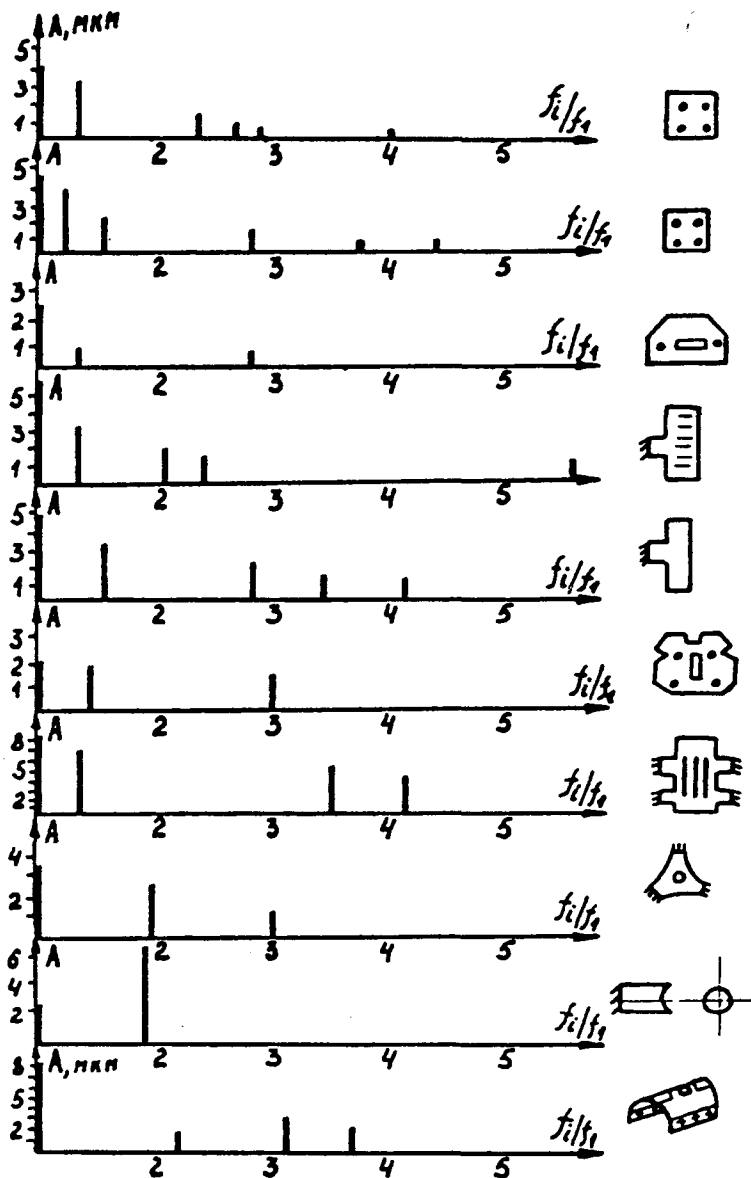
Z analizy tabeli wynika, że dla różnych PTE występują różne postacie drgań. Np. dla płytki N3 zarejestrowano tylko 2 postacie drgań o 2 i 3 liniach węzłowych, przy czym dwie z nich przechodzą przez „punkt” mocowania. Częstości drgań własnych odpowiednio wynoszą: 5401 Hz i 7050 Hz. Częstości te są bliskie częstościom drgań postaci pochyłej płytki.

Pierwsze dwie pozycje tabeli (płytki N1) wskazują, jak można przy pomocy zarejestrowanych postaci drgań znaleźć „defekt” (odchylkę) w konstrukcji badanej płytki. Np. pozycja 2 odróżnia się od pozycji 1 tym, że w tym przypadku było słabsze mocowanie w jednym z „punktów” co doprowadziło (jak widać z tabeli) do obniżenia wartości częstości drgań własnych, do pojawienia się nowych postaci drgań (poz. 2.2, 2.4), do wykrzywienia linii węzłowych. Porównanie pozycji 4 i 5 wskazuje na istotny wpływ istnienia szeregu prostokątnych otworów (szczelin) na spektrum postaci drgań płytki. Z przeprowadzonego porównania widać, że wartości częstości drgań własnych płytki z otworem są wyższe, niż w płytce bez otworu. Linie węzłowe także różnią się znacznie, szczególnie w obszarze wyższych harmonicznych. W przypadku płytek N3 powstaje jakby węzłowa powierzchnia, która ulegała niewielkim zmianom od przedziału częstości (2-iej, 3-iej, 4-iej i 5-iej postaci), przemieszczając się wzdłuż powierzchni płytki i tylko przy bardziej wysokich częstościach znowu przybiera kształt linii zakrzywionej. W płytce pochyłej (bez szczelin) linie węzłowe pozostają liniami w całym przedziale zmian oprócz postaci drugiej i trzeciej.

Pomijając stosunkowo znaczną złożoność kształtu płytki N7 jej postacie drgań nieznacznie różnią się od płytki N1. Osobliwością postaci drgań są drgania (różne) jej części w miejscach gwałtownej zmiany kształtu i na wyższych harmonicznych.

Widmo częstości drgań własnych dla badanych płytek zostało podane na rys.27. Z rysunku tego wynika, że dla każdej z płytek można znaleźć podprzedziały częstości drgań, wolne od zjawisk rezonansowych i wskazać na możliwości stosowania płytek w konkretnych wyrobach. Np. dla płytki N1 można zarekomendować, ze względu na brak częstości rezonansowych w reżimie pracy, podprzedział Δf od 0 do 1000 Hz. Podobne wnioski można wyciągnąć i dla pozostałych badanych płytek.

Z analizy obszarów możliwego zastosowania płytek można wyciągnąć wniosek, że płytką o największej sztywności jest płytka N2, a najbardziej podatną jest płytka N4 (może ona być zalecana przy stosowaniu tylko w przedziale częstości do 1000 Hz).



Rys. 27. Częstości drgań własnych elementów PTE.

