

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

JAN AWREJCEWICZ

**MATEMATYCZNE
METODY MECHANIKI**

**BIBLIOTEKA GŁÓWNA
POLITECHNIKA ŁÓDZKA**

76004/S



000-076004-00-0

ŁÓDŹ 1995



Recenzent: prof. dr hab. Zbigniew Kołakowski

**KOMITET REDAKCYJNY
WYDAWNICTW POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ**

**Przewodniczący: prof. dr hab. Andrzej Jopkiewicz
Redaktor Naukowy Wydziału: prof. dr hab. Ryszard Andrzejewski**



76004/5

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
93-005 Łódź, ul. Wólczańska 223

ISBN 83-86453-42-7

Nakład 200 + 40 egz. Ark. wyd. 14,27. Ark. druk. 15,75. Papier offset 80g 70 × 100
Podpisano do druku 15 II 1995 r. Druk ukończono w lutym 1995 r.
Zamówienie 19/95. Cena 6 zł
Wykonano w A.C.G.M. SA. ŁODART 93-005 Łódź, ul. Wólczańska 223
Nr 851



Spis treści

1	Wprowadzenie	9
2	Równania różniczkowe rzędu pierwszego	13
2.1	Wprowadzenie	13
2.2	Równania jednorodne i równania liniowe	20
2.3	Uwagi o równaniach różniczkowych uwikłanych ze względu na pochodną	26
3	Równania różniczkowe wyższych rzędów	29
3.1	Wprowadzenie	29
3.2	Równania różniczkowe liniowe	31
3.3	Wybrane przykłady	40
4	Wiadomości wstępne dotyczące układów dynamicznych	49
4.1	Pojęcia podstawowe	49
4.2	Podział układów drgających i zjawisk drganiowych	50
4.3	Równania ruchu	53
5	Układy drgające liniowe	61
5.1	Układy o jednym stopniu swobody	61
5.1.1	Drgania własne	61
5.1.2	Drgania swobodne	67
5.1.3	Drgania wymuszone bez tłumienia	75
5.1.4	Drgania wymuszone tłumione	84
5.1.5	Drgania parametryczne	95
5.2	Układy o dwóch stopniach swobody	116
5.2.1	Drgania własne	116
5.2.2	Drgania swobodne (z tłumieniem)	118
5.2.3	Drgania wymuszone	122



5.3	Wprowadzenie do drgań o wielu stopniach swobody	126
5.4	Podsumowanie i uwagi	132
6	Układy równań różniczkowych liniowych – wprowadzenie do ogólnej teorii drgań	133
6.1	Układy równań różniczkowych jednorodnych – wiadomości podstawowe	133
6.2	Układy równań różniczkowych niejednorodnych	136
6.3	Układy równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach	137
6.4	Układy równań różniczkowych liniowych o okresowo zmiennych współczynnikach	159
7	Drgania chaotyczne w układach o jednym stopniu swobody	167
7.1	Wprowadzenie	167
7.2	Identyfikacja atraktorów chaotycznych	174
7.2.1	Mapy Poincaré	176
7.2.2	Wykładniki Lapunowa	178
7.2.3	Wymiar ułamkowy	181
7.2.4	Widmo częstości i funkcja autokorelacji	183
7.2.5	Uwagi ogólne	183
7.3	Metoda Mielnikowa	184
7.4	Drogi prowadzące do drgań chaotycznych	189
7.4.1	Wprowadzenie	189
7.4.2	Proces nieciągły	189
7.4.3	Prawieokresowość, okresowość, chaos	190
7.4.4	Okresowość, prawieokresowość, chaos	190
7.4.5	Bifurkacje prowadzące do dwojenia okresu	190
7.4.6	Proces typu U	191
7.4.7	Proces przemienny typu: ruch okresowy chaos	191
7.4.8	Zjawisko kryzysu	191
7.5	Podsumowanie i uwagi końcowe	191
8	Wstęp do teorii katastrof	195
8.1	Wprowadzenie	195
8.2	Katastrofy elementarne	199
8.2.1	Katastrofa typu A_2	199
8.2.2	Katastrofa typu A_3	200
8.2.3	Katastrofa typu A_4	201



8.2.4	Katastrofa typu D_{+4}	205
8.2.5	Katastrofa typu D_{-4}	207
8.3	Przykłady katastrof w układach mechanicznych	209
9	Metody numeryczne globalnej analizy drgań	221
9.1	Wprowadzenie do metod numerycznych	221
9.1.1	Metoda Runge-Kutty	221
9.1.2	Zmodyfikowana metoda punktu środkowego	222
9.1.3	Metoda Bulirscha-Stoera	223
9.1.4	Całkowanie układów zachowawczych	223
9.1.5	Sztywne układy równań	224
9.1.6	Metoda Rosenbrocka	225
9.1.7	Metoda predykcjno-korekcyjna wielokrokowa i wielowarto- ściowa	226
9.2	Systematyczna numeryczna analiza drgań	228
9.3	Metody numeryczne stosowane przy systematycznej analizie drgań	230
	Literatura cytowana i uzupełniająca	241





Przedmowa

Niniejsza praca przeznaczona jest dla studentów Wydziałów Mechanicznych IV roku o specjalnościach „Robotyka”, „Mechanika Stosowana”, „Biomechanika” oraz dla uczestników studiów doktoranckich prowadzących do nadania stopnia doktora nauk technicznych o kierunku „Mechanika” i „Budowa i Eksploatacja Maszyn”. Może ona również stanowić uzupełnienie wiadomości dla studentów III roku Wydziałów Mechanicznych i Wydziałów Matematyki Stosowanej i Fizyki Technicznej wyższych uczelni technicznych z przedmiotu poświęconego teorii drgań.

W zamierzeniu podręcznik powinien umożliwić łatwe przejście od metod matematycznych prezentowanych na wydziałach technicznych wyższych uczelni z przedmiotu matematyka, a w szczególności teorii równań różniczkowych zwyczajnych, do zastosowań w układach dynamicznych w szeroko rozumianej mechanice.

Z drugiej strony umożliwia on również studentom (czy badaczom) mocniej zaawansowanych teoretycznie (chodzi tu np. o wydziały Matematyki Stosowanej i Fizyki Technicznej) łatwiejsze przyswojenie materiału prowadzącego od teorii do zastosowań w mechanice.

Autor





Rozdział 1

Wprowadzenie

Obecnie bardzo trudno sobie wyobrazić rozwój wielu dziedzin nauki bez znajomości teorii równań różniczkowych. Teoretyczne osiągnięcia związane z rozwojem teorii równań różniczkowych w sposób znaczący wpłynęły na rozwój takich nauk jak fizyka, biologia, chemia, socjologia, ekonomia, mechanika i wiele innych. Istnieje wiele kierunków rozwoju współczesnych teorii równań różniczkowych oraz różne metody ich nauczania w zależności od potrzeb uwarunkowanych kręgiem odbiorców. W tej pracy zdecydowano się na wybiórcze podejście do teorii równań różniczkowych ukierunkowane na ich zastosowania w mechanice i dynamicznie maszyn. Najpierw, w kilku pierwszych rozdziałach zostaną przedstawione niezbędne wiadomości wstępne, definicje i twierdzenia, a dalsza część tej małej monografii dotyczy zastosowań wprowadzonych pojęć w mechanice, głównie reprezentowanej przez teorię drgań. W pracy ograniczono się do rozważań dotyczących równań różniczkowych zwyczajnych opisujących procesy w układach deterministycznych. Została więc pominięta bardzo szeroka klasa równań różniczkowych cząstkowych.

Jeśli obserwowane są ewolucyjne procesy zachodzące w rozpatrywanym układzie opisane poprzez nieznaną funkcję i udaje się określić zależność (lub zależności) pomiędzy tą funkcją a jej pochodną (lub pochodnymi), to związek taki nosi nazwę równania różniczkowego. Jednak aby jednoznacznie określić ewolucję interesującego nas procesu należy dodatkowo określić warunki początkowe. W przeciwnym razie zadanie jest nieokreślone i posiada nieskończenie wiele rozwiązań.

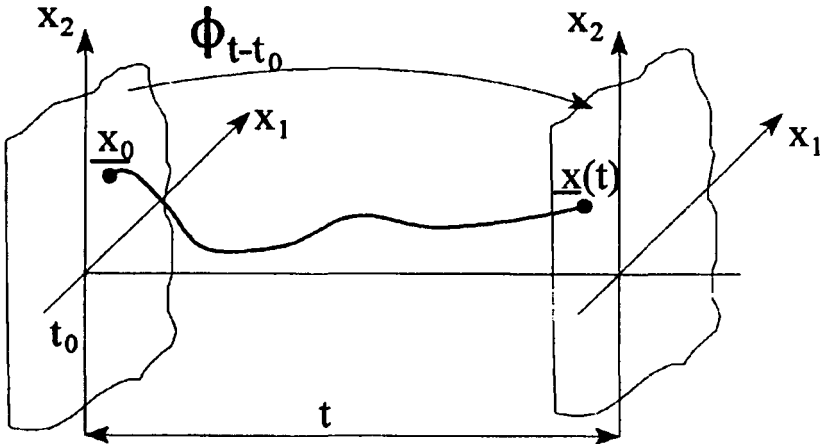
Obecnie przedstawimy interpretację równań różniczkowych poprzez pryzmat rozwoju teorii układów dynamicznych. Rozpatrzmy równanie o postaci

$$\dot{x} = F(x), \quad (1.1)$$



przy czym prawa strona tego równania jest określona, ciągła i spełnia warunek Lipschitza w pewnym obszarze n -wymiarowej przestrzeni Euklidesa. Przy takich założeniach, biorąc pod uwagę warunek początkowy $x(t_0) = x_0$, istnieje jedno rozwiązanie $x(t, x_0)$ układu (1.1) i takie, że $x(t_0, x_0) = x_0$. Rozwiązanie $x(t, x_0)$ dla ustalonych x_0 będziemy nazywać ruchem, bo zmienia się położenie punktu startującego z x_0 w czasie. Natomiast zbiór $\{x(t, x_0), t \in (T_-, T_+)\}$ będziemy nazywać łukiem trajektorii ruchu. Jeśli $T_- = -\infty$ i $T_+ = +\infty$, to wówczas ruch nazywać będziemy trajektorią i oznaczamy ją jako $x(t, x_0; R)$, gdzie R oznacza zbiór liczb rzeczywistych. Zbiór $\{x(t, x_0), t \in [t_0, +\infty)\}$ będziemy nazywać dodatnią półtrajektorią ruchu, natomiast zbiór $\{x(t, x_0), t \in (-\infty, t_0]\}$ będziemy nazywać ujemną półtrajektorią ruchu. Zbiór złożony z trajektorii nazywać będziemy zbiorem niezmienniczym układu (1.1).

Dla każdej wartości punktu x poprzez funkcję $F(x)$ określona jest prędkość $\dot{x}$ w tym punkcie. Jeśli rozważyć wiele takich punktów, lub inaczej potok fazowych punktów, to funkcja $F(x)$ będzie określać prędkość tego potoku.



Rys. 1.1. Poglądowe przedstawienie działania operatora ewolucji dla $x \in \mathbb{R}^2$

Rozwiązanie $x(t, x_0)$ określa ewolucję punktu x , który w chwili t_0 był w miejscu x_0 . Operatorem ewolucji będziemy nazywać funkcję Φ_t , która przeprowadza punkt x_0 w czasie t wzdłuż krzywej całkowej równania (1.1). W sposób przeglądowy można to wyjaśnić na przykładzie równania

$$\frac{dx}{dt} = Cx, \quad x \in \mathbb{R}^1 \quad (1.2)$$

przy czym $x(t_0) = x_0$. Jego rozwiązaniem jest krzywa

$$x(t) = x_0 \exp(C(t - t_0)), \quad (1.3)$$

a w tym przypadku operator ewolucji wynosi

$$\Phi_t(x_0) = x_0 \exp(C(t - t_0)). \quad (1.4)$$

Operator ewolucji posiada następujące własności:

$$\Phi_{r+t}(x) = \Phi_r(\Phi_t(x)), \quad r, t \in \mathbb{R}, \quad (1.5)$$

$$\Phi_t(\Phi_{-t}(x)) = \Phi_{-t}(\Phi_t(x)) = \Phi_0(x) = x, \quad (1.6)$$

$$\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}. \quad (1.7)$$

Obecnie podamy kilka podstawowych definicji. Rzędem równania różniczkowego będziemy nazywać rząd najwyższej pochodnej występującej w tym równaniu. Natomiast stopniem równania różniczkowego nazywamy najwyższy wykładnik potęgi pochodnej najwyższego rzędu. Dla przykładu rozważmy równanie

$$\frac{dF}{dt} + \left(\frac{d^4 F}{dt^4}\right)^2 + \left(\frac{d^3 \dot{F}}{dt^3}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dt}\right)^3 + F = 0. \quad (1.8)$$

Powyższe równanie jest rzędu czwartego, a stopnia drugiego.



Rozdział 2

Równania różniczkowe rzędu pierwszego

2.1 Wprowadzenie

Poniżej podano ogólną postać równania różniczkowego rzędu pierwszego

$$f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0. \quad (2.1)$$

W przypadku gdy powyższe równanie daje się rozwiązać ze względu na pierwszą pochodną, to równanie (2.1) przyjmie postać

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (2.2)$$

Równanie (2.2) może być przedstawione jako szczególny przypadek postaci równoważnej

$$P(t, x)dt + Q(t, x)dx = 0, \quad (2.3)$$

z którego otrzymujemy

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{P(t, x)}{Q(t, x)}. \quad (2.4)$$

Rozwiązaniem równania różniczkowego w pewnym przedziale I będziemy nazywać funkcję różniczkowalną $x = \varphi(t)$ taką, że po jej podstawieniu do jednego z powyższych postaci równań, przechodzi ono w tożsamość.

Jeśli np. równanie (2.2) spełnia funkcja $\varphi(t, x, C)$, to mówimy o rozwiązaniu (całce) w postaci uwikłanej i jest to rozwiązanie ogólne. Dla konkretnego warunku początkowego rozwiązanie to przechodzi w rozwiązanie szczególne (całkę szczególną).



Geometrycznie rozwiązaniu ogólnemu odpowiada potok fazowy, z którego dla konkretnej wartości stałej C określonej przez warunki początkowe wybieramy pewną krzywą całkową.

Zagadnienie polegające na znajdowaniu rozwiązania $x = \varphi(t)$ spełniającego warunek początkowy $\varphi(t_0) = x_0$ nazywamy zagadnieniem Cauchy'ego.

Przez dowolny punkt krzywej całkowej możemy poprowadzić prostą, która jest nachylona do osi odciętych pod kątem $\arctg(f(t, x))$. Równanie różniczkowe określa więc zbiór kierunków stycznych. Poprzez przyporządkowanie każdemu z kierunków strzałki możemy wyznaczyć pole kierunków równania różniczkowego.

Często w zagadnieniach praktycznych istnieje potrzeba wyznaczenia zbioru punktów ekstremalnych równania (2.2). Jeśli rozwiązanie jawne $x = \varphi(t)$ spełnia (2.2), to wówczas w punkcie ekstremalnym mamy

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(t, \varphi(t)) = 0, \quad (2.5)$$

czyli, że zbiór punktów będących ekstremami wyraża się równaniem

$$f(t, x) = 0. \quad (2.6)$$

Niech t_0 będzie odcięta ekstremum, to wówczas jeśli $\varphi''(t_0) > 0$ mamy do czynienia z minimum, a jeśli $\varphi''(t_0) < 0$, to t_0 jest odcięta maksimum. Z drugiej strony

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt}[f(t, \varphi(t))] = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Z powyższych rozważań wynika, że zbiór punktów minimalnych określony jest warunkami

$$\begin{aligned} f(t, x) &= 0, \\ \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} &> 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

natomiast maksima określone są warunkami

$$\begin{aligned} f(t, x) &= 0, \\ \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} &< 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Jeśli prawa strona równania (2.2) ma postać

$$f(t, x) = f_1(t)f_2(x), \quad (2.10)$$

to równanie (2.2) będziemy nazywać równaniem o rozdzielonych zmiennych. Jeśli dla pewnego x_0 zachodzi $f_2(x_0) = 0$, to funkcja $x = x_0$ jest rozwiązaniem (2.2) z prawą stroną (2.10). Inne rozwiązania takiego równania, dla których $f_2(x) \neq 0$ spełniają związek

$$\int \frac{dx}{f_2(x)} - \int f_1(t)dt = C, \quad (2.11)$$

gdzie C jest pewną stałą.

Twierdzenie 1

Niech funkcje $f_1(t)$ i $f_2(x)$ będą określone i różniczkowalne w okolicach $t = t_0$ i $x = x_0$, przy czym $f_2(x_0) \neq 0$. Wówczas rozwiązanie równania (2.2) z prawą stroną (2.10) i z warunkiem początkowym $\varphi(t_0) = x_0$ istnieje w pewnym obszarze punktu $t = t_0$, jest jednoznaczne i spełnia warunki

$$\int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{dx}{f_2(x)} = \int_{t_0}^t f_1(t)dt. \quad (2.12)$$

W przypadku, kiedy prawa strona równania (2.2) nie zależy od czasu, czyli $f(t, x) = f(x)$, to każdemu punktowi x z obszaru określoności funkcji $f(x)$ można przyporządkować wektor o długości $|f(x)|$ i kierunku zgodnym z osią Ox dla $f(x) > 0$, i przeciwnym do niego jeśli $f(x) < 0$. Zbiór takich wektorów stanowi pole wektorowe. Punkty, w których takie kierunki są nieokreślone nazywamy punktami osobliwymi lub położeniami równowagi pola wektorowego i wyznacza się je z równania $f(x) = 0$.

Przykład 2.1

Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{dx}{dt} + x = 3t + 2. \quad (2.13)$$

Dokonajmy podstawienia

$$z = x - 3t - 2, \quad (2.14)$$

a wówczas różniczkując (2.13) względem t mamy

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} - 3, \quad (2.15)$$

czyli

$$\frac{dz}{dt} + z + 3 = 0. \quad (2.16)$$

Jednym z rozwiązań równania (2.16) jest $z = -3$, a pozostałe są określone z równania

$$\int \frac{dz}{z+3} + \int dt = 0, \quad (2.17)$$

które po scałkowaniu prowadzi do postaci

$$\ln |z+3| + t = \ln C_0. \quad (2.18)$$

Z równania (2.18) otrzymujemy

$$|z+3| = C_0 e^{-t} \quad \text{ i } \quad C_0 > 0. \quad (2.19)$$

Ponieważ rozwiązanie $z = -3$ otrzymujemy z (2.19) jeśli $C_0 = 0$, wobec tego możemy wprowadzić nową stałą $C \in \mathbb{R}$ i rozwiązanie będzie miało postać $z - 3t - 2 = -3 + C e^{-t}$, co po przekształceniu prowadzi do rozwiązania $z = 3t - 1 + C e^{-t}$.

Okazuje się, że generalnie nie ma metody ogólnej układania równań różniczkowych opisujących ewolucję badanego procesu lub zależności pomiędzy pewnymi wielkościami tego procesu. Można jednak wskazać na pewną ogólną metodę postępowania. Niech $x = x(t)$ będzie poszukiwaną zależnością. Przy małej zmianie Δt mamy przyrost $x(t+\Delta t) - x(t)$, który będzie zależał od parametrów układu. Po podzieleniu stronami przez Δt i rozważeniu przypadku granicznego $\Delta t \rightarrow 0$ otrzymamy po lewej stronie pochodną dx/dt .

Przykład 2.2

Rozpatrzmy dynamikę układu przedstawionego na rys. 2.1. Może on modelować proste układy mechaniczne z pomijalnie małą masą i o jednej możliwości ruchu (w tym przypadku tylko w kierunku pionowym).

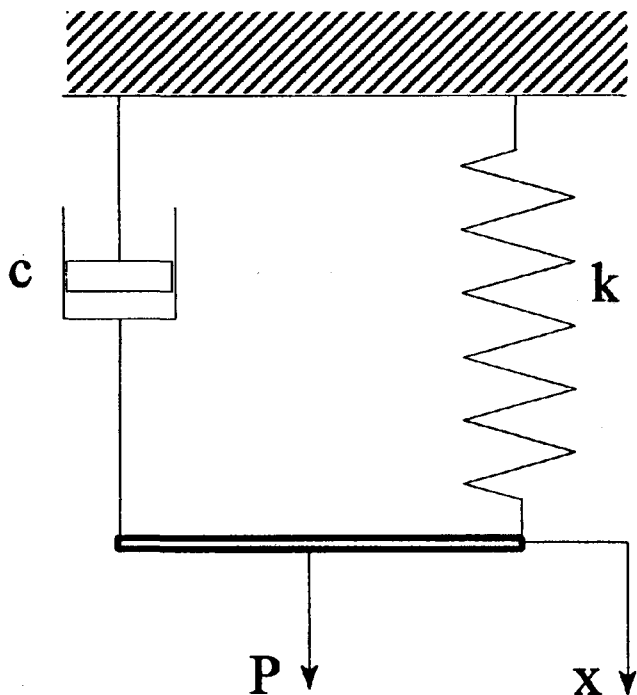
W położeniu równowagi dynamicznej mamy

$$P_0 = kx_0, \quad (2.20)$$

przy czym P_0 i x_0 są wartościami odpowiednio siły i ugięcia w stanie równowagi. Niech ten stan równowagi zostanie zaburzony poprzez zmianę wartości P_0 , wówczas

$$\begin{aligned} P &= P_0 + \Delta P, \\ x &= x_0 + \Delta x. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Po zaburzeniu stanu równowagi pojawi się siła tłumiąca i równanie równowagi dynamicznej przyjmie postać



Rys. 2.1. Schemat układu mechanicznego posiadającego sztywność o współczynniku k i tłumienie o współczynniku c ze stałym obciążeniem P

$$P = c\dot{x} + kx. \quad (2.22)$$

Jeśli będziemy lokalnie rozpatrywać dynamikę wokół punktów P_0 i x_0 , to po podstawieniu (2.21) do (2.22) otrzymujemy

$$P_0 + \Delta P = c \frac{d(x_0 + \Delta x)}{dt} + k(x_0 + \Delta x), \quad (2.23)$$

co po uwzględnieniu (2.20) prowadzi do równania

$$\Delta P = c \frac{d\Delta x}{dt} + k\Delta x. \quad (2.24)$$

Stopień ogólności w zastosowaniu takiego równania znacznie się zwiększa po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych

$$\frac{\Delta P}{P_0} = Y, \quad \frac{\Delta x}{x_0} = X. \quad (2.25)$$

Wówczas równanie przyjmie postać

$$T \frac{dX}{dt} = kY - X, \quad (2.26)$$

gdzie: $T = \frac{c}{k}$, $a = \frac{P_0}{kx_0}$. W teorii automatyki równanie (2.26) opisuje człony inercyjne o stałej czasowej T .

Obecnie rozpatrzymy przykład gdy w układzie pojawiają się zależności nieliniowe.

Przykład 2.3

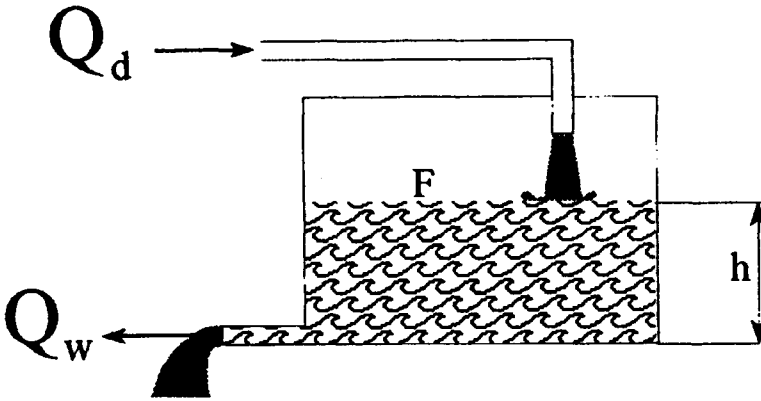
Rozpatrzmy układ hydrauliczny przedstawiony na rys. 2.2. Do zbiornika wpływa i wypływa woda i należy wyznaczyć dynamikę zmian położenia zwierciadła cieczy, przy czym F_0 oznacza pole przekroju otworu odpływowego, F jest polem przekroju zbiornika, α jest współczynnikiem uwzględniającym opory przepływu, a g jest przyspieszeniem ziemskim.

Podobnie jak w poprzednim przypadku zaczniemy od napisania równania statycznego o postaci

$$Q_{du} = Q_{wu}, \quad (2.27)$$

gdzie Q_{du} i Q_{wu} są wartościami natężeń przepływu na wlocie i wylocie zbiornika w stanie ustalonym. Zgodnie z prawem ciągłości przepływu mamy

$$Q_d = F \frac{dh}{dt} + Q_w, \quad (2.28)$$



Rys. 2.2. Schemat zbiornika przepływowego

gdzie h oznacza wysokość słupa wody (rys. 2.2) i poziom h_u odpowiada stanowi ustalonemu. Zaburzając stan ustalony mamy

$$\begin{aligned} Q_d &= Q_{du} + \Delta Q_d, \\ Q_w &= Q_{wu} + \Delta Q_w, \\ h &= h_u + \Delta h, \end{aligned} \quad (2.29)$$

a po podstawieniu do (2.28) i uwzględnieniu (2.27) otrzymujemy:

$$\Delta Q_d = F \frac{d\Delta h}{dt} + \Delta Q_w, \quad (2.30)$$

Następnym krokiem jest wyrażenie przyrostu ΔQ_w poprzez przyrost wysokości Δh . Ponieważ Q_w wyraża się równaniem

$$Q_w = F_0 \alpha \sqrt{2gh}, \quad (2.31)$$

to dokonajmy linearyzacji wokół wysokości h_0 rozwijając wyrażenie (2.31) w szereg Taylora i biorąc z niego tylko pierwszy wyraz:

$$\Delta Q_w = \left(\frac{\partial Q_w}{\partial h} \right)_{h=h_0} \Delta h = F_0 \alpha \sqrt{\frac{g}{2h_0}} \Delta h. \quad (2.32)$$

Ostatecznie równanie (2.31) przyjmie postać

$$\frac{F}{F_0\alpha} \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \frac{d(\Delta h)}{dt} = \frac{1}{F_0\alpha} \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \Delta Q_d - \Delta h, \quad (2.23)$$

i opisuje ono również człon inercyjny.

2.2 Równania jednorodne i równania liniowe

Równanie różniczkowe (2.2) nazywać będziemy jednorodnym jeśli funkcja $f(t, x)$ będzie równaniem jednorodnym stopnia zero. Równanie (2.3) będziemy nazywać jednorodnym jeśli funkcje $P(t, x)$ i $Q(t, x)$ są jednorodne o tym samym stopniu.

Warto przypomnieć, że funkcję $f(t, x)$ nazywamy jednorodną o stopniu jednorodności k , jeśli dla wszystkich $\lambda > 0$ prawdziwa jest nierówność $f(\lambda t, \lambda x) = \lambda^k f(t, x)$. Jako przykład rozpatrzmy dwie funkcje

$$f_1 = \frac{t+x}{t-x}, \quad f_2 = \frac{t^2+tx}{t+x}. \quad (2.24)$$

Pierwsza z nich jest funkcją jednorodną stopnia zero, natomiast druga jest funkcją jednorodną stopnia jeden.

Okazuje się, że równania jednorodne można sprowadzić do równania o zmiennych rozdzielonych poprzez podstawienie

$$x = zt. \quad (2.25)$$

W przypadku kiedy w równaniu prawa strona (2.2) jest funkcją typu

$$f(t, x) = F\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right), \quad (2.26)$$

to równanie różniczkowe można sprowadzić do jednorodnego poprzez znalezienie najpierw punktu przecięcia (t_0, x_0) prostych $a_i t + b_i x + c_i = 0$ ($i = 1, 2$) a następnie poprzez wprowadzenie nowych współrzędnych

$$t = t_0 + y, \quad x = x_0 + z. \quad (2.27)$$

W przypadku, gdy proste są równoległe, to $a_1/a_2 = b_1/b_2$ i wtedy dokonujemy podstawienia

$$a_1 t + b_1 x + c_1 = z. \quad (2.28)$$

Istnieją również tzw. równania quasi-jednorodne. Funkcję $f(t, x)$ będziemy nazywać quasi-jednorodną o stopniu k , jeśli dla pewnych α i β zachodzi równość

$$f(\lambda^\alpha t, \lambda^\beta x) = \lambda^k f(t, x) \quad (2.39)$$

dla wszystkich $\lambda > 0$. Współczynniki α i β nazywamy wagą funkcji, a w przypadku rozważania iloczynu funkcji wagi się sumują, np. funkcja $10t^2x^3$ posiada wagę $2\alpha + 3\beta$, bo t ma wagę α , a x ma wagę β .

Równanie (2.2) będziemy nazywać quasi-jednorodnym z wagami α i β , jeśli funkcja $f(t, x)$ jest quasi-jednorodna z wagami α i β i o stopniu $\beta - \alpha$, czyli że prawdziwy jest związek

$$f(\lambda^\alpha t, \lambda^\beta x) = \lambda^{\beta-\alpha} f(t, x). \quad (2.40)$$

Poprzez podstawienie

$$x = zt^{\beta/\alpha} \quad (2.41)$$

równanie quasi-jednorodne daje się sprowadzić do równania o zmiennych rozdzielonych.

Równanie o postaci

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = f(t), \quad (2.42)$$

nazywamy równaniem liniowym i istnieje kilka metod prowadzących do jego rozwiązania.

