

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

FRANCISZEK MOSIŃSKI

**METODY STATYSTYCZNE
W TECHNICIE WYSOKICH NAPIĘĆ**



ŁÓDŹ 1995



Zbiorów Biblioteki Głównej Politechniki Łódzkiej

Skrypt jest przeznaczony dla studentów Wydziału Elektrycznego kierunku elektrotechnika



9429/5

Recenzent: doc. dr Jerzy Janusz Zieliński

Redaktor: Danuta Żyżniewska

Redaktor techniczny: Krzysztof Świerzyński

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

93-005 Łódź, ul. Wólczańska 223

ISBN 83-86453-40-0

Wydanie II. Nakład 120 + 40 egz. Ark. wyd. 10,4. Ark. druk. 10,75. Papier offset. 80g 70 × 100

Podpisano do druku 27.01.1995 r. Druk ukończono w lutym 1995 r.

Zamówienie 13/95 Cena 3 zł 33 gr

Wykonano w A.C.G.M. „LODART” SA. 93-005 Łódź, ul. Wólczańska 223

Nr 849



SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA	5
OZNACZENIA.	6
1. WSTĘP.	10
2. ROZKŁADY STATYSTYCZNE STOSOWANE W TECHNICIE WYSOKICH NAPIĘĆ I PODSTAWY WNIOSKOWANIA STATYSTYCZNEGO.	13
2.1. Rozkłady statystyczne	13
2.1.1. Rozważania ogólne.	13
2.1.2. Wprowadzenie do teorii wartości ekstremalnych. . .	14
2.1.3. Rozkład Weibulla. Właściwości i związki z innymi rozkładami	18
2.1.4. Rozkład dwuwykładniczy	26
2.2. Prawo wzrostu	27
2.2.1. Wprowadzenie	27
2.2.2. Prawo wzrostu dla zakresu małych prawdopodobieństw	28
2.2.3. Prawo wzrostu dla dużych N	29
2.2.4. Uogólnione prawo wzrostu	30
2.2.5. Prawo wzrostu w zastosowaniu do rozkładu Weibulla.	30
2.2.6. Prawo wzrostu w zastosowaniu do rozkładu dwuwykładniczego.	32
2.2.7. Prawo wzrostu w zastosowaniu do rozkładu normalnego	33
2.3. Opracowanie wyników badań	34
2.3.1. Wprowadzenie	34
2.3.2. Metoda graficzna	37
2.3.3. Oszacowania punktowe	43
2.3.4. Metoda największej wiarygodności	51
2.3.5. Oszacowania przedziałowe	55
2.3.6. Testy zgodności.	60
2.3.7. Współczynniki dopasowania i korelacji.	64
2.3.8. Niezależność poszczególnych doświadczeń. Test serii	66
2.3.9. Eliminacja błędów grubych.	68
3. WYBRANE PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ W WYSOKONAPIĘCIOWEJ TECHNICIE PROBIERCZEJ	71
3.1. Wprowadzenie.	71
3.2. Wytrzymałość elektryczna krótkotrwała	71
3.2.1. Wprowadzenie	71



3.2.2. Metody badań izolacji regenerującej się	73
3.2.3. Metody badań izolacji nieregenerującej się	95
3.2.4. Komentarze na temat badań wytrzymałości krótkotrwa- lej.	102
3.3. Wytrzymałość długotrwała:	106
3.3.1. Próby starzeniowe. Czas życia izolacji	106
3.3.2. Reguły statystyczne starzenia izolacji przy dzia- łaniu wyładowań niezupełnych	109
3.4. Statystyczna koncepcja uzasadnienia parametrów prób uda- rowych wysokonapięciowych transformatorów energetycznych.	114
3.5. Automatyzacja pomiarów i obliczeń	118
4. WYBRANE PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ W TECHNI- CE IZOLACYJNEJ	119
4.1. Wstęp	119
4.2. Izolacja ciekła, olej izolacyjny	120
4.2.1. Wprowadzenie	120
4.2.2. Zależność wyników od metody badań	121
4.2.3. Efekt objętości oleju i efekt powierzchni elektrod	122
4.3. Układy izolacyjne z izolacją stałą.	128
4.3.1. Wprowadzenie	128
4.3.2. Wpływ grubości warstwy na wytrzymałość elektrycz- ną izolacji stałej	129
4.4. Statystyczna koncepcja koordynacji izolacji	135
4.4.1. Koordynacja izolacji liniowej	135
4.5. Ryzyko zagrożenia piorunowego obiektów budowlanych	146
5. WYBRANE ZAGADNIENIA ZASTOSOWAŃ STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ W TED- RII PRZEPIĘĆ.	148
5.1. Statystyczny opis przepięć piorunowych	148
5.2. Przepięcia piorunowe indukowane.	153
5.3. Przepięcia łączeniowe.	156
5.3.1. Wprowadzenie.	156
5.3.2. Przykład załączania nieobciążonej linii	157
6. PUŁAPKI ZWIĄZANE ZE STOSOWANIEM STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ.	161
6.1. Statystyka a wiedza inżynierska.	161
6.2. Pułapki statystyki i elementarne porady praktyczne	161
LITERATURA	164



PRZEDMOWA

Skrypt jest przeznaczony dla studentów Wydziału Elektrycznego studiujących na kierunku Elektrotechnika a w szczególności dla studentów specjalizujących się w zagadnieniach techniki wysokich napięć, budowy i projektowania transformatorów, urządzeń wysokonapięciowych, sieci i systemów elektroenergetycznych. Może być również pomocny pracownikom wysokonapięciowych laboratoriów badawczych, konstruktorom transformatorów, czy projektantom urządzeń wysokonapięciowych.

Na Wydziale Elektrycznym elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej są prezentowane w ramach wykładów z matematyki jak również w ramach wykładu "Teoria niezawodności i statystyczne metody badania jakości". Zatem autor czuje się zwolniony z przedstawienia podstaw statystyki matematycznej i zakłada, że czytelnik skryptu jest zaznajomiony z pojęciami podstawowymi.

Celem skryptu jest więc omówienie jedynie tych zagadnień statystyki matematycznej, które zostały adoptowane do potrzeb techniki wysokich napięć i to tylko w zakresie wykraczającym poza ogólnie dostępne podręczniki autorstwa matematyków. Zakłada się więc, że czytelnik zaznajomiony jest z problematyką zdarzeń losowych, zmiennych losowych i z teorią rozkładu normalnego i rozkładów testowych. Rozwinięto jedynie zagadnienie rozkładów ekstremalnych jako specyficznie przydatnych w technice wysokich napięć a pomijanych w ogólnych podręcznikach statystyki matematycznej.



OZNACZENIA

- A, a, b, c, d - stałe
 $\hat{a}, \hat{b}$ - oszacowania współczynników regresji
 α - poziom istotności
 - kres dolny dziedziny rozkładów wartości minimalnych
 - bezwymiarowy parametr rozkładu dwuwykładniczego
 - parametr kształtu w funkcji napięcia dwuwymiarowego rozkładu Weibulla
 a_p - stromość prądu pioruna
 a_i - elementarna powierzchnia elektrod
 β - poziom ufności
 - parametr kształtu w funkcji czasu, dwuwymiarowego rozkładu Weibulla
 b - odległość uderzenia pioruna od linii
 db - szerokość pasa wokół linii, z którego jest możliwe wyładowanie piorunowe do linii
 dn - statystyka Kołmogorowa-Smirnowa
 dN_u - liczba wyładowań w pasie linii o szerokości db
 D_n - krytyczna wartość rozkładu Kołmogorowa-Smirnowa
 dS, dU_{50} - błędy oszacowań odpowiednio odchylenia standardowego i wartości oczekiwanej
 δ_1 - dekrement tłumienia
 e - chwilowa wartość sem
 E - maksymalna wartość sem
 E - napięcie elektryczne
 ε - błąd oszacowań
 $f(u), f(x)$ itp. - funkcje gęstości prawdopodobieństwa
 $f_{ku, kz, \beta}$ - kwantyl rozkładu Snedecora-Fischera
 $F(X), F(U)$ itp. - dystrybuanta rozkładu zmiennej losowej
 $F_w(U)$ - dystrybuanta rozkładu Weibulla
 $F_{ws}(U)$ - dystrybuanta standaryzowanego rozkładu Weibulla
 $F_D(U)$ - dystrybuanta rozkładu dwuwykładniczego
 $F_{DS}(y)$ - funkcja standaryzowanego rozkładu dwuwykładniczego



- φ - kąt załączania wyłącznika
 φ_p - kąt początku ruchu styków wyłącznika
 $\hat{F}(U), \hat{F}(X)$ itp. - dystrybuanta empiryczna
 γ - wykładnik potęgowy w rozkładach wartości ekstremalnych
 γ - statystyczny współczynnik bezpieczeństwa
 γ_E, γ_U - prędkość wzrostu odpowiednio naprężeń i napięcia
 h - współczynnik jednorodności wyników
 - grubość dielektryku
 - wysokość zawieszenia przewodów linii
 $H(x)$ - rozkład wartości maksymalnych
 $H_{1,\gamma}(x), H_{2,\gamma}(x),$
 $H_{3,0}(x)$ - jak wyżej typu 1(II), 2(III), 3(I)
 $\chi^2, \chi^2_{N-r-1, \alpha}$ - statystyka i wartość krytyczna rozkładu chi-kwadrat
 i, j, k - rząd statystyki lub indeks
 i_p, I_p - wartość chwilowa i szczytowa prądu pioruna
 I_{max} - maksymalna wartość prądu pioruna
 k - parametr kształtu rozkładu Weibulla
 - liczba przeskoków w metodzie góra-dół
 - rząd statystyki pozycyjnej w próbie
 k_k, k_w, k_u - współczynniki przebiegu łączeniowego: globalny dla
 składowej wymuszonej i przejściowej
 l - długość linii
 L - indukcyjność
 - funkcja wiarygodności
 λ - ranga statystyki pozycyjnej
 $L(U)$ - rozkład wartości minimalnych
 $L_{1,\gamma}(U), L_{2,\gamma}(U),$
 $L_{3,0}(U)$ - j.w. typu 1(II), 2(III), 3(I)
 m, n - licznosc próbki
 M, N - licznosc populacji } liczby naturalne
 μ - wartosc oczekiwana w rozkladzie normalnym
 $\binom{N}{m}$ - dwumian Newtona
 N - wspolczynnik skali
 - licznosc populacji
 $N(0,1)$ - standaryzowany rozklad Gaussa



- M_3 - trzeci moment centralny
 $M, \bar{M}$ - ogólna i średnia liczba serii pomiarowych w metodzie góra-dół
 n_p - średnia liczba wyładowań w ciągu 1 dnia burzowego na powierzchnię 1 km^2
 n_d - liczba dni burzowych w roku
 N_{ind} - liczba wyładowań atmosferycznych w ciągu roku prowadząca do powstawania przepięć indukowanych o wartości szczytowej powyżej $U_i \text{ max}$
 v - względna wartości napięcia probierczego
 ω - kres górny dziedziny rozkładów wartości maksymalnych
 - pulsacja
 ω^2, Ω^2 - statystyka i wartość krytyczna do testu omega-kwadrat
 p, P - prawdopodobieństwo
 π - liczba pi
 Π - znak iloczynu
 q - liczba prób bez przeskoków w metodzie góra-dół
 - wykładnik funkcji gęstości krotności k_w
 $q_n(U)$ - prawdopodobieństwo
 θ - parametr skali rozkładu Weibulla
 r_{xy} - współczynnik korelacji
 R - ryzyko uszkodzenia
 - rezystancja
 s - współczynnik zmienności
 S, σ - odchylenie standardowe
 Σ - znak sumowania
 S_i - prawdopodobieństwo
 t - czas
 T_1 - czas trwania czoła prądu pioruna
 $t_{n-1, \beta}$ - kwantyl rozkładu Studenta
 T - okres
 τ - czas życia izolacji
 $u, x \text{ itp.}$ - zmienne losowe
 $\bar{U}, \bar{X}$ - wartości średnie
 $\check{U}, \check{X}$ - mediany



- $\tilde{U}, \tilde{X}$ - wartości modalne
 U_0 - parametr przesunięcia rozkładu Weibulla
 U_m - parametr skali rozkładu Weibulla
 - wartość charakterystyczna rozkładu dwuwykładni-
 czego
 U - napięcie
 U_{ind} - napięcie indukowane
 U_{50} - mediana napięć przeskoku, przebicia itp.
 U_a - napięcie startu próby wysokonapięciowej
 U_w - napięcie wytrzymywane
 U_{max} - maksymalna wartość przepięcia
 $U_{r\ max}$ - maksymalne napięcie robocze linii
 ΔU - krok napięciowy
 V - objętość oleju szczególnie naprężanego
 V_j - elementarna objętość dielektryku
 W_n - minimalna wartość ze zbioru zmiennych losowych
 W_{Kw}, W_{KR} - wartość odpowiednio: kwantyla i krytyczna
 W_n^2, W_α^2 - statystyka i wartość krytyczna do testu W_n^2
 W_{ai}, W_{Bi} - wartości wagowe
 W_i - prawdopodobieństwo inicjacji wyładowania z obję-
 tości V_j
 x - zmienna niezależna
 y - zmienna zależna
 - zmienna standaryzowana w rozkładzie dwuwykładni-
 czym
 - kwantyl standaryzowanego rozkładu normalnego
 Z_i, Z_j - powierzchnie ekwipotencjalne
 Z_n - maksymalna wartość ze zbioru zmiennych losowych
 ξ, η - współrzędne siatek funkcyjnych



1. WSTĘP

Technika wysokich napięć jest działem elektrotechniki obejmującym następujące główne dziedziny problemów naukowych i technicznych:

- miernictwo wysokonapięciowe i technika probiercza,
- przepięcia, ochrona przeciwprzepięciowa i koordynacja izolacji,
- wytrzymałość elektryczna materiałów i układów izolacyjnych.

We wszystkich tych dziedzinach występuje problem losowości czynników warunkujących pomiary a więc i losowości stosowanych, definiowanych w poszczególnych zagadnieniach wielkości takich jak np. napięcie przebicia czy przeskoku, czas do wyładowania, wartość przepięcia itp.

Jeśli przykładowo rozważyć odstęp izolacji powietrznej przy narażeniu napięciem elektrycznym przemiennym o niezmiennej w czasie wartości amplitudy to wówczas wielkością zmieniającą się losowo będzie czas do zaistnienia przeskoku. Jak wiadomo z teorii wyładowań w gazach, przeskok zostaje zainicjowany przez swobodny elektron o energii wystarczającej do zapoczątkowania rozwoju lawiny, przy czym chwila pojawienia się takiego elektronu jest niezależna od stanu elektrod, warunków otoczenia itd. i nie daje się przewidzieć w sposób jednoznaczny. Zatem pomiary czasów do przeskoku mimo zachowania idealnie takich samych warunków będą ulegały rozrzutowi losowemu. Jeśli zamiast utrzymywać napięcie na stałym poziomie, zmieniać je np. od zera ku coraz wyższym wartościom (w sposób ciągły lub schodkowo), to oczywiście również kolejne pomiary napięcia przeskoku będą się różnić między sobą. W przypadku gdy kolejne wyniki pomiarów są jednakowe, można mówić o niewystarczającej dokładności odczytu, o małej czułości miernika, o zbyt grubej podziałce itp.

W przypadku izolacji ciekłej lub stałej problem komplikuje się dodatkowo wskutek złożonej i niemożliwej do dokładnego zdefiniowania struktury wewnętrznej takich dielektryków. Przykładowo olej transformatorowy jest w skali technicznej zawsze zanieczyszczony niewielkimi ilościowo domieszkami wilgoci, zanieczyszczeń stałych i gazowych które to wtrąciny decydują o jego właściwościach dielektrycznych. Podobnie jest w przypadku dielektryków stałych. W obydwu powyższych przy-



padkach o wytrzymałości elektrycznej decyduje ta wtrącina, która charakteryzuje się najlepszymi właściwościami ku inicjowaniu przebiecia dielektryka. Jest to więc właściwość ekstremalna. Pomiar wytrzymałości elektrycznej pozwala zaobserwować jedynie minimalną wartość napięcia przebiecia. Stąd w technice wysokich napięć znajduje coraz szersze zastosowanie nowy i stosunkowo mało znany dział statystyki matematycznej, teoria wartości ekstremalnych w zarysie przedstawiona w punkcie 2.1.2.

W przypadku przepięć zewnętrznych, piorunowych niemożność określenia czynników wpływających na ich kształt i wartość szczytową jest jasna jak jasna jest niemożność przewidywania konfiguracji chmur na niebie w dowolnej chwili czasowej. W przypadku przepięć wewnętrznych można w sposób deterministyczny określić krotność przepięcia i jego kształt przy danej konfiguracji obwodu i w danym momencie zaistnienia operacji łączeniowej. Nie można natomiast z góry przewidzieć w jakich chwilach czasowych zaistnieją procesy łączenia w obwodach rzeczywistych.

Problematyka losowości w dziedzinie koordynacji izolacji jest oczywiście wypadkową procesów stochastycznych warunkujących wytrzymałość i przepięcia.

Zastosowanie statystyki matematycznej w technice wysokich napięć jest dziedziną, podobnie jak i sama technika wysokich napięć, ulegającą ciąglemu rozwojowi. Trudno jest zatem dokonać skończonej syntezy istniejącej wiedzy. Tym niemniej wydaje się iż zestawione w rozdziałach 3, 4 i 5 przykłady zastosowań w poszczególnych działach techniki wysokich napięć stanowią, mimo niekompletności, reprezentatywną, umożliwiającą zrozumienie problematyki, gamę zagadnień. Wybrane przykłady dotyczą badań właściwości izolacji nieregenerującej się, w tym głównie izolacji papierowo-olejowej, stosowanej w wysokonapięciowych transformatorach energetycznych. Izolacja tego typu gdzie przebiecie jest zjawiskiem zarówno niepożądanym jak i niedopuszczalnym w odróżnieniu od izolacji typu regenerującej się gdzie przeskok jest niepożądany lecz sporadycznie dopuszczalny, wymaga dużej pieczołowitości zarówno w badaniach jak i obliczeniach stąd problem metod statystycznych jest tu szczególnie silnie zarysowany.

Ograniczenie treści skryptu do wyżej wspomnianych zagadnień jest celowe również dlatego, że są dostępne w kraju obszerne opracowania dotyczące zastosowań statystyki matematycznej do innych zagadnień wysokonapięciowych. I tak w [3, 4] można się zapoznać z obszerną pro-



blematyką izolacji powietrznej, praca [27] oparta jest głównie na przykładach dotyczących izolacji z sześćciofluorkiem siarki, w [45] rozważana jest problematyka wyładowań niezupełnych. Specyficzne zastosowanie statystyki matematycznej do oceny zagrożeń piorunowych obiektów budowlanych są rozwinięte w książce Z. Flisowskiego [20].

Problematyka omówiona w powyższych monografiach znalazła również miejsce w tym skrypcie lecz tylko w zakresie wiadomości podstawowych wystarczających jako uzupełnienie ogólnej wiedzy inżynierskiej lecz stanowczo zbyt ubogich dla specjalistów pracujących w tych szczególnych dziedzinach.



2. ROZKŁADY STATYSTYCZNE STOSOWANE W TECHNICIE WYSOKICH NAPIĘĆ

I PODSTAWY WNIOSKOWANIA STATYSTYCZNEGO

2.1. Rozkłady statystyczne

2.1.1. Rozważania ogólne

Spośród obfitej gamy rozkładów statystycznych, z punktu widzenia potrzeb techniki wysokich napięć, z rozkładów zmiennej losowej skokowej na szczególną uwagę zasługują:

- rozkład Bernoulliego (dwumianowy),
 - rozkład Poissona,
- a spośród rozkładów zmiennej losowej ciągłej:
- rozkład normalny (wraz z logarytmo-normalnym),
 - rozkład Weibulla (i wykładniczy jako jego szczególny przypadek),
 - rozkład dwuwkładniczy.

Zarówno rozkłady Bernoulliego, Poissona jak i rozkład normalny i logarytmo-normalny są omawiane w każdym podręczniku statystyki matematycznej dlatego poprzestaniemy tu na stwierdzeniu, że rozkłady Bernoulliego i Poissona odgrywają pewną rolę przy opracowaniu wyników prób wysokonapięciowych, natomiast rozkład normalny znajduje szerokie zastosowanie przy badaniach, projektowaniu i koordynacji izolacji liniowej, a więc izolacji powietrznej. W dalszych rozdziałach skryptu rozkłady te będą omówione przy konkretnych zastosowaniach.

Pozostałe dwa rozkłady; Weibulla i dwuwkładniczy są rozkładami typu ekstremalnego i są stosunkowo mało znane (szczególnie rozkład dwuwkładniczy) dlatego w dalszej części rozdziału umieszczono krótkie wprowadzenie do teorii wartości ekstremalnych i omówiono te rozkłady w wersji dostosowanej do potrzeb techniki wysokich napięć.



2.1.2. Wprowadzenie do teorii wartości ekstremalnych

Wiele zagadnień wysokonapięciowych, jak np. określenie wytrzymałości elektrycznej izolacji czy określenie maksymalnych parametrów przepięć piorunowych dokonuje się przy założeniu najmniej sprzyjających warunków. Zachodzi więc potrzeba oszacowania dolnych lub górnych granic zaobserwowanych wartości lub oszacowania częstości przekraczania zadanego poziomu. Statystyczny opis rozkładów skrajnych (maksymalnych lub minimalnych) wyrazów z zaobserwowanego szeregu statystycznego jest właśnie przedmiotem rozważań teorii wartości ekstremalnych. Obszerne i wyczerpujące rozwinięcie tej teorii można znaleźć w książkach Gumbela [25] i Galambosa [23]. Tutaj ograniczono się jedynie do podstawowych założeń i końcowych twierdzeń.

Za punkt wyjścia do rozważań przyjęto pewną objętość technicznie czystego materiału izolacyjnego umieszczonego między elektrodami o polu równomiernym. Niech ma on losową wytrzymałość elektryczną U , uwarunkowaną skrajnie niekorzystnym mikrozanieczyszczeniem X . Dzieliąc myślowo tę objętość na n pewnych objętości elementarnych np. sześciątów o małych wymiarach, ze względu na przypadkowość rozkładu mikro-wtrącin w objętości dielektryka, w każdej z objętości elementarnych uzyska się nieco różne mikrozanieczyszczenia o skrajnie niekorzystnych właściwościach oznaczonych jako $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Odpowiednio do tego każda z elementarnych objętości ma inną wytrzymałość elektryczną $U_1, U_2, \dots, U_n$. Zakładając wstępnie, że zarówno X_i jak i U_i ($1 \leq i \leq n$) to niezależne zmienne losowe o jednakowych rozkładach:

$$F(x) = P(X_i < x), \quad (1a)$$

$$F(u) = P(U_i < u). \quad (1b)$$

oraz zakładając dalej, że przebicie jednego z elementarnych sześciątów, przy doprowadzeniu napięcia do elektrod, jest równoznaczne z przebicciem całego układu izolacyjnego, uzyska się, iż przebity zostanie ten z elementarnych sześciątów, który zawiera mikrowtrącinę, o najbardziej niekorzystnych właściwościach w danym momencie, oznaczoną przez Z_n , czyli

$$Z_n = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}. \quad (2a)$$



Sześcian zawierający wtrącinę Z_n ma najmniejszą wytrzymałość W_n czyli

$$W_n = \min \{U_1, U_2, \dots, U_n\}. \quad (2b)$$

Można więc zaobserwować jedynie minimalną wartość statystyki napięć przebicia elementarnych sześciątów. Prawdopodobieństwo, że wszystkie z n niezależnych obserwacji ciągłej zmiennej losowej są mniejsze niż x wynosi

$$H_n(x) = P \{Z_n < x\} = F^n(x), \quad (3a)$$

a prawdopodobieństwo, że najmniejsza spośród n niezależnych obserwacji jest mniejsza niż u wynosi

$$L_n(u) = P \{W_n < u\} = 1 - [1 - F(u)]^n. \quad (3b)$$

Rozwiązanie zagadnienia sprowadza się do poszukiwania rozkładów granicznych przy $n \rightarrow \infty$, czyli znalezienia takich warunków które należy nałożyć na funkcję $F(x)$ lub $F(u)$ aby zapewnić istnienie takiego układu stałych $a_n, b_n > 0$ lub $c_n, d_n > 0$, aby granice

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(a_n + b_n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n + b_n x) = H(x) \quad (4a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(c_n + d_n u) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - F(c_n + d_n u)]^n = L(u) \quad (4b)$$

istniały dla wszystkich punktów ciągłości funkcji odpowiednio $H(x)$ i $L(u)$.

Definicja [23]

Mówi się, że rozkład $F(x)$ należy do obszaru przyciągania $H(x)$, jeśli istnieją ciągi stałych a_n i $b_n > 0$ dla których słuszny jest wzór (4a) oraz, że $F(u)$ należy do obszaru przyciągania $L(u)$ jeśli istnieją ciągi stałych c_n i $d_n > 0$, dla których słuszny jest wzór (4b).

Twierdzenie 1 [23]

Istnieją tylko trzy typy funkcji rozkładów $H(x)$, spełniające zależność (4a). Są to:



$$H_{1,r}(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-r}) & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}, \quad (5)$$

$$H_{2,r}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \geq 0 \\ \exp[-(-x)^r] & \text{dla } x < 0 \end{cases}, \quad (6)$$

$$H_{3,0}(x) = \exp(-e^{-x}) \quad (-\infty < x < \infty). \quad (7)$$

Twierdzenie 2 [23]

Istnieją tylko trzy typy funkcji rozkładów $L(u)$ spełniających zależność (4b). Są to:

$$L_{1,r}(u) = \begin{cases} 1 - \exp[-(-u)^{-r}] & \text{dla } u < 0 \\ 1 & \text{dla } u > 0 \end{cases}, \quad (8)$$

$$L_{2,r}(u) = \begin{cases} 1 - \exp(-u^r) & \text{dla } u > 0 \\ 0 & \text{dla } u < 0 \end{cases}, \quad (9)$$

$$L_{3,0}(u) = 1 - \exp(-e^u) \quad (-\infty < u < \infty). \quad (10)$$

Twierdzenie 3 [23]

Funkcja rozkładu $F(x)$ należy do obszaru przyciągania:

1) $H_{1,r}(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy górna granica dziedziny funkcji $F(x)$ oznaczona jako ω jest równa ∞ i spełniony jest warunek

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-r}, \quad (11)$$

2) $H_{2,r}(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\omega < \infty$ i funkcja $F^*(x) = F\left(\omega - \frac{1}{x}\right)$ ($x > 0$) spełnia warunek (11),

3) $H_{3,0}(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje skończona całka

$$\int_a^\omega [1 - F(y)] dy \quad \text{przy } a < \infty \quad (12)$$



oraz spełniony jest warunek

$$\lim_{t \rightarrow \omega} \frac{1 - F[t + xR(t)]}{1 - F(t)} = e^{-x}, \quad (13)$$

gdzie

$$R(t) = [1 - F(t)]^{-1} \int_t^{\omega} [1 - F(y)] dy \quad (14)$$

dla $\alpha < t < \omega$ (α - dolna granica dziedziny funkcji $F(x)$).

Twierdzenie 4 [23]

Funkcja rozkładu $F(u)$ należy do obszaru przyciągania:

1) $L_{1,r}(u)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = -\infty$ i spełniona jest zależność

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(tu)}{F(t)} = u^{-r}, \quad (15)$$

2) $L_{2,r}(u)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha > -\infty$ i funkcja $F^*(u) = F(\alpha - 1/u)$ ($u < 0$) spełnia zależność (15),

3) $L_{3,0}(u)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona całka

$$\int_{\alpha}^a F(y) dy \quad \text{przy} \quad a < \infty \quad (16)$$

i spełniona jest zależność

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \frac{F[t + ur(t)]}{F(t)} = e^u, \quad (17)$$

gdzie

$$r(t) = \frac{1}{F(t)} \int_{\alpha}^t F(y) dy \quad \text{przy} \quad t > \alpha. \quad (18)$$

Dowody powyższych twierdzeń są podane w [23]. Rozkłady (5), (6), (7) zdefiniowane w twierdzeniu 1 noszą nazwę asymptotycznych (granicznych) rozkładów wartości maksymalnych, a rozkłady (8), (9), (10) zdefiniowane w twierdzeniu 2 noszą nazwę asymptotycznych (granicznych) rozkładów wartości minimalnych. Rozkłady (5) i (8) można wg numeracji Galambosa [23] nazwać rozkładami typu I (wg [9], [25] typu II), rozkłady (6) i (9) typu 2 (wg [9], [25] typu III), a rozkłady (7) i (10)



typu 3 (wg [9], [25] typu I). W technice wysokich napięć podstawowe znaczenie mają rozkłady wartości minimalnych typu 2 (III) i typu 3 (I) powszechniej nazywane odpowiednio rozkładem Weibulla i dwuwykładniczym.

Rozumowanie oparte o myślowy podział materiału izolacyjnego na elementarne objętości wiedzy, w oparciu o twierdzenia teorii wartości ekstremalnych, do rozkładu Weibulla [25], przy czym zarówno warunek nieoddziaływania poszczególnych elementów na siebie jak i warunek jednakowych rozkładów, rozważanej zmiennej losowej, dla każdego z elementów nie są warunkami rygorystycznymi. Teoria dopuszcza wzajemną zależność bliskich sobie (w objętości dielektryka) elementów zakładając jedynie, że oddalone od siebie elementy są asymptotycznie niezależne [23]. Rozkłady rozważanych zmiennych losowych mają natomiast być tego samego typu i muszą mieć podobny przebieg w pobliżu granicy α .

Przystosowanie teorii wartości ekstremalnych do szacowania wytrzymałości elektrycznej materiałów i układów izolacyjnych, sugeruje zgodnie z rozwiniętym na wstępie rozdziału rozumowaniem, zależność wytrzymałości od objętości dielektryka. Rzeczywiście zależność taka jest obserwowana eksperymentalnie, co stanowi jeden z dowodów poprawności przyjętej teorii (por. rozdz. 4.2.3 i 4.3.2). Ostatecznym dowodem jest zgodność danych eksperymentalnych z teoretycznymi rozkładami wartości ekstremalnych.

2.1.3. Rozkład Weibulla.

Właściwości i związki z innymi rozkładami

Rozkład Weibulla jest jednym z najbardziej elastycznych rozkładów statystycznych i najelastyczniejszym z rozkładów asymptotycznych. Postać tego rozkładu w wersji stosowanej do zagadnień wytrzymałości elektrycznej jest następująca:

$$F_w(u) = \begin{cases} 1 - \exp \left[- \left(\frac{u - u_0}{u_m - u_0} \right)^k \right] & \text{dla } u > u_0 \\ 0 & \text{dla } u \leq u_0 \end{cases}, \quad (19)$$

gdzie: u_0 - parametr przesunięcia (napięcie wytrzymałowe $F(u_0) = 0$) wyrażony w jednostkach napięcia,

u_m - parametr skali ($F(u_m) = 1 - e^{-1} \approx 0,632$) wyrażony w jednostkach napięcia,

u - zmienna losowa (napięcia przebiecia przeskoku itp.),

k - bezwymiarowy parametr kształtu.



Wprowadzając przekształcenie

$$Z = \frac{U - U_0}{U_m - U_0}, \quad (20)$$

uzyskuje się rozkład standaryzowany

$$F_{ws}(Z) = 1 - \exp(-Z^k) \quad \text{dla} \quad Z \geq 0. \quad (21)$$

Dla $k = 1$ rozkład (21) (a więc i (19)) jest funkcją wykładniczą, czyli rozkład wykładniczy jest szczególnym przypadkiem rozkładu Weibulla. Jeśli $k = 2$ i $U_0 = 0$, to uzyskuje się funkcję zwaną rozkładem Rayleigha.

Ponieważ dziedzina zmiennej we wzorach (19) i (21) jest ograniczona lewostronnie a nieograniczona prawostronnie rozkład jest asymetryczny. Jednakże usytuowanie względem siebie miar wartości centralnych: mediany, mody i średniej oraz znak trzeciego momentu zmieniają się w funkcji parametru kształtu k . W związku z tym istnieją przypadki pseudosymetrii rozkładu gdy "wydaje się", że jest on symetryczny. Parametry charakteryzujące rozkład Weibulla zestawiono w tabeli 1. W tabeli 2 zestawiono wartości standaryzowanych miar wielkości centralnych z tabeli 1, dla tych wartości k , dla których dwie lub trzy z nich są sobie równe i gdzie zanika trzeci moment. Jak wynika z tabeli 2, gdy dwie z podanych w tabeli wielkości mają tę samą wartość to trzecia różni się od nich nieznacznie. Podobnie wówczas gdy współczynnik skośności jest równy zeru, to wszystkie trzy miary wielkości centralnych mają wartości zbliżone. We wszystkich tych przypadkach rozkład wydaje się być symetryczny. Ogólnie wrażenie symetryczności rozkładu Weibulla jest zachowane jeśli parametr k jest zawarty w przedziale $3,2 < k < 3,7$ ($0,27 < 1/k < 0,31$). W przedziale tym rozkład Weibulla jest "podobny" do rozkładu normalnego. Stąd niektórzy autorzy podejmowali próbę matematycznego zapisu rozkładu Weibulla o kształcie najbardziej zbliżonym do kształtu rozkładu normalnego. Przykładowo Veverka [81] zakładając, że $F_w(U_0) = 0$; $F_w(\bar{U}) = 0,5$ oraz $F_w(U_m) = F_N(U_m)$, gdzie F_N - dystrybuanta rozkładu normalnego, uzyskał

$$F_w(x) = 1 - \exp \left[- \frac{(x + 3)^{3,27}}{52,1} \right], \quad (22)$$

gdzie $x \cdot \sigma = U - \bar{U}$ (σ - odchylenie standardowe rozkładu normalnego).



T a b e l a 1

Parametry związane z rozkładem Weibulla

Średnia lub moment	Symbol	Wzór
Mediana	$\tilde{U}$	$U_0 + (U_m - U_0)(\ln 2)^{1/k}$
Moda	$\tilde{U}$	$U_0 + (U_m - U_0)(1 - \frac{1}{k})^{1/k} \quad k > 1$
Zredukowany moment rzędu 1	$\frac{\overline{z^1} \text{ lub } \left(\frac{U - U_0}{U_m - U_0} \right)^1}$	$\frac{1}{k} \Gamma\left(\frac{1}{k}\right)$
Moment rzędu 1	$\overline{(U - U_0)^1}$	$(U_m - U_0)^1 \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$
Pierwszy moment (średnia)	$\bar{U}$	$U_0 + (U_m - U_0) \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$
Wariancja	σ^2	$(U_m - U_0)^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right]$
Standaryzowana różnica od U_m do U_0	$B(k) \equiv \frac{U_m - U_0}{\sigma}$	$\left(\sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \right)^{-1}$
Standaryzowana różnica od U_m do $\bar{U}$	$A(k) \equiv \frac{U_m - \bar{U}}{\sigma}$	$\left[1 - \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right] B(k)$
Trzeci moment centralny	μ_3	$\overline{(U - U_0)^3} - 3\overline{(U - U_0)^2} \overline{(U - U_0)} + 2\overline{(U - U_0)}^3$
Współczynnik skośności	$\sqrt{T_1} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$	$\left[\Gamma\left(1 + \frac{3}{k}\right) - 3\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) + 2\Gamma^3\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right] B^3(k)$



Przy nieco innych założeniach $F_w(U_0) = 0$; $F_w(\bar{U}) = 0,5$; oraz $F'_w(\bar{U}) = \left(\frac{dF_w}{dU}\right)_{U=\bar{U}} = \left(\frac{dF_N}{dU}\right)_{U=\bar{U}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ uzyskuje się

$$F_w(x) = 1 - \exp\left[-\frac{(x+3)^{3,445}}{64,2}\right]. \quad (23)$$

T a b e l a 2

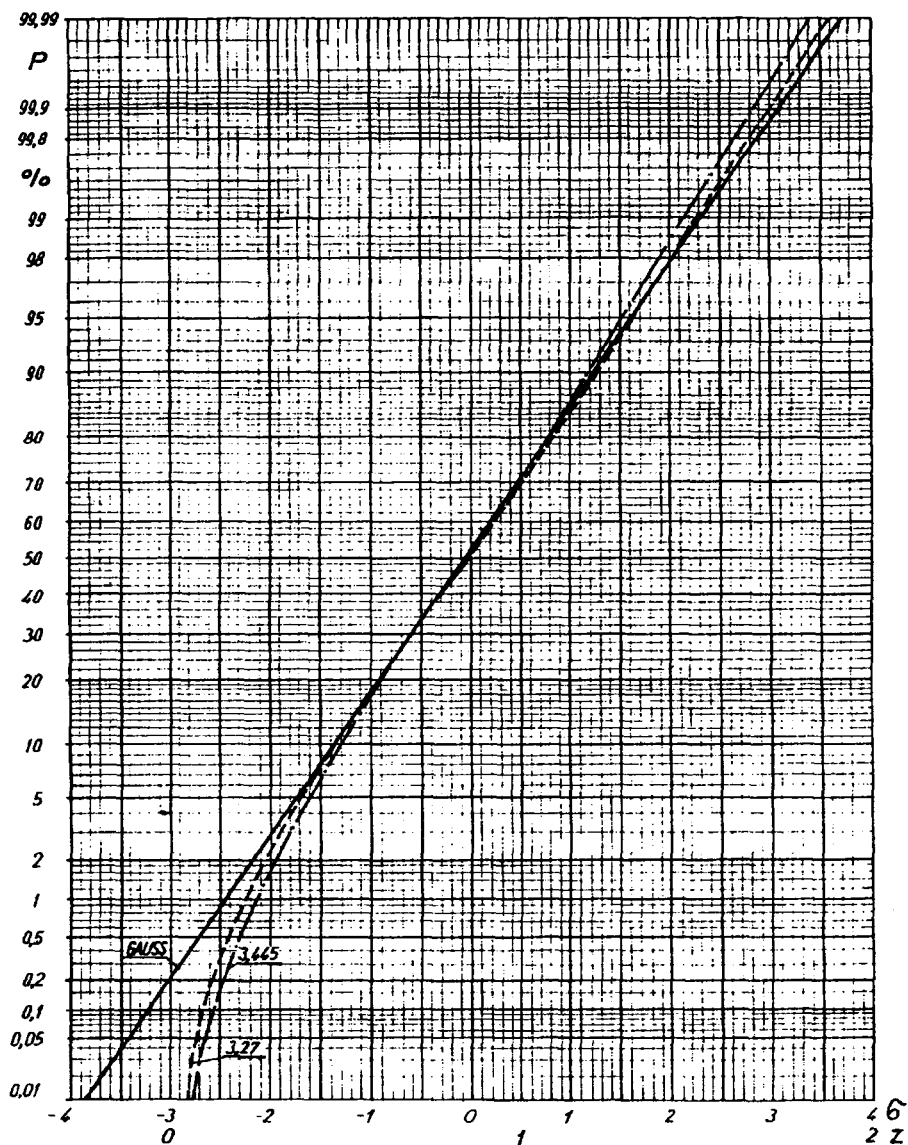
Cztery pseudosymetryczne przypadki
rozkładu Weibulla wg [25]

Warunek	Parametr		Mediana $\tilde{z}$	Moda $\tilde{z}$	Średnia $\bar{z}$	Współ- czynnik skośno- ści $\sqrt{\chi_1}$
	k	1/k				
$\tilde{z} = \tilde{z}$	3,25889	0,30685	0,89363	0,89363	0,89646	0,09350
$\tilde{z} = \bar{z}$	3,31125	0,30189	0,89525	0,89719	0,89719	0,07447
$\bar{z} = \tilde{z}$	3,43938	0,29075	0,89892	0,90494	0,89892	0,04057
$\tau_1 = 0$	3,60232	0,27760	0,90326	0,91369	0,90114	0,00000
Uwaga: Odpowiednie wartości $\hat{u}$ uzyskuje się z $\hat{u} = \hat{z} U_m + (1 - \hat{z}) U_0$						

Zależności (22) i (23) wprowadzają więc kolejne wartości parametru kształtu k z przedziału $(3,2; 3,7)$, przy których wg [81] rozkład Weibulla dobrze zastępuje rozkład normalny. Rozkłady o $k = 3,27$ i $3,445$ wykreślono na rysunku 1 w normalnej (Gaussowskiej) siatce prawdopodobieństwa (patrz rozdz. 2.3.2). Minimalne różnice między rozkładami stanowią, iż w oparciu o ograniczoną liczbę obserwacji zmiennej losowej trudno jest dokonać wyboru rozkładu w oparciu jedynie o kryteria statystyczne. Wybór winien w takim przypadku być dodatkowo wsparty argumentami wynikającymi ze znajomości fizycznych właściwości badanego zjawiska.

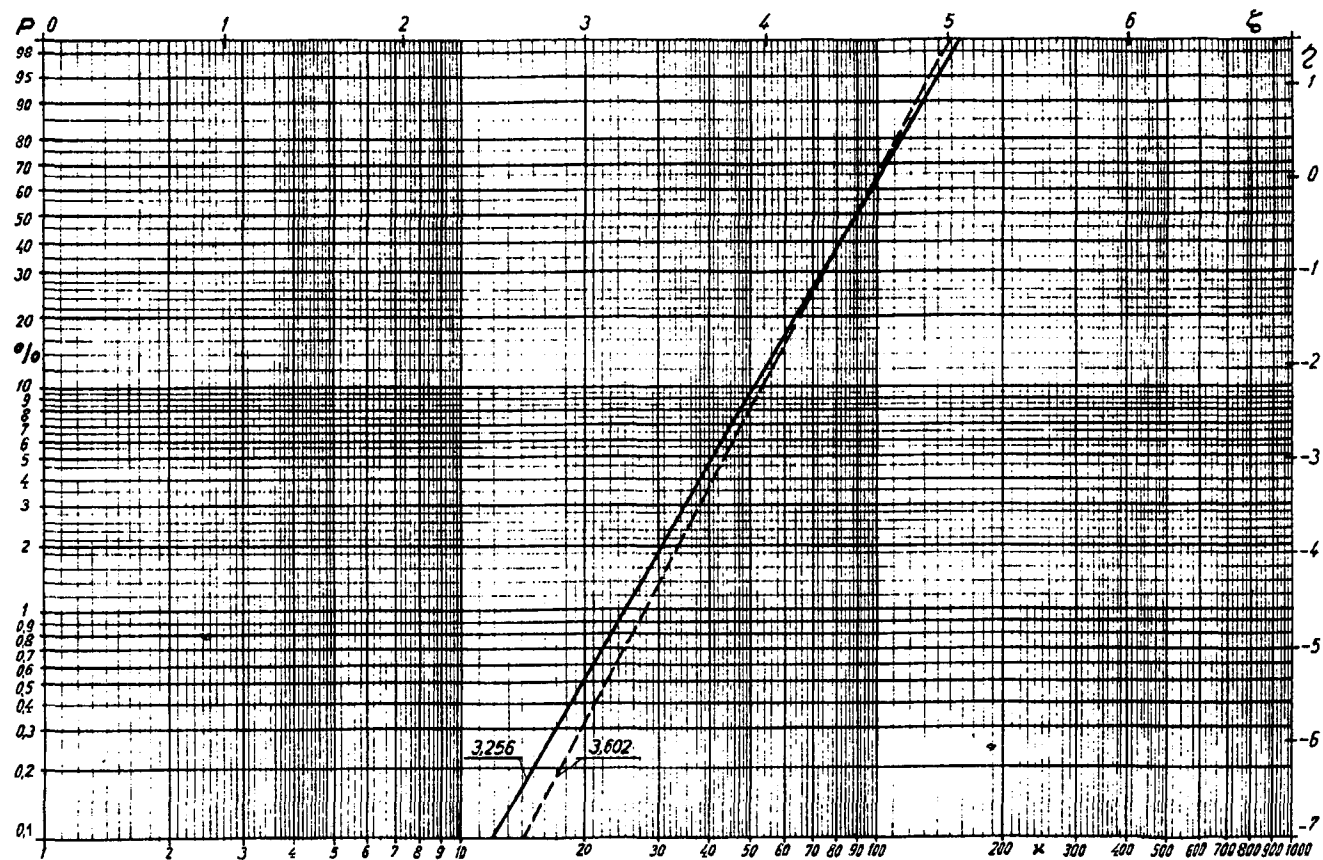
Jeśli z założeń Veverki [81] poprzestać jedynie na założeniu, że prawdopodobieństwo uzyskania wartości średniej wynosi tak jak dla rozkładu normalnego $0,5$ ($F_w(\bar{U}) = 0,5$), to uzyska się rozkład o $k = 3,5$ często stosowany [25, 58] jako praktycznie pokrywający się z normal-





Rys. 1. Rozkłady Weibulla o parametrach kształtu $k = 3,27$ i $k = 3,445$ wykreślone w siatce funkcyjnej rozkładu Gaussa





Rys. 2. Graniczne przypadki pseudosymetrycznych rozkładów Weibulla o parametrach kształtu $k = 3,256$ i $k = 3,602$ wykreślone w uniwersalnej (dwulogarytmiczno-logarytmicznej) siatce rozkładu Weibulla



T a b e l a 3

Standaryzowane rozkłady Weibulla

Z	X	k 3,256	3,270	3,311	3,439	3,445	3,602	3,500
0	-3	0	0	0	0	0	0	0
0,1	-2,67	0,00055	0,00051	0,00049	0,00036	0,00034	0,00025	0,00033
0,2	-2,33	0,00528	0,00517	0,00484	0,00394	0,00391	0,00303	0,00382
0,3	-2,0	0,01964	0,01901	0,01839	0,01578	0,01546	0,01299	0,01525
0,4	-1,67	0,04936	0,04760	0,04698	0,04189	0,04075	0,03618	0,03969
0,5	-1,33	0,09938	0,09758	0,09583	0,08806	0,08711	0,07904	0,08673
0,6	-1,0	0,17265	0,16902	0,16827	0,15850	0,15603	0,14683	0,15439
0,7	-0,66	0,26880	0,26766	0,26432	0,25416	0,25275	0,24171	0,24899
0,8	-0,32	0,38342	0,38849	0,37976	0,37135	0,37099	0,36085	0,36795
0,9	0,01	0,50816	0,50764	0,50613	0,50144	0,50123	0,49549	0,49868
1,0	0,347	0,63212	0,63212	0,63212	0,63212	0,63212	0,63212	0,63212
1,1	0,68	0,74433	0,74480	0,74617	0,75041	0,75059	0,75577	0,75208
1,2	1,02	0,83644	0,83723	0,83941	0,84620	0,84732	0,85464	0,84909
1,3	1,35	0,90460	0,90542	0,90781	0,91503	0,91511	0,92370	0,91566
1,4	1,69	0,94975	0,95048	0,95250	0,95846	0,95909	0,96528	0,96110
1,5	2,02	0,97634	0,97657	0,97827	0,98228	0,98240	0,98655	0,98397
2,0	3,70	0,99993	0,99994	0,99995	0,99998	0,99998	0,99999	0,99999
2,5	5,35	~1	~1	~1	~1	~1	~1	~1



nym w zakresie dostępnym do obserwacji eksperymentalnych. Jest to rozkład o średniej bliskiej medianie (patrz tab. 2) i o bardzo małym współczynniku skośności. Na rysunku 2 wykreślono rozkłady Weibulla o najmniejszym i największym k z tabeli 2 w uniwersalnej siatce funkcyjnej rozkładu Weibulla (patrz rozdz. 2.3.2). W tablicy 3 zestawiono wszystkie pseudometryczne przypadki rozkładu Weibulla z tabeli 2. Jak widać różnice pomiędzy poszczególnymi pseudosymetrycznymi przypadkami są nieznaczne i tylko przy bardzo dużych licznosciach próbki można byłoby dokonać rozróżnienia. Dla celów praktycznych można więc pozostać przy przybliżeniu $k = 3,5$ wówczas gdy ograniczone wyniki obserwacji sugerują rozkład normalny.

Rozkład Weibulla jest również silnie związany z pozostałymi rozkładami asymptotycznymi. Przykładowo wprowadzając podstawienie

$$x = \lg U; \quad \vartheta = \lg U_m; \quad \alpha' = 2,30259 k; \quad U_0 = 0$$

to z zależności (19) uzyskuje się

$$F_0(y) = 1 - \exp(-e^y), \quad (24)$$

gdzie $y = \alpha'(x - \vartheta)$.

Jest to rozkład dwuwykładniczy (por. wzór 10). Zatem logarytmy zmiennych z rozkładu Weibulla podlegają rozkładowi dwuwykładniczemu.

Pomiędzy sześcioma rozkładami asymptotycznymi istnieje piętnaście różnych związków [25]. Podane niżej zależności wybrano ze względu na bezpośredni związek z rozkładem Weibulla

$$\begin{aligned} F_w(z) = 1 - H_{3,0}(-k \ln z) &= 1 - H_{1,\tau}\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - H_{2,\tau}(-z) = \\ &= L_{3,0}(k \ln z) = L_{1,\tau}\left(\frac{1}{z}\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Oznaczenia we wzorze (25) są identyczne z oznaczeniami w twierdzeniach 1 i 2 (rozdz. 2.1). Zależności (25) dotyczą transformacji rozkładu Weibulla na każdy z pozostałych pięciu rozkładów asymptotycznych.