B. Powłoki

Wyniki badań drgań powłok podano w tabeli 33 (poz. VII - IX). Wynika z niej, że zbiór zarejestrowanych postaci drgań jest znacznie mniejszy niż w przypadku płytek, przy czym wartość częstości drgań dwóch pierwszych powłok jest znacznie wyższa od elementów wykonanych z płytek. Pochyła powłoka cylindryczna, posiadająca znaczne (w porównaniu z pozostałymi wymiarami PTE) wymiary gabarytowe, posiada pierwszą częstość drgań równą 1800 Hz. Postacie drgań powłoki N2 są bliskie postaciom drgań belki typu konsoli. Bardziej złożone postacie były obserwowane w przypadku powłoki N3, i one mogą być porównane do przeprowadzonych wcześniej badań (7.2 i 7.3). Widmo częstości drgań badanych powłok, pokazane na rys.27 wskazuje, że największa odchyłka pomiędzy częstościami drgań własnych zachodzi (u wszystkich powłok) dla pierwszej i drugiej częstości. Pierwsze dwie powłoki mogą być wykorzystane w gotowych wyrobach w przedziale $0 \div 2500$ Hz, a trzecia w przedziale od 0 do 1500 Hz.

7.3. Drgania wymuszone

W celu podjęcia końcowej decyzji odnośnie zastosowań badanych elementów PTE w konstrukcjach należy dysponować informacją dotyczącą rozkładu amplitud drgań (wygięć) płytek i powłok przy częstościach rezonansowych i ich charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych. Rozpatrzmy to zagadnienie bardziej szczegółowo.

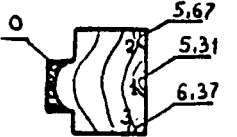
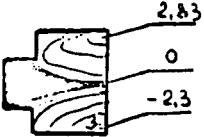
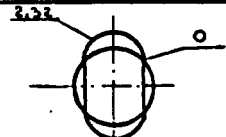
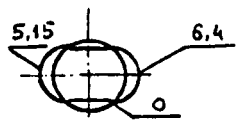
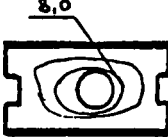
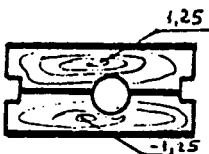
Rozkład linii równych amplitud był podany wcześniej w tabelach przy badaniu drgań swobodnych, dlatego dalej będziemy rozpatrywać tylko maksymalne wartości amplitud drgań elementów przy określonych wymuszeniach zewnętrznych. Obciążenia dynamiczne działające na badane elementy były przekazywane poprzez miejsca ich mocowania, tj. kinematycznie. Wielkość obciążenia była określana poprzez zadawane przyspieszenie wzbudnika. Dla ułatwienia budowy charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych obciążenia były przeliczane na postać amplitudy wymuszenia wg wzoru:

$$A = \frac{250 J_g}{f_n^2}, \quad (7.3.1)$$

gdzie J_g i f_n są wielkością przyspieszenia i częstotliwością wibracji sinusoidalnej, a A jest amplitudą drgań (w mm).

Tabela 34.

WARTOŚCI AMPLITUD DRGAŃ WYMUSZONYCH ELEMENTÓW PTE.

lp	f_1 [Hz]	K_g	Postać i amplitudy (μm) drgań	f_2 [Hz]	K_g	Postać i amplitudy (μm) drgań
1.	5101	5		7050	9,7	
2.	1664	38		2167	57	
3.	2580	26		3890	21	
4.	6090	105		13000	42	
5.	9864	23		10065	64	
6.	1322	6		3060	10	

Dla płytek wartości maksymalnych amplitud i odpowiadające im amplitudy wymuszenia podano w tabeli 34 dla dwóch pierwszych częstości drgań własnych. Na schematach płytek zaznaczono punkty (1, 2, 3) posiadające maksymalne wartości amplitud (dla danej częstości). W celu porównania otrzymanych rezultatów w tabeli podano wartości współczynników dynamiczności (K_g) wyliczanych poprzez wzór:

$$K_g = \frac{A_E}{A_W}, \quad (7.3.2)$$

gdzie A_E , A_W są amplitudami drgań elementu i wzbudzenia na danej częstotliwości.

Z tabeli wynika, że największy współczynnik dynamiczności posiada płytka N2 (bez otworu), a w szczególności na drugiej częstości drgań własnych ($K_g = 57$).

Płytką z wyfrezowaniami i otworem (N2) posiada współczynnik K_g dwa razy mniejszy. Najmniejszy współczynnik K_g posiada płytka N1 (dla drugiej częstości) i równy 9,7.

Z przedstawionych rezultatów wynika, że podczas rezonansów płytki są intensywnie wzbudzane, co świadczy o małym dekrementie tłumienia drgań.

Na rys.28 podano charakterystyki A-CZ (amplitudowo- częstotliwościowe) dla płytek N 1 - II, 2 - III, 3 - V dla dwóch pierwszych częstości drgań własnych: linią ciągłą zaznaczono charakterystyki A-CZ przy przejściu częstości od wartości mniejszych do większych, a linią przerywaną - na odwrót.

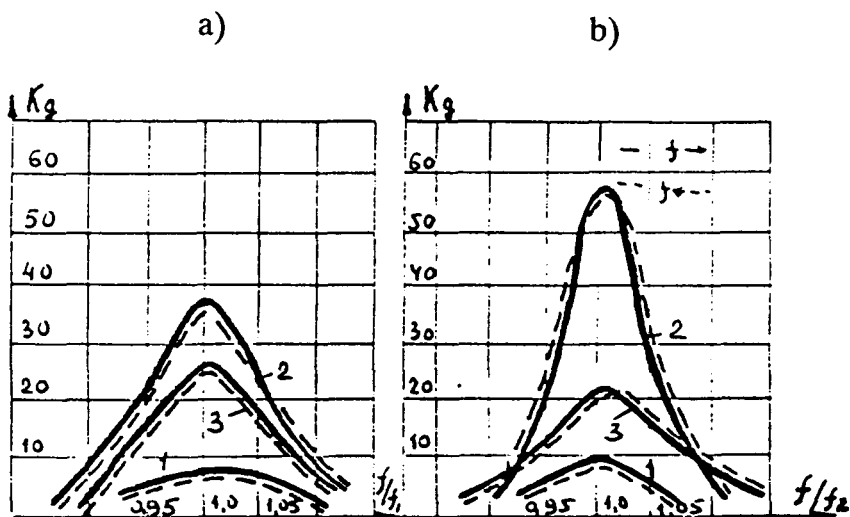
Z rys.28 wynika, że charakterystyki A-CZ płytek są liniowe dla pierwszych dwóch częstości. Analogiczne charakterystyki otrzymuje się również dla innych płytek.