Wykorzystując metodę Lagrange'a rozpatrzmy najpierw równanie jednorodne

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = 0, \quad (2.43)$$

które daje się scałkować przez rozdzielenie zmiennych prowadząc do wyniku

$$x = C(t) \exp \left[- \int p(t) dt \right]. \quad (2.44)$$

Powyżej stała C zależy od czasu i podstawiając (2.44) do (2.42) otrzymujemy

$$\frac{dC}{dt} = f(t) \exp \left[\int p(t) dt \right], \quad (2.45)$$

a stąd po kolejnym scałkowaniu mamy

$$C(t) = C + \int f(t) \exp \left[\int p(t) dt \right] dt, \quad (2.46)$$

gdzie C jest dowolną stałą. Wobec tego po podstawieniu (2.46) do równania (2.44) i biorąc pod uwagę warunek początkowy $x(t_0) = x_0$ mamy

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau} x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) e^{\int_{\tau}^t p(\tau) d\tau} d\tau. \quad (2.47)$$

Metoda Bernoulliego polega na poszukiwaniu rozwiązania równania (2.42) o postaci

$$x(t) = u(t)v(t). \quad (2.48)$$

Po podstawieniu (2.48) do (2.42) otrzymujemy

$$\frac{du}{dt}v + \frac{dv}{dt}u + p(t)v = f. \quad (2.49)$$

Jako $u(t)$ weźmiemy rozwiązanie równania

$$\frac{du}{dt} + p(t)u = 0, \quad (2.50)$$

które wyraża się wzorem

$$u(t) = \exp \left[- \int p(t) dt \right]. \quad (2.51)$$

Po podstawieniu (2.51) do (2.49) mamy

$$-p \exp \left[- \int p(t) dt \right] v + \frac{dv}{dt} \exp \left[- \int p(t) dt \right] + p \exp \left[- \int p(t) dt \right] v = f, \quad (2.52)$$

a po jego rozwiązaniu

$$v(t) = C + \int f(t) e^{\int p(t) dt} dt, \quad (2.53)$$

gdzie C jest stałą dowolną. Mając określone $v(t)$ i $u(t)$ znajdujemy rozwiązanie według zależności (2.48).

Wreszcie trzecia metoda, którą tutaj omówimy, polega na wykorzystaniu mnożnika całkującego. Mnożąc obydwie strony równania (2.42) przez $\exp[\int p(t) dt]$ otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} (x e^{\int p(t) dt}) = f(t) e^{\int p(t) dt}, \quad (2.54)$$

a po scałkowaniu mamy równanie

$$x e^{\int p(t) dt} = C + \int f(t) e^{\int p(t) dt} dt, \quad (2.55)$$

które jest łatwo rozwiązać ze względu na $x(t)$.

Wszystkie równania o postaci

$$F'(x) \frac{dx}{dt} + F(x)p(t) = f(t) \quad (2.56)$$

dają się sprowadzić do równań liniowych za pomocą podstawienia $z = F(x)$.
Do takich należy również równanie Bernoulliego

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = f(t)x^n, \quad (n \neq 0, 1). \quad (2.57)$$

W tm ostatnim przypadku bardziej ekonomiczna metoda polega na zastosowaniu podstawienia (2.48).

Przykład 2.4

Dla układu z rys. 2.2 wyznaczyć zależność $x(t)$ przy założeniu, że siła zmienia się harmonicznie $\Delta P = P_1 \sin \omega t$. Przyjmując w (2.24) $\Delta x = y$ otrzymujemy

$$\frac{dy}{dt} + \frac{k}{c}y = \frac{P_1}{c} \sin \omega t. \quad (2.58)$$

Zastosujemy tu podstawienie (2.48)

$$y(t) = u(t)v(t). \quad (2.59)$$

Wówczas z (2.58) otrzymujemy

$$\frac{du}{dt}v + u \frac{dv}{dt} + \frac{k}{c}uv = \frac{P_1}{c} \sin \omega t. \quad (2.60)$$

Niech $u = \exp(-\frac{k}{c}t)$ będzie rozwiązaniem równania

$$\frac{du}{dt} + \frac{k}{c}u = 0, \quad (2.61)$$

to po podstawieniu (2.61) do (2.60) otrzymujemy

$$v(t) = \frac{P_1}{c} \int e^{\frac{k}{c}t} \sin \omega t \, dt + C = \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} & \frac{P_1}{c} \left[-\frac{1}{\omega} e^{\frac{k}{c}t} \cos \omega t + \frac{k}{c\omega} \int e^{\frac{k}{c}t} \cos \omega t \, dt \right] + C = \\ & \frac{P_1}{c} \left[-\frac{1}{\omega} e^{\frac{k}{c}t} \cos \omega t + \frac{k}{c\omega^2} e^{\frac{k}{c}t} \sin \omega t - \frac{k^2}{c^2\omega^2} \int e^{\frac{k}{c}t} \sin \omega t \, dt \right] + C \\ v(t) &= \frac{P_1}{c} \left[\frac{k \sin \omega t - c\omega \cos \omega t}{c\omega^2} e^{\frac{k}{c}t} \right] - \frac{k^2}{c^2\omega^2} v(t) + \left[\frac{k^2}{c^2\omega^2} + 1 \right] C. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Z powyższych równań otrzymujemy

$$v(t) = P_1 e^{\frac{k}{c}t} \frac{(-c\omega \cos \omega t + k \sin \omega t)}{k^2 + c^2\omega^2} + C, \quad (2.64)$$

a zgodnie z (2.59) mamy

$$y(t) = P_1 \frac{k \sin \omega t - c\omega \cos \omega t}{k^2 + c^2\omega^2} + C e^{-\frac{k}{c}t}. \quad (2.65)$$

W celu wyznaczenia stałej C uwzględnimy warunki początkowe $y(0) = 0$. Z (2.65) otrzymujemy

$$C = \frac{P_1 c\omega}{k^2 + c^2\omega^2}$$

i ostatecznie poszukiwane rozwiązanie przyjmie postać

$$y(t) = P_1 \left[\frac{c\omega}{k^2 + c^2\omega^2} e^{-\frac{k}{c}t} + \frac{k \sin \omega t - c\omega \cos \omega t}{k^2 + c^2\omega^2} \right]. \quad (2.66)$$

W stanie ustalonym (tj. przy $t \rightarrow +\infty$) otrzymujemy

$$y(t) = \frac{P_1}{k^2 + c^2\omega^2} (k \sin \omega t - c\omega \cos \omega t). \quad (2.67)$$

Ponieważ

$$A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin \omega t \cos \varphi + A \cos \omega t \sin \varphi, \quad (2.68)$$

gdzie

$$A \cos \varphi = k, \quad A \sin \varphi = -c\omega, \quad (2.69)$$

to z (2.69) wynika, że

$$A = \sqrt{k^2 + c^2\omega^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{c\omega}{k}. \quad (2.70)$$

Wobec tego rozwiązanie (2.67) może być przedstawione w postaci

$$y(t) = \frac{P_1}{\sqrt{k^2 + c^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.71)$$

co oznacza, że układ wykonuje oscylacje harmoniczne z przesunięciem fazowym wynoszącym $\arctg(-\frac{c\omega}{k})$ w stosunku do siły wymuszającej.

Dla równania (2.42), jeżeli $p(t)$ nie zależy od czasu, można udowodnić, że jeśli siła wymuszająca $f(t)$ jest ograniczona, to wówczas posiada ono tylko jedno rozwiązanie ograniczone. Natomiast jeśli $f(t)$ jest okresowa, to wówczas również rozwiązanie ograniczone jest okresowe.

Jeśli równanie (2.3) daje się przedstawić w postaci

$$dV(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial x} dx = P(t, x) dt + Q(t, x) dx, \quad (2.72)$$

to wówczas równanie (2.3) będziemy nazywać równaniem różniczkowym zupełnym.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to jest

$$\frac{\partial Q(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial P(t, x)}{\partial t}. \quad (2.73)$$

Zgodnie z (2.72) i (2.73) otrzymujemy

$$\frac{\partial V}{\partial t} = P(t, x), \quad \frac{\partial V}{\partial x} = Q(t, x). \quad (2.74)$$

Po scałkowaniu pierwszego z równań układu mamy

$$V(t, x) = \int P(t, x) dt = \Phi(t, x) + \Phi_0(x). \quad (2.75)$$

Następnie różniczkujemy (2.75) względem x :

$$Q(t, x) = \frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x} + \frac{d\Phi_0(x)}{dx}. \quad (2.76)$$

Wyznaczamy funkcję $\Phi_0(x)$, a następnie $V(t, x)$.

Ostatecznie wszystkie rozwiązania równania (2.3) spełniają równanie $V(t, x) = C$, gdzie C jest dowolną stałą.

2.3 Uwagi o równaniach różniczkowych uwikłanych ze względu na pochodną

Niech równanie (2.1) nie daje się rozwiązać ze względu na dx/dt . Załóżmy, że równanie takie daje się rozwiązać ze względu na x , czyli

$$x = F(t, p), \quad (2.77)$$

gdzie $p = dx/dt$ jest parametrem wprowadzonym w celu znalezienia rozwiązania.

Z równania (2.77) wynika

$$dF(t, p) \equiv dx \equiv p dt = \frac{\partial F(t, p)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(t, p)}{\partial p} dp. \quad (2.78)$$

Z (2.78) widać, że jest ono równaniem różniczkowalnym zupełnie (patrz (2.72)). Wobec tego

$$P(t, p) = \frac{\partial F(t, p)}{\partial t}, \quad Q(t, p) = \frac{\partial F(t, p)}{\partial p}. \quad (2.79)$$

Mając dane $P(t, p)$ i $Q(t, p)$ poszukajmy nowej funkcji $\Phi_1(t, p) = C$ będącej rozwiązaniem równania

$$P(t, p)dt + Q(t, p)dp = 0. \quad (2.80)$$

Jeśli otrzymana funkcja daje się przedstawić w postaci $t = \Phi(C, p)$, gdzie C jest stałą, to wówczas nasze poszukiwane rozwiązanie może być przedstawione w postaci parametrycznej

$$x = F(t, p), \quad t = \Phi(C, p). \quad (2.81)$$

Przykład 2.5

Znaleźć rozwiązanie równania

$$\left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 1 \right)^{1/2} + t \frac{dx}{dt} - x = 0. \quad (2.82)$$

Wprowadźmy parameter $p = \frac{dx}{dt}$. Wówczas

$$x = (1 + p)^{1/2} + tp. \quad (2.83)$$

Powyższe równanie różniczkujemy względem t otrzymując

$$\frac{dx}{dt} = p + \left(t + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right) \frac{dp}{dt},$$

czyli

$$\left(t + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right) \frac{dp}{dt} = 0, \quad (2.84)$$

co oznacza, że $p = C$ lub $t = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$.

Wobec tego mamy dwa rozwiązania

$$x = Cp + \sqrt{1+p^2}, \quad (2.85)$$

lub

$$\begin{cases} t = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \\ y = pt + \sqrt{1+p^2}. \end{cases} \quad (2.86)$$

Aby znaleźć związek pomiędzy y i t z równań (2.86) możemy pozbyć się parametru p otrzymując rozwiązanie $y = \sqrt{1-t^2}$.

Obecnie zajmmy się dyskusją warunków istnienia i jednoznaczności zagadnienia Cauchy'ego.

Rozpatrzmy równanie (2.2) przy warunku początkowym $x(t_0) = x_0$.

Twierdzenie Picarda

Niech funkcja $f(t, x)$ będzie ciągła na prostokącie

$$P = \{ (t, x), |t - t_0| \leq \alpha, |x - x_0| \leq \beta \}, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (2.87)$$

i spełnia warunek Lipschitza:

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad (2.88)$$

dla $|t - t_0| \leq \alpha$ i x_1, x_2 gdzie $|x_1 - x_0| \leq \beta, |x_2 - x_0| \leq \beta$.

Niech $M = \max_{(t,x) \in P} |f(t, x)|$, $h = \min(\alpha, \beta/M)$. Wówczas zadanie Cauchy na przedziale $[t_0 - h; t_0 + h]$ posiada jedno rozwiązanie $x = \Phi(t)$.

Twierdzenie Peano

Niech funkcja $f(t, x)$ będzie określona i ciągła na prostokącie P , przy czym M i h są określone tak jak w twierdzeniu Picarda. Wówczas zagadnienie Cauchy na przedziale $[t_0 - h, t_0 + h]$ posiada przynajmniej jedno rozwiązanie $x = \Phi(t)$.

Punkt (t_0, x_0) będziemy nazywać jednoznacznym punktem zagadnienia Cauchy'ego, jeśli przez ten punkt przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa. Jeśli przez taki punkt przechodzi więcej krzywych całkowych, to będziemy nazywać go niejednoznacznym. Zbiór takich punktów niejednoznacznych nazwiemy zbiorem punktów osobliwych.

W przypadku równań nierozwiązywalnych ze względu na pochodną warunki dostateczne istnienia i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego określa następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Niech funkcja $f(t, x, \dot{x})$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ będzie ciągła ze względu na t i różniczkowalna względem x i $\frac{dx}{dt}$, oraz $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x}) \neq 0$, przy czym punkt $(t_0, x_0, \dot{x}_0)$ znajdujemy jako rozwiązanie równania

$$f(t_0, x_0, \dot{x}_0) = 0. \quad (2.89)$$

Wówczas istnieje jednoznaczne rozwiązanie $x = \Phi(t)$ zagadnienia Cauchy'ego dla równania $f(t, x, \dot{x}) = 0$, $x(t_0) = x_0$, określone w dostatecznie małym otoczeniu punktu t_0 , dla którego $\dot{\Phi}(t_0) = \dot{x}_0$.

Rozdział 3

Równania różniczkowe wyższych rzędów

3.1 Wprowadzenie

Jeśli funkcja $f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)})$ jest określona i ciągła w podzbiorze zbioru $\mathbb{R}^{n+2}$ ($n \geq 1$), to równanie

$$f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0 \quad (3.1)$$

będziemy nazywać równaniem zwyczajnym n -tego rzędu. Równanie to często daje się sprowadzić do postaci

$$\dot{x}^{(n)} = f_1(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) . \quad (3.2)$$

Zagadnienie Cauchy'ego dla równania (3.2) polega na znalezieniu rozwiązania $x(t)$ spełniającego ciąg warunków początkowych

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} . \quad (3.3)$$

Twierdzenie Peano

Jeśli funkcja f_1 jest ciągła w pewnym obszarze, to dla dowolnego punktu $t_0, x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ tego obszaru istnieje rozwiązanie równania (3.2) określone w pewnym otoczeniu t_0 i spełniające (3.3)

Twierdzenie Cauchy-Picarda

Jeśli funkcja f_1 spełnia warunki twierdzenia Peano i dodatkowo warunki Lipschitza ze względu na zmienne $x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}$, to dla dowolnych warunków początkowych (3.3) istnieje jedno rozwiązanie równania (3.2).



Niech D będzie obszarem, w którego każdym punkcie istnieje jedno rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego. Funkcję

$$x = \Phi(t, C_1, \dots, C_n) \quad (3.4)$$

będziemy nazywać rozwiązaniem ogólnym równania (3.2) jeśli:

- a) funkcja Φ posiada pochodną względem t rzędu n ;
- b) dla dowolnego punktu określonego ciągiem (3.3) układ równań

$$\begin{aligned} x_0 &= \Phi(t_0, C_1, \dots, C_n) \\ \dot{x}_0 &= \dot{\Phi}(t_0, C_1, \dots, C_n) \\ &\vdots \\ x_0^{(n-1)} &= \Phi^{(n-1)}(t_0, C_1, \dots, C_n) \end{aligned} \quad (3.5)$$

posiada jednoznaczne rozwiązanie ze względu na stałe $C_1^0, \dots, C_n^0$;

- c) funkcja $\Phi(t, C_1^0, \dots, C_n^0)$ jest rozwiązaniem (3.2) dla dowolnych stałych $C_1^0, \dots, C_n^0$, które są rozwiązaniami równania (3.5).

Jeśli rozwiązanie ogólne dane jest w postaci niejawnej

$$\Phi_0(t, x, C_1, \dots, C_n) = 0, \quad (3.6)$$

to równanie (3.6) nazywamy całą ogólną równania (3.2).

Dowolne rozwiązanie (3.4) dla konkretnych wartości stałych $C_1, \dots, C_n$ nazwiemy rozwiązaniem szczególnym równania (3.2).

Aby na podstawie rozwiązań ogólnych znaleźć rozwiązanie szczególne należy wykonać następujące kroki:

1. Ze związków (3.4) lub (3.6) należy otrzymać ciąg równań typu (3.5) dla wyznaczenia stałych $C_1, \dots, C_n$;
2. Podstawić wyliczone konkretne wartości $C_1^0, \dots, C_n^0$ do (3.4) lub (3.6), które teraz będą rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego.

Może się zdarzyć, że związki (3.4) lub (3.6) mają postać

$$\begin{aligned} t &= t(p, C_1, \dots, C_n), \\ x &= x(p, C_1, \dots, C_n), \end{aligned} \quad (3.7)$$

to wówczas (3.7) jest całą ogólną rozpatrywanego równania z parametrem p .

W przypadku równania (3.1) poniższe twierdzenie zapewnia istnienie i jednoznaczność zagadnienia Cauchy'ego.

Twierdzenie

Niech funkcja f określona przez (3.1) będzie ciągła i posiada ciągle pochodne za względu na $x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}$.

Wówczas dla dowolnego punktu $(t_0, x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n)})$ takiego, że

$$f(t_0, x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n)}) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}(t_0, x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n)}) \neq 0, \quad (3.8)$$

istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania (3.1) określone w okolicy punktu t_0 i spełniające warunki początkowe (3.3).

Rozwiązanie ogólne jest rodziną krzywych całkowych na płaszczyźnie (t, x) o n parametrach $C_1, \dots, C_n$.

3.2 Równania różniczkowe liniowe

Rozważmy równanie niejednorodne liniowe o postaci

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = f(t), \quad (3.9)$$

gdzie $L(y)$ będziemy nazywać operatorem liniowym.

Przyjmując $f(t) \equiv 0$ otrzymujemy równanie liniowe jednorodne:

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = 0. \quad (3.10)$$

Poniżej podano niektóre własności operatora $L(y)$, a mianowicie:

$$\begin{aligned} L(Cy) &= CL(y), & L(y_1 + y_2) &= L(y_1) + L(y_2), \\ L(C_1y_1 + \dots + C_my_m) &= C_1L(y_1) + \dots + C_mL(y_m). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Twierdzenie

Jeśli $y_1, \dots, y_m$ są rozwiązaniami równania (3.10), to i $y = C_1y_1 + \dots + C_my_m$ są także jego rozwiązaniami przy dowolnych stałych $C_1, \dots, C_m$.

Definicja (funkcji liniowo niezależnych)

Niech $u_1(t), \dots, u_m(t)$ będą funkcjami określonymi w przedziale $a \leq t \leq b$. Funkcje $u_1(t), \dots, u_m(t)$ nazywać będziemy liniowo zależnymi w tym przedziale, jeśli istnieją stałe $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, nie wszystkie równe zero, dla których spełnione jest równanie

$$\alpha_1u_1 + \dots + \alpha_mu_m \equiv 0 \quad a \leq t \leq b. \quad (3.12)$$

Jeśli równanie (3.12) jest spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_1 = \dots = \alpha_m \equiv 0$, to funkcje $u_1, \dots, u_m$ nazywamy liniowo niezależnymi.

Warunek konieczny liniowej zależności funkcji $u_1, \dots, u_m$ otrzymujemy w sposób następujący. Niech $u_1, \dots, u_n$ będą funkcjami liniowo zależnymi, czyli spełniają (3.12) ($m = n$). Różniczkując (3.12) ($n - 1$) krotnie mamy:

$$\alpha_1 u_1^{(k)} + \dots + \alpha_n u_n^{(k)} = 0, \quad k = 1, \dots, n - 1. \quad (3.13)$$

Układ równań (3.12) i (3.13) jest spełniony przez $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (które nie są wszystkie równe zero), wtedy i tylko wtedy, gdy zeruje się wyznacznik o postaci:

$$W(u_1, \dots, u_n) = \begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ u_1' & \dots & u_n' \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0, \quad a \leq t \leq b. \quad (3.14)$$

Wyznacznik (3.14) nazywamy wyznacznikiem Wronskiego lub wronskianem.

Twierdzenie

Jeżeli $y_1, \dots, y_n$ są rozwiązaniami równania (3.10) i $W(y_1, \dots, y_n)|_{t=t_0} = 0$, to $W(y_1, \dots, y_n) \equiv 0$ dla $a \leq t \leq b$ i $y_1, \dots, y_n$ są rozwiązaniami liniowo zależnymi w przedziale $a \leq t \leq b$.

Twierdzenie

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to aby rozwiązania $z_1, \dots, z_n$ równania (3.10) były liniowo niezależne jest, żeby w dowolnym punkcie t_0 było $W(z_1, \dots, z_n)|_{t=t_0} \neq 0$. Jeżeli $W(t_0) \neq 0$ to i $W(t) \neq 0$, $a \leq t \leq b$; jeśli $W(t_0) = 0$ to i $W(t) = 0$.

Twierdzenie

Jeśli $z_1, \dots, z_n$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania (3.10), to $y = C_1 z_1 + \dots + C_n z_n$ jest jego rozwiązaniem ogólnym w obszarze $a \leq t \leq b$, $-\infty < y^{(k)} < \infty$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Można dowieść, że istnieje n takich rozwiązań liniowo niezależnych. Zbiór liniowo niezależnych rozwiązań $y_1, \dots, y_n$ nazywamy fundamentalnym układem rozwiązań.

Niech y_1 będzie rozwiązaniem równania (3.9) tj. $L(y_1) = f(t)$, to wprowadzamy nową zmienną z

$$y = z + y_1. \quad (3.15)$$

Podstawiając (3.15) do (3.9) mamy

$$\begin{aligned} L(z + y_1) &= z^{(n)} + p_1(t)z^{(n-1)} + \dots + p_n(t)z + y_1^{(n)} + p_1(t)y_1^{(n-1)} + \dots \\ &+ p_n(t)y_1 = f(t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ponieważ $L(y_1) = f(t)$, to

$$z^{(n)} + p_1(t)z^{(n-1)} + \dots + p_n(t)z = 0, \quad (3.17)$$

czyli funkcja z spełnia równanie jednorodne (3.10) odpowiadające równaniu niejednorodnemu (3.9). Jeśli więc $z_1, \dots, z_n$ jest układem fundamentalnym rozwiązań równania (3.17), to rozwiązanie ogólne (3.17) ma postać $z = C_1z_1 + \dots + C_nz_n$, a tym samym rozwiązanie ogólne równania (3.9) wyraża się równaniem

$$y = C_1z_1 + \dots + C_nz_n + y_1. \quad (3.18)$$

Rozwiązanie ogólne równania (3.9) jest więc sumą rozwiązań: szczególnego równania niejednorodnego i ogólnego równania jednorodnego.

Jeśli dysponujemy układem fundamentalnym rozwiązań $z_1, \dots, z_n$ równania (3.10), to metodą Lagrange'a można wyznaczyć rozwiązanie szczególne (3.9).

Poszukajmy rozwiązania (3.9) o postaci

$$y = C_1(t)z_1 + \dots + C_n(t)z_n. \quad (3.19)$$

Różniczkując (3.19) mamy

$$y' = C_1'z_1 + \dots + C_n'z_n + C_1z_1' + \dots + C_nz_n'. \quad (3.20)$$

Niech spełnione będzie równanie:

$$C_1'z_1 + \dots + C_n'z_n = 0. \quad (3.21)$$

Różniczkując (3.20) z uwzględnieniem (3.21) mamy

$$y'' = C_1z_1'' + \dots + C_nz_n'' + C_1'z_1' + \dots + C_n'z_n'. \quad (3.22)$$

Niech spełnione będzie równanie

$$C_1z_1' + \dots + C_nz_n' = 0. \quad (3.23)$$

Różniczkując (3.22) po uwzględnieniu (3.23) mamy:

$$y''' = C_1 z_1''' + \dots + C_n z_n''' + C_1' z_1'' + \dots + C_n' z_n'' . \quad (3.24)$$

Niech

$$C_1' z_1'' + \dots + C_n' z_n'' = 0 . \quad (3.25)$$

Postępując analogicznie mamy:

$$y^{(k)} = C_1(t) z_1^{(k)} + \dots + C_n(t) z_n^{(k)} , \quad k = 1, \dots, n-1 , \quad (3.26)$$

$$C_1'(t) z_1^{(k)} + \dots + C_n'(t) z_n^{(k)} = 0 , \quad k = 0, 1, \dots, n-2 . \quad (3.27)$$

Natomiast różniczkując (3.26) dla $k = n-1$ mamy:

$$y^{(n)} = C_1(t) z_1^{(n)} + \dots + C_n(t) z_n^{(n)} + C_1'(t) z_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(t) z_n^{(n-1)} \quad (3.28)$$

Podstawiając (3.19), (3.26) i (3.28) do (3.9) mamy:

$$C_1(t) L(z_1) + \dots + C_n L(z_n) + C_1'(t) z_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(t) z_n^{(n-1)} = f(t) . \quad (3.29)$$

Zgodnie z założeniem jeżeli z_k jest rozwiązaniem (3.10), to $L(z_k) = 0$ $k = 1, \dots, n$ i mamy

$$C_1'(t) z_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(t) z_n^{(n-1)} = f(t) . \quad (3.30)$$

Tak otrzymany układ równań (3.27) i (3.30) stanowi układ równań algebraicznych niejednorodnych z „ n ” niewiadomymi $C_1'(t), \dots, C_n'(t)$.

Ponieważ zgodnie z założeniem $z_1, \dots, z_n$ jest układem fundamentalnym więc wyznacznik Wrońskiego $W(z_1, \dots, z_n) \neq 0$, a zatem możemy wyznaczyć współczynniki $C_k'(t)$, $k = 1, \dots, n$ w powyższych równaniach. Będą one zależeć od $f(t)$, $z_1, \dots, z_n$, $z_1^{(k)}, \dots, z_n^{(k)}$.

Założmy, że

$$C_k'(t) = \varphi_k(t) , \quad k = 1, \dots, n . \quad (3.31)$$

Po scałkowaniu (3.31) otrzymujemy

$$C_k(t) = \int_{t_0}^t \varphi_k(t) dt + C_k , \quad k = 1, \dots, n , \quad (3.32)$$

gdzie C_k są dowolnymi stałymi.

Podstawiając tak wyznaczone wartości stałych $C_k(t)$ do (3.19) mamy

$$y = z_1 \int_{t_0}^t \varphi_1(t) dt + \dots + z_n \int_{t_0}^t \varphi_n(t) dt + C_1 z_1 + \dots + C_n z_n . \quad (3.33)$$

Jest to rozwiązanie ogólne równania różniczkowego niejednorodnego (3.9). Rozwiązanie szczególne równania jednorodnego otrzymamy przyjmując $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$. I tak widać, żeby otrzymać rozwiązanie ogólne równania (3.9) wystarczy znać n liniowo niezależnych rozwiązań równania jednorodnego (3.10).

Można wykazać, że jeśli mamy m liniowo niezależnych rozwiązań równania (3.10) $(z_1, \dots, z_m)$, to jego całkowanie sprowadza się do całkowania równania rzędu $n - m$.

Jeżeli $p_1(t), \dots, p_n(t)$ są funkcjami rzeczywistymi i istnieje rozwiązanie zespolone $y = u(t) + iv(t)$, gdzie $u(t)$ i $v(t)$ są funkcjami rzeczywistymi, to różniczkując to rozwiązanie k razy, podstawiając do (3.10) i wykorzystując własność operatora $L(y)$ mamy

$$L(u) + iL(v) = 0. \quad (3.34)$$

Powyższe równanie spełnione jest wtedy i tylko wtedy, gdy

$$L(u) = 0, \quad L(v) = 0. \quad (3.35)$$

Stąd $y = u + iv$ jest rozwiązaniem analizowanego równania, gdy $u(t)$ i $v(t)$ są również jego rozwiązaniami.

W przypadku równań różniczkowych jednorodnych o stałych rzeczywistych współczynnikach o postaci

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y \quad (3.36)$$

jego rozwiązań poszukujemy w postaci funkcji elementarnych

$$y = e^{\lambda t}, \quad (3.37)$$

gdzie λ jest pewną stałą.

Zgodnie z (3.37) mamy:

$$y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda t}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.38)$$

Podstawiając (3.37) do (3.36) otrzymujemy

$$L(\lambda) = e^{\lambda t} P_n(\lambda) = 0. \quad (3.39)$$

Wielomian $P_n(e^{\lambda t}) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$ będziemy nazywać wielomianem charakterystycznym.

Zgodnie z (3.39) równanie charakterystyczne przyjmie postać:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (3.40)$$

Pierwiastki równania (3.40) nazywamy wartościami charakterystycznymi.

Założmy, że pierwiastki $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są rzeczywiste i różne między sobą. Wówczas mamy n rozwiązań o postaci

$$e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}. \quad (3.41)$$

Utwórzmy wyznacznik Wrońskiego

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n^2 e^{\lambda_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = \\ &= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)t} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \\ &= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)t} \cdot (\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2) \dots (\lambda_n - \lambda_{n-1})(\lambda_{n-2} - \lambda_1) \dots \\ & \quad (\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}) \dots (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0, \end{aligned} \quad (3.42)$$

ze względu na założenie, że pierwiastki są różne między sobą.

Łatwo zauważyć, że $W(t) \rightarrow 0$, gdy $t \rightarrow \infty$, jeżeli $\lambda_k < 0$, $k = 1, \dots, n$.

Rozwiązanie ogólne równania (3.36) ma postać

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}. \quad (3.43)$$

Jeżeli $\lambda_k < 0$, $k = 1, \dots, n$, to każde rozwiązanie $y \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow +\infty$.