Rozkład Weibulla może być również traktowany jako przypadek szczególny uogólnionego rozkładu gamma [19].



2.1.4. Rozkład dwuwykładniczy

Postać dystrybuanty rozkładu dwuwykładniczego w wersji stosowanej do zagadnień wytrzymałości elektrycznej jest następująca:

$$F_D(U) = 1 - \exp[-e^{\alpha(U - U_m)}]; \quad -\infty < U < \infty, \quad (26)$$

gdzie: U_m - wartość charakterystyczna [$F(U_m) = 1 - e^{-1} \approx 0,632$] wyrażona np. w jednostkach napięcia (moda),

α - bezwymiarowy parametr będący miarą rozrzutu,

U - zmienna losowa (np. napięcie przebicia przeskoku itp.).

T a b e l a 4

Parametry związane z rozkładem dwuwykładniczym

Parametr	Symbol	Wzór
1	2	
Mediana	$\tilde{U}$	$U_m - \frac{\ln(\ln 2)}{\alpha}; \quad \ln(\ln 2) = -0,36651$
Moda	$\tilde{U}$	U_m
Średnia	$\bar{U}$	$U_m - \frac{\gamma}{\alpha}; \quad \gamma - \text{stała Eulera}$ $\gamma \approx 0,577$
Wariancja	σ^2	$\frac{\pi^2}{6\alpha^2}$
Współczynnik skośności	$\sqrt{\tau_1}$	-1,1396

Po przekształceniu

$$y = \alpha(U - U_m) \quad (27)$$

uzyskuje się rozkład standaryzowany

$$F_{DS}(y) = 1 - \exp[-e^y]. \quad (28)$$

Wzory określające podstawowe parametry rozkładu dwuwykładniczego zestawiono w tabeli 4.



Porównując rozkład dwuwykładniczy z rozkładem normalnym (obydwa rozkłady mają dziedziny obustronnie nieograniczone) można stwierdzić, że dla małych wartości zmiennej losowej rozkład dwuwykładniczy (dla wartości minimalnych) ma mniejsze wartości funkcji gęstości niż rozkład normalny. Gęstość prawdopodobieństwa mody jest większa dla rozkładu dwuwykładniczego niż dla normalnego.

Rozkład dwuwykładniczy pokrywa się w przybliżeniu z rozkładem logarytmo-normalnym, stąd rozróżnienie między tymi dwoma rozkładami jest, szczególnie przy małych licznosciach próbki, trudne. W takich przypadkach wybór winien być wsparty dodatkowo argumentami wynikającymi ze znajomości właściwych fizycznych badanego zjawiska.

Jak wynika z założeń wzoru (24) pomiędzy rozkładem Weibulla a dwuwykładniczym istnieje podobny związek jak między rozkładem normalnym a logarytmo-normalnym.

2.2. Prawo wzrostu

2.2.1. Wprowadzenie

Dla określenia wytrzymałości elektrycznej układu izolacyjnego zachodzi często konieczność wykonania badań niszczących np. prowadzonych aż do przebicia. Jest oczywiste, że badań takich nie można, ze względu na koszty, wykonywać na pełnowymiarowych układach izolacyjnych, lecz wykonuje się je na odpowiednich modelach o wymiarach znacznie zmniejszonych. Przykładowo, dla określenia wytrzymałości kabla bada się odcinki o długości kilku metrów. Zachodzi pytanie jak uzyskane w taki sposób wyniki można wykorzystać przy wnioskowaniu o pełnowymiarowym układzie izolacyjnym.

W teorii wartości ekstremalnych zagadnienie to jest znane pod nazwą wzrostu ekstremów i opiera się na rozumowaniu, że jeśli próbka elementarna zawiera n skaz materiałowych to próbka N -krotnie większa zawiera $N \cdot n$ skaz materiałowych. W każdej z elementarnych próbek obserwowano minimalną wartość wytrzymałości, której rozkład zmierzał do rozkładu określonego typu. Badanie próbki $N \times n$ prowadzi do obserwacji najmniejszej z N najmniejszych wartości. Postulat stabilności słuszny jedynie dla rozkładów wartości ekstremalnych [25] mówi, że rozkład dotyczący próbki N -krotnie większej zmierza do tego samego asymptotycznego wyrażenia co rozkład najmniejszych wartości w próbce o licznosci n zakładając, że takie asymptoty istnieją.



Ogólne zagadnienie wzrostu ekstremów czy zmiany wymiarów modelu rozwiązuje się za pomocą tzw. prawa wzrostu prawdopodobieństwa zwane-
go w skrócie prawem wzrostu o postaci

$$F(N, U) = 1 - [1 - F(1, U)]^N, \quad (29)$$

gdzie: $F(1, U)$ - rozkład uzyskany dla próbek elementarnych,

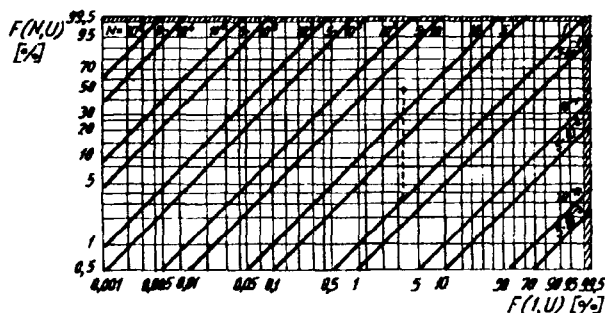
$F(N, U)$ - rozkład dla próbek N -krotnie większych,

N - współczynnik skali.

Na rysunku 3 wykreślono zależność (29) we współrzędnych:

$$\ln \{-\ln[1 - F(N, U)]\} \quad \text{ i } \quad \ln \{-\ln[1 - F(1, U)]\}.$$

W takim układzie współrzędnych uzyskuje się linie proste przesunięte względem siebie o $\ln N$.



Rys. 3. Graficzna interpretacja prawa wzrostu
(29) wg [16]

Zastosowanie prawa wzrostu do rozkładów wartości ekstremalnych ma tę szczególną właściwość, że rozkłady $F(1, U)$ i $F(N, U)$ są rozkładami tego samego typu. Jest to jedna z zalet rozkładów wartości ekstremalnych stanowiąca o ich coraz szerszym zastosowaniu.

Poniżej omówiono szczególne przypadki zastosowania prawa wzrostu.

2.2.2. Prawo wzrostu dla zakresu małych prawdopodobieństw

Jeśli przykładowo poszukuje się informacji o napięciach przebicia odpowiadających małym prawdopodobieństwom zaistnienia przebicia np.



dla $F(N,U) < 0,15$ co często ma miejsce w praktyce, to wówczas również będą brane pod uwagę wartości $F(1,U)$ znacznie mniejsze od jedności.

Dla ilorazu [16]

$$\frac{F(N,U)}{F(1,U)} \approx \lim_{F(1,U) \rightarrow 0} \frac{F(N,U)}{F(1,U)} = \lim_{F(1,U) \rightarrow 0} \frac{1 - [1 - F(1,U)]^N}{F(1,U)} = N, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1-x)^N}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - [1 - Nx - \binom{N}{2}x^2 - \binom{N}{3}x^3 - \dots - \binom{N}{N}x^N]}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + Nx + \binom{N}{2}x^2 + \binom{N}{3}x^3 + \dots + \binom{N}{N}x^N}{x} = N, \end{aligned}$$

gdzie

$$\binom{N}{n} = \frac{N(N-1)(N-2) \dots (N-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} = \frac{N!}{m!(N-m)!}.$$

Czyli w przypadku małych prawdopodobieństw dla oszacowania przybliżonych wartości poszukiwanego rozkładu $F(N,U)$ wystarczy wymnożyć uzyskane z badań wartości $F(1,U)$ przez wartość współczynnika skali N .

2.2.3. Prawo wzrostu dla dużych N

Jeśli współczynnik N jest bardzo duży rzędu 10^2 i większy, to jak wynika z rysunku 3 dla użytecznego praktycznie zakresu funkcji $F(N,U) = 0 \div 99\%$ funkcja ta zależy tylko od wartości $F(1,U)$ znacznie mniejszych od jedności, wówczas można zapisać przybliżoną wartość

$$1 - F(1,U) \approx e^{-F(1,U)}, \quad (31)$$

gdyż w szeregu Maclaurina dla funkcji e^{-x}

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

można pominąć wyrazy wyższych rzędów jako znikomo małe.

Wykorzystując równanie (31) można dla tego przypadku, przedstawić prawo wzrostu w postaci

$$F(N,U) = 1 - \exp[-NF(1,U)]; \quad \text{dla } N > 20. \quad (32)$$



2.2.4. Uogólnione prawo wzrostu

Prawo wzrostu w postaci (29) obowiązuje wówczas, gdy analizowany obiekt jest wielokrotnością elementów, dla których oszacowano funkcję $F(1, U)$. Jeśli obiekt składa się z N oddzielnych elementów o różnych rozkładach $F_1(U)$, $F_2(U)$, ..., $F_N(U)$ to wówczas prawo wzrostu przybiera postać

$$F(N, U) = 1 - \prod_{i=1}^{i=N} [1 - F_i(U)]. \quad (33)$$

To uogólnione prawo wzrostu można stosować dla konstrukcji składających się z wielu różnych elementów np. transformatorów energetycznych, układów izolacji stacji elektroenergetycznych, izolacji linii napowietrznych itp.

Zastosowanie prawa wzrostu (33) prowadzi do tego iż rozkład $F(N, U)$ jest rozkładem wielomodalnym (zwanym czasem rozkładem złożonym). Dokładna analiza tego typu rozkładów jest możliwa jedynie za pomocą maszyn matematycznych.

2.2.5. Prawo wzrostu w zastosowaniu do rozkładu Weibulla

W przypadku rozkładu Weibulla (21) prawo wzrostu przybiera postać

$$F(N, U) = 1 - \left\{ 1 - [1 - \exp(-z^k)] \right\}^N = 1 - \exp(-Nz^k), \quad (34)$$

czyli, że w myśl postulatu stabilności nadal jest to rozkład Weibulla. Właściwości tej nie posiada rozkład normalny (patrz pkt. 2.2.7).

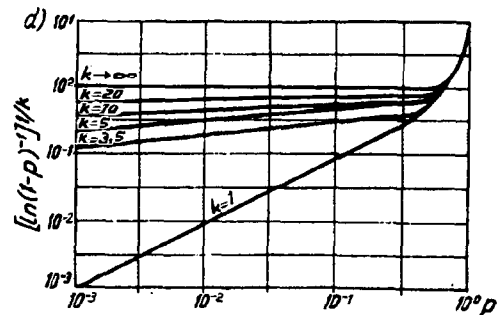
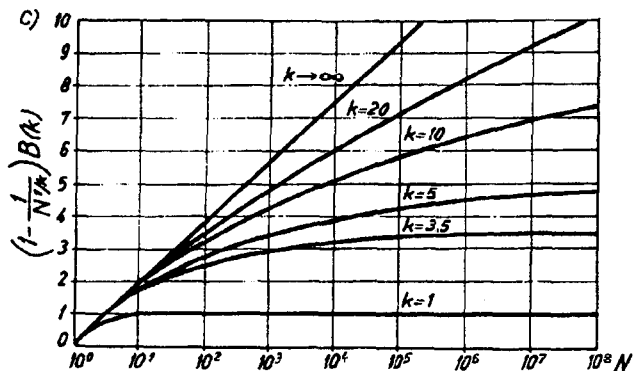
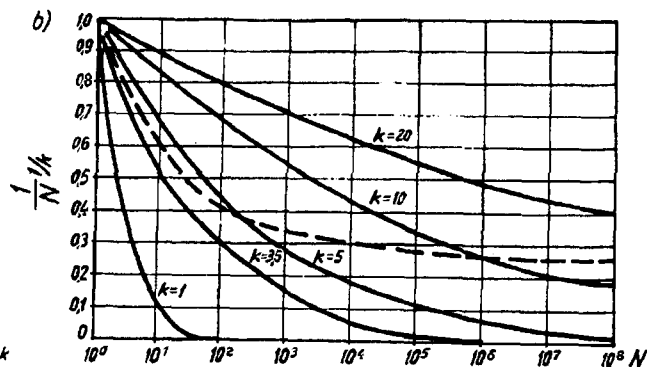
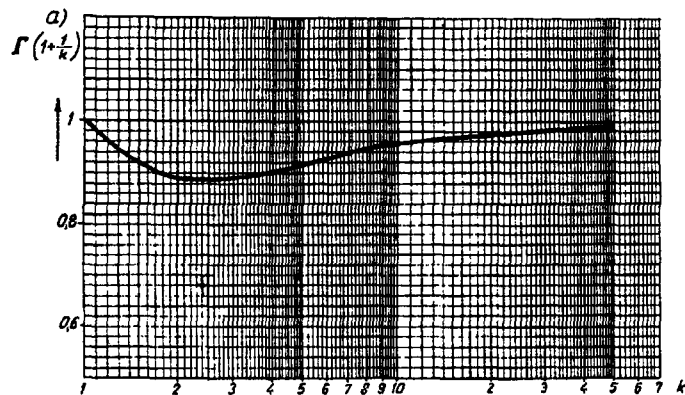
Ponieważ "z" ma postać daną zależnością (20), stąd

$$Nz^k = \left\{ \frac{u - U_0}{[U_0 + (U_m - U_0)N^{-1/k}] - U_0} \right\}^k. \quad (35)$$

Jak wynika z wzoru (35) nie tylko zachowana została postać rozkładu, ale także nie zmieniły się dwa z trzech jego parametrów U_0 oraz k . Zmianie uległ jedynie parametr skali, który zmalał od U_m do $U_0 + (U_m - U_0)N^{-1/k}$.

Wykorzystując właściwości rozkładu Weibulla zestawione w tablicy 1 można, stosując wzory (34) i (35), określić na podstawie znajomości





Rys. 4. Wykresy pomocnicze do korzystania z prawa wzrostu w przypadku rozkładu Weibulla (wzory (36) i (37)). Linia przerywana na rysunku b) dotyczy rozkładu normalnego, wg [16]

parametrów rozkładu $F(1,U)$ parametry rozkładu $F(N,U)$ dla obiektu N -krotnie większego. Wzory dla określenia wartości średniej, odchylenia standardowego oraz kwantyla rzędu "p" są postaci:

$$\begin{aligned}\bar{U}_N &= \bar{U} - a_N \cdot S & (a), \\ S_N &= b_N \cdot S & (b), \\ U_{Np} &= U_p - c_{Np} \cdot S & (c),\end{aligned}\tag{36}$$

gdzie

$$\begin{aligned}a_N &= \left(1 - \frac{1}{N^{1/k}}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) B(k) & (a) \\ b_N &= \frac{1}{N^{1/k}} & (b) \\ c_{Np} &= \left(1 - \frac{1}{N^{1/k}}\right) B(k) \left[\ln\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]^{1/k} & (c)\end{aligned}\tag{37}$$

Poszczególne składniki wzorów (37) wykreślono na rysunku 4 w funkcji k , N i p .

2.2.6. Prawo wzrostu w zastosowaniu do rozkładu dwuwykładniczego

W przypadku rozkładu dwuwykładniczego (26), prawo wzrostu przybiera postać

$$F(N,U) = 1 - \left\{1 - [1 - \exp(-e^Y)]\right\}^N = 1 - \exp(-Ne^Y), \tag{38}$$

czyli, że w myśl postulatu stabilności nadal jest to rozkład dwuwykładniczy.

Dla "y" danego wzorem (27) uzyskuje się

$$N \cdot e^Y = e^{\alpha \left[U - \left(U_m - \frac{\ln N}{\alpha} \right) \right]}. \tag{39}$$

Jak widać nie uległ zmianie parametr α . Zmniejszyła się natomiast wartość modalna od U_m do $U_m - \ln N / \alpha$. Tak więc rozkład dwuwykładniczy



ma tę ciekawą właściwość, że przy jego stosowaniu w prawie wzrostu (29) następuje przesunięcie całego rozkładu ku niższym wartościom zmiennej losowej o wartość $\ln N/\alpha$.

2.2.7. Prawo wzrostu w zastosowaniu do rozkładu normalnego

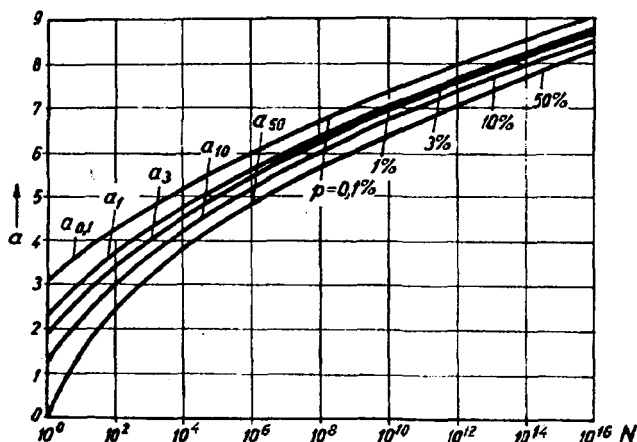
Zastosowanie prawa wzrostu (29) w przypadku gdy $F(1,U)$ jest rozkładem normalnym (40)

$$F(1,U) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^U \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dt, \quad (40)$$

gdzie: μ - wartość oczekiwana,

σ - odchylenie standardowe,

daje w efekcie rozkład $F(N,U)$ różny od normalnego. Ze wzrostem N rozkład $F(N,U)$ staje się coraz bardziej niesymetryczny i coraz bardziej spójny tzn. rozrzut od wartości średniej maleje. Odchylenie standardowe rozumiane tak jak do symetrycznego rozkładu normalnego traci przy dużych N swój sens. Rozkład normalny nie spełnia więc postulatu stabilności przy stosowaniu prawa wzrostu.



Rys. 5. Współczynniki a_{Np} do wzoru (41) wg [83]

Rozwiązanie równania (29) przy podstawieniu $F(1,U)$ z (40) jest dość skomplikowane i wymaga stosowania metod numerycznych. Rozwiązanie takie opublikowane w [83] pozwala określić kwantyl rzędu p rozkładu $F(N,U)$ z zależności

$$U_{N,p} = \bar{U} - a_{N,p} \cdot \sigma, \quad (41)$$

gdzie $\bar{U}$ i σ - parametry rozkładu $F(1,U)$.

Współczynniki $a_{N,p}$ wykreślono na rysunku 5. Dla $p = 50$ wartości $a_{N,50\%}$ zestawiono w tabelicy 5. Miarę rozrzutu można dla rozkładu $F(N,U)$ oszacować z wzoru (36b) gdzie b_N wykreślono na rysunku 4b linią przerywaną i zestawiono w tabeli 5.

T a b e l a 5

Współczynniki $a_{N,50\%}$ do wzoru (41) oraz b_N do wzoru (36b) (przypadek rozkładu normalnego) wg [27]

Współczynnik skali N	1	10	10^2	10^3	10^4
Współczynnik $a_{N,50\%}$	0	1,54	2,5	3,25	3,85
Współczynniki b_N	1	0,59	0,43	0,35	0,30

2.3. Opracowanie wyników badań

2.3.1. Wprowadzenie

W zagadnieniach z dziedziny techniki wysokich napięć głównym źródłem informacji są badania eksperymentalne. W takim przypadku wykorzystuje się otrzymane wyniki obserwacji zmiennej losowej do określenia, że znanym stopniem wiarygodności, kształtu dystrybuanty lub funkcji gęstości rozkładu i obliczenia jego parametrów.

Zbiór wszystkich możliwych realizacji zmiennej losowej nazywa się populacją generalną natomiast zbiór zaobserwowanych wartości zmiennej losowej będący częścią populacji generalnej nazywa się próbką lo-



sową. Próbką losową uporządkowaną według rosnących wartości zaobserwowanej częstości występowania, nazywa się szeregiem rozdzielczym. Porządkowanie każdej wartości uporządkowanej próbki losowej sumy częstości odpowiadających wszystkim wartościom zmiennej losowej nie większym od tej wartości daje szereg kumulacyjny. Wielkość k -tą co do wartości w uporządkowanej według niemalejących wartości w próbie o liczności n nazywa się statystyką pozycyjną w próbie, rzędu k , a stosunek $\lambda = k/n$ nazywa się rangą k -tej statystyki pozycyjnej.

Szereg rozdzielczy lub szereg kumulacyjny stanowią podstawę do statystycznego wnioskowania o cechach populacji generalnej poprzez weryfikację hipotez o rodzaju rozkładu analizowanej zmiennej losowej (hipotezy nieparametryczne) lub poprzez określenie jego charakterystyk liczbowych (estymatorów) (hipotezy parametryczne).

Na mocy losowości próbki jej charakterystyki są zmiennymi losowymi, różniąc się tym samym od rzeczywistych charakterystyk rozkładu teoretycznego, któremu podporządkowana jest populacja generalna [1].

W zależności od tego czy za podstawę wnioskowania statystycznego wybrano szereg rozdzielczy czy kumulacyjny stosuje się odpowiednio metodę empirycznej funkcji gęstości (metoda histogramu) lub metodę dystrybuanty empirycznej $\hat{F}(U)$.

Tutaj ograniczono się do metody dystrybuanty empirycznej, prostszej i bardziej jednoznacznej niż metoda histogramu, w której uchybienia przy wyborze granic klas skrajnych, szerokości klas, liczby realizacji w klasach, mogą prowadzić do błędnych wyników*.

Oszacowanie dystrybuanty empirycznej $\hat{F}(U_i)$ winno wg GUMBELA [25] spełniać następujące postulaty:

- 1) obejmować wszystkie obserwacje,
- 2) punkty winny leżeć między zaobserwowanymi częstościami $(i-1/n)$ oraz i/n i winny być niezależne od rodzaju rozkładu,
- 3) okresy powtarzania** wartości równej lub większej od największej obserwacji i wartości mniejszej od najmniejszej obserwacji winny być bliskie liczbie obserwacji n ,
- 4) obserwacje są równomiernie rozłożone w skali częstości,
- 5) ma mieć intuicyjny sens i prostą postać.

*Odmówienie metody opartej o histogram można znaleźć np. w [1, 40 t. 2, 46].

** Jeśli zdarzenie ma prawdopodobieństwo $P = 1 - F(x)$ to należy średnio wykonać $1/p$ prób aby zdarzenie zaistniało jeden raz. Wielkość $T(x) = 1/p = 1/[1 - F(x)] > 1$ nazywa się okresem powtarzania [25].



Warunki te spełnia średnia częstość realizacji zapisana wzorem

$$\hat{F}(U_i) = \frac{i}{n+1}. \quad (42)$$

W literaturze np. [34, 46, 49, 50] podaje się również inne definicje dystrybuanty empirycznej. Zagadnienie to podnoszone jest zwykle przy okazji omawiania rozkładu Weibulla. Przykładowo w [50] w oparciu o analizę średniego błędu kwadratowego dla parametru kształtu rozkładu Weibulla proponuje się zależność

$$\hat{F}(U_i) = \frac{i - 1/2}{n}. \quad (43)$$

Zależność ta nie spełnia trzeciego z postulatów Gumbela i została w [25] określona jako błędna.

Podobnie zaproponowana w [34, 49] mediana wartości rangowych

$$\hat{F}(U_i) = \frac{i - 0,3}{n + 0,4}, \quad (44)$$

została wybrana, jak to określono w [34] intuicyjnie i nie spełnia postulatu słuszności dla dowolnego rozkładu. W skrypcie korzysta się z zależności (42) jako najpowszechniej stosowanej [19, 25, 46] i dającej bardziej pesymistyczne oszacowania w zakresie niskich prawdopodobieństw co w zagadnieniach technicznych stanowi zaletę.

Dystrybuantę empiryczną (42) należy aproksymować jednym z rozkładów teoretycznych. W tym celu wykorzystuje się jedną z trzech następujących metod:

- 1) metodę graficzną,
- 2) metodę momentów,
- 3) metodę największej wiarygodności.

Metoda graficzna przydatna jest do prostych i szybkich obliczeń inżynierskich i poprzez wykreślenie wszystkich punktów eksperymentalnych na wspólnym układzie współrzędnych pozwala zgrubie ocenić poprawność uzyskanych wyników badań. Metoda największej wiarygodności wymaga zwykle stosowania maszyn cyfrowych.



2.3.2. Metoda graficzna

Każdy rozkład statystyczny zmiennej losowej U o dystrybuancie $F(U)$ posiada sobie tylko właściwą siatkę funkcyjną o odciętej $\xi = \psi_1(U)$ i rzędnej $\eta = \psi_2[F(U)]$, w której dystrybuanta $F(U)$ jest prostą o równaniu

$$\eta = a + b\xi. \quad (45)$$

T a b e l a 6

Współrzędne liniowe wybranych rozkładów statystycznych

Rozkład \ Współrzędne	η	ξ	Równanie prostej
Normalny*	$Y[F(u)]$	U	$y = -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} U$
Weibulla siatka uniwersalna	$\ln \ln \left[\frac{1}{1 - F(u)} \right]$	$\ln(U - U_0)$	$y = -k \ln(U_m - U_0) + k \ln(U - U_0)$
Weibulla siatka o ustalonym k	$k \sqrt{-\ln(1 - F(u))}$	U	$y = \frac{-U_0}{U_m - U_0} + \frac{U}{U_m - U_0}$
Wykładniczy	$-\ln[1 - F(u)]$	U	$y = \frac{-U_0}{U_m - U_0} + \frac{U}{U_m - U_0}$
Dwuwykładniczy	$\ln \ln \left[\frac{1}{1 - F(u)} \right]$	U	$y = -\alpha U_m + \alpha U$

* dla rozkładu normalnego $F(x) = 0,5 + \Phi(y)$ gdzie $y = \frac{x - \mu}{\sigma}$ i $\Phi(y)$ - całka Laplace'a.

Współrzędne siatek funkcyjnych i równania prostych dla wybranych rozkładów statystycznych zestawiono w tabeli 6. Wykorzystując współrzędne η i ξ , które po wykonaniu transformacji określonych wzorami z tabeli 6, są współrzędnymi liniowymi dla danego rozkładu, można wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów określić parametry prostej (45) z wzorów

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad (46a)$$



$$\hat{b} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad (46b)$$

gdzie za x_i i y_i podstawia się wartości obliczone z tabeli 6 przy podstawieniu za $F(U)$ i U odpowiednich wartości $\hat{F}(U_i)$ (obliczonych z wzoru (42)) i U_i uzyskanych eksperymentalnie. Oszacowane współczynniki $\hat{a}$ i $\hat{b}$ prostej (45) pozwalają wykreślić dystrybuantę rozkładu w jego siatce funkcyjnej i wyznaczyć parametry rozkładu (tab. 7). Dla rozkładu normalnego wartości $\hat{y}_i[\hat{F}(U_i)]$ wyznacza się za pomocą tablic rozkładu standaryzowanego [$\mu = 0, \sigma = 1$].

T a b e l a 7

Określenie parametrów wybranych rozkładów na podstawie znajomości współczynników równania prostej w siatce funkcyjnej

Rozkład	Parametry
Normalny	$\mu = -\frac{\hat{a}}{\hat{b}} \quad \hat{\sigma} = \frac{1}{\hat{b}}$
Weibulla siatka uniwersalna	$\hat{k} = \hat{b} \quad \hat{U}_m - \hat{U}_0 = \exp\left[-\frac{\hat{a}}{\hat{b}}\right]$
Weibulla siatka o ustalonych k	$\hat{U}_m - \hat{U}_0 = \frac{1}{\hat{b}} \quad U_0 = -\frac{\hat{a}}{\hat{b}}$
Wykładniczy	$\hat{U}_m - \hat{U}_0 = \frac{1}{\hat{b}} \quad \hat{U}_0 = -\frac{\hat{a}}{\hat{b}}$
Dwuwykładniczy	$\hat{\alpha} = \hat{b} \quad U_m = -\frac{\hat{a}}{\hat{b}}$

Jak widać określenie współczynników prostej (45) pozwala oszacować parametry rozkładu. Pewną trudność sprawia tu jedynie trójparametrowy rozkład Weibulla, dla którego istnieje siatka uniwersalna oraz rodzina siatek o ustalonym parametrze kształtu k. W przypadku siatki



uniwersalnej trudność polega na wstępnym oszacowaniu parametru przesunięcia U_0 natomiast w przypadku siatek o ustalonym k należy wstępnie oszacować parametr kształtu k . Dla rozkładu Weibulla o jedynie dwóch parametrach ($U_0 = 0$) siatka uniwersalna stanowi pełne rozwiązanie.

Przypadek trójparametrowego rozkładu Weibulla rozpatrzono na przykładzie.

Przykład 1

Uniwersalna siatka rozkładu Weibulla

Dany jest szereg rozdzielczy z wyników badań wytrzymałości elektrycznej udarowej piorunowej układów izolacji papierowo-olejowej zestawiony w kolumnach 1, 2 i 3 tabeli 8. Szereg kumulacyjny zestawiają kolumny 1, 2 i 4. Liczność próbki $n = 41$. W kolumnie 5 zestawiono wartości dystrybuanty empirycznej $\hat{F}(U_i)$ wg wzoru (42) (w procentach). Nanosząc punkty szeregu kumulacyjnego (kolumny 2 i 5) na siatkę funkcyjną uniwersalną (rys. 6) uzyskuje się krzywą pomocniczą 1, która w przecięciu z osią odciętych daje oszacowanie parametru przesunięcia $U_0 = 170$ kV. Określając wartości $U_i - U_0$ utworzono nową zmienną i uzyskano nowy szereg kumulacyjny zapisany w kolumnach (4 i 6). Punkty dystrybuanty empirycznej zapisane parami wartości z kolumn 5 i 6 stanowią podstawę do obliczeń wg wzorów z tablic 6 i 7. Wyniki zestawiają kolumny 7, 8, 9 i 10.

Podstawiając sumy kolumn 7, 8, 9 i 10 do wzorów (46) uzyskuje się $\hat{b} = 3,0617$ i $\hat{a} = -13,1487$, a po wykorzystaniu zależności z tablicy 7 uzyskuje się oszacowania poszukiwanych parametrów rozkładu $\hat{k} = \hat{b} = 3,1$ oraz $\hat{U}_m - \hat{U}_0 = 73,3$ kV i po uwzględnieniu, że $U_0 = 170$ kV uzyskano $U_m = 243,3$ kV.

W tabeli 8 na uwagę zasługują dodatkowo punkty $i = 6$ oraz $i = 14$, dla których nie zaobserwowano żadnej realizacji zmiennej losowej. Ponieważ jednak przy napięciach odpowiednio 220,5 kV oraz 268 kV badania były wykonywane, punkty te uwzględniono w obliczeniach przy założeniu, że wartość dystrybuanty empirycznej $F(U_i)$ nie może być mniejsza niż na poziomach napięcia o jeden stopień niższych. Wykorzystano w ten sposób dodatkowe informacje wynikające z fizyki badanego zjawiska przebicia elektrycznego.

Punkty eksperymentalne i oszacowaną prostą dystrybuanty rozkładu Weibulla wykreślono w siatce uniwersalnej na rysunku 6 (linia 2). Prosta 3 jest prostą pomocniczą definiującą nachylenie dystrybuanty 2, którą wykreśla się przez punkt $[U_m - U_0, F(U_m)]$ równoległe do prostej 3.

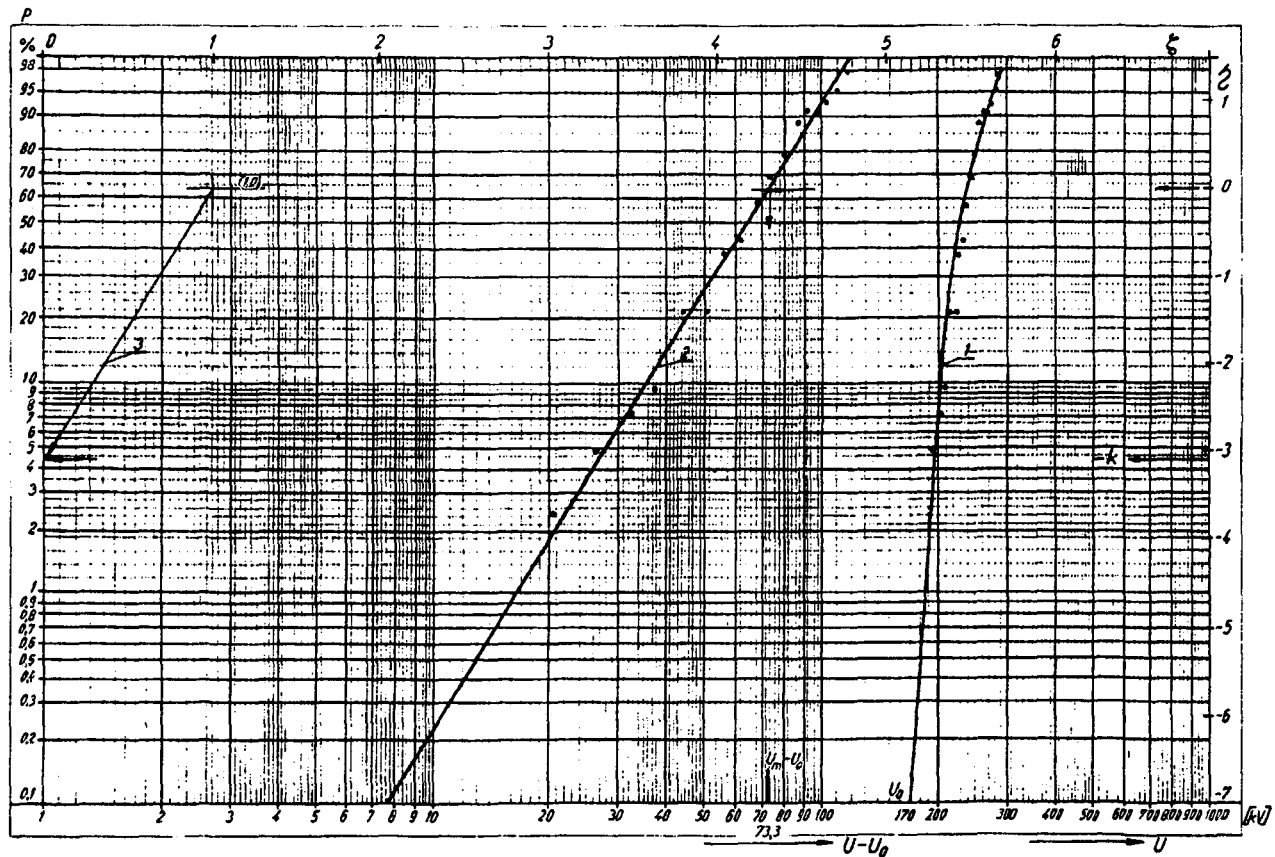


T a b e l a 8

Dane liczbowe do przykładów 1 i 2

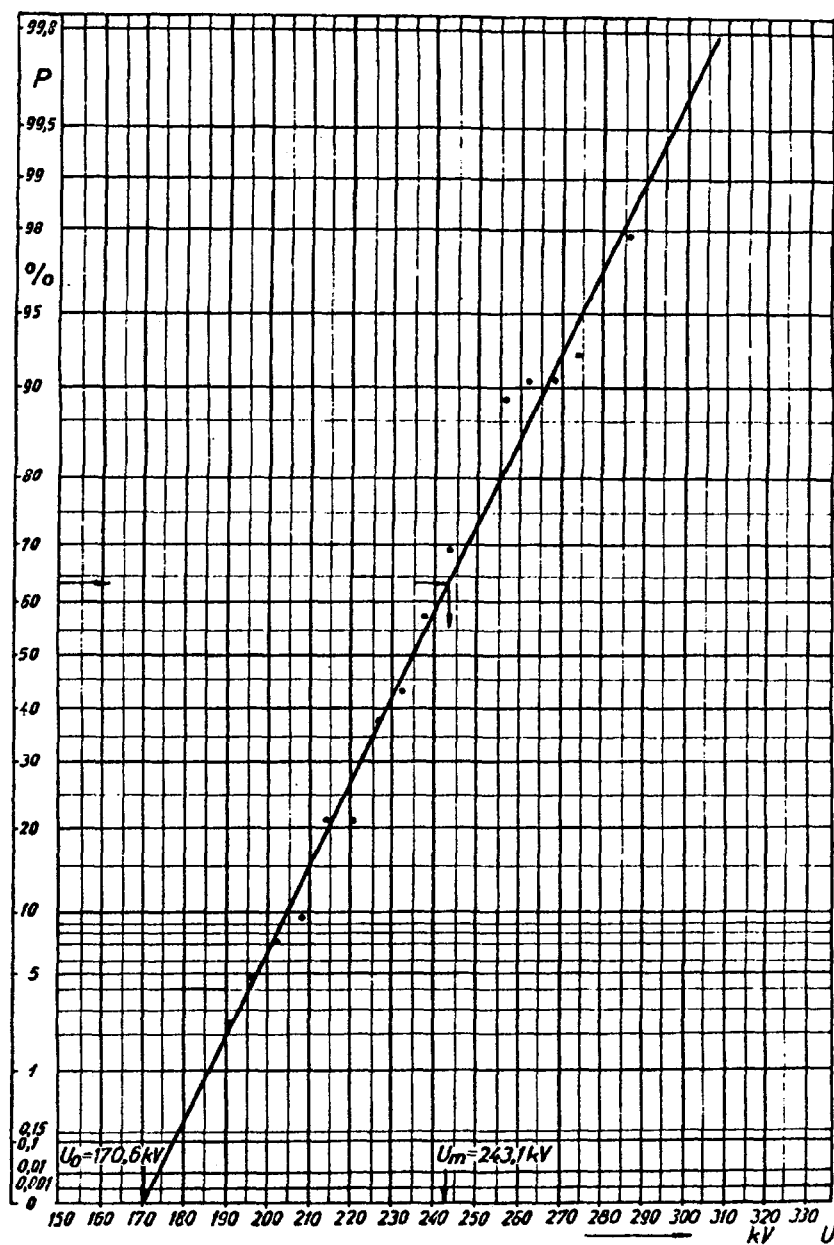
i	U_i	n_i	$\sum n_i$	$\hat{F}(U_i)$	Siatka uniwersalna					siatka o k = 3			
					$U_i - U_0$	$\hat{y}_i = \ln \ln \left(\frac{1}{1 - \hat{F}(U_i)} \right)$	$\hat{x}_i = \ln(U_i - U_0)$	$\hat{x}_i^2$	$\hat{x}_i \cdot \hat{y}_i$	$\hat{y}_i = \frac{3}{4} \ln(1 - \hat{F}(U_i))$	$\hat{x}_i = U_i$	$\hat{x}_i^2$	$\hat{x}_i \hat{y}_i$
-	kV	-	-	%	kV	-	-	-	-	-	kV	kV	kV
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	190,6	1	1	2,4	20,6	-3,7176	3,0253	9,1524	-11,2468	0,2896	190,6	36328,4	55,2
2	196,6	1	2	4,8	26,6	-3,0121	3,2809	10,7644	-9,8823	0,3664	196,6	38651,6	72,0
3	202,5	1	3	7,1	32,5	-2,6085	3,4812	12,1190	-9,0807	0,4192	202,5	41006,3	84,9
4	208,5	1	4	9,5	38,5	-2,3044	3,6507	13,3273	-8,4125	0,4639	208,5	43472,3	96,7
5	214,5	5	9	21,4	44,5	-1,4238	3,7955	14,4057	-5,4040	0,6221	214,5	46010,3	133,4
6	220,5	0	9	21,4	50,5	-1,4238	3,9220	15,3819	-5,5841	0,6221	220,5	48620,3	137,2
7	226,5	7	16	38,1	56,5	-0,7347	4,0342	16,2751	-2,9640	0,7828	226,5	51302,3	177,3
8	232,5	2	18	42,9	62,5	-0,5792	4,1352	17,0996	-2,3949	0,8244	232,5	54056,3	191,7
9	238,2	6	24	57,1	68,2	-0,1669	4,2224	17,8290	-0,7047	0,9459	238,2	56739,2	225,3
10	244,0	5	29	69,0	74,0	0,1580	4,3041	18,5250	0,6801	1,0541	244,0	59536,0	257,3
11	250,0	4	33	78,6	80,0	0,4329	4,3820	19,2022	1,8971	1,1552	250,0	62500,0	288,8
12	256,0	4	37	88,1	86,0	0,7555	4,4543	19,8412	3,3652	1,2864	256,0	65536,0	329,3
13	262,0	1	38	90,4	92,0	0,8516	4,5218	20,4466	3,8508	1,3283	262,0	68644,0	348,0
14	268,0	0	38	90,4	98,0	0,8516	4,5850	21,0220	3,9046	1,3283	268,0	71824,0	356,0
15	274,0	1	39	92,6	104,0	0,9569	4,6444	21,5704	4,4444	1,3757	274,0	75076,0	376,9
16	280,0	1	40	95,2	110,0	1,1107	4,7005	22,0945	5,2209	1,4481	280,0	78400,0	405,5
17	286,0	1	41	97,6	116,0	1,3163	4,7536	22,5966	6,2573	1,5508	286,0	81796,0	443,5
$\sum$						-9,5372	69,8931	291,6528	-26,0536	15,8633	4050,4	979498,7	3979,0





Rys. 6. Ilustracja do przykładu 1. Siatka funkcyjna uniwersalna rozkładu Weibulla
 1 - dystrybuanta pomocnicza do oszacowania U_0 (≈ 170 kV), 2 - poszukiwana dystrybuanta roz-
 kładu Weibulla ($U_0 = 170$ kV, $U_m = 243,3$ kV, $k = 3,1$)





Rys. 7. Ilustracja do przykładu 2. Siatka funkcyjna rozkładu Weibulla o parametrze kształtu $k = 3,0$; dystrybuanta o parametrach $k = 3,0$; $U_0 = 170,6 \text{ kV}$; $U_m = 243,1 \text{ kV}$



Przykład 2

Siatka rozkładu Weibulla o ustalonym parametrze kształtu k

Parametry trójparametrowego rozkładu Weibulla można oszacować inną metodą. W tym celu rozważono ponownie wyniki badań zestawione w postaci szeregu pozycyjnego i szeregu kumulacyjnego w tabeli 8. Założono, że uzyskane wyniki eksperymentu można opisać rozkładem Weibulla o parametrze kształtu $k = 3,0$. Przy określonym parametrze kształtu dalszą analizę można przeprowadzić w oparciu o siatki z ustalonym k . Wyniki obliczeń zestawiono w kolumnach 11 do 14 (tab. 8).

Po podsumowaniu i podstawieniu do wzorów (46) uzyskano $\hat{a} = -2,3540$ oraz $\hat{b} = 0,0138$. Korzystając z zależności z tabeli 7 oszacowano parametry rozkładu $\hat{U}_0 = 170,6$ kV oraz $\hat{U}_m = 243,1$ kV. Jak widać uzyskano niemal identyczny wynik jak w przykładzie 1 dla siatki uniwersalnej.

Punkty eksperymentalne i oszacowaną dystrybuantę wykreślono na rysunku 7 w siatce funkcyjnej rozkładu Weibulla o parametrze kształtu $k = 3,0$. Jak widać z rysunku parametr przesunięcia odczytuje się bezpośrednio na przecięciu dystrybuanty z osią odciętych, natomiast parametr skali odczytuje się dla prawdopodobieństwa równego około 63,2%.

Posługiwanie się odpowiednio liczną rodziną siatek rozkładu Weibulla o różnych parametrach kształtu k pozwala na uniknięcie problemu subiektywizmu przy określaniu parametru przesunięcia U_0 w przypadku posługiwania się siatką uniwersalną.

2.3.3. Oszacowania punktowe

Metoda ta polega na zastosowaniu gotowych wzorów służących do oszacowania parametrów określonego rozkładu. Pomijając całą teorię uzyskiwania wzorów służących do estymacji parametrów należy tylko wspomnieć, że wzory te zwykle uzyskuje się za pomocą tzw. metody momentów szerzej omówionej w [19]. Rozdział ograniczono do wyboru po jednym z kilku sposobów estymacji punktowej dla trzech podstawowych rozkładów.

2.3.3.1. Rozkład normalny

W przypadku rozkładu normalnego jako oszacowanie wartości oczekiwanej μ przyjmuje się wartość średnią

$$\bar{U} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i \quad (47)$$



a jako estymator odchylenia średniego σ średnie odchylenie standardowe

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2}{n - 1}}. \quad (48)$$

Te dwa estymatory definiują poszukiwaną dystrybuantę rozkładu normalnego.