W tabeli 34 podano maksymalne wartości amplitud dla badania powłok. Z tabeli wynika, że największy współczynnik wzmocnienia drgań powłoki N1 jest równy 105 (odpowiada to częstości podstawowej). W przypadku drugiej powłoki K_g nie przekracza 6,4. Powłoka N3 ma $K_g = 10$. W celu zbudowania charakterystyki A-CZ powłok określano wartości amplitud drgań w punkcie 1 i w przedziale częstotliwości.

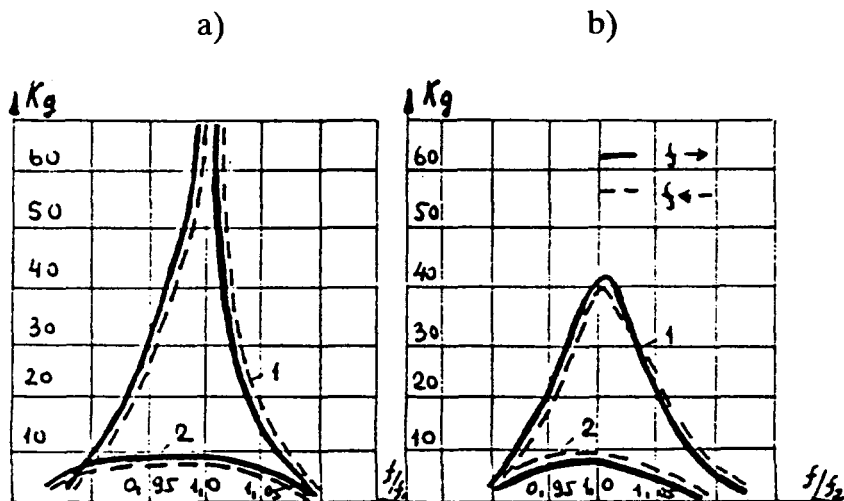
Na rys.29 podano charakterystykę A-CZ dla powłok N 1-VII, 2-IX. Z tego rysunku wynika, że i w przypadku powłoki charakterystyki te są liniowe.

Z analizy wyników badań drgań wymuszonych powłok wynika, że pierwsze dwie powłoki mogą być stosowane w wyrobach w reżimach częstotliwościowych do 10 kHz.

Powłoka N3 może być stosowana w przedziale do 1800 Hz. Jednakże biorąc pod uwagę, że powłoka N3 jest tylko „kożuchem” wyrobu i na efektywność tego wyrobu wpływa nieznacznie, można zalecić stosowanie jej w bardziej szerokim przedziale częstotliwości.



Rys. 28. Charakterystyki amplitudowo - częstotściowe płytek (1-P, 2-S, 3-U z rys.23) dla pierwszej (a) i drugiej (b) częstotliwości drgań własnych.



Rys. 29. Charakterystyki amplitudowo - częstotściowe (1-UP, 2-IX z rys.23) dla pierwszej (a) i drugiej (b) częstotliwości drgań własnych.

7.4. Porównanie stosowanych metod

Porównanie stosowanych metod będzie przeprowadzone w stosunku do otrzymanych rezultatów eksperymentu. Metody eksperymentalne były testowane na konstrukcjach dobrze zbadanych w mechanice ciał sprężystych - dotyczyły okrągłych pochyłych płytek.

Rozpatrzmy niektóre przykłady oszacowań częstości drgań własnych płytek i powłok.

Przykład N1.

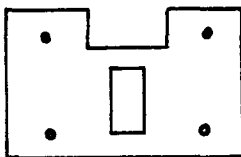
Oszacujmy częstość drgań własnych płytki II z rys.26. W tym przypadku mamy: $x_1 = 0,143$, $x_3 = 0,4$. Wartości funkcji niejednorodności dla pierwszych 3^x częstości i dla podanych wartości x_1 i x_3 wynoszą [57]:

$\psi_{21} = 1,007$ dla pierwszej częstości; $\psi_{22} = 1,099$ dla drugiej częstości; $\psi_{23} = 1,260$ dla trzeciej częstości. Po obliczeniach otrzymujemy $f_1 = 1786$ Hz; $f_2 = 2246$ Hz; $f_3 = 3806$ Hz.

Błędy w porównaniu do eksperymentu wynoszą odpowiednio: 6,7 %; 3,5 % i 3 %.

Przykład N2.

Rozpatrzmy schemat obliczeniowy płytki N V z rys.26 pokazany na rys.30.



Rys. 30. Schemat obliczeniowy z przykładu N2.

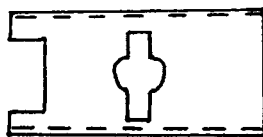
W tym przypadku mamy: $x_1 = 0,30$; $x_4 = 0,31$; $x_7 = 0,62$. Na podstawie związków [58] znajdujemy dla 3^x wartości częstości drgań własnych $\psi_{31} = 0,98$; $\psi_{32} = 0,81$;

$\psi_{33} = 0,93 + 0,127 x_1 + 0,097 x_4 + 0,067 x_7 = 1,04$. Następnie znajdujemy wartości częstości, które wynoszą: 2870 Hz, 4434 Hz i 6298 Hz. Błędy ich określenia wynoszą 11%, 12% i 6%.

Przykład N3.

Rozpatrzmy schemat obliczeniowy powłoki N IX z rys.26, pokazany na rys.31. W tym przypadku $x_2^{05} = 0,2$; $x_3^{05} = 0,5$.

Dla powłoki pochyłej na podstawie [18] otrzymujemy następujące wartości trzech pierwszych częstości: $f_1 = 1680$ Hz; $f_2 = 4100$ Hz; $f_3 = 5260$ Hz. Wartości funkcji niejednorodności dla pierwszych trzech częstości będą następujące [58]: $\psi_{31} = 1,067$; $\psi_{32} = 0,836$; $\psi_{33} = 0,848$.



Rys. 31. Schemat obliczeniowy z przykładu N3.

Następnie wyznaczamy wartości częstości drgań własnych powłoki konstrukcyjnie niejednorodnej, które wynoszą: $f_1 = 1574$ Hz; $f_2 = 3418$ Hz; $f_3 = 4386$ Hz. Błędy określania tych częstotliwości wynoszą 16 %, 10,5 % i 6 %.