Można podać zbiór warunków początkowych taki, aby rozwiązanie (3.43) posiadało wyżej wspomnianą własność.

Rozpatrzmy przypadek, gdy $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są różne między sobą, ale wśród nich są pierwiastki zespolone. Niech $\lambda_1 = a + ib$. Ponieważ współczynniki równania (3.40) są rzeczywiste, więc istnieje również pierwiastek $\lambda_2 = a - ib$. Rozwiązanie ogólne ma więc postać $y = u(t) + iv(t)$, gdzie $u(t)$ i $v(t)$ są funkcjami rzeczywistymi. Jeśli $y(t_0) = u(t_0) + iv(t_0) = y_0$, $y^{(k)}(t_0) = u^{(k)}(t_0) + iv^{(k)}(t_0) = y_0^{(k)}$, $k = 1, \dots, n-1$, gdzie y_0 i $y_0^{(k)}$ są rzeczywiste, to $v(t_0) = v'(t_0) = \dots = v^{(n-1)}(t_0) = 0$ i rozwiązanie $v(t) \equiv 0$.

Mając dane warunki początkowe wyznaczmy poszukiwane stałe $C_1, \dots, C_n$ z równań

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 e^{\lambda_1 t_0} + \dots + C_n e^{\lambda_n t_0}, \\ y_0^{(k)} &= C_1 \lambda_1^k e^{\lambda_1 t_0} + \dots + C_n \lambda_n^k e^{\lambda_n t_0}, \quad k = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Rozwiązanie (3.43) po podstawieniu wyznaczonych stałych $C_1, \dots, C_n$ będzie rzeczywistym.

Ponieważ rozwiązanie jest na pewno rzeczywiste, to poszukiwanej postaci rozwiązania równania ogólnego można nadać postać rzeczywistą.

Niech $\lambda_1 = a + ib$ i $\lambda_2 = a - ib$. Rozpatrzmy

$$\begin{aligned} C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} &= C_1 e^{at} (\cos bt + i \sin bt) + C_2 e^{at} (\cos bt - i \sin bt) = \\ &= (C_1 + C_2) e^{at} \cos bt + i(C_1 - C_2) e^{at} \sin bt = \\ &= \bar{C}_1 e^{at} \cos bt + \bar{C}_2 e^{at} \sin bt, \end{aligned}$$

gdzie $\bar{C}_1$ i $\bar{C}_2$ są stałymi.

Tak więc

$$y = \bar{C}_1 e^{at} \cos bt + \bar{C}_2 e^{at} \sin bt + C_3 e^{\lambda_3 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}. \quad (3.45)$$

Dla rzeczywistych wartości warunków początkowych $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ rozwiązanie powyższe jest rzeczywiste, tak więc i stałe $\bar{C}_1$ i $\bar{C}_2$ muszą być rzeczywistymi.

Ponieważ $e^{\lambda_1 t} = e^{at} (\cos bt + i \sin bt)$ jest rozwiązaniem, to $\bar{y}_1 = e^{at} \cos bt$ i $\bar{y}_2 = e^{at} \sin bt$ są również rozwiązaniami generowanymi poprzez pierwiastki $\lambda_1 = a + ib$ i $\lambda_2 = a - ib$.

Załóżmy, że wśród pierwiastków równania charakterystycznego jest m -krotny $\lambda_1 = \dots = \lambda_m$. Weźmy k -tą pochodną po λ lewej strony (3.39)

$$\frac{d^k L(e^{\lambda t})}{d\lambda^k} = L \left[\frac{d^k e^{\lambda t}}{d\lambda^k} \right] = L(t^k e^{\lambda t}). \quad (3.46)$$

Biorąc pod uwagę (3.36) i (3.46) mamy:

$$L(t^k e^{\lambda t}) = (t^k e^{\lambda t})^{(n)} + a_1 (t^k e^{\lambda t})^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} (t^k e^{\lambda t})' + a_n (t^k e^{\lambda t}). \quad (3.47)$$

Skorzystamy teraz z twierdzenia Leibnitza:

Pochodna n -tego rzędu iloczynu dwóch funkcji $u(t)$ i $v(t)$ n -krotnie różniczkowalnych dana jest wzorem

$$(uv)^{(n)} = uv^{(n)} + \binom{n}{1} u'v^{(n-1)} + \binom{n}{2} u''v^{(n-2)} + \dots + \binom{n}{n-1} u^{(n-1)}v' + u^{(n)}v = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}v^{(n-k)}, \quad (3.48)$$

gdzie: $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$.

W oparciu o to twierdzenie zróżniczkujemy poszczególne składniki we wzorze (3.47) i po uporządkowaniu otrzymujemy:

$$L(t^k e^{\lambda t}) = t^k e^{\lambda t} P_n(\lambda) + C_1^{(k)} t^{k-1} e^{\lambda t} P_n'(\lambda) + C_2^{(k)} t^{k-2} e^{\lambda t} P_n''(\lambda) + \dots + e^{\lambda t} P_n^{(k)}(\lambda), \quad (3.49)$$

gdzie $C_1^{(k)}$ są współczynnikami zależnymi od k i l .

Ponieważ $\lambda_1 = \dots = \lambda_m$, to równanie charakterystyczne dla takiego pierwiastka wielokrotnego posiada własność

$$P_n(\lambda_1) = P_n'(\lambda_1) = \dots = P_n^{(m-1)}(\lambda_1) = 0. \quad (3.50)$$

Z powyższego wynika, że (3.49) jest równe zero dla $k = 1, 2, \dots, m-1$ i $\lambda = \lambda_1$, gdzie λ_1 jest pierwiastkiem m -krotnym.

Tak więc niezerowe rozwiązania, dla których $L(t^k e^{\lambda t}) = 0$ tworzą zbiór $e^{\lambda_1 t} t^k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, lub też możemy powiedzieć inaczej, że m -krotny pierwiastek λ_1 generuje m rozwiązań o postaci $e^{\lambda_1 t}$, $t e^{\lambda_1 t}$, $\dots$, $t^{m-1} e^{\lambda_1 t}$.

Jeżeli $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ są różnymi pierwiastkami równania charakterystycznego o krotności odpowiednio $m_1, \dots, m_l$ i innych pierwiastków nie ma (tzn. $m_1 + \dots + m_l = n$), to rozwiązanie ogólne równania (3.36) ma postać

$$y = P_{m_1-1}(t) e^{\lambda_1 t} + P_{m_2-1}(t) e^{\lambda_2 t} + \dots + P_{m_l-1}(t) e^{\lambda_l t}, \quad (3.51)$$

gdzie $P_{m_1-1}(t), P_{m_2-1}(t), \dots, P_{m_l-1}(t)$ są wielomianami ze względu na t o odpowiednich stopniach: $m_1 - 1, m_2 - 1, \dots, m_l - 1$.

Zbiór rozwiązań $e^{\lambda_1 t}$, $t e^{\lambda_1 t}$, $\dots$, $t^{m_1-1} e^{\lambda_1 t}$ jest liniowo niezależny (można to sprawdzić licząc wronskian).

Do tej pory rozpatrywaliśmy wielokrotne pierwiastki rzeczywiste. Jeśli wśród pierwiastków $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ jest również krotny pierwiastek zespolony $\lambda_1 = a + ib$, to również musi istnieć i pierwiastek $\lambda_2 = a - ib$ o tej samej krotności.



Rozwiązanie ogólne ma również postać (3.51), gdzie fakt rzeczywistych wartości warunków początkowych $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ pozwala wyznaczyć taki zbiór stałych, aby poszukiwane rozwiązanie było rzeczywiste.

Niech pierwiastki $\lambda = a + ib$ i $\bar{\lambda} = a - ib$ będą m -krotnymi. Wówczas rozwiązanie posiada składniki

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t} \quad \text{ i } \quad e^{\bar{\lambda} t}, te^{\bar{\lambda} t}, \dots, t^{m-1}e^{\bar{\lambda} t}. \quad (3.52)$$

Ponieważ $t^k e^{\lambda t} = t^k e^{at} e^{ibt} = t^k e^{at} (\cos bt + i \sin bt)$ jest również rozwiązaniem, wobec tego część rzeczywista i urojona muszą być również rozwiązaniami tego równania. Biorąc pod uwagę pierwiastek $\bar{\lambda}$ otrzymujemy rozwiązanie identyczne.

W przypadku gdy pierwiastek jest m -krotny i czysto urojony, tj. $a = 0$, to rozwiązaniami rzeczywistymi są $t^k \cos bt$, $t^k \sin bt$, $k = 0, 1, \dots, m$.

Podsumujmy teraz rozważania dotyczące pierwiastków wielokrotnych równania charakterystycznego $P_n(\lambda) = 0$.

Każdy rzeczywisty m -krotny pierwiastek λ generuje rozwiązanie typu (3.52), natomiast pierwiastek zespolony m -krotny generuje $2m$ rozwiązań.

Rzeczywistemu pierwiastkowi λ o krotności „ m ” odpowiada rozwiązanie ogólne o postaci

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_k e^{\lambda t} t^k, \quad (3.53)$$

a pierwiastkom zespolonym sprzężonym λ i $\bar{\lambda}$ odpowiada rozwiązanie ogólne o postaci:

$$\sum_{k=0}^{m-1} A_k t^k e^{at} \cos bt + B_k t^k e^{at} \sin bt, \quad (3.54)$$

i na koniec pierwiastkom czysto urojonym o postaci $\lambda = ib$, $\bar{\lambda} = -ib$ odpowiada rozwiązanie ogólne

$$\sum_{k=0}^{m-1} A_k t^k \cos bt + B_k t^k \sin bt, \quad (3.55)$$

gdzie A_k, B_k, C_k są stałymi wyznaczonymi poprzez warunki początkowe.

Warto podkreślić, że we wszystkich przypadkach rozwiązanie ogólne równania (3.36) wyraziliśmy poprzez funkcje elementarne. Opisana wcześniej metoda Lagrange'a pozwala wyznaczyć rozwiązania równania niejednorodnego



$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(t) \quad (3.56)$$

dla dowolnych t .

Przy szczególnych postaciach siły wymuszającej $f(t)$ np.

$$f(t) = P_r(t)e^{at} \cos bt + Q_s(t)e^{at} \sin bt, \quad (3.57)$$

gdzie $P_r(t)$ i $Q_s(t)$ są wielomianami stopnia r i s ($r > s$), rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego można poszukiwać o postaci (jeśli $\lambda = a + ib$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego)

$$y_1 = P'_r(t)e^{at} \cos bt + Q'_s(t)e^{at} \sin bt, \quad (3.58)$$

gdzie $P'_r(t)$ i $Q'_s(t)$ są wielomianami stopnia r i s z pewnymi współczynnikami.

Jeśli $\lambda = a + ib$ jest pierwiastkiem ν -krotnym równania charakterystycznego, to wówczas

$$y_1 = t^\nu P_r(t)e^{at} \cos bt + t^\nu Q_r(t)e^{at} \sin bt. \quad (3.59)$$

Jeśli $f(t) = P_r(t)$, tj. $a = b = 0$, to $y_1 = P'_r(t)$ jeżeli $\lambda = 0$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, i $y_1 = t^\nu P'_r(t)$ jeżeli $\lambda = 0$ jest pierwiastkiem ν -krotnym.

Jeśli $f(t) = P_r(t)e^{at}$ ($b = 0$), to wówczas $y_1 = P'_r(t)e^{at}$ jeśli a nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, i $y_1 = t^\nu P_r(t)e^{at}$, jeśli $\lambda = a$ jest pierwiastkiem o krotności ν .

Jeśli $f(t) = P_r(t) \cos bt + Q_s(t) \sin bt$, to $y_1 = P_r(t) \cos bt + Q_r(t) \sin bt$, jeśli $\lambda = ib$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego i $y_1 = t^\nu P_r(t) \cos bt + t^\nu Q_r(t) \sin bt$ jeśli $\lambda = ib$ jest pierwiastkiem o krotności ν .

3.3 Wybrane przykłady

W nieliniowej dynamice szczególnie ważną rolę odgrywa równanie o postaci

$$\frac{dy}{dt} + 2p(t)\frac{dy}{dt} + r^2(t)y = f(t). \quad (3.60)$$

Opisuje ono drgania układu o jednym stopniu swobody z tłumieniem $p(t)$ i sztywnością $r(t)$ zależnymi od czasu, który jest wymuszany siłą $f(t)$.

Możemy z tego równania usunąć człon z pierwszą pochodną, dokonując podstawienia:



$$x = y \exp \left[\int p(t) dt \right] . \quad (3.61)$$

Po wprowadzeniu zmiennej (3.61) do (3.60) otrzymujemy

$$x''(t) + [r^2(t) - p^2(t) - p'(t)] x = f(t) \exp \left[\int p(t) dt \right] . \quad (3.62)$$

Zgodnie z rozważaniami poprzedniego paragrafu rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (3.60) można uzyskać stosując opisaną w tym paragrafie metodę Lagrange'a (wariacji stałych). W tym celu wystarczy znać postać rozwiązania ogólnego równania jednorodnego ($f(t) \equiv 0$).

Niech rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (3.60) ($f(t) \equiv 0$) ma postać:

$$y = C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t) , \quad (3.63)$$

gdzie $z_1(t)$ i $z_2(t)$ są rozwiązaniami liniowo niezależnymi, a C_1 i C_2 są stałymi.

Korzystając ze wzorów (3.21) i (3.30) dla $n = 2$ mamy:

$$\begin{aligned} C_1'(t) z_1 + C_2'(t) z_2 &= 0 , \\ C_1'(t) z_1' + C_2'(t) z_2' &= f(t) . \end{aligned} \quad (3.64)$$

Układ równań (3.64) pozwala wyznaczyć C_1' i C_2' .

Wyznacznik główny W , który jest też wronskianem, ma postać:

$$W(t) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix} \neq 0 , \quad (3.65)$$

ponieważ z_1 i z_2 z założenia są liniowo niezależne.

$$\begin{aligned} C_1'(t) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & z_2 \\ f(t) & z_2' \end{vmatrix}}{W} = \frac{-z_2 f(t)}{z_1 z_2' - z_1' z_2} , \\ C_2'(t) &= \frac{\begin{vmatrix} z_1 & 0 \\ z_1' & f(t) \end{vmatrix}}{W} = \frac{f(t) z_1}{z_1 z_2' - z_1' z_2} . \end{aligned} \quad (3.66)$$

Całkując (3.66) mamy

$$\begin{aligned} C_1(t) &= - \int \frac{z_2 f(t) dt}{z_1 z_2' - z_1' z_2} + C_{10} , \\ C_2(t) &= - \int \frac{f(t) z_1 dt}{z_1 z_2' - z_1' z_2} + C_{20} . \end{aligned} \quad (3.67)$$

Ostatecznie rozwiązanie ogólne równania (3.60) otrzymujemy po podstawieniu (3.67) do (3.63)

$$y = -z_1 \int \frac{z_2 f(t) dt}{z_1 z_2' - z_1' z_2} + z_2 \int \frac{f(t) z_1 dt}{z_1 z_2' - z_1' z_2} + C_{10} z_1 + C_{20} z_2. \quad (3.68)$$

Rozwiązanie szczególne równania (3.60) otrzymamy po przyjęciu $C_{10} = C_{20} = 0$

$$y_1 = -z_1 \int \frac{z_2 f(t) dt}{z_1 z_2' - z_1' z_2} + z_2 \int \frac{f(t) z_1 dt}{z_1 z_2' - z_1' z_2}. \quad (3.69)$$

W ogólnym przypadku po podstawieniu znanych rozwiązań $z_1(t)$, $z_2(t)$ i $f(t)$ otrzymuje się po scałkowaniu skomplikowane wyrażenie na y_1 .

Niech w równaniu (3.62) $r(t)$ i $p(t)$ będą funkcjami okresowymi o okresie T (czyli $r(t+T) = r(t)$, $p(t+T) = p(t)$) oraz niech $f(t) = 0$, czyli równanie to przyjmuje postać

$$x''(t) + a(t)x(t) = 0, \quad (3.70)$$

gdzie $a(t) = [r^2(t) - p^2(t) - p'(t)]$ i $a(t+T) = a(t)$.

Równanie (3.70) nazywamy równaniem Hilla.

Niech $z_1(t)$ i $z_2(t)$ będą dwoma liniowo niezależnymi rozwiązaniami, czyli rozwiązanie ogólne równania (3.70) ma postać

$$x = C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t). \quad (3.71)$$

Ponieważ po zastąpieniu w równaniu (3.70) zmiennej niezależnej t na $t+T$ równanie to nie ulega zmianie (jest takie samo), a $z_1(t)$ i $z_2(t)$ są jego rozwiązaniami szczególnymi, to rozwiązaniami są również $z_1(t+T)$ oraz $z_2(t+T)$. Wcale to nie oznacza, że $z_1(t) = z_1(t+T)$ i $z_2(t) = z_2(t+T)$. Ponieważ $z_1(t)$ i $z_2(t)$ jest układem fundamentalnym to każde inne rozwiązanie da się poprzez te dwa wyrazić.

Wobec tego

$$\begin{aligned} z_1(t+T) &= a_{11} z_1(t) + a_{12} z_2(t), \\ z_2(t+T) &= a_{21} z_1(t) + a_{22} z_2(t). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Załóżmy, że $z_1(t)$ i $z_2(t)$ są rzeczywiste, to $z_1(t+T)$ i $z_2(t+T)$ są rzeczywiste, a więc a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} są też rzeczywiste.

Podstawiając w (3.71) $t + T$ zamiast t i uwzględniając (3.72) mamy:

$$\begin{aligned} x(t+T) &= C_1 z_1(t+T) + C_2 z_2(t+T) = \\ &= C_1 [a_{11} z_1(t) + a_{12} z_2(t)] + C_2 [a_{21} z_1(t) + a_{22} z_2(t)] = \\ &= [C_1 a_{11} + C_2 a_{21}] z_1(t) + [C_1 a_{12} + C_2 a_{22}] z_2(t). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Ograniczmy się do rozwiązań spełniających warunek:

$$x(t+T) = \sigma x(t), \quad (3.74)$$

gdzie σ jest pewną stałą. Rozwiązanie takie nazywamy normalnym.

Biorąc pod uwagę (3.73) i mnożąc (3.71) przez σ , a następnie porównując współczynniki przy $z_1(t)$ i $z_2(t)$ mamy:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \sigma)C_1 + C_2 a_{21} &= 0, \\ a_{12}C_1 + C_2(a_{22} - \sigma) &= 0. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Aby stałe C_1 i C_2 były różne od zera musi być spełnione równanie

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \sigma & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \sigma \end{vmatrix} = 0, \quad (3.76)$$

co pozwala wyznaczyć wartość σ z równania

$$\sigma^2 - (a_{11} + a_{22})\sigma + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \quad (3.77)$$

Aby rozwiązania $z_1(t)$ i $z_2(t)$ były liniowo niezależne wystarczy, aby w dowolnym punkcie t_0 $W(z_1, z_2)|_{t=t_0} \neq 0$. Weźmy

$$W(z_1, z_2)|_{t=0} = \begin{vmatrix} z_1(0) & z_2(0) \\ z_1'(0) & z_2'(0) \end{vmatrix}. \quad (3.78)$$

Jeśli warunki początkowe wybierzemy tak, aby

$$\begin{aligned} z_1(0) &= 1, & z_2(0) &= 0, \\ z_1'(0) &= 0, & z_2'(0) &= 1, \end{aligned} \quad (3.79)$$

to $W(z_1, z_2)|_{t=0} = 1 \neq 0$.

Można zawsze takie warunki uzyskać drogą normalizacji równań. Różniczkując (3.72) i przyjmując $t = 0$ mamy:

$$\begin{aligned} z_1(T) &= a_{11}z_1(0) + a_{12}z_2(0) = a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 = a_{11}, \\ z_1'(T) &= a_{11}z_1'(0) + a_{12}z_2'(0) = a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 = a_{12}, \\ z_2(T) &= a_{21}z_1(0) + a_{22}z_2(0) = a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 = a_{21}, \\ z_2'(T) &= a_{21}z_1'(0) + a_{22}z_2'(0) = a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 1 = a_{22}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Podstawiając $z_1(t)$ i $z_2(t)$ do (3.70) mamy:

$$\frac{z_1''}{z_1} = -a(t); \quad \frac{z_2''}{z_2} = -a(t), \quad (3.81)$$

czyli

$$z_1'' z_2 - z_2'' z_1 = 0. \quad (3.82)$$

Rozdzielając zmienne i całkując przez części (3.82) mamy:

$$z_1 z_2' - z_2 z_1' = C, \quad (3.83)$$

gdzie C jest pewną stałą.

Podstawiając do (3.83) $t = 0$ i biorąc pod uwagę (3.79) otrzymujemy $C = 1$.

Podstawiając do (3.83) związki (3.80) uzyskujemy

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1. \quad (3.84)$$

Po uwzględnieniu (3.84) w (3.77) mamy

$$\sigma^2 - 2m\sigma + 1 = 0, \quad (3.85)$$

gdzie $2m = a_{11} + a_{22}$.

Pierwiastkami równania (3.85) są

$$\sigma_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - 1}. \quad (3.86)$$

Ze względu na postać równania (3.85) pierwiastki σ_1 i σ_2 spełniają związek $\sigma_1 \sigma_2 = 1$.

W przedziale $-1 < m < +1$ σ jest wielkością zespoloną o module równym 1.

Gdy $|m| > 1$ σ_1 i σ_2 są rzeczywiste. Dla $m = 1$ mamy $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, a dla $m = -1$ mamy $\sigma_1 = \sigma_2 = -1$.

Z równania (3.74) widać, że dla $\sigma = 1$ mamy

$$x(t+T) = x(t), \quad (3.87)$$

czyli, że rozwiązanie normalne jest funkcją okresową o okresie T .

Dla $\sigma = -1$ mamy:

$$x(t+2T) = -x(t+T) = x(t), \quad (3.88)$$

czyli, że rozwiązanie jest również okresowe o okresie $2T$.

Jeżeli $\sigma > 1$ (dla $|m| > 1$) to jak wynika z (3.74) rozwiązanie wzrasta nieograniczenie ze wzrostem t . Ograniczone rozwiązanie ma miejsce wtedy, gdy $\sigma \leq 1$. Wartości $\sigma = 1$ i $\sigma = -1$ stanowią granicę pomiędzy obszarami z rozwiązaniami ograniczonymi i nieograniczonymi.

Jeśli σ jest wielkością zespoloną, to można ją przedstawić w postaci:

$$\sigma_{1,2} = \exp(\pm i\beta T) = (\cos \beta T \pm i \sin \beta T), \quad 0 < \beta T < 2\pi. \quad (3.89)$$

Jeśli σ jest wielkością rzeczywistą, to można ją przedstawić w postaci

$$\sigma_{1,2} = \exp(\pm \alpha T), \quad 0 < \alpha T < \infty. \quad (3.90)$$

Zatem ogólne wyrażenie na σ ma postać

$$\sigma = \exp(\mu T), \quad (3.91)$$

gdzie $\mu = \alpha + i\beta$ nazywa się wykładnikiem charakterystycznym.

Okres T występuje przy wykładniku ponieważ wartość σ zależy od m , a zgodnie ze (3.86) i (3.80) m zależy od T .

Przedstawimy rozwiązanie $x(t)$ w postaci iloczynu dwóch funkcji

$$x(t) = \exp(\mu t)\Phi(t), \quad (3.92)$$

gdzie $\Phi(t)$ jest okresowe, co zostanie wykazane poniżej.

Biorąc pod uwagę (3.92) prawdziwe jest równanie:

$$x(t+T) = \exp \mu(t+T)\Phi(t+T). \quad (3.93)$$

Zgodnie z (3.74) i (3.91) mamy

$$x(t+T) = \exp \mu T \exp \mu t \Phi(t). \quad (3.94)$$

Porównując stronami (3.93) i (3.94) otrzymujemy

$$\Phi(t) = \Phi(t+T), \quad (3.95)$$

tak więc wykazaliśmy, że $\Phi(t)$ ma okres T .

Wykładnik charakterystyczny, który decyduje o ograniczoności bądź nieograniczoności rozwiązania zależy tylko od wielkości występujących w równaniu (3.70), natomiast nie zależy od warunków początkowych.

Dla równania rzędu drugiego istnieją dwa wykładniki charakterystyczne μ_1 i μ_2 i rozwiązanie ogólne równania (3.70) ma postać:

$$x(t) = C_1 e^{\mu_1 t} \Phi_1(t) + C_2 e^{\mu_2 t} \Phi_2(t), \quad (3.96)$$

gdzie $\Phi_1(t)$ i $\Phi_2(t)$ są funkcjami okresowymi o okresie T . Jeśli μ_2 jest wykładnikiem charakterystycznym, to $e^{\mu_2 t} \Phi_2(t)$ jest rozwiązaniem szczególnym (3.70). Obliczmy wrońskian

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{vmatrix} e^{\mu_1 t} \Phi_1(t) & e^{\mu_2 t} \Phi_2(t) \\ \mu_1 e^{\mu_1 t} \Phi_1(t) + e^{\mu_1 t} \Phi_1'(t) & \mu_2 e^{\mu_2 t} \Phi_2(t) + e^{\mu_2 t} \Phi_2'(t) \end{vmatrix} = \\ &= e^{(\mu_1 + \mu_2)t} \begin{vmatrix} \Phi_1(t) & \Phi_2(t) \\ \mu_1 \Phi_1(t) + \Phi_1'(t) & \mu_2 \Phi_2(t) + \Phi_2'(t) \end{vmatrix} = \\ &= e^{(\mu_1 + \mu_2)t} (\Phi_1(t) \mu_2 \Phi_2 + \Phi_1 \Phi_2' - \mu_1 \Phi_1 \Phi_2 - \Phi_1' \Phi_2'). \end{aligned} \quad (3.97)$$

Ponieważ wrońskian $W(t) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Phi_1 \Phi_2' + \mu_2 \Phi_1 \Phi_2 = \Phi_1' \Phi_2 + \mu_1 \Phi_1 \Phi_2, \quad (3.98)$$

to można wysnuć wniosek, że rozwiązania $\Phi_1(t)$ i $\Phi_2(t)$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Phi_1 \Phi_2' + \mu_2 \Phi_1 \Phi_2 \neq \Phi_1' \Phi_2 + \mu_1 \Phi_1 \Phi_2. \quad (3.99)$$

Jeżeli w równaniu (3.60) $p(t) = \text{const}$ i $r(t) = \text{const}$, to równanie to posiada bardzo ważną interpretację fizyczną. Opisuje ono drgania wielu układów fizycznych o parametrach stałych i równaniu temu zostanie poświęcony jeden z następnych rozdziałów.

Okazuje się, że istnieją pewne typy równań różniczkowych, które dają się sprowadzić do równania o współczynnikach stałych.

Należy do nich równanie Eulera o postaci

$$t^n y^{(n)} + a_1 t^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} t y' + a_n y = 0. \quad (3.100)$$

Poprzez podstawienie

$$t = e^u, \quad (3.101)$$

równanie to daje się sprowadzić do równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach.

Równanie Lagrange'a o postaci

$$(at + b)^n y^{(n)} + a_1 (at + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} (at + b) y' + a_n y = 0, \quad (3.102)$$

daje się sprowadzić do równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach po wykorzystaniu z zamiany zmiennych

$$at + b = e^u. \quad (3.103)$$

Dotyczy to również równania Czybyszewa

$$(1 - t^2)y'' + ty' + k^2y = 0, \quad (3.104)$$

które dzięki podstawieniu

$$t = \cos u, \quad (3.105)$$

daje się sprowadzić do równania o postaci

$$\frac{d^2y}{du^2} + k^2y = 0. \quad (3.106)$$



Rozdział 4

Wiadomości wstępne dotyczące układów dynamicznych

4.1 Pojęcia podstawowe

Bardzo często się zdarza, że rozwiązaniem równań różniczkowych opisujących dynamikę układów mechanicznych są trajektorie przedstawiające ruch drgający modelowanych układów. Niech przykładowo będzie to kierunek pionowych przemieszczeń $y = y(t)$, gdzie t jest czasem. W ogólnym przypadku jeśli $y_{\max}$ będzie największym, a $y_{\min}$ najmniejszym wychyleniem, to przez amplitudę drgań będziemy rozumieć wielkość:

$$a = \frac{1}{2} (y_{\max} - y_{\min}) \quad (4.1)$$

Generalnie ruch drganiowy układu dynamicznego dyskretnego może być ruchem regularnym lub nieregularnym (chaotycznym). Do klasy ruchów regularnych zaliczamy ruchy okresowe i quasiokresowe. Pierwsze z nich należą do najbardziej powszechnie spotykanych w przyrodzie i w układach maszynowych. Ich cechą charakterystyczną jest to, że istnieje pewna stała T taka, że ruch jest powtarzalny, tzn. zachodzi równość $y(t) = y(t + T)$ i T nazywamy okresem drgań. Liczba drgań wykonanych w ciągu 2π sekund nazywamy częstością ω , gdzie:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \quad (4.2)$$

a f jest liczbą drgań w ciągu sekundy i nazywa się częstotliwością drgań. Szczególnym przypadkiem ruchu okresowego jest ruch harmoniczny, tj. ruch opisany równaniem:

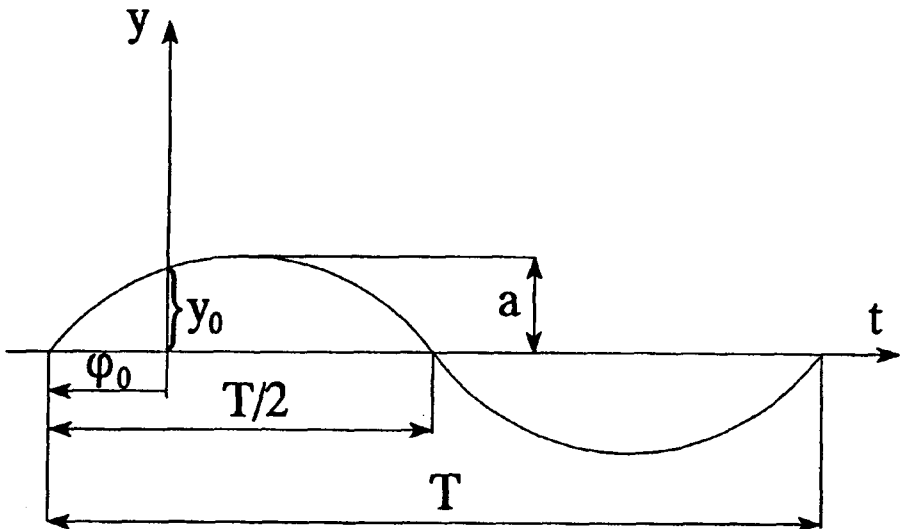


$$y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t = a \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.3)$$

gdzie φ_0 jest fazą początkową ruchu i prawdziwe są następujące związki:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{A^2 + B^2}, & \operatorname{tg} \varphi_0 &= \frac{-B}{A}, \\ A &= a \cos \varphi_0, & B &= -a \sin \varphi_0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Wprowadzone wielkości zilustrowano na rys.4.1.