2.3.3.2. Rozkład Weibulla

Jedną z metod szacowania parametrów rozkładu Weibulla oparta jest o trzeci moment centralny zdefiniowany w tabeli 1, którego nieobciążonym estymatorem jest

$$M_3 = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^3. \quad (49)$$

Na podstawie danych eksperymentalnych oblicza się M_3 oraz S z wzoru (48) a następnie znajduje się oszacowanie współczynnika skośności $\sqrt{r_1}$ (patrz tabela 1)

$$\sqrt{r_1} = \frac{M_3}{S^3}. \quad (50)$$

Korzystając z tablicy 9 znajduje się odpowiadającą powyższej wielkości wartość parametru kształtu k . Dla uzyskanego k z tablicy 9 odnajduje się wartości A , B i D gdzie A i B zdefiniowano w tabeli 1 a D ma postać

$$D = B - A \quad (51)$$

i oblicza się pozostałe dwa parametry rozkładu

$$U_m = \bar{U} + A \cdot S, \quad (52a)$$

$$U_0 = \bar{U} - D \cdot S. \quad (52b)$$



T a b e l a 9

Dane liczbowe do oszacowania estymatorów rozkładu Weibulla wg [25]

k	A	B	D	$\sqrt{r_1}$
0,50	0,223607	0,223607	0,447113	6,618744
1,00	0,000000	1,000000	1,000000	2,000000
1,50	0,158669	1,631496	1,472827	1,071996
2,00	0,245598	2,158645	1,913046	0,631050
2,50	0,296936	2,633893	2,336956	0,358859
3,00	0,329748	3,081196	2,751448	0,168052
3,50	0,352096	3,512123	3,160028	0,025202
4,00	0,368084	3,932672	3,564587	-0,086949
4,50	0,379976	4,346258	3,966282	-0,177813
5,00	0,389102	4,754930	4,365828	-0,253956
5,50	0,395287	5,160049	4,763762	-0,318527
6,00	0,402069	5,562564	5,160494	-0,374248
6,50	0,406805	5,963012	5,556206	-0,422815
7,00	0,410749	6,361949	5,951200	-0,465105
7,50	0,414075	6,759596	6,345521	-0,502211
8,00	0,416915	7,156283	6,739368	-0,535453
8,50	0,419367	7,552264	7,132896	-0,565673
9,00	0,421497	7,947428	7,525930	-0,592174
9,50	0,423368	8,342111	7,918742	-0,616755
10,00	0,425026	8,736401	8,311375	-0,637820
10,50	0,428495	9,130156	8,703660	-0,658327
11,00	0,427812	9,523630	9,095818	-0,676317
11,50	0,429006	9,917074	9,488068	-0,692028
12,00	0,430073	10,309864	9,879791	-0,707534
12,50	0,431046	10,702551	10,271504	-0,722520
13,00	0,431947	11,095515	10,663568	-0,733416
13,50	0,432751	11,487604	11,054852	-0,747444
14,00	0,433501	11,879908	11,446406	-0,757909
14,50	0,434202	12,272394	11,838192	-0,768553
15,00	0,434827	12,663960	12,229133	-0,780573
15,50	0,435420	13,055923	12,620502	-0,787102



T a b e l a 9 (cd.)

k	A	B	D	$\sqrt{r_1}$
16,00	0,435971	13,447745	13,011774	-0,795504
16,50	0,436486	13,839583	13,403097	-0,801361
17,00	0,436978	14,231846	13,794868	-0,813721
17,50	0,437431	14,623545	14,186113	-0,817163
18,00	0,437830	15,014248	14,576417	-0,826325
18,50	0,438248	15,406671	14,968422	-0,823536
19,00	0,438598	15,797137	15,358540	-0,842138
19,50	0,438952	16,188599	15,749647	-0,849664
20,00	0,439309	16,581100	16,141785	-0,847763
20,50	0,439597	16,971191	16,531586	-0,853077
21,00	0,439899	17,362656	16,922745	-0,863564
21,50	0,440205	17,755096	17,314880	-0,859399
22,00	0,440480	18,146484	17,705994	-0,871905
22,50	0,440706	18,536423	18,095703	-0,874662
23,00	0,440940	18,927094	18,486145	-0,868476
23,50	0,441176	19,318390	18,877213	-0,880081
24,00	0,441437	19,711472	19,270035	-0,883777
24,50	0,441608	20,100433	19,658813	-0,890665
25,00	0,441817	20,491791	20,049973	-0,894471
25,50	0,442054	20,885193	20,443130	-0,886167
26,00	0,442232	21,276001	20,833755	-0,900111
26,50	0,442417	21,667435	21,225006	-0,892504
27,00	0,442540	22,055634	21,613083	-0,900412
27,50	0,442712	22,446976	22,004257	-0,916838
28,00	0,442854	22,837128	22,394272	-0,908687
28,50	0,443007	23,228165	22,785156	-0,920313
29,00	0,443213	23,622711	23,179489	-0,917724
29,50	0,443359	24,014084	23,570724	-0,921477
30,00	0,443496	24,404770	23,961273	-0,901026
30,50	0,443632	24,796051	24,352417	-0,915985
31,00	0,443694	25,182922	24,739227	-0,929070
31,50	0,443818	25,574051	25,130219	-0,925181
32,00	0,443942	25,965179	25,521225	-0,934893
32,50	0,444113	26,360062	25,915939	-0,925796



T a b e l a 9 (cd.)

k	A	B	D	$\sqrt{r_1}$
33,00	0,444146	26,745575	26,301422	-0,930521
33,50	0,444342	27,142517	26,698166	-0,896289
34,00	0,444369	27,528412	27,084030	-0,954959
34,50	0,444546	27,924118	27,479568	-0,913674
35,00	0,444562	28,309631	27,865067	-0,930403
35,50	0,444674	28,701675	28,256989	-0,969595
36,00	0,444764	29,092133	28,647369	-0,962743
36,50	0,444841	29,482132	29,037277	-0,953106
37,00	0,445025	29,880325	29,435287	-0,915922
37,50	0,445023	30,264465	29,819443	-0,978139
38,00	0,445103	30,655243	30,210129	-0,934100
38,50	0,445268	31,052597	30,607315	-0,942340
39,00	0,445349	31,443588	30,998230	-0,919090
39,50	0,445320	31,826630	31,381302	-0,953089
40,00	0,445399	32,218048	31,772644	-1,020581
40,50	0,445576	32,617035	32,171448	-0,959691
41,00	0,445539	32,999023	32,553482	-0,925267
41,50	0,445731	33,400330	32,954590	-0,923901
42,00	0,445677	33,780960	33,335281	-0,919086
42,50	0,445731	34,171341	33,725601	-1,027424
43,00	0,445822	34,564499	34,118668	-0,984534
43,50	0,445853	34,952438	34,506577	-1,018057
44,00	0,445912	35,343201	34,897278	-0,928276
44,50	0,446117	35,746017	35,299895	-0,914750
45,00	0,446162	36,136200	35,690033	-0,945033
45,50	0,446244	36,529236	36,082977	-0,883233
46,00	0,446133	36,905426	36,459290	-1,006676
46,50	0,446192	37,296555	36,850357	-0,940069
47,00	0,446264	37,689178	37,242905	-0,970071
47,50	0,448291	38,078049	37,631744	-1,000409
48,00	0,446342	38,469009	38,022659	-1,031541
48,50	0,446417	38,861780	38,415359	-0,951518
49,00	0,446621	39,266830	38,820206	-0,923842



T a b e l a 9 (cd.)

k	A	B	D	$\sqrt{r_1}$
49,50	0,446514	39,643890	39,197372	-1,069550
50,00	0,446700	40,047333	39,600632	-0,980033
50,50	0,446774	40,441666	39,994888	-0,946190
51,00	0,446620	40,813354	40,366730	-0,907685
51,50	0,446855	41,222610	40,775742	-1,002069
52,00	0,446880	41,612198	41,165314	-0,893316
52,50	0,446933	42,004196	41,557251	-0,918801
53,00	0,446755	42,373444	41,926682	-0,943245
53,50	0,447060	42,789917	42,342850	-0,896614
54,00	0,446859	43,156479	42,709610	-0,919855
54,50	0,447084	43,567108	43,120010	-0,946362
55,00	0,446922	43,936493	43,489563	-1,051524
55,50	0,446990	44,331009	43,884018	-0,997020
56,00	0,447272	44,747025	44,299744	-0,939907
56,50	0,447262	45,133804	44,686539	-1,052172
57,00	0,447071	45,499908	45,052826	-1,077985
57,50	0,447148	45,895203	45,448044	-1,014132
58,00	0,447366	46,306900	45,859528	-0,946972
58,50	0,447223	46,678284	46,231049	-1,066933
59,00	0,447187	47,061844	46,614655	-1,093451
59,50	0,447221	47,451828	47,004593	-1,120860
60,00	0,447303	47,848419	47,401108	-1,044726
60,50	0,447531	48,261795	47,814255	-0,857631
61,00	0,447614	48,658600	48,210983	-0,878959
61,50	0,447392	49,019669	48,572266	-1,011005



T a b e l a 10

Dane liczbowe do oszacowania parametrów rozkładu dwu-
wykładniczego wg [25]

N	$\bar{y}_N$	G_N	N	$\bar{y}_N$	G_N
8	.4843	.9043	49	.5481	1.1590
9	.4902	.9288	50	.54854	1.16066
10	.4952	.9497	51	.5489	1.1623
11	.4996	.9676	52	.5493	1.1638
12	.5035	.9833	53	.5497	1.1653
13	.5070	.9972	54	.5501	1.1667
14	.5100	1.0095	55	.5504	1.1681
15	.5128	1.02057	56	.5508	1.1696
16	.5157	1.0316	57	.5511	1.1708
17	.5181	1.0411	58	.5515	1.1721
18	.5202	1.0493	59	.5518	1.1734
19	.5220	1.0566	60	.55208	1.17467
20	.52355	1.06283	62	.5527	1.1770
21	.5252	1.0696	64	.5533	1.1793
22	.5268	1.0754	66	.5538	1.1814
23	.5283	1.0811	68	.5543	1.1834
24	.5296	1.0864	70	.55477	1.18536
25	.53086	1.09145	72	.5552	1.1873
26	.5320	1.0961	74	.5557	1.1890
27	.5332	1.1004	76	.5561	1.1906
28	.5343	1.1047	78	.5565	1.1923
29	.5353	1.1086	80	.55688	1.19382
30	.53622	1.11238	82	.5572	1.1953
31	.5371	1.1159	84	.5576	1.1967
32	.5380	1.1193	86	.5580	1.1980
33	.5388	1.1226	88	.5583	1.1994
34	.5396	1.1255	90	.55860	1.20073
35	.54034	1.12847	92	.5589	1.2020
36	.5410	1.1313	94	.5592	1.2032
37	.5418	1.1339	96	.5595	1.2044



T a b e l a 10 (cd.)

N	$\bar{y}_N$	σ_N	N	$\bar{y}_N$	σ_N
38	.5424	1.1363	98	.5598	1.2055
39	.5430	1.1388	100	.56002	1.20649
40	.54362	1.14132	150	.56461	1.22534
41	.5442	1.1436	200	.56715	1.23598
42	.5448	1.1458	250	.56878	1.24292
43	.5453	1.1480	300	.56993	1.24786
44	.5458	1.1499	400	.57144	1.25450
45	.54630	1.15185	500	.57240	1.25880
46	.5468	1.1538	750	.57377	1.26506
47	.5473	1.1557	1000	.57450	1.26851
48	.5477	1.1574	-	.57722	1.28255

Przykład 3Oszacowanie parametrów rozkładu Weibulla metodą trzeciego momentu

Dla danych eksperymentalnych jak w tabeli 8 obliczono $\bar{U} = 236,5$ kV
 $S = 21,1$ kV, $M_3 = 857,0$ kV³, $\sqrt{T_1} = 0,091$. Wykorzystując tabelę 9 uzyskano $k \approx 3,5$, $A = 0,352$, $D = 3,16$ i obliczono parametry $\hat{U}_m = 243,9$ kV oraz $\hat{U}_0 = 169,8$ kV. Jak widać wynik jest zbliżony z uzyskanymi oszacowaniami graficznymi w przykładach 1 i 2.

2.3.3.3. Rozkład dwuwykładniczy

Parametry rozkładu dwuwykładniczego można określić z wzorów [25]:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sigma_N}{S}, \quad (53a)$$

$$\hat{U}_m = \bar{U} + \bar{y}_N / \hat{\alpha}, \quad (53b)$$

gdzie σ_N , $\bar{y}_N$ - to odpowiednio populacyjne odchylenie standardowe i populacyjna średnia dane w tabeli 10.



2.3.4. Metoda największej wiarygodności

Metoda największej wiarygodności opisana szczegółowo w [19], polega na tym, że za oszacowanie nieznanymi parametrów rozkładu zmiennej losowej przyjmuje się takie ich wartości, przy których prawdopodobieństwo wyniku zaobserwowanego w badanej próbie losowej osiąga maksimum. Prawdopodobieństwo to oznaczane przez L i nazywane funkcją wiarygodności, jest iloczynem prawdopodobieństw zaobserwowanych wyników badań przy założeniu, że poszczególne wyniki są od siebie niezależne, a prawdopodobieństwo jednoczesnego zaistnienia zdarzeń niezależnych jest równe iloczynowi prawdopodobieństw tych zdarzeń.

Przykładowo w przypadku badania wytrzymałości elektrycznej funkcję wiarygodności buduje się przy założeniu, że prawdopodobieństwo wystąpienia poszczególnych zdarzeń (przebieć, przeskoków itp.) określone jest rozkładem dwumianowym (Bernoulliego) [11]

$$f(x_i) = \frac{m_i!}{x_i!(m_i - x_i)!} p_i^{x_i} (1 - p_i)^{m_i - x_i}, \quad (54)$$

gdzie: m_i - całkowita liczba prób lub liczba prób na danym poziomie napięcia (w zależności od metody badań: schodkowej (Tetznera) czy serii; patrz punkt 3.2.2),

x_i - liczba zdarzeń (np. przeskoków) zaobserwowana do danego poziomu lub na danym poziomie napięcia (zależnie od metody badań j.w.),

p_i - prawdopodobieństwo wyładowania przy napięciu U_i ,

$f(x_i)$ - prawdopodobieństwo zaistnienia x_i zdarzeń do danego poziomu napięcia włącznie lub przy liczbie prób na danym poziomie (zależnie od metody badań j.w.).

Funkcję wiarygodności określa się jako iloczyn prawdopodobieństw z równania (54) uzyskując

$$L = \prod_{i=1}^N \frac{m_i!}{x_i!(m_i - x_i)!} p_i^{x_i} (1 - p_i)^{m_i - x_i}, \quad (55)$$

gdzie N - liczba stopni napięciowych.

Jeżeli funkcja L jest nieujemna, to łatwiej jest przy szukaniu ekstremów posługiwać się logarytmem, który osiąga maksimum w tym sa-



mym punkcie co funkcja. W celu wyznaczenia oszacowań parametrów rozkładu dwu- lub trójparametrowego trzeba rozwiązać układ dwóch lub trzech równań typu

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0, \quad (56)$$

gdzie za θ podstawia się poszukiwany parametr rozkładu. Rozwiązanie takich równań jest stosunkowo trudne i zwykle wymaga stosowania programów do obliczeń numerycznych. Jako pierwsze przybliżenie wykorzy-

a) *** PROGRAM WEIBULL-IBM ***

Wydruk do skryptu

UZER= 164.1000 UJED= 242.9000 K= 3.3900
 U0= 164.1000 U1= 242.9000 K= 3.3900 H= .2804
 H= .2804 E= 234.8986 SIGMA= 23.1514

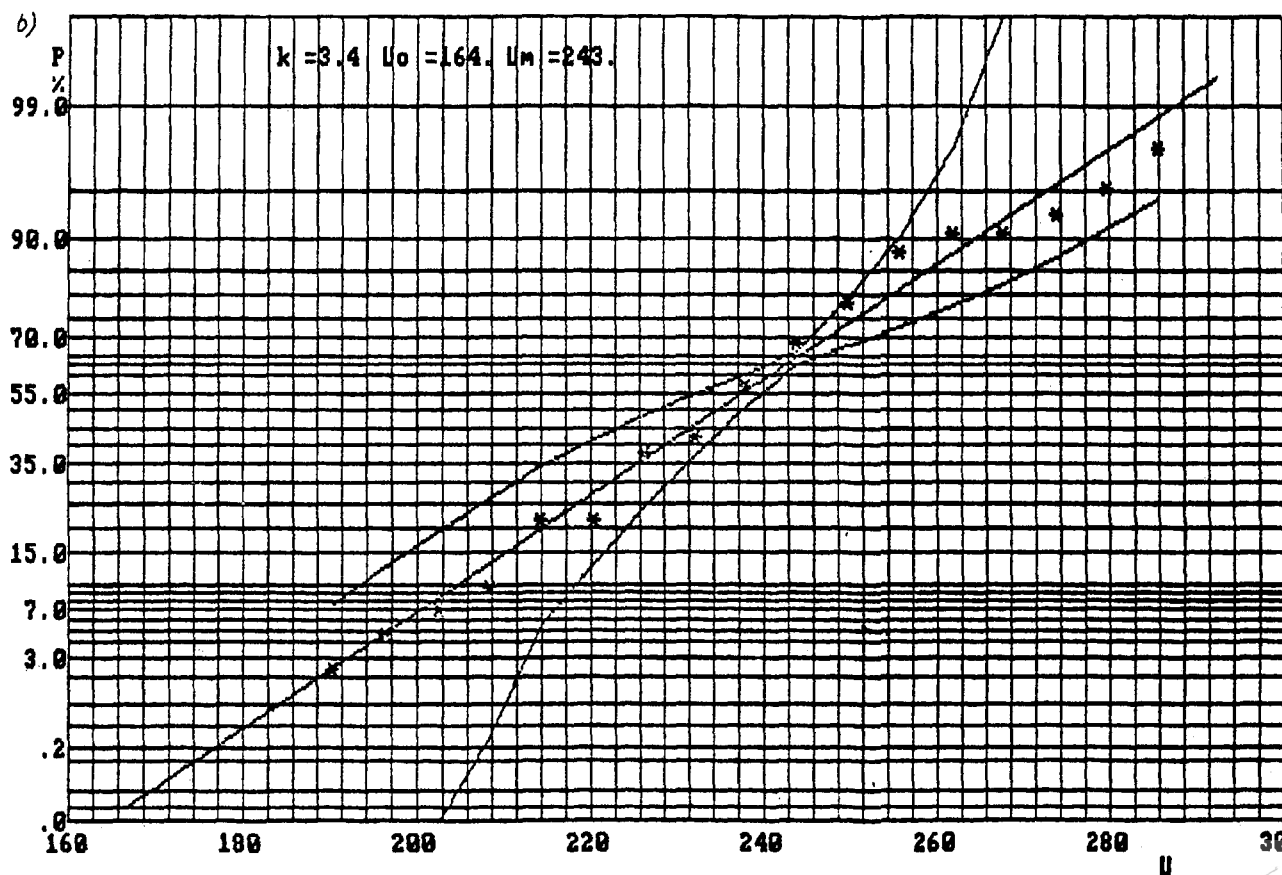
U(I)	FD	P(I)	FG	X(I)
190.6000	.0000	.0246	.0832	1.
196.6000	.0000	.0485	.1326	2.
202.5000	.0000	.0837	.1950	3.
208.5000	.0000	.1333	.2682	4.
214.5000	.0487	.1973	.3459	9.
220.5000	.1281	.2752	.4223	9.
226.5000	.2364	.3645	.4926	16.
232.5000	.3682	.4615	.5547	18.
238.2000	.5040	.5560	.6079	24.
244.0000	.6216	.6494	.6772	29.
250.0000	.6811	.7381	.7951	33.
256.0000	.7280	.8144	.9009	37.
262.0000	.7755	.8759	.9763	38.
268.0000	.8239	.9222	1.0000	38.
274.0000	.8701	.9544	1.0000	39.
280.0000	.9101	.9752	1.0000	40.
286.0000	.9405	.9876	1.0000	41.

DANE W ZBIORZE skrypt.sta

Rys. 8. Przykład wydruku z EMC wyników obliczeń parametrów rozkładu Weibulla metodą największej wiarygodności dla danych jak w przykładzie 1: a) wyniki obliczeń, b), c) ilustracja graficzna (b) siatka o ustalonym k, (c) siatka uniwersalna

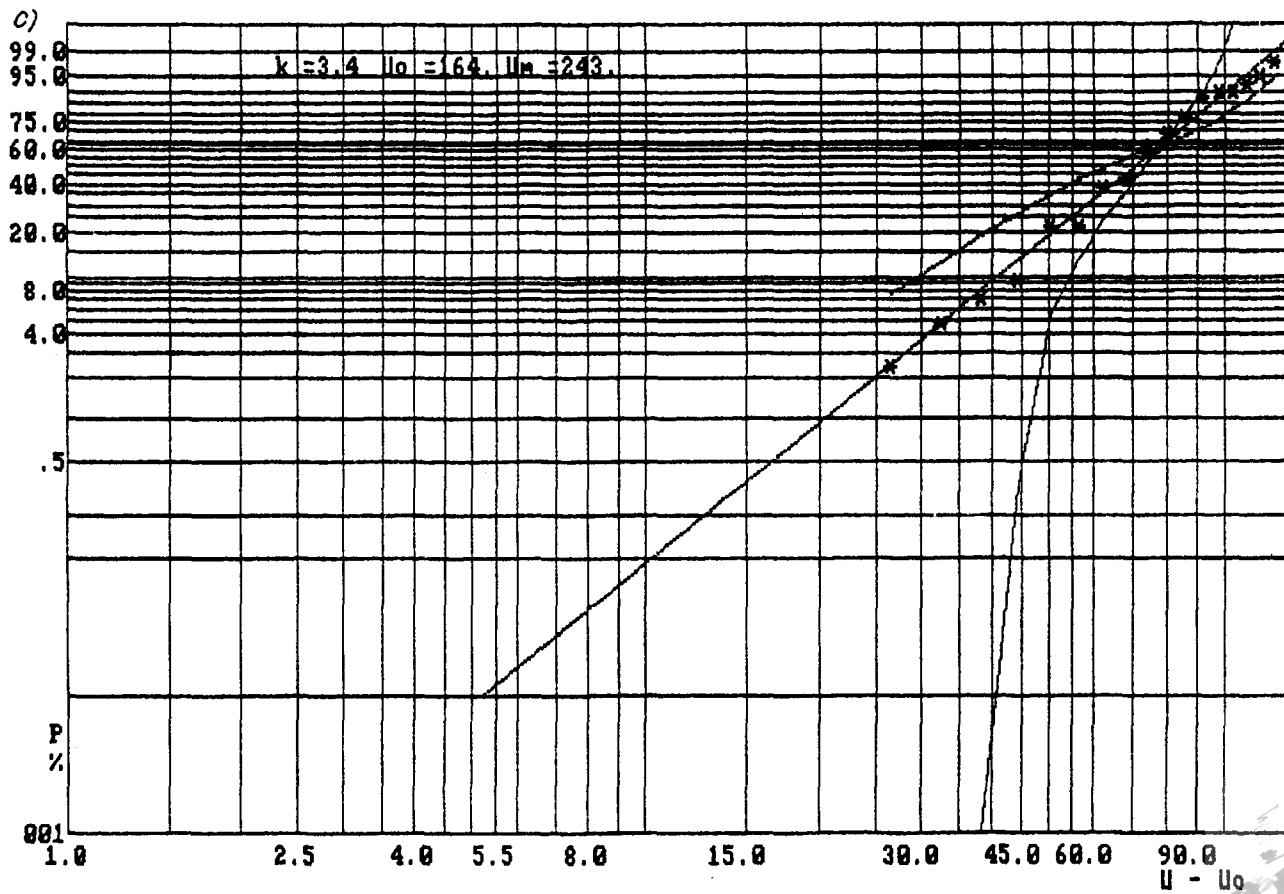
UZER (U_0), UJED (U_m), K(k) - parametry rozkładu, H - współczynnik niejednorodności z testu χ^2 , E - wartość oczekiwana, SIGMA - odchylenie standardowe, U(I) - poziomy napięciowe, P(I) - prawdopodobieństwo na danym poziomie napięciowym, F_1 i F_2 - dolna i górna granica obszaru ufności dla dystrybuanty, X - skumulowana częstość





Rys. 8b





Rys. 8c



stuje się wówczas wzory z punktu 2.3.3 i rozszerza się programy o odpowiednie testy zgodności (patrz pkt. 2.3.6), obliczanie przedziałów i obszarów ufności (patrz pkt. 2.3.5) uzyskując w ten sposób pełną analizę statystyczną wyników badań.

Przykłady takich programów znaleźć można dla przypadku rozkładu normalnego w [61], dla przypadku rozkładu Weibulla w [56, 63] i dla przypadku rozkładu dwuwykładniczego w [62]. Na rysunku 8 przedstawiono wydruk, z maszyny matematycznej, wyników obliczeń parametrów rozkładu Weibulla dla przypadku danych z przykładu 1. Obliczenie numeryczne obejmuje oprócz parametrów rozkładu ($U_0 = UZER \approx 164,1$ kV, $U_m \approx UJED \approx 242,9$ kV, $k = K \approx 3,39$) również współczynnik jednorodności H (patrz pkt. 2.3.6.5) wartość oczekiwaną E , odchylenie standardowe $\sigma = SIGMA$, granice obszarów ufności dla dystrybuanty $P(I)$: dolną $F1$ i górną $F2$ (patrz pkt. 2.3.5) oraz pozwala wyprowadzić wyniki w postaci graficznej (rys. 8).

2.3.5. Oszacowania przedziałowe

Wielkości statystyczne stosowane do opisu zmiennych losowych są z reguły szacowane w oparciu o zaobserwowaną próbkę losową. Wskutek losowości próbki również wszelkie oszacowania uzyskane na jej podstawie same są zmiennymi losowymi. Tak więc zmiennymi losowymi są również oszacowania parametrów rozkładu statystycznego. Innymi słowy ocena parametru rozkładu na podstawie estymatora z próbki jest oceną przybliżoną, której dokładność zależy od rozkładu estymatora. Im obszar zmienności estymatora jest mniejszy, tym ocena jest dokładniejsza. Można podać granice przedziału, którego długość jest zmienną losową i który z założonym prawdopodobieństwem pokrywa prawdziwą (populacyjną) wartość parametru. Przedział ten nazywa się przedziałem ufności.

Definicja

Przedziałem ufności dla parametru θ nazywa się przedział liczbowy (a, b) (gdzie a i b są zmiennymi losowymi), który pokrywa prawdziwą wartość parametru θ z określonym prawdopodobieństwem β zwanym poziomem ufności.

Przedział ufności może być jednostronny lub dwustronny. Ilustruje to rysunek 9. W przypadku określenia przedziałów ufności dla wszystkich punktów dystrybuanty uzyskuje się obszar ufności dla dystrybuanty (patrz rys. 8). Wartość poziomu ufności β w badaniach wysokonapię-



T a b e l a 11

Oszacowania granic przedziałów ufności

Wielkość	Granice jednostronne		Dwustronne	
	Dolna 2	Górna 3	Dolna 4	Górna 5
Nieznana dystrybuanta $F(x)$	$\hat{F}_{jd}(x_i) = \frac{1}{1 + \frac{n+1-i}{1} f_{2(n+1-i), 2i, \beta}}$ $\hat{F}_{jg}(x_i) = \frac{f_{2i, 2(n+1-i), \beta}}{\frac{n+1-i}{1} + f_{2i, 2(n+1-i), \beta}}$ $f_{k1, k2, \beta} - \text{kwantyl rozkładu Snedecora-Fishera o parze } (k_1, k_2) \text{ stopni swobody, rzędu } \beta, i, n \text{ jak we wzorze (42)}$		$\frac{1+\beta}{2}$	$\frac{1+\beta}{2}$
Parametry a i b równania prostej w siatce funkcyjnej	$\hat{a}_{jd} = \hat{a} - t_{n-1, \beta} \cdot S_a$ $\hat{b}_{jd} = \hat{b} - t_{n-1, \beta} \cdot S_b$ $S_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \cdot S'}$ $S_b = \sqrt{\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \cdot S'}$ $S' = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \left(\hat{a} + \hat{b} \cdot x_i - y_i\right)^2}$ $\text{Oznaczenia jak we wzorze (46); } t_{n-1, \beta} - \text{kwantyl rozkładu studenta dla } n-1 \text{ stopni swobody, rzędu } \beta$		$\frac{1+\beta}{2}$ $\frac{1+\beta}{2}$	$\frac{1+\beta}{2}$ $\frac{1+\beta}{2}$



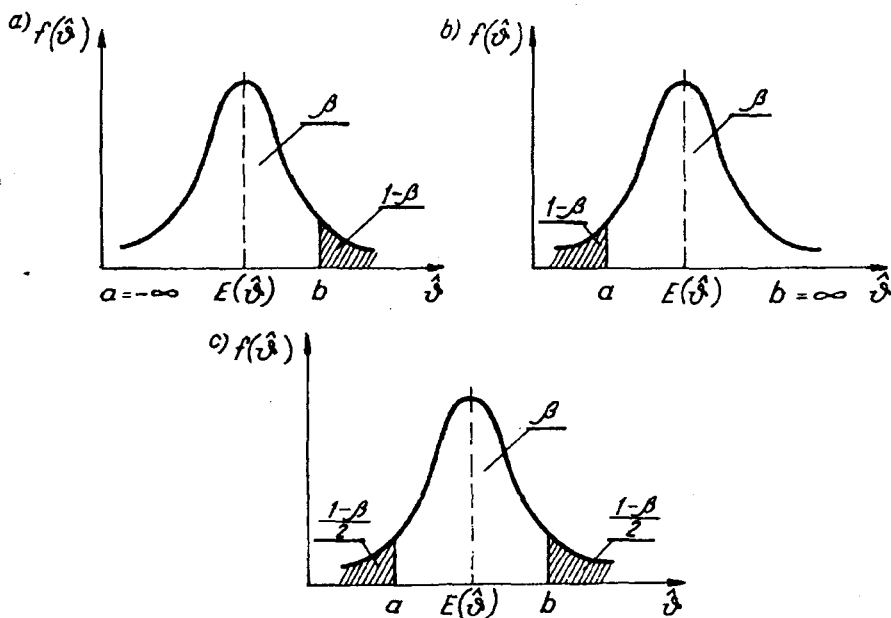
1	2	3	4	5
Wartość oczekiwana w rozkładzie normalnym	$\hat{\mu}_{jd} = \bar{x} - \frac{t_{n-1,\beta}}{\sqrt{n}} \cdot S$ $\bar{x} - \text{wg wzoru (47)}; S \text{ wg wzoru (48)}$	$\hat{\mu}_{jg} = \bar{x} + \frac{t_{n-1,\beta}}{\sqrt{n}} \cdot S$	$\frac{1+\beta}{2}$	$\frac{1+\beta}{2}$
Odchylenie średnie kwadratowe σ	$\hat{\sigma}_{jd} = \frac{S \sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{n-1,\beta}}}$ $\chi^2_{n-1,\beta} - \text{kwantyl rozkładu } \chi^2 \text{ o } n-1 \text{ stopniach swobody, rzędu } \beta.$	$\hat{\sigma}_{jg} = \frac{S \sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{n-1,1-\beta}}}$	$\frac{1+\beta}{2}$	$\frac{1-\beta}{2}$
Parametr rozkładu Weibulla $\theta = U_m - U_0$	$\hat{\theta}_{jd} = \hat{\theta} \cdot \exp \left[\frac{-W_{n,\beta}^{(1)}}{\hat{\theta}} \right]$ $W_{n,\beta}^{(1)} - \text{podano dla } 5 < n < 120 \text{ w tabeli 12; dla } n > 120$ $W_{n,\beta}^{(1)} = \gamma_\beta \sqrt{\frac{1,108}{n}}; \gamma_\beta - \text{kwantyl rozkładu normalnego, rzędu } \beta$	$\hat{\theta}_{jg} = \hat{\theta} \cdot \exp \left[\frac{-W_{n,1-\beta}^{(1)}}{\hat{\theta}} \right]$	$\frac{1+\beta}{2}$	$\frac{1-\beta}{2}$
Parametr kształtu k rozkładu Weibulla	$k_{jd} = \frac{\hat{k}}{W_{n,\beta}^{(2)}}$ $W_{n,\beta}^{(2)} \text{ podano dla } 5 \leq n \leq 120 \text{ w tabeli 12; dla } n > 120$ $W_{n,\beta}^{(2)} = 1 + \gamma_\beta \sqrt{\frac{0,608}{n}}$	$k_{jg} = \frac{\hat{k}}{W_{n,1-\beta}^{(2)}}$	$\frac{1+\beta}{2}$	$\frac{1-\beta}{2}$
Dystrybuanta rozkładu dwuwymiarowego $F(x_i)$ $0,15 < F(x_1) < 0,85$	$\hat{F}_{jd}(x_1) = \hat{F}(x_1) - \gamma_\beta \frac{\sigma_{y,N}}{\sqrt{n} \hat{\alpha}}$ $\sigma_{y,N} - \text{podano w tabeli 13}$	$\hat{F}_{jg}(x_1) = \hat{F}(x_1) + \gamma_\beta \frac{\sigma_{y,N}}{\sqrt{n} \hat{\alpha}}$	$\frac{1+\beta}{2}$	$\frac{1+\beta}{2}$

ciowych przyjmuje się zwykle równą 95%. Mówi się wówczas o 95% przedziale lub obszarze ufności.

Wzory dla określenia granic przedziałów ufności dla wybranych wielkości statystycznych zestawiono w tabeli 11. Występujące w tych wzorach kwantyle odpowiednich rozkładów testowych można znaleźć w tabelach statystycznych [np. 85, 88]. Często tabele statystyczne podają zamiast kwantyli odpowiednich rozkładów ich wartości krytyczne. Należy wówczas pamiętać, że pomiędzy wartością krytyczną a kwantylem zachodzi równość

$$w_{KW}(1 - \beta) = w_{KR}(\beta), \quad (57)^*$$

gdzie: w_{KW} - wartość kwantyla,
 w_{KR} - wartość krytyczna.



Rys. 9. Graficzna interpretacja przedziałów ufności przy założeniu, że rozkład estymatora jest normalny: a) przedział jednostronny górny, b) przedział jednostronny dolny, c) przedział dwustronny

*Wyjątkiem jest rozkład Studenta, gdzie słuszny jest wzór $w_{KW}(1 - \frac{\beta}{2}) = w_{KR}(\beta)$.



T a b e l a 12

Współczynniki $W_{n,\beta}$ do szacowania granic przedziałów ufności dla parametrów rozkładu Weibulla; wg [27]

n	$W_{n,\beta}^{(1)}$				$W_{n,\beta}^{(2)}$			
	$\beta =$				$\beta =$			
	0,02	0,05	0,95	0,98	0,02	0,05	0,95	0,98
5	-1,631	-1,247	1,107	1,582	0,604	0,683	2,779	3,518
7	-1,196	-0,874	0,829	1,120	0,639	0,709	2,183	2,640
10	-0,876	-0,665	0,644	0,851	0,676	0,738	1,807	2,070
15	-0,651	-0,509	0,499	0,653	0,716	0,770	1,564	1,732
20	-0,540	-0,428	0,421	0,549	0,743	0,791	1,449	1,579
30	-0,423	-0,338	0,334	0,435	0,778	0,820	1,334	1,429
40	-0,360	-0,285	0,288	0,371	0,801	0,839	1,273	1,351
50	-0,318	-0,254	0,253	0,328	0,817	0,852	1,235	1,301
60	-0,289	-0,230	0,229	0,297	0,830	0,863	1,208	1,267
80	-0,248	-0,197	0,197	0,255	0,848	0,878	1,173	1,222
100	-0,221	-0,174	0,175	0,226	0,861	0,888	1,150	1,192
120	-0,202	-0,158	0,159	0,205	0,871	0,897	1,133	1,171

T a b e l a 13

Współczynniki $G_{y,N}$ do oszacowania granic obszaru ufności dystrybucji rozkładu dwuwykładniczego wg [74]

$y = \ln \ln \frac{1}{1 - \hat{F}(x_1)}$	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	0,0	0,5
$G_{y,N}$	2,8129	2,2408	1,8126	1,5057	1,3108	1,2431



Dla granic dwustronnych wzory podane w kolumnie 2 lub 3 tabeli 11 różnią się jedynie rzędem odpowiedniego kwantyla, dlatego w kolumnie 4 lub 5 podano jedynie wzory dla określenia rzędu kwantyla, przy którym wzory z kolumny 2 lub 3 przyjmują postać granic dwustronnych.

2.3.6. Testy zgodności

2.3.6.1. Wprowadzenie

W niektórych zagadnieniach techniki wysokich napięć jak np. wytrzymałość elektryczna izolacji powietrznej, problem wyboru rodzaju rozkładu statystycznego jest uznany za jednoznacznie rozwiązany. W takich przypadkach wystarczy określić parametry znanego rozkładu. Często jednak przed wykonaniem badań nie ma przesłanek do wyboru rozkładu i wówczas wyboru takiego należy dokonać na podstawie uzyskanych wyników badań. Do tego celu służą testy zgodności polegające na sprawdzeniu zgodności (niesprzeczności) zaobserwowanego w danej próbie losowej rozkładu empirycznego $\hat{F}(x)$ rozpatrywanej zmiennej losowej z założonym jej teoretycznym rozkładem $F(x)$.

Metoda wnioskowania na podstawie testu zgodności przypomina metodę matematyczną polegającą na sprowadzeniu zagadnienia do absurdu. W dowodzie takim stawia się pewne założenie (odpowiednik hipotezy statystycznej), skutkiem którego uzyskuje się wniosek sprzeczny z założeniem. Z wykazanej sprzeczności wynika fałszywość postawionego założenia, a to dowodzi prawdziwości twierdzenia. Odpowiednikiem przy stosowaniu testu zgodności jest stwierdzenie, że prawdopodobieństwo otrzymania danej lub większej wartości testowej jest bardzo małe, w każdym razie mniejsze niż 0,05. Małe prawdopodobieństwo otrzymania danej wartości testowej wskazuje na fałszywość hipotezy z określonym ryzykiem błędu, przy czym może to być błąd pierwszego rodzaju - odrzucenia hipotezy prawdziwej lub drugiego rodzaju - przyjęcia hipotezy fałszywej. Ryzyko błędu nazywa się poziomem istotności α . Poziom istotności nie może być określony z żadnych założeń teorii prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Jego wybór jest oparty na intuicji i doświadczeniu. Zwykle zaleca się w technice wysokich napięć wartość $\alpha = 0,05$. Wzrost wagi rozważanego problemu lub jego błahość mogą stanowić przyczynę wzrostu lub malenia wartości α [1].

Należy zaznaczyć, że im wyższy jest poziom istotności na którym sprawdza się dana hipoteza, tym większą można mieć pewność, że jest ona słuszna.



2.3.6.2. Test Kołmogorowa-Smirnowa

Najprostszym testem zgodności jest test Kołmogorowa-Smirnowa znakomicie nadający się do szybkich obliczeń inżynierskich w połączeniu z graficznymi metodami opracowywania wyników. Test ten stosuje się wówczas gdy:

- 1) zmienna losowa jest zmienną ciągłą,
- 2) liczba zaobserwowanych realizacji zmiennej losowej jest nie mniejsza od 10,
- 3) wartości parametrów rozkładu są dane a nie szacowane na podstawie wyników badań.

W przypadku oszacowań graficznych gdzie dystrybuenta aproksymowana jest równaniem prostej, można, badając odchylenia punktów eksperymentalnych od prostej, obejść warunek dotyczący znajomości parametrów rozkładu.

Dla zastosowania testu Kołmogorowa-Smirnowa oblicza się wartości statystyki

$$d_n = \max_{1 \leq i \leq n} [\hat{F}(x_i) - F(x_i)] \quad (58)$$

gdzie: $\hat{F}(x_i)$ - wartość dystrybuenty empirycznej (wzór (42)),

$F(x_i)$ - wartość dystrybuenty teoretycznej hipotetycznego rozkładu odczytana z równania prostej (wzór (45)).

Hipotezę o zgodności rozkładu empirycznego z hipotetycznym rozkładem teoretycznym należy odrzucić jeżeli jest spełniona nierówność

$$d_n \geq D_n(\alpha), \quad (59)$$

gdzie $D_n(\alpha)$ - wartość krytyczna rozkładu Kołmogorowa-Smirnowa dla poziomu istotności α odczytana z tablic [np. 88].

2.3.6.3. Test ω^2

Test ten opiera się na bezpośrednio zaobserwowanych niegrupowanych wartościach rozważanej zmiennej losowej, a więc znakomicie nadaje się do wyników opracowywanych metodą dystrybuenty empirycznej. Podstawą testu jest statystyka

$$n \cdot \omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n [\hat{F}(x_i) - F(x_i)]^2, \quad (60)$$

gdzie oznaczenia jak we wzorze (58).



T a b e l a 14

Wartości krytyczne statystyki χ^2 dla poziomów istotności

α	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,03	0,02	0,01	0,001
χ^2	0,1184	0,1467	0,1843	0,2412	0,3473	0,4614	0,5489	0,6198	0,7435	1,1679

T a b e l a 15

Wartości krytyczne statystyki W_n^2 dla poziomów istotności

α	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,03	0,02	0,01	0,001
W_n^2	0,7747	0,9239	1,1205	1,4083	1,9336	2,4933	2,9222	3,2708	3,8570	6,0000



Jeśli spełniona jest nierówność

$$- \quad n \cdot \omega_n^2 \geq n \cdot \omega_\alpha^2, \quad (61)$$

to hipotezę o zgodności rozkładu empirycznego z hipotetycznym rozkładem teoretycznym należy odrzucić. Test można stosować dla ciągłej zmiennej losowej, próbkę pełnej i liczbie realizacji $n \geq 10$.

Test ω^2 oparty na podobnej statystyce jak test Kołmogorowa-Smirnowa jest jednak testem o większej mocy [46] ze względu na wykorzystanie wszystkich realizacji różnic dystrybuanty empirycznej i teoretycznej. Test ten jest zalecany przez wielu autorów dla przypadku opracowywania wyników metodą dystrybuanty empirycznej.

Wartości krytyczne asymptotycznego rozkładu $n\omega^2$ podano w tabeli 14.

2.3.6.4. Test W_n^2

Test W_n^2 jest używany wówczas gdy do opracowania wyników stosuje się metodę dystrybuanty empirycznej, w przypadku badania zmiennej losowej ciągłej, przy liczbie realizacji $n \geq 10$ i próbkę pełnej. Podstawą testu jest statystyka [47]

$$W_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ 2i - 1/\ln F(x_i) + [2(n-i) + 1] \ln[1 - F(x_i)] \right\} \quad (62a)$$

a jeśli dystrybuanta empiryczna szacowana jest z wzoru (43), to statystyka powyższa przybiera postać

$$W_n^2 = -n - 2 \sum_{i=1}^n \left\{ \hat{F}(x_i) \ln F(x_i) + [1 - \hat{F}(x_i)] \ln[1 - F(x_i)] \right\}, \quad (62b)$$

gdzie oznaczenia jak we wzorze (58).

Jeśli jest spełniona nierówność

$$W_n^2 \geq W_\alpha^2, \quad (63)$$

to na poziomie istotności α należy hipotezę o zgodności rozkładu teoretycznego z empirycznym odrzucić.

Wartości krytyczne rzędu α asymptotycznego rozkładu statystyki W_n^2 podano w tabeli 15. Test W_n^2 ma moc porównywalną z mocą testu ω^2 [46].



2.3.6.5. Test χ^2

Test χ^2 omawiany w każdym z podręczników statystyki matematycznej jest testem, który należy stosować w przypadku opracowywania wyników metodą histogramu. Wymaga on spełnienia określonych warunków co do podziału na klasy i licznosci realizacji w klasach, w związku z czym uzyskane wyniki mogą być subiektywne (patrz również pkt. 2.3.1 - wstęp).

Tym niemniej godząc się ze zwiększeniem błędu pierwszego rodzaju czyli błędu odrzucenia hipotezy prawdziwej (tzn. z zaostreniem warunków testu), test ten bywa stosowany w metodzie dystrybucyjnej empirycznej [11].

Podstawą testu jest wówczas statystyka

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^N \frac{(x_k - m_k p_k)^2}{m_k p_k (1 - p_k)}, \quad (64)$$

gdzie oznaczenia jak we wzorach (54) i (55).

Hipotezę o zgodności rozkładu empirycznego z hipotetycznym rozkładem teoretycznym należy odrzucić jeśli spełniona jest nierówność

$$\chi^2 \geq \chi^2_{N-r-1, \alpha}, \quad (65)$$

gdzie: $\chi^2_{N-r-1, \alpha}$ - wartość krytyczna rozkładu χ^2 o $N-r-1$ stopniach swobody, rzędu α odczytana z tabel np. [85, 88],
 r - liczba szacowanych parametrów rozkładu.

Iloraz

$$h = \frac{\chi^2}{\chi^2_{N-r-1, \alpha}} \quad (66)$$

nazywa się współczynnikiem jednorodności uzyskanych wyników i stanowi miarę zgodności z rozważanym rozkładem teoretycznym. Im mniejsze h tym pewność co do słuszności postawionej hipotezy o rozkładzie, większa.

2.3.7. Współczynniki dopasowania i korelacji

2.3.7.1. Wprowadzenie

W zagadnieniach wysokonapięciowych często występuje konieczność określania zmian parametrów elektrycznych w funkcji parametrów kon-



strukcyjnych. Przykładem może tu być zależność naprężeń przebicia od grubości izolacji lub czas do przebicia w funkcji naprężeń itp. Prawdopodobieństwo jest wówczas parametrem np. określa się zależność o prawdopodobieństwie 0,5; 0,1 itd. Do określenia takich zależności służą metody regresji i korelacji. Tutaj ograniczono się jedynie do regresji liniowej jako, że w ograniczonych zakresach eksperymentów jest to przypadek najczęściej spotykany lub przez dobór odpowiedniego układu współrzędnych liniowość może być wymuszona. W takim przypadku punkty eksperymentalne aproksymuje się linią prostą za pomocą metody najmniejszych kwadratów (wzory (45) i (46)). Zachodzi pytanie: czy postępowanie takie jest dopuszczalne? lub inaczej: jak bliska zależności funkcyjnej liniowej jest korelacja rozważanych zmiennych, z których co najmniej jedna jest zmienną losową? (teorię regresji i korelacji szczegółowo omówiono w [39, pkt. 11.3.7]).

Dla uzyskania odpowiedzi na powyższe pytania szacuje się współczynnik dopasowania r^2 lub częściej jego pierwiastek zwany współczynnikiem korelacji r

$$r_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{S_x} \right) \left(\frac{y_i - \bar{y}}{S_y} \right), \quad (67)$$

gdzie: n - liczba uzyskanych z eksperymentów punktów (x, y) ,

$\bar{x}, \bar{y}$ - odpowiednie wartości średnie,

S_x, S_y - odpowiednie skorygowane odchylenia standardowe.

Współczynnik korelacji zawiera się w granicach: $-1 \leq r_{xy} \leq 1$ i ma następujące właściwości:

- 1) dla $|r_{xy}| = 1$ między zmiennymi x i y zachodzi liniowa zależność funkcyjna,
- 2) dla $r_{xy} = 0$ brak jest zależności liniowej między zmiennymi (co nie oznacza iż zmienne te muszą być niezależne; może wówczas zachodzić zależność nieliniowa),
- 3) dla $r_{xy} < 0$ korelacja jest ujemna co oznacza że współczynnik kierunkowy prostej (45) $b < 0$,
- 4) dla $r_{xy} > 0$ korelacja jest dodatnia, $b > 0$,
- 5) im $|r_{xy}|$ jest bliższy 1 tym pewność, że zależność liniowa jest większa,
- 6) $r_{xx} = 1$,
- 7) $r_{xy} = r_{yx}$,
- 8) dla $0 < |r_{xy}| < 1$ między zmiennymi istnieje zależność stochastyczna.



2.3.7.2. Przedział ufności dla współczynnika korelacji

Dla określenia przedziału ufności dla współczynnika korelacji przy dużych r (bliskich jedności) korzysta się z przekształcenia

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}, \quad (68)$$

i określa się błąd oszacowania

$$S\{\hat{Z}\} = \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \quad (69)$$

Przedziały ufności wynoszą wówczas

$$\hat{Z} - t_{n-2,\beta} S\{\hat{Z}\} \leq Z \leq \hat{Z} + t_{n-2,\beta} S\{\hat{Z}\}. \quad (70)$$

Po zastosowaniu przekształcenia odwrotnego

$$r = \frac{e^{2Z} - 1}{e^{2Z} + 1}, \quad (71)$$

uzyskuje się granice przedziału ufności dla współczynnika korelacji.

2.3.7.3. Sprawdzenie hipotezy

o niewystępowaniu zależności korelacyjnej

Aby móc stwierdzić, że hipotezy o istnieniu związku korelacyjnego między badanymi zmiennymi odrzucić nie można, sprawdza się czy dla tej z granic przedziału ufności, która ma mniejszą wartość bezwzględną zachodzi nierówność

$$\frac{|r_{xy}| \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} \leq t_{n-2,\beta}. \quad (72)$$

Jeśli nierówność ta jest spełniona, to hipotezę o istnieniu korelacji liniowej należy odrzucić.

2.3.8. Niezależność poszczególnych doświadczeń. Test serii

Wykonując przykładowo badania wytrzymałości elektrycznej obserwuje się na danym poziomie napięcia dwójakiego rodzaju zdarzenia: a) za-



T a b e l a 16

Wartości krytyczne $U_{0,05}$ liczby serii w teście serii (Walda-Wolfowitza) wg [19]

$n_1 \backslash n_2$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4			2																
5		2	2	3															
6		2	3	3	3														
7		2	3	3	4	4													
8	2	2	3	3	4	4	5												
9	2	2	3	4	4	5	5	6											
10	2	3	3	4	5	5	6	6	6										
11	2	3	3	4	5	5	6	6	7	7									
12	2	3	4	4	5	6	6	7	7	8	8								
13	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9							
14	2	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	10						
15	2	3	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11					
16	2	3	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	11	11				
17	2	3	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	12	12			
18	2	3	4	5	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13		
19	2	3	4	5	6	7	8	8	9	10	10	11	12	12	13	13	14	14	
20	2	3	4	5	6	7	8	9	9	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15

istnienie wyładowania elektrycznego, lub b) brak wyładowania. Można zatem utworzyć ciąg elementów dwóch rodzajów, na przykład

aa ba bbb a bbb

przy czym elementów "a" jest " n_1 " a elementów "b" " n_2 ". Grupy wyrazów tego samego rodzaju nazywa się serią, na przykład

aa, b, a, bbb, a, bbb

liczba serii otrzymanych z próbek losowych o licznosciach n_1 i n_2 jest zmienną losową U , której wartości u są liczbami naturalnymi spełniającymi nierówność

$$2 \leq u \leq n_1 + n_2. \quad (73)$$

Korzystając z tablic wartości krytycznych U_α (tab. 16), należy hipotezę o niezależności wyników poszczególnych prób odrzucić na poziomie istotności α jeśli spełniona jest nierówność

$$u \leq U_\alpha,$$

gdzie u - zaobserwowana liczba serii.

Test serii do oceny losowości można stosować nie tylko wówczas gdy zmienna przybiera wartości 0 lub 1, czyli gdy podlega rozkładowi dwumianowemu, lecz również przy badaniach wartości parametrów. Przykładowo w serii wyników czasów do przeskoku lub napięć przeskoku (czy przebiecia) wyróżnić można wartość średnią, a wartości większe lub mniejsze zalicza się do podzbiorów n_1 lub n_2 i następnie można już stosować test serii wg podanej wyżej procedury [87].

2.3.9. Eliminacja błędów grubych

Nanosząc punkty eksperymentalne na siatkę funkcyjną rozkładu statystycznego, można spotkać się z przypadkiem, że któryś z punktów wyraźnie odbiega od pozostałych i od dystrybucyj. Punkt taki może być obciążony grubym (dużym) błędem i w takim przypadku należałoby go wykluczyć z analizy. Najwłaściwszą metodą wykluczenia dużych błędów jest odrzucenie podejrzanych wyników obserwacji, gdy istnieją ku temu powody wynikające z samego przebiegu doświadczenia [74].



Zdarza się jednak, że nie ma widocznych podstaw do odrzucenia i trzeba kolejno badać czy wyniki odbiegające bardzo znacznie od pozostałych należą również do tej samej populacji generalnej. Korzysta się wtedy z testu błędów obserwacji opartego na statystykach:

$$B_4^+ = \frac{X_{(n)} - \bar{X}}{S}, \quad B_4^- = \frac{X_{(1)} - \bar{X}}{S},$$

lub

$$B_6^+ = \frac{X_{(n)} - X_{(n-1)}}{X_{(n)} - X_{(1)}}, \quad B_6^- = \frac{X_{(1)} - X_{(2)}}{X_{(n)} - X_{(1)}}, \quad (74)$$

lub

$$B_7^+ = \frac{X_{(n)} - X_{(n-1)}}{X_{(n)} - X_{(2)}}, \quad B_7^- = \frac{X_{(1)} - X_{(2)}}{X_{(n)} - X_{(2)}}$$

lub

$$B_8^+ = \frac{X_{(n)} - X_{(n-2)}}{X_{(n)} - X_{(1)}}, \quad B_8^- = \frac{X_{(1)} - X_{(3)}}{X_{(n)} - X_{(1)}}$$

Wzory (74) dotyczą przypadku gdy parametry rozkładu są nieznane. Istnieją jeszcze statystyki B_i dla przypadku znanych parametrów rozkładu, które pominięto, jako że jest to przypadek rzadko spotykany. Jeśli

$$B_i > b_i(\alpha, n), \quad (75)$$

to badany wynik należy uznać, na poziomie istotności α , za obciążony błędem grubym i wykluczyć go z dalszej analizy. Wartości krytyczne $b_4(\alpha, n)$ dla $\alpha = 0,05$ podano w tabeli 17. Dla $n > 50$ oraz $\alpha < 0,2$ wartości $b_4(\alpha, n)$ oblicza się z zależności

$$b_4(\alpha, n) = y \sqrt{\frac{2(n-1)}{2n-5+y^2+(3+y^2+2y^4)\frac{1}{6(2n-5)}}} \quad (76)$$

gdzie y jest kwantylem rzędu $1 - \alpha/2n$ standaryzowanego rozkładu normalnego.