Metoda elementów skończonych dla przykładów 1 i 2 prowadzi do błędów dla pierwszych trzech częstotliwości rzędu $15 \div 20\%$. A zatem metoda TEM jest bardziej dokładna niż MES (w przypadku badanych modeli).

Przeprowadzone badania pozwalają na wyciągnięcie następujących wniosków:

1. Badane płytki i powłoki o złożonym kształcie posiadają częstotliwości drgań własnych w przedziale $10^3 \div 10^4$ Hz. Współczynnik wzmocnienia dynamicznego wynosił od 5 do 100.
2. Charakterystyki amplitudowo- częstotliwościowe płytek i powłok elementów są bliskie liniowym.
3. Wartości logarytmicznych dekrementów tłumienia są małe.
4. Przeprowadzone badania pozwoliły określić obszary stosowalności elementów PTE w konkretnych wyrobach przemysłowych.
5. Z porównania stosowanych metod (TEM i MES) wynika, że największą dokładność przy oszacowaniu widma częstotliwości drgań zapewnia metoda teoretyczno-eksperymentalna zarówno w przypadku jedno- jak i wieloskładnikowej konstrukcyjnej niejednorodności. Błędy oszacowań nie przekraczają 16% (dla płytek 12%, a dla powłok 16%).

8. Zakończenie i wnioski

Podane rezultaty badań drgań giętych płyt i powłok o złożonym kształcie pozwalają na wyciągnięcie następujących wniosków:

I. Przedstawiona w tej pracy klasyfikacja konstrukcji płytek i małych powłok o złożonym kształcie z uwzględnieniem konstrukcyjnej niejednorodności pozwala na prowadzenie systematycznej analizy ze względu na niektóre składniki oraz na pewne uogólnienia w celu otrzymania jednej spójnej teorii dotyczącej konstrukcyjnej niejednorodności.

II. Zastosowanie teorii planowego eksperymentu w metodzie teoretyczno-eksperymentalnej badań drgań z jednoskładnikową niejednorodnością pozwala uogólnić tę teorię na układy mechaniczne (konstrukcje) z niejednorodnością wieloskładnikową. Zastosowanie liniowego modelu planowania eksperymentu doprowadziło do określenia funkcji niejednorodności $\psi_{kp}(x_1, x_2, \dots, x_7)$ dla szeregu ważnych w sensie teoretycznym i praktycznym nowych zadań drgań ciał sprężystych. Otrzymane związki dają dobre rezultaty dotyczące oceny częstości drgań przy dwu-, trój- i wieloskładnikowej niejednorodności. Błędy aproksymacji (maksymalne) dla pierwszych trzech wartości częstości drgań własnych nie przekraczają 16%.

III. Dokonano analizy wpływu jednoskładnikowych niejednorodności konstrukcyjnych (otwory, wybrania materiału, niejednorodność mocowania) na widmo częstości drgań własnych:

A. Płytki

1. Otwory okrągłe i prostokątne typu PP podnoszą wartości częstości drgań własnych przy następujących niejednorodnościach: $x_2 \geq 0,4$; $x_4 \geq 0,15$ do 40%. Wybrania materiału półokrągłe i typu PP również podwyższają częstości drgań własnych przy $x_5 \geq 0,5$; $x_7 \geq 0,6$ do 20%.

Zależność funkcji ψ_{1a} od tych parametrów jest typu parabolicznego.

2. Otwory typu PR, zmniejszają sztywność mocowania zmniejszając wartości częstości drgań własnych przy wartościach parametrów niejednorodności $x_1 \leq 0,33$;

$x_3 \geq 0,15$ do 50%. Największe obniżenie częstości jest realizowane poprzez niejednorodność mocowania.

B. Powłoka

1. Otwory okrągłe i prostokątne typu PR podnoszą wartości częstości drgań własnych przy następujących parametrach niejednorodności: $x_2^{0\sigma} \geq 0,6$; $x_4^{0\sigma} \geq 0,3$ do 20%. Wyfrezowania na obwodzie o parametrach $x_1^{0\sigma} \geq 0,6$; $x_6^{0\sigma} \geq 0,4$ podwyższają częstości drgań własnych nieco mniej (przykładowo o 10%).

2. Otwory typu PP, wyfrezowania i niejednorodności mocowania obniżają wartości częstości drgań własnych przy $x_4^{0\sigma} \geq 0,3$; $x_1^{0\sigma} \geq 0,67$; $x_7^{0\sigma} \geq 0,4$ o ok. 20 ÷ 30 %.

IV. Przy badaniu wpływu jednoskładnikowej niejednorodności na postacie drgań pokazano, że przy dużych otworach w płytkach dla $x_2 \geq 0,8$; $x_3 \geq 0,6$ zachodzi „łączenie” bliskich postaci drgań (pierwszej, drugiej, trzeciej i czwartej), co prowadzi do zbliżenia częstości drgań własnych tych postaci. „Łączenie” zaczyna się z początku na wyższych harmonicznych, a potem zachodzi na niższych częstościach i mogą być obserwowane drgania oddzielnych części płytki.

V. Analizowane kombinacje wieloskładnikowej niejednorodności w sposób następujący wpływają na częstości drgań własnych i postacie drgań.

1. Wartości częstości drgań własnych płytek dla dwu-, trój- i wieloskładnikowej niejednorodności podnoszą się odpowiednio o 10,2 % i 30 %.

2. Częstości drgań własnych powłok również się podnoszą, chociaż mniej intensywnie: o 8%, 10% i 20%.

3. Postacie drgań płytek i powłok z wieloskładnikową niejednorodnością w sposób znaczny różnią się od postaci drgań płytek i powłok pochytych.

VI. Błędy oszacowania widma częstości drgań własnych płytek o złożonym kształcie PTE dla rozpatrywanych modeli są wyższe (szczególnie dla wyższych postaci) niż w metodzie teoretyczno- eksperymentalnej o ok. 40% ÷ 50%.