Rys. 4.1. Drganie harmoniczne

Inne przykłady ruchów ustalonych omówione zostaną szczegółowo w kolejnych rozdziałach. Należy dodać, że możliwe są ruchy przejściowe takie, że wartość przeciętna ulega ograniczonym lub nieograniczonym zmianom w czasie.

4.2 Podział układów drgających i zjawisk drganiowych

Podział układów drgających zostanie omówiony na przykładzie drgań układu nieliniowego o jednym stopniu swobody (tzn. posiadającego jedną możliwość

ruchu) i z wymuszeniem opisanym równaniem:

$$m\ddot{y} + S(y) = Q(y, \dot{y}) + P(t). \quad (4.5)$$

Równanie (4.5) modeluje ruch układu nieautonomicznego, bo na układ działa siła wymuszająca $P(t)$ zależna od czasu. Dla $P(t) = 0$ mamy do czynienia z układem autonomicznym, przy czym m jest masą oscylatora (w dalszych rozważaniach $m = 1$ kg); $S(y)$ jest nieliniową siłą zachowawczą (bo nie zależy od $\dot{y}$); $Q(y, \dot{y})$ jest nieliniową siłą niezachowawczą i taką, że $(y, \dot{y}) = (0, 0)$ jest położeniem równowagi.

Jeżeli

$$\dot{y} = v, \quad (4.6)$$

to z równania (4.5) otrzymujemy

$$\dot{v} + S(y)v = Q(y, v). \quad (4.7)$$

Ponieważ

$$\dot{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{d}{dt}(E) \quad (4.8)$$

oraz

$$vS(y) = \frac{dy}{dt} \frac{d}{dy} \int_0^y S(\eta) d\eta = \frac{d}{dt} \int_0^y S(\eta) d\eta = \frac{d}{dt}(V) \quad (4.9)$$

gdzie E i V są odpowiednio energią kinetyczną i energią potencjalną, to z równania (4.7) otrzymujemy

$$\frac{d}{dt}(E + V) = vQ(y, v). \quad (4.10)$$

Wyrażenie stojące po lewej stronie równania (4.10) przedstawia pochodną energii całkowitej układu przypadającą na jednostkę masy. Iloczyn stojący po prawej stronie równania (4.10) jest proporcjonalny do zmian energii całkowitej wywołanych siłą niezachowawczą $Q(y, v)$. W zależności od znaku tego iloczynu energia jest dostarczana lub odbierana od układu.

A. Jeśli $vQ(y, v) < 0$, dla $v \neq 0$ na całej płaszczyźnie (y, v) , to układ poruszając się wzdłuż krzywej $y(t), v(t)$ rozprasza energię i nazywamy go układem dystryptycznym.

- B. Jeśli $vQ(y, v) = 0$, dla $v \neq 0$ na całej płaszczyźnie (y, v) , to układ taki nazywamy zachowawczym.
- C. Jeśli w niektórych obszarach płaszczyzny (y, v) mamy $vQ(y, v) > 0$, a w pozostałych obszarach tej płaszczyzny $vQ(y, v) < 0$, to układ taki nazywamy układem samowzbudnym.

Ponadto układy drgające można podzielić na stacjonarne i niestacjonarne. Pierwsze z nich charakteryzują się tym, że ich parametry nie zmieniają się w czasie. W odróżnieniu od nich układy w których niektóre parametry zależą od czasu nazywamy układami niestacjonarnymi. Układy stacjonarne dyskretne opisane są równaniami różniczkowymi o stałych współczynnikach, podczas gdy układy dyskretne niestacjonarne opisane są poprzez równania różniczkowe o współczynnikach zależnych od czasu.

Poniżej opisane zostaną podstawowe zjawiska drganiowe występujące w wyżej wymienionych układach. Należy pamiętać, że w rzeczywistych układach drgających zjawiska drganiowe są zwykle bardziej złożone i są wynikiem nakładania się drgań podstawowych.

1. Drgania swobodne – pojawiają się tylko w układach autonomicznych. Zachodzą one bez udziału zewnętrznego źródła energii i zewnętrznego wymuszenia i generowane są poprzez warunki początkowe.
2. Drgania wymuszone – zachodzą w układach nieautonomicznych ze zmiennym w czasie wymuszeniem zewnętrznym.
3. Drgania parametryczne – zachodzą tylko w układach niestacjonarnych i są wynikiem zmian w czasie parametrów układu
4. Drgania samowzbudne – dopływ energii do układu drgającego jest regulowany poprzez drgania i pochodzi od układu niedrgającego. Pojawiają się one w układach niezachowawczych.

Klasyfikacji zjawisk drganiowych można również dokonać w oparciu o charakter rozwiązań równań różniczkowych opisujących typowe proste układy drgające. Podano je poniżej.

1. Drgania okresowe – charakteryzują się dokładną powtarzalnością ruchu i są najczęściej spotykane i najbardziej zbadane. Mogą występować w liniowych i nieliniowych układach, w układach stacjonarnych i niestacjonarnych, w układach niezachowawczych (samowzbudnych) i w układach nieautonomicznych.

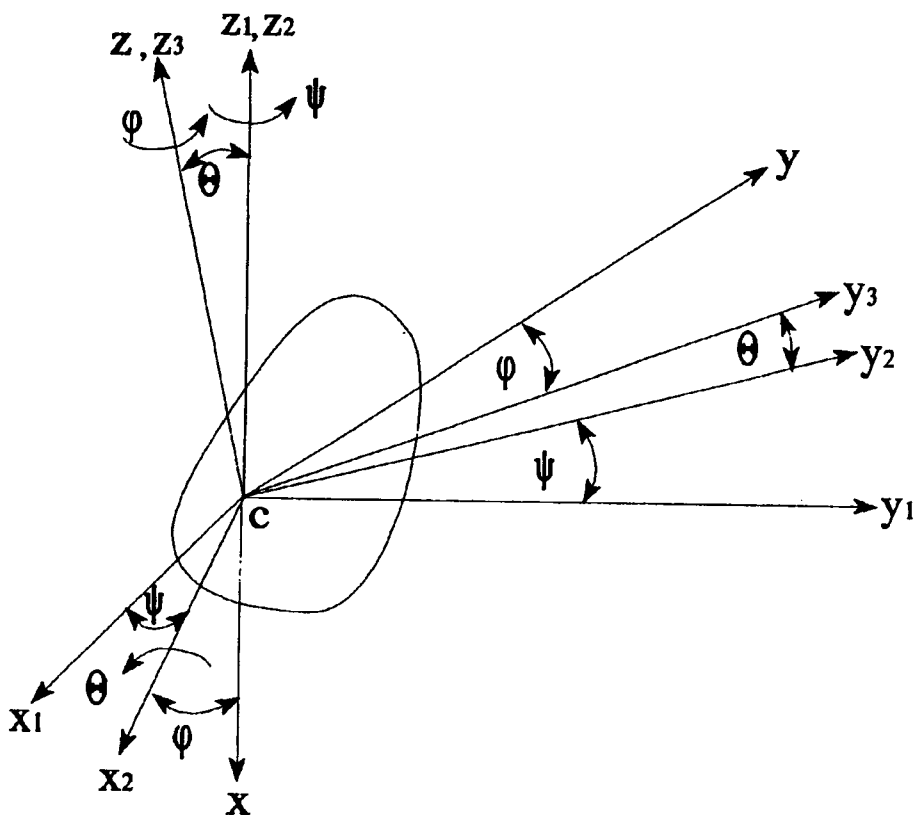
2. Drgania quasi-okresowe – charakteryzują się prawie powtarzalnością i ich pojawienie się związane jest z istnieniem co najmniej dwóch niewspółmiernych częstości. Najczęściej spotykane są w układach nieautonomicznych, lub autonomicznych o co najmniej dwóch stopniach swobody zarówno w układach liniowych jak i nieliniowych.
3. Drgania chaotyczne – charakteryzują się nieregularnością i niepowtarzalnością ruchu. Pojawiają się już w układach nieliniowych nieautonomicznych o jednym stopniu swobody lub w układach autonomicznych nieliniowych opisanych przez co najmniej układ trzech równań różniczkowych pierwszego rzędu.

Ponieważ przedmiotem rozważań w tej książce są drgania w układach zdeterminowanych, to drgania stochastyczne przy powyższych klasyfikacjach zostały pominięte.

4.3 Równania ruchu

Zacznijmy rozważania od analizy ruchu ciała doskonale sztywnego o masie m i głównych masowych momentach bezwładności I_x, I_y, I_z . Jak wiadomo, dowolne przemieszczenie ciała doskonale sztywnego jest ekwiwalentne przemieszczeniu dowolnego punktu tego ciała (bieguna) i obrotu wokół niego. Z drugiej strony, dowolny obrót takiego ciała wokół dowolnie wybranego nieruchomego punktu może być otrzymany w wyniku obrotu dookoła pewnej osi przechodzącej przez ten punkt. Na bazie dwóch wymienionych wyżej twierdzeń dowodzi się, że dowolny ruch punktu ciała doskonale twardego można uzyskać jako superpozycję ruchu postępowego środka masy tego ciała i obrotu względem niego. Dynamika takiego ciała opisana jest równaniami Eulera. W celu ich wyprowadzenia rozpatrzmy ciało doskonale sztywne w układzie współrzędnych $Cx_1y_1z_1$, o odpowiednich głównych momentach bezwładności wzdłuż osi x_1, y_1, z_1 i środka masy w punkcie C (rys. 4.2)

Niech ciało po dowolnym przemieszczeniu będzie w takim położeniu, że osie centralne znajdują się teraz w położeniu $Cxyz$. Po wprowadzeniu kątów Ψ, Θ i φ można wyznaczyć związki pomiędzy punktami ciała przed i po dowolnym przemieszczeniu. Kąt precesji Ψ określa obrót wokół osi Cz_1 . Następnie układ $Cx_2y_2z_1$ obraca się o kąt nutacji Θ wokół osi Cx_2 . Na koniec wreszcie trzeci obrót dokonuje się o kąt obrotu własnego φ wokół osi Cz_3 . Wektor współrzędnych $r' = (x_1, y_1, z_1)$ w układzie kartezjańskim $Cx_1y_1z_1$ związany



Rys. 4.2. Schemat służący do wyprowadzenia równań Eulera

jest z odpowiadającym mu wektorem $\mathbf{r} = (x, y, z)$ w układzie kartezjańskim $Cxyz$ poprzez zależność

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} \mathbf{r}', \quad (4.11)$$

gdzie macierz przejścia $\mathbf{R}$ może być przedstawiona w postaci

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_\varphi \mathbf{R}_\Theta \mathbf{R}_\psi, \quad (4.12)$$

przy czym $\mathbf{R}_{(\cdot)}$ są określone poprzez proste funkcje trygonometryczne tylko jednego z trzech kątów.

Dla małych obrotów można łatwo określić prędkości i przyspieszenia poszczególnych punktów rozważanego ciała. Prędkość i przyspieszenie punktu leżącego w odległości $\mathbf{r}$ od punktu C wyrażają się wzorami

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_c + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad (4.14)$$

gdzie: $\mathbf{v}_c$, $\mathbf{p}_c$ są odpowiednio prędkością i przyspieszeniem punktu C , $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$ są wektorami chwilowej prędkości kątowej i chwilowego przyspieszenia kątowego. Wektor $\boldsymbol{\omega}$ wyraża się poprzez kąty Eulera według następujących związków:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\Psi} \sin \Theta \sin \varphi + \dot{\Theta} \cos \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\Psi} \sin \Theta \cos \varphi - \dot{\Theta} \sin \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\Psi} \cos \Theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Jak już wspomniano, ruch całego ciała składa się z ruchu środka masy C i obrotu wokół niego. Ten pierwszy opisany jest poprzez równanie Newtona

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_c}{dt^2} &= F_x, \\ m \frac{d^2 y_c}{dt^2} &= F_y, \\ m \frac{d^2 z_c}{dt^2} &= F_z, \end{aligned} \quad (4.16)$$

gdzie $\mathbf{r}_c = (x_c, y_c, z_c)$ i $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ jest wektorem wypadkowym sił działających na środek masy C .

Na podstawie twierdzenia o zmianie momentu ilości ruchu względem środka masy otrzymujemy równania Eulera

$$\begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z &= M_x, \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z &= M_y, \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y &= M_z, \end{aligned} \quad (4.17)$$

gdzie $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$ jest momentem sił. Energia kinetyczna rozważanego ciała może być wyznaczona z równania

$$T = \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 - 2I_{xy}\omega_x\omega_y - 2I_{xz}\omega_x\omega_z - 2I_{yz}\omega_y\omega_z), \quad (4.18)$$

a jej zmiana związana jest z przemieszczeniem $\delta \mathbf{r}_c$ środka masy i obrotem $\delta \varphi$ i wyraża się wzorem:

$$dT = F\delta \mathbf{r}_c + M\delta \varphi. \quad (4.19)$$

Rozważania znacznie się upraszczają w następujących przypadkach.

Niech ruch rozważanego ciała odbywa się w płaszczyźnie. Wówczas równania dynamiki są następujące:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_c}{dt^2} &= F_x, \\ m \frac{d^2 y_c}{dt^2} &= F_y, \\ I_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= M_z. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Inaczej, jeśli ruch odbywa się w płaszczyźnie xy , to charakteryzują go przemieszczenia wzdłuż każdej z dwóch prostopadłych osi x, y i obrót wokół osi prostopadłej do płaszczyzny ruchu. Szczególnym przypadkiem takiego ruchu może być czysty obrót opisany tylko poprzez trzecie równanie układu (4.20). Jeśli ruch jest postępowy, to równanie dynamiki opisuje jedno z dwóch pierwszych równań układu (4.20).

Druga bardzo ważna metoda wyznaczania równań ruchu oparta jest na wykorzystaniu równań Lagrange'a drugiego rodzaju. Jeśli siły działające na układ mechaniczny są niezachowawcze, to równania Lagrange'a mają postać:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.21)$$

gdzie T jest energią kinetyczną układu, q_j - współzrzednymi uogólnionymi, a $Q_j(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ siłami uogólnionymi.

Równania Lagrange'a otrzymuje się z zasady Hamiltona w formie wariacyjnej.

Jeśli siły działające na układ są zachowawcze to wówczas równanie (4.21) przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.22)$$

gdzie funkcja Lagrange'a $L = T - V$ i $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ jest energią potencjalną układu.

Wreszcie, w trzecim przypadku, jeśli na układ działają siły zachowawcze i niezachowawcze, to cełowym jest ich rozdzielenie, co w efekcie prowadzi do następującej postaci równań Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.23)$$

Jeśli ponadto energia jest tracona poprzez siły proporcjonalne do prędkości, tzw. funkcje Rayleigha'sa wyrażone poprzez formę kwadratową w postaci:

$$F_R = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (4.24)$$

to równanie Lagrange'a drugiego rodzaju przyjmuje postać

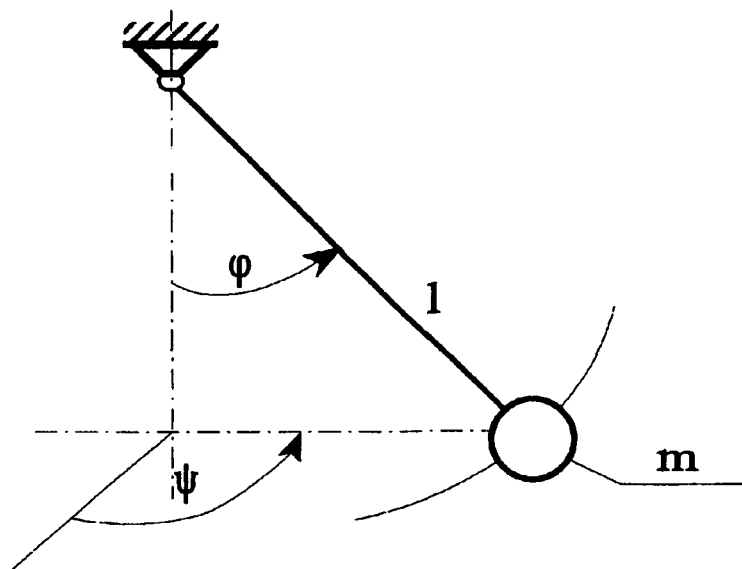
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial F_R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.25)$$

Przykład 4.1

W oparciu o równania Lagrange'a drugiego rodzaju wyprowadzić równania ruchu wahadła przestrzennego przedstawionego na rys. 4.3.

Współzrzedne uogólnione są kątami φ i ψ . Wobec tego energie kinetyczna i potencjalna wynoszą

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m [(l\dot{\varphi})^2 + (l\dot{\psi} \sin \varphi)^2], \\ V &= mgl(1 - \cos \varphi). \end{aligned} \quad (4.26)$$



Rys. 4.3. Wahadło przestrzenne z punktową masą m zawieszoną na nierozciągliwej nici o długości l .

Zgodnie ze wzorem (4.22) mamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= ml^2 \dot{\varphi}, & \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= ml^2 \sin^2 \varphi \dot{\psi}, \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= ml^2 \dot{\psi}^2 \sin \varphi \cos \varphi - mgl \sin \varphi, & \frac{\partial L}{\partial \psi} &= 0,\end{aligned}\quad (4.27)$$

co w efekcie prowadzi do następujących równań ruchu

$$\begin{aligned}ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi - \frac{1}{2} ml^2 \dot{\psi}^2 \sin 2\varphi &= 0, \\ ml^2 \sin^2 \varphi \ddot{\psi} &= 0.\end{aligned}\quad (4.28)$$

Ostatecznie po przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi - \frac{1}{2} \dot{\psi}^2 \sin 2\varphi &= 0, \\ \dot{\psi} \sin^2 \varphi &= C,\end{aligned}$$

gdzie C jest stałą całkowania.



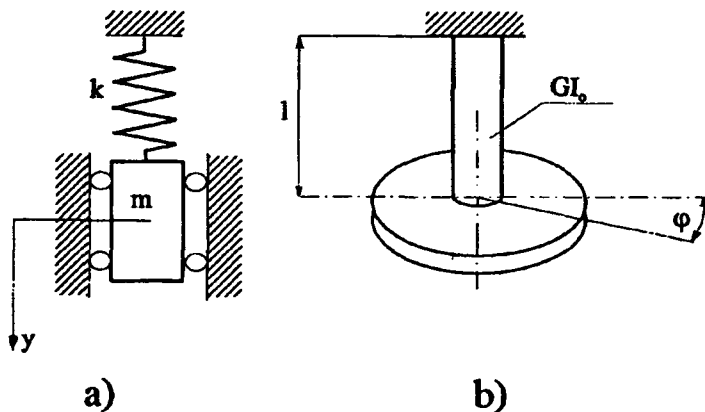
Rozdział 5

Układy drgające liniowe

5.1 Układy o jednym stopniu swobody

5.1.1 Drgania własne.

Generalnie rozróżnia się dwa podstawowe rodzaje układów o jednym stopniu swobody. Ciało sztywne podparte sprężystością wykonuje ruch prostoliniowy postępowy (rys. 5.1a) lub też wykonuje ruch obrotowy, a bezmasowe elementy sprężyste oddziałują na ciało momentem (rys. 5.1b).



Rys. 5.1. Podstawowe modele układów zachowawczych o jednym stopniu swobody: a) drgania postępowe, b) drgania skrętne

Ograniczymy się w dalszych rozważaniach do układu przedstawionego na

rys. 5.1a (analiza dla układu z rys. 5.1b jest podobna). Ciało o masie m jest podparte na bezmasowej sprężynie o stałej k zwanej sztywnością układu. Rolę elementu sprężystego może spełniać sprężyna spiralna i wówczas

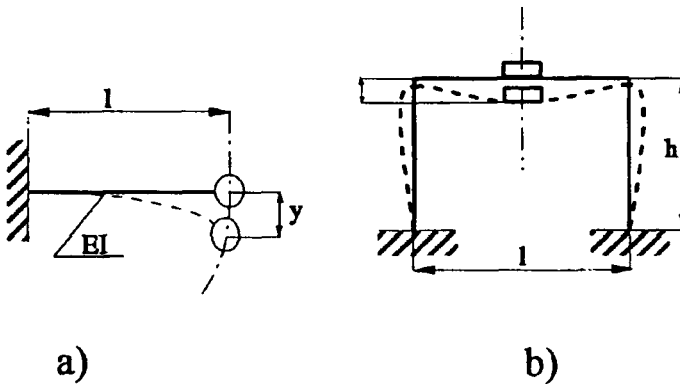
$$k = \frac{Gd^4}{8D^3n}, \quad (5.1)$$

gdzie G jest modułem sprężystości podstawowej materiału, D jest średnicą sprężyny, d jest średnicą drutu i n oznacza liczbę zwojów.

W przypadku, gdy rolę elementu sprężystego spełnia belka wspornikowa, to wówczas

$$k = \frac{3EI}{l^3}, \quad (5.2)$$

gdzie EI jest sztywnością belki na zginanie, a l jest jej długością (rys. 5.2a).



Rys. 5.2. Przykłady rzeczywistych elementów sprężystych: a) belka wspornikowa, b) rama

W przypadku, gdy rolę elementu sprężystego spełnia rama (rys. 5.2b), której masa jest pomijalnie mała, to wtedy sztywność

$$k = \frac{96EI}{l^3} + \frac{2l + h}{2h + l}, \quad (5.3)$$

a poszczególne parametry występujące w powyższym wzorze podane są na rys. 5.2b.

Ułożmy teraz równanie ruchu odpowiadające układowi z rys. 5.1a. Układ znajduje się w polu grawitacyjnym, a więc jego położenie równowagi określone jest poprzez wielkość ugięcia statycznego

$$y_{st} = \frac{mg}{k}. \quad (5.4)$$

Wychylenie z położenia równowagi spowoduje pojawienie się siły oporu ky (y jest współrzędną mierzoną od położenia równowagi), która jest równoważona przez siłę bezwładności B (patrz rys. 5.3). Dokonując rzutów wektorów sił na oś pionową otrzymujemy:

$$-m\ddot{y} + mg - k(y_{st} + y) = 0, \quad (5.5)$$

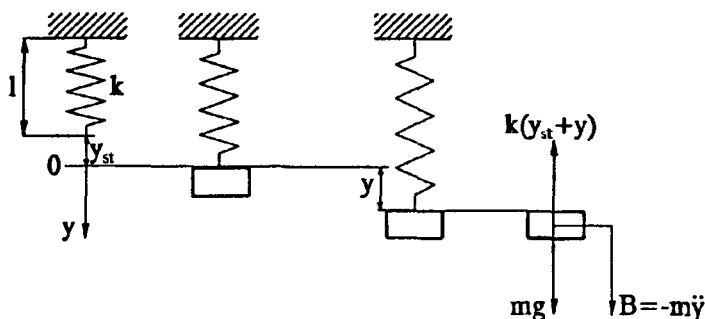
co po uwzględnieniu (5.4) prowadzi do otrzymania równania drgań

$$m\ddot{y} + ky = 0, \quad (5.6)$$

które sprowadzamy do postaci

$$\ddot{y} + \alpha_0^2 y = 0, \quad (5.7)$$

i $\alpha_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ jest częstością drgań własnych układu o jednym stopniu swobody.



Rys. 5.3. Schemat ilustrujący powstawanie sił w ruchu drgającym prostoliniowym (l oznacza tu długość sprężyny bez napięcia wstępnego)

Należy pamiętać o tym, że równanie (5.7) opisuje drgania pewnego układu modelowego, w rzeczywistości bowiem nie istnieje element sprężysty bezmasowy, a ponadto zwykle w układzie rzeczywistym występuje tłumienie proporcjonalne do prędkości ruchu.

Równanie (5.7) jest równaniem liniowym drugiego rzędu i jego rozwiązanie ma postać

$$y = e^{rt}, \quad (5.8)$$

co po podstawieniu do (5.7) prowadzi do równania charakterystycznego

$$r^2 + \alpha_0^2 = 0. \quad (5.9)$$

Każdemu z pierwiastków (5.9) odpowiada rozwiązanie szczególne, a ich dowolna kombinacja daje rozwiązanie ogólne. Wybierzmy następujące kombinacje rozwiązań szczególnych

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{e^{i\alpha_0 t} + e^{-i\alpha_0 t}}{2} = \cos \alpha_0 t, \\ y_2 &= \frac{e^{i\alpha_0 t} - e^{-i\alpha_0 t}}{2} = \sin \alpha_0 t. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Rozwiązanie ogólne przyjmie postać

$$y = A \cos \alpha_0 t + B \sin \alpha_0 t, \quad (5.11)$$

gdzie A i B są pewnymi stałymi określonymi przez warunki początkowe. Równanie (5.11) przekształcamy dalej do postaci

$$y = a \cos(\alpha_0 t - \beta), \quad (5.12)$$

gdzie:

$$a = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{B}{A}. \quad (5.13)$$

Parametr a jest amplitudą drgań, a kąt β mierzony w radianach określa fazę początkową drgań. Znajdźmy najkrótszy czas T (okres), po którym ruch się powtarza, czyli

$$y = a \cos(\alpha_0 t - \beta) = a \cos[\alpha_0(t + T) - \beta]. \quad (5.14)$$

Wobec tego

$$T = \frac{2\pi}{\alpha_0}. \quad (5.15)$$

Jeżeli warunki początkowe mają postać

$$y(t_0) = y_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \quad (5.16)$$

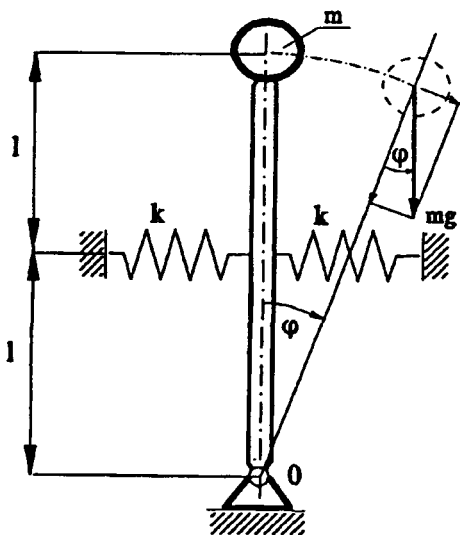
to łatwo jest wyznaczyć amplitudę drgań i fazę początkową:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\alpha_0}\right)^2}, \\ \beta &= \arctg \frac{\dot{y}_0}{\alpha_0 y_0}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ruch opisany równaniami (5.11) lub (5.12) jest ruchem harmonicznym.

Przykład 5.1

Dla układu przedstawionego na rys. 5.4 określić częstość małych drgań własnych wokół pionowego położenia równowagi. Przyjąć, że pręt jest sztywny i bezmasowy. Przedstawić wykresnie ruch harmoniczny przy warunkach początkowych $\varphi(t_0) = \phi_0$, $\dot{\varphi}(t_0) = \dot{\phi}_1$. Dane: $k = 2000 \text{ N/m}$, $l = 0.5 \text{ m}$, $m = 20 \text{ kg}$.



Rys. 5.4. Małe drgania wahadła odwróconego

Po wychyleniu wahadła odwróconego z położenia równowagi o mały kąt φ ($\sin \varphi \approx \varphi$), rozkładamy siłę ciężkości na dwie składowe: składową działającą wzdłuż pręta i składową do niej prostopadłą. Następnie napiszemy równanie równowagi momentów sił względem punktu O , otrzymując

$$B\ddot{\varphi} = -2kl^2\varphi + 2lmg\varphi, \quad (5.18)$$

gdzie masowy moment bezwładności

$$B = m(2l)^2 = 4ml^2.$$

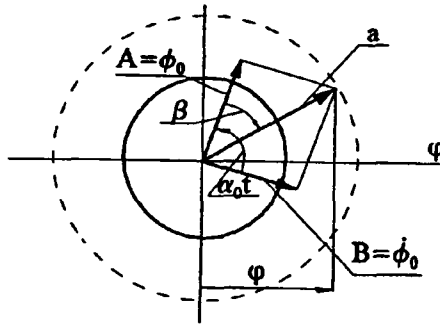
Wobec tego otrzymujemy

$$\ddot{\varphi} + \frac{2kl^2 - 2mgl}{4ml^2}\varphi = 0, \quad (5.19)$$

i częstość drgań własnych wynosi

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{k}{m} - \frac{g}{l} \right)} = 6.34 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Ruch harmoniczny opisujący drgania analizowanego układu może być przedstawiony wykreślnie jako rzut na kierunek osi φ wektora o długości Φ_0 wirującego z prędkością kątową α_0 (rys. 5.5).