T a b e l a 17

Eliminacja błędów grubych. Wartości krytyczne
 $b_4(0,05, n)$ wg [88]

n	b_4	n	b_4
3	1,414	27	2,913
4	1,710	28	2,929
5	1,917	29	2,944
6	2,067	30	2,958
7	2,182	31	2,972
8	2,273	32	2,985
9	2,349	33	2,998
10	2,414	34	3,010
11	2,470	35	3,022
12	2,519	36	3,033
13	2,563	37	3,044
14	2,602	38	3,055
15	2,638	39	3,065
16	2,670	40	3,075
17	2,701	41	3,084
18	2,728	42	3,094
19	2,754	43	3,103
20	2,779	44	3,112
21	2,801	45	3,120
22	2,823	46	3,129
23	2,843	47	3,137
24	2,862	48	3,145
25	2,880	49	3,152
26	2,897	50	3,160



3. WYBRANE PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ W WYSOKONAPIĘCIOWEJ TECHNICIE PROBIERCZEJ

3.1. Wprowadzenie

Przypadkowość pojawiania się i rozwoju wyładowań elektrycznych wymaga, dla uzyskania obiektywnej oceny wyników badań wysokonapięciowych, stosowania metod statystycznych. Zakłada się przy tym, że każdemu poziomowi napięcia U_i o danym kształcie i czasie działania lub/i każdej wartości czasu t_i przy danej wartości napięcia odpowiada określone prawdopodobieństwo P_i zaistnienia wyładowania przy jednokrotnym doprowadzeniu napięcia. Celem badań jest więc określenie dystrybuanty napięć (naprężeń) przebicia (progu wyładowań niezupełnych) $F(U) = P(U < U_i)$ przy określonym kształcie i czasie oddziaływania napięcia lub dystrybuanty czasów do przebicia (przeskoku czy wystąpienia wyładowań niezupełnych o określonej intensywności) przy danym kształcie i wartości szczytowej napięcia $F(t) = P(t < t_i)$.

Rolę czasu dla dystrybuanty czasów może, w przypadku napięć impulsowych, odgrywać liczba uderów do przebicia.

Zależność prawdopodobieństwa zaistnienia wyładowania elektrycznego w izolacji od napięcia służy zwykle do opisu wytrzymałości doraźnej (krótkotrwałej). Obejmuje to wytrzymałość udarową, zarówno piorunową jak i łączeniową oraz krótkotrwałą (np. jednogodzinową, godzinową, itp.) wytrzymałość przy napięciu przemiennym.

Zależność prawdopodobieństwa zaistnienia wyładowania w funkcji czasu do wyładowania w zakresie godzin i dłuższym (lub liczby uderów do wyładowania) dotyczy wytrzymałości długotrwałej i służy do oceny wytrzymałości izolacji na długotrwałe narażenia robocze*. Mówi się wówczas o właściwościach starzeniowych izolacji i o ocenie czasu życia izolacji.

3.2. Wytrzymałość elektryczna krótkotrwała

3.2.1. Wprowadzenie

W zakresie badania wytrzymałości elektrycznej krótkotrwałej należy wyróżnić dwa zagadnienia.

* Wyjątkiem są tu procedury określania charakterystyk udarowych, dotyczące jednak czasów znacznie krótszych, rzędu mikrosekund.



1. Badania wytrzymałości doraźnej gotowych maszyn lub urządzeń wysokonapięciowych. W tym zakresie próby wytrzymałości elektrycznej są całkowicie znormalizowane i opisane w odpowiednich normach przedmiotowych. Problematykę tych prób w skrypcie pominięto.

2. Badania materiałów i fragmentów układów izolacyjnych mające na celu określenie właściwości elektrycznych lub wartości projektowych. Dalsza część rozdziału dotyczy tylko tego zagadnienia.

Zagadnienie drugie dotyczy zarówno badania np. napięcia przesko-ku wzdłuż izolatora liniowego jak i badania np. napięcia przebicia fragmentu izolacji transformatora energetycznego (np. izolacji między-zwojowej czy międzycewkowej itp.) czy badania progu wyładowań niezupełnych dla próbek określonego dielektryku.

Dla dokładnego zdefiniowania zagadnienia należy rodzaje izolacji wysokonapięciowej podzielić na dwie grupy [68].

1. Izolacja regenerująca się czyli izolacja całkowicie odzyskująca właściwości izolacyjne w pewnym czasie po wystąpieniu wyładowania zupełnego. Przykładem jest tu izolacja powietrzna w przestrzeniach otwartych.

2. Izolacja nieregenerująca się czyli izolacja, która po wyładowaniu zupełnym spowodowanym działaniem napięcia traci właściwości izolacyjne lub nie odzyskuje ich całkowicie. Do tego typu izolacji zalicza się w zasadzie wszystkie pozostałe rodzaje izolacji, a więc stałą, ciekłą i gazową w przestrzeniach zamkniętych.

Z przedstawionych definicji wynika, że podejście do badań powinno w obydwu przypadkach być różne. W przypadku izolacji regenerującej się można powodować wielokrotnie wyładowania zupełne bez uszkodzenia izolacji, natomiast w przypadku izolacji nieregenerującej się po każdym wyładowaniu zupełnym próbkę uważa się za zniszczoną i do kolejnego badania należy wziąć nową próbkę dielektryka. Często przyjmuje się, że izolacja ciekła (np. olejowa) czy gazowa w przestrzeniach zamkniętych wykazuje, przy ograniczonej liczbie przebiegów oraz zapewnieniu odpowiedniego czasu odpoczynku, właściwości izolacji regenerującej się i badania przeprowadza się tak jak dla izolacji powietrznej.

Podejście takie jest dopuszczalne o ile wynika z pełnej świadomości eksperymentatora co do liczby dopuszczalnych wyładowań elektrycznych. Również w przypadku izolacji regenerującej się należy sobie zdać sprawę z faktu, że przy kolejnych wyładowaniach ulegają wypaleniu elektrody i że nawet izolacja powietrzna wymaga większego od zera czasu dla zregenerowania swych właściwości izolacyjnych.

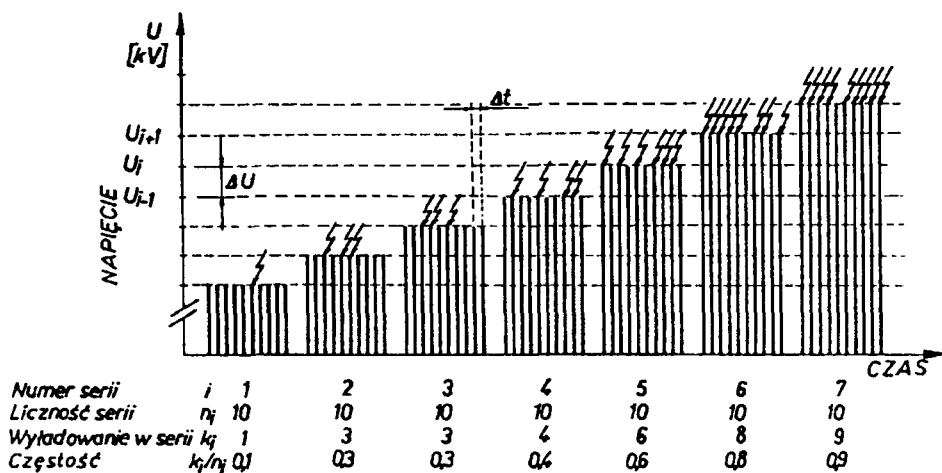


3.2.2. Metody badań izolacji regenerującej się

Metody badań izolacji regenerującej się są częściowo ujęte w normach wysokonapięciowych [66, 67, 68] i w tym zakresie skomentowano je szczegółowo w [80].

3.2.2.1. Metoda serii

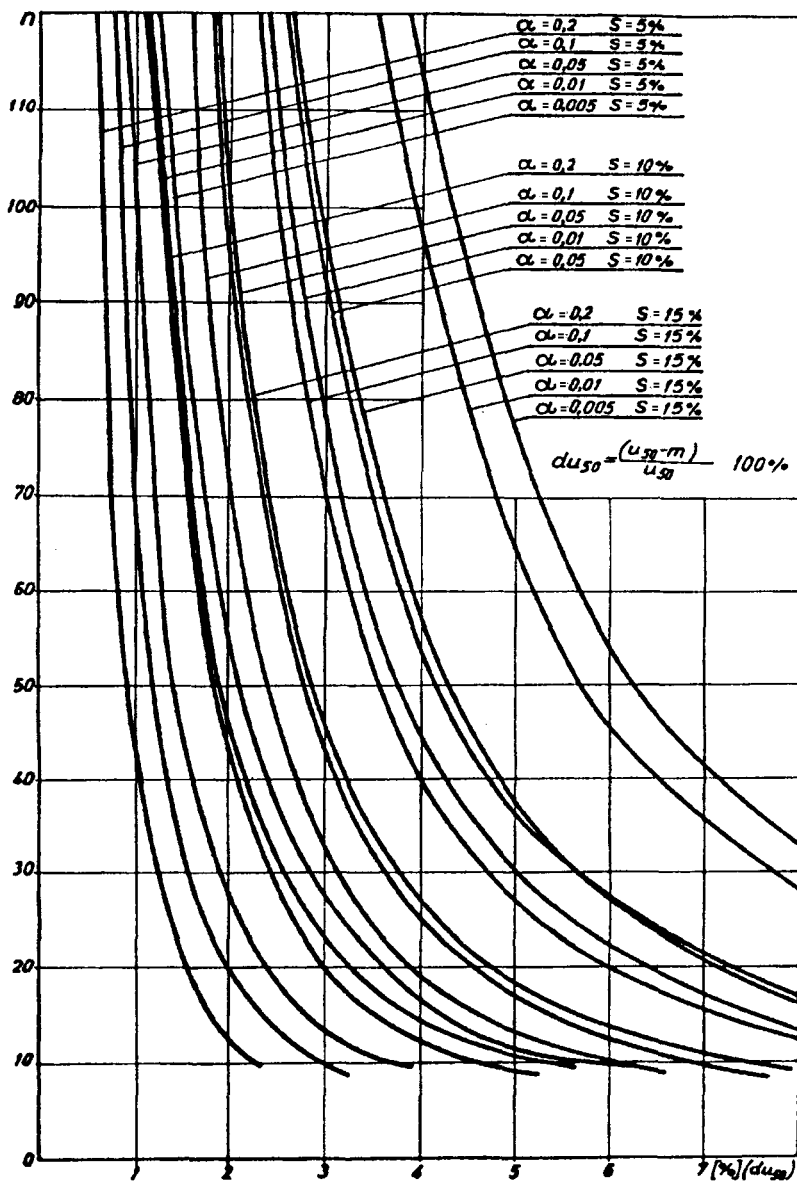
Metoda serii jest metodą powszechnie stosowaną w przypadku napięć impulsowych (udarowych). Schematycznie procedurę prób wykonywanych tą metodą przedstawiono na rysunku 10. W metodzie tej każdemu poziomowi napięcia U_i przyporządkowuje się założoną z góry liczbę doprowadzanych impulsów n_i i w czasie badań obserwuje się liczbę k_i impulsów, które doprowadziły do wyładowania. Iloraz k_i/n_i jest zaobserwowaną skumulowaną częstością wyładowań i stanowi oszacowanie prawdopodobieństwa P_i na dystrybucjancie empirycznej.



Rys. 10. Schematyczna ilustracja procedury badań metodą serii wg [27]

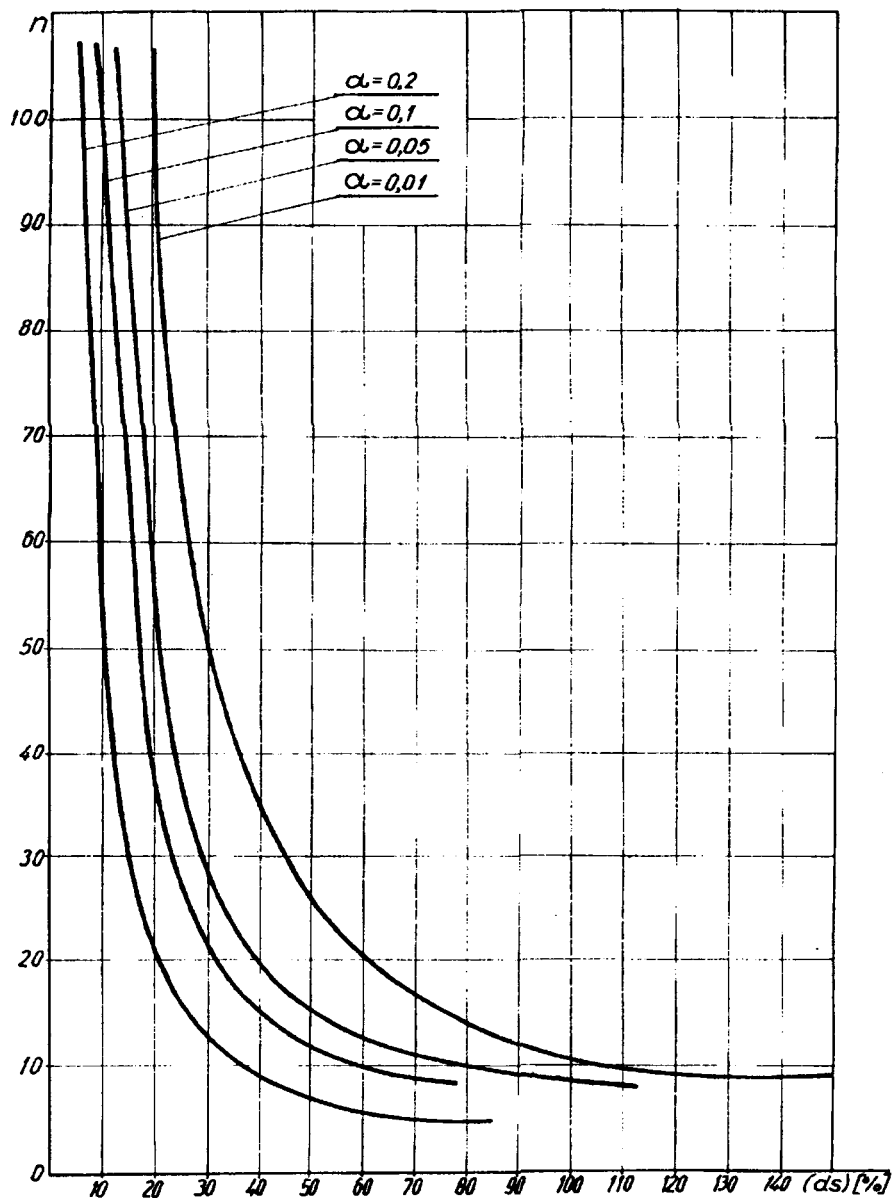
Metoda serii może być również stosowana w przypadku izolacji nie-regenerującej się, z tym że wówczas n_i oznacza liczbę próbek badanych przy napięciu U_i , a k_i - liczbę próbek zniszczonych przy napięciu U_i . Zwykle jednak uznaje się, że metoda serii jest zbyt kosztowna aby mogła być stosowana do badań izolacji nieregenerującej się.





Rys. 11. Zależność błędu oszacowania U_{50} od liczności próby n dla różnych poziomów istotności α i dla różnych współczynników zmienności S





Rys. 12. Zależność błędu oszacowania odchylenia standardowego σ od liczności próby n , dla różnych poziomów istotności α :

$$dS = \frac{\sigma - S}{S} 100\%$$



Podstawowym problemem, który należy rozstrzygnąć przy stosowaniu metody serii, jest określenie liczby impulsów n_i doprowadzanych na poziomie napięcia U_i . Zagadnienie to rozwiązuje się w oparciu o analizę błędu oszacowania odchylenia standardowego i wartości oczekiwanej. Na rysunkach 11 i 12 wykreślono zależność tych błędów od liczebności próby n przy różnych poziomach istotności α . Jak widać, przy stałym błędzie liczebność n rośnie ze wzrostem poziomu ufności $1 - \alpha$. W przypadku izolacji powietrznej gdzie współczynnik zmienności $s = (S/U_{50})$ 100% jest zwykle mniejszy od 5% duże zwiększenie n w zakresie $n > 20$ daje niewielkie zmniejszenie błędów i odwrotnie, malenie n w zakresie $n < 20$ daje duże wzrosty błędu, stąd przyjmuje się, że n winno być nie mniejsze od 10 i raczej równe 20 lub więcej [3, 39].

Liczbę poziomów napięciowych N , na których wykonuje się próby przyjmuje się zwykle w granicach $5 \div 8$, co również jest kompromisem między dokładnością i pracochłonnością.

Dokładność uzyskanych oszacowań można zwiększyć stosując, przy założeniu rozkładu normalnego:

a) wagi zwiększające wiarygodność wyznaczanych doświadczalnie kwantyli y_i [39]

$$w_{ai} = n_i \frac{\exp(-y_i^2)}{2\pi p_i(1 - p_i)}, \quad (77)$$

parametry równania prostej (wzory 46a i b) przybiorą wówczas postać:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^N w_{ai} U_i^2 \sum_{i=1}^N w_{ai} y_i - \sum_{i=1}^N w_{ai} U_i \sum_{i=1}^N w_{ai} y_i U_i}{\sum_{i=1}^N w_{ai} \sum_{i=1}^N w_{ai} U_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N w_{ai} U_i \right)^2}, \quad (78a)$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^N w_{ai} \sum_{i=1}^N w_{ai} U_i y_i - \sum_{i=1}^N w_{ai} U_i \sum_{i=1}^N w_{ai} y_i}{\sum_{i=1}^N w_{ai} \sum_{i=1}^N w_{ai} U_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N w_{ai} U_i \right)^2}. \quad (78b)$$

Metoda obliczeń z uwzględnieniem wag pojedynczych punktów eksperymentalnych przy stałej liczbie ударów $n_i = n = \text{const}$ na stopniu napięciowym daje dokładniejszą analizę jedynie w okolicy napięcia pięćdziesięcioprocentowego (U_{50}) (dla małych prawdopodobieństw dokładniejsza jest metoda prosta [41]),



b) metodę Bartletta [41] polegającą na uzyskaniu jednakowej liczby wyładowań $k_i = k = \text{const}$ na wszystkich zastosowanych poziomach napięciowych; prowadzi to do znacznego wzrostu liczby udarów n_i na poziomach napięciowych o małych prawdopodobieństwach zaistnienia przeskoku. Wagi w z wzorów (78) przybierają wówczas wartości

$$w_{b_i} = k \frac{\exp(-y_i^2)}{2\pi p_1^2(1 - p_1)}. \quad (79)$$

Metoda ta daje najdokładniejsze oszacowanie napięć w zakresie małych prawdopodobieństw ($U_{16\%}$ do $U_{0,1\%}$), przy czym zaleca się [41] aby dla $p \leq 0,16$ przyjąć $k_1 \geq 2$ a dla $p \geq 0,5$ przynajmniej $k_2 \geq 4$.

Ogólnie rzecz biorąc można stwierdzić, że w metodzie serii należy doprowadzić do badanego obiektu co najmniej 100 udarów napięciowych z czego około połowa (jako, że pomiary winny być wykonane zarówno powyżej jak i poniżej wartości oczekiwanej) doprowadzi do wyładowania.

W czasie badań wykonywanych metodą serii mogą wystąpić, szczególnie przy małych n_i , przypadki gdy przy napięciu U_{i+1} zaobserwowana bywa częstość k_{i+1}/n_{i+1} równa zeru mimo, iż na stopniu U_i częstość $k_i/n_i > 0$. Zaleca się wówczas poprawić wynik wg zależności [39, 78]

$$\frac{k_{i+1}}{n_{i+1}} \Rightarrow \frac{1}{2n_{i+1}}. \quad (80)$$

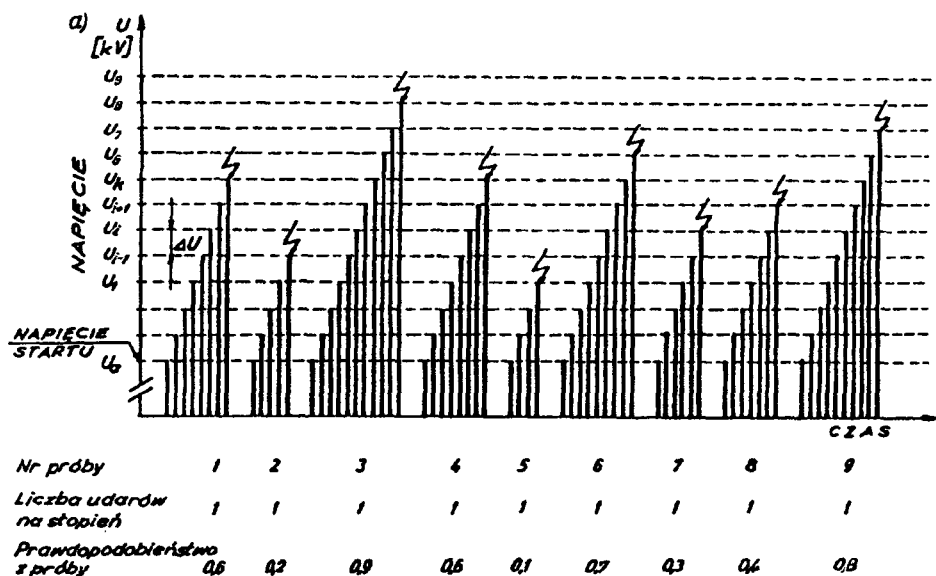
Podobnie w przypadku, gdy po obniżeniu napięcia do U_{i-1} zwiększy się częstość występowania przeskoku, zaleca się poprawić wynik wg zależności [39, 78]

$$\frac{k_{i-1}}{n_{i-1}} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2n_{i-1}}. \quad (81)$$

3.2.2.2. Metoda Tetznera (schodkowa)

Znacznie mniej kosztowną metodą badań niż metoda serii jest metoda schodkowa zwana także od nazwiska autora metodą Tetznera. W metodzie tej zwiększa się napięcie schodkowo aż do uzyskania wyładowania. Schematycznie obrazuje to rysunek 13.





b)

STOPNIE NAPIĘCIOWE	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8	kV
LICZBA WYLADOWAŃ NA DANYM POZIOMIE U_i	x_i	1	1	1	1	2	1	1	-
LICZBA WYLADOWAŃ DO DANEGO POZIOMU WŁĄCZENIE $\sum x_i$	1	2	3	4	6	7	8	9	-
PRAWDOPODOBIEŃSTWO Z PRÓBY P_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	-

Rys. 13. Schematyczna ilustracja procedury badań metodą schodkową (Tetznera); wg [27].

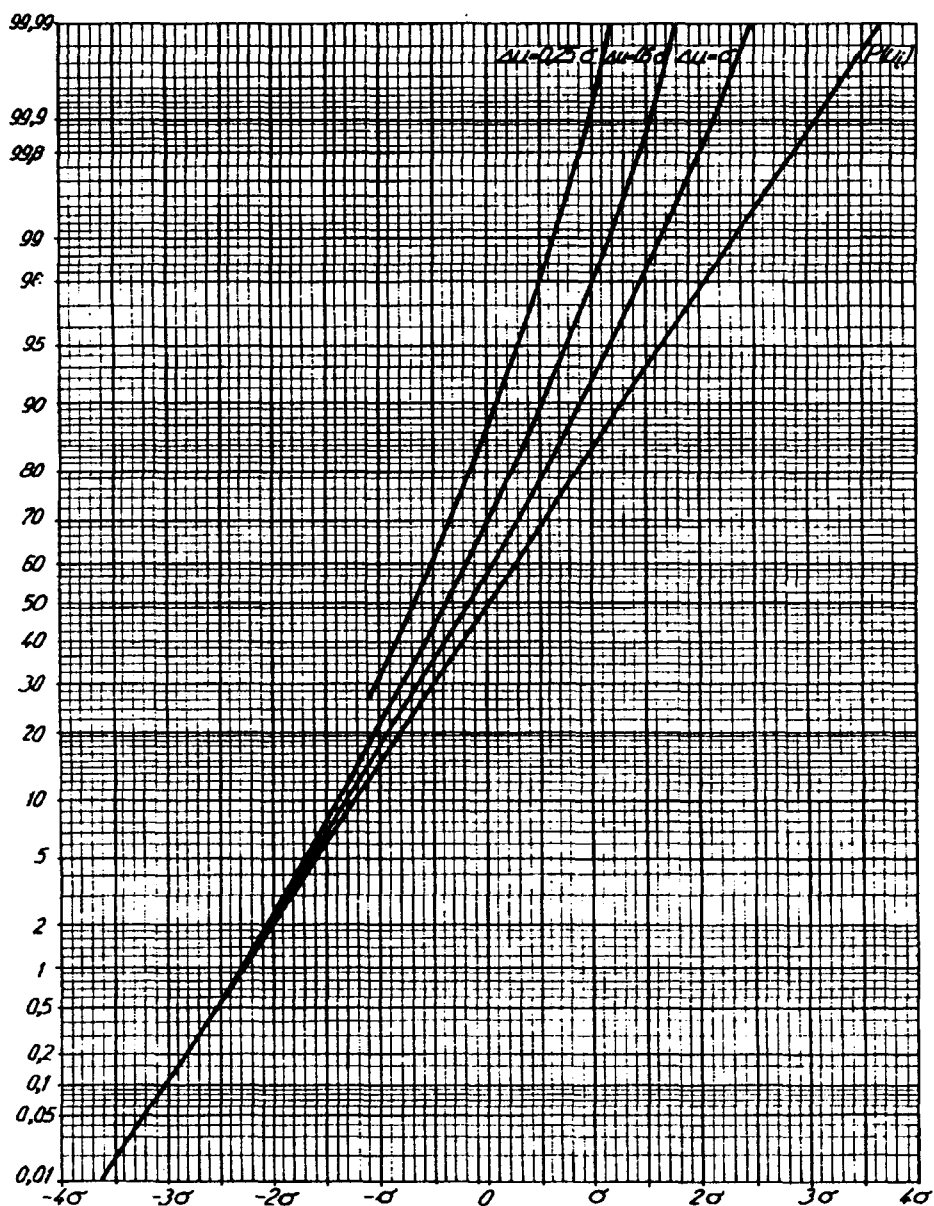
Jako prawdopodobieństwo z próby stanowiące punkt dystrybuanty empirycznej określa się wartość

$$p_k = \hat{F}_{\Delta u}(u_k) = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{n + 1}, \quad (82)$$

gdzie: $1 \leq k \leq n$,

n - całkowita liczba zaobserwowanych przeskoków (przebieg itp.).





Rys. 14. Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa $F_{\Delta U}(U)$ dla różnych kroków napięciowych $\Delta U = 0,25\sigma, 0,5\sigma$ i σ , wg [75]



Szereg n wartości (p_k, U_k) pozwala oszacować dystrybuantę napięć przebicia (przeskoku itp.). Metoda ta zapewnia dokładność równoważną metodzie serii przy $n = n_1$, jest więc znacznie oszczędniejsza.

Niestety jednak uzyskana dystrybuanta jest, w przypadku izolacji regenerującej się (a także w przypadku każdej izolacji gdzie o rozrzuście napięć przebicia decyduje jedynie mechanizm przebicia a nie głównie właściwości materiałowe np. izolacja olejowa), zależna od przyjętego kroku napięciowego $\Delta U = U_i - U_{i-1}$. Ilustruje to rysunek 14. Jak widać im mniejszy krok napięciowy tym dalej jesteśmy od poszukiwanej dystrybuanty $F(U)$.

Istnieje kilka metod przeliczania uzyskanej, pomocniczej dystrybuanty $F_{\Delta U}(U)$ na poszukiwaną dystrybuantę $F(U)$. Tutaj ograniczano się do metody przeliczania przez transformację, prowadzącej do uniwersalnych wykresów ułatwiających obliczenia [17]. Z innymi metodami przeliczania zapoznać się można w [39, 82].

Metoda transformacji jest oparta na związku między zmiennymi U i $U_{\Delta U}$, przy czym założyć należy znajomość rozkładu zmiennej U . Ograniczymy się do przypadku rozkładu normalnego. Dla rozkładu Weibulla metodę transformacji omówiono w [57].

Standaryzując zmienną U

$$x = \frac{U - \mu}{\sigma}, \quad (83)$$

przechodzi się od rozkładu $F(U)$ do $\Phi(x)$ gdzie $\Phi(x)$ to standaryzowany rozkład normalny $N(0,1)$.

Transformując zmienną $U_{\Delta U}$

$$x_{\Delta x} = \frac{U_{\Delta U} - \mu}{\sigma}, \quad (84)$$

przechodzi się od rozkładu $F_{\Delta U}(U)$ do rozkładu $F_{\Delta x}(x)$ o parametrach $\mu_{\Delta x}$ i $\sigma_{\Delta x}$.

Stopień napięciowy ΔU zastępuje się stopniem

$$\Delta x = \frac{\Delta U}{\sigma}. \quad (85)$$

Miedzy funkcjami $\Phi(x)$ i $F_{\Delta x}(x)$ występuje związek

$$\Phi(x) = F_{\Delta x}\left(\frac{x_{\Delta x} - \mu_{\Delta x}}{\sigma_{\Delta x}}\right). \quad (86)$$



Zmienne losowe $x_{\Delta x}$ i x związane są więc zależnością

$$x_{\Delta x} = \sigma_{\Delta x} x + \mu_{\Delta x}. \quad (87)$$

Rozkład $F_{\Delta x}(x)$ jest zależny od kroku napięciowego i może być określony przez rozkład $\Phi(x)$ z zależności

$$F_{\Delta x}(x_a + 1 \cdot \Delta x) = \sum_{i=1}^1 \Phi(x_a + i \cdot \Delta x) \prod_{j=0}^{i-1} [1 - \Phi(x_a + j \cdot \Delta x)], \quad (88)$$

gdzie x_a standaryzowana wartość napięcia U_a (rys. 13), od którego rozpoczyna się próby, zwanego napięciem startu.

Z zależności (88) znając $\Phi(x)$ można dla dowolnej wartości unormowanego kroku napięciowego Δx obliczyć parametry $\mu_{\Delta x}$ i $\sigma_{\Delta x}$ rozkładu $F_{\Delta x}(x)$.

Równania (83), (84) i (87) dające związek między U i $U_{\Delta U}$ zawierają jeszcze nieznane a poszukiwane parametry μ i σ .

Zmienną losową x można również otrzymać znając parametry funkcji $F_{\Delta U}(U)$ standaryzując

$$x = \frac{U_{\Delta U} - \mu_{\Delta U}}{\sigma_{\Delta U}}, \quad (89)$$

oraz wykorzystując równanie (87)

$$x_{\Delta x} = \frac{U_{\Delta U} - \mu_{\Delta U}}{\sigma_{\Delta U}} \sigma_{\Delta x} + \mu_{\Delta x}. \quad (90)$$

Szukane wartości μ i σ można teraz obliczyć z równań (84) i (90) przez porównanie współczynników:

$$\sigma = \frac{\sigma_{\Delta U}}{\sigma_{\Delta x}}, \quad (91)$$

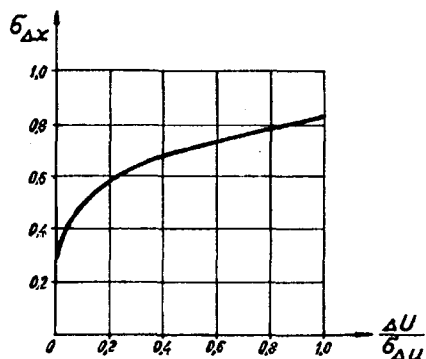
$$\mu = \mu_{\Delta U} - \mu_{\Delta x} \frac{\sigma_{\Delta U}}{\sigma_{\Delta x}}. \quad (92)$$

Z równań (85) i (91) można również określić unormowaną wielkość kroku napięciowego

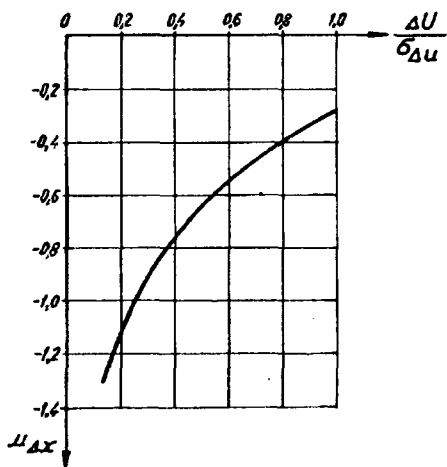
$$\Delta x = \frac{\sigma_{\Delta x}}{\sigma_{\Delta U}} \Delta U. \quad (93)$$



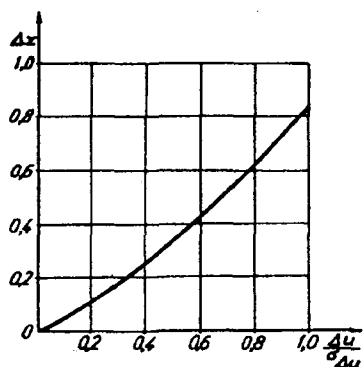
Do obliczenia μ i G są jeszcze potrzebne wartości $\mu_{\Delta x}$ i $G_{\Delta x}$. Wychodząc z równania (88), zakładając odpowiednie wartości początkowe x_a i wartości kroku Δx można wyznaczyć zależności $G_{\Delta x} = f_1(\Delta x)$ i $\mu_{\Delta x} = f_2(\Delta x)$.



Rys. 15. Zależność $G_{\Delta x} = f_1(\Delta U/G_{\Delta U})$; wg [17]



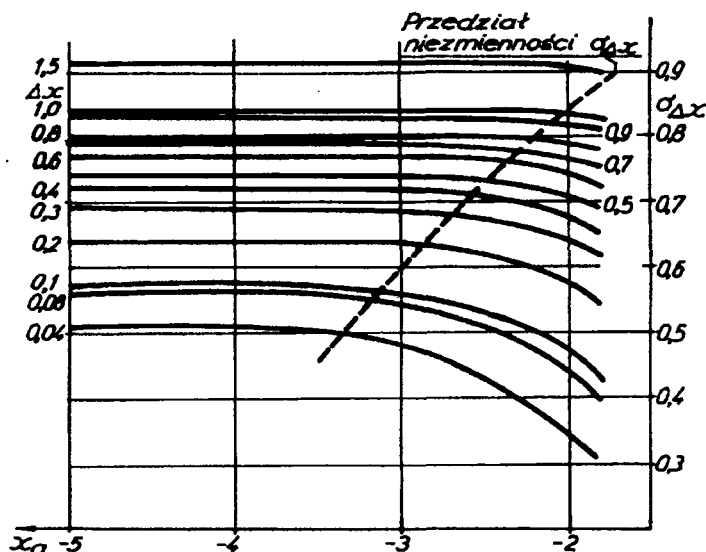
Rys. 16. Zależność $\mu_{\Delta x} = f_2(\Delta U/G_{\Delta U})$ wg [17]



Rys. 17. Zależność $\Delta x = f_3(\Delta U/G_{\Delta U})$; wg [17]



Zakładając $x_a = -5$ oraz Δx z przedziału $<0,02; 1,5>$ oraz wykorzystując transformację $\Delta x/\sigma_{\Delta x} = \Delta U/\sigma_{\Delta U}$ w [17] uzyskano zależności $\sigma_{\Delta x} = f_1(\Delta U/\sigma_{\Delta U})$, $\mu_{\Delta x} = f_2(\Delta U/\sigma_{\Delta U})$ oraz $\Delta x = f_3(\Delta U/\sigma_{\Delta U})$ wykreślone na rysunkach 15, 16 i 17.



Rys. 18. Zależność $\sigma_{\Delta x}$ od wartości startu x_a przy różnych krokach Δx ; na lewo od linii przerywanej $\sigma_{\Delta x}$ nie zależy od x_a ; wg [17]

Znając określone eksperymentalnie parametry funkcji $F_{\Delta U}(U)$ czyli $\hat{\mu}_{\Delta U}$, $\hat{\sigma}_{\Delta U}$ oraz krok ΔU , można korzystając z wykresów 15 i 16 odczytać wartości $\mu_{\Delta x}$ i $\sigma_{\Delta x}$ i po podstawieniu do wzorów (91) i (92) oszacować poszukiwane parametry $\hat{\mu}$ i $\hat{\sigma}$ (czyli U_{50} i S).

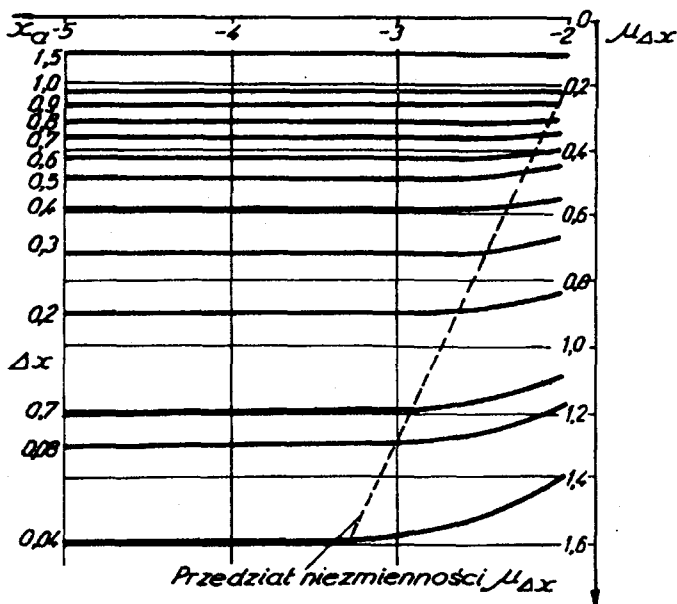
Pewnym problemem jest jeszcze uniezależnienie się od wyboru napięcia startu U_a (x_a było zakładane przy obliczeniach). Należy więc znaleźć taką górną granicę napięć startu U_a , poniżej której dla każdego U_a oszacowana funkcja $F_{\Delta U}(U)$ byłaby niezależna od U_a . Wychodząc z rozkładu $\tilde{\phi}(x)$ dla różnych wartości początkowych x_a i kroku napięciowego Δx obliczono [17] z wzoru (88) funkcję $F_{\Delta x}(x)$, a stąd odchylenie standardowe $\sigma_{\Delta x}(x_a)$ oraz wartość oczekiwaną $\mu_{\Delta x}(x_a)$. Zależności te wy-



kreślono na rysunkach 18 i 19. Obszary, w których uzyskane wyniki nie zależą lub zależą od U_a rozdzielono linią przerywaną. Górną granicą dla x_a oznaczoną jako $x_{a01}(\Delta x)$, określoną przy założonym błędzie oszacowania $\varepsilon = 0,01$ dla odchylenia standardowego [17]

$$|\sigma_{\Delta x}[x_{a01}(\Delta x)] - \sigma_{\Delta x}| < \varepsilon \quad (94)$$

podano na rysunku 20.

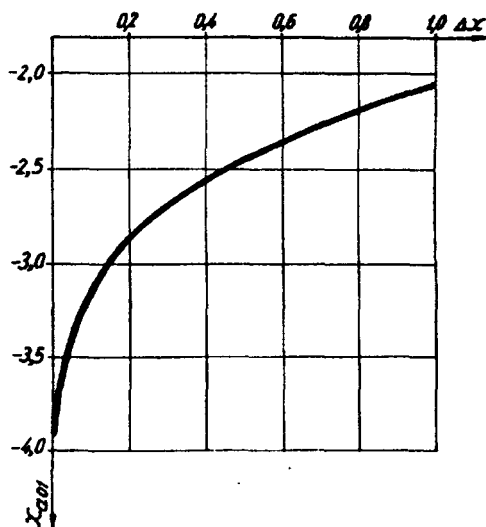


Rys. 19. Zależność $\mu_{\Delta x}$ od wartości startu x_a przy różnych krokach Δx ; na lewo od ukośnej linii $\mu_{\Delta x}$ nie zależy od x_a ; wg [17]

Jak widać przy małym kroku Δx wartość x_a musi być niska. W praktyce krok napięciowy wybiera się w granicach $\Delta x = \Delta U/G = 0,2 \div 0,5$ i stąd wartość początkowa winna być w granicach $x_a = (U_a - \mu)G = -3 \div -2,5$.

Dokładność oszacowań parametrów $\mu_{\Delta U}$ i $G_{\Delta U}$ można, przy danym n , oszacować z rysunków 11 i 12. Przy przeliczaniu dla znalezienia oszacowań μ i G błąd oszacowań nie wzrasta.





Rys. 20. Zależność granicznej wartości startu X_{a01} od wartości kroku Δx , wg [17]

Metoda schodkowa bywa również stosowana w wersjach różniących się liczbą uderzeń aplikowanych na danym stopniu napięciowym. Pionowa kreśka na rysunku 13a symbolizuje wówczas odpowiednio np. 2, 3, 5 czy 10 uderzeń o jednakowej wartości szczytowej i mówimy o dystrybucie napięć przebicia przy 2, 3, 5 czy 10 uderzeniach na stopień. Wybór liczby uderzeń na stopniu napięciowym jest zwykle podyktowany wymaganiami konstruktorów. Przykładowo, jeśli próba odbiorcza jakiegoś urządzenia wymaga doprowadzenia trzech uderzeń, to również badania fragmentów układu izolacyjnego tego urządzenia należy wykonać przy trzech uderzeniach na stopniu napięciowym. Procedura opracowania wyników pozostaje wówczas bez zmian, dochodzą jedynie nowe informacje dotyczące numeru kolejnego uderzenia (na stopniu napięciowym, na którym zaobserwowano wyładowanie) który doprowadził do wyładowania. Te informacje mogą być przedmiotem dodatkowej analizy i wnioskowania na temat charakteru rozrzutu uzyskiwanych wyników (patrz pkt. 3.2.4).

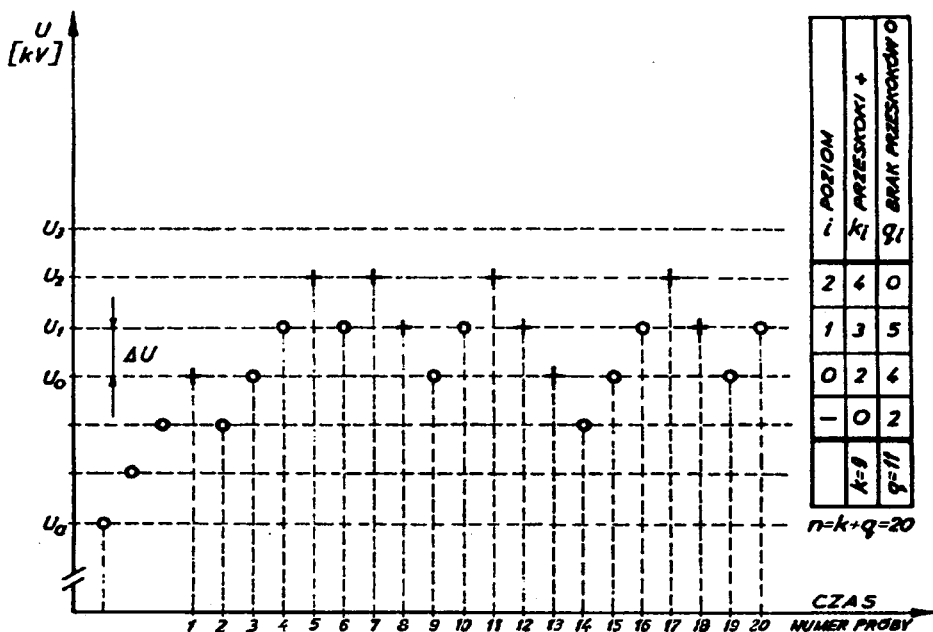
Metoda schodkowa w wersji dostosowanej do badań przy napięciu przemennym polega na utrzymywaniu napięcia na danym stopniu przez okres



np. 1 min, 10 min, 1 godz. itd. Mówimy wówczas o wytrzymałości jedno-minutowej, dziesięciominutowej, godzinnej itd. Sposób opracowania wyników pozostaje bez zmian, dochodzą jedynie nowe informacje o czasie zaistnienia wyładowania na stopniu napięciowym, na którym to zdarzenie wystąpiło (patrz pkt. 3.2.4.1).

3.2.2.3. Metoda góra-dół

Metoda góra-dół zwana również od nazwisk autorów metodą Dixona-Mooda jest obecnie dominującą metodą w zastosowaniu do badań izolacji powietrznej. Procedurę badań prowadzonych metodą góra-dół schematycznie przedstawiono na rysunku 21. Ogólnie można powiedzieć, że kolejną próbę wykonuje się na poziomie napięciowym uzależnionym od wyniku próby bezpośrednio ją poprzedzającej. I tak jeśli przeskok zaistniał napięcie zmniejszamy, jeśli nie zaistniał zwiększamy. Poczynając od pierwszej zmiany wyników (brak przeskoku - przeskoku, rys. 21) roz-



Rys. 21. Schematyczna ilustracja procedury badań metodą góra-dół

tycznie przedstawiono na rysunku 21. Ogólnie można powiedzieć, że kolejną próbę wykonuje się na poziomie napięciowym uzależnionym od wyniku próby bezpośrednio ją poprzedzającej. I tak jeśli przeskok zaistniał napięcie zmniejszamy, jeśli nie zaistniał zwiększamy. Poczynając od pierwszej zmiany wyników (brak przeskoku - przeskoku, rys. 21) roz-



poczyna się zliczanie prób ważnych (uwzględnionych przy analizie wyników). Wymaganą liczbę prób n określa się zwykle jako większą lub równą 20. Następnie sumuje się wszystkie przeskoki $k = \sum k_i$ i braki przeskoków $q = \sum q_i$ i określa się liczbę N jako

$$N = \min(k, q). \quad (95)$$

Na podstawie wybranego N należy ponumerować stopnie napięciowe U_i przypisując indeks $i = 0$ najniższej wartości napięcia, przy której wystąpiło zdarzenie (przeskok k_i lub brak przeskoku q_i) odpowiadające wybranemu N (rys. 21). Napięcie o 50% prawdopodobieństwie zaistnienia przeskoku i odchylenie standardowe oblicza się z wzorów:

$$\hat{U}_{50} = U_0 + \Delta U \left(\frac{A}{N} - 0,5 \right), \quad (96)$$

$$\hat{\sigma} = 1,62 \Delta U \left(\frac{NB - A^2}{N^2} + 0,03 \right), \quad (97)$$

gdzie: ΔU - krok napięciowy oraz

$$A = \sum_{i=1}^m i \cdot l_i, \quad (98)$$

$$B = \sum_{i=0}^m i^2 l_i, \quad (99)$$

gdzie: m - liczba stopni napięciowych,

l_i - liczba zdarzeń (przeskoków k_i lub braku przeskoków q_i) odpowiadająca wybranemu N ; znak "+" lub "-" we wzorze (96) przyjmuje się w zależności od tego czy N odpowiada odpowiednio brakowi przeskoków czy przeskokowi.

Dwustronne przedziały ufności dla U_{50} i σ , dla poziomej ufności β określa się z zależności [3]:

$$\hat{U}_{50} - \frac{y_{1+\beta}}{2} \sigma_{U_{50}} \leq U_{50} \leq \hat{U}_{50} + \frac{y_{1+\beta}}{2} \sigma_{U_{50}}, \quad (100)$$

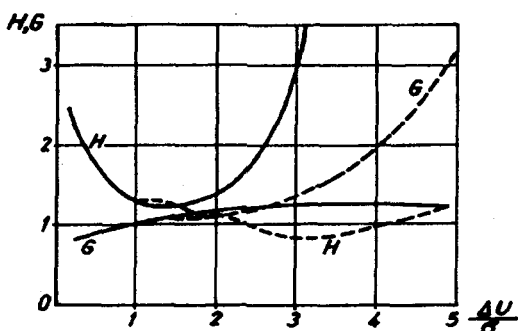
$$\hat{\sigma} - \frac{y_{1+\beta}}{2} \sigma_{\sigma} \leq \sigma \leq \hat{\sigma} + \frac{y_{1+\beta}}{2} \sigma_{\sigma}, \quad (101)$$



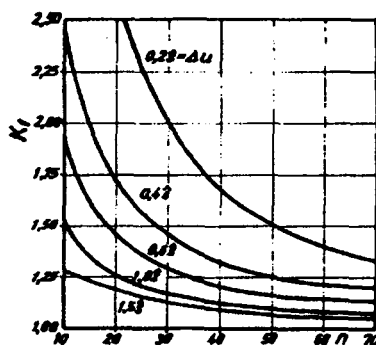
gdzie $\frac{y_{1+\beta}}{2}$ - kwantyl standaryzowanego rozkładu normalnego, oraz $\sigma_{U_{50}}$ i $\sigma_{\hat{\sigma}}$ odpowiednie odchylenia standardowe dla U_{50} i $\hat{\sigma}$ wg zależności [3]:

$$U_{50} = \frac{G(\frac{\Delta U}{\hat{\sigma}})}{\sqrt{N}}, \quad (102)$$

$$\sigma_{\hat{\sigma}} = \frac{H(\frac{\Delta U}{\hat{\sigma}})}{\sqrt{N}}. \quad (103)$$



Rys. 22. Wykresy funkcji $G(\frac{\Delta U}{\hat{\sigma}})$ i $H(\frac{\Delta U}{\hat{\sigma}})$ do wzorów (102) i (103) wg [3]



Rys. 23. Współczynnik korekcyjny k_1 do wzoru (104); wg [27]

Wykresy funkcji $G(\frac{\Delta U}{\hat{\sigma}})$ i $H(\frac{\Delta U}{\hat{\sigma}})$ podano na rysunku 22. Linia przerywana odnosi się do przypadku gdy U_{50} leży między stopniami napięciowymi, a linia ciągła gdy pokrywa się z którymś ze stopni. Korzystając z rysunku 22 nieznaną wartość $\hat{\sigma}$ należy zastąpić przez jej oszacowanie $\hat{S}$.