VII. W wyniku analizy badań eksperymentalnych ustalono, że charakterystyki amplitudowo- częstotliwościowe elementów PTE są podobne do takich charakterystyk w liniowych układach mechanicznych. Współczynniki wzmocnienia dynamicznego zmieniały się



w przedziałach $5,62 \div 106$, co utwierdza w przekonaniu o małych wartościach dekrementu logarytmicznego tłumienia (bliskich dekrementom materiałowym).

Wyniki badań elementów PTE pozwoliły na wskazanie możliwych dziedzin stosowania w konkretnych wyrobach.

VIII. Podane w pracy związki i zależności określające wpływ składników niejednorodności jedno- i wieloskładnikowych na częstości drgań płytek i pochyłych powłok mogą być zalecane przy konstruowaniu i ocenie niezawodności konstrukcji.

IX. Bezkontaktowość, wysoka czułość i małe błędy pomiarów (1% ze względu na częstotliwość i $10\% \div 12\%$ ze względu na amplitudę), możliwość wzbudzania postaci i amplitud drgań na całej powierzchni badanego obiektu powodują, że stosowane metody laserowe są efektywnym środkiem do badań dynamiki płytek i powłok.

9. Literatura

1. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. - М.: Наука, 1971.-256 с.
2. Анализ и обобщение методов теоретических и экспериментальных исследований надежности конструкции ЭВП и СКИ: Отчет о НИР//Руководитель Н.М.Обычев; NOR5005210; Инв.НД40621. - 1985. - 101с.
3. Анализ планирования (ФОРТРАН ЕС ЭЕМ): Пакет научных программ/Под ред. В.В.Нахимова. - Минск, 1973. - Вып.2. - С.65-75.
4. Андрианов И.В., Дисковский А.А. Исследование собственных колебаний прямоугольных пластин со свободным отверстием//Динамика и прочность машин. - Днепропетровск, 1979. - N 4.-С.55-58.
5. Байбурин В.Б., Кутенков Р.П., Умнов Г.А. Методы планируемого эксперимента и их применение: Обзоры по электронной технике. Сер.І, Электроника СВЧ. - М.:ЦНИИ "Электроника", 1975. - Вып.(302). - 134 с.
6. Башаткин А.М., Прусов П.Д. Колебания прямоугольной пластинки с прямоугольным отверстием//Тр. Николаевского кораблестр. ин-та. - 1973. - Вып.76. - С.78-80.
7. Болотин В.В. Асимптотический метод в теории колебаний упругих пластин и оболочек//Труды Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. - Казань, 1961. - 22с.
8. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики: Таблица. - М.: ВЦ АН СССР, 1968. - 312 с.
9. Бреславский В.Е. О влиянии отверстий на частоту свободных колебаний цилиндрических оболочек // Тр. ХВАИУ. - 1959. - Вып. 162. - С.3-9.

10. Бублик Б.Н. Определение частот собственных колебаний прямоугольных пластин с разрезами //Прикладная механика. - 1968. - ТЧ, N 4. - С.53-57.
11. Вахлаева Л.Ф., Крысько В.А. Устойчивость гибких пологих оболочек, прямоугольных в плане, с разными вдоль стороны граничными условиями//Изв. Вузов "Строительство и архитектура". - 1984. - N 4. - С.21-25.
12. Вибрации в технике//Справочник: В 6 т./Под ред.В.В.Болотина. - М.: Машиностроение, 1978. - С.187-189.
13. Власов В.З. Общая теория оболочек. - М.: Гостехиздат, 1949. - 784с.
14. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. - М.:Наука, 1972. - 432 с.
15. Вышемирский А.В., Седельников В.А. Когерентно-оптические методы измерения параметров механических колебаний.: Обзоры по электронной технике. Сер.І, Электроника СВЧ. - М.: ЦНИИ "Электроника", 1978. - Вып.15(570). - 61с.
16. Вышемирский А.В., Обычев Н.М., Софинский Б.А. Экспериментальные методы исследования колебаний элементов конструкций электровакуумных приборов с применением оптических квантовых генераторов//Прочность материалов и элементов конструкций при звуковых и ультразвуковых частотах напряжения: Докл. семинара/ II Всесоюзный семинар в Киеве. - Киев: "Наукова думка", 1980. - С.465-469.
17. Гликман Л.А., Колишук А.К. К вопросу о влиянии закрепления консольных образцов (турбинных лопаток) на частоту собственных поперечных колебаний//Заводская лаборатория. - 1936. - N 11. - С.34-38.
18. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластинок и оболочек: Справочное пособие / Под ред. А.П.Филипова. - Киев: Наукова думка, 1964. - 288с.
19. Гузь А.Н. Исследования по теории тонких оболочек с отверстиями



- (обзор)//Прикладная механика. - 1979.- Т.15, N 11. - С.3-37.
20. Дрейнер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. - М.: Статистика, 1973. - 280с.
21. Дульнев Р.А. Измерение пластических деформаций при повышенных температурах методом оптических сеток. Методы исследования напряжений. - М.: Наука, 1965. - 268с.
22. Егоров Ю.П., Петров А.С. Лазерный измеритель механических колебаний//Приборы и техника эксперимента. - 1974. - N 4. - С.184-186.
23. Зиненко Г.П. Устойчивость и колебания прямоугольных трехслойных пластин с большими вырезами//Прикладная механика. - 1966. - Т.2, N 8. - С.59-66.
24. Исследование методами фотоупругости напряженных состояний пространственных конструкций при воздействии статических и динамических нагрузок: Отчет о НИР/СПИ; Руководители А.А.Милашечкин, В.В.Петров, В.Т.Крайтермон; НИР232 - 1968. - 232с.
25. Исследование форм колебаний пластин электронных приборов при вибрационных нагрузках: Отчет о НИР/СПИ; Руководитель Ю.С.Золотницкий - ; НИР1440. - 1975. - 43с.
26. Кислюцкий В.Н. Колебания оболочек и пластин. - В сб.: Сопротивление материалов и теория сооружений. - Киев: Будивельник, 1969. - Вып.8. - С.109-122.
27. Колебания сложных в плане пластин и оболочек, применяющихся в ИЭТ: Тематический указатель литературы. Сер.1, Электроника СВЧ. - М., 1985. - Вып. 1(205). - 38с.
28. Коноплев Ю.Г., Шипкин А.Г. Собственные колебания прямоугольных пластин с вырезами//Теория оболочек и пластин/Тр. IX Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. - Л.: Судостроение, 1975. - С.192-195.
29. Коноплев Ю.Г., Шипкин А.Г. Свободные колебания пластин и оболочек, ослабленных вырезами или опертых в точках//Тр. Казан. ун-та. - 1979. - Вып.14. - С.82-99.