Rys. 5.5. Interpretacja drgań jako rzutu wektora a wirującego z częstością α_0

Z rysunku 5.5 widać, że rozwiązanie równania ruchu może być łatwo wyznaczone jako rzut wektora a na oś pionową:

$$\varphi = a \cos(\alpha_0 t - \beta). \quad (5.20)$$

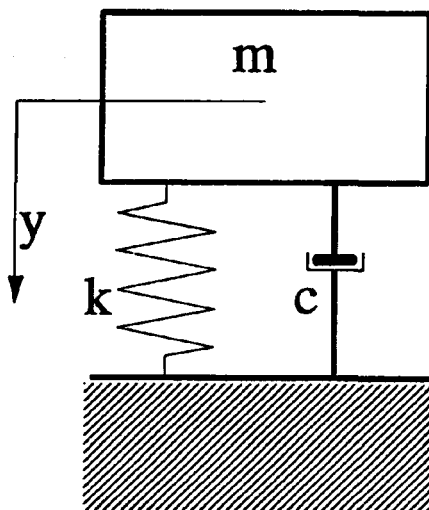
Sumując rzuty wektorów A i B na oś pionową otrzymujemy

$$\varphi = \Phi_0 \cos \alpha_0 t + \frac{\Phi_1}{\alpha_0} \sin \alpha_0 t. \quad (5.21)$$

Rozwiązanie to może być otrzymane również na drodze bezpośredniej, tzn. po założeniu postaci rozwiązania i uwzględnieniu warunków początkowych.

5.1.2 Drgania swobodne

Jak już wspomniano, w układach rzeczywistych drgających występują opory ruchu, które powodują zanikanie drgań. Często siły tłumiące mogą być przybliżone siłą proporcjonalną do prędkości. Rysunek 5.6 przedstawia bryłę o masie m podpartą na sprężysto-plastycznym podłożu. Jeśli oddziaływanie podłoża na ciało zastąpimy dwoma siłami, tj. siłą sprężystą i siłą tłumiącą (co schematycznie ujmuje rys. 5.6), to równanie drgań może być wyznaczone w oparciu o równowagę sił zaznaczoną na rys. 5.7.



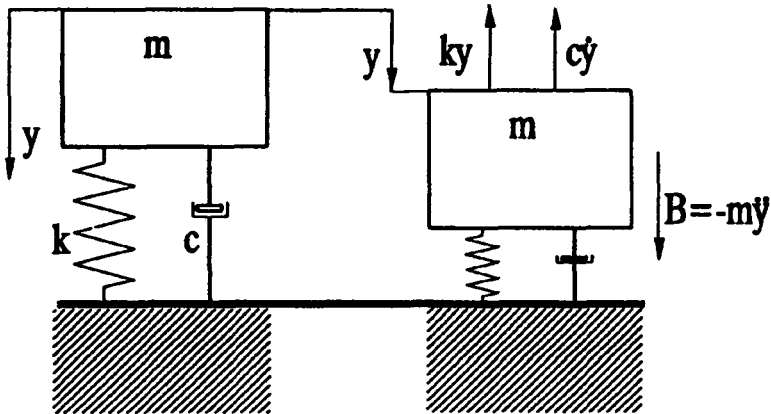
Rys. 5.6. Model drgań liniowych swobodnych (k oznacza sztywność układu, a c jest współczynnikiem tłumienia wiskotycznego).

Ponieważ drgania będziemy mierzyć od położenia równowagi, to równanie drgań ma postać

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0. \quad (5.22)$$

Równanie (5.22) przekształcamy do postaci

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \alpha_0^2 y = 0, \quad (5.23)$$



Rys. 5.7. Schemat ilustrujący równowagę sił podczas ruchu prostoliniowego z tłumieniem wiskotycznym.

gdzie: $\alpha_0 = (k/m)^{-1/2}$ jest częstością drgań własnych, a $h = c/(2m)$ jest jednostkowym współczynnikiem tłumienia. Rozwiązaniem szczególnym równania (5.23) jest

$$y = e^{rt}, \quad (5.24)$$

co po podstawieniu do (5.22) prowadzi do równania charakterystycznego o postaci

$$r^2 + 2hr + \alpha_0^2 = 0, \quad (5.25)$$

z którego wyznaczamy pierwiastki

$$r_{1,2} = -h \pm i\lambda, \quad (5.26)$$

gdzie:

$$\lambda = \sqrt{\alpha_0^2 - h^2}, \quad i^2 = -1. \quad (5.27)$$

Jako rozwiązanie ogólne równania drgań tłumionych weźmiemy następującą kombinację rozwiązań szczególnych

$$x = A \frac{e^{r_1 t} + e^{r_2 t}}{2} + B \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{2i}, \quad (5.28)$$

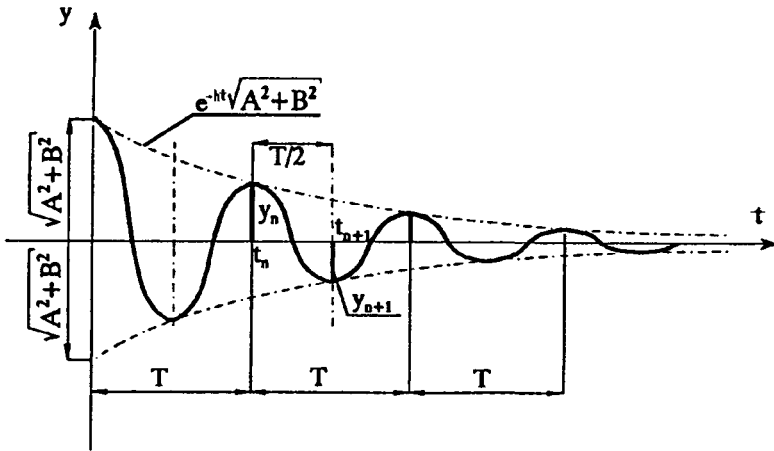
co prowadzi do rozwiązania o postaci

$$y = e^{-ht} (A \cos \lambda t + B \sin \lambda t). \quad (5.29)$$

Chwilowo nieznane stałe A i B określone są poprzez warunki początkowe $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ i wynoszą:

$$A = y_0, \quad B = \frac{\dot{y}_0 + h y_0}{\lambda}. \quad (5.30)$$

Przebieg takich drgań ilustruje rysunek 5.8.



Rys. 5.8. Przebieg drgań tłumionych układu liniowego o jednym stopniu swobody

Drgania tłumione układu liniowego posiadają następujące cechy charakterystyczne. Maksymalne wychylenia powtarzają się w równych odstępach czasu T i wielkość tę, która wynosi

$$T_t = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_0^2 - h^2}}, \quad (5.31)$$

przyjęto nazywać okresem drgań swobodnych tłumionych.

Drugą charakterystyczną wielkością jest logarytmiczny dekrement tłumienia. Jest to logarytm naturalny stosunku bezwzględnych kolejnych wartości maksymalnych wychyleń, który okazuje się być wielkością stałą, i wynosi

$$\delta = \ln \frac{|y_n|}{|y_n + 1|} = \ln \frac{|y(t_n)|}{|y(t_n + \frac{T}{2})|} = \frac{hT_t}{2}. \quad (5.32)$$

Wskaźnik ten służy do oceny tłumienia drgań. Na płaszczyźnie fazowej przebiegowi pokazanemu na rys. 5.8 odpowiada ruch po spirali, zmierzający do punktu osobliwego, który jest ogniskiem.

W zależności od wzajemnej relacji dwóch parametrów, h i α_0 , ruch analizowanego układu jest różny. Jeśli $h^2 > \alpha_0^2$, to wówczas równanie charakterystyczne (5.25) posiada dwa różne pierwiastki rzeczywiste i ruch nie jest ruchem drgającym, w przeciwieństwie do zilustrowanego przypadku dla $\alpha_0^2 > h^2$. Jakościowy przebieg możliwych rozwiązań, przedstawiono na rys. 5.9. Jak widać, wychylenie $y(t)$ może mieć co najwyżej jedno miejsce zerowe lub nie mieć ich wcale – w obydwu przypadkach ruch nie jest ruchem drganiowym. Tłumienie $h > \alpha_0$ nazywamy nadkrytycznym.

Warto jeszcze wspomnieć o tłumieniu krytycznym, które ma miejsce, gdy $\alpha_0 = h$. Wówczas rozwiązanie ma charakter przedstawiony na rys. 5.9, a jego postać analityczna podana jest niżej:

$$y(t) = e^{-ht}(C_1 + C_2 t), \quad (5.33)$$

gdzie C_1 i C_2 są stałymi.

Na płaszczyźnie fazowej punkt równowagi w przypadku tłumienia nadkrytycznego jest statecznym węzłem.

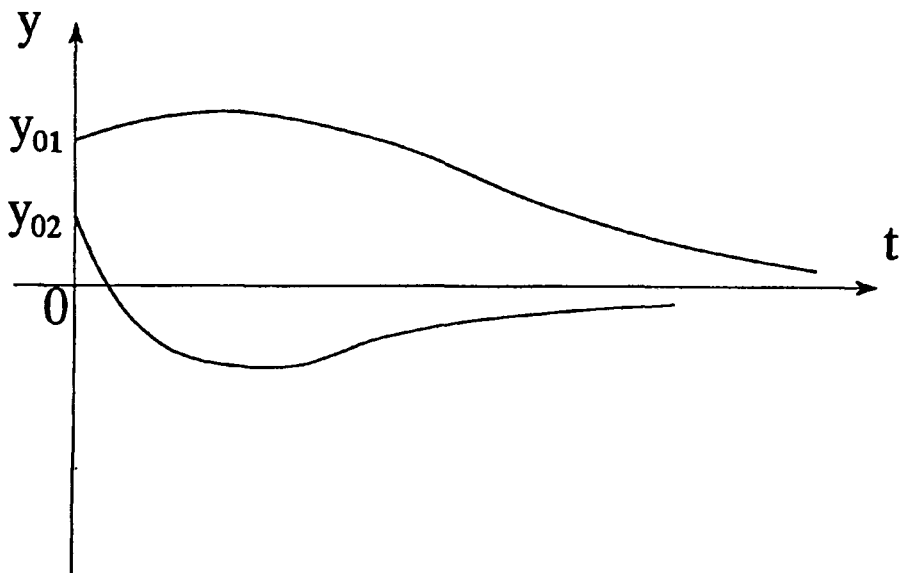
Przykład 5.2

Dla układu przedstawionego na rys. 5.10 wyznaczyć częstość drgań swobodnych tłumionych, logarytmiczny dekrement tłumienia oraz współczynnik tłumienia krytycznego. Sporządzić interpretację geometryczną drgań. Dane: $B = 3 \text{ kgm}^2$, $E = 20,6 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, $I = 10^{-8} \text{ m}^4$, $l = 1 \text{ m}$, $D = 0,5 \text{ m}$, $c = 800 \text{ Nsm}^{-1}$.

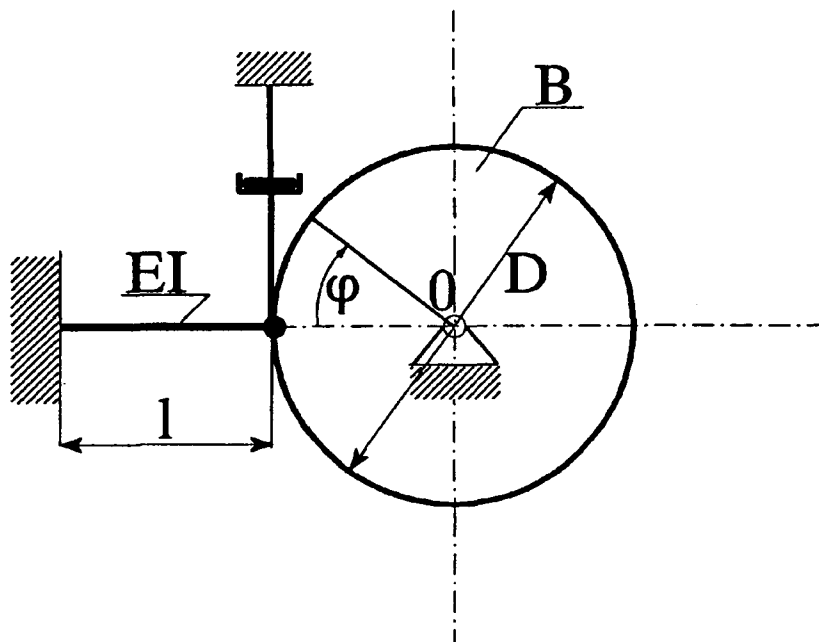
Sztywność sprężyny płaskiej wynosi

$$k = \frac{3EI}{l^3} = 3 \cdot 20,6 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-8} = 6180 \text{ Nm}^{-1}. \quad (5.34)$$

Równanie drgań skrętnych tarczy ma postać



Rys. 5.9. Ruch układu o jednym stopniu swobody i tłumieniu nadkrytycznym



Rys. 5.10. Drgania obrotowe swobodne z tłumieniem

$$B\ddot{\varphi} + c\left(\frac{D}{2}\right)^2 \dot{\varphi} + k\left(\frac{D}{2}\right)^2 \varphi = 0. \quad (5.35)$$

Równanie (5.35) sprowadzamy do postaci

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + \alpha_0^2 \varphi = 0, \quad (5.36)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \alpha_0^2 &= \frac{kD^2}{4B} = \frac{6180 \cdot 0,5^2}{4 \cdot 3} = 128,75 \text{ s}^{-1}, \\ h &= \frac{cD^2}{8B} = \frac{800 \cdot 0,5^2}{8 \cdot 3} = \frac{25}{3} = 8,3 \text{ s}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Ponieważ $\alpha_0 > h$, to przewidywane rozwiązanie ma postać (5.29). Częstość drgań swobodnych zgodnie ze wzorem (5.37) wynosi

$$\lambda = \sqrt{128,75 - 68,89} = 7,74 \text{ s}^{-1}, \quad (5.38)$$

natomiast logarytmiczny dekrement tłumienia zgodnie ze wzorem (5.32) wynosi

$$\delta = \frac{\pi h}{\lambda} = 3,66. \quad (5.39)$$

Współczynnik tłumienia krytycznego wyznaczamy z zależności $\alpha_0^2 = h$, co prowadzi do wartości

$$c_{kr} = 2\sqrt{Bk} = 272,3 \text{ Nsm}^{-1}. \quad (5.40)$$

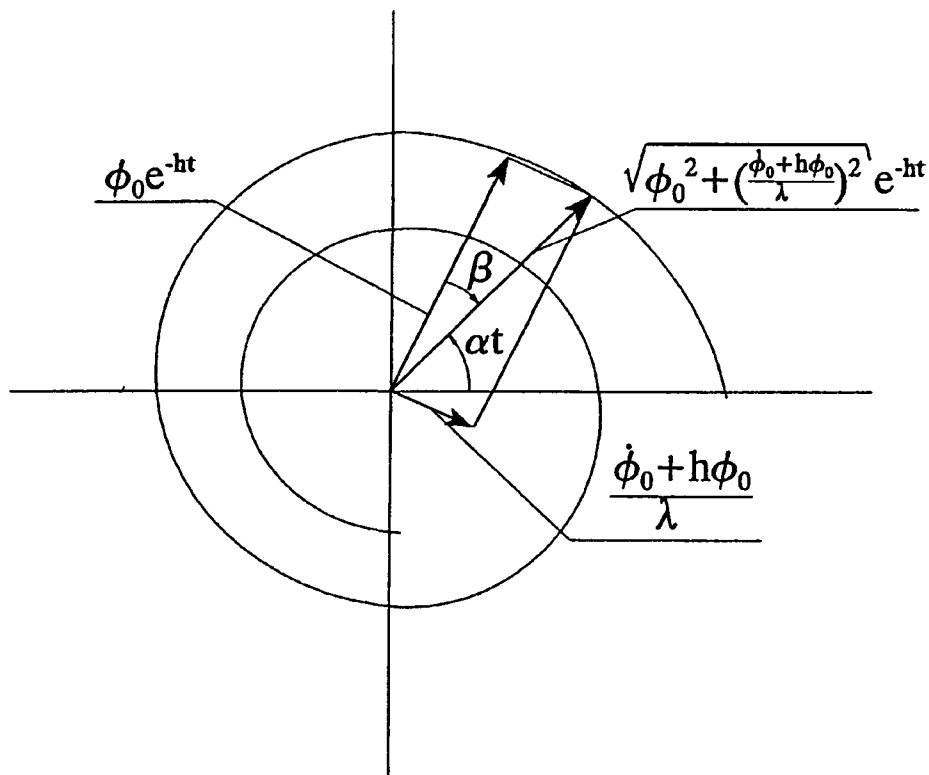
Interpretacja geometryczna drgań swobodnych zostanie wykonana w oparciu o wzory (5.29), (5.30). Równanie ruchu może być przedstawione w bardziej wygodnej postaci

$$y = ae^{-ht} \cos(\lambda t - \beta), \quad (5.41)$$

gdzie:

$$a = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0 + hy_0}{\lambda}\right)^2}, \quad \beta = \arctg \frac{\dot{y}_0 + hy_0}{\lambda y_0}, \quad (5.42)$$

a interpretację geometryczną podano na rys. 5.11.



Rys. 5.11. Interpretacja geometryczna drgań swobodnych skrętnych

5.1.3 Drgania wymuszone bez tłumienia

Obecnie rozpatrzmy drgania układów o jednym stopniu swobody wymuszanych harmonicznie bez tłumienia. Model takiego układu jest przedstawiony schematycznie na rys. 5.12.

Równanie ruchu ma postać

$$m\ddot{y} + ky = P \cos \omega t, \quad (5.43)$$

a po przekształceniu mamy

$$\ddot{y} + \alpha_0^2 y = q \cos \omega t, \quad (5.44)$$

gdzie:

$$\alpha_0^2 = \frac{k}{m}, \quad q = \frac{P}{m}. \quad (5.45)$$

Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego niejednorodnego (5.44) będzie sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego. To pierwsze było już dyskutowane w punkcie 3.2 i teraz zajmiemy się tylko tym drugim. Przyczyna jest taka, że w rzeczywistości drgania własne (czyli rozwiązanie ogólne równania różniczkowego jednorodnego) zanikają wskutek istniejącego w układzie rzeczywistym tłumienia. W warunkach laboratoryjnych obserwuje się (po pewnym czasie) drgania harmoniczne o częstości siły wymuszającej.

Będziemy poszukiwać rozwiązania o postaci

$$y = a \cos \omega t. \quad (5.46)$$

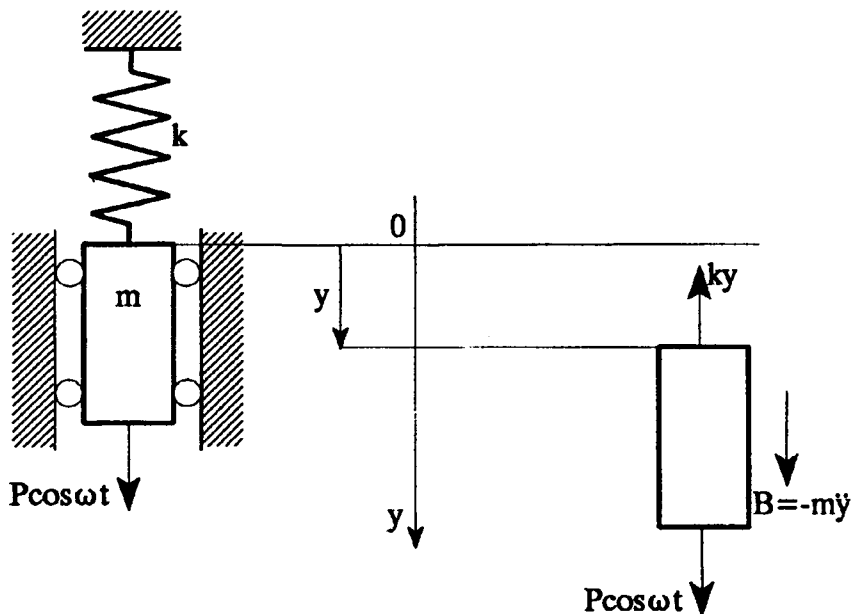
Po podstawieniu (5.46) do (5.44) otrzymujemy

$$(\alpha_0^2 - \omega^2)a = q. \quad (5.47)$$

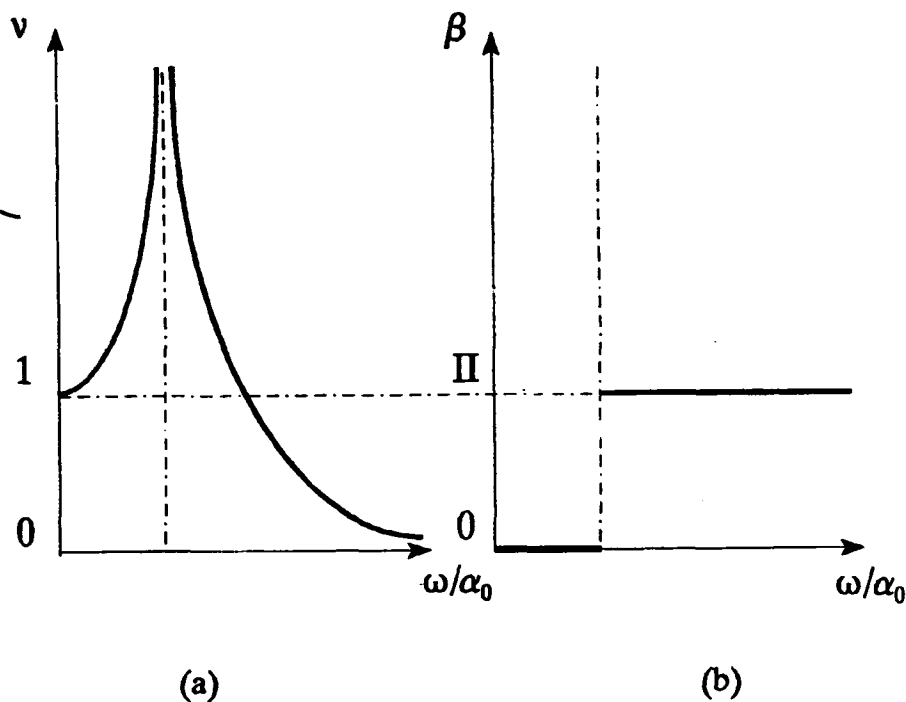
Amplituda drgań wynosi

$$a = \frac{q}{\alpha_0^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_0} \right)^2 \right]} = \frac{x_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_0} \right)^2}, \quad (5.48)$$

gdzie: $x_{st} = \frac{P}{k}$ i wielkość ta oznacza przemieszczenie statyczne sprężyny wywołane działaniem siły P . Definiując współczynnik zwiększający drgań jako a/x_{st} możemy zbudować wykres na podstawie zależności



Rys. 5.12. Model układu o jednym stopniu swobody wykonującego drgania bez tłumienia i schemat przedstawiający równowagę sił



Rys. 5.13. Wykres współczynnika zwiększającego drgania dla układu bez tłumienia (a) oraz wykres kąta fazowego β (b)

$$\nu = \left| \frac{a}{x_{st}} \right| = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_0} \right)^2}, \quad (5.49)$$

który jest przedstawiony na rys. 5.13.

Z rys. 5.13 widać, że wykres posiada dwie asymptoty. Prosta pionową przechodzącą przez punkt ω/α_0 oraz prostą poziomą, która pokrywa się z osią odciętych. Dla $\omega = \alpha_0$ amplituda drgań rośnie do nieskończoności, co jest bardzo niebezpiecznym zjawiskiem. Mówimy wówczas o zjawisku rezonansu, a częstość wymuszenia ω równą częstości drgań własnych nazywamy częstością rezonansową. Z rozważań tych wynikają pewne wskazania dla konstruktorów. Należy tak projektować urządzenia mechaniczne modelowane układami o jednym stopniu swobody, aby $\omega/\alpha_0 \ll 1$ lub $\omega/\alpha_0 \gg 1$, jeśli zależy nam na minimalizacji drgań.

Do tej pory rozważaliśmy przypadek drgań układu o jednym stopniu swobody wymuszanych harmonicznie o stałej amplitudzie. W praktyce inżynierskiej napotykamy często na dwa inne typy wymuszeń. Pierwszym z nich są drgania wymuszone kinematyczne. Wtedy ruchy elementów maszyn lub urządzeń pomiarowych przenoszone są na element sprężysty, ruch którego oddziałuje siłowo na masę układu drgającego. Ujmuje to schematycznie rysunek 5.14.

Równanie ruchu ma postać

$$m\ddot{y} = -ky + ky_b, \quad (5.50)$$

a po uwzględnieniu, że $y_b = b \cos \omega t$ otrzymujemy

$$\ddot{y} + \alpha_0^2 y = q \cos \omega t, \quad (5.51)$$

gdzie:

$$\alpha_0^2 = \frac{k}{m}, \quad q = \frac{kb}{m}. \quad (5.52)$$

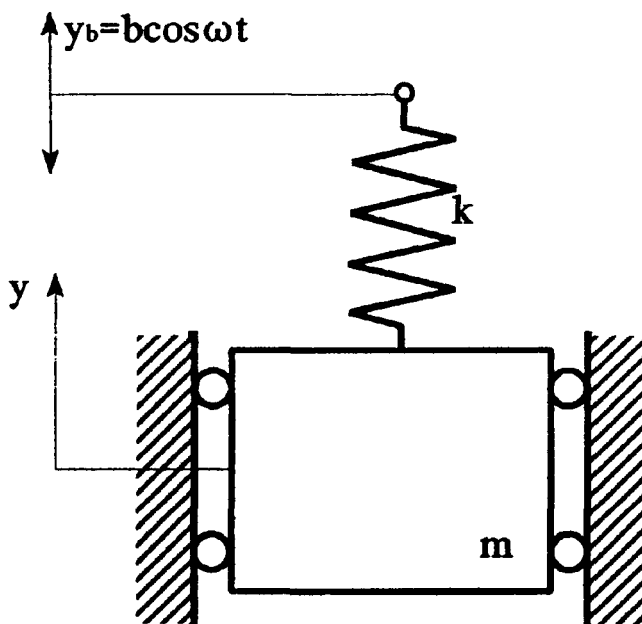
Wykres rezonansowy może być wyznaczony z zależności

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_0} \right)^2}. \quad (5.53)$$

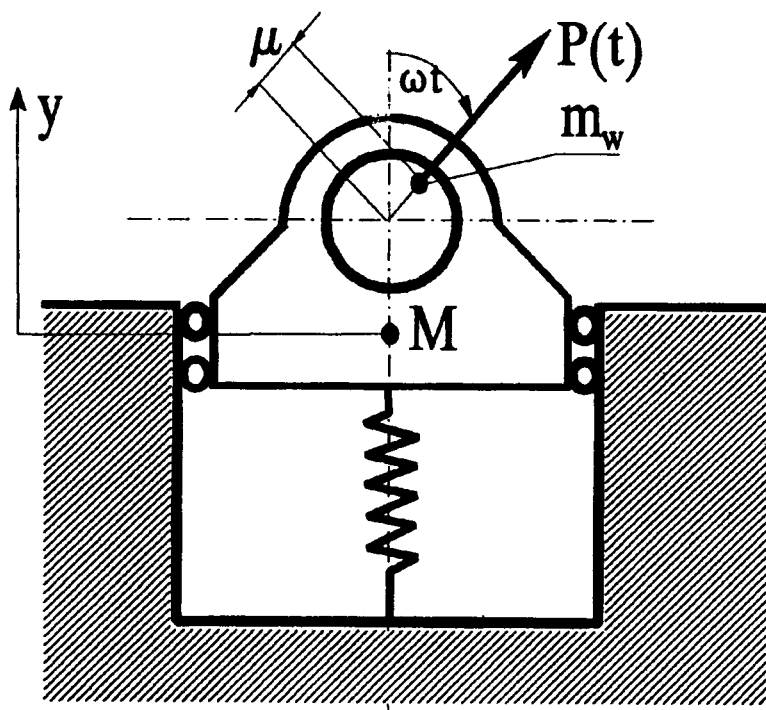
Zależność ta jest analogiczna do przedstawionej na rys. 5.14.

Na koniec omówimy drgania wymuszone siłą odśrodkową. W problematykę tę wprowadza rysunek 5.15.

Pionowe drgania silnika, czyli układu o jednym stopniu swobody, wymuszone są siłą odśrodkową, która zrzućwana na oś pionową wynosi



Rys. 5.14. Ilustracja drgań wymuszanych kinematycznie



Rys. 5.15. Drgania układu o jednym stopniu swobody wymuszone siłą odśrodkową

$$P(t) = m_w \mu \omega^2 \cos \omega t. \quad (5.54)$$

Równanie drgań będzie miało postać

$$M\ddot{y} + ky = m_w \mu \omega^2 \cos \omega t, \quad (5.55)$$

gdzie M jest masą całego silnika, ω częstością jego obrotów, a k sztywnością podparcia. Po przekształceniu równania (5.55) otrzymujemy

$$\ddot{y} + \alpha_0^2 y = q \cos \omega t, \quad (5.56)$$

gdzie:

$$\alpha_0^2 = \frac{k}{M}, \quad q = \frac{m_w \mu \omega^2}{M}. \quad (5.57)$$

Po założeniu rozwiązania o postaci (5.46), otrzymujemy

$$a = \frac{\frac{m_w \mu \omega^2}{M}}{\alpha_0^2 - \omega^2} = \frac{\frac{m_w \mu \omega^2}{M} \frac{1}{\alpha_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\alpha_0^2}}, \quad (5.58)$$

co prowadzi do następującej zależności rezonansowej

$$\left| \frac{Ma}{m_w \mu} \right| = \frac{\frac{\omega^2}{\alpha_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\alpha_0^2}}, \quad (5.59)$$

którą przedstawiono na rysunku 5.16.