Szczegółowa analiza statystyczna wyników uzyskiwanych metodą górną prowadzi do określenia współczynników korekcyjnych [27] według których należy skorygować oszacowania uzyskane z wzorów (96), (97) i (100):

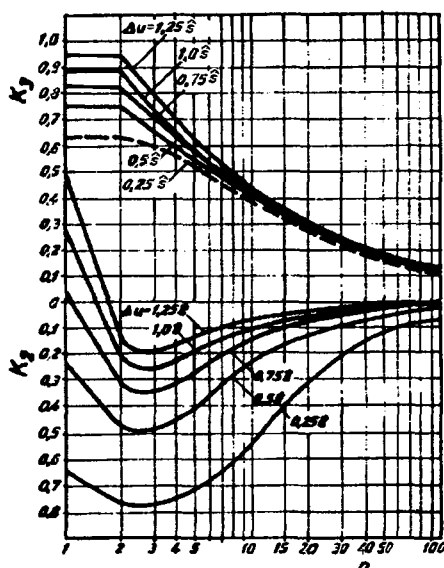
$$\hat{S}^* = k_1 \hat{S}, \quad (104)$$



$$\hat{U}_{50}^* = \hat{U}_{50} + \hat{S}^* K_2, \quad (105)$$

$$\hat{U}_{50}^* - \hat{S}^* y \frac{1+\beta}{2} K_3 \leq U_{50} \leq \hat{U}_{50}^* + \hat{S}^* y \frac{1+\beta}{2} K_3. \quad (106)$$

Współczynniki K_1 , K_2 i K_3 wykreślono na rysunku 23 i 24 w funkcji liczby n użytecznych pomiarów, przy różnych wartościach kroku napięciowego ΔU .

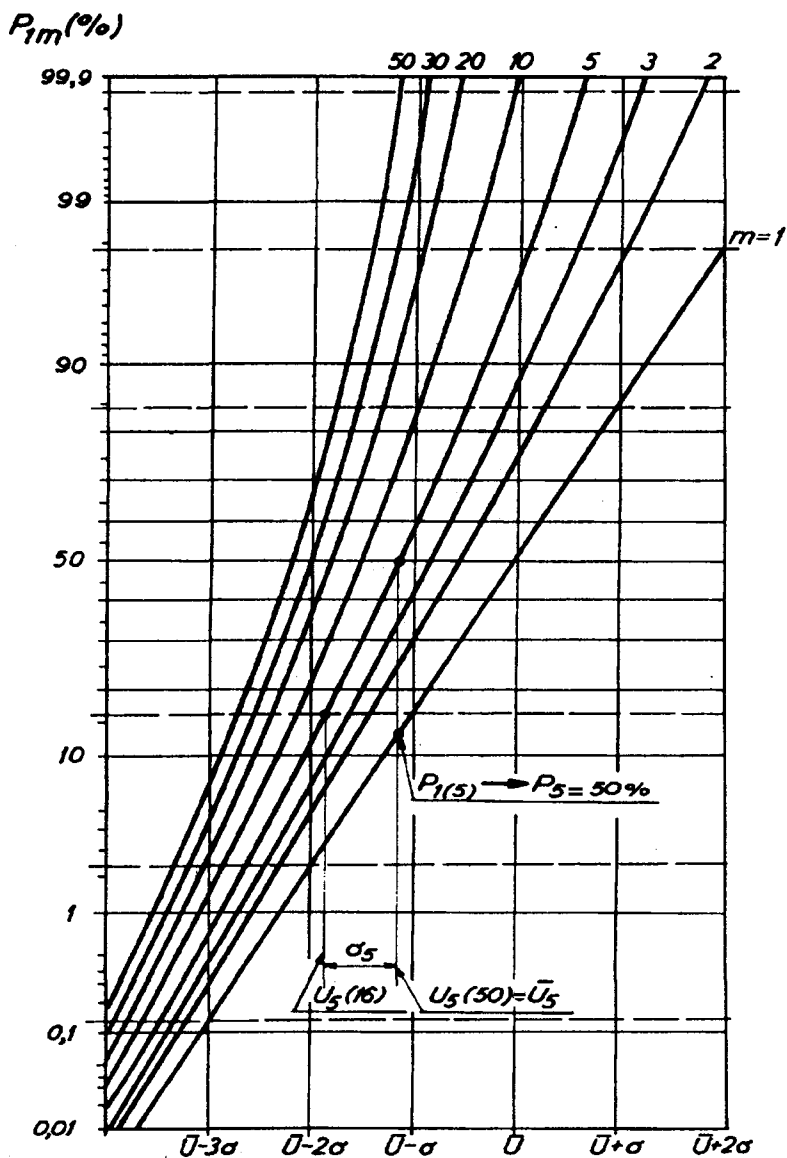


Rys. 24. Współczynniki korekcyjne K_2 i K_3 do wzorów (105) i (106); wg [27]

3.2.2.4. Rozszerzona metoda góra-dół

W praktyce zdarza się, że eksperymentatora nie interesuje pełna dystrybucja napięć przeskoku, lecz jedynie wartość napięcia o określonym, małym prawdopodobieństwie przeskoku. Przykładowo dla izolacji napowietrznej, liniowej, potrzebna jest (patrz pkt. 6.1) znajomość sta-





Rys. 25. Prawdopodobieństwo P_{1m} , że seria m uderów doprowadzi przynajmniej raz do przeskoku na obiekcie charakteryzowanym dystrybuantą napięć przeskoku P_1 przy $m = 1$; wg [13]



tystycznego napięcia wytrzymywanego, które charakteryzuje 90% pewności niezaisnienia przeskoku czyli 10% prawdopodobieństwa zaistnienia przeskoku. Do oszacowania takich wartości napięcia stosuje się tzw. rozszerzoną metodę góra-dół. Metoda ta opiera się na fakcie, że zwiększenie liczby udarów napięciowych na danym poziomie napięcia od 1 udaru do m udarów prowadzi do zwiększenia prawdopodobieństwa od P_1 do P_m gdzie P_m to prawdopodobieństwo, że przynajmniej jeden z m udarów prowadzi do przeskoku. Związek między P_1 i P_m dany jest prawem wzrostu

$$P_m(U) = 1 - [1 - P_1(U)]^m. \quad (107)$$

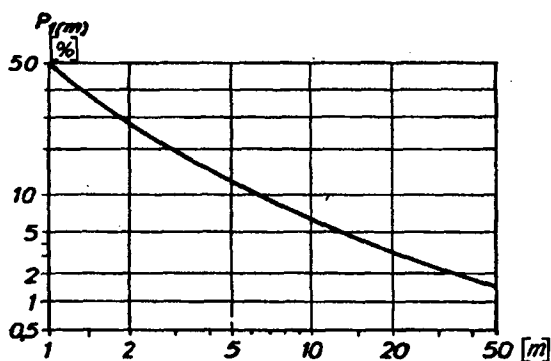
Właściwość tę ilustruje rysunek 25 dla m od 1 do 50. Jak widać z rysunku średnia wartość napięcia przeskoku (U_{m50}) przy $m > 1$ odpowiada odpowiednio mniejszym prawdopodobieństwom z wykresu $P_1(U)$. Ilustruje to rysunek 26. Przykładowo przy $m = 7$, $P_1 \approx 10\%$, przy $m = 34$,

T a b e l a 18

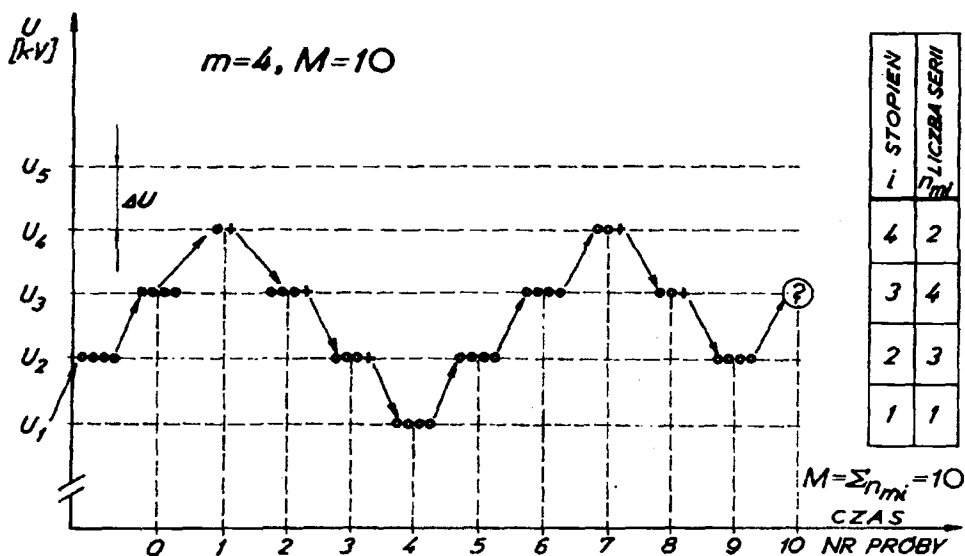
Zestawienie parametrów statystycznych dotyczących badań rozszerzoną metodą "góra-dół" [49]

m	$P_1(U_m; 50\%)$	σ_m/σ_1	y_m
1	0,500	1,00	0
2	0,293	0,85	-0,545
3	0,201	0,76	-0,840
4	0,159	0,71	-1,000
5	0,129	0,67	-1,130
7	0,094	0,62	-1,316
10	0,067	0,58	-1,500
13	0,052	0,55	-1,626
20	0,034	0,52	-1,825
34	0,020	0,48	-2,054
50	0,014	0,47	-2,200





Rys. 26. Zależność $P_1(m)$ dla 50% prawdopodobieństwa uzyskania przynajmniej jednego przeskoku na m aplikowanych uderów;
wg [13]



Rys. 27. Schematyczna ilustracja procedury badań rozszerzoną metodą góra-dół



$P_1 = 2\%$ itd. Zależność tę zestawia również tabela 18 gdzie dodatkowo podano iloraz odchyłeń standardowych σ_m/σ_1 i kwantyl standaryzowanego rozkładu normalnego y_m^* .

Na podstawie powyższych zależności opracowano procedurę rozszerzonej metody góra-dół, pozwalającej określić wartość U_{m50} będącą jednocześnie oszacowaniem kwantyla U_{1p} o niskim prawdopodobieństwie p . Przykładowy schemat procedury badań rozszerzoną metodą góra-dół obrazuje rysunek 27.

Napięcie U_{m50} odpowiadające założonemu prawdopodobieństwu P_1 według tabeli 18 lub rysunku 26 wyznacza się z zależności

$$\hat{U}_{m50} = \frac{\sum_{i=1}^k n_{mi} U_i}{\sum_{i=1}^k n_{mi}}, \quad (108)$$

gdzie n_{mi} - liczba serii ударов przyłożonych na poziomie napięcia U_i (rys. 27).

Ogólnie rzecz biorąc rozszerzona metoda góra-dół nie może być stosowana do określenia odchylenia standardowego σ_m . Jednakże stosując tę metodę dwukrotnie przy różnych m ($m_1 \neq m_2$) można oszacować odchylenie standardowe dla metody góra-dół w wersji podstawowej ($m = 1$)

$$\hat{S}_1 = \frac{U_{m_1 50} - U_{m_2 50}}{y_{m_1} - y_{m_2}}, \quad (109)$$

gdzie $m_1 < m_2$ oraz y_m - kwantyl standaryzowanego rozkładu normalnego odczytany dla danego m z tabeli 18.

Znając $\hat{S}_1$ jako oszacowanie σ_1 można, korzystając z tablicy 18 oszacować $\hat{S}_m$ jako

$$\hat{S}_m = \hat{S}_1 \frac{\sigma_m}{\sigma_1}. \quad (110)$$

Znajomość $\hat{S}_1$ pozwala również określić dwustronny przedział ufności dla U_{m50} z zależności

$$\hat{U}_{m50} - \epsilon_u \hat{S}_1 \leq U_{m50} \leq \hat{U}_{m50} + \epsilon_u \hat{S}_1, \quad (111)$$

*Ostatni wiersz tabeli wynika z czysto teoretycznych obliczeń. Zastosowanie rozszerzonej metody góra-dół do szacowania napięć o prawdopodobieństwach poniżej 2% może być obarczone dużym błędem wynikającym z niepoprawności zastosowania rozkładu Gaussa.



gdzie ε_u dane jest w tabeli 19 w zależności od średniej liczby zrealizowanych uderzeń $\bar{N}$ i liczby uderzeń na stopień m . Średnią liczbę zrealizowanych uderzeń określa się z zależności

$$\bar{N} = [\bar{M} - 0,25(\bar{M} - 1)]m, \quad (112)$$

gdzie $\bar{M}$ - średnia liczba stosowanych serii obliczona jako suma serii użytecznych M (rys. 27) plus połowa nieużytecznych serii wstępnych.

T a b e l a 19

Wartości względnej miary ε_u przedziałów ufności wg [39]

$\begin{matrix} \backslash \\ m \end{matrix} \bar{N}$	20	30	40	50	100	200
1	0,70	0,55	0,46	0,41	0,27	0,20
4	0,82	0,65	0,56	0,49	0,35	0,25
7	0,88	0,70	0,61	0,55	0,39	0,28
13		0,93	0,77	0,69	0,50	0,34
34					0,67	0,48

Podstawowe problemy, które należy rozstrzygnąć przystępując do badań rozszerzoną metodą góra-dół są następujące:

- wybór napięcia startu, od którego rozpoczyna się próby,
- wybór kroku napięciowego ΔU ,
- wybór liczby serii pomiarowych M , na której badania można zakończyć.

Obszerne obliczenia statystyczne [13] z których wynika, że dokładność uzyskiwanych wyników zależy od wyboru powyższych wielkości, pozwoliły ustalić następujące wnioski:

- 1) napięcie startu winno być jak najbliższe poszukiwanej wartości U_{m50} ,
- 2) krok napięciowy ΔU winien być jak najbliższy odchyleniu standardowemu σ_m ,
- 3) przy liczbie serii pomiarowych $M > 30$ wpływ wyboru napięcia startu i kroku napięciowego jest pomijalnie mały,
- 4) podstawowym dla dokładności uzyskiwanych wyników jest wybór liczby użytych uderzeń N ; dla $N > 100$ rozszerzona metoda góra-dół po-



zwala szacować napięcia odpowiadające prawdopodobieństwu $P_1 \geq 2\%$, a wpływ średniej liczby realizowanych udarów $\bar{N}$ na dokładność oszacowań można prześledzić w tabeli 19,

5) wymaganą liczbę serii użytecznych oblicza się na podstawie obranej liczby udarów z wzoru

$$M = \frac{4}{3} \left(\frac{N}{m} - 1/4 \right), \quad (113)$$

6) do obliczeń uwzględnia się również serię probierczą, którą należałoby wykonać po serii, na której zakończono badania; wiadomo bowiem na jakim poziomie napięcia seria ta byłaby wykonywana.

Stosując metodę góra-dół w ogóle, a metodę rozszerzoną w szczególności, należy dodatkowo pamiętać, że:

1) wszystkie uwagi dotyczące tej metody zostały wypracowane przy założeniu, że obserwowana zmienna podlega rozkładowi normalnemu; tak więc gdy istnieją przesłanki, że rozkład nawet w przybliżeniu nie jest normalny nie należy jej stosować,

2) stosowanie rozszerzonej metody góra-dół do poszukiwania napięć przeskoku o prawdopodobieństwach mniejszych niż 2% nie może być zaakceptowane, gdyż dla prawdopodobieństw niższych założenie słuszności rozkładu normalnego jest problematyczne,

3) wybór kroku napięciowego ΔU może być oparty o wartości σ_m/σ_1 dane w tablicy 18; jest to szczególnie istotne dla izolacji powietrznej, dla której wartości σ_1 są dobrze ugruntowane eksperymentalnie (np. dla udarów piorunowych przyjmuje się współczynnik zmienności $S_1 = 3\%$).

3.2.3. Metody badań izolacji nieregenerującej się

3.2.3.1. Rozważania ogólne

W przypadku izolacji nieregenerującej się, gdzie przy każdym pomiarze napięcia przebicia próbka dielektryku czy model układu izolacyjnego ulega zniszczeniu, pracochłonna metoda serii nie może być stosowana ze względów ekonomicznych. Również metoda góra-dół nie znajduje zastosowania, jako że zachodzi konieczność szacowania napięć o prawdopodobieństwach poniżej 2%. Jedyną zatem metodą, która służy do szacowania pełnej dystrybuanty napięć przebicia jest metoda schodkowa (Tetznera), przy czym zachodzą tu trzy możliwości:



1) rozrzut napięć przebicia wynika tylko z nieidentyczności poszczególnych modeli; identyczne modele z rozpatrywanej populacji przebijają przy jednym i tym samym minimalnym napięciu,

2) rozrzut wynika tylko ze statystycznej natury mechanizmu przebicia przy danym kształcie napięcia; wszystkie modele są idealnie takie same,

3) rozrzut wynika zarówno z nieidentyczności modeli jak i z natury przebicia.

Większość rzeczywistych układów izolacyjnych należy do grupy 3. Tym niemniej w zależności od tego, który z rozrzutów dominuje, można układy izolacyjne klasyfikować w grupie 1 lub 2. Izolacja regenerująca się, powietrzna, należy do grupy 2. Do grupy 2 można również zaliczyć układy z izolacją ciekłą np. olejową jak i z izolacją gazową w przestrzeniach zamkniętych. Zastosowanie metody Tetznera podlega wówczas regułom opisanym w pkt. 3.2.2.2.

Oddzielnie należy rozważyć układy izolacyjne grupy 1 o dominacji tzw. rozrzutu technologicznego. Są to układy izolacji nieregenerującej się z dielektrykami stałymi np. izolacja papierowo-olejowa.

Teoretycznej analizy tego przypadku dokonano w [75]. Jako punkt wyjścia przyjęto metodę serii, w której wynik nie zależy od kroku napięciowego i z której uzyskuje się bezpośrednio poszukiwany rozkład napięć przebicia.

Jeśli każdy model przebija przy pewnym określonym minimalnym napięciu to przy próbach metodą serii na i -tym stopniu napięciowym będzie przeбитych N_{pi} z M badanych modeli

$$N_{pi} = \frac{M}{m} P(U \leq U_i), \quad (114)$$

gdzie: m - liczba grup modeli równa liczbie stopni napięciowych (liczbie serii pomiarowych),

$P(U \leq U_i)$ - prawdopodobieństwo określające część modeli z całkowitej, bardzo licznej populacji M , których napięcie przebicia jest mniejsze lub równe U_i .

Liczba nieprzeбитych na i -tym stopniu napięciowym modeli wyniesie

$$N_{hi} = \frac{M}{m} [1 - P(U \leq U_i)]. \quad (115)$$



Po próbach na wszystkich stopniach napięciowych ogólne liczby przebitych i nieprzebitych modeli wyniosą odpowiednio:

$$N_{p\Sigma} = \frac{M}{m} \sum_{i=1}^m P(U \leq U_i), \quad (116)$$

$$N_{n\Sigma} = \frac{M}{m} \sum_{i=1}^m [1 - P(U \leq U_i)]. \quad (117)$$

Przy symetrycznym rozkładzie napięć przebicia modeli (np. rozkład normalny lub pseudosymetryczne przypadki rozkładu Weibulla) można, a nawet należy, wybrać stopnie napięciowe tak aby

$$P\left(U \leq \frac{U_{m+1}}{2}\right) = 0,5 \quad (118)$$

czyli symetrycznie wokół wartości modalnej; wówczas

$$P(U \leq U_i) = 1 - P(U \leq U_{m+1-i}), \quad (119)$$

a zatem

$$N_{p\Sigma} \cong N_{n\Sigma} = \frac{M}{2}, \quad (120)$$

wynikiem stosowania metody serii jest fakt, że mniej więcej połowa modeli zostanie przebita a połowa nie.

Zwiększenie liczby udarów działających na dany model na każdym stopniu napięciowym, nie powinno prowadzić do wzrostu liczby przebitych modeli, przy przyjętym założeniu, że kolejne oddziaływania napięcia się nie kumulują, a identyczne modele przebijają przy dokładnie określonym napięciu.

Podobne rozumowanie, dla tego samego typu modeli, przeprowadzono dla metody prób wg Tetznera. Biorąc pod uwagę tę samą liczbę modeli M i tę samą liczbę m stopni napięciowych, każdy model będzie badany do przebicia przy zwiększaniu po każdym doprowadzeniu napięcia jego wartości szczytowej. Teraz liczba przebitych modeli na i -tym stopniu wynosi

$$N_{pi} = M[P(U \leq U_i) - P(U \leq U_{i-1})], \quad (121)$$



co wynika z faktu, że modele z wytrzymałością równą lub mniejszą niż U_{i-1} były przebite wcześniej na poprzednich stopniach. Ogólna liczba przebitych modeli wyniesie

$$N_{p\Sigma} = \sum_{i=1}^m N_{pi} = MP(U \leq U_m) \approx M. \quad (122)$$

gdyż napięcia probiercze dobiera się tak aby na najwyższym stopniu napięciowym zostały przebite prawie wszystkie modele.

Należy teraz rozpatrzyć zgodność między rozkładami napięć przebicia uzyskanymi z obydwu metod. Dla metody serii uzyskano dla liczby modeli przebitych na każdym stopniu napięciowym rozkład sumaryczny, czyli odpowiednik dystrybuanty. Dla metody schodkowej liczba przebitych modeli na każdym stopniu (121) jest składową rozkładu różniczkowego, a więc odpowiednikiem funkcji gęstości. Należy więc rozkład ten sprowadzić do postaci odpowiadającej dystrybuancie.

Rzędna rozkładu całkowego w metodzie schodkowej przy napięciu U_i jest określona wyrażeniem

$$\sum_{i=1}^i N_{pi} = MP(U \leq U_i). \quad (123)$$

Jak widać jest to ten sam kształt rozkładu jak przy metodzie serii (114), jednakże rzędne rozkładu (123) są m -krotnie większe. Oznacza to, że dokładność szacowania poszukiwanego rozkładu napięć przebicia jest znacznie wyższa w przypadku metody schodkowej.

Inaczej mówiąc, stosując metodę schodkową do badań izolacji, dla której dominującą formą rozrzutu jest rozrzut wynikający z właściwości materiałowych, a nie z mechanizmu przebicia, uzyskuje się bezpośrednio poszukiwane oszacowanie dystrybuanty napięć przebicia bez konieczności dokonywania przeliczeń. Dla izolacji stałej np. papierowej i papierowo-olejowej zostało to potwierdzone eksperymentalnie [53, 71].

Jak wynika z wzorów (114) i (123) liczność próbki badanych modeli może być w metodzie schodkowej m -krotnie (czyli 5÷8-krotnie) mniejsza niż w metodzie serii. Czyli, że przy 20 modelach w grupie w metodzie serii zbliżoną dokładność w metodzie schodkowej uzyskuje się przy zbadaniu jedynie 20 modeli w ogóle.



3.2.3.2. Uproszczona metoda α - β

W przypadku badań izolacji nieregenerującej się, czasem nawet tak ograniczony zakres badań, jaki oferuje metoda Tetznera, jest nie do zastosowania. Koszt modeli izolacji może być przyczyną ograniczenia zakresu prób do zbadania napięć przebicia jedynie kilku modeli chociaż celem badań nadal jest oszacowanie napięcia o bardzo niskim prawdopodobieństwie zaistnienia przebicia.

W takich przypadkach można zastosować tzw. metodę α - β pozwalającą ocenić napięcie U_w nazywane umownie napięciem wytrzymywanym, bez konieczności obliczeń statystycznych ale bez możliwości dokładnej oceny prawdopodobieństwa przebicia. Poprzestaje się wówczas na stwierdzeniu, że U_w charakteryzuje się małym np. mniejszym niż 0,1% prawdopodobieństwem zaistnienia przebicia.

T a b e l a 20

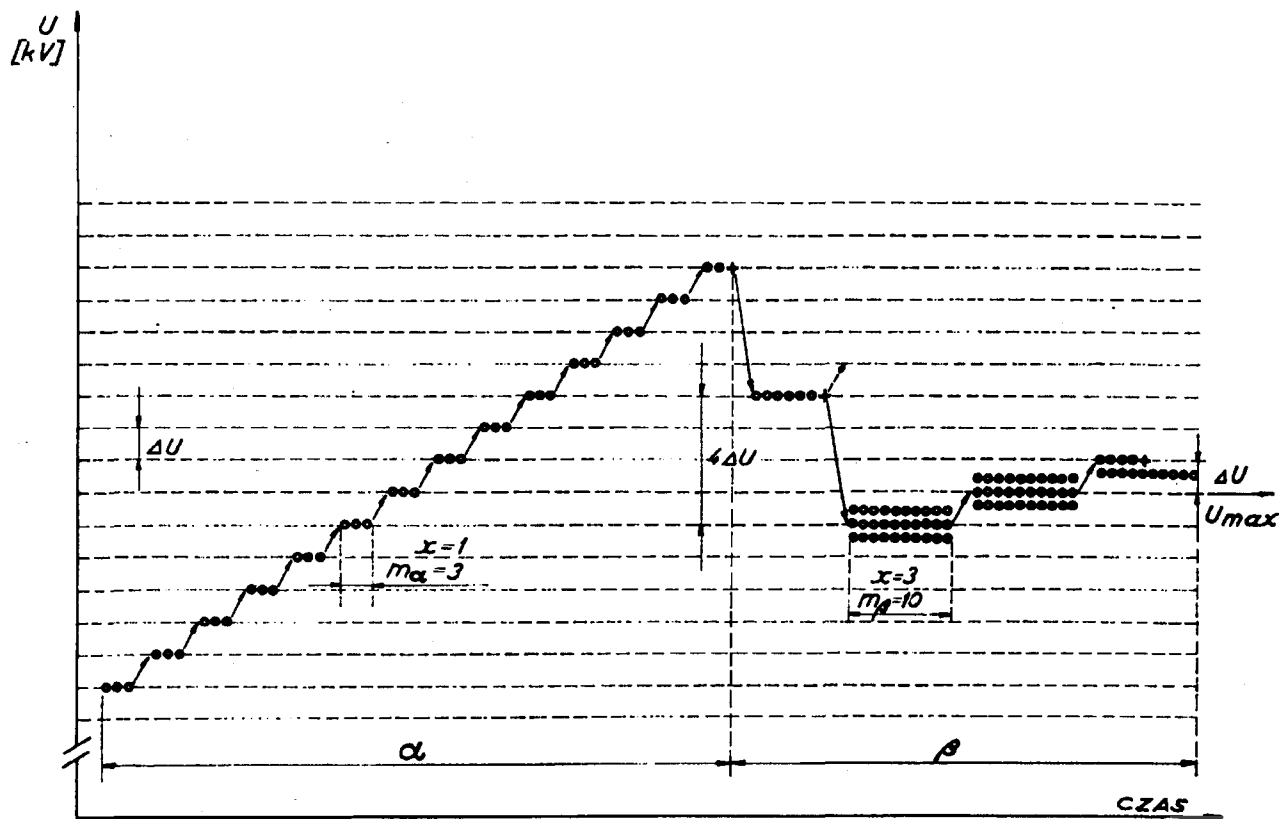
Zestawienie wariantów metody α - β

Lp.	Autor	Próba α		Próba β		
		m_α	ΔU_f	m_β	ΔU_f	ΔU_f
1	Hylten-Cavallius [29]	5	3-5%	5	3-5%	-
2	Bakken [8]	1	10%	20	1-4%	-
3	Fryxell [21]	3	4%	25	8%	-
4	Mosiński [54]	3	4-5%	3 x 10	16-20%	4-5%

Metoda α - β w swych pierwotnych odmianach [8, 22, 29] była opracowana do potrzeb badania izolacji powietrznej, gdzie obecnie została całkowicie wyparta przez rozszerzoną metodę góra-dół.

Idea metody α - β polega na rozdzieleniu procedury badań na dwie części: α i β . Próba α , z małą liczbą ударów na stopniu napięciowym m_α , ma na celu wstępne poszukiwanie zakresu napięć, w którym prawdopodobieństwo zaistnienia przebicia (lub przeskoku) jest większe od zera a mniejsze od jedności. Próba β , z dużą liczbą ударów na stopień napięciowy m_β , ma na celu poszukiwanie wartości U_w . Parametry procedury α - β proponowanej przed 20 laty dla potrzeb badania izolacji powietrznej zestawiono w trzech pierwszych wierszach tabeli 20. Jako napięcie U_w





Rys. 28. Schematyczna ilustracja procedury badań izolacji nieregenerującej się, metodą $\alpha - \beta$



traktowano maksymalne napięcie, przy którym w próbie β żaden z m_β udarów nie doprowadził do przeskoku. Szerzej metody te omówiono w [27].

W oparciu o wersję Fryxella [22] zaproponowano odmianę metody α - β [54] do badań izolacji nieregenerującej się, papierowo-olejowej. Parametry metody zestawiono w czwartym wierszu tabeli 20, a przykładowy schemat badań - na rysunku 28. Jako napięcie U_w przyjmuje się wartość napięcia niższą o dwa stopnie napięciowe ΔU stosowane w próbie α od maksymalnego napięcia ($U_{\max}$ rys. 28), przy którym w próbie β nie zostały przebite trzy modele izolacji, z których każdy badany był 10 udarami.

Zaproponowana i zweryfikowana eksperymentalnie [55] wersja metody α - β różni się od metody Fryxella [22] tym, że w próbie β badane są na danym stopniu napięciowym trzy modele izolacji, każdy dziesięcioma udarami. Modele te mogą być badane kolejno lub jednocześnie (w połączeniu równoległym) jeśli zastosuje się środki pozwalające na odróżnienie, który z modeli został przeбит. Optymalny krok napięciowy ΔU , przy którym błędy oszacowań U_w są najmniejsze [55] winien być obrany jako w przybliżeniu równy $0,5\theta$ gdzie θ jest odchyleniem standardowym dystrybucyjności napięć przebicia uzyskanej metodą schodkową z jednym udarem na stopień napięciowy. Uzyskiwane wartości U_w są wówczas charakteryzowane prawdopodobieństwem rzędu 0,1% lub mniejszym.

W przypadku zastosowania metody α - β do prób z napięciem przemienym np. dla określenia wytrzymałości jednonominutowej, należy w próbie α utrzymywać napięcie w czasie 1 min na każdym stopniu napięciowym, a w próbie β każdy z 3 modeli winien być poddawany działaniu napięcia w czasie 10 min na każdym stopniu. Napięcie U_w jest określone jako najwyższe napięcie, przy którym w próbie β każdy z trzech modeli wytrzymał 10-minutowe doprowadzenie napięcia.

Stosowanie metody α - β w podanej wersji, wymaga zbadania przeciętnie 7 modeli (rys. 28-9 modeli), przy czym nie wszystkie zostają zniszczone i mogą być wykorzystane do innych badań.

Podana tutaj wersja metody α - β została opracowana i sprawdzona do badań izolacji papierowo-olejowej. W przypadku zastosowania tej lub innej wersji metod α - β do badań innych typów izolacji winno być poprzedzone odpowiednią analizą statystyczną i weryfikacją eksperymentalną.



3.2.4. Komentarze na temat badań wytrzymałości krótkotrwałej

3.2.4.1. Rozrzut technologiczny i elektryczny

Uzyskiwany podczas badań rozrzut napięć przebicia zależy od właściwości badanej izolacji oraz od mechanizmu jej przebicia. Właściwości izolacji zależą od jednorodności jej struktury i składu materiałowego, od stałości wymiarów czyli ogólnie od stałości technologii produkcji. Wariancję napięć przebicia zależną od właściwości izolacji i od technologii jej wykonania można więc nazwać wariancją technologiczną σ_t^2 . Natomiast wariancję zależną od mechanizmu przebicia można nazwać wariancją elektryczną σ_e^2 [44]. Podczas szacowania dystrybuanty napięć przebicia w oparciu o wyniki badań określa się jednak tylko wypadkową wariancję σ^2 .

Zakładając, że obie wariancje składowe są od siebie niezależne można zapisać iż

$$\sigma^2 = \sigma_t^2 + \sigma_e^2. \quad (124)$$

Założenie to można uznać za słuszne wówczas gdy nieuniknione różnice materiałowe i technologiczne między kolejnymi "identycznymi" modelami tego samego układu izolacyjnego nie zmieniają mechanizmu przebicia.

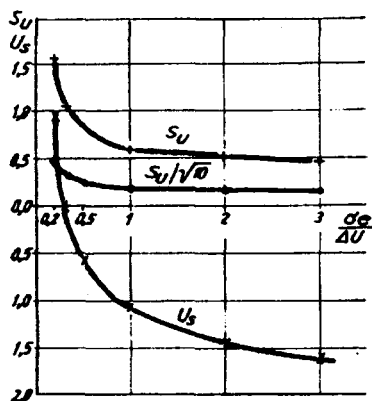
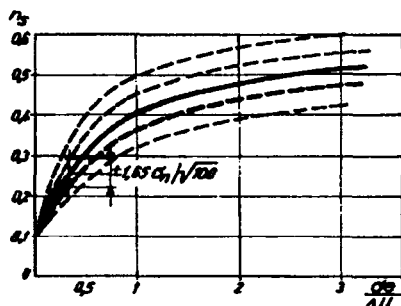
Przy powyższym założeniu i przy stosowaniu metody schodkowej (Tetznera) (pkt. 3.2.2.2) ze znacznie większą od 1 liczbą udarów na stopień napięciowy lub z wydłużonym czasem utrzymywania napięcia na stopniu napięciowym w próbach napięciem przemiennym, możliwe jest rozdzielenie obu wariancji składowych [44, 59].

Rozdzielenie obu wariancji jest oparte na rozumowaniu, że w przypadku gdy $\sigma_e = 0$, przy próbach np. z 10 udarami na stopniu napięciowym, przebicie powinno wystąpić zawsze przy pierwszym udarze na poziomie napięcia wyższym od wytrzymałości wynikającej z materiałowych i technologicznych właściwości izolacji. Jeśli tak nie jest, znaczy to, że $\sigma_e > 0$. Średnią liczbę udarów do przebicia N_s (na poziomach napięcia, na których uzyskano przebicie) uzyskaną podczas badań serii M modeli można uznać za miarę elektrycznego rozrzutu napięć przebicia [44].



Podobnie wydłużając utrzymywanie napięcia od Δt do t_{Δ} przy próbach napięciem przemiennym oraz mierząc średni czas do przebicia t_{sr} na stopniach napięciowych, na których wystąpiły przebicia można za miarę rozrzutu elektrycznego uznać iloraz $n_s = t_{sr}/t_{\Delta}$ [59].

Rys. 29. Zmienność średniej liczby uderzeń N_s lub względnego średniego czasu n_s , do przebicia przy 10-krotnym wzroście liczby uderzeń lub wydłużeniu czasu przy napięciu przemiennym; na rysunku dodatkowo zaznaczono 60% granice obszarów ufności dla prób z 10 modelami ($\sigma_n/\sqrt{10}$) i 90% granice obszarów ufności dla prób ze 100 modelami ($1,65 \sigma_n/\sqrt{100}$): wg [44]



Rys. 30. Zmniejszenie średniej wartości napięcia przebicia U_s przy 10-krotnym wzroście liczby uderzeń lub wydłużeniu czasu przy napięciu przemiennym oraz odchylenie standardowe tego malenia napięcia, w funkcji $\sigma_e/\Delta U$, wg [44]

Na rysunku 29 wykreślono za [44] zależność N_s od $\sigma_e/\Delta U$ dla prób z 10 uderzeniami na stopień napięciowy. Z rysunku tego, znając średnią liczbę uderzeń do przebicia N_s lub względny średni czas do przebicia n_s , można oszacować wartość σ_e , przy danym kroku napięciowym ΔU .

Ponieważ zwiększenie liczby uderzeń na stopień napięciowy lub wydłużenie czasu utrzymywania napięcia przemiennego, prowadzą do malenia napięcia przebicia, fakt ten należy uwzględnić przy rozdzielaniu rozrzutów. Dla 10 uderzeń lub 10-krotnego wydłużenia czasu utrzymywania na-



pięcia przemiennego na rysunku 30 podano odpowiednie zależności dla średnich napięć przebiccia U_s i odchylenia standardowego zmniejszania się napięcia przebiccia S_u [44].

Uwzględniając to, ostateczna wariancja napięć przebiccia uzyskana z prób wykonanych metodą schodkową z 10 impulsami napięciowymi na stopniu napięciowym ma postać

$$\sigma^2 = \sigma_t^2 + (S_u \sigma_e)^2. \quad (125)$$

Znając oszacowanie σ^2 oraz σ_e i S_u uzyskane z rysunku 29 i 30, można określić σ_t^2 , czyli rozrzut technologiczny.

Określenie σ_t pozwala ocenić technologię wykonania układu izolacyjnego oraz uzasadnić różnice w wynikach uzyskiwanych w różnych laboratoriach.

3.2.4.2. Przeciętne wartości współczynników zmienności

Przystępując do badań wytrzymałości elektrycznej korzystnie jest znać, przynajmniej w przybliżeniu, z jakiej wielkości rozrzutami wyników będzie się mieć do czynienia. Względną miarą rozrzutów jest tzw. współczynnik zmienności określony ilorazem odchylenia standardowego i wartości oczekiwanej a szacowany jako

$$S_{\%} = \frac{S}{\bar{U}} \cdot 100\%, \quad (126)$$

gdzie: S - odchylenie standardowe,

$\bar{U}$ - wartość średnia.

Przyjmuje się, że przeciętne wartości współczynników zmienności przy napięciach udarowych są następujące:

- izolacja powietrzna:
 - udar piorunowy 3%,
 - udar łączeniowy 6%,
- izolacja papierowa, impregnowana, udar piorunowy [51] 6,5%,
- izolacja papierowa kablowa, udar piorunowy [51] 12%,
- preszpan, udar piorunowy [51]
 - przebiccie 5,5%,
 - wyładowanie powierzchniowe 12%,
- olej, udar piorunowy [51] 13%,
- izolacja papierowo-olejowa, udar piorunowy [51] 11%.



Należy jednak pamiętać, że są to dane orientacyjne. Rozrzuty zależą w dużej mierze od technologii wykonania układu izolacyjnego.

Przy napięciach przemiennych współczynniki zmienności są przeciętnie o połowę mniejsze.

3.2.4.3. Dobór kroku napięciowego

Analiza statystyczna potwierdzona wynikami eksperymentów pozwala określić orientacyjne wartości kroku napięciowego dla prób krótkotrwałych:

dla napięć [kV]	ΔU [kV]	ΔU [%]
≥ 200	5	$> 2,5$
200÷400	10	5÷2,5
400÷800	20	
800÷1600	40	
1600÷3200	80	

Należy jednak pamiętać, że krok napięciowy należy wybierać pod kątem metody badań i właściwości badanej izolacji, zatem może się różnić od podanych tu wartości orientacyjnych.

3.2.4.4. Wybór metody badań przy małej liczbie modeli

Przy szacowaniu dystrybucyjności napięć przebicia (lub przeskoku czy progu wyładowań niezupełnych) dokładność oszacowań odchylenia standardowego jest, jak to wynika z rysunku 11 i 12, przy danej liczności próby, o wiele mniejsza niż dokładność oszacowania wartości oczekiwanej. W większości przypadków badania wykonuje się w funkcji jakiegoś parametru np. wielkości odstępów izolacyjnych. Liczba prób przy określonej wartości parametru musi być wówczas z konieczności mała np. mniejsza od 10. W takich przypadkach szacowanie odchylenia standardowego lub szacowanie wszystkich parametrów rozkładu statystycznego innego niż normalny może być obciążone dużym błędem.

Możliwe są wówczas dwie drogi postępowania:

- zastosowanie metody góra-dół lub α - β i poszukiwanie liniowej korelacji między U_w a badanym parametrem; uzyskana prosta regresji pozwala wówczas uśrednić uzyskane wartości U_w zmniejszając wagę błędów poszczególnych oszacowań,



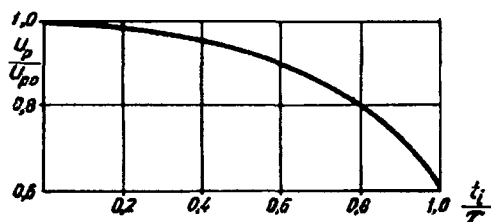
- oszacowanie korelacji między odchyleniem standardowym uzyskanym metodą schodkową a badanym parametrem; jeśli korelacja taka istnieje, należy ją wykorzystać dla skorygowania wartości σ dla poszczególnych wartości rozważanego parametru, jeśli nie - na ogół lepiej jest posługiwać się wartościami σ zapożyczonymi z innych dokładniejszych badań układów izolacyjnych o podobnej strukturze.

Ponieważ w obydwu przypadkach cel jest ten sam czyli określenie zależności napięć o bliskim zeru prawdopodobieństwie wyładowania od rozważanego parametru, w funkcji którego wykonuje się badanie, korzystniejsze jest stosowanie metody góra-dół lub α - β , gdyż przy małych licznosciach prób losowe rozrzuty U_w są mniejsze niż rozrzuty σ .

3.3. Wytrzymałość długotrwała

3.3.1. Próby starzeniowe, czas życia izolacji

Badanie krzywej życia, czyli zależności wytrzymałości elektrycznej od czasu oddziaływania narażeń napięciowych lub czasu do uszkodzenia przy różnej wartości naprężeń pola elektrycznego jest obok badania



Rys. 31. Zmiana wytrzymałości krótkotrwałej układu izolacyjnego po wstępnym naprężeniu napięciem U_i w czasie t_i :
 z' - czas życia izolacji, U_{po} - napięcie przebicia bez naprężeń wstępnych;
 wg [76]

mechanizmów degradacji dielektryków, jedną z metod oceny odporności układu izolacyjnego na długotrwałe narażenia robocze. Problem dotyczy oczywiście tylko izolacji nieregenerującej się, w tym głównie dielektryków stałych. Jako kryterium utraty właściwości dielektrycznych przyjmuje się wytrzymałość przemienną krótkotrwałą. Na rysunku 31 pokazano



jak może się zmieniać wytrzymałość krotkotrwała jeśli układ izolacyjny będzie wstępnie naprężany napięciem U_1 w czasie t_1 .

Zwykle przyjmuje się, że prawdopodobieństwo uszkodzenia układu izolacyjnego zależne od napięcia i czasu, podlega rozkładowi Weibulla o postaci

$$F(E, t) = 1 - \exp\{-CE^\alpha \cdot t \cdot t^{\beta-1}\}, \quad (127)$$

gdzie: C - stała,
 E - naprężenia elektryczne,
 t - czas,

α, β - parametry kształtu w funkcji odpowiednio naprężeń i czasu.

Parametr kształtu rozkładu prawdopodobieństwa (127) w funkcji czasu β pozwala klasyfikować naturę uszkodzeń czyli przebiega lub wyładowania niezupełnego w izolacji:

dla $\beta > 1$ uszkodzenie jest wynikiem starzenia,

dla $\beta = 1$ uszkodzenie ma charakter czysto losowy,

dla $\beta < 1$ występuje kondycjonowanie czyli zjawisko usuwania słabych punktów inicjujących wyładowanie.

Występowanie we wzorze (127) t w pierwszej potęgze oraz $t^{\beta-1}$ ma na celu zwrócenie uwagi, że prawdopodobieństwo zaistnienia wyładowania zależy od czasu także wówczas, gdy mamy do czynienia z pełną losowością zjawiska ($\beta = 1$) [12].

Wzór (127) sugeruje, że najprostszą metodą określania wytrzymałości elektrycznej w funkcji czasu oddziaływania naprężeń elektrycznych jest metoda ze stałą wartością naprężeń.

W metodzie tej przy danym naprężeniu E_1 wyznacza się eksperymentalnie szereg czasów do uszkodzenia izolacji $t_1, \dots, t_k, \dots, t_n$ i określa prawdopodobieństwo z próby

$$p_k = \hat{F}(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{n + 1}, \quad (128)$$

gdzie: $1 \leq k \leq n$, x_i - liczba obserwowanych czasów do wyładowania aż do czasu t_i włącznie,

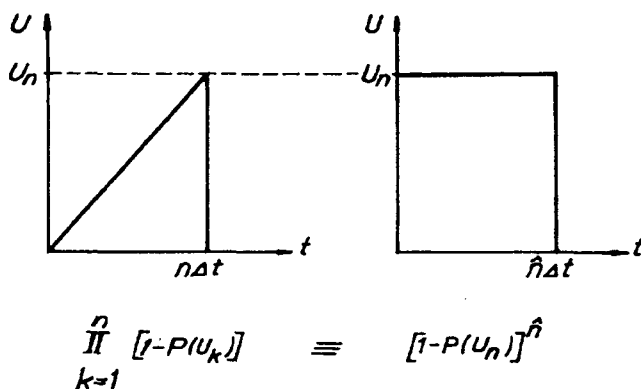
n - całkowita liczba zaobserwowanych czasów do wyładowania.

Punkty eksperymentalne (t_k, p_k) pozwalają oszacować poszukiwaną dystrybucję $P(t)_{E=\text{const}}$. Określenie kilku, kilkunastu zależności $P(t)$



przy różnych E pozwala metodami regresji określić zależność $E = f(t)_{P=\text{const}}$ zwaną krzywą życia izolacji.

Metoda prób ze stałą wartością napięcia nie budzi z teoretycznego punktu widzenia żadnych zastrzeżeń jest jednak czasem uznawana za zbyt kosztowną i czasochłonną. Czasem więc, dla skrócenia prób wykonuje się badania z napięciem rosnącym w sposób ciągły lub z napięciem rosnącym schodkowo. Zastosowanie tego typu badań opiera się na statystycznej ekwiwalentności próby ze stałą wartością napięcia i próby z napięciem rosnącym. Ilustruje to rysunek 32.



Rys. 32. Ekwiwalentność prób ze stałą wartością napięcia i z napięciem rosnącym w sposób ciągły [12]

Ekwiwalentność obydwu typów prób oparta jest na następującym rozumowaniu: jeśli w próbie z rosnącym napięciem czas do uszkodzenia podzielić na przedziały Δt to w każdym z przedziałów prawdopodobieństwo uszkodzenia jest inne $P(U_k)$ a sumaryczne prawdopodobieństwo przy ciągłym wzroście napięcia wynosi

$$P_n(U)_{ro} = 1 - \prod_{k=1}^n [1 - P(U_k)], \quad (129)$$

lub przy schodkowym wzroście napięcia

$$P_n(U)_{rs} = 1 - \prod_{k=1}^N [1 - P(U_k)]^{n_k}, \quad (130)$$



gdzie: N - liczba stopni napięciowych,

n_k - liczba przedziałów Δt przy napięciu U_k .

Jeśli w próbie o stałej wartości napięcia czas do uszkodzenia podzielić na przedziały Δt to w każdym z tych przedziałów prawdopodobieństwo uszkodzenia będzie takie samo $P(U_n)$ a sumaryczne prawdopodobieństwo wyniesie

$$P_n(U)_S = 1 - [1 - P(U_n)]^{\hat{n}}. \quad (131)$$

Ekwiwalentność obu rodzajów prób jest zachowana jeśli obydwa prawdopodobieństwa $P_n(U)_r$ i $P_n(U)_S$ są sobie równe. Jako Δt zaleca się przyjmować jeden okres napięcia przemienne.

Propozycje obliczania powyższej ekwiwalentności, przy określeniu prawdopodobieństwa $P_n(U)_r$ za pomocą metody z napięciem rosnącym, prowadzą się do określenia prawdopodobieństwa uszkodzenia w przedziale czasu Δt oraz wykładnika $\hat{n}$, który przy założeniu znajomości Δt pozwala obliczyć ekwiwalentny czas odpowiadający próbie ze stałą wartością napięcia.

Jednakże mechanizmy uszkodzania izolacji w przypadku obu metod mogą się znacznie różnić. Przykładowo przy próbie z rosnącym napięciem takie mechanizmy jak drzewienie wywołane kumulacją ładunków przestrzennych czy wzrost ciśnienia w kawernach i kapilarach mogą nie zachodzić przy zbyt dużych wzrostach napięcia. Stąd nie rozwinięto tutaj metod przeliczania, które można znaleźć np. w [12].

3.3.2. Reguły statystyczne starzenia izolacji przy działaniu wyładowań niezupełnych [45]

Jeśli dielektryk jest poddany działaniu wyładowań niezupełnych, to wówczas czas życia może być uwarunkowany następującymi mechanizmami:

- 1) zjawiskami losowymi prowadzącymi do naruszenia wytrzymałości elektrycznej bez uprzedniego dostrzegalnego starzenia dielektryku,
- 2) zjawiskami wstępnego uszkodzenia dielektryku prowadzącymi do pojawienia się miejscowych niejednorodności o obniżonej wytrzymałości elektrycznej (wtrąciny gazowe, dendryty itd.),
- 3) lokalnym uszkodzeniem dielektryku pod wpływem wyładowań niezupełnych rozwijających się w miejscach, w których powstały uprzednio lub istniały niejednorodności.