30. Коноплев Д.Г., Шалабанов А.И. Исследования по теории пластин и оболочек. - Казань: Изд-во КГУ, 1976. - Вып.12. - 75с.
31. Коноплев В.Г., Шалабанов А.И. Метод голографической интерферометрии в задачах о действии локальных нагрузок на пластины и оболочки//Исследования по теории пластин и оболочек. - Казань: Изд-во КГУ, 1976. - Вып.12. - С.27-36.
32. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы: В 2т. - М.: Наука, - 1977. - С.129-140.
33. Крысько В.А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1976. - 214с.
34. Крысько В.А., Павлов С.П. Колебания пластинок и сферических оболочек произвольного плана//Изв. Вузов "Строительство и архитектура" . - 1982. - №4. - С.71-77.
35. Крысько В.А., Санинский А.С. Расчет неоднородных гибких пологих оболочек со смешанными краевыми условиями//Прикладная механика. - 1987. - Т.23, N 6.. - С.71-77.
36. Курпа Л.В. Собственные колебания пластин с отверстиями//Прикладная механика. - 1979. - Т.15, N 2. - С.106-108.
37. Кухто В.А. Экспериментальное исследование колебаний прямоугольных пластин с вырезами//Динамика и прочность конструкций. - Новосибирск, 1976. - С.152-158.
38. Кухто В.А. Колебания консольной пластины с прямоугольным вырезом// Динамика и прочность конструкций. - Новосибирск, 1975. - N 2. - С.19-23.
39. Липкин В.И. Применение дельта-функции к расчету пластин с отверстиями/Исследования по строительным конструкциям//Тр. ТИСИ. - 1966. - Вып.12. - С.128-131.
40. Липкин В.И. Экспериментальные исследования собственных частот и критических нагрузок для прямоугольных пластинок с прямоугольными отверстиями при всестороннем сжатии: Исследования по строительным конструкциям. - Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1972. - С.149-156.
41. Липкин В.И. Определение значений собственных частот в пластинке



- с отверстием/Исследования по строительным конструкциям//Тр.ТИСИ - 1969. - Вып.17. - С.120-125.
42. Малинин А.А. Колебания и устойчивость оболочек с дискретными включениями и отверстиями//Прикладная механика. - 1973. - Т.9, N 10. - С.29-34.
43. Мартыненко Е.И. Об исследовании колебаний пологих сферических оболочек, круговых мембран и пластин в случае многосвязных областей//Тез. докл. Первой республ. конф. молодых ученых по механике твердого деформируемого тела. - Киев, 1969. - С.71-82.
44. Метод фотоупругости/Г.Л.Хесин, И.В.Жаворонок, Д.И.Омельченко и др.; Под ред. Н.А.Стрельчука, Г.Л.Хесина. - Т.2. Методы поляризационно-оптических измерений. Динамическая фотоупругость. - М.: Стройиздат. 1975. - 367с.
45. Метод конечного элемента в механике деформируемых тел/Д.П.Вайберг, А.С.Городецкий, В.В.Киричевский, А.С.Сахаров//Прикладная механика - 1972. - Т.8. - С.3-28.
46. Метод конечных элементов в задачах статики и динамики тонкостенных элементов ЭВП: Тематические указатели литературы. Сер. 1, Электроника СВЧ. - М., 1978. - Вып.3(219). - 48с.
47. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений/А.С.Городецкий, В.И.Заворицкий, А.И.Лаптух-Лещенко. - М.: Транспорт, 1981. - 143 с.
48. Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ./ А.В.Александров, Н.Н.Шапошников. - М.: Стройиздат, 1976. - 245с.
49. Мольченко Л.В. Собственные колебания пологих оболочек с прямоугольным вырезом/АН УССР Ин-т проблем прочности. - Киев, 1978. - 26с. - Деп. в Укр.НИИТИ АН УССР, N 1199-284ДЕП.
50. Москаленко В.И., Муравин Е.Л. О спектрах частот и форм собственных колебаний пластин с вырезами и конических оболочек/Динамика и прочность машин//Тр.МЭИ. - 1972. - Вып.101. - С.136-142.

51. Нагая К. Поперечные колебания прямоугольной пластинки с эксцентрическим круговым вырезом//Колебания и устойчивость многосвязных тонкостенных систем: сб.Статей/Пер.с англ.; Составитель И.Н.Преображенский. - М.: Мир, 1984. - С.69-83.
52. Налимов В.В. Теория эксперимента. - М.:Наука, 1971. - 207с.
53. Налимов В.В., Чернова Н.А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. - М.: Наука, 1965. - 132с.
54. Новицкий В.В. Новые исследования по методу муаров. Расчет пространственных конструкций - М.: Госстройиздат, 1967, - Вып.11. - 42с.
55. Новые идеи в планировании эксперимента/Под ред.В.В.Налимова. -М.: Наука, 1969. - 428с.
56. Обычев Н.М., Вышемирский А.В. Экспериментальное определение собственных частот и форм колебаний пластинок произвольного плана//Вопросы оптимального проектирования пластин и оболочек: Тез.докл. II Всесоюзная конф. по пластинам и оболочкам. - Саратов: Из-во Сарат.ун-та, 1981. - С.76-78.
57. Обычев Н.М. Применение метода конечных элементов к оценке надежности конструкций ЭВП: Обзоры по электронной технике. Сер.1, Электроника СВЧ. - М.: ЦНИИ "Электроника", 1981. - Вып.1(782). - 31с.
58. Обычев Н.М., Вышемирский А.В., Софинский Б.А. Экспериментальные исследования колебаний пластинок сложной формы голографическими методами//Электронная техника. Сер.8, Управление качеством, стандартизация, метрология, испытания. - 1983. - Вып.2. - С.15-18.
59. Обычев Н.М. Колебания элементов изделий электронной техники типа пластинка и оболочка, имеющих конструктивные неоднородности//Электронная техника. Сер.1, Электроника СВЧ. - 1987. - Вып.4 (398). - С.13-16.
60. Обычев Н.М., Обычев А.В., Шагаров А.Г. Расчет колебаний элементов изделий электронной техники методом конечных элементов//Электронная техника. Сер.8, Управление качеством,