Przykład 5.3

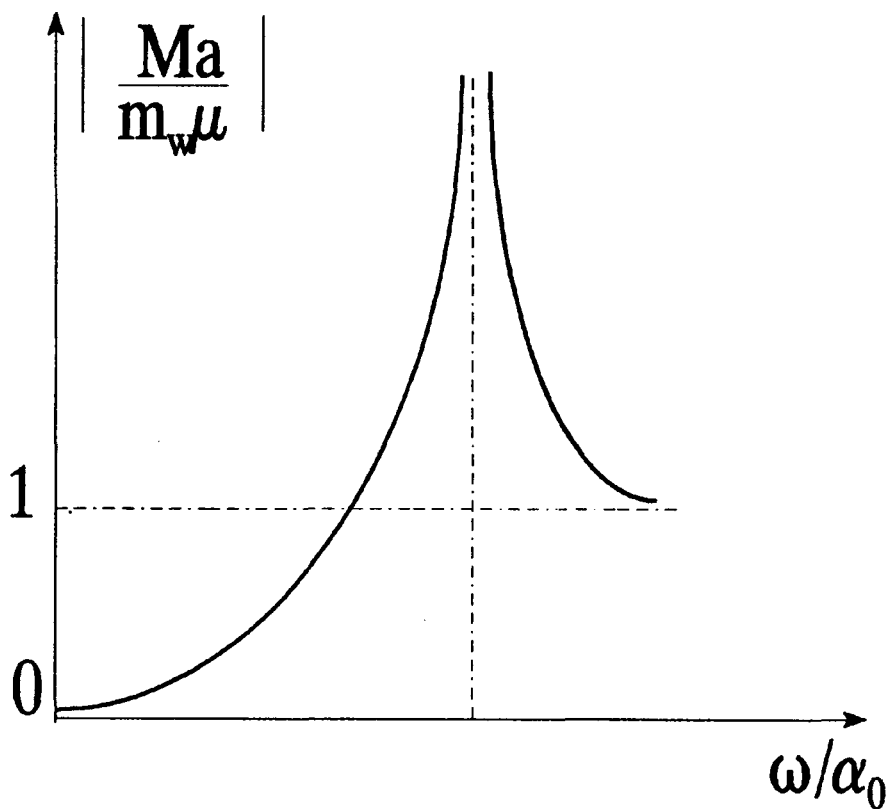
Pręt jednorodny o długości $l = 0,5$ m i ciężarze $G = 20$ N jest zawieszony pionowo, co przedstawiono na rys. 5.17. Na drugi koniec pręta działa wymuszenie harmoniczne $P(t) = P_0 \cos \omega t$, przy czym $P_0 = 5$ N, a częstotliwość wymuszenia wynosi $f = 2,5$ Hz. Współczynnik sztywności każdej z dwóch podpierających sprężyn wynosi $k = 4 \cdot 10^2$ Nm⁻¹. Obliczyć amplitudę kątową dźwigni w radianach.

Równanie różniczkowe ruchu obrotowego pręta ma postać:

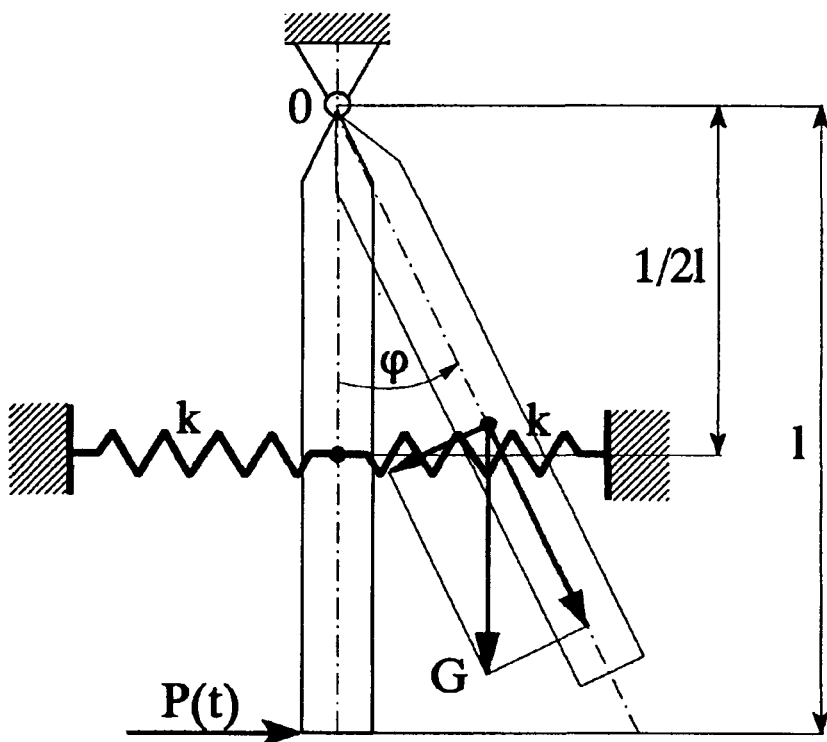
$$B\ddot{\varphi} = -2k\frac{l^2}{4}\varphi - G\frac{l}{2}\varphi + P_0 l \cos \omega t, \quad (5.60)$$

gdzie B jest masowym momentem bezwładności pręta, który wynosi

$$B = \frac{G}{g} \frac{l^2}{3}, \quad (5.61)$$



Rys. 5.16. Wykres rezonansowy dla drgań wymuszonych siłą odśrodkową



Rys. 5.17. Drgania wymuszone pręta jednorodnego zawieszonego pionowo

oraz częstość $\omega = 2\pi f$. Równanie (5.60) sprowadzamy do równania

$$\ddot{\varphi} + \alpha_0^2 \varphi = q \cos \omega t, \quad (5.62)$$

gdzie:

$$\alpha_0^2 = \frac{3g(kl^2 + Gl)}{2Gl^2} = \frac{3}{2}g \left(\frac{k}{G} + \frac{1}{l} \right) \quad (5.63)$$

oraz

$$q = \frac{3gP_0}{Gl}. \quad (5.64)$$

Zakładamy rozwiązanie szczególne równania (5.62) o postaci

$$\varphi = \Phi_0 \cos \omega t \quad (5.65)$$

i znajdujemy

$$\Phi_0 = \frac{q}{\alpha_0^2 - \omega^2} = \frac{3gP_0}{Gl \left[\frac{3}{2}g \left(\frac{k}{G} + \frac{1}{l} \right) - 4\pi^2 f^2 \right]} = 0,19 \text{ rad}. \quad (5.66)$$

Amplituda drgań pręta wynosi 0,19 rad. Drgania odbywają się przed rezonansem.

5.1.4 Drgania wymuszone tłumione.

Obecnie rozważymy najbardziej ogólny model układu o jednym stopniu swobody tj. drgania wymuszone siłą harmoniczną o stałej amplitudzie układu z tłumieniem wiskotycznym (rys. 5.18).

W oparciu o rysunek 5.18 wyprowadzamy równanie drgań

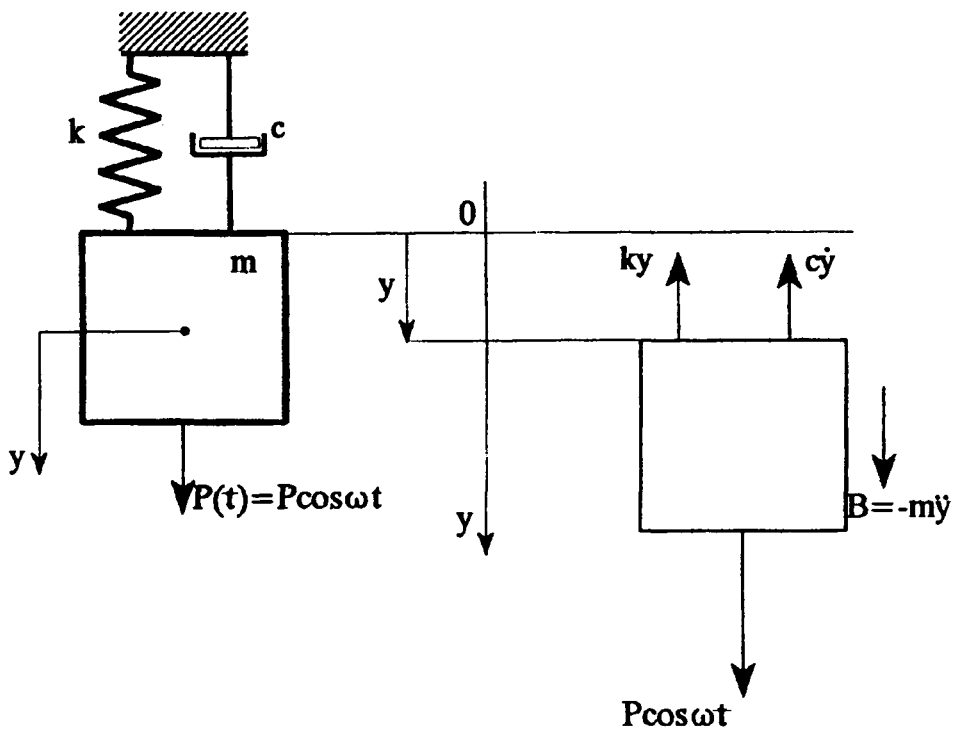
$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = P \cos \omega t, \quad (5.67)$$

które następnie przekształcamy do postaci

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \alpha_0^2 y = q \cos \omega t, \quad (5.68)$$

gdzie:

$$2h = \frac{c}{m}, \quad \alpha_0^2 = \frac{k}{m}, \quad q = \frac{P}{m}. \quad (5.69)$$



Rys. 5.18. Model drgań wymuszonych tłumionych wraz z modelem obliczeniowym

Podobnie jak i w punkcie poprzednim dotyczącym analizy równania (5.44), rozwiązanie ogólne równania (5.68) jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (było ono już dyskutowane) oraz rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego. Ze względu na to, że drgania swobodne, opisane rozwiązaniem równania jednorodnego są po pewnym czasie wytłumione, zajmiemy się w dalszych rozważaniach tylko rozwiązaniem szczególnym. Będziemy go poszukiwać w postaci

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (5.70)$$

Różniczkując dwukrotnie (5.70) podstawiając do (5.68) i przyrównując wyrażenia stojące przy $\sin \omega t$ i $\cos \omega t$ otrzymujemy

$$(\alpha_0^2 - \omega^2)A + 2h\omega B = q, \quad (5.71)$$

$$-2h\omega A + (\alpha_0^2 - \omega^2)B = 0.$$

Z powyższych równań wyznaczamy niewiadome A i B , które wynoszą

$$A = \frac{q}{\alpha_0^2} \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_0}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{h}{\alpha_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\alpha_0}\right)^2}, \quad (5.72)$$

$$B = \frac{q}{\alpha_0^2} \frac{2\frac{h}{\alpha_0}\frac{\omega}{\alpha_0}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{h}{\alpha_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\alpha_0}\right)^2}.$$

Rozwiązanie (5.70) może być przedstawione w postaci

$$y = a \cos(\omega t - \beta), \quad (5.73)$$

gdzie, jak łatwo sprawdzić

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{q}{\alpha_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{h}{\alpha_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\alpha_0}\right)^2}}, \quad (5.74)$$

$$\beta = \arctg \frac{2\frac{h}{\alpha_0}\frac{\omega}{\alpha_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_0}\right)^2}. \quad (5.75)$$

Wprowadzając wielkość $x_{st} = q/\alpha_0^2$ oraz pojęcie współczynnika zwiększającego drgania ν z równania (5.74) otrzymujemy

$$\nu = \frac{a}{x_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{h}{\alpha_0}\right)^2\left(\frac{\omega}{\alpha_0}\right)^2}}. \quad (5.76)$$

Współczynnik ν wyraża stosunek największego przemieszczenia (amplitudy a) do przemieszczenia statycznego wywołanego działaniem tej samej siły. Zależność $\nu(\omega/\alpha_0)$ nazywamy wykresem rezonansowym dla układu o jednym stopniu swobody z tłumieniem wiskotycznym. Przedstawia on bezwymiarowe amplitudy drgań przy równych stosunkach ω/α_0 dla kolejnych stałych wartości h/α_0 . Wykres ten przedstawiono na rys. 5.19.

Z wykresu widać, że amplituda drgań jest wrażliwa na tłumienie w zakresie $0,5 < \omega/\alpha_0 < 1,4$ i szczególnie wrażliwa przy $\omega/\alpha_0 \approx 1$. Po przekroczeniu tego zakresu gwałtownie spada i przy $\omega \rightarrow \infty$, amplituda dąży do zera. W przeciwieństwie do wykresu rezonansowego bez tłumienia maksimum amplitudy drgań jest nieznacznie przesunięte w lewo, bo występuje ono dla wartości

$$\frac{\omega}{\alpha_0} = \sqrt{1 - 2\left(\frac{h}{\alpha_0}\right)^2}. \quad (5.77)$$

Dla bardzo dużego tłumienia ($h/\alpha_0 > 0,707$) wymienione maksima nie istnieją i amplituda drgań wymuszonych maleje monotonicznie ze wzrostem ω/α_0 .

Kąt β jest miarą opóźnienia fazy drgań względem fazy siły wymuszającej. Wykres zależności $\beta(\omega/\alpha_0)$ przedstawiono na rys. 5.20.

Jak widać z rys. 5.20, przy zbliżaniu się do rezonansu ($\omega = \alpha_0$) opóźnienie w fazie gwałtownie rośnie, i to tym gwałtowniej im mniejsze jest tłumienie. Dla $\omega/\alpha_0 \ll 1$ oraz $\omega/\alpha_0 \gg 1$ zmiany β są o wiele mniej wrażliwe na zmianę tłumienia i odpowiednio wartości kąta opóźnienia fazy drgań są bliskie albo zera, albo 180° .

Rozpatrzmy obecnie drgania wymuszone kinematycznie, co schematycznie przedstawiono na rys. 5.21.

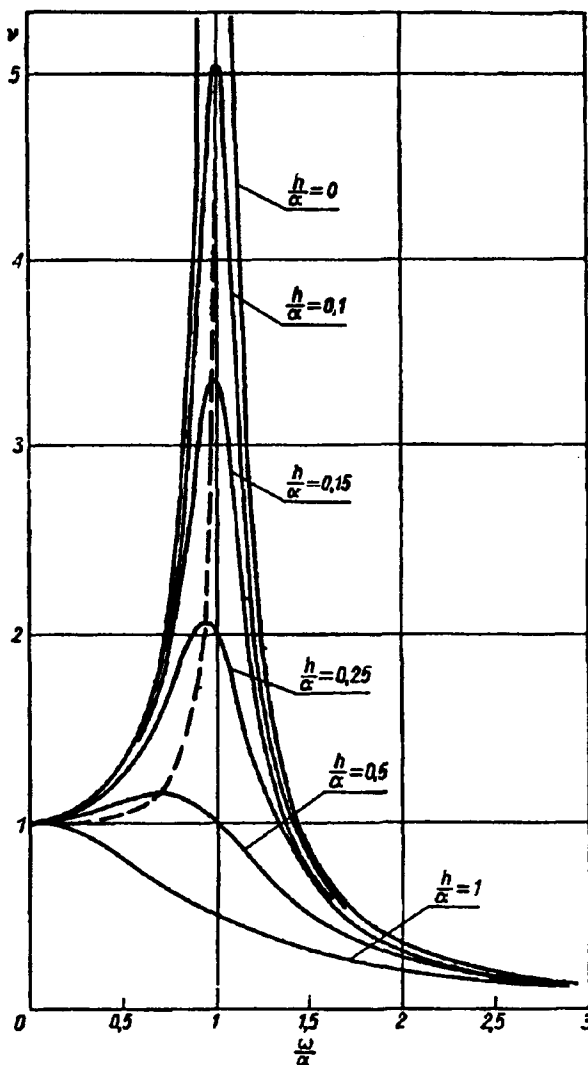
Równanie drgań w tym przypadku ma postać

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = ky_b + c\dot{y}_b, \quad (5.78)$$

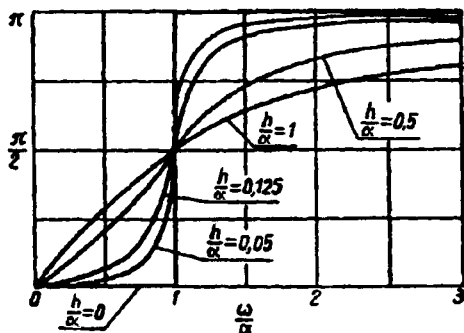
a po przekształceniu otrzymujemy

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \alpha_0^2 y = p \sin \omega t + q \cos \omega t, \quad (5.79)$$

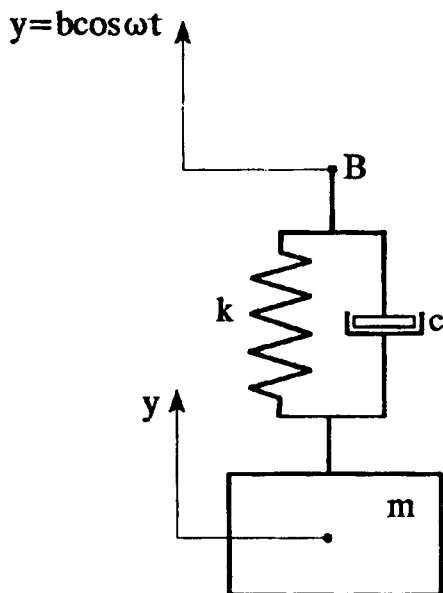
5. Układy drgające liniowe



Rys. 5.19. Wykres rezonansowy w układzie o jednym stopniu swobody z tłumieniem wiskotycznym.



Rys. 5.20. Wykres opóźnienia fazy drgań β w funkcji ω/α_0 dla drgań wymuszonych z tłumieniem



Rys. 5.21. Model drgań układu o jednym stopniu swobody z tłumieniem wiskotycznym wymuszanych kinematycznie

gdzie:

$$\begin{aligned} 2h &= \frac{c}{m}, & \alpha_0^2 &= \frac{k}{m}, \\ p &= -\frac{c\omega b}{m}, & q &= \frac{kb}{m}. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Przy rozwiązywaniu powyższego równania posłużymy się geometryczną interpretacją drgań (można je również rozwiązać w sposób podany wcześniej). Zgodnie z obowiązującą w układach liniowych zasadą superpozycji, znajdziemy rozwiązanie (5.79) jako sumę rozwiązań wyznaczonych dla każdego z wymuszeń osobno. Będziemy więc mieli

$$\ddot{y}_1 + 2h\dot{y}_1 + \alpha_0^2 y_1 = p \sin \omega t \quad (5.81)$$

oraz

$$\ddot{y}_2 + 2h\dot{y}_2 + \alpha_0^2 y_2 = q \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (5.82)$$

Rozwiązanie każdego z równań jest łatwo wyznaczyć w oparciu o przeprowadzone wcześniej rozważania. Mają one postać

$$y_1 = a_1 \sin(\omega t - \beta_1) \quad (5.83)$$

oraz

$$y_2 = a_2 \sin(\omega t - \beta_2). \quad (5.84)$$

Amplitudy a_1 i a_2 określone są zależnościami

$$a_1 = \frac{p}{\sqrt{(\alpha_0^2 - \omega^2) + 4h^2\omega^2}}, \quad (5.85)$$

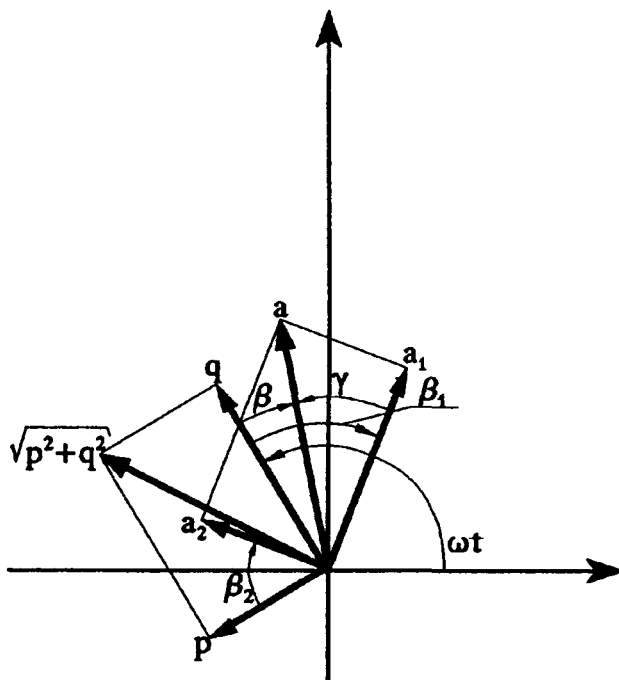
$$a_2 = \frac{q}{\sqrt{(\alpha_0^2 - \omega^2) + 4h^2\omega^2}}. \quad (5.86)$$

Kąty opóźnienia fazowego wynoszą

$$\beta_1 = \beta_2 = \arctg \frac{2h\omega}{\alpha_0^2 - \omega^2}. \quad (5.87)$$

W oparciu o rys. 5.22 obliczamy

$$y = a \sin(\omega t - \beta), \quad (5.88)$$



Rys. 5.22. Interpretacja geometryczna rozwiązania równania (5.82)

gdzie:

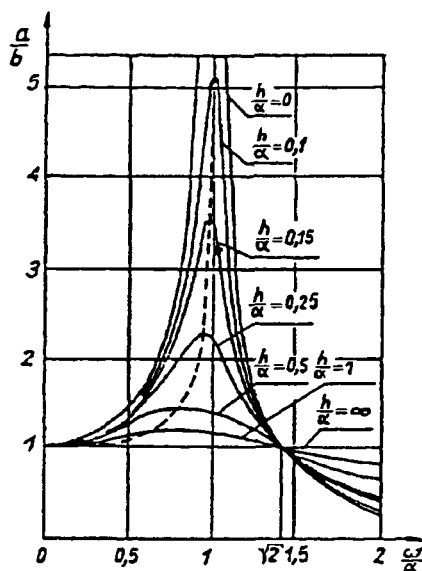
$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}. \quad (5.89)$$

$$\beta = \beta_1 + \gamma = \beta_1 + \arctg \frac{a_2}{a_1}, \quad (5.90)$$

a po wykonaniu obliczeń otrzymujemy

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{1 + 4 \frac{h^2}{\alpha_0^2} \frac{\omega^2}{\alpha_0^2}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_0^2}\right)^2 + 4 \frac{h^2}{\alpha_0^2} \frac{\omega^2}{\alpha_0^2}}}. \quad (5.91)$$

W oparciu o równanie (5.91) sporządzono wykres rezonansowy przedstawiony na rys. 5.23.



Rys. 5.23. Wykres rezonansowy dla układu o jednym stopniu swobody z tłumieniem wiskotycznym i wymuszeniem kinematycznym

Zasadnicza różnica pomiędzy tym wykresem a wykresem rezonansowym przedstawionym na rys. 5.19 polega na tym, że na rys. 5.23 wszystkie krzywe rezonansowe przecinają się dla $\omega/\alpha_0 = \sqrt{2}$ w tym samym punkcie.

Jako ostatni ważny technicznie rodzaj wymuszenia rozpatrzmy drganie wymuszone siłą odśrodkową. Posłużymy się tutaj modelem przedstawionym na rys. 5.15 i dodatkowo przyjmiemy, że między silnikiem a podłożem znajduje się tłumik o tłumieniu wiskotycznym c . Równanie ruchu ma postać

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + ky = m_w \omega^2 \mu \cos \omega t, \quad (5.92)$$

które sprowadzamy do standardowej postaci

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \alpha_0^2 y = q \cos \omega t, \quad (5.93)$$

gdzie:

$$2h = \frac{c}{M}, \quad \alpha_0^2 = \frac{k}{M}, \quad q = \frac{m_w}{M} \omega^2 \mu. \quad (5.94)$$

Amplituda drgań wymuszonych siłą odśrodkową wynosi

$$a = \frac{m_w \mu \alpha_0^2}{k} \frac{\alpha_0^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_0^2}\right)^2 + 4 \frac{h^2}{\alpha_0^2} \frac{\omega^2}{\alpha_0^2}}}. \quad (5.95)$$

W oparciu o zależność (5.95) sporządzono wykres rezonansowy przedstawiony na rys. 5.24.

Cechą charakterystyczną tego wykresu, odróżniającą go od dwóch pozostałych jest to, że dla $\omega \rightarrow \infty$ mamy $a = m_w \mu \alpha_0^2 / k$, co odpowiada ugięciu statycznemu układu.

Przykład 5.4

Ciało o masie m połączone jest z jednej strony poprzez tłumik z ostoją, a z drugiej jest wymuszane poprzez sprężynę o sztywności k , której koniec wykonuje ruch harmoniczny $y_b = b \cos \omega t$. Częstota wymuszenia jest dwa razy większa od drgań własnych. Obliczyć maksymalną reakcję w punkcie A. Dane: $k = 2 \cdot 10^2$ N/m, $c = 3 \cdot 10^2$ Ns/m, $m = 20$ kg, $b = 2 \cdot 10^{-2}$ m.

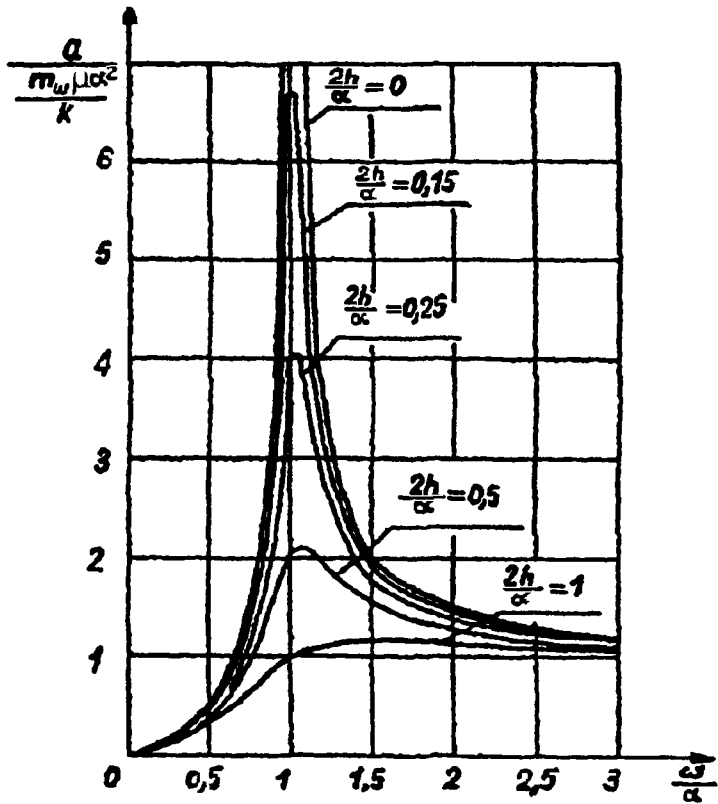
Równanie różniczkowe układu ma postać

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kx_b, \quad (5.96)$$

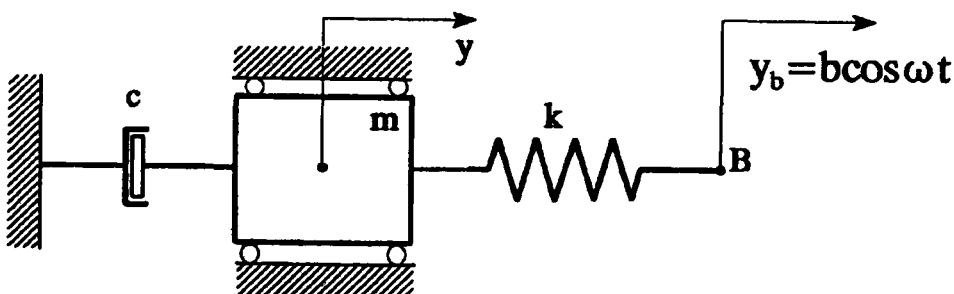
a po sprowadzeniu do postaci standardowej otrzymujemy

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \alpha_0^2 x = q \cos \omega t, \quad (5.97)$$

gdzie:



Rys. 5.24. Wykres rezonansowy dla układu o jednym stopniu swobody z tłumieniem wiskotycznym i wymuszeniu kinematycznym



Rys. 5.25. Schemat analizowanego układu

$$2h = \frac{c}{m}, \quad \alpha_0^2 = \frac{k}{m}, \quad q = \frac{kb}{m}. \quad (5.98)$$

Ze wzoru na amplitudę drgań (5.74) wynika, że dla $\omega = 2\alpha_0$ mamy

$$a = \frac{q}{\sqrt{(\alpha_0^2 - 4\alpha_0^2)^2 + 16h^2\alpha_0^2}} = \frac{kb}{m\sqrt{\frac{k}{m}\sqrt{\frac{9k}{m} + 16\left(\frac{c}{2m}\right)^2}}}. \quad (5.99)$$

Maksymalna reakcja w punkcie A jest równa maksymalnej sile tłumienia określonej wzorem

$$P_{\text{tł}} = |c\dot{x}_{\text{max}}|, \quad (5.100)$$

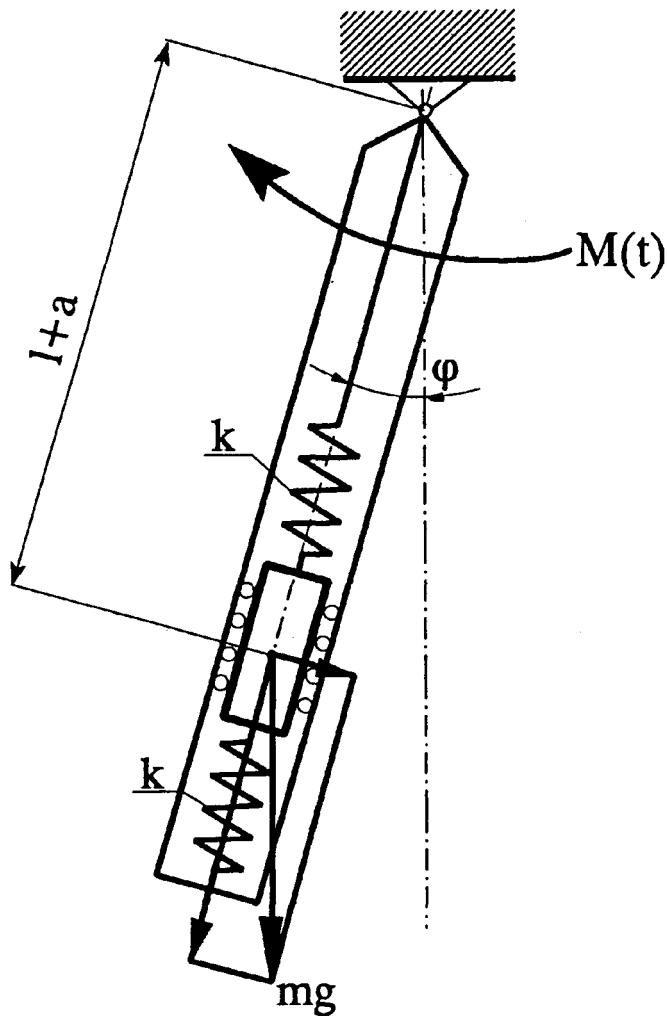
co po uwzględnieniu zależności (5.99) prowadzi do wartości

$$P_{\text{tł}} = 2c\sqrt{\frac{k}{m}}a = 3,79 \text{ N}. \quad (5.101)$$

Maksymalna siła reakcji w punkcie A wynosi 3,79 N.