Czas do przebicia lub czas życia jest określony albo sumą czasów rozwoju poszczególnych mechanizmów albo czasem rozwoju jednego z mechanizmów, decydującego o utracie wytrzymałości elektrycznej.

Czas rozwoju każdego z mechanizmów podlega właściwej sobie prawidłowości statystycznej. Najczęściej dla określenia rozkładów życia t_z przy zadanym naprężeniu dla poszczególnych mechanizmów uszkodzenia wykorzystuje się albo rozkład Weibulla

$$F(t_z) = 1 - \exp(-\lambda t_z^A), \quad (132)$$

albo rozkład logarytmiczno-normalny

$$F(t_z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{t_z} \frac{1}{t_z} \exp\left[-\frac{(\ln t_z - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt_z, \quad (133)$$

gdzie λ , β , μ , σ - parametry rozkładów.

Wypadkowy rozkład jest często kompozycją dwóch nawet trzech rozkładów składowych.

Jeśli rozpatrzyć najczęściej spotykany przypadek gdy rozkład wypadkowy jest kompozycją dwóch rozkładów składowych, to możliwe są wówczas dwie możliwości:

- a) jeden mechanizm wyklucza drugi,
- b) dwa mechanizmy rozwijają się kolejno po sobie.

Przypadek 1

Przykładem może tu być uszkodzenie izolacji kondensatora impulsowego przy wysokich naprężeniach pola elektrycznego. Jednym mechanizmem jest rozwój przebicia skrośnego w miejscu losowego nałożenia się kilku rozdzielonych miejsc wyładowań w poszczególnych warstwach dielektryku ciekłego lub pokrycie się wyładowania w warstwie dielektryku ciekłego ze słabym miejscem w arkuszu papieru kondensatorowego (np. wtrąciną przewodzącą). Drugim mechanizmem jest uszkodzanie izolacji kondensatora przez wyładowania niezupełne pojawiające się na skraju okładki. Oczywiście jest, że zapoczątkowanie rozwoju procesów wg pierwszego mechanizmu wyklucza możliwość rozwoju wyładowań na skraju okładki.

Wypadkowy rozkład czasów życia (liczby uderów do przebicia) może być w tym przypadku przedstawiony w postaci



$$F(N_2) = \int_0^{N_2} [1 - F_2(N_2')] f_1(N_2') dN_2' + \int_0^{N_2} [1 - F_1(N_2')] f_2(N_2') dN_2', \quad (134)$$

gdzie: $f_1(N_2) = dF_1(N_2)/dN_2$ - gęstość prawdopodobieństwa czasów życia N_2 wg pierwszego mechanizmu,

$f_2(N_2) = dF_2(N_2)/dN_2$ - gęstość prawdopodobieństwa czasów życia N_2 wg drugiego mechanizmu.

Można dowieść, że w tym przypadku

$$F(N_2) = F_1(N_2) + F_2(N_2) - F_1(N_2) \cdot F_2(N_2). \quad (135)$$

Przy małych wartościach $F_2(N_2)$ występuje przybliżona równość

$$F(N_2) \approx F_1(N_2), \quad (136)$$

a przy małych wartościach $F_1(N_2)$

$$F(N_2) \approx F_2(N_2). \quad (137)$$

Ponieważ czas życia według pierwszego mechanizmu nie jest związany ze starzeniem dielektryku to $F_1(N_2)$ winno podlegać rozkładowi Weibulla przy $\beta \leq 1$ w tym przy $\beta = 1$ rozkładowi wykładniczemu

$$F_1(N_2) = 1 - \exp[-\lambda_1 N_2]. \quad (138)$$

Rozkład $F_2(N_2)$ określony jest minimalnym czasem do uszkodzenia dielektryku w poszczególnych jego elementarnych fragmentach zatem zgodnie z teorią wartości ekstremalnych również może być opisany rozkładem Weibulla

$$F_2(N_2) = 1 - \exp[-\lambda_2 N_2^\beta]. \quad (139)$$

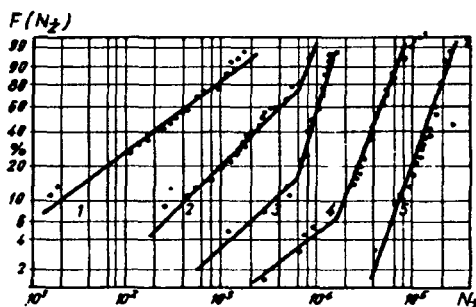
Stąd wypadkowy rozkład

$$F(N_2) = 1 - \exp[-(\lambda_1 N_2 + \lambda_2 N_2^\beta)]. \quad (140)$$

Dane eksperymentalne potwierdzają tę zależność. Na rysunku 33 podano przykładowo rozkłady liczby uderów do uszkodzenia izolacji papie-



rowej impregnowanej olejem rycynowym kondensatorów impulsowych pracujących przy wysokich napięzeniach pola elektrycznego. Jak widać rozkłady są złożone z dwóch fragmentów: dla małych N opisane są rozkładem wykładniczym (138), a dla dużych rozkładem Weibulla (139).



Rys. 33. Rozkłady liczby uderzeń do uszkodzenia izolacji, papierowej impregnowanej olejem rycynowym, kondensatorów impulsowych; zależności 1 do 5 określano przy malejących napięzeniach $E_1 > \dots > E_5$; wg [45]

Przypadek 2

Przykładem może być uszkodzenie izolacji kabla polietylenowego przy długotrwałym działaniu napięcia przemiennego lub przy wielokrotnym działaniu impulsów napięciowych. Przy określonych warunkach, przyczyną uszkodzenia izolacji jest wówczas zjawisko powstawania dendrytów i proces ich rozwoju (drzewienie), przy czym zjawiska te zachodzą kolejno. Jeśli całkowity czas życia izolacji kabla wynosi t_z lub N_z a czas lub liczba uderzeń konieczne do rozwoju dendrytu - t_r lub N_r , to czas lub liczba uderzeń konieczna do naradzin (powstania) dendrytu wynoszą $t_n = t_z - t_r$ lub $N_z = N_n - N_r$. Zakładając niezależność czasów narodzin i rozwoju dendrytów, rozkład czasów życia może być przedstawiony w postaci

$$F(N_z) = \int_0^{N_z} F_1(N_z - N_r) dF_2(N_r), \quad (141)$$

gdzie $F_1(N_n)$ i $F_2(N_r)$ - rozkłady czasów do narodzin i rozwoju dendrytów.



Dane eksperymentalne wskazują, że rozkład czasów do narodzin dendrytów jest rozkładem Weibulla (132), natomiast czasy rozwoju dendrytów podlegają rozkładowi logarytmo-normalnemu (133).

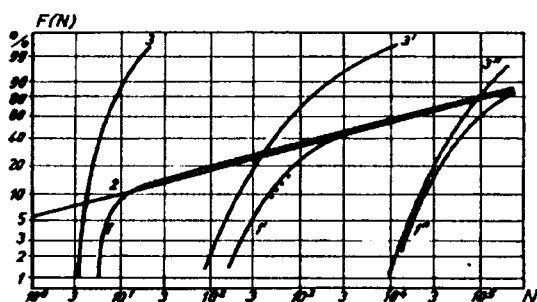
Kompozycja tych rozkładów ma postać

$$F(N_z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{N_z} \left\{ 1 - \exp[-\lambda(N_z - N_r)^\beta] \right\} \frac{1}{N_r} \exp\left[-\frac{(\ln N_r - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dN_r \quad (142)$$

natomiast przybliżenie jest postaci

$$F(N_z) \approx F_1(N_z) \cdot F_2(N_z) \approx [1 - \exp(-\lambda N_z^\beta)] \phi\left(\frac{\ln N_z - \mu}{\sigma}\right). \quad (143)$$

gdzie ϕ - całka Laplace'a.



Rys. 34. Wypadkowy rozkład liczby ударów do przebicia (143) izolacji polietylenowej (1", 1', 1) jako kompozycja rozkładu liczby ударów do narodzin dendrytów (132) (2) i rozkładu rozwoju dendrytów (133) (3", 3', 3); wg [45]

Na rysunku 34 pokazano rozkłady uzyskane wg wzoru (143) przy różnych parametrach rozkładów $F_1(N_n)$ i $F_2(N_r)$. W zależności od dominacji jednej z tych funkcji, rozkład wypadkowy $F(N_z)$ zmienia się od niemal logarytmo-normalnego (1) do rozkładu Weibulla (1").



3.4. Statystyczna koncepcja uzasadnienia parametrów prób udarowych wysokonapięciowych transformatorów energetycznych

Jakość izolacji transformatora może być zdefiniowana przez dystrybucję napięć przebicia $P(U < u)$. Uwzględniając, iż przepięcia modyfikowane są przez odgromnik, można stosując statystyczne metody koordynacji izolacji oraz zakładając, że typ i współczynnik zmienności dystrybucji wytrzymałości izolacji transformatora są znane, wyznaczyć usytuowanie tej dystrybucji przy założonym ryzyku niesprawności systemu (patrz pkt. 4.4.1.3). Usytuowanie dystrybucji może być wówczas opisane przez prawdopodobieństwo przebicia na zalecanym poziomie napięcia U_R . Proponuje się [86] by $U_R = U_{PL}$ gdzie U_{PL} to poziom ochrony odgromnika.

Użytkownik będzie więc wymagał aby prawdopodobieństwo przebicia transformatora przy doprowadzeniu jednego udaru napięciowego o wartości szczytowej U_{PL} było mniejsze lub równe akceptowanemu prawdopodobieństwu przebicia odpowiadającemu dopuszczalnemu ryzyku uszkodzenia

$$P(U_{PL}) \leq P_A(U_{PL}), \quad (144)$$

proponuje się [86] by $P_A(U_{PL}) = 0,002$.

Natomiast celem prób napięciowych udarowych jest odrzucenie przeważającej większości np. więcej niż 90% transformatorów, które charakteryzują się prawdopodobieństwem wyższym niż $P_A(U_{PL}) = 0,2\%$ i dla zdefiniowania parametrów prób wprowadza się pojęcie dopuszczalnego poziomu jakości $P_D(U_{PL})$ o rząd większego od $P_A(U_{PL})$. Zatem celem prób udarowych jest odrzucenie 90% przypadków transformatorów mających prawdopodobieństwo przebicia 2% na zalecanym poziomie napięcia U_{PL} . Przykładowo jeśli na 1000 transformatorów 20 charakteryzuje się wartością $P_D(U_{PL}) = 2\%$ to 18 z nich musi być podczas prób udarowych uznane za nie spełniające kryteriów próby.

Oczywistym jest, że z faktu iż $P_D > P_A$ i że próby mają odrzucić 90% a nie 100% transformatorów o $P_D = 2\%$ wynika, że istnieje pewne ryzyko odbiorcy iż wyrób zły przejdzie próby z wynikiem pozytywnym. Istnieje jednak również pewne prawdopodobieństwo (zwane ryzykiem producenta) iż wyrób dobry charakteryzowany wartością $P_A \leq 0,2\%$ może ulec w czasie prób uszkodzeniu. Ryzyko to skłania producenta do projektowania wyrobu z zachowaniem dodatkowych marginesów bezpieczeństwa.

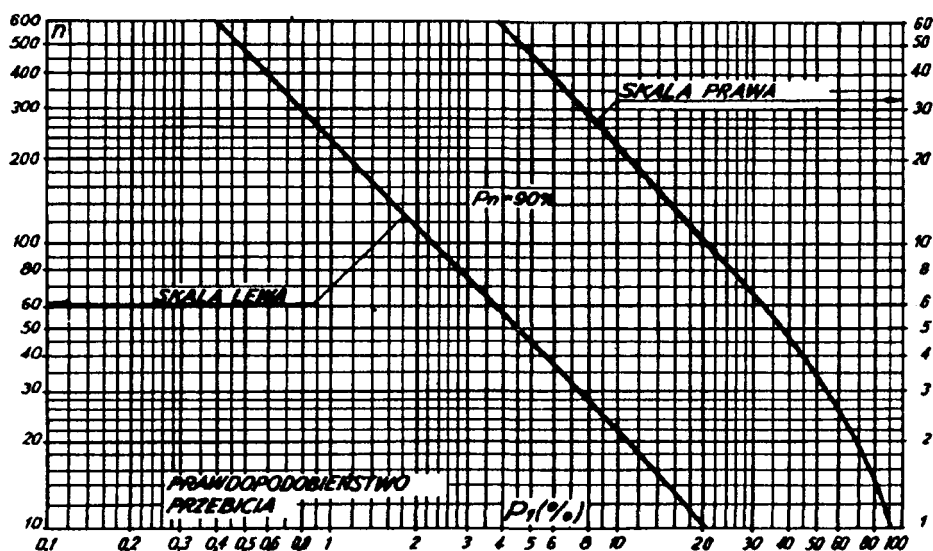


Próba wytrzymałości elektrycznej udarowej transformatora może być zdefiniowana przez wartość napięcia probierczego U_{pr} i liczbę ударов napięciowych n .

Zakładając, że każde nowe doprowadzenie udaru po udarze nie wywołującym przebicia natrafia na układ izolacyjny o nie zmienionym prawdopodobieństwie przebicia, można z prawa wzrostu (29) określić prawdopodobieństwo przebicia gdy zamiast jednego udaru zastosować n ударов i stąd dla założonego tolerowanego prawdopodobieństwa $P_D = 2\%$ przy jednym udarze określić n spełniajacego warunek $P_n = 90\%$

$$n = \frac{\lg(1 - P_n)}{\lg[1 - P_1(U_{pr})]} = \frac{-1}{\lg[1 - P_1(U_{pr})]}, \quad (145)$$

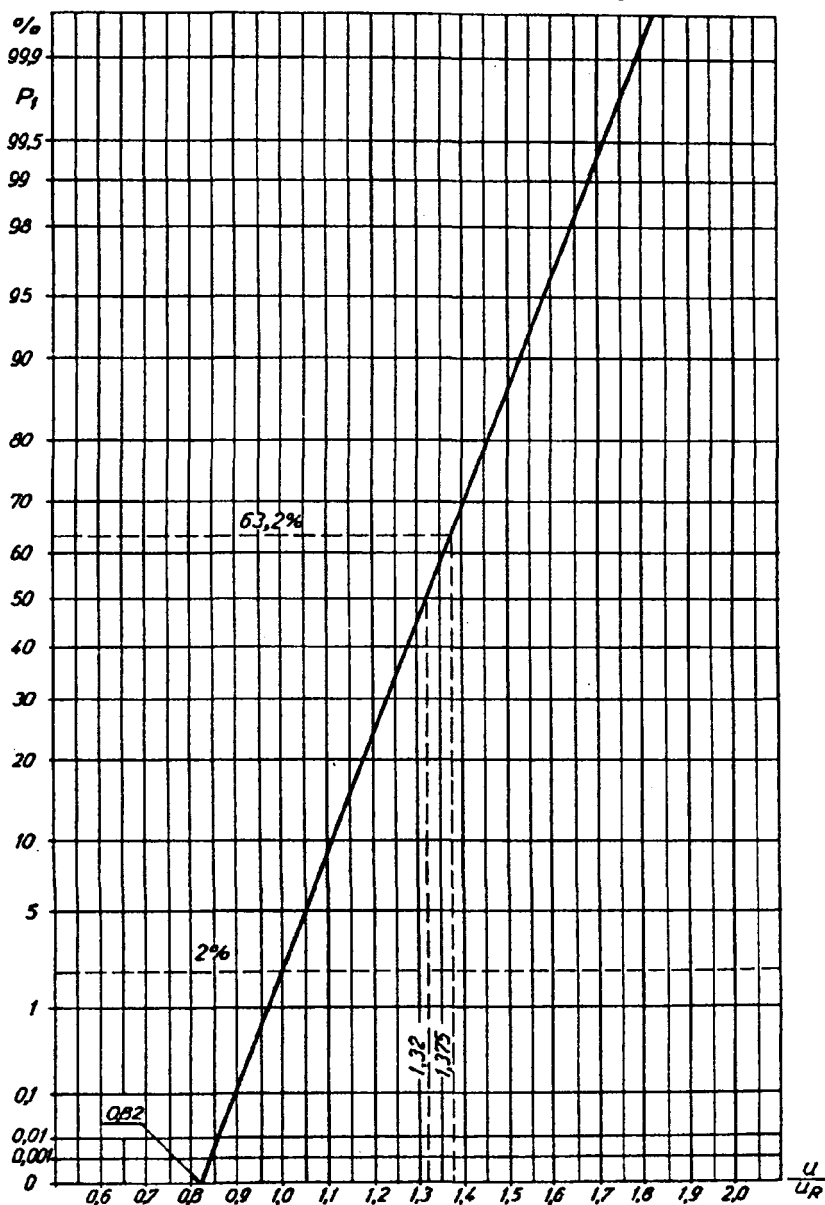
wykres $n = f(P_1)$ podano na rysunku 35.



Rys. 35. Zależność $n = f(P_1)$ wg wzoru (145) [86]

Jak widać dla $P_1(U_{pr}) = P_D(U_{PL}) = 2\%$ n wynosi 11.4. Stosowanie tak dużej liczby ударов probierczych nie jest praktycznie możliwe. Stąd dla zmniejszenia liczby ударов trzeba zwiększyć napięcie probiercze. Do rozwiązania tego problemu konieczna jest jednak znajomość kształtu dystrybuanty napięć przebicia. W literaturze jest obecnie dobrze ugrun-



SIATKA ROZKŁADU WEIBULLA $K=3,5$ 

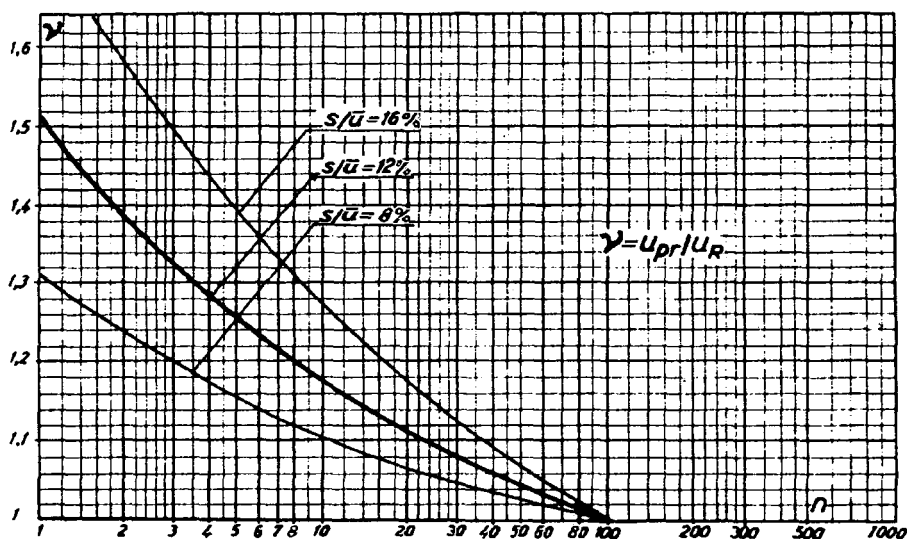
Rys. 36. Dystrybuanta rozkładu Weibulla o parametrze kształtu $k = 3,5$ i współczynniku zmienności 12%; siatka funkcyjna o ustalonym k



towny pogląd, że dla izolacji papierowo-olejowej typu transformatorowego obowiązuje rozkład Weibulla o współczynniku kształtu 3,5 i współczynniku zmienności 12% (rys. 36).

Zakładając, że rozkład jest znany można wyznaczyć tzw. ekwiprobabilistyczne zależności między napięciem U_{pr} , a ściślej między krotnością $\gamma = U_{pr}/U_R$ a liczbą uderów n . Punkty (γ, n) mają charakteryzować się stałym prawdopodobieństwem przebicia 90% dla transformatorów o 2% prawdopodobieństwa przebicia na poziomie U_R , czyli dla $\gamma = 1$. Dla określenia $\gamma = f(n)$ wykorzystuje się rysunki 35 i 36. Przykładowo:

- dla $n = 3$ z rysunku 35 jest $P_1 = 54\%$ a z rysunku 36 dla $P_1 = 54\%$ jest $\gamma = 1,336$,
- dla $n = 5$ z rysunku 35 jest $P_1 = 37\%$ a rysunku 36 dla $P_1 = 37\%$ jest $\gamma = 1,265$ itd.



Rys. 37. Ekwiprobabilistyczne krzywe $\gamma = f(n)$ dla trzech współczynników zmienności rozkładu Weibulla 8, 12, 16% wg [86]

Przykład zależności $\gamma = f(n)$ podano na rysunku 37. Krzywe te pokazują jak modyfikować napięcie probiercze ze zmiany liczby uderów n tak aby utrzymać zawsze to samo prawdopodobieństwo przebicia 90% dla transformatorów na dopuszczalnym poziomie jakości P_0 .



Zakładając, że liczba uderów n ze względów praktycznych winna się mieścić w przedziale $n \leq 10$ widać, że dla współczynnika zmienności 12% wartości $v = 1,18 \pm 1,52$.

Zastosowanie powyższego rozumowania przy obowiązującej np. dla prób udarem piorunowym liczbie 3 uderów prowadzi do wartości napięć probierczych bliskich zalecanym przez normy pozwalając jednak na ich obiektywne uzasadnienie [86].

3.5. Automatyzacja pomiarów i obliczeń [18]

Automatyzacja badań wysokonapięciowych jest celowa w niżej przedstawionych przypadkach.

A. Próby identycznych wyrobów masowych według jednej procedury probierczej o tej samej lub zbliżonej wartości szczytowej i kształcie napięcia; przykładem może tu być badanie transformatorów rozdzielczych średniego napięcia lub badanie płytek stosu zmienneoporowego odgromników. Niezbędne wyposażenie takiego układu musi zawierać:

- automatyczne przyłączenie i wymianę badanego obiektu,
- pomiar,
- rejestrację i opracowanie wyników oraz sygnalizację negatywnego wyniku badań.

B. Pomiary statystyczne np. określenie napięć lub czasów do przebicia w gazach lub cieczach czyli w układach, które nie są niszczone w czasie próby. Podstawowe wyposażenie winno zapewniać:

- automatyczną regulację i rejestrację stanu pracy układu probierczego,
- pomiar,
- rejestrację i opracowanie wyników pomiaru.

Procedury prób napięciowych lub prądowych uderowych mogą być podzielone na następujące cztery czynności:

- połączenie i wymiana badanego obiektu,
- dostosowanie układu probierczego do wymagań próby,
- regulację urządzeń probierczych zgodnie z procedurą prób,
- pomiar, rejestrację i opracowanie wyników prób.

Te cztery czynności można rozważać oddzielnie gdyż są od siebie niezależne.

Automatyzacja jest szczególnie istotna w przypadku badań statystycznych, gdyż pozwala na zachowanie stałości warunków próby poprzez np. identyczność regulacji napięcia, stałość czasów stopni napięciowych i czasów odpoczynku itd.



4. WYBRANE PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ W TECHNICIE IZOLACYJNEJ

4.1. Wstęp

Dział techniki wysokich napięć jakim jest technika izolacyjna i koordynacyjna izolacji obejmuje dużą gamę zagadnień dotyczących wytrzymałości elektrycznej materiałów i układów izolacyjnych. Losowa natura mechanizmów wyładowań elektrycznych stanowi o tym, że zastosowania metod statystycznych stanowią podstawę przy projektowaniu wysokonapięciowych układów izolacyjnych. Dotyczy to wszystkich rodzajów izolacji, z których podstawowymi są:

- izolacja powietrzna,
- izolacja olejowa i papierowo-olejowa,
- izolacja z sześciofluorkiem siarki,
- izolacja próżniowa.

Jak już wspomniano w rozdziale 1 każdy z tych rodzajów izolacji może być przedmiotem oddzielnej, obszernej monografii, nawet przy założeniu ograniczenia treści do zagadnień podstawowych związanych z mechanizmem wyładowań i specyfiki aplikacji zastosowań statystyki. Przykładowo dla przypadku izolacji powietrznej w oparciu o metody statystyczne, analizuje się zagadnienia związane z mechanizmem wyładowań takie jak [70]:

- rozkład dróg swobodnych cząstek gazu,
- określenie współczynnika jonizacji udarowej gazu i warunku samoistności wyładowań,
- czasy opóźnienia wyładowań.

Dla tej samej izolacji powietrznej metody statystyczne wykorzystuje się przy projektowaniu izolacji liniowej [4] i stacyjnej gdzie z kolei występuje cała gama zastosowań szczególnych dotyczących problemów zabrudzeniowych, warunków atmosferycznych, rozkładu przepięć wzdłuż długości linii czy wielkich rozmiarów układu izolacji liniowej.

Zatem kompletne, kompleksowe ujęcie wszystkich możliwych zastosowań statystyki w technice wysokich napięć nie stanowiło celu niniejszego skryptu. Ograniczono się do specyficznych zastosowań dotyczących



izolacji nieregenerującej się leżącej w sferze zainteresowań autora oraz do klasycznych już, bo mających rangę zaleceń międzynarodowych [30] zastosowań z dziedziny koordynacji izolacji liniowej, przy czym w tym ostatnim przypadku, jak to już wyżej wzmiankowano, problem jest tu daleki do wyczerpania.

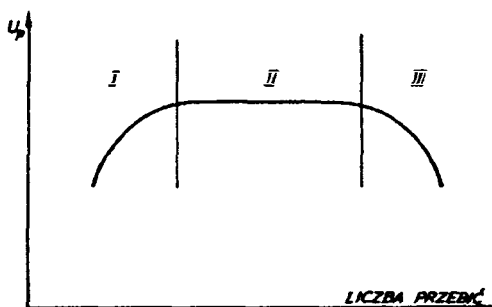
Tym niemniej podane niżej przykłady, mimo iż, w pewnym sensie specyficzne, pozwolą czytelnikowi zorientować się w skali i randze problemu, jak również stanowią pewną podstawę do własnych studiów nad pokrewnymi zagadnieniami.

4.2. Izolacja ciekła, olej izolacyjny

4.2.1. Wprowadzenie

Izolacja ciekła podobnie jak gazowa posiada strukturę regularną i izotropową, zatem dla układów z jedynie ciekłym dielektrykiem rozkłady napięć przebiecia czy czasów do przebiecia wykazują cechę jednododalności. Przy badaniu wytrzymałości elektrycznej cieczy izolacyjnych należy pamiętać, że napięcie przebiecia zależy od:

- a) procedury prób - w metodzie Tetznera (pkt. 3.2.2.2) obowiązuje uniezależnienie wyników od kroku napięciowego,
- b) materiału i stanu powierzchni elektrod,
- c) konfiguracji pola elektrycznego, powierzchni i odstępu elektrod,
- d) fizycznej czystości cieczy,
- e) chemicznej czystości cieczy,
- f) temperatury i ciśnienia hydrostatycznego,
- g) czasu trwania doprowadzonego napięcia.



Rys. 38. Zmiana napięcia przebiecia w zależności od liczby przebiegów odstępu izolacji ciekłej



Jeśli wykona się wielokrotnie próbę przebicia w układzie gołych elektrod zanurzonych w cieczy izolacyjnej, to przy kolejnych próbach uzyska się zmiany wytrzymałości zależne nie tylko od losowości zjawiska przebicia. Typowy wykres zależności napięć przebicia od liczby przebieg pokazuje rysunek 38. Można tu wyróżnić trzy zakresy:

- I - zakres kondycjonowania elektrod gdy kolejne przebicia usuwają okludowane na elektrodach gazy i eliminują mikroostrza,
- II - zakres gdzie wytrzymałość zależy tylko od losowości mechanizmu przebicia,
- III - zakres pogarszania się właściwości cieczy wskutek zanieczyszczania produktami rozkładu wywołanego łukiem elektrycznym.

Jak wynika z rysunku 38 liczba przebieg w cieczach jest ograniczona wskutek ograniczonych właściwości samoregeneracyjnych. By wydłużyć interesujący praktycznie zakres II należy w szereg z badanym układem włączyć rezystor ograniczający prąd wyładowania i energię łuku.

Wielorakość wymienionych na wstępie czynników warunkujących wytrzymałość elektryczną cieczy izolacyjnych powoduje, że jedyną metodą określenia wytrzymałości układów z dielektrykiem ciekłym jest zaplanowanie i wykonanie badań eksperymentalnych w oparciu o zależności statystyczne.

4.2.2. Zależność wyników od metody badań

Wyniki badań wytrzymałości elektrycznej olejów izolacyjnych w znacznym stopniu zależą od sposobu zmian napięcia podczas prób czyli od

T a b e l a 21

Wpływ procedury badań na wyniki w przypadku badania oleju izolacyjnego [64]

Próba	Ze stałą wartością napięcia	Metodą schodkową			Napięciem rosnącym liniowo
Zmienna	$U \uparrow$	$U_a \uparrow$	$\Delta U \uparrow$	$t_s \uparrow V m_s \uparrow$	$\dot{U} \uparrow$
Wpływ na wyniki	$t/V \text{ m} \uparrow$	$U(t) \uparrow V U(m) \uparrow$	$U(t) \uparrow V U(m) \uparrow$	$U(t) \uparrow V U(m) \uparrow$	$U(t) \uparrow$

1/ $\dot{U}$ - prędkość wzrostu napięcia [V/s], U_a - napięcie startu, ΔU - krok napięciowy, t_s - czas trwania stopnia napięciowego, m_s - liczba udarów na stopień napięciowy, V - lub



procedury prób. I tak np. w przypadku badań wykonanych metodą schodkową uzyskane wyniki zależą od napięcia startu U_a , kroku napięciowego ΔU , liczby uderów na stopniu napięciowym m_s lub czasu utrzymania napięcia t_s .

Ogólny pogląd o wpływie procedury badań na uzyskiwane wyniki podaje tabela 21.

4.2.3. Efekt objętości oleju i efekt powierzchni elektrod

W 1953 r. W.R. Wilson [84] wykazał, że wytrzymałość elektryczna izolacji olejowej, zależy, w specyficzny sposób, od objętości oleju znajdującego się w obszarze o dużych naprężeniach elektrycznych. W 1956 r. Weber i Endicott [79] określili zależność wytrzymałości odstępów z izolacją olejową od powierzchni elektrod. Zależności te nazywane efektem objętości i efektem powierzchni mają duże znaczenie praktyczne przy konstruowaniu układów z izolacją olejową jak również papierowo-olejową. Obydwa efekty wyjaśnia się w oparciu o zasady statystyczne.

Na rysunku 39 przedstawiono ogólny przypadek odstępów izolacyjnego o polu nierównomiernym. Powierzchnie elektrod podzielono na 2 m elementarnych pól a_i , natomiast objętość oleju podzielono na $m \cdot n$ elementarnych objętości V_j zdefiniowanych przez powierzchnie ekwipotencjalne Z_i, Z_j oraz linie sił łączące dwie odpowiadające sobie elementarne powierzchnie elektrod.

Jeśli każdej elementarnej powierzchni elektrod a_i odpowiada określone prawdopodobieństwo zainicjowania przebiccia odstępów olejowego S_i , natomiast każdej elementarnej objętości naprężanej V_j odpowiada określone prawdopodobieństwo W_j , to prawdopodobieństwo $q_n(U)$, że odstęp olejowy wytrzyma napięcia probiercze U wynosi

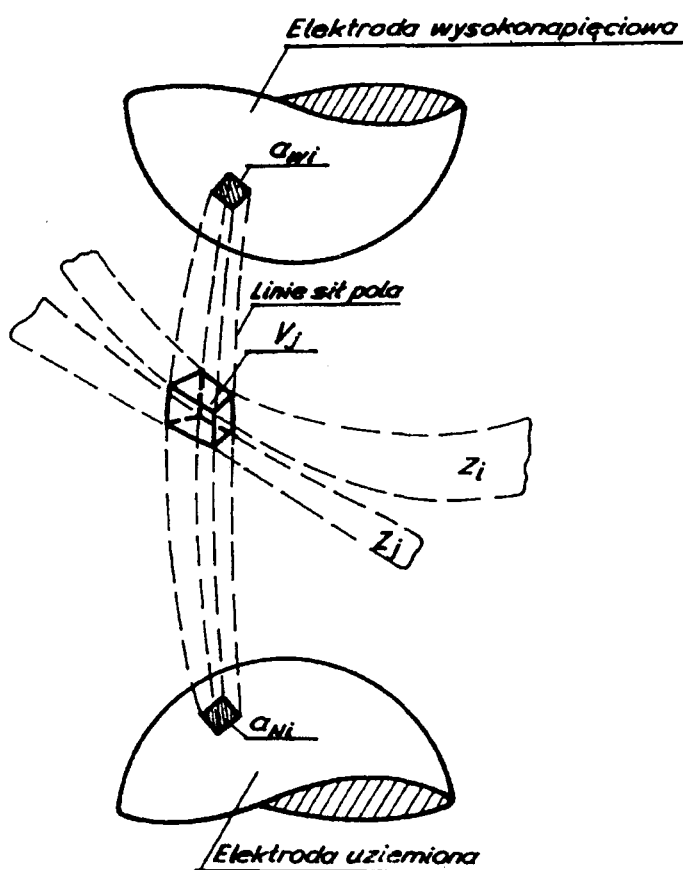
$$q_n(U) = \prod_{i=1}^m [(1 - S_{Ni})(1 - S_{Wi}) \prod_{j=1}^n (1 - W_j)], \quad (146)$$

a prawdopodobieństwo przebiccia odstępów olejowego przy tym samym napięciu probierczym wynosi

$$p_n(U) = 1 - q_n(U) = 1 - \prod_{i=1}^m [(1 - S_{Ni})(1 - S_{Wi}) \prod_{j=1}^n (1 - W_j)], \quad (147)$$

gdzie indeksy N i W oznaczają odpowiednio elektrodę niskonapięciową i wysokonapięciową.





Rys. 39. Ogólny przypadek odstępu izolacyjnego o polu nierównomiernym i definicja elementów jednostkowych [24]

Można teraz wyróżnić dwa przypadki szczególne.

1. Jeśli olej jest czysty, dobrze odwodniony i dobrze odfiltrowany z zanieczyszczeń cząstkami ciał stałych, to prawdopodobieństwo inicjacji przebicia odstępu olejowego z elementarnej objętości może być pominięte. Wówczas równanie (147) można uprościć do

$$p_n(U) = 1 - \prod_{i=1}^n [(1 - S_{Ni})(1 - S_{Wi})]. \quad (148)$$



2. Jeśli olej jest silnie zanieczyszczony cząstkami stałymi, to prawdopodobieństwo inicjacji wyładowania może być określone w oparciu o elementarne objętości oleju. Wówczas

$$p_n(U) = 1 - \prod_{j=1}^{m \cdot n} (1 - w_j). \quad (149)$$

W przypadku pól równomiernych i quasirównomiernych prawdopodobieństwo inicjacji wyładowania jest takie samo dla elementarnej powierzchni i elementarnej objętości. Równania (148) i (149) upraszczają się wówczas do postaci

$$p_n(U) = 1 - (1 - S)^{2m}, \quad (150a)$$

i

$$p_n(U) = 1 - (1 - W)^{m \cdot n}; \quad (150b)$$

Są to wyrażenia odpowiadające prawu wzrostu (29).

W przypadku pola nierównomiernego, prawdopodobieństwo inicjacji przebiccia z elementów jednostkowych usytuowanych w obszarach o małych naprężeniach może być pominięte. Wówczas wartości m i n odpowiadają jedynie tym elementom jednostkowym, które są usytuowane w obszarach dużych naprężeń, a szczególnie naprężana powierzchnia elektrod lub objętość oleju może być zdefiniowana np. 90% powierzchnią ekwigradientalną [84].

Oczywistym jest, że czysty efekt objętości lub powierzchni istnieje jedynie w szczególnych warunkach. W ogólnym przypadku obydwa efekty występują jednocześnie (równanie 147). Jedną z dróg uproszczenia tego równania jest określenie prawdopodobieństwa przebiccia jedynie w kategoriach jednostkowej powierzchni lub jednostkowej objętości. Zaobserwowany efekt jest wówczas pozornym efektem jednego z tych dwóch parametrów.

Jeśli jedynym rozważanym parametrem jest jednostkowa powierzchnia, to prawdopodobieństwo przebiccia jest wyrażone jako

$$p_n(U) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - S_{ai}). \quad (151)$$



Porównując to wyrażenie z równaniem (147), uzyskuje się wzór na pozorne prawdopodobieństwo przebicia inicjowanego z i -tej jednostki powierzchni

$$S_{ai} = 1 - (1 - S_{Ni})(1 - S_{Wi}) \prod_{j=1}^n (1 - W_j). \quad (152)$$

Zgodnie z rysunkiem 39 pozorne prawdopodobieństwo inicjacji przebicia z i -tej jednostkowej powierzchni wyrażone równaniem (152) odpowiada rzeczywistemu prawdopodobieństwu, że przebicie jest inicjowane z i -tego jednostkowego odstępu uformowanego z n elementarnych objętości V_j , które zwierają elektrody w odpowiednich jednostkowych powierzchniach a_{Ni} i a_{Wi} .

Podobnie prawdopodobieństwo przebicia wyrażone pozornym efektem objętości wynosi

$$p_n(U) = 1 - \prod_{j=1}^{m \cdot n} (1 - W_{aj}). \quad (153)$$

Porównując to wyrażenie z wzorem (147) uzyskuje się następującą zależność między pozornym prawdopodobieństwem przebicia W_{aj} a rzeczywistymi prawdopodobieństwami dla elementarnych powierzchni i objętości

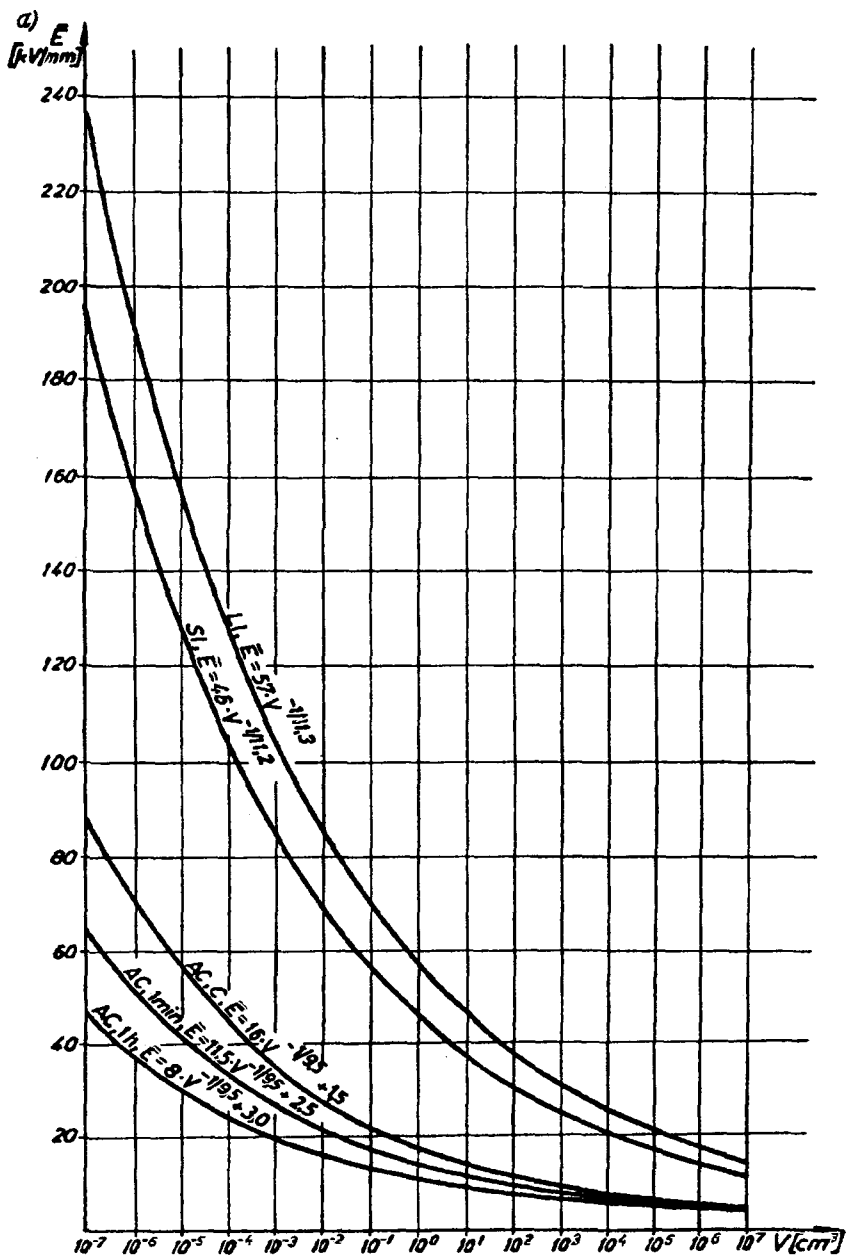
$$\prod_{j=1}^{m \cdot n} (1 - W_{aj}) = \prod_{j=1}^m [(1 - S_{Ni})(1 - S_{Wi}) \prod_{j=1}^n (1 - W_j)]. \quad (154)$$

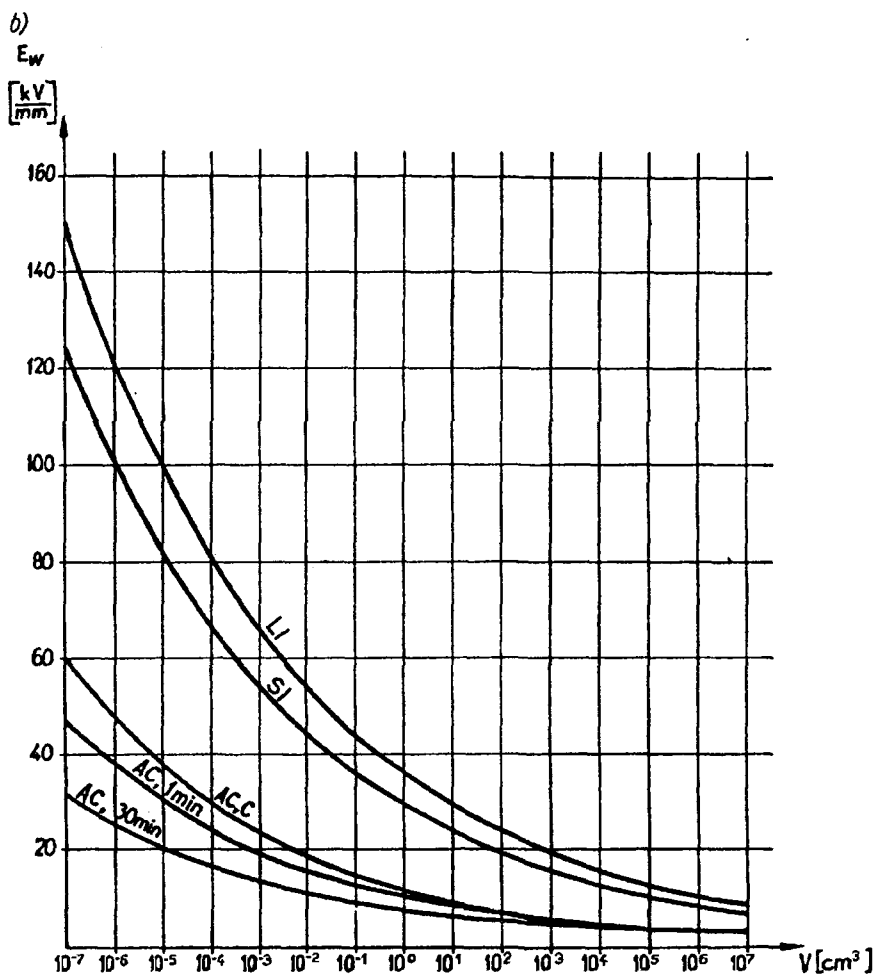
Nie ma tu prostej interpretacji pozornego prawdopodobieństwa przebicia W_{aj} dla elementarnej naprężanej objętości oleju. Jednakże jeśli S_{Ni} oraz S_{Wi} są pomijalne, to prawdopodobieństwa W_{aj} i W_j są identyczne.

Koncepcja przedstawionych tu, a wprowadzonych w [24] efektów pozornych, jasno pokazuje ambiwalentny charakter przebicia oleju gdzie jednakowo dopuszczalna jest interpretacja w kategoriach zarówno pozornego efektu powierzchni jak i pozornego efektu objętości.

Na rysunku 40 podano zależności $E = f(V)$ w kategoriach pozornego efektu objętości. Rysunek 40a dotyczy naprężeń o 50% prawdopodobieństwa przebicia odstępu olejowego, a rysunek 40b podaje naprężenia E_w o bliskim zeru prawdopodobieństwie wyładowania. Objętość V określono wg definicji Wilsona [84] czyli jako objętość między elektrodą, na







Rys. 40. Pozorny efekt objętości: a) dla naprężeń o 50% prawdopodobieństwie wyładowania [64]; b) dla naprężeń wytrzymywanych o bliskim zeru prawdopodobieństwie przebicia [26]

LI - napięcie udarowe piorunowe, SI - napięcie udarowe łączeniowe, AC - napięcie przemienne

której panują naprężenia maksymalne, a powierzchnią ekwigradientalną o naprężeniach równych 90% naprężeń maksymalnych. Bardziej szczegółowo problem efektu objętości i obliczenia objętości szczególnie naprężanej omówiono w [26].



4.3. Układy izolacyjne z izolacją stałą

4.3.1. Wprowadzenie

Układy izolacyjne zawierające dielektryki stałe mają zawsze strukturę nieregularną. Mogą zaistnieć następujące połączenia dielektryków:

- impregnat (dielektryk ciekły lub gazowy zwykle powietrze) wypełniający pory i szczeliny dielektryku stałego,
- szczeliny gazowe lub wypełnione dielektrykiem ciekłym na styku dielektryku stałego z elektrodami lub warstwami tego samego lub innego dielektryka stałego,
- dielektryk ciekły lub gazowy otaczający powierzchnie dielektryka stałego.

Ze względu na złożoność i nieregularność układów izolacyjnych z dielektrykiem stałym, obserwowane dystrybuanty napięć przebicia lub czasów do przebicia mogą, choć nie muszą, wykazywać wielomodalność. Wielomodalność może być również wywołana cząstkami zanieczyszczeń, które zawsze w dielektryku rzeczywistym występują. Wielomodalność nie występuje wówczas, gdy jedna z ewentualnych przyczyn wyładowania elektrycznego wyraźnie dominuje (występuje w zakresie znacznie niższych naprężeń) nad pozostałymi.

Zwykle o wytrzymałości elektrycznej w praktycznych układach izolacji stałej decydują niejednorodności materiału stałego i dlatego jest ona znacznie niższa od swoistej (istotnej) wytrzymałości czystego dielektryku. W rozważaniach teoretycznych zakłada się, że dielektryk stały można podzielić na elementarne objętości spełniające następujące warunki:

- każda z objętości ma losowo zmienną wytrzymałość elektryczną,
- przebicie całego układu jest inicjowane przez przebicie dowolnej z objętości elementarnych,
- objętości elementarne nie oddziałują na siebie.

Założenia te, zgodnie z teorią wartości ekstremalnych, były dla wielu dielektryków stałych sprawdzone eksperymentalnie poprzez rejestrację rozkładów wartości ekstremalnych, w tym głównie rozkładu Weibulla.

Wyniki badań eksperymentalnych pozwalają również na ocenę wpływu zanieczyszczeń na kształt zaobserwowanych dystrybuant napięć przebicia. I tak jeśli istnieje duża liczba wtrącin i wszystkie mają zbli-



zone właściwości fizyczne, to w wyniku badań uzyskuje się jednomodalną dystrybuantę; tak jest np. gdy wszystkie wtrąciny są typu dielektrycznego. Jeśli jeden z rodzajów wtrącin ma znacznie większy wpływ na osłabienie wytrzymałości elektrycznej niż pozostałe to obserwuje się rozkład dwumodalny (o dwuodcinkowej, łamanej dystrybuancie), którego dolna część wynika z obecności tejże wtrąciny, a górna wynika z pozostałych zanieczyszczeń. Przykładowo efekt taki dają wtrąciny metaliczne w żywicy epoksydowej. O usytuowaniu punktu załamania dystrybuanty decyduje procentowa (wagowo) zawartość wtrącin o zwiększonym wpływie na wytrzymałość elektryczną [33].

4.3.2. Wpływ grubości warstwy na wytrzymałość elektryczną izolacji stałej [72]

4.3.2.1. Wprowadzenie

Wytrzymałość elektryczna w polu równomiernym maleje ze wzrostem grubości dielektryku. Mechanizm fizyczny tego zjawiska do dziś nie jest jasny, w związku z czym jedyną drogą analizy jest więc eksperyment i wykorzystanie zależności statystycznych. Dla pól równomiernych bez efektów krawędziowych i napięć przemennych można tą drogą określić wzory uzależniające wytrzymałość elektryczną od grubości dielektryku. Istotną rolę odgrywa przy tym metoda badania wytrzymałości; stosuje się dwie metody:

- 1) metodę liniowego wzrostu napięcia, aż do przebicia - metodą tą wyznacza się wpływ grubości na wytrzymałość krótkotrwałą,
- 2) metodę ze stałą wartością napięcia, którą wyznacza się wpływ grubości na wytrzymałość długotrwałą np. jednonominutową, godzinną czy odporność na długotrwałe napięcie robocze; metoda schodkowa, mimo że nie można jej zupełnie wykluczyć, jest tu mniej wygodna.