- стандартизация, метрология, испытания. - 1986. - Вып.5. - С.24-26.
61. Обычев Н.М., Петров В.В., Федоров В.Г. Анализ надежности конструкций ЭВП при воздействии механических нагрузок//Теоретические и экспериментальные методы анализа надежности конструкций ЭВП: Тез.докл. конф. по электронной технике. Сер.1, Электроника СВЧ. - М.: ЦНИИ "Электроника", 1980. - Вып.8 (295). - С.7-8.
62. Обычев Н.М., Вышемирский А.В. Исследование влияния способов закрепления и отверстий на динамические характеристики пластинок//Теоретические и экспериментальные методы анализа надежности конструкций ЭВП: Тез.докл.конф. по электронной технике. Сер.1, Электроника СВЧ. - М.: ЦНИИ "Электроника", 1980. - Вып.8(295). - С.16-17.
63. Павлюк Н.Ф., Кичлев Ю.П. Колебания сферической полой оболочки с отверстием//Прикладная механика. - 1971. - Т.7, N 3. - С.28-32.
64. Павлов А.В. Аппаратура и методы измерений при летных испытаниях самолетов. - М.: Машиностроение, 1967. - 9с.
65. Пакет программ решения обобщенной программы собственных значений: Сопротивление материалов и теория сооружений//Е.С.Дехтярик, Е.Д.Лумельский, П.Г.Шельник-Мельников и др. - Киев: Будивельник, 1981. - Вып.38. - С.21-25.
66. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. - Саратов: Изд-во Саратов.ун-та, 1975. - 119с.
67. Петров В.В., Обычев Н.М. Теоретические методы анализа конструкций электронных приборов на динамическую прочность// Прочность и устойчивость конструкций электронных приборов при воздействии механических нагрузки методы их исследования: Тез. докл.конф.; Сер.7, Технология, организация производства и оборудование. - М.: ЦНИИ "Электроника", 1975. - Вып.1(38). - С.3-5.
68. Петров В.В., Обычев Н.М., Вышемирский А.В. Экспериментальное определение собственных частот и форм колебаний пластинок методом

- пятнистости//Проблемы прочности. - 1977. - N 6. - с.82-84.
69. Попов А.А., Салодилов В.Е., Чернышов Г.П. Метод голографической интерферометрии в задачах о резонансных колебаниях оболочек вращения//Механика твердого тела. - 1977. - N 5. - С.125-131.
70. Постнов В.А., Хархурин И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. - Л.: Судостроение, 1974. - 344с.
71. Преображенский И.Н. Устойчивость и колебания тонкостенных конструкций с отверстием//Механика твердого тела. - 1972.- N 2. - С.190- 231.
72. Преображенский И.Н. О задачах по устойчивости и колебаниям многосвязных тонкостенных деформируемых систем (обзор): Колебания и устойчивость многосвязных тонкостенных систем/Перс. с англ.; Составитель И.Н.Преображенский. - М.: Мир, 1984. - 312с.
73. Преображенский И.Н. Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями. - М.: Машиностроение, 1981. - 191с.
74. Преображенский И.Н. Динамические задачи тонкостенных элементов несущих конструкций, ослабленных вырезами (обзор). Часть I//Проблемы прочности. - 1980. - N 5. - С.82-90.
75. Преображенский И.Н. Динамические задачи тонкостенных элементов несущих конструкций, ослабленных вырезами (обзор). Часть 2//Проблемы прочности. - 1980. - N 6. - С.99-109.
76. Приборы и системы для измерения вибрации, шума и удара.: Справочник. В 2т./Под.ред. В.В.Клюева. - М.:Машиностроение, 1978. - Т.2. - 90с.
77. Пригоровский Н.И., Черпакова Н.С. Методы голографии в механических испытаниях (обзор)//Заводская лаборатория. - 1978. - 6. - С.726-739.
78. Прусов П.Д. К вопросу о свободных поперечных колебаниях прямоугольной пластинки с отверстием//Тр.Николаевского кораблестр. ин-та. - 1973. - Вып.59. - С.78-80.
79. Разработка методов расчета на механическую прочность пластин пушечных узлов и лазерной интерферометрической установки точного

- измерения резонансных частот и амплитуд с целью создания ЭВП повышенной вибро- и ударопрочности: Отчет о НИР/Руководитель Н.М.Обычев; НОР5003405; Инв. N ДБ6623. - 1976. - 152с.
80. Разработка инженерных методик расчета на динамическую прочность элементов ЭВП СВЧ типа "Оболочка": Отчет о НИР/Руководитель Н.М.Обычев; N ГРФ05616; Инв. N ДБ7890. - 1976. - 62с.
81. Разработка и внедрение новых методов исследований механических характеристик конструкций приборов и методов повышения их механической надежности: Отчет о НИР//Руководитель Н.М.Обычев; N ГР Ф08587; Инв. N ДБ11964& - 1978. - 42с.
82. Разработка новых методов исследования механических характеристик конструкций приборов и рекомендаций с целью повышения их механической надежности: Отчет о НИР//Руководитель Н.М.Обычев; ГР Ф14411; Инв. N ДБ/Е25513. - 1982. - 47с.
83. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. Метод R - функций в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы. - Киев: Наукова думка, 1973. - 91с.
84. РМ 11 332.051-77. Приборы СВЧ. Руководство по конструированию вибро- и ударопрочных приборов- введен 01.07.78. - Саратов.: 1977, - 30с.
85. Самсонова Р.И. Определение частот собственных колебаний прямоугольных пластин, имеющих точечные опоры и большие отверстия. Исследования по строительным конструкциям и строительной механике. - Томск: Изд-во ТГУ, 1977. - 97с.
86. Сахаров Ю.С., Пекелис М.А. Обработка результатов многофакторного планирования эксперимента на ЭЦВМ//Тр.МЭИ. - 1972. - Вып.124. - С.125-129.
87. Саченков А.В. Теоретико-экспериментальный метод исследования устойчивости пластин и оболочек. Исследования по теории пластин и оболочек//Тр.Казан. ун-та. - 1968. - Вып.6, - С.391-433.
88. Саченков А.В., Артюхин Ю.П. Экспериментальное решение задач о свободных колебаниях и устойчивости пластин и пологих оболочек.