5.1.5 Drgania parametryczne

W celu wprowadzenia w problematykę drgań parametrycznych rozpatrzmy małe drganie układu przedstawionego na rys. 5.26. W odległości l od osi obrotu znajduje się ciało o masie m zamocowane w bezmasowym pudle za pomocą dwóch sprężyn (każda o sztywności k).



Rys. 5.26. Drganie parametryczne z wymuszeniem $M(t)$

Podczas wahań ciało o masie m przemieszcza się wzdłuż prowadnic i jego masowy moment bezwładności względem punktu O ulega zmianie. Przy wyprowadzaniu równania ruchu skorzystamy z twierdzenia, że pochodna krętu układu w czasie jest równa sumie momentów sił działających na układ, czyli

$$\frac{d(B\dot{\varphi})}{dt} = \sum_i M_i. \quad (5.102)$$

Niech ruch masy w prowadnicach będzie opisany funkcją $a \sin \omega t$, wówczas masowy moment bezwładności względem punktu O wynosi

$$B = m(l + a \sin \omega t)^2. \quad (5.103)$$

Ponieważ lewa strona równania (5.102) opisana jest wzorem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(B\dot{\varphi}) &= B\ddot{\varphi} + \frac{dB}{dt}\dot{\varphi} = m(l + a \sin \omega t)^2\ddot{\varphi} \\ &+ 2m(l_0 + a \sin \omega t)aw\dot{\varphi} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (5.104)$$

Moment sił pochodzi od siły ciężkości i od zewnętrznego momentu $M(t)$. Wobec tego

$$\sum M_i = -mg(l + a \sin \omega t) \sin \varphi + M(t) \quad (5.105)$$

i po przyjęciu $\sin \varphi \approx \varphi$ z równania (5.102) otrzymujemy

$$\ddot{\varphi} + P(t)\dot{\varphi} + Q(t)\varphi = R(t), \quad (5.106)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{2aw \cos \omega t}{l + a \sin \omega t}, & Q(t) &= \frac{g}{l + a \sin \omega t}, \\ R(t) &= \frac{M(t)}{m(l + a \sin \omega t)^2}. \end{aligned} \quad (5.107)$$

Dalej rozważać będziemy równanie (5.106). Wprowadzimy nową zmienną $y(t)$ zdefiniowaną przez

$$\varphi(t) = y(t) \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau \right]. \quad (5.108)$$

Z równania (5.108) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \left(\dot{y} - \frac{1}{2}Py\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{t_0}^t P(\tau)d\tau\right], \\ \bar{\varphi} &= \left(\ddot{y} - \frac{1}{2}P\dot{y} - \frac{1}{2}Py + \frac{1}{4}P^2y\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{t_0}^t P(\tau)d\tau\right],\end{aligned}\quad (5.109)$$

co po podstawieniu do równania (5.106) prowadzi do usunięcia członu z pierwszą pochodną φ i otrzymania równania

$$\ddot{y} + p(t)y = r(t), \quad (5.110)$$

gdzie:

$$p(t) = Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}P, \quad r(t) = R \exp\left[\frac{1}{2}\int_{t_0}^t P(\tau)d\tau\right]. \quad (5.111)$$

Jeśli $p(t) = p(t+T)$, gdzie T jest okresem zmian współczynnika p , to równanie (5.110) nazywać będziemy równaniem Hilla.

Rozpatrzmy przypadek $r(t) = 0$. Niech $y_1(t)$ i $y_2(t)$ będą rozwiązaniami równania (5.110). Wybieramy rozwiązanie tak, aby spełniało ono następujące warunki początkowe

$$\begin{aligned}y_1(0) &= 1, & \dot{y}_1(0) &= 0, \\ y_2(0) &= 0, & \dot{y}_2(0) &= 1.\end{aligned}\quad (5.112)$$

Jeśli $y_1(t)$ i $y_2(t)$ są niezależnymi rozwiązaniami, to również $y_1(t+T)$ i $y_2(t+T)$ są niezależnymi rozwiązaniami. Te ostatnie możemy wyrazić jako liniowe kombinacje dwóch pierwszych tj.

$$\begin{aligned}y_1(t+T) &= \varphi_{11}y_1(t) + \varphi_{12}y_2(t), \\ y_2(t+T) &= \varphi_{21}y_1(t) + \varphi_{22}y_2(t).\end{aligned}\quad (5.113)$$

Wówczas po uwzględnieniu (5.112) mamy

$$\begin{aligned}y_1(T) &= \varphi_{11}, & \dot{y}_1(T) &= \varphi_{12}, \\ y_2(T) &= \varphi_{21}, & \dot{y}_2(T) &= \varphi_{22}.\end{aligned}\quad (5.114)$$

Z równania (5.110) otrzymujemy

$$\ddot{y}_1 + p(t)y_1 = 0, \quad \ddot{y}_2 + p(t)y_2 = 0, \quad (5.115)$$

a następnie mnożąc pierwsze równanie (5.115) przez $-y_2$, a drugie przez y_1 i dodając do siebie otrzymujemy

$$\ddot{y}_2 y_1 - \ddot{y}_1 y_2 = 0, \quad (5.116)$$

co po scałkowaniu prowadzi do równania

$$\dot{y}_2 y_1 - \dot{y}_1 y_2 = C. \quad (5.117)$$

Podstawiając w miejsce zmiennej niezależnej 0 i T z równania (5.117) otrzymujemy

$$\dot{y}_2(T)y_1(T) - \dot{y}_1(T)y_2(T) = \dot{y}_2(0)y_1(0) - \dot{y}_1(0)y_2(0), \quad (5.118)$$

co po uwzględnieniu (5.112) i (5.114) prowadzi do równania

$$\varphi_{22}\varphi_{11} - \varphi_{12}\varphi_{21} = 1. \quad (5.119)$$

Ponieważ

$$y_1(t+T) = \mu y_1(t), \quad y_2(t+T) = \mu y_2(t), \quad (5.120)$$

to po uwzględnieniu powyższych równości w równaniu (5.113) otrzymujemy równanie charakterystyczne

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} - \mu & \varphi_{21} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} - \mu \end{vmatrix} = 0, \quad (5.121)$$

lub w postaci rozwiniętej

$$\mu^2 - \mu(\varphi_{22} + \varphi_{11}) + \varphi_{22}\varphi_{11} - \varphi_{12}\varphi_{21} = 0. \quad (5.122)$$

Pierwiastki równania (5.122) nazywamy multiplikatorami i wynoszą one

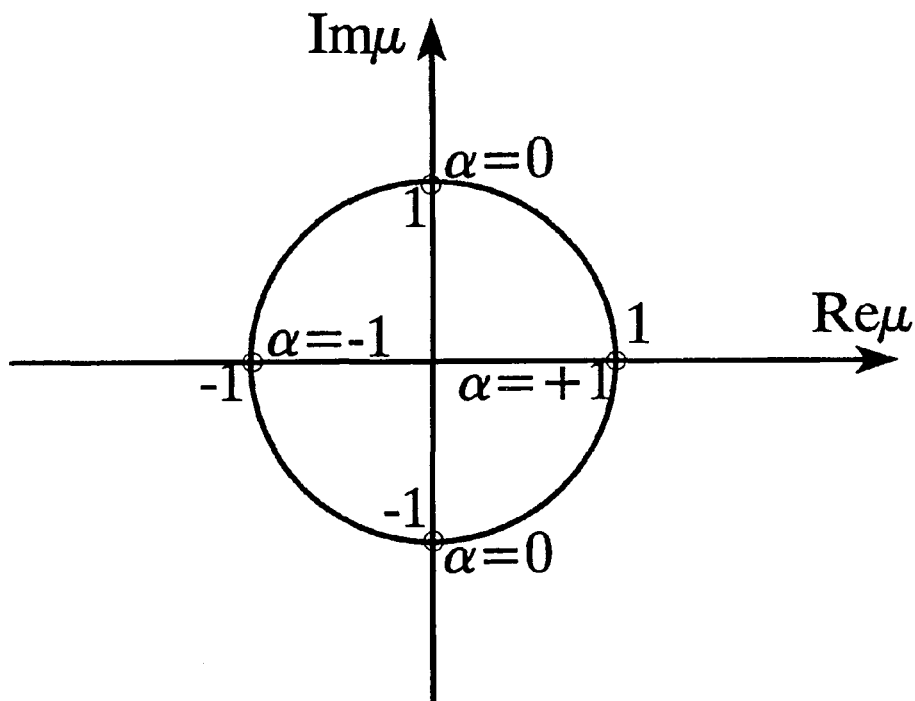
$$\mu_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}, \quad (5.123)$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{1}{2}(\varphi_{11} + \varphi_{22}). \quad (5.124)$$

Obydwa multiplikatory są albo rzeczywiste albo zespolone sprzężone. Ich zależność od parametru α przedstawia rys. 5.27.

Z równania (5.123) wynika, że dla dowolnej wartości α mamy



Rys. 5.27. Wykres zależności wartości multiplikatorów od parametru α

$$\mu_1 \mu_2 = 1. \quad (5.125)$$

W przedziale $|\alpha| < 1$ multiplikator μ jest wielkością zespoloną o module równym jedności i zapiszemy go w postaci

$$\mu_{1,2} = \exp(\pm i \lambda_u T), \quad (5.126)$$

gdzie $0 < |\lambda| < 1$.

W przedziale $|\alpha| > 1$ mnożniki μ są rzeczywiste i mogą być przedstawione jako

$$\mu_{1,2} = \pm \exp(\pm \lambda_R T), \quad (5.127)$$

gdzie λ_R przyjmuje wartości $0 < \lambda_R < \infty$.

Dla $\alpha = 1$ mamy $\mu_1 = \mu_2 = 1$, oraz dla $\alpha = -1$ mamy $\mu_1 = \mu_2 = -1$. Dla $\mu = 1$ lub $\mu = -1$ rozwiązanie jest okresowe i w pierwszym przypadku ma postać

$$y(t + T) = y(t), \quad (5.128)$$

natomiast w drugim

$$y(t + 2T) = -y(t + T) = y(t), \quad (5.129)$$

co oznacza odpowiednio rozwiązanie o okresie T i rozwiązanie o okresie $2T$. Jeśli $\mu > 1$ (czyli dla $|\alpha| > 1$) to rozwiązanie $y(t)$ wzrasta nieograniczenie ze wzrostem czasu i jest ono niestabilne. Stabilne rozwiązanie pojawia się dla $\mu \leq 1$, a na granicy między stabilnym i niestabilnym rozwiązaniem pojawia się rozwiązanie okresowe (dla $|\mu| = 1$, co odpowiada $|\alpha| = 1$).

Wprowadzając nową funkcję $\Phi(t)$ taką, że

$$y(t) = \Phi(t) \exp(\lambda t) = \Phi(t) \exp(\lambda_R + i \lambda_u), \quad (5.130)$$

obliczamy

$$\begin{aligned} y(t + T) &= \Phi(t + T) \exp(\lambda(t + T)) = y(t) \exp(\lambda T) = \\ &= \Phi(t) \exp(\lambda t) \exp(\lambda T). \end{aligned} \quad (5.131)$$

Po przyrównaniu drugiej i ostatniej części równości wyrażenia (5.131) otrzymujemy, że $\Phi(t + T) = \Phi(t)$, czyli że funkcja $\Phi(t)$ jest okresowa o okresie T .

Ponieważ funkcja $y(-t)$ jest także rozwiązaniem, więc kompletne rozwiązanie równania Hilla ma postać



$$y(t) = C_1 \exp(\lambda t) \Phi(t) + C_2 \exp(-\lambda t) \Phi(-t), \quad (5.132)$$

gdzie C_1 i C_2 są stałymi określonymi przez warunki początkowe.

Jak widać rozwiązanie to jest zawsze niestabilne, jeśli tylko λ nie jest wielkością czysto urojoną. Dla wartości $\mu = 0$ i $\mu = i$ równanie (5.132) nie jest rozwiązaniem równania Hilla (stwierdzenie to wynika z analizy równania charakterystycznego).

Dla $\mu = 1(\lambda = 0)$ rozwiązanie równania Hilla ma postać

$$y(t) = C_1 \Phi_1(t) + C_2 t \Phi_2(t), \quad (5.133)$$

natomiast dla $\mu = -1(\lambda = \pm i)$ rozwiązaniem jest

$$y(t) = C_1 \exp(it) \Phi_1(t) + C_2 t \exp(it) \Phi_2(t), \quad (5.134)$$

przy czym $\Phi_1(t) = \Phi_1(t + 2T)$ oraz $\Phi_2(t) = \Phi_2(t + T)$. Obydwa rozwiązania opisane równaniami (5.133) i (5.134) są niestabilne.

Podsumowując powyższą analizę należy podkreślić, że rozwiązania okresowe pojawiają się na granicy utraty stateczności. Znalezienie rozwiązań okresowych o okresie T i okresie $2T$ wyznacza granice utraty stateczności (punkty $\mu = \alpha = 1$ i $\mu = \alpha = -1$ z rys. 5.27 wyznaczają granicę stateczności).

Obecnie zajmiemy się dwoma szczególnymi przypadkami równania Hilla. Najpierw omówimy tzw. równanie Meissnera. Będziemy dalej rozważać równanie

$$\ddot{y} + p(t)y = 0, \quad (5.135)$$

przy czym $p(t)$ ma formę przedstawioną na rys. 5.28.

Równanie ruchu ma postać

$$\ddot{y}_a + a^2 y_a = 0, \quad \text{dla } 0 < t - mT < T_1, \quad (5.136)$$

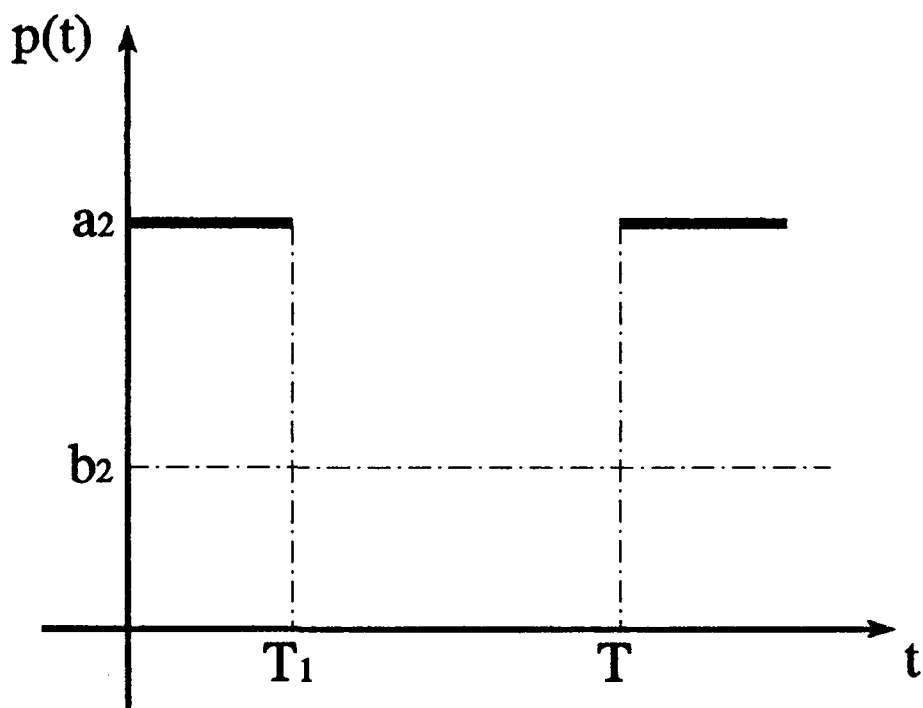
$$\ddot{y}_b + b^2 y_b = 0, \quad \text{dla } T_1 < t - mT < T, \quad (5.137)$$

gdzie $m = 0, 1, 2, \dots$. Rozwiązanie ogólne równania (5.136) można zapisać jako

$$y_a = C_a^{(1)} \cos at + C_a^{(2)} \sin at. \quad (5.138)$$

Wobec tego rozwiązaniem (5.136) jest

$$\{X_a\} = \begin{pmatrix} y_a \\ \dot{y}_a \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos at & \sin at \\ -a \sin at & a \cos at \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_a^{(1)} \\ C_a^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (5.139)$$



Rys. 5.28. Zmiany okresowe współczynnika $p(t)$ (równanie Meissnera)

W podobny sposób otrzymujemy dla równania (5.137), że

$$\{X_b\} = \begin{pmatrix} y_b \\ \dot{y}_b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -b \sin bt & b \cos bt \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_b^{(1)} \\ C_b^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (5.140)$$

Dla $t = T_1$ mamy warunek

$$\{X_a(T_1)\} = \{X_b(T_1)\}. \quad (5.141)$$

Niech $\{\varphi_1(t)\}$ oznacza pierwsze rozwiązanie ogólne przy warunkach początkowych $\{\varphi_1(0)\} = \text{col}(1; 0)$. Z równania (5.139) otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_a^{(1)} \\ C_a^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (5.142)$$

i stąd

$$\begin{pmatrix} C_a^{(1)} \\ C_a^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.143)$$

Podstawiając (5.143) do (5.139) obliczamy

$$\{\varphi_{1a}(t)\} = \begin{pmatrix} \cos at \\ -a \sin at \end{pmatrix}. \quad (5.144)$$

Warunek (5.141) otrzymuje postać

$$\{\varphi_{1a}(T_1)\} = \{\varphi_{1b}(T_1)\}. \quad (5.145)$$

Wobec tego z równania (5.144) i równania (5.140) otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} \cos aT_1 \\ -a \sin aT_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos bT_1 & \sin bT_1 \\ -b \sin bT_1 & b \cos bT_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_b^{(1)} \\ C_b^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (5.146)$$

a po rozwiązaniu którego mamy

$$\begin{pmatrix} C_b^{(1)} \\ C_b^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} b \cos bT_1 & -\sin bT_1 \\ b \sin bT_1 & \cos bT_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos aT_1 \\ -a \sin aT_1 \end{pmatrix}. \quad (5.147)$$

Biorąc pod uwagę równanie (5.140) i równanie (5.147) znajdujemy

$$\{\varphi_{1b}(t)\} = \begin{pmatrix} \cos aT_1 \cos b(t - T_1) - \frac{a}{b} \sin aT_1 \sin b(t - T_1) \\ -b \cos aT_1 \sin b(t - T_1) - a \sin aT_1 \cos b(t - T_1) \end{pmatrix}. \quad (5.148)$$

W podobny sposób możemy przeprowadzić operacje dla drugiego niezależnego rozwiązania $\{\varphi_2(t)\}$ z warunkami początkowymi $\{\varphi_2(0)\} = \text{col}(0; 1)$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \{\varphi_{2a}(t)\} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \sin at \\ \cos aT \end{pmatrix}, \\ \{\varphi_{2b}(t)\} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \sin aT_1 \cos b(t - T_1) + \frac{1}{b} \cos aT_1 \sin b(t - T_1) \\ -\frac{b}{a} \sin aT_1 \sin b(t - T_1) + \cos aT_1 \cos b(t - T_1) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.149)$$

Rozwiązanie na końcu okresu T może być wyrażone poprzez macierz

$$[\Phi_*] = (\{\varphi_{1b}(T)\}, \{\varphi_{2b}(T)\}), \quad (5.150)$$

Z równań (5.148), (5.149) oraz (5.124) otrzymujemy

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[2 \cos aT_1 \cos b(T - T_1) - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \sin aT_1 \sin b(T - T_1) \right]. \quad (5.151)$$

Jak wiadomo z wcześniejszych rozważań, na granicy stateczności mamy $\alpha = \pm 1$, czyli

$$2 \cos aT_1 \cos b(T - T_1) - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \sin aT_1 \sin b(T - T_1) = \pm 2. \quad (5.152)$$

Równanie powyższe zawiera trzy ważne parametry: aT , aT_1 , b/a . Równanie (5.152) można również traktować jako równanie powierzchni w trójwymiarowej przestrzeni parametrów, która oddziela przestrzeń parametrów odpowiadających rozwiązaniom statecznym i niestatecznym.

Dla uproszczenia dalszej analizy przyjmijmy $b = 0$. Z równania (5.152) otrzymujemy

$$2 \cos aT_1 - (aT - aT_1) \sin aT_1 = \pm 2, \quad (5.153)$$

ponieważ

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\sin b(T - T_1)}{b} = T - T_1. \quad (5.154)$$

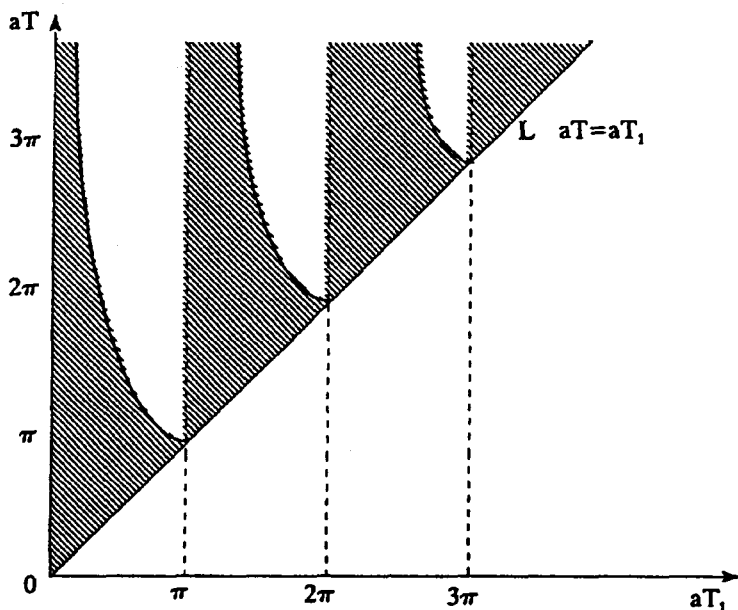
Z (5.153) otrzymujemy krzywą będącą granicą utraty stateczności w płaszczyźnie aT_1 , aT o postaci

$$aT = \frac{2(\cos aT_1 \pm 1)}{\sin aT_1} - aT_1. \quad (5.155)$$

Równanie (5.155) spełnione jest dla

$$aT_1 = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.156)$$

i równanie (5.156) wyznacza granice utraty stateczności. Wyniki powyższej analizy wraz zaznaczeniem obszarów stateczności przedstawiono na rys. 5.29.



Rys. 5.29. Granice stateczności dla równania Meissnera dla przypadku szczególnego $b = 0$ (obszary stateczne są zakreskowane)

W celu ustalenia, które z obszarów na rys. 5.29 są stateczne, wybieramy dowolny punkt z danego obszaru i obliczamy wartość α .

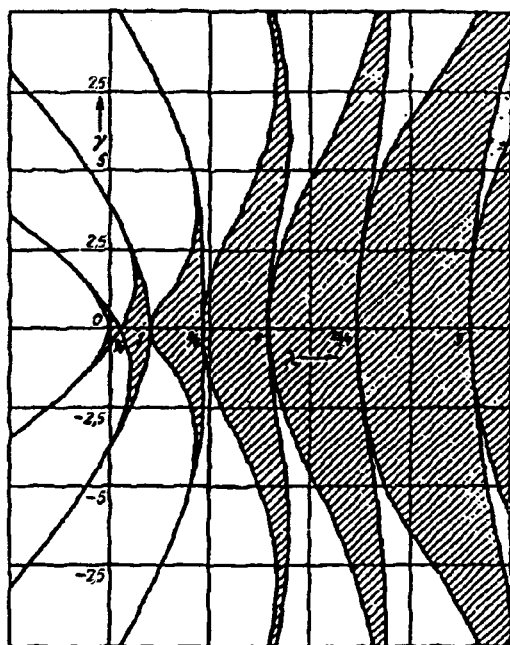
Drugim szczególnym przypadkiem równania Hilla jest równanie Mathieu o postaci

$$\ddot{y} + (\lambda^* + \gamma^* \cos \Omega t)y = 0. \quad (5.157)$$

Wprowadzając wielkości

$$\lambda = \lambda^* / \Omega^2, \quad \gamma = \gamma^* / \Omega^2, \quad (5.158)$$

obszary niestateczności w płaszczyźnie λ i γ zostały wyznaczone dla równania Mathieu po raz pierwszy przez Ince i Strutta (rys. 5.30).



Rys. 5.30. Wykres Ince-Strutta — obszary stateczne zostały zakreskowane

Krzywe graniczne w pobliżu osi λ można wyznaczyć przy pomocy metody perturbacyjnej.

Szczególnym przypadkiem równania Mathieu (dla $\gamma^* = 0$) jest równanie

$$\ddot{y} + \lambda^* y = 0. \quad (5.159)$$

Łatwo zauważyć, że dla $\lambda^* \leq 0$ (i $\lambda \leq 0$) rozwiązania równania (5.159) są niestacne. Ciekawym zjawiskiem jest fakt, że pojawienie się γ (czyli wzbudzenia parametrycznego) powoduje pojawienie się obszaru statecznego. Można więc wyciągnąć wniosek, że za pomocą wzbudzenia parametrycznego można również stabilizować ruch.

W technice bardzo ważną rolę odgrywa przypadek $\lambda > 0$. Najbardziej niebezpieczny jest przypadek $\lambda = 1/4$.

Rozpatrzmy obecnie wpływ liniowego tłumienia na obszary utraty stateczności. W tym celu dokonajmy analizy równania

$$\ddot{w} + P_0 w + Q(t)w = 0. \quad (5.160)$$

Równanie to może być otrzymane z równania (5.106) po przyjęciu $w = \varphi$ i $P(t) = P_0 = \text{const}$. Dalej możemy dokonać podstawienia w sposób analogiczny do (5.108) i następnie pozbyć się członu z pierwszą pochodną. Postąpimy tu jednak inaczej. Równanie (5.160) zapiszemy w postaci

$$\begin{pmatrix} \dot{w} \\ w \end{pmatrix}' = [A(t)] \begin{pmatrix} \dot{w} \\ w \end{pmatrix}, \quad (5.161)$$

gdzie:

$$[A(t)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -Q(t) & -P_0 \end{bmatrix}. \quad (5.162)$$

Ślad macierzy $\text{Sp}[A(t)] = -P_0 = \text{const}$ i według Liouville'a mamy

$$\det[\Phi(t, t_0)] = \det[\Phi(t_0, t_0)] \exp \left[\int_{t_0}^t \text{Sp}[A(\tau)] d\tau \right], \quad (5.163)$$

gdzie $\Phi(t)$ wyprowadzono we wzorze (5.130).

Jeśli przyjmiemy

$$\det[\Phi(t_0 + T, t_0)] = \det[\Phi_*], \quad (5.164)$$

to zgodnie z (5.163) otrzymujemy

$$\det[\Phi_*] = \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} = e^{-P_0 T}, \quad (5.165)$$

a stąd

$$\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21} = e^{-P_0T}. \quad (5.166)$$

Równanie charakterystyczne ma postać

$$\det([\Phi_s] - \mu[I]) = 0, \quad (5.167)$$

z którego otrzymujemy

$$\mu_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - (\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21})}, \quad (5.168)$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{1}{2}(\varphi_{11} + \varphi_{22}). \quad (5.169)$$

Uwzględniając w (5.168) równanie (5.166) otrzymujemy

$$\mu_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \exp(-P_0T)}. \quad (5.170)$$

Z równania (5.170) wynika, że jeśli $|\alpha| \leq \exp\left(\frac{-P_0T}{2}\right)$, to pierwiastki μ_1 i μ_2 są zespolone sprzężone. Ponadto z (5.170) wynika, że

$$|\mu_1| = |\mu_2| = \exp\left(\frac{-P_0T}{2}\right) < 1. \quad (5.171)$$

Z powyższych rozważań wynika, że multiplikatory charakterystyczne leżą wewnątrz okręgu jednostkowego płaszczyzny zespolonej $\text{Im } \mu$, $\text{Re } \mu$, co przedstawia rys. 5.31.