Zależność wytrzymałości elektrycznej od grubości warstwy dielektryku stałego można dla pól równomiernych zapisać wzorem

$$E_p = E_1 h^a, \quad (155)$$

gdzie: E_1 - wytrzymałość elektryczna jednostkowej grubości materiału,
 $a \leq 0$,
 h - grubość.



Dla napięcia przebicia uzyskuje się odpowiednio

$$U_p = E_p h = E_1 h^{1+a}. \quad (156)$$

Wykładnik a zawiera się zwykle w granicach $-0,5$ do 0 , a przy metodzie badań ze stałą wartością napięcia przeciętna jego wartość wynosi $-0,3$ [72].

4.3.2.2. Wytrzymałość krótkotrwała

Jak wspomniano wyżej, wpływ grubości warstwy na wytrzymałość krótkotrwałą przy napięciu przemiennym, bada się napięciem zwiększanym ze stałą prędkością γ_u liniowo w czasie t , aż do przebicia ($\gamma_u = \text{const}$ [kV/s]). Przyjmuje się, że prawdopodobieństwo przebicia materiału przy płynnym wzroście napięcia można zapisać wzorem

$$p = P(\gamma_E, t_p) = 1 - \exp[-C^* \gamma_E^\alpha t_p^\delta], \quad (157)$$

gdzie: γ_E - prędkość wzrostu naprężeń [kV/mm·s], która zależy od grubości próbki ($\gamma_E \neq \text{const}$);
 t_p - czas do przebicia,
 C^*, α, δ - parametry rozkładu określone w oparciu o analizę regresyjną wielkości p, γ_E, t_p .

Miedzy t_p i γ_E istnieje związek

$$t_p = \frac{U_p}{\gamma_E \cdot h}, \quad (158)$$

gdzie: U_p - napięcie przebicia,
 h - grubość materiału.

Prędkość wzrostu naprężeń γ_E można wyznaczyć znając prędkość wzrostu napięcia γ_u i grubość materiału h

$$\gamma_E = \frac{\gamma_u}{h}. \quad (159)$$

Równanie (157) opisuje prawdopodobieństwo przebicia materiału izolacyjnego o danej grubości h w zależności od γ_E i t_p . Znając parametry C^*, α, δ można dla danej prędkości wzrostu naprężeń elektrycz-



nych τ_E i czasu t_p wyznaczyć prawdopodobieństwo przebicia p lub odwrotnie przy danym τ_E i danym p można wyznaczyć czas do przebicia t_p .

Jeśli grubość wzrośnie z h_1 do h przy stałej prędkości wzrostu napięcia τ_U to prędkość wzrostu naprężeń zmieni się z τ_{E_1} do τ_E .

Oznaczając iloraz $h/h_1 = z$ można, znając τ_{E_1} , określić τ_E

$$\tau_E = \tau_{E_1} \frac{h_1}{h} = \tau_{E_1} / z. \quad (160)$$

Wzór ten określa τ_E w zależności od τ_{E_1} (dla próbki jednostkowej), przy czym τ_{E_1} należy tu traktować jako stałą, a τ_E jako prędkość wzrostu naprężeń elektrycznych przy dowolnej grubości materiału. Z z-krotnym wzrostem grubości wzrasta z-krotnie objętość materiału izolacyjnego naprężanego elektrycznie. Oznacza to jednocześnie z-krotny wzrost liczby słabych miejsc w objętości materiału. Odpowiada to teorii wartości ekstremalnych. Prawdopodobieństwo bezawaryjnego stanu takiego układu jest dane prawem wzrostu (29) jako iloczyn prawdopodobieństw dla poszczególnych elementów objętości dielektryku

$$p_z = 1 - (1 - p)^z, \quad (161)$$

gdzie: p - prawdopodobieństwo przebicia przy jednostkowej grubości izolacji h_1 (prawdopodobieństwo przebicia jednostkowego elementu układu) dane wzorem (157),

p_z - prawdopodobieństwo przebicia przy grubości h (prawdopodobieństwo uszkodzenia układu).

Podstawiając (157) można dla p_z przy grubości h napisać

$$p_z = 1 - \exp \left[-z C^* \left(\frac{\tau_{E_1}}{z} \right)^\alpha t_p^\delta \right] = 1 - \exp \left[-z^{1-\alpha} C^* \tau_{E_1}^\alpha t_p^\delta \right]. \quad (162)$$

Znając p_z i τ_{E_1} można z (162) obliczyć czas do przebicia

$$t_p = \left(\frac{z^{\alpha-1}}{C^* \tau_{E_1}^\alpha} \ln \frac{1}{1 - p_z} \right)^{1/\delta}. \quad (163)$$



Wzór ten uwzględnia wzrost prawdopodobieństwa przebicia wskutek zwiększania się objętości materiału naprężanego elektrycznie oraz wpływ zmiany naprężeń elektrycznych ze zmianą grubości. Jeśli np. za p_z przyjąć 0,5 uzyska się czas do przebicia dla 50% prawdopodobieństwa (medianę czasów do przebicia). Przyjmując $z = 1$ uzyska się czas do przebicia dla podstawowej (jednostkowej) grubości materiału, a dla $z > 1$ uzyska się czas do przebicia dla z -krotnie grubszej próbki.

Wzór na wytrzymałość elektryczną materiału o grubości h uzyska się gdy prędkość wzrostu naprężeń zestawia się z czasem do przebicia t_p

$$E_{p_z} = \frac{\tau_{E_1}}{z} t_p = \left(\frac{z^{-(1+\beta)}}{C^*} \tau_{E_1}^\beta \ln \frac{1}{1-p_z} \right)^{1/\delta} \quad (164)$$

gdzie $\beta = \delta - \alpha$.

Napięcie przebicia wyniesie więc

$$U_{p_z} = h_1 \left(\frac{z^{\alpha-1}}{C^*} \tau_{E_1}^\beta \ln \frac{1}{1-p_z} \right)^{1/\delta} \quad (165)$$

Zakładając stałą wartość prawdopodobieństwa przebicia p_z przy dowolnej grubości materiału uzyskuje się zależności ilorazu wytrzymałości od grubości dane wzorami:

$$\frac{E_{p_z}}{E_{p_1}} = z^{\frac{1+\beta}{\alpha+\beta}}, \quad (166a)$$

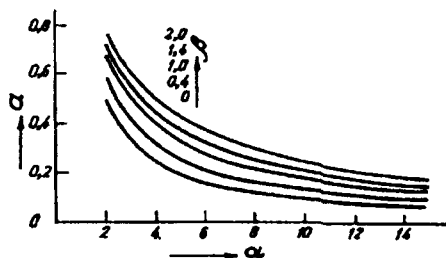
$$\frac{U_{p_z}}{U_{p_1}} = z^{\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta}}. \quad (166b)$$

Jak widać zależność wytrzymałości elektrycznej i napięcia przebicia od grubości można określić potęgowymi funkcjami hiperbolicznymi czyli zgodnie z wynikami eksperymentalnymi (155) i (156). Porównując wzory (155) i (166a), można określić wykładnik "a" w oparciu o parametry kształtu rozkładu Weibulla jako

$$a = - \frac{1 + \beta}{\alpha + \beta}. \quad (167)$$



Wielkości α zwykle zawierają się w granicach $\langle 4; 14 \rangle$ a β w granicach $\langle 0,4; 2 \rangle$. Zatem "a" mieści się w przedziale $-0,5 < a < -0,097$. Średnia wartość wynosi $-0,3$. Zależności "a" od α przy $\beta = \text{const}$ podaje rysunek 41.



Rys. 41. Zależność wykładnika "a" we wzorze (155) od parametrów kształtu α i β rozkładu Weibulla [72]

4.3.2.3. Wytrzymałość długotrwała

W przypadku wytrzymałości długotrwałej badanej napięciem o stałej wartości, a więc przy stałej wartości naprężeń, prawdopodobieństwo przebiecia dielektryku dane jest wzorem

$$p = P(E, t) = 1 - \exp[-CE_p^\alpha t_p^\beta], \quad (168)$$

gdzie $-C, \alpha, \beta$ - stałe; przy czym między C i C^* istnieje zależność

$$C^* = \frac{C}{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)^\beta}. \quad (169)$$

Z równania (168) można obliczyć czas do przebiecia przy jednostkowej grubości materiału

$$t_{p1} = \left(\frac{1}{CE_1^\alpha} \ln \frac{1}{1-p} \right)^{1/\beta}. \quad (170)$$

Zwiększenie grubości z h_1 do h ($z = h/h_1$) daje wzrost prawdopodobieństwa przebiecia zgodnie z prawem wzrostu (161). Czas do przebiecia zmieni się więc do



$$t_{p_z} = \left(\frac{1}{z C E_z^\alpha} \ln \frac{1}{1-p} \right)^{1/\beta}. \quad (171)$$

Zmiana wytrzymałości elektrycznej ze zmianą grubości dla dowolnego czasu oddziaływania narażeń elektrycznych może być określona przez porównanie czasów do przebicia dla grubości jednostkowej i z -krotnie większej. W wyniku uzyskuje się

$$\frac{1}{C E_1^\alpha} \ln \frac{1}{1-p} = \frac{1}{z C E_z^\alpha} \ln \frac{1}{1-p},$$

a stąd przy $p = \text{const}$

$$\frac{E_z}{E_1} = z^{-1/\alpha}. \quad (172a)$$

Dla ilorazu napięć przebicia będzie

$$\frac{U_z}{U_1} = z^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}. \quad (172b)$$

Z wzoru (172a) wynika, że wykładnik we wzorze (155) ma dla przypadku wytrzymałości długotrwałej postać

$$a = -1/\alpha, \quad (173)$$

czyli, że zależność długotrwałej wytrzymałości od grubości jest wystarczająco dokładnie określona parametrem kształtu rozkładu Weibulla α , w funkcji naprężeń. Dla podanych dla α granic $\langle 4; 14 \rangle$ wykładnik "a" mieści się w przedziale $\langle -0,25; -0,071 \rangle$. Zależność "a" z wzoru (173) od α jest wykreślona na rysunku 41 (dla $\beta = 0$).

Dobre techniczne dielektryki charakteryzują się dużą wartością α a więc w dielektrykach tych jest słaby wpływ grubości na wytrzymałość elektryczną. Potwierdza to znany fakt, że wytrzymałość dielektryku "idealnego" nazywana wytrzymałością "istotną" lub "swoistą", nie zależy od grubości.

Podana analiza objaśnia sens parametrów α i β rozkładu Weibulla w zależności od grubości materiału. Parametry te zależą od całego szeregu czynników takich jak czystość materiału izolacyjnego, od techno-



logii produkcji, od wartości naprężeń elektrycznych, czasu starzenia itp. Zakładając, że strukturalne właściwości materiału nie zmieniają się z grubością, podane zależności umożliwiają ekstrapolacyjne obliczanie wytrzymałości dla większych grubości dielektryku.

4.4. Statystyczna koncepcja koordynacji izolacji

4.4.1. Koordynacja izolacji liniowej

4.4.1.1. Zależności ogólne

Koordynacja izolacji polega na takim doborze jej wytrzymałości elektrycznej do przewidzianych narażeń napięciowych aby zapewnić optymalną z ekonomicznego punktu widzenia niezawodność pracy. Dopuszcza się przy tym pewne małe prawdopodobieństwo uszkodzenia zwane ryzykiem uszkodzenia.

Aby ograniczyć narażenia napięciowe, a tym samym ułatwić warunki pracy izolacji stosuje się ochronniki (np. iskierniki, odgromniki). Charakterystyki ochronników mają również charakter statystyczny.

Zatem statystyczna koncepcja koordynacji izolacji polega na doborze, przy zadanym ryzyku uszkodzenia, takich zmiennych losowych jak wytrzymałość elektryczna izolacji, charakterystyki ochronnika i napięcia. Należy przy tym uwzględnić i inne zmienne losowe charakteryzujące np. warunki meteorologiczne, stany cieplne itp.

Niech na izolację działa czynnik losowy U np. napięcie o znanych charakterystykach statystycznych. Przebicie izolacji przy $U < u$ zachodzi z prawdopodobieństwem $F(u)$. Całkowite prawdopodobieństwo przy zmianie U od $-\infty$ do ∞ przy danej gęstości zaistnienia U , $f(u)$ wynosi

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)F(u)du; \quad (174)$$

ilustruje to rysunek 42. Oczywiście niezawodność pracy wynosi wówczas

$$Q = 1 - R. \quad (175)$$

Jeśli jednocześnie oddziałują dwa niezależne czynniki losowe U_1 i U_2 o gęstościach prawdopodobieństwa $f_1(U_1)$ i $f_2(U_2)$ i znana jest dystrybuanta uszkodzenia izolacji $F(U_1, U_2)$, to ryzyko uszkodzenia wynosi

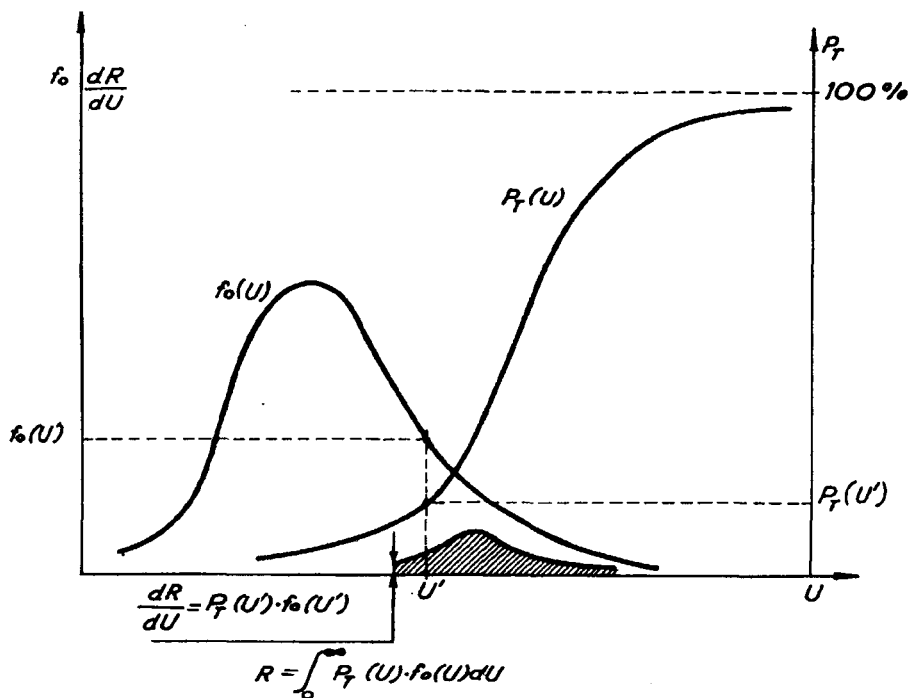


$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(U_1) \cdot f_2(U_2) F(U_1, U_2) dU_1 dU_2. \quad (176)$$

Analogicznie można obliczyć prawdopodobieństwo uszkodzenia izolacji przy działaniu m niezależnych czynników

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_1(U_1) \dots f_m(U_m) F(U_1 \dots U_m) dU_1 \dots dU_m, \quad (177)$$

Dalej rozpatrzmy pewne szczególne przypadki zastosowania tych zależności.



Rys. 42. Określenie ryzyka uszkodzenia izolacji przy danej gęstości napięć $f(U)$ i rozkładzie wytrzymałości $P_T(U)$

4.4.1.2. Koordynacja wytrzymałości elektrycznej izolacji z narażeniami elektrycznymi (przebiegami)

Niech na izolację działają przebiegi, których krotność k_{prz} ma gęstość prawdopodobieństwa $f_{prz}(k_{prz})$. Napięcie przeskoku można również wyrazić w krotnościach maksymalnego napięcia roboczego $k_i = U_p / U_r \max$. Rozkład napięć przeskoku jest znany i znana jest liczba przebiegów w ciągu roku n .

Można teraz przeanalizować dwa zagadnienia:

- 1) znaleźć liczbę przeskokuw w izolacji w ciągu roku N przy zadanych charakterystykach izolacji i przebiegów,
- 2) wybrać wytrzymałość elektryczną izolacji (tzn. jej wymiary i koszt) przy zadanych charakterystykach przebiegów i pewnej dopuszczalnej liczbie przeskokuw.

Ponieważ $N = n \cdot R$; gdzie R jest ryzykiem uszkodzenia, to zagadnienie sprowadza się do obliczenia R

$$R = \int_1^{k_{prz} \max} f_{prz}(k) F_i(k) dk, \quad (178)$$

przy czym dolna granica całkowania wynika z pojęcia przebiegu jako że przy $k_{prz} < 1$ mamy $f_{prz}(k) = 0$, a górna granica określona jest maksymalnie możliwym przebiegiem w rozważanym układzie.

To samo zagadnienie można rozwiązać innym sposobem poprzez wykorzystanie kompozycji rozkładów. Jest to szczególnie korzystne dla przypadku izolacji powietrznej, gdzie dopuszcza się stosowanie rozkładów normalnych dla $f_{prz}(k)$ i $f_i(k)$. Niech k_{prz} i k_i mają rozkłady normalne z parametrami $\bar{k}_{prz}$ i σ_{prz} oraz $\bar{k}_i$ i σ_i . Ścisłe mówiąc winno się stosować rozkłady normalne ucięte jednakże ze względu na to, że interesujące są jedynie przedziały $\pm 3\sigma$, ogólnie dopuszcza się stosowanie rozkładów nieuciętych.

Można utworzyć nową zmienną losową $\Delta k = k_i - k_{prz}$, której rozkład jest kompozycją dwóch rozkładów normalnych i może być traktowany jako rozkład normalny o parametrach $\Delta \bar{k} = \bar{k}_i - \bar{k}_{prz}$ i $\sigma = \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_{prz}^2}$.

Warunek przeskoku w izolacji odpowiada warunkowi $\Delta k < 0$. Zatem prawdopodobieństwo uszkodzenia wyniesie



$$R = P(\Delta k < 0) = \int_{-\infty}^0 f(\Delta k) d\Delta k, \quad (179a)$$

czyli

$$R = 0,5 - \Phi\left(\frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_{prz}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_{prz}^2}}\right), \quad (179b)$$

gdzie Φ - całka Laplace'a dana w tablicach statystycznych.

Obliczenie ryzyka przeskoiku w linii elektroenergetycznej złożonej z wielkiej liczby elementów izolacyjnych pracujących równolegle jest możliwe przy zastosowaniu prawa wzrostu (patrz pkt. 2.2). Pamiętać przy tym należy, że maksymalne wartości napięć łączeniowych są rozłożone wzdłuż linii nierównomiernie.

Największe napięcia występują na otwartym końcu linii (przy braku na tym końcu odgromników ograniczających napięcia), a najmniejsze na początku linii połączonym z szynami podstawy. Fakt ten należy uwzględnić w obliczeniach albo poprzez wykorzystanie do obliczeń pełnego profilu napięć wzdłuż linii albo poprzez określenie umownej długości linii wyznaczonej z warunku równości prawdopodobieństw przeskoiku w linii umownej i rzeczywistej. W linii o długości umownej przejmują się jednakową wartość napięć w każdym punkcie linii. Według [3] umowna długość linii może być w przybliżeniu określona jako $m = 100$ pręseł.

Przy projektowaniu izolacji linii należy dodatkowo uwzględnić specyfikę wytrzymałości elektrycznej i napięć w układach trójfazowych, względy bezpieczeństwa, wpływ wiatru i ulewy oraz wpływ wysokości mierzonej względem poziomu morza. Ten ostatni warunek dotyczy linii w terenach górskich (> 2000 m n.p.m.) gdy napięcie przeskoiku i współczynnik zmienności maleją.

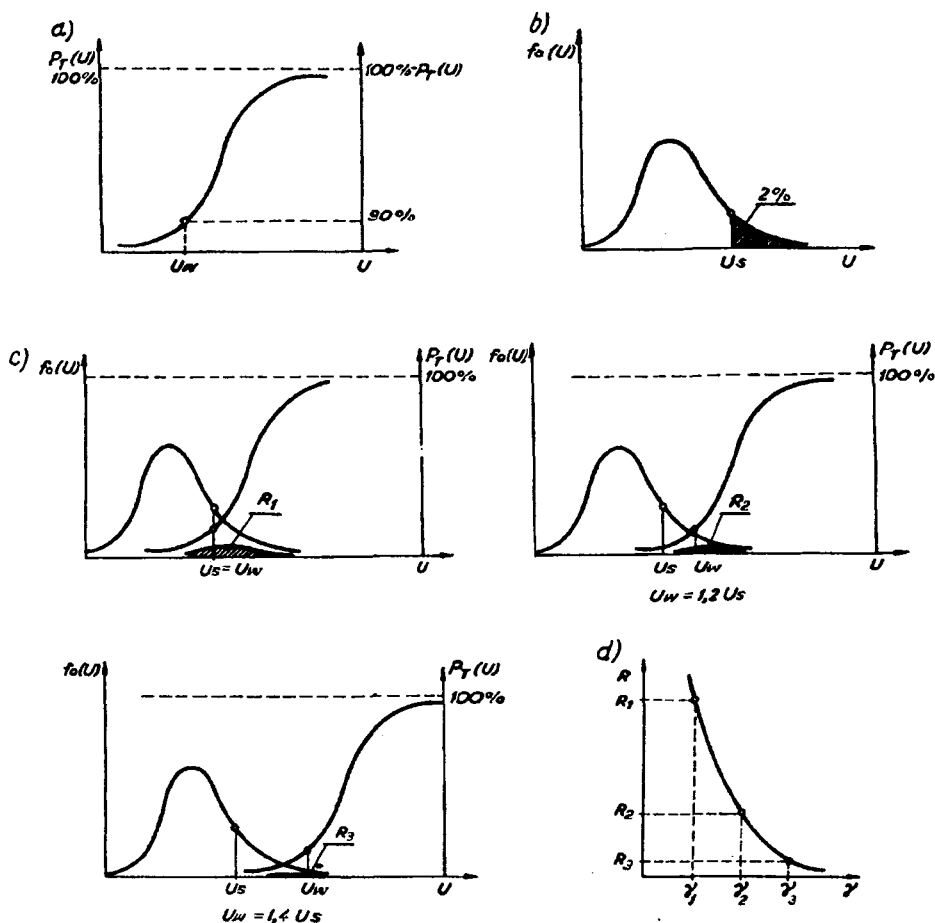
Szczegółowe instrukcje stosowania reguł statystycznych przy projektowaniu sieci najwyższych napięć znaleźć można w [4].

Stosowanie koncepcji statystycznej w postaci rozwiniętej wymaga stosowania metod numerycznych.



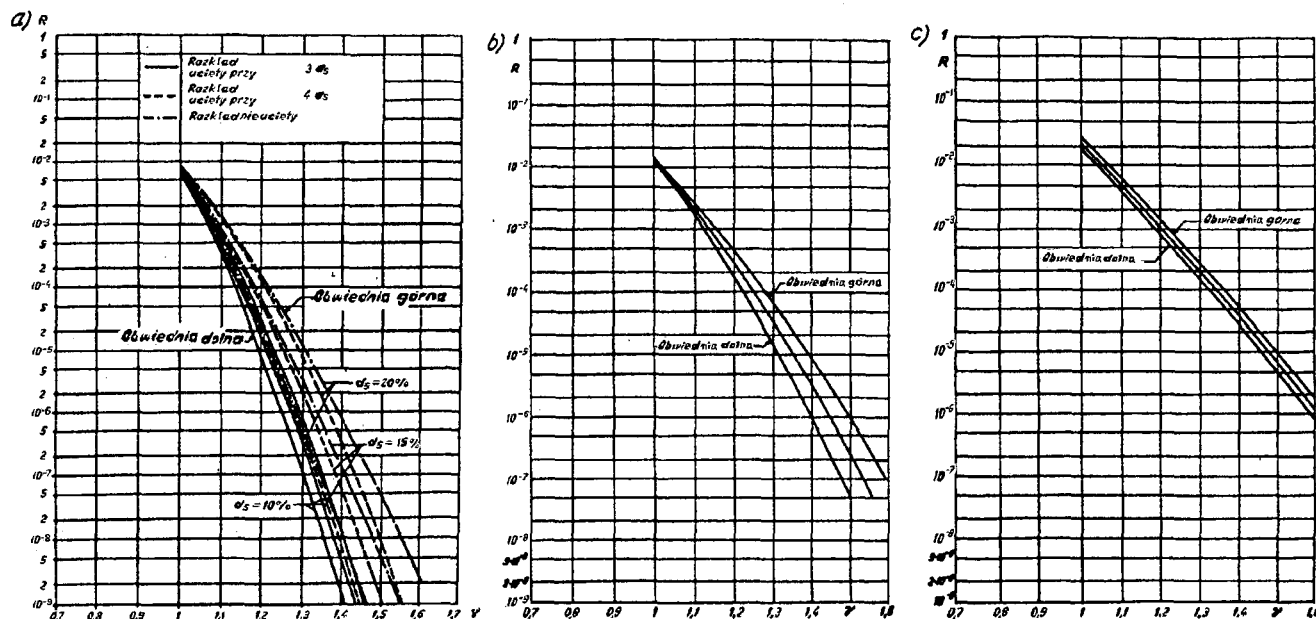
4.4.1.3. Uproszczona statystyczna koncepcja koordynacji izolacji [30]

W ramach Międzynarodowej Komisji Elektrotechnicznej (IEC) [30] zaproponowano uproszczoną wersję statystycznej koncepcji koordynacji izolacji. Metoda ta oparta jest na trzech pojęciach:



Rys. 43. Ilustracja uproszczonej statystycznej metody koordynacji izolacji [30]: a) graficzna interpretacja pojęcia: wytrzymałość statystyczna, b) graficzna interpretacja pojęcia: przepięcie statystyczne, c) trzy wartości ryzyka R dla trzech współczynników bezpieczeństwa $\gamma = 1; 1,2; 1,4$; d) zależność ryzyka przeskoku R od współczynnika γ





Rys. 44. Zależność między ryzykiem przekroku R i statystycznym współczynnikiem bezpieczeństwa γ dla różnych rozkładów pięć łączeniowych i różnych współczynników zmienności rozkładu wytrzymałości udarowej łączeniowej: a) 6%, b) 8%, c) 10% [30]



- wytrzymałość statystyczną U_w izolacji zdefiniowaną jako wartość szczytową udaru probierczego, której odpowiada prawdopodobieństwo niezastąpienia przeskoku równe 90% (rys. 43a);
- napięcie statystyczne U_s o wartości szczytowej charakteryzowanej prawdopodobieństwem zaistnienia przebiegu o wyższej wartości szczytowej równym 2% (rys. 43b),
- statystyczny współczynnik bezpieczeństwa wyrażony wzorem

$$\gamma = \frac{U_w}{U_s}. \quad (180)$$

Procedurę uproszczonej metody koordynacji izolacji najlepiej ilustruje rysunek 43. W oparciu o znajomość rozkładów napięć i wytrzymałości określa się wartości ryzyka R i współczynnika γ dochodząc do uniwersalnych wykresów $R = f(\gamma)$ (rys. 43d). Wykresy takie można skonstruować a priori zakładając różne kształty i parametry rozkładów napięć i wytrzymałości elektrycznej. Znajomość zależności $R = f(\gamma)$ pozwala z kolei oszacować wartość ryzyka R dla realnych wartości U_w i U_s definiujących γ .

Przykładowo na rysunku 44 podano wg [30] zależności $R = f(\gamma)$ dla napięć i wytrzymałości łączeniowej. Rysunek a) dotyczy rozkładu wytrzymałości o współczynniku zmienności $s_{\gamma} = 6\%$, a rysunek b) $s_{\gamma} = 8\%$ i c) $s_{\gamma} = 10\%$. Trzy zależności na każdym z rysunków obliczone są dla różnych parametrów rozkładu napięć:

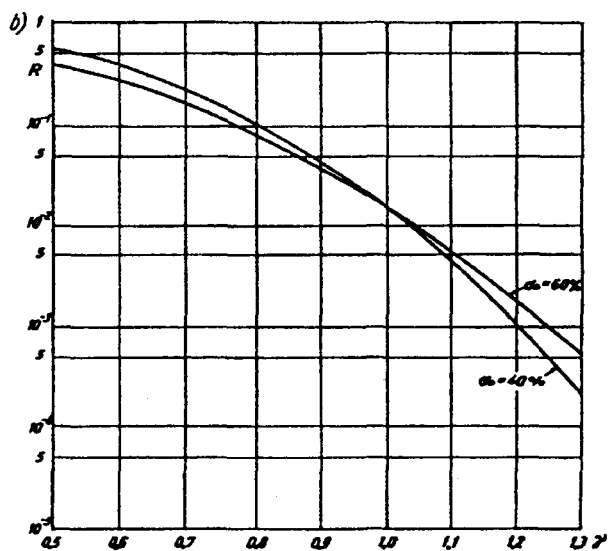
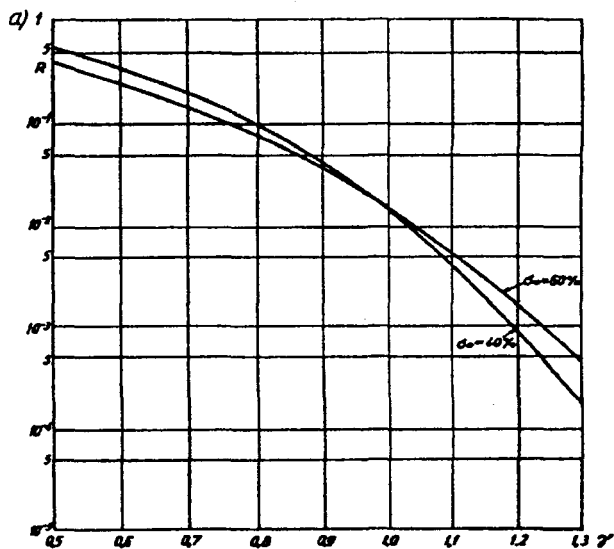
- górna obwiednia jest dla $S_{s\%} = 20\%$ i rozkładu normalnego nie uciętego,
- dolna obwiednia dotyczy $S_{s\%} = 10\%$ i rozkładu normalnego uciętego przy $3\sigma_s$,
- linia środkowa jest obliczona przy $S_{s\%} = 15\%$ i rozkładzie normalnym uciętym przy $4\sigma_s$.

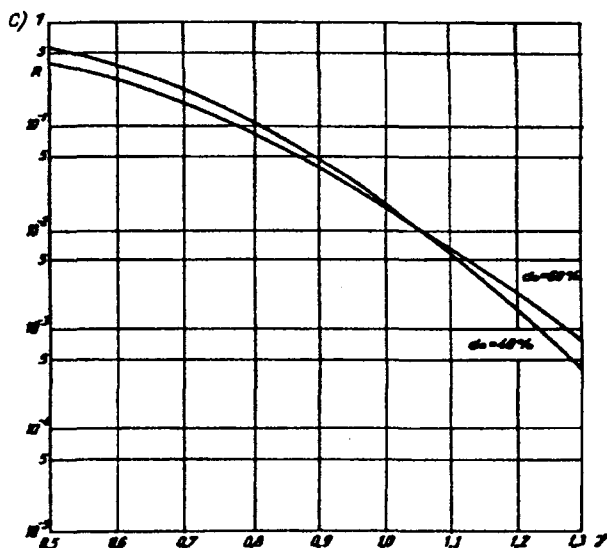
Rozkład udarowych łączeniowych napięć przeskoku przyjęto jako normalny nie ucięty.

Na rysunku 45 [30] podano zależności $R = f(\gamma)$ dla napięć i wytrzymałości piorunowej przy dwóch wartościach współczynnika zmienności dla napięć: 40% i 60% oraz dla trzech wartości współczynnika zmienności dla udarowych piorunowych napięć przeskoku: a) 3%; b) 5% i c) 7%. Stosowano rozkłady normalne nie ucięte.

Obliczanie ryzyka przeskoku dla współczynników zmienności rozkładów udarowych napięć przeskoku większych niż podane w pkt. 3.2.4.2 wynika z faktu iż dystrybucje napięć przeskoku wykorzystywane przy







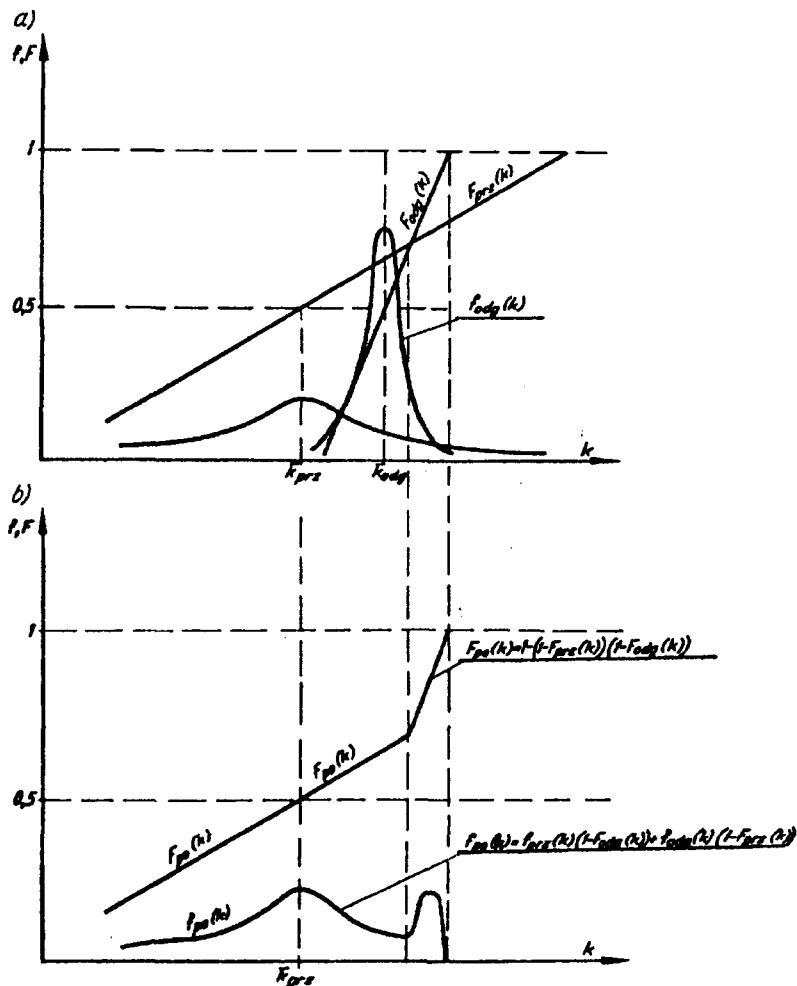
Rys. 45. Zależność między ryzykiem przeskoku R i statystycznym współczynnikiem bezpieczeństwa f dla rozkładów przepięć piorunowych o współczynnikach zmienności 40% i 60% oraz rozkładów uderowych piorunowych napięć przeskoku o współczynnikach zmienności: a) 3%; b) 5%, c) 7% [30]

koordynacji izolacji muszą uwzględniać zmienność warunków atmosferycznych w ciągu roku a stąd różnią się od uzyskiwanych w laboratorium w ściśle określonych warunkach zarówno wartością oczekiwaną, która maleje jak i znacznie większą wartością odchylenia standardowego.

4.4.1.4. Uwzględnienie odgromnika

W przypadku gdy równolegle z rozważanym odstępem izolacyjnym umieszczony jest ochronnik o gęstości prawdopodobieństwa zadziałania $f_{och}(U)$ i dystrybucie $F_{och}(U)$, należy uwzględnić fakt modyfikowania przez ochronnik (zwykle odgromnik) rozkładu krotności przepięć. Przykładowo ilustruje to rysunek 46, gdzie na rysunku a) przedstawiono usytuowanie względem siebie rozkładu przepięć i rozkładu napięć zapłonu ochronnika a na rysunku b) wykreślono rozkład przepięć zmodyfikowany dzia-

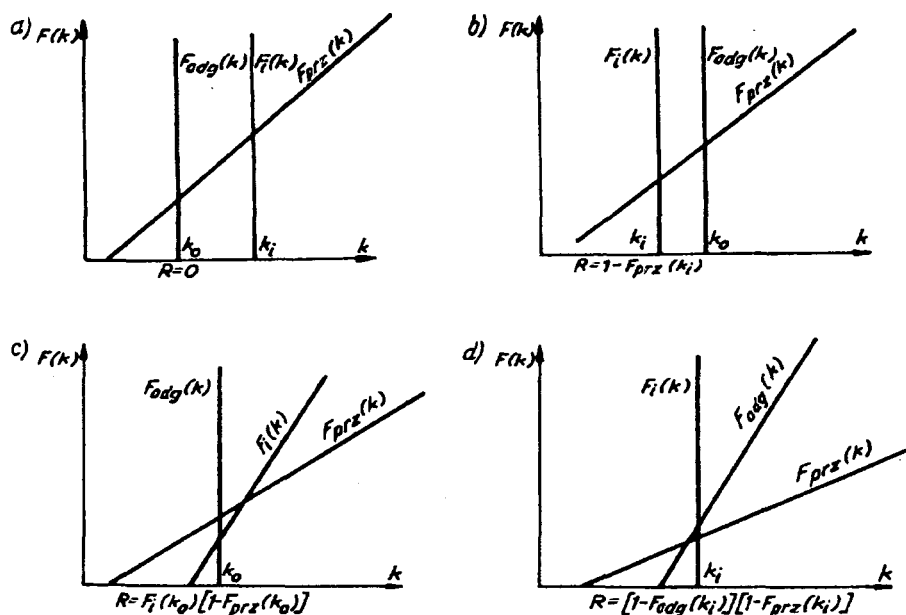




Rys. 46. Modyfikacja rozkładu prądów wskutek działania odgromnika [43]: a) usytuowanie względem siebie rozkładu prądów $F_{prz}(k)$ i napięć zapłonu odgromnika $F_{odg}(k)$; $f_{odg}(k)$; b) wynikowa gęstość prądów $f_{po}(k)$ i wynikowy rozkład prądów $F_{po}(k)$

łaniem ochronnika. Ryzyko przeskoku uzyska się w tym przypadku przez podstawienie do wzoru (178) zmodyfikowanej gęstości prądów $f_{po}(k)$.

Rozkład napięć zapłonu odgromnika charakteryzuje się znacznie mniejszym współczynnikiem zmienności niż rozkład prawdopodobieństwa zaistnienia przepięcia (rys. 46). Stąd dla uproszczenia obliczeń można posługiwać się charakterystyką odgromnika "idealnego". Przykłady wzajemnego usytuowania dystrybuant rozkładów charakteryzujących izolację, odgromnik i przepięcia zestawiono na rysunku 47. Na rysunku tym podano również wartości ryzyka przeskoku w izolacji dla poszczególnych przypadków.



Rys. 47. Przypadki szczególne usytuowania rozkładów przepięć, zapłonów odgromnika i przeskoku w izolacji [43]: a, b) idealny odgromnik i idealna izolacja, a) poziom ochrony poniżej poziomu izolacji, b) poziom ochrony powyżej poziomu izolacji, c) idealny odgromnik, d) idealna izolacja

$F_i(k)$ - rozkład napięć przeskoku w izolacji, pozostałe oznaczenia jak na rysunku 46

Ogólnie biorąc w układzie z n poziomami izolacji wynikającymi z prawdopodobieństw $F_i(k)$ wynikowe ryzyko przeskoku R_j w elemencie izolacyjnym o prawdopodobieństwie $F_j(k)$ jest dane wzorem [43]



$$R_j = \int_1^{k_{\max}} (1 - F_{\text{odg}}(k)) \prod_{i=1, i \neq j}^n (1 - F_i(k)) f_j(k) dk. \quad (181)$$

Znacznie bardziej złożonym przypadkiem jest wpływ działania odgromników na rozkład przepięć międzyfazowych i obliczanie ryzyka przekroczenia międzyfazowego. Problem ten jest omawiany w [42].

4.5. Ryzyko zagrożenia piorunowego obiektów budowlanych [21]

Charakter losowy zjawisk piorunowych i wywołanych nimi skutków sprawia, że ujęcie zagadnień ochrony odgromowej budowli wymaga stosowania elementów rachunku prawdopodobieństwa i teorii niezawodności. Staże się to coraz niezbędniejsze w miarę gromadzenia danych statystycznych dotyczących zarówno parametrów wyładowań piorunowych jak i rozmiarów powodowanych przez nie szkód.

Przewiduje się, że przyszłe ustalenia normalizacyjne oparte będą o zasady statystyczne.

Ryzyko zagrożenia obiektu budowlanego przez wyładowanie piorunowe, $R(t)$ jest funkcją czasu t i intensywności zakłóceń λ i może być wyrażone wzorem

$$R(t) = 1 - \exp(-\lambda \cdot t), \quad (182)$$

natomiast intensywność zakłóceń lub inaczej poziom ryzyka zagrożeń wynosi

$$\lambda = N \cdot P_S, \quad (188)$$

gdzie: N - roczna liczba trafień piorunowych w obiekt,

P_S - prawdopodobieństwo spowodowania szkody przez pojedyncze wyładowania.

Określenie N nie stanowi obecnie problemu. Trudność tkwi w określeniu P_S . Analizując szczegółowo mechanizm narażeń i wywoływanych nimi szkód, można to prawdopodobieństwo zapisać w postaci

$$P_S = \sum_{i=1}^n p_{oi} \left[1 - \prod_{j=1}^m (1 - p_j R_j) \right], \quad (184)$$



gdzie: p_{0i} - prawdopodobieństwo trafienia pioruna w wyodrębnioną część obiektu lub zwołu ($i = 1, 2, \dots, n$);

p_j - ryzyko wystąpienia j -tego skutku przy uderzeniu w i -tą część układu.

Prawdopodobieństwo p_{0i} jest związane z zagadnieniami wybiórczości wyładowań piorunowych i jest wyznaczane za pomocą teorii elektromagnetycznej. Ścisłe oszacowanie prawdopodobieństwa p_j jest możliwe w odniesieniu do niektórych przypadków zagrożeń konstrukcji. W wielu jednak przypadkach wobec braku odpowiednich danych statystycznych, wartości p_j muszą być szacowane arbitralnie przez wybór wartości z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$, przy uwzględnieniu najmniej korzystnych właściwości materiałowych i rozwiązań konstrukcyjnych. Ryzyko R_j związane jest z występowaniem takich skutków jak zapłony materiałów palnych lub wybuchowych, uszkodzenia mechaniczne lub termiczne elementów obiektu lub urządzeń piorunochronnych, porażenie ludzi lub zwierząt itp. Skutki te mogą wynikać bezpośrednio, z iskier wtórnych, napięć rażeniowych, uszkodzeń mechanicznych i termicznych itp. Wykorzystuje się tu zależność

$$R_j = \int_0^{\infty} g_j(z) \cdot P_j(z) dz. \quad (185)$$

Funkcje $g_j(z)$ opisujące rozkłady parametrów narażeń " z " są określone dzięki dostępnym danym statystycznym. Jeśli chodzi o rozkłady szkód $P_j(z)$, to nie we wszystkich przypadkach mogą być określone. Przy braku takiej możliwości niezbędne staje się określenie krytycznej wartości parametru Z_s , przy której $P_j(z < Z_s) = 0$ oraz $P_j(z > Z_s) = 1$ wówczas

$$R_j = \int_{Z_s}^{\infty} g_j(z) dz = G_j(z > Z_s). \quad (186)$$

Za kryterium oceny zagrożenia obiektu przyjmuje się wartość krytyczną ryzyka R_k lub intensywności zakłóceń $\mathcal{A}_k$ odniesioną do jednego roku. Wartości oszacowane z wzorów (182) i (183) winny być co najwyżej równe wartościom krytycznym. Zaleca się by $R_k = 10^{-5}$ dla obiektów szczególnie wartościowych lub zagrożonych wybuchem, 10^{-4} dla obiektów o cennej zawartości i dużej liczbie ludzi i 10^{-3} dla pozostałych obiektów.

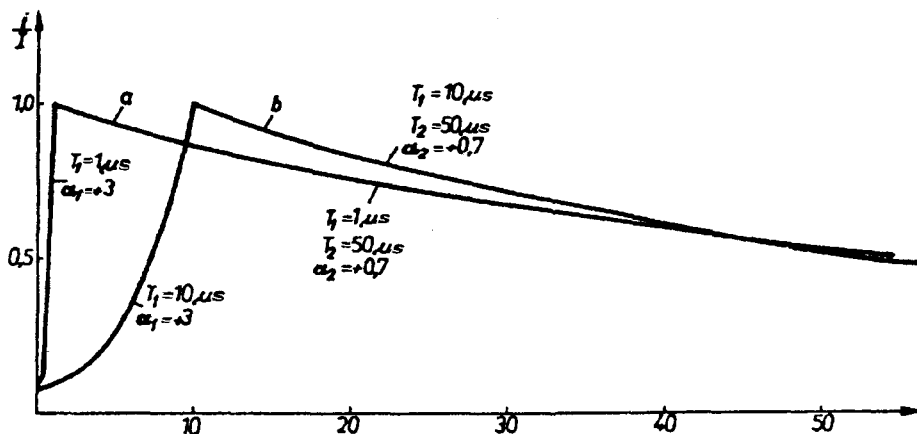
Jeśli oszacowane ryzyko jest większe od krytycznego to należy zastosować dodatkowe środki ochrony.



5. WYBRANE ZAGADNIENIA ZASTOSOWAŃ STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ W TEORII PRZEPIEC

5.1. Statystyczny opis przepięć piorunowych

Wyładowanie atmosferyczne jest źródłem przepięć w układach elektroenergetycznych. Podczas wyładowań piorunowych zachodzą złożone procesy fizyczne, które w ogromnym skrócie można przedstawić jako szereg impulsów prądowych płynących w tym samym kanale wyładowczym, a mających różne wartości szczytowe i kształty. Do celów obliczeniowych wykorzystuje się uproszczone, zastępcze kształty impulsu piorunowego [20] wykorzystujące dwa pojęcia: wartość szczytową prądu pioruna I_p oraz maksymalną stromosć narastania prądu pioruna wyrażoną pochodną $a_p = (di/dt)_{\max}$. Przykładowe zastępcze kształty impulsu prądu pioruna pokazano na rysunku 48.



Rys. 48. Zastępczy kształt impulsu prądu pioruna [20]

$$i = I_p \exp\left[-\frac{\alpha_1(t - T_1)}{T_1}\right] \text{ dla } t \leq T_1; \quad i = I_p \exp\left[-\frac{\alpha_2(t - T_2)}{T_2 - T_1}\right] \text{ dla } t > T_1$$

T_1 - czas trwania czoła [μs], T_2 - czas do półszczytu [μs],
 α_1 i α_2 - współczynniki związane z rozkładem statystycznym wartości T_1 i T_2

Zarówno wartość szczytowa jak i stromość prądu pioruna zależą od dużej liczby czynników losowych i stanowią układ dwóch zmiennych losowych. Liczne pomiary wykonane w liniach i podstacjach elektroenergetycznych, w wysokich obiektach itp. wykazały, że wartość szczytowa i stromość prądu pioruna zmieniają się w szerokich granicach a ich rozkłady mogą mieć postać wykładniczą [70]:

$$P(I > I_p) = F(I_p) = \exp(-k_i I_p), \quad (187a)$$

$$P(a > a_p) = F(a_p) = \exp(-k_a a_p), \quad (187b)$$

gdzie I_p i a_p są wyrażone odpowiednio w [kA] i [kA/μs]. Wartości współczynników k wynoszą przykładowo wg danych radzieckich [70] dla równinnych terenów ZSRR (do 50 m npm): $k_i = 1/26 \text{ kA}^{-1}$, $k_a = 1/15,6 \text{ μs/kA}$ a dla terenów górzystych (powyżej 700 m npm) wartość tych współczynników maleje dwukrotnie.