- Исследования по теории пластин и оболочек//Тр.Казан.ун-та. - 1968.
- Вып.6. - С.433-450.
89. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. - М.: Мир, 1979. - 392с.
90. Соколов Б.П. Определение деформаций и напряжений в плоских деталях методом мелких сеток//Энергомашиностроение. - 1956. - N 11. - С.13-15.
91. Сорокин Е.С. Динамический расчет несущих конструкций зданий. - М.: Госстройиздат, 1956. - 340с.
92. Строганова М.М., Толмач Г.У. Собственные колебания квадратной пластины, опирающейся на стержни в угловых точках// Строительная механика и расчет сооружений. - 1976. - N 2. - С.55-57.
93. Сугатов Л.С., Наследов С.А. Определение нижней резонансной частоты печатных плат с точечным креплением//Вопросы радиоэлектроники. Сер. Общетеchnическая. - 1980. - Вып.9. - С.114-117.
94. Сылко В.П., Фомин Ю.А. Колебания квадратной пластинки с круговыми вырезами//Тр.Николаевского кораблестр.ин-та. - 1977. - Вып.122. - С.88-91.
95. Сылко В.П. Исследование колебаний квадратной пластинки строболографическим методом//Тр.Николаевского кораблестр. ин-та. - 1980. - Вып.162. - С.79-84.
96. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. - М.: Физматгиз, 1963. - 135с.
97. Ушаков Б.Н. Применение муаровых картин к исследованию перемещений и деформаций. Расчеты на прочность. - М.: Машиностроение, 1966. - Вып.12. - 35с.
98. Фельдман М.Р. Решение некоторых задач устойчивости и колебаний пластин с отверстиями на электронных цифровых и полноклавишных вычислительных машинах. Применение электронно-вычислительных машин в строительной механике. - Киев, 1968. - 364с.
99. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. - М.:

Машиностроение, 1970. - 414с.

100. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. - М.: Мир, 1969.-

101. Хегарти Р., Ариман Т. Исследования динамического поведения упругих прямоугольных пластин с круговыми вырезами; Колебания и устойчивость многосвязных тонкостенных систем/Пер. с англ., Под ред. Преображенского М.Н. - М.: Мир, 1987. - С.95-113.

102. Христенко А.С., Фомина А.А., Фомин Ю.А. Исследование свободных колебаний круглых пластинок методом голографии//Тр.Николаевского кораблестр. ин-та. - 1976. - Вып.126. - С.74-76.

103. Христенко А.С., Фомин Ю.А. Экспериментальная лазерная установка для исследований колебаний оболочек и пластин//Тр.Николаевского кораблестр. ин-та. - 1976. - Вып.126. - С.74-76.

104. Шалабанов А.И., Волошановский Ю.П. Экспериментальное решение задач о свободных колебаниях пологих цилиндрических оболочек//Тр.Казан.ун-та. - 1972. - Вып.2. - С.11-22.

105. Шилкин А.Г., Тertyшный Г.В. Свободные колебания цилиндрических панелей и оболочек с вырезами: Сб. асп. работ КГУ/Точные науки. Математика. Механика. - Казань:Изд-во КГУ, 1975, -С.160-163.

106. Шурба В.Г., Миткин В.В., Шароваров В.А. Решение одномерной задачи динамики с применением метода муаров//Прикладная механика. - 1966. - Т.2., N 3. - С.78-83.

107. Экспериментальное исследование поведения пластин с отверстиями/В.Н.Бакулин, А.И.Жуков, И.Н.Преображенский и др.//Прикладная механика. - 1987. - Т.23, N 8. - С.188-192.

108. Экспериментальное определение собственных частот и форм колебаний пластинок сложной формы/В.В.Петров, Н.М.Обычев, Б.А.Софинский и др.//Теоретические и экспериментальные методы анализа надежности конструкций ЭВП: Тез.докл.конф. по электронной технике. Сер.І, Электроника СВЧ. - М.: ЦНИИ "Электроника", 1977. -

Вып. I (75). - С. 19-20.

109. Эспе В. Технология электровакуумных материалов. Том I. - М.-Л: Госэнергоиздат, 1962. - 385с.

110. Biederman K., Molin N.E. Combining Hypersensitization and Rapid In-Situ Processing for Time Average Observation in Real-Time Hologram Interferometry - Journ. Instrum. - 1970. - N3. - p.669-680.

111. Cren E.N. The power of the Shapiro-Wilk W-test for normality - Journal of Amer. Statist. Assoc. - 1971 - N336 - p.760-762.

112. Hauch W.W. Foundations for estimation by the method of least squares - Smithsonian Astro-physical Observatory; Special Report - 1971 - Vol.340 - p.345-346.

113. Hinton E., Rock F., Zienkiewicz O.C. A note on mass lumping and related processes in the finite element method - Int. J. Earthquake Eng. and Struct. Dyn. - 1976. - Vol.4, N3 - p.245-249.

114. Massey G.A. NASA Rept. No. NASA-CR-754630 (1965), No. NASA-CR-985 (1968)

115. Powell R.L., Stenson K.A. Interferometric Vibration Analysis by Wavefront Reconstruction - Journ. Opt. Soc. Amer. - 1965. - Vol.55, N12. - p.1593-1598.

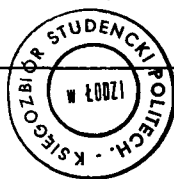
116. Takahashi S. Bending vibration of a the plate weakened by holes. - Trans. Japan Soc. Mech. Eng. - 1958. - Vol. 24, N139. - p.34-48.

117. Thocaris P. Moire Fringes in Strain Analysis - Pergamon Press: London, 1969 - 329 p.

118. Tollenaar D. Moire interferentie-verschijnselen bij rasterdruk - Amsterdam: Instituut Voor Graphische Techniek, 1945. - 45s.

119. Nicola W.E. The dynamic response of thin membranes by the moire method - Exp. Mech. - 1966. - Vol.6(12). - 593p.

120. Venkateswaru Rao G., Raju J.S., Amba-Rao C.L. Vibrations of Thin Plates with Complex Form. - AJAA Journal. - 1978. - Vol 16, N5. - p.788-794.



77625/s