Jednoczesnych pomiarów I_p i a_p jest stosunkowo mało. Analiza tych danych wykazuje, że stromości i wartości szczytowe są słabo ze sobą skorelowane i stąd w pierwszym przybliżeniu przyjmuje się, że są to zmienne losowe niezależne, czyli że [70]:

$$P(I > I_p, a > a_p) = P(I > I_p) P(a > a_p), \quad (188a)$$

lub

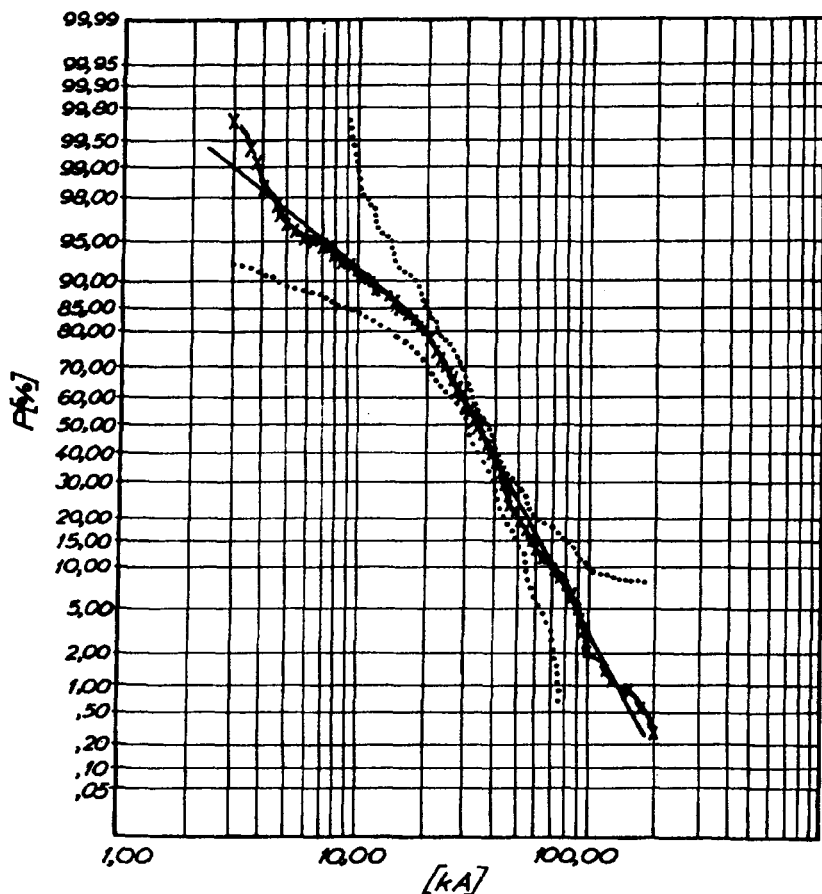
$$F(I_p, a_p) = \exp[-(k_i I_p + k_a a_p)]. \quad (188b)$$

Obecnie w ramach prac Międzynarodowej Konferencji Wielkich Wysokonapięciowych Sieci Elektrycznych /GIGRE/ [10], [5] ustalono, że parametry opisujące wyładowania atmosferyczne mogą być opisane rozkładem logarytmo-normalnym

$$P(I > I_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\log I}} \int_0^I \frac{1}{I} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\log I - \log \bar{I}}{\sigma_{\log I}}\right)^2\right] dI \quad (189)$$

o parametrach $\bar{I} = 25 \text{ kA}$, $\sigma_{\log I} = 0,39$. Dotyczy to wyładowania ujemnego, dla którego zebrano największą liczbę danych eksperymentalnych.





Rys. 49. Dystrybuanta prądów pioruna dla ujemnych wartości szczytowych [10]

Dane eksperymentalne wykreślone w siatce rozkładu logarytmo-normalnego (rys. 49) sugerują, że znacznie lepszą aproksymację uzyska się stosując rozkład logarytmo-normalny dwumodalny. Punkty definiujące górną i dolną gałąź tego rozkładu podano w tabeli 22.

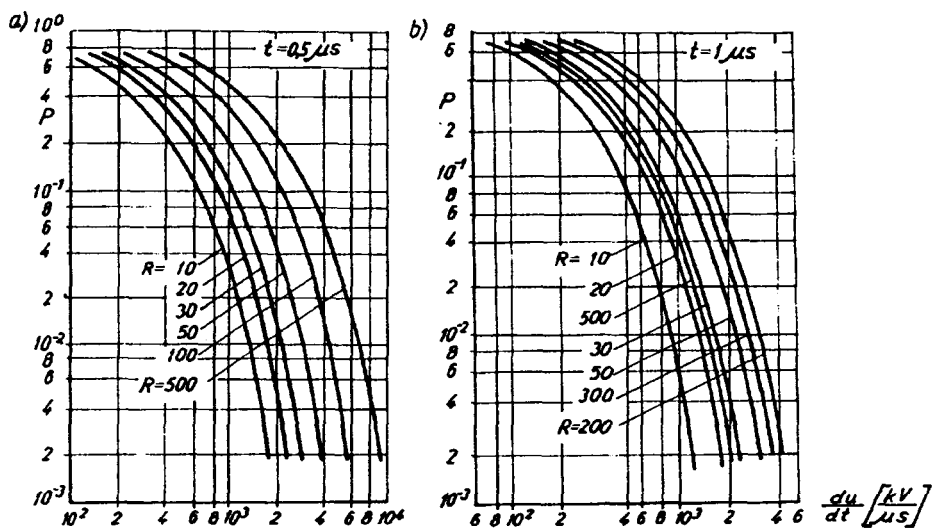
Danych dotyczących wyładowań dodatnich jest bardzo mało. Orientacyjne wartości parametrów rozkładu logarytmo-normalnego dla wyładowań dodatnich wynoszą wg [10]: $\bar{I} = 36 \text{ kA}$, $G_{\log I} = 0,41$.



T a b e l a 22

Punkty definiujące dwumodalny rozkład prądów pioruna z rysunku 49 [5], [10]

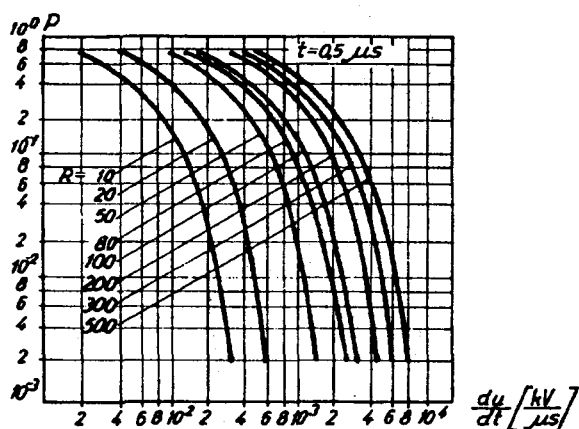
Gałąź górna		Gałąź dolna	
I [kA]	P [%]	I [kA]	P [%]
4	98	20	80
10	90	90	5



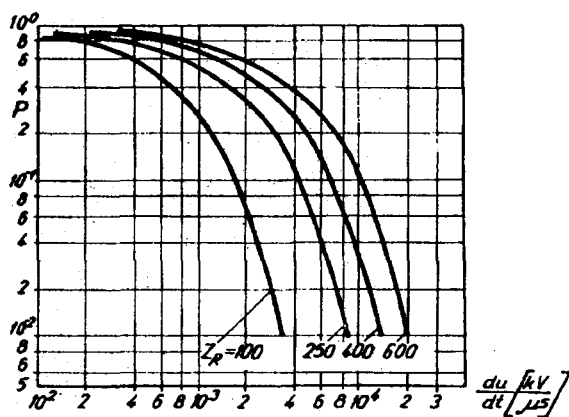
Rys. 50. Prawdopodobieństwo przekroczenia danej stromości udaru dU/dt przy porażeniu słupów o różnej rezystancji uziemienia [36]: a) po $0,5 \mu s$ od chwili wyładowania, b) po $1 \mu s$ od chwili wyładowania

Wartości szczytowe prądów pioruna i stromości prądów pioruna są podstawą do określenia parametrów przepięć piorunowych w liniach i stacjach elektroenergetycznych.





Rys. 51. Prawdopodobieństwo przekroczenia danej stromości uderu du/dt przy wyładowaniu do przewodu odgromowego, dla różnych rezystancji uziemienia słupów [36]



Rys. 52. Prawdopodobieństwo przekroczenia danej stromości przebiecia przy przedarciu się wyładowania przez strefę osłonową przewodu odgromowego, dla linii o różnych impedancjach falowych Z_R , z uwzględnieniem ułotu i chwilowej wartości napięcia na przewodzie [36]



Przebiegi występujące w liniach elektroenergetycznych wskutek bezpośrednich uderzeń pioruna zależą dodatkowo od konstrukcji i parametrów samej linii i są przedmiotem badań obszernego działu techniki wysokich napięć jakim jest teoria przebiegów. Tutaj ograniczono się jedynie do zarejestrowania kilku ciekawych wyników obliczeń statystycznych dotyczących stromości przebiegów piorunowych w linii. Od stromości tych przebiegów w dużej mierze zależy bowiem narażenie izolacji liniowej i izolacji wewnętrznej urządzeń stacyjnych.

Na rysunku 50-52 podano rozkłady stromości przebiegów piorunowych w linii przy odpowiednio wyładowaniu do słupa, do przewodu odgromowego i przy bezpośrednim uderzeniu w przewód roboczy. Jak widać przy tym samym prawdopodobieństwie ze wzrostem rezystancji uziemienia słupa lub impedancji linii, stromość przebiegu rośnie. Widać również, że stromość maleje w funkcji czasu tym szybciej im wyższa jest rezystancja uziemienia (rys. 50). Rysunek 52 może służyć do oceny stromości przebiegów piorunowych w liniach bez przewodu odgromowego. Jak wynika z tego rysunku w liniach średnich napięć (bez przewodów odgromowych) możliwe są, z dużym prawdopodobieństwem, przebiegi o stromościach 2000 kV/ μ s i większych.

Z innych szczegółowo omawianych w teorii przebiegów zagadnień rozwiązywanych w oparciu o rachunek prawdopodobieństwa i statystykę matematyczną wymienić należy:

- określenie prawdopodobieństwa przeskoku w izolacji przy bezpośrednim uderzeniu pioruna,
- ocenę oczekiwanej liczby wyłączeń linii wskutek bezpośrednich uderzeń pioruna.

Zagadnienie to omówiono w [31], [32], [77].

5.2. Przebiegi piorunowe indukowane

Wartość szczytowa napięcia występującego na izolacji linii energetycznej przy bliskich uderzeniach pioruna ma dwie składowe: magnetyczną i elektryczną i zależy od wartości szczytowej i stromości prądu pioruna oraz wysokości i odległości miejsca uderzenia. W obliczeniach przybliżonych przyjmuje się, że [32], [70]

$$U_{ind} = A \cdot \frac{I_p \cdot h}{b}, \quad (190)$$



gdzie: I_p - wartość szczytowa prądu pioruna [kA],
 h - wysokość zawieszenia przewodów roboczych linii [m],
 b - odległość uderzenia od linii [m],

A - współczynnik liczbowy wynoszący wg [32] 25, a wg [70] 30.

W związku z tym, że parametry wyładowania piorunowego, w tym i wartość szczytowa prądu pioruna mają rozrzut losowy, celowym jest określenie parametrów przepięć indukowanych w zależności od ich wartości szczytowej.

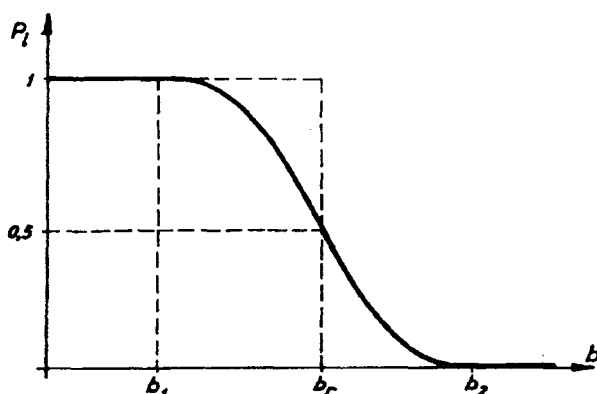
Można określić liczbę wyładowań atmosferycznych w ciągu roku N_{ind} prowadzącą do powstawania w linii przepięć indukowanych o wartości szczytowej powyżej $U_{i\ max}$. W tym celu należy rozważyć powierzchnię ziemi o szerokości db odległą od osi linii o b . Ogólna liczba wyładowań atmosferycznych w tę powierzchnię w ciągu roku wynosi

$$dN_u = n_p \cdot n_d \cdot l \cdot db(1 - P_1), \quad (191)$$

gdzie: n_p - średnia liczba wyładowań w ciągu 1 dnia burzowego na powierzchnię $1\ km^2$ (przyjmuje się $n_p = 0,1$ dla okolic równinnych i $n_p = 0,01 \div 0,02$ w okolicach górzystych),

n_d - liczba dni burzowych w ciągu roku (odczytywana z odpowiednich map izokeraunicznych) zestawiających średnie liczby dni burzowych w roku [20, 31, 32],

l - długość linii [km].



Rys. 53. Rozkład prawdopodobieństwa wyładowań bezpośrednio do linii przy rozwoju wyładowań piorunowych w pasie odległym od b_1 do b_2 od osi linii [70]



Prawdopodobieństwo P_1 charakteryzuje możliwości uderzenia pioruna w linię. Przykładową postać rozkładu P_1 podaje rysunek 53. Wszystkie wyładowania atmosferyczne rozwijające się nad pasem o szerokości $\pm b_1$ wokół linii uderzają bezpośrednio w linię. Wszystkie wyładowania atmosferyczne rozwijające się nad powierzchnią ziemi za granicą $\pm b_2$ uderzają w ziemię. W obszarze między b_1 a b_2 istnieje prawdopodobieństwo P_1 uderzenia w linię i $1 - P_1$ - uderzenia w ziemię. Dla uproszczenia obliczeń przyjmuje się, że w pasie do $\pm b_r$ wszystkie wyładowania są do linii ($P_1 = 1$) a poza tą strefą do ziemi ($P_1 = 0$) (rozkład prostokątny). Zwykle przyjmuje się $b_r = (2 \div 4)h$ [5].

Aby przy uderzeniu pioruna w pasie db napięcie indukowane przekraczało $U_{i \max}$, to wartość szczytowa prądu pioruna w oparciu o (190) winna wynosić

$$I_{\max} > \frac{U_{i \max}}{A \cdot h} b, \quad (192)$$

natomiast prawdopodobieństwo występowania takich prądów zgodnie np. z (187a) wynosi

$$P(I > I_{\max}) = \exp(-k_i I_{\max}), \quad (193a)$$

stąd

$$P(U > U_{i \max}) = \exp\left(-\frac{k_i U_{i \max}}{A \cdot h} b\right). \quad (193b)$$

Zatem liczba przepięć indukowanych o wartości szczytowej powyżej $U_{i \max}$ zachodzących wskutek wyładowań w pasie db wynosi

$$dN_{ind} = P(U > U_{i \max}) dN_U. \quad (194)$$

Dla określenia całkowitej liczby N_{ind} o wartości szczytowej powyżej $U_{i \max}$ trzeba scałkować wyrażenie (194) po powierzchni ziemi w obie strony od linii poza odległością $\pm b_r$ w pasie db:

$$N_{ind} = 2 \int_{b_r}^{\infty} dN_{ind} = 2 \int_{b_r}^{\infty} n_p n_d \cdot l \cdot \exp\left(-\frac{k_i U_{i \max}}{A \cdot h} b\right) db, \quad (195)$$



stąd

$$N_{ind} = \frac{2 \cdot A \cdot n_p \cdot n_d \cdot 1}{k_i \cdot U_{i \max}} \frac{h}{\exp\left(-\frac{k_i U_{i \max}}{A \cdot h} b_r\right)}. \quad (196)$$

Przy podstawieniu do wzoru (196) należy pamiętać, że współczynniki liczbowe w tym wzorze mają wymiar $A \left[\frac{kV}{kA} \right]$.

5.3. Przepięcia łączeniowe [70]

5.3.1. Wprowadzenie

Przy wszelkiego rodzaju operacjach łączeniowych w systemie elektroenergetycznym powstają przepięcia łączeniowe charakteryzowane współczynnikiem przebieg

$$k_L = \frac{U_{\max}}{U_{r \max}}, \quad (197a)$$

gdzie: $U_{\max}$ - maksymalna wartość przebiegu,

$U_{r \max}$ - maksymalne napięcie robocze.

Współczynnik przebieg można również przedstawić w postaci

$$k_L = \frac{U_w}{U_{r \max}} \cdot \frac{U_{\max}}{U_w} = k_w \cdot k_u, \quad (197b)$$

gdzie: k_w - krotność wymuszonej składowej przebieg łączeniowych w nowym stanie pracy układu,

k_u - stosunek maksymalnej wartości składowej przejściowej do maksymalnej wartości składowej wymuszonej.

Wartość k_w zależy od dużej liczby czynników wynikających zarówno ze stanu pracy jak i schematu układu. Czynniki te należy w momencie łączenia rozpatrywać jako wielkości losowe np. liczba i moc pracujących w danej chwili generatorów, transformatorów, odbiorników energii, linii itp. Czynniki te związane ze stanem pracy układu zmieniają się w ciągu doby i w ciągu roku.

Niech krotność k_w zmienia się w granicach $k_{w \min}$ do $k_{w \max}$, przy czym dolna granica odpowiada maksymalnej mocy generatorów, pełnej liczbie włączonych linii, dławików itp., a górna odpowiada liczbom minimalnym. Gęstość rozkładu tej krotności można przedstawić w postaci



$$f(k_w) = A/k_w^q, \quad (198a)$$

gdzie współczynnik A można wyznaczyć z warunku

$$\int_{k_w \min}^{k_w \max} f(k_w) dk_w = 1 \quad (198b)$$

i wynosi

$$A = (q - 1) \frac{k_w^{q-1} \max \cdot k_w^{q-1} \min}{k_w^{q-1} \max - k_w^{q-1} \min} \quad (198c)$$

Wykładnik q zależy od mocy układu, w którym zachodzi łączenie i od reaktancji indukcyjnej. Im większa moc układu tym rozkład k_w jest bliższy rozkładowi równomiernemu. Dla układu z dławikami bocznikującymi $q \approx 2$, a dla układów elektroenergetycznych bez takich dławików gdy reaktancja rośnie $q \approx 5$.

Współczynnik k_u zależy od rodzaju łączenia i warunków jego zaistnienia, a także od parametrów schematu. Przy danym rodzaju łączenia i danym schemacie k_u jest zmienną losową i zależy od chwilowej wartości siły elektromotorycznej źródła w momencie łączenia, od rozrzutu czasów łączenia w poszczególnych fazach układu wielofazowego, od wartości początkowych napięć i prądów w elementach schematu i od wielu innych czynników. Określenie rozkładu dla k_u rozpatrzono na przykładzie.

5.3.2. Przykład załączania nieobciążonej linii

Przypadek załączania jednofazowej nieobciążonej linii charakteryzuje się stanami nieustalonymi mającymi charakter oscylacyjny. Współczynnik k_u zależy od parametrów schematu i kąta załączania. Siła elektromotoryczna w chwili załączania wyniesie

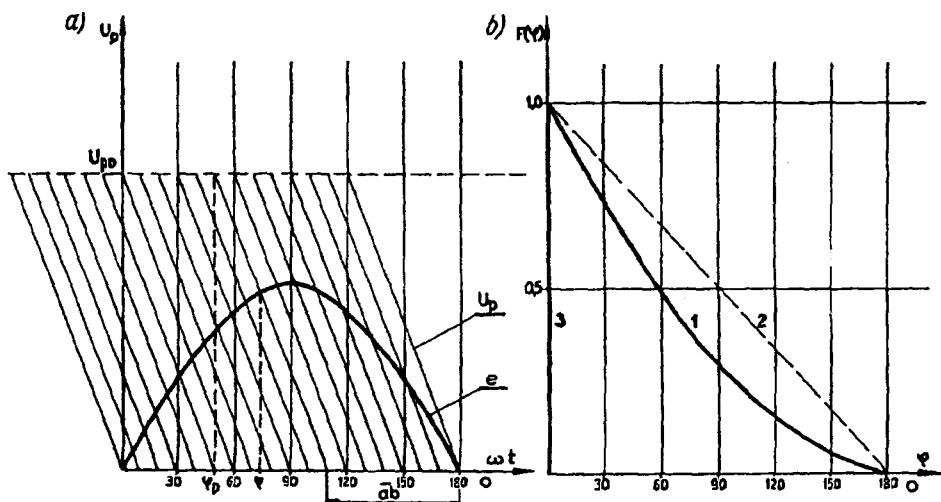
$$e = E \sin(\omega t + \varphi). \quad (199)$$

Kąta załączania φ jest wielkością losową zależną od charakterystyki wyłącznika. Chwila, w której wyłącznik zaczyna pracować i rozpoczyna się ruch jego styków ma jednakowe prawdopodobieństwo w ciągu całego półokresu czyli jest zmienną losową o rozkładzie równomiernym.



Zamknięcie obwodu zachodzi wówczas gdy styki zbliżą się na taką odległość, dla której zaistnieje między nimi przeskok. Kąt załączenia określony jest przez dwie charakterystyki:

- krzywą malenia napięcia przeskoku w funkcji odległości między stykami;
- krzywą zmian przyłożonego do styków napięcia – w tym przypadku siłą elektromotoryczną źródła.



Rys. 54. Sposób wyznaczania rozkładu $F(\varphi)$: a) przebieg zmian napięcia na stykach wyłącznika i zmiana napięcia przeskoku w funkcji odległości styków, b) rozkład 1 wyznaczony z rysunku a

Kąt włączenia φ jest ciągłą funkcją argumentu losowego - kąta początku ruchu styków wyłącznika φ_p - dlatego rozkład można określić w oparciu o rozkład φ_p .

Na rysunku 54 przyjęto, że napięcie przeskoku między stykami maleje liniowo. Punkty przecięcia prostych napięcia przeskoku z sinusoidą dają kąty załączenia φ a długość odcinka $\overline{ab}$ w stopniach, podzielona przez 180° daje prawdopodobieństwo tego, że kąt początku ruchu styków będzie większy od φ_p czyli że kąt włączenia φ będzie większy od φ_p . Na rysunku 54b linią 1 pokazano funkcję rozkładu $F(\varphi)$ zbudowaną w oparciu o rysunek 54a.

Gdyby prędkość zmian napięcia przeskoku $\frac{dU_p}{dt} \rightarrow \infty$ to rozkład $F(\varphi)$ zmierzałby do rozkładu równomiernego (rys. 54b - linia 2); przy $\frac{dU_p}{dt} \rightarrow 0$



rozkład $F(\varphi)$ przybiera postać funkcji Diraca (linia 3). Zatem im szybciej działający jest wyłącznik tym szerszy jest zakres wartości kąta φ i tym bliżej rozkładu równomiernego jest rozkład $F(\varphi)$.

Doświadczalne funkcje rozkładów często istotnie różnią się od teoretycznych co oznacza, że przyjęte założenia są mało dokładne. W praktyce spotyka się rozkład normalny ucięty jako dobrą aproksymację doświadczalnych rozkładów φ .

Mając określony rozkład kątów załączania można określić rozkład dla współczynników k_u . W tym celu dodatkowo konieczna jest znajomość funkcjonalnej zależności $k_u = f(\varphi)$. Przybliżone rozwiązanie tego zagadnienia, prawidłowo oddające charakter zjawiska, można uzyskać rozważając załączanie do źródła siły elektromotorycznej danej wzorem (199) obwodu drgającego R, L, C , w którym napięcie na pojemności C jest analogiem do napięcia na końcu linii. Jeśli rezystancja układu jest znacznie mniejsza od reaktancji to wpływ rezystancji na amplitudę i fazę składowej wymuszonej i swobodnej można pominąć. Wówczas krotność przebiegu wyniesie:

$$\frac{U}{U_w} = \sin(\omega t + \varphi) - \sqrt{\sin^2 \varphi + \left(\frac{\omega}{\omega_1} \cos \varphi\right)^2} e^{-\delta_1 t} \sin(\omega_1 t + \varphi), \quad (200)$$

gdzie: $\omega_1 = 1/\sqrt{LC}$ - częstotliwość drgań własnych,

$\delta_1 = R/2L$ - współczynnik tłumienia,

$$\varphi_1 = \arctg \frac{\omega}{\omega_1} \operatorname{tg} \varphi.$$

Pierwszy człon to składowa wymuszona, a drugi - swobodna (rezonansowa). Amplituda składowej swobodnej równa jest amplitudzie składowej wymuszonej przy $\varphi = 90^\circ$ i maleje z maleniem φ . Wyrażenie (200) osiąga maksimum w chwili gdy obie składowe osiągają w przybliżeniu maksimum np. przy $\omega_1/\omega = 2$ i $\varphi = 90^\circ$ maksimum występuje w okolicy półokresu częstotliwości sieciowej:

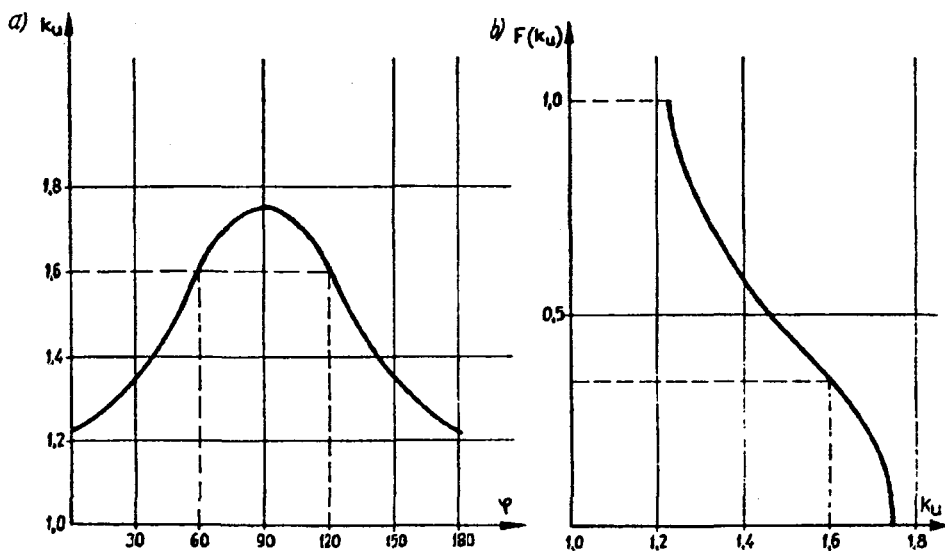
$$\frac{U}{U_w} = \cos \omega t - e^{-\delta_1 t} \cos \omega_1 t, \quad (201a)$$

$$\frac{U_{\max}}{U_w} = \cos \frac{\omega T}{2} - e^{-\delta_1 \frac{T}{2}} \cos 2\omega \frac{T}{2} = \cos \pi - e^{-\delta_1 \frac{T}{2}} \cos 2\pi, \quad (201b)$$

$$k_u = \left| \frac{U_{\max}}{U_w} \right| = 1 + e^{-\delta_1 \frac{T}{2}}. \quad (201c)$$



Przykładową zależność $k_U = f(\varphi)$ dla $\omega_1/\omega = 2$ pokazano na rysunku 55a. Według tej krzywej można określić zakres kątów, przy których k_U jest większe od zadanej wartości. Przykładowo dla $k_U = 1,6$ z rysunku 55a odczytuje się $\varphi_1 = 60^\circ$ i $\varphi_2 = 120^\circ$. Prawdopodobieństwo wystąpienia $k_U > 1,6$ to prawdopodobieństwo występowania kątów załączania φ w przedziale $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$. Prawdopodobieństwo to znajduje się jako różnicę $F(\varphi_1) - F(\varphi_2)$. Przykładowo z rysunku 54b odczytano $F(60^\circ) = 0,49$ i $F(120^\circ) = 0,150$; stąd $F(1,6) = 0,490 - 0,150 = 0,240$. W ten sposób można uzyskać rozkład $F(k_U)$. Przykład rozkładu $F(k_U)$ uzyskany na podstawie rysunku 55a i 54b podano na rysunku 55b.



Rys. 55. Sposób wyznaczania rozkład $F(k_U)$; a) zależność funkcjonalna $k_U = f(\varphi)$ [15]; b) rozkład $F(k_U)$ wyznaczony z rysunku a

Współczynniki przecięć wymuszonych i swobodnych stanowią układ dwóch zmiennych losowych, które mogą być rozważane jako niezależne. Stąd znając rozkłady dla k_w i k_U można określić rozkład dla współczynnika przecięć łączeniowych k traktując k_w i k_U łącznie jako iloczyn dwóch zmiennych losowych.



6. PUŁAPKI ZWIĄZANE ZE STOSOWANIEM STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ

6.1. Statystyka a wiedza inżynierska

Przy korzystaniu z metod statystycznych istnieje jedno lecz poważne niebezpieczeństwo polegające na formalnym, bezkrytycznym stosowaniu statystyki matematycznej. Skutki takiego podejścia mogą być tro-
jakie.

1. Oderwanie się od fizycznych podstaw między prawdopodobieństwem a mechanizmem wyładowań elektrycznych; oprócz uogólnień uzyskanych w oparciu o statystykę matematyczną inżynier winien analizować wynik każdej pojedynczej próby w oparciu o znajomość fizyki badanego zjawiska. Uzyskane w ten sposób informacje są cennym uzupełnieniem do rozważań statystycznych, pozwalają postawić hipotezę o rozkładzie lub zrozumieć sens przyjmowanych założeń. Zaleceniem jest więc jak najbardziej krytyczne podejście do stosowania każdej szczególnej funkcji statystycznej i konsekwentne łączenie dyskusji statystycznej z dyskusją dotyczące aspektów fizycznych, jeżeli tylko jest to możliwe.

2. Nie branie pod uwagę zmian w czasie obiektu badań; w przypadku izolacji wewnętrznej są to problemy starzeniowe czy problemy kondycjonowania: zjawiska takie mogą zakłócać niezależność statystyczną poszczególnych doświadczeń.

3. Nie uwzględnienie specyfiki zastosowanej metody badawczej i wpływu tej metody na uzyskiwane wyniki.

Tak więc stosowanie statystyki matematycznej musi być wsparte solidną wiedzą inżynierską i wymaga skrupulatności i rzetelności.

6.2. Pułapki statystyki i elementarne porady praktyczne

1. Podstawową niekonsekwencją przy stosowaniu metod statystycznych jest niezależność etapów planowania badań i opracowywania wyników. Tylko w przypadku gdy zasady statystyki matematycznej są wykorzystane zarówno w jednym jak i drugim etapie osiąga się założony nieprzypadkowy cel. Zatem godne polecenia jest dobieranie metod ekspery-



mentu, niezbędnej liczności próbki wyników i metod ich opracowania pod kątem zamierzeń a nie poszukiwanie "jakichkolwiek" metod statystycznych do posiadanych wyników eksperymentu.

2. Wyniki obliczeń statystycznych są trudne do skontrolowania jeśli tylko "nie wydają się" być niedorzeczne. Takie metody kontroli obliczeń jak [1]:

- dziedzina prawdopodobieństwa $<0,1>$,
 - warunek niemalenia wartości dystrybucyjny,
 - jednostkowa wartość całki z funkcji gęstości,
 - jednostkowa wartość sumy prawdopodobieństw układu zupełnego zdarzeń,
- stanowią zestaw wstępnych środków kontroli, tylko w małym stopniu zapewniający poprawność wyniku. Godnym polecenia jest więc przejrzyste i konsekwentne, od szeregu rozdzielnego i kumulacyjnego do ostatecznego wyniku, dokumentowanie wnioskowania statystycznego. Każdy z elementów wnioskowania statystycznego jest nośnikiem dodatkowej informacji mogącej ustrzec od błędów.

3. Posługiwanie się wartościami średnimi jest powszechne, oparte na prostym obliczeniu i często uzasadnione teoretycznie. Przykładowo w technice wysokich napięć w powszechnym użyciu jest pięćdziesięcioprocentowe napięcie przeskoku (lub przebicia) oznaczone jako U_{50} , szacowane często jako średnia z zaobserwowanych napięć przeskoku. W sensie statystycznym U_{50} jest medianą czyli wartością zmiennej losowej, dla której prawdopodobieństwo wynosi 0,5. Zatem posługiwanie się wartością średnią jako oszacowaniem mediany jest poprawne tylko wówczas gdy rozkład jest rozkładem symetrycznym (np. Gaussa), zaś ze wzrostem asymetrii rozkładu błąd posługiwania się średnią rośnie.

Inny błąd wynikający z nieuzasadnionego posługiwania się wartościami średnimi może wynikać z różnicy w tendencjach zmian między wartościami średnimi a ekstremalnymi. Typowym przykładem mogą być tu zależności naprężeń przebicia odstępów olejowych od objętości oleju szczególnie naprężanego (rys. 40a i b) gdzie wykres dla wartości średnich (a) zasadniczo różni się od wykresu uzyskanego dla wartości zmiennej o prawdopodobieństwie bliskim zeru (b).

4. Pewne wątpliwości budzi czasem posługiwanie się rozkładem Weibulla, głównie w zakresie rozkładu trójparametrowego gdy szacowanie trzech nieznanymi parametrów stwarza pewną trudność. Należy jednak podkreślić, że wówczas gdy rozeznanie mechanizmu zjawiska jednoznacznie wskazuje na istnienie pewnej progowej wartości zmiennej losowej, tyl-



ko trójparametrowy rozkład może zapewnić oszacowania poprawne. Stosowanie rozkładu dwuparametrowego, mimo formalnie spełnionych kryteriów statystycznych, prowadzi do oszacowań zasadniczo różnych i raczej niepoprawnych.

5. Posługiwanie się jakąkolwiek z zależności statystycznych warunkowane jest zawsze spełnieniem określonych założeń. W przeciwnym przypadku popełniony zostaje błąd, który przy formalnej "poprawności" wyniku nie będzie wykryty. Przykładem może być stosowanie testu zgodności χ^2 (pkt. 2.3.6.5) w metodzie dystrybucyjnej empirycznej zamiast w metodzie histogramu, dla której to metody został opracowany. Dobrze jeśli błąd taki popełnia się świadomie i znana jest jego tendencja.

6. Zarówno poziom ufności jak i poziom istotności nie mogą być określone z jakichkolwiek założeń teorii prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Dla wyboru wartości tych poziomów wykorzystuje się intuicję i doświadczenie i zwykle zaleca się wartości 0,95 i 0,05. Wzrost wagi rozważanego problemu lub jego błahość mogą stanowić przyczynę wzrostu lub obniżania tych wartości [1].

Należy dodatkowo podkreślić, że testy zgodności (pkt. 2.3.6) mimo iż formalnym warunkiem ich stosowania jest liczebność próbki większa od 10, dają wiarygodne wnioski dopiero przy liczebnościach powyżej 50 [1].



LITERATURA

- [1] A b e z g a u z G. G., T r o j A. P., K o r e n k i n J. N., K o g o w i n a I. A.: Rachunek probabilistyczny. Poradnik, Wyd. MON, Warszawa 1973.
- [2] A л е к с а н д р о в Г. Н., Г е р а с и м о в Ю. А.: Электрическая прочность воздушной изоляции подстанции при коммутационных перенапряжениях. Электричество № 1, 1979, с. 23-31.
- [3] A л е к с а н д р о в Г. Н., И в а н о в В. Л., К и з е - в е т т е р В. Е.: Электрическая прочность наружной высоковольтной изоляции. Энергия, Ленинград 1969.
- [4] A л е к с а н д р о в Г. Н., П е т е р с о н Л. Л.: Проектирование линий электропередачи сверхвысокого напряжения. Энергоатомиздат, Ленинград 1983.
- [5] A n d e r s o n R. B., E r i k s s o n A. J.: Lightning parameters for engineering application. Electra No 69, March 1980, p. 65÷101.
- [6] A n t o n i e w i c z J.: Własności dielektryków. Warszawa 1971.
- [7] A u A., C i o k Z., M a k s y m i u k J.: łączniki energoelektryczne średnich napięć. Stan istniejący i tendencje rozwojowe. WNT, Warszawa, 1984.
- [8] B a k k e n J.: Determination of characteristical voltages in impulse and switching surge testing, IEEE (1966), paper No 31.
- [9] B e n j a m i n J. R., C o r n e l l C. A.: Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów, WNT, Warszawa, 1977.
- [10] B e r g e r K., A n d e r s o n R. B., K r ö n i n g e r H.: Parameters of lightning flashes, Electra No 41, 1975, s. 23-37.
- [11] B r o w n G.: Method of maksimum likelihood applied to the analysis of floshover data, IEEE Trans. on PAS, 1969, No 12, s. 1823-1830.
- [12] B r o w n G.: The Weibull distribution: some dangers with its use in insulation studies. IEEE Trans. on PAS, vol. PAS-101, No 9, September 1982, s. 3513-3522.



- [13] C a r r a r a G., D e l l e r a L.: Accuracy of an extended up-and-down method in statistical testing of insulation, *Electra* No 23, 1972, s. 159-177.
- [14] C e s a r i S., Y a k o v S.: Impulse breakdown and power frequency partial discharge inception voltages of insulating liquids. *IEEE Trans. on Electrical Insulation*, vol EI-20, No 2, April 1985, s. 315-319.
- [15] Criteria for the determination of the dielectric test procedures for power transformers, GIGRE 12-72/WG 03/08.
- [16] D o k o p o u l o s P.: Die Durchschlagswahrscheinlichkeit von Hochspannungsisolierungen. *Elektrotechn. Z.*, 1968, A 89, Nr 7.
- [17] E b e r s b e r g e r H., H a u s c h i l d W., F ö r s t e r K. H.: Statistische verfahren zur Bestimmung der Durchschlagwahrscheinlichkeit von Isolierstrecken. *Wiss. Z. Elektrotechn.*, Leipzig 17, 1971, 2/3, s. 117-132.
- [18] F e s e r K., N i e d e r h a u s e r R.: Automation of high voltage impulse tests, *World Electrotechnical Congress*, Moscow 1977.
- [19] F i r k o w i c z S.: Statystyczne badanie wyrobów, WNT, Warszawa 1970.
- [20] F l i s o w s k i Z.: Trendy rozwojowe ochrony odgromowej budowli. *Postępy techniki wysokich napięć*, z. 17, PWN, Warszawa 1986.
- [21] F l i s o w s k i Z.: Zagrożenie piorunowe i skuteczność ochrony budowli w badaniach i normalizacji. *Przegląd Elektrotechniczny*, z. 5, 1983, s. 221-225.
- [22] F r y x e l l J.: Determination of critical withstand voltages. CIGRE, rep. 423 (1966).
- [23] Г а л а м б о ш Я.: Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик Наука, Москва 1984.
- [24] G i a o T r i n h N., V i n c e n t C., R è g i s J.: Statistical dielectric degradation of large-volume oil insulation. *IEEE Trans. on PAS*, vol PAS-101, No 10, October, 1982, s. 3712-3721.
- [25] G u m b e l E. J.: *Statistics of Extremes*. Columbia University Press, New York 1960.
- [26] H a s t e r m a n Z., M o s i ń s k i F., M a l i s z e w s k i A.: Wytrzymałość elektryczna transformatorów energetycznych. WNT, Warszawa 1983.



- [27] H a u s c h i l d W., M o s c h W.: Statistik für Elektrotechniker. Eine Darstellung an Beispielen aus der Hochspannungstechnik. VEB Verlag Technik, Berlin 1984.
- [28] H y l t e n - C a v a l l i u s N., C h a g a s F. A.: Possible precision of statistical insulation test methods. IEEE Trans. on PAS, vol PAS - 102, No 8, August 1983, s. 2372-2376.
- [29] H y l t e n - C a v a l l i u s N.: Some aspects about the information gained from high voltage tests. CIGRE rep. 405, 1956.
- [30] IEC 71-2. Insulation coordination. Part 2: Application Guide, second edition, 1976.
- [31] J a k u b o w s k i J. L.: Podstawy teorii przebiegów w układach energoelektrycznych. PWN, Warszawa 1968.
- [32] J a ł o c h a A.: Technika wysokich napięć, cz. II. Przebiegi i ochrona przeciwprzebiegiowa. Wydawnictwo Pł., Łódź, 1974.
- [33] K a h l e M.: The influence of properties of weak points on to breakdown field strength of solid insulations material. World Electrotechnical Congress, June 21-25, Moscow, 1977.
- [34] K a p u r K. C., L a m b e r s o n L. R.: Reliability in engineering design. John Wiley and Sons, New York 1977.
- [35] K i s h i z i m a I., M a t s u m o t o K., W a t a n a b e Y.: New facilities for phase to - phase switching impulse test and some test results. IEEE Trans. on PAS, vol PAS-103, No 6, June 1984, s. 1211-1216.
- [36] К о л к е р Д. Г.: Воздействия грозовых разрядов с крутыми фронтами на изоляцию воздушных линий электропередачи. Электричество, № 8, 1984, с. 13-19.
- [37] К о р о л ю к В. С.: Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Наукова думка, Киев 1978.
- [38] K o s z t a l u k R.: Izolacja sieci skrajnie wysokich napięć. Prace Instytutu Energetyki, Warszawa 1975.
- [39] K o s z t a l u k R.: Technika badań wysokonapięciowych. T. 1, WNT, Warszawa 1985 (J. Maksimiuk rozdz. 11. Statystyka w technice wysokich napięć).
- [40] K r y s i c k i W., B a r t o s W., D y c z k a W., K r ó l i k o w s k a K., W a s i l e w s k i M.: Elementy probabilistyki w zadaniach. Wyd. Pol. Łódzkiej, Łódź 1984, t. 1, Łódź 1986, t. 2.
- [41] K u č e r a J., B e r a n J.: Rozbor přesnosti interpolačních metod pro stanovení vydržného napětí. Elektrot. Obzor 62 (1973) Čis. 3, s. 137-143.



- [42] K u č e r a J.: Pravděpodobnosti koordinace mezefázové izolace při funkci srodičů prepeti. Elektrot. Obzor 70 (1981). Čis. 10, s. 548-554.
- [43] K u č e r a J.: Risk of failure by switching surges in insulation systems with surge diverters. Acta Technica ČSAV, 1982, No 1, s. 59-67.
- [44] K u č e r a J., V a l e n t a L.: Differentiation in cause of variance of breakdown voltages on samples of insulation. Acta Technica ČSAV, No 4, 1975, s. 469-478.
- [45] Х у ч и н с к и й Г. С.: Частичные разряды в высоковольтных конструкциях. Энергия, Ленинград 1979.
- [46] L e s i Ń s k i S.: Niezawodność łączników energoelektrycznych. WNT, Warszawa 1983.
- [47] L e w i s P. A. W.: Distribution of the Anderson-Darling statistics. Annals of Math. Statistics, 1961, vol 32, 1118-1124.
- [48] L i u S h a o - C h u n: Statistical properties of steady state impulse breakdown voltage for commercial vacuum interrupters. IEEE Trans. on Electrical Insulation, vol EI-18, No 3, June 1983, s. 325-331.
- [49] M a k s y m i u k J., W o h l m u t h F.: Metody statystyczne w inżynierii elektrotechnicznej. Wyd. Pol. Warszawskiej. Warszawa 1981.
- [50] M a n n N. R., S c h a f e r R. E., S i n g p u r w a l l a N. D.: Methods for statistical analysis of reliability and life data. John Wiley and Sons, New York 1974.
- [51] M a r k u s s e n K. A.: Uncertainty in results of high voltage tests on internal insulation. Electra, No 8, 1969, s. 41.
- [52] M a z u r e k B.: Rozwój wyładowań elektrycznych w wysokonapięciowej izolacji próżniowej. Zagadnienia wybrane. Praca Naukowa Inst. Podst. Elektrot. i Elektrotechn. Pol. Wrocławskiej, seria: Monografie Nr 7, Wrocław 1984.
- [53] M o s i Ń s k i F.: Badania modelowe i statystyczna obróbka wyników pomiarów wytrzymałości izolacji papierowo-olejowej, ZNPL, Zeszyt Specjalny, Nr 12, 1975, s. 137-156.
- [54] M o s i Ń s k i F.: Badanie i prognozowanie wytrzymałości elektrycznej udarowej izolacji papierowo-olejowej typu transformatorowego, Postępy Techniki Wysokich Napięć, PWN, Warszawa 1985.



- [55] M o s i ń s k i F., F r o n c A.: Rozkład prawdopodobieństwa napięć przebicia modeli izolacji papierowo-olejowej. Rozprawy elektrotechniczne 1982, 28, z. 3-4, s. 429-439.
- [56] M o s i ń s k i F., G a l o c h J.: Szacowanie parametrów rozkładu Weibulla metodą największej wiarygodności. ZNPE Elektryka, z. 73, 1984, s. 137-142.
- [57] M o s i ń s k i F.: O statystycznej obróbce wyników pomiarów wytrzymałości izolacji nieregenerującej się. Rozprawy Elektrotechniczne Nr 3, 1976, s. 709-725.
- [58] M o s i ń s k i F.: Rozkład prawdopodobieństwa uszkodzenia transformatora w czasie prób dielektrycznych. Prace Instytutu Elektrotechniki, z. 84, 1974, s. 63-76.
- [59] M o s i ń s k i F.: Technologiczny i elektryczny rozrzut napięć przebicia izolacji papierowo-olejowej. ZNPE Elektryka, z. 57, 1978, s. 49-57.
- [60] M o s i ń s k i F.: Uproszczone metody szacowania najwyższego napięcia wytrzymywanego izolacji papierowo-olejowej. ZNPE Elektryka, z. 60, 1977, s. 35-48.
- [61] M o s i ń s k i F., W a r z y w o d a J.: Statystyczne opracowanie wyników pomiarów wytrzymałości izolacji zewnętrznej. ZNPE Elektryka, z. 45, 1975, 97-110.
- [62] M o s i ń s k i F.: Zastosowanie teorii wartości ekstremalnych do oceny wytrzymałości elektrycznej izolacji wysokonapięciowych transformatorów energetycznych. ZNPE Rozprawy Naukowe, Nr 62, 1984, s. 28-29.
- [63] M o s i ń s k i F., Ż e r o m s k a K.: Estymacja parametrów rozkładu Weibulla metodą największej wiarygodności w zastosowaniu do wyników prób wytrzymałości udarowej izolacji papierowo-olejowej. Mat. VII Symp. n.t. Zastosowanie maszyn matematycznych w elektrotechnice, Łódź 1974, s. 159-166.
- [64] M u r a n o M., M e n j u S., I k e d a M., H a s e g a w a N., I n o u e I.: Experimental extension of volume effect on breakdown of transformer oil, 1974. Winter Power Meet., New York, January 27-February 1, C 74 236-6.
- [65] PN-74/N-01051 Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Nazwy, określenia i symbole.
- [66] PN-70/E-04067 Pomiary wysokonapięciowe. Próby napięciem łączeniowym.



- [67] PN-75/E-044060. Pomiarы wysokonapięciowe. Próby napięciem przeniennym.
- [68] PN-75/E-04061. Pomiarы wysokonapięciowe. Próby napięciem udarowym piorunowym.
- [69] П о п к о в В. И., Л я п и н А. Г., С а м а д а ш в и л и А. Д.: Электрическая прочность элегазовой изоляции. Изв. Акад. Наук СССР, Энергетика и транспорт, № 3, 1984, с. 95-102.
- [70] Р а з е в и г Д. В.: Методы теории вероятностей в технике высоких напряжений. Москва 1975.
- [71] S i e T. H., W o h l f a h r t O.: Contribution to the measurement of the impulse withstand voltage of oil-paper insulation Systems. IEEE Trans. on PAS, vol. PAS-88, NO 6, 1969, s. 862-868.
- [72] S l a n i n k a P.: K otázke vplyvu hrúbky na elektrickú pevnosť dielektrika v homogénnom elektrickom poli. Elektrot. Obzor (1976) Čis 1, s. 42-45.
- [73] S l a n i n k a P.: Modelovanie štatistických javov elektrickej pevnosti elektroizolačných materiálov a systémov. EKT 32, 1979, Čis 1, s. 25-32.
- [74] S m i r n o w N. W., D u n i n - B a r k o w s k i I. W.: Kurs rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla zastosowań technicznych. PWN, Warszawa 1973.
- [75] С т е п а н ч у к К. Ф.: К вопросу об импульсных испытаниях образцов изоляции. Энергетика ИВУЭ, № 11, 1972.
- [76] С т е п а н ч у к К. Ф.: Линейная модель разрушения и анализ кратковременной прочности как меры старения изоляции. Энергетика ИВУЭ, № 2, 1981, с. 87-89.
- [77] S z p o r S.: Ochrona odgromowa. Wyd. II, t. I, WNT, Warszawa 1973.
- [78] Т о м č и к J., S h e h a t a M. A.: Přispěvek ko statistickému zpracování rázových měření. Elektrot. Obzor 68 (1979) Čis 2, s. 92-94.
- [79] W e b e r K. H., E n d i c o t t H. S.: Area effect and its extremal basis for the electric breakdown of transformer oil. AIEE Trans., vol. 75, pt III, June 1956, s. 371-381.
- [80] W e r k o w s k i A.: Dokładność oceny minimalnej wytrzymałości izolacji jako czynnik decydujący o wymiarowaniu. Prace IEL. z. 120, 1982, s. 5÷24.



- [81] V e v e r k a A.: Aproximace Gaussovy funkce Weibullowym rozložením. Elektrot. Obzor 69 (1980) Čís. 2, s. 69-72.
- [82] V e v e r k a A.: Konvenční a sočtová závislost prevděpodobnosti přeskoku, Elektrot. Obzor 64 (1975), Čís 12, s. 718-720.
- [83] W i d m a n n W.: Das Vergrosserungsgesetz in der Hochspannungstechnik. Elektrotechn. Z., 1964, A 85, Nr 4.
- [84] W i l s o n W. R.: A fundamental factor controlling the unit dielectric strength of oil. AIEE Trans., pt. III PAS, February 1953, s. 68-74.
- [85] W ó j c i k A. R., U b y s z - B o r u c k a L., Z i e l i ŋ s k i W.: Tablice statystyczne. Wyd. SGGW-AR, Warszawa 1984.
- [86] Y a k o v S.: Considerations about the impulse test procedure for power transformers. Electra No 55, December 1977, s. 5-23.
- [87] Z i e l i ŋ s k i R.: Tablice statystyczne. PWN, Warszawa 1972.
- [88] Z i e l i ŋ s k i J. J.: Przykłady zastosowania statystyki matematycznej w wysokonapięciowej technice probierczej. Prace IEI. z. 89, 1975, s. 73÷83.



9729/s