Rozwiązania odpowiadające μ_1 i μ_2 są asymptotycznie stabilne.

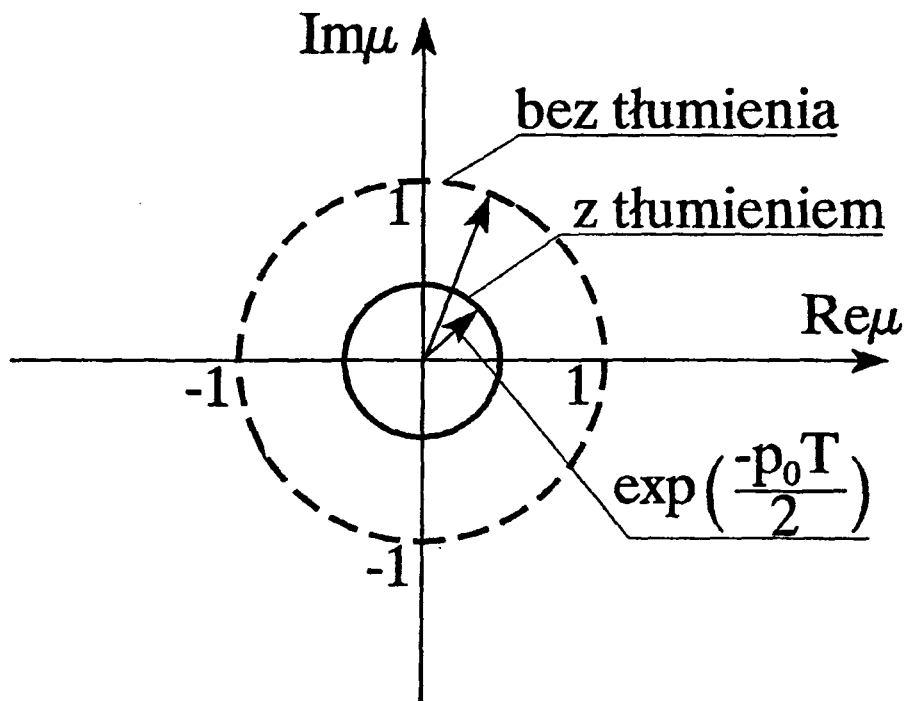
Drugim przypadkiem do rozpatrzenia jest α należące do przedziału

$$e^{\frac{-P_0T}{2}} < |\alpha| < \frac{1}{2} [1 + e^{-P_0T}]. \quad (5.172)$$

W tym przypadku multiplikatory charakterystyczne będą rzeczywiste i będą one leżeć wewnątrz okręgu jednostkowego.

Wreszcie w ostatnim przypadku tj. dla

$$|\alpha| > \frac{1}{2} [1 + e^{-P_0T}] \quad (5.173)$$



Rys. 5.31. Położenie multiplikatorów charakterystycznych w układzie parametrycznym z tłumieniem i bez tłumienia

bezwzględna wartość jednego z multiplikatorów przekracza 1, tzn. że odpowiadające mu rozwiązanie narasta w czasie. Warto dodać, że w tym przypadku pomimo istniejącego dodatniego tłumienia, układ jest niestateczny. Ten wynik nie może być otrzymany, gdy w równaniu (5.160) $Q(t) = Q_0 = \text{const.}$

Rozpatrzmy obecnie uogólnione równanie Mathieu zawierające człon z linio-
wym tłumieniem o postaci

$$\ddot{y} + P_0 \dot{y} + (\lambda^* + \gamma^* \cos \Omega t) y = 0. \quad (5.174)$$

Zagadnienie to zostało w pełni rozwiązane przez Kotowskiego, a wyniki jego obliczeń podane zostały na rys. 5.32.

Z rysunku widać, że ze wzrostem tłumienia zwiększają się obszary stateczności. Ze wzrostem λ pojawiają się kolejne obszary utraty stateczności, które są coraz węższe i mają mniejsze znaczenie w technice.

Przykład 5.5

Wirnik o przekroju prostokątnym $b \times h$ i długości ℓ obraca się z prędkością ω . W połowie jego długości znajduje się masa m mogąca wykonywać ruch tylko w kierunku osi y (patrz rys. 5.33). Podczas ruchu w tym kierunku na masę działa siła sprężystości i tłumienia pochodząca od dwóch sprężyn i tłumików. Zbadać stateczność ruchu wirnika (masę wirnika pominąć). Dane: $m = 5 \text{ kg}$, $k_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ N/m}$, $\omega = 200 \text{ rds}^{-1}$, $b = 0,005 \text{ m}$, $\ell = 1 \text{ m}$, $h = 0,01 \text{ m}$, $c = 100 \text{ Nsm}^{-1}$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$.

Obierzmy układ współrzędnych x_1, y_1 sztywno związany z obracającym się wirnikiem (rys. 5.33).

Związek między współrzędnymi wyrazi się zależnością:

$$x = x_1 \cos \omega t - y_1 \sin \omega t, \quad (5.175)$$

$$y = y_1 \cos \omega t + x_1 \sin \omega t. \quad (5.176)$$

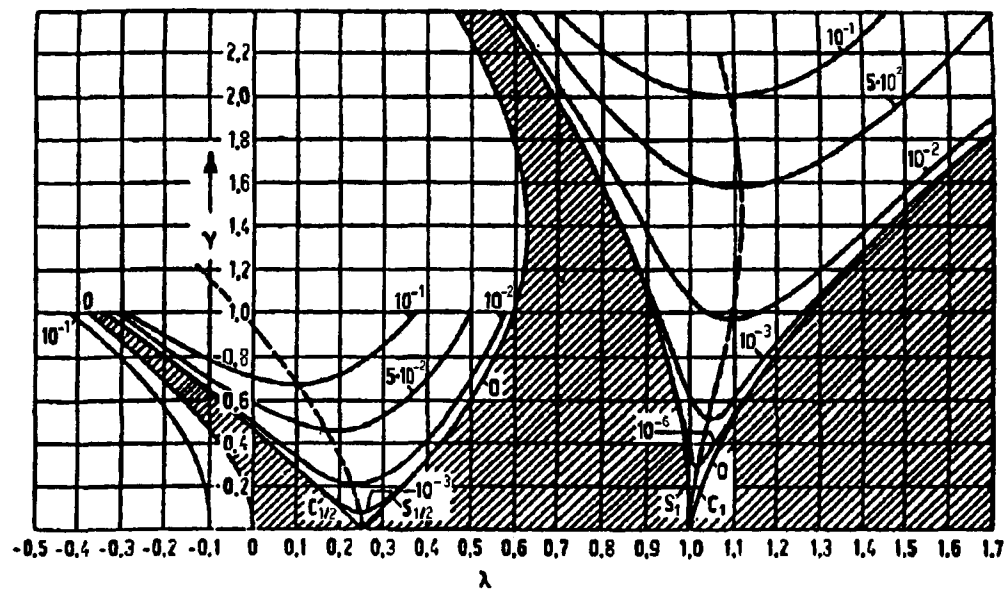
Moment bezwładności przekroju wału względem osi x wynosi

$$I_x = \int_F y^2 dF, \quad (5.177)$$

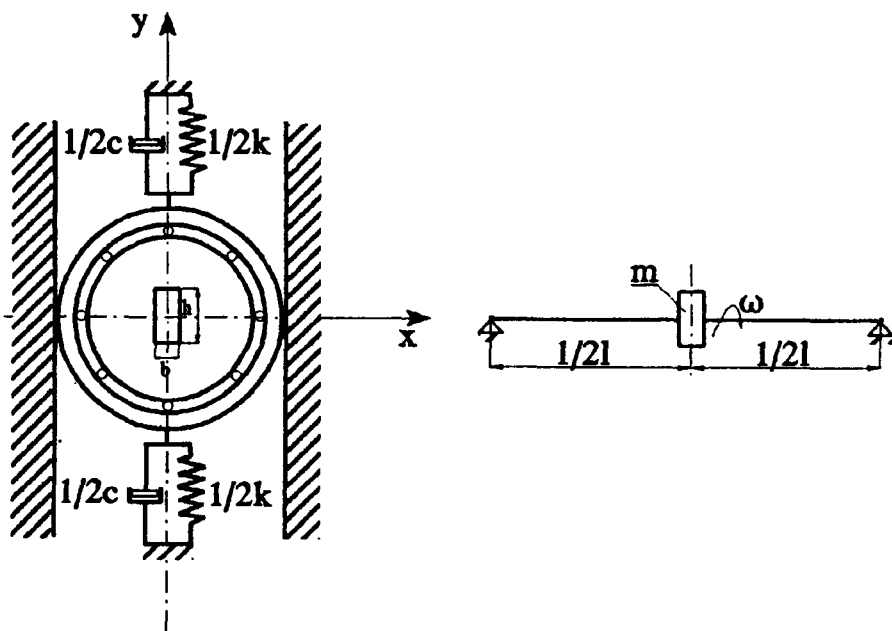
co po uwzględnieniu (5.176) prowadzi do równania

$$I_x = \cos^2 \omega t \int_F y_1^2 dF + \sin^2 \omega t \int_F x_1^2 dF + 2 \sin 2\omega t \int_F x_1 y_1 dF. \quad (5.178)$$

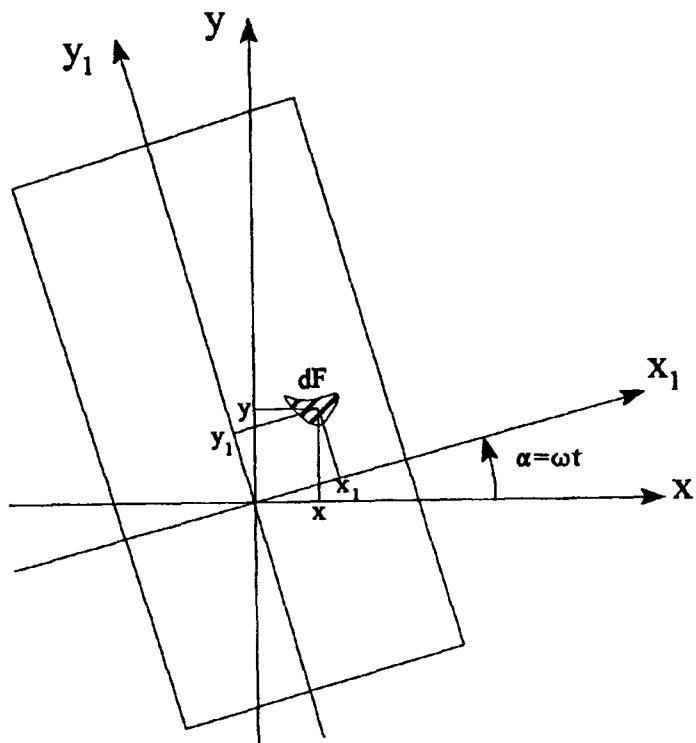
Oznaczając



Rys. 5.32. Granice utraty stateczności dla równania Mathieu wyznaczone przez Kottowskiego



Rys. 5.33. Schemat drgań wirnika o przekroju prostokątnym z masą skupioną m w jego środku długości



Rys. 5.34. Schemat obliczeniowy do rys. 5.33

$$I_{x_1} = \int_F y_1^2 dF, \quad I_{y_1} = \int_F x_1^2 dF \quad \text{oraz} \quad I_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF = 0, \quad (5.179)$$

z równania (5.178) otrzymujemy

$$I_x = \frac{I_{x_1} + I_{y_1}}{2} + \frac{I_{x_1} - I_{y_1}}{2} \cos 2\omega t. \quad (5.180)$$

Dla położenia wirnika określonego kątem α sztywność wynosi

$$k_{x_1} = \frac{48EI_{x_1}}{l^3}, \quad (\alpha = 0), \quad (5.181)$$

$$k_{y_1} = \frac{48EI_{y_1}}{l^3}, \quad (\alpha = \frac{\pi}{2}). \quad (5.182)$$

Równanie drgań ciała o masie m przyjmuje postać

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + \left(k_0 + \frac{k_{x_1} + k_{y_1}}{2} + \frac{k_{x_1} - k_{y_1}}{2} \cos 2\omega t \right) y = 0. \quad (5.183)$$

W celu przekształcenia go do równania (5.174) podstawiamy

$$\tau = 2\omega t \quad (5.184)$$

i otrzymujemy

$$P_0 = \frac{c}{2\omega^2 m}, \quad \lambda = \frac{k_0}{4m\omega^2} + \frac{k_{x_1} + k_{y_1}}{8m\omega^2}, \quad \gamma = \frac{k_{x_1} - k_{y_1}}{8m\omega^2}. \quad (5.185)$$

Po podstawieniu parametrów liczbowych otrzymujemy

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= 4,2 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4, & I_{y_1} &= 1 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4, \\ k_{x_1} &= 4233,6 \text{ Nm}^{-2}, & k_{y_1} &= 1008 \text{ Nm}^{-2} \end{aligned}$$

oraz $P_0 = 0,00025$, $\lambda = 0,00578$, $\gamma = 0,002$. Z rys. 5.32 wynika, że punkt o powyższych współrzędnych znajduje się w obszarze rozwiązań statecznych, zatem ruch wirnika jest w rozpatrywanym przypadku stateczny.

5.2 Układy o dwóch stopniach swobody

5.2.1 Drgania własne

Podstawowe własności drgań układów o dwóch stopniach swobody rozpatrzone zostaną na przykładzie układu przedstawionego na rys. 5.35. Z matematycznego punktu widzenia przedstawiona metoda postępowania będzie podobna i dla innych układów mechanicznych schematycznie przedstawionych na rys. 5.35 b, c.

Dwa ciała z rys. 5.35 a) wykonują tylko ruchy postępowe, natomiast dwa dyski przedstawione na rys. 5.35 b) o masowych momentach bezwładności B_1 i B_2 wykonują tylko drgania skrętne, przy czym rolę sprężyn pracujących na skręcania odgrywają bezmasowe części wałów o sztywnościach k_1 i k_2 . Natomiast belka podparta na sprężynach o sztywnościach k_1 i k_2 ma możliwość zarówno ruchu postępowego jak i obrotu (na rysunku dwie współrzędne uogólnione mierzone są względem środka masy S).

Równanie ruchu układu ma postać:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= m_1 g - k_1(x_{1st} + x_1) + k_2(x_{2st} + x_2 - x_1), \\ m_2 \ddot{x}_2 &= m_2 g - k_2(x_{2st} + x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (5.186)$$

Ponieważ

$$x_{1st} = \frac{(m_1 + m_2)g}{k_1}, \quad x_{2st} = \frac{m_2 g}{k_2}, \quad (5.187)$$

to równania (5.186) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + (\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2)x_1 - \alpha_{12}^2 x_2 &= 0, \\ \ddot{x}_2 - \alpha_{22}^2 x_1 + \alpha_{22}^2 x_2 &= 0, \end{aligned} \quad (5.188)$$

gdzie:

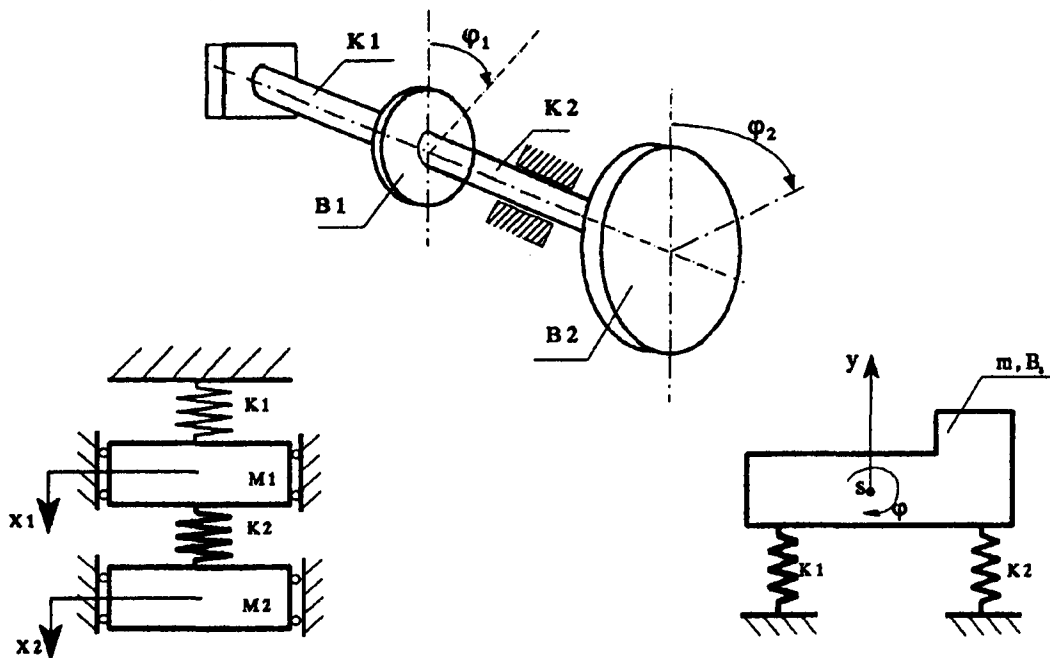
$$\frac{k_2}{m_2} = \alpha_{22}^2, \quad \frac{k_2}{m_1} = \alpha_{12}^2, \quad \frac{k_1 + k_2}{m_1} = \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2. \quad (5.189)$$

Rozwiązania układu (5.188) poszukujemy w postaci:

$$x_1 = A \cos(\alpha t + \beta), \quad x_2 = B \cos(\alpha t + \beta), \quad (5.190)$$

co dla niezerowych A i B prowadzi do równania charakterystycznego

$$\alpha^4 - (\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{12}^2)\alpha^2 + \alpha_{11}^2 \alpha_{22}^2 = 0. \quad (5.191)$$



Rys. 5.35. Przykłady układów drgających o dwóch stopniach swobody

Powyższe równanie częstości pozwala na wyznaczenie częstości α_1 i α_2 ze wzoru:

$$\alpha_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{12}^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{12}^2)^2 - \alpha_{11}^2 \alpha_{22}^2}. \quad (5.192)$$

Dla każdej z częstości obliczamy stosunki określające postacie układu w czasie drgań odpowiednio z częstością α_1 i α_2

$$\frac{B_1}{A_1}(\alpha_1) = \frac{\alpha_{22}^2}{\alpha_{22}^2 - \alpha_1^2} = \lambda_1 > 0, \quad \frac{B_2}{A_2}(\alpha_2) = \frac{\alpha_{22}^2}{\alpha_{12}^2 - \alpha_2^2} = \lambda_2 < 0. \quad (5.193)$$

Dwie główne postacie drgań opisane są wzorami:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= A_1 \cos(\alpha_1 t + \beta_1), & x_2^{(1)} &= \lambda_1 A_1 \cos(\alpha_1 t + \beta_1), \\ x_1^{(2)} &= A_2 \cos(\alpha_2 t + \beta_2), & x_2^{(2)} &= \lambda_2 A_2 \cos(\alpha_2 t + \beta_2), \end{aligned} \quad (5.194)$$

przy czym okresy drgań odpowiadające częstościom α_1 i α_2 wynoszą: $T_1 = 2\pi/\alpha_1$, $T_2 = 2\pi/\alpha_2$.

Przy pierwszej postaci drgań oba ciała poruszają się w tą samą stronę i w fazie, natomiast podczas drgań z drugą postacią główną poruszają się one w kierunkach przeciwnych (przesunięcie fazowe wynosi π). Przedstawiono to na rys. 5.36.

Oczywiście drgania z głównymi postaciami drgań są możliwe, ale muszą być one zadane z pewnymi szczególnymi warunkami początkowymi. W ogólnym przypadku drgania są ich kombinacją liniową i opisane są równaniami:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^{(1)} + x_1^{(2)} = A_1 \cos(\alpha_1 t + \beta_1) + A_2 \cos(\alpha_2 t + \beta_2), \\ x_2 &= x_2^{(1)} + x_2^{(2)} = \lambda_1 A_1 \cos(\alpha_1 t + \beta_1) + \lambda_2 A_2 \cos(\alpha_2 t + \beta_2). \end{aligned} \quad (5.195)$$

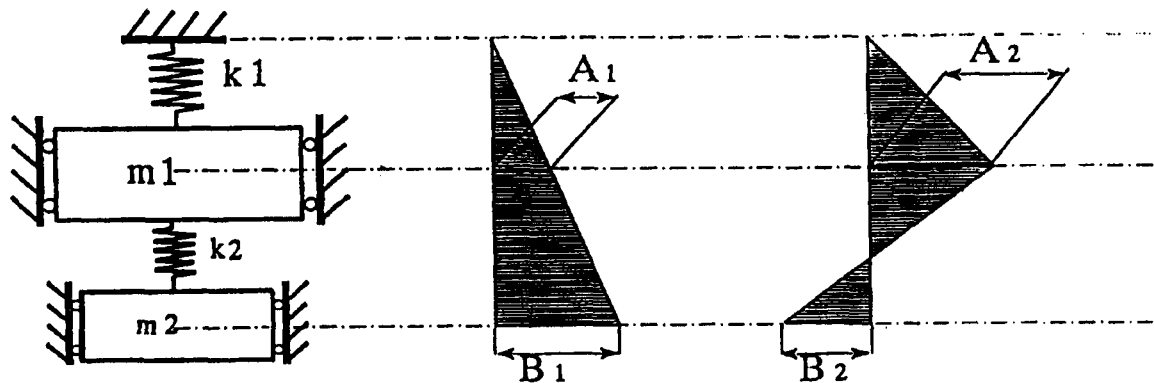
Stałe A_1 , A_2 , B_1 i B_2 wyznaczone są z warunków początkowych. Drgania wypadkowe (jako wyniki złożenia dwóch postaci głównych) w odróżnieniu od nich nie muszą być okresowe. Zachodzi to wówczas, gdy częstości $\alpha_1/\alpha_2 \neq k/l$, gdzie k i l są liczbami naturalnymi.

5.2.2 Drgania swobodne (z tłumieniem)

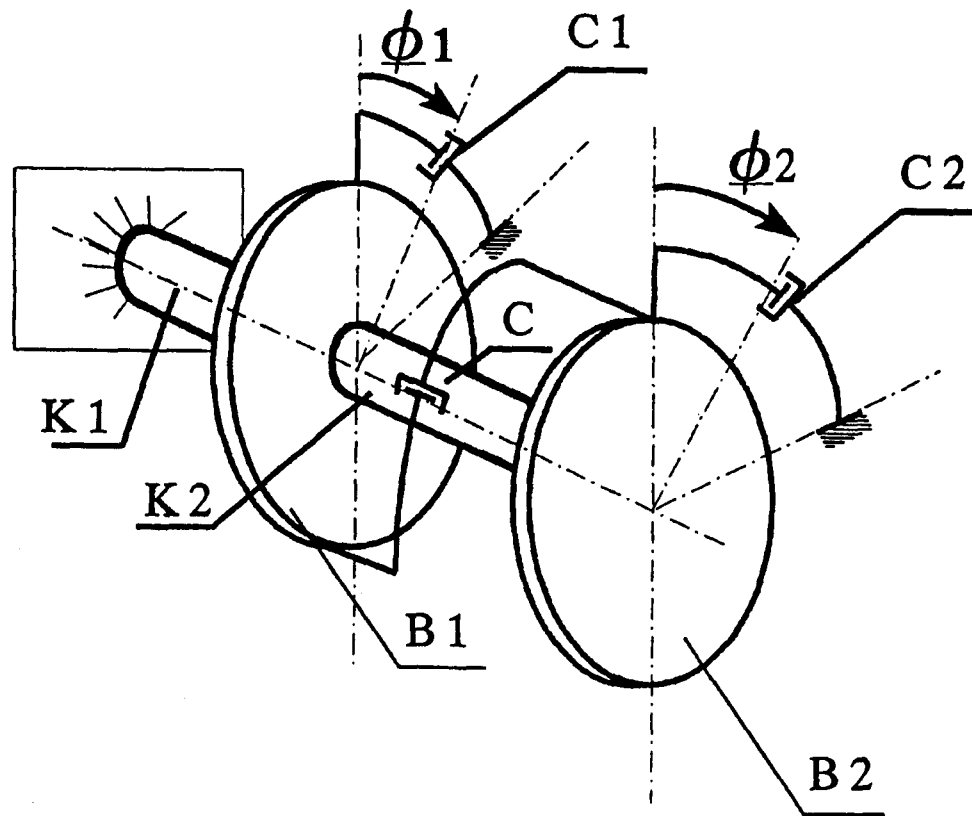
Rozpatrzmy drgania układu z rys. 5.35 b), gdzie dodatkowo uwzględniono tłumienie proporcjonalne do prędkości bezwzględnej lub względnej (rys. 5.37).

Na powyższym rysunku wprowadzone zostały trzy tłumiki tłumiące drgania skretne. Dwa z nich reprezentują momenty tłumienia proporcjonalne do prędkości bezwzględnych:





Rys. 5.36. Pierwsza i druga główna postać drgań układu o ruchu postępowym



Rys. 5.37. Drgania swobodne skrętne układu o dwóch stopniach swobody

$$M_T^{(i)} = ic_i \dot{\varphi}_i, \quad i = 1, 2, \quad (5.196)$$

a trzeci do prędkości kątowej względnej:

$$M_T = c(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1). \quad (5.197)$$

Przyjęte uproszczenie sił rzeczywistych tłumiących jako proporcjonalnych do prędkości (względnej lub bezwzględnej) nie zawsze jest jednak możliwe.

Równania ruchu tego układu (dla $c = 0$) mają postać:

$$\begin{aligned} B_1 \ddot{\varphi}_1 &= -k_1 \varphi_1 + k_2 (\varphi_2 - \varphi_1) - c_1 \dot{\varphi}_1, \\ B_2 \ddot{\varphi}_2 &= -k_2 (\varphi_2 - \varphi_1) - c_2 \dot{\varphi}_2. \end{aligned} \quad (5.198)$$

Rozwiązań szczególnych układu (5.198) poszukujemy o postaci:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= Ae^{rt}, \\ \varphi_2 &= Be^{rt}, \end{aligned} \quad (5.199)$$

gdzie r jest liczbą zespoloną. Po podstawieniu (5.199) do (5.198) otrzymujemy

$$\begin{aligned} [B_1 r^2 + c_1 r + k_1 + k_2] - k_2 B &= 0, \\ -k_2 A + [B_2 r^2 + c_2 r + k_2] B &= 0 \end{aligned} \quad (5.200)$$

i równanie częstości ma postać:

$$(B_1 r^2 + c_1 r + k_1 + k_2)(B_2 r^2 + c_2 r + k_2) - k_2^2 = 0. \quad (5.201)$$

Można spodziewać się, że dla małego tłumienia pierwiastkami równania charakterystycznego (5.201) są liczby zespolone parami sprzężone o częściach rzeczywistych ujemnych. Gdyby chociaż jeden z nich posiadał część rzeczywistą dodatnią, to drgania by narastały. Pierwiastki te mają postać:

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= -h_1 \pm i\alpha_1, \\ r_{3,4} &= -h_2 \pm i\alpha_2, \end{aligned} \quad (5.202)$$

gdzie α_1 i α_2 są częstościami drgań własnych tego układu (drgań bez tłumienia). Również i w tym przypadku na podstawie równań (5.200) można dla każdego z pierwiastków r_i ($i = 1, 2, 3, 4$) wyznaczyć stosunki $A_i/B_i(r_i)$. Ponieważ kombinacje rozwiązań (5.202) też są rozwiązaniami, to można wybrać cztery następujące niezależne rozwiązania rzeczywiste: $e^{-h_1 t} \cos \alpha_1 t$, $e^{-h_1 t} \sin \alpha_1 t$,

$e^{-\lambda_1 t} \cos \alpha_1 t$, $e^{-\lambda_1 t} \sin \alpha_1 t$. Charakteryzują one postacie główne drgań z tłumieniem. Rozwiązania ogólne przyjmują postać:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= e^{-\lambda_1 t} (A_1 \cos \alpha_1 t + A_2 \sin \alpha_1 t) + e^{-\lambda_2 t} (A_3 \cos \alpha_2 t + A_4 \sin \alpha_2 t), \\ \varphi_2 &= e^{-\lambda_1 t} (B_1 \cos \alpha_1 t + B_2 \sin \alpha_1 t) + e^{-\lambda_2 t} (B_3 \cos \alpha_2 t + B_4 \sin \alpha_2 t)\end{aligned}\quad (5.203)$$

Z warunków początkowych: $\varphi_i(t_0) = \varphi_{i0}$, $\dot{\varphi}_i(t_0) = \dot{\varphi}_{i0}$, wyznaczamy cztery niewiadome (pozostałe cztery znajdujemy z równań (5.200)).

Zachęcamy Czytelnika do napisania równań ruchu dla układu z rys. 5.37 dla $c \neq 0$, jak również do wykonania obliczeń szczegółowych po przyjęciu parametrów liczbowych.

5.2.3 Drgania wymuszone

Rozpatrzmy następujący problem często spotykany w technice. Maszyna wirnikowa o masie m_1 jest usadowiona na konstrukcji podpierającej o sztywności k_1 . Wirnik obraca się z pewnym niewyważeniem e , co powoduje powstanie siły odśrodkowej o amplitudzie $P_1 = e\omega^2$ (gdzie ω jest częstością obrotów wirnika) oddziałującej na podparcie. W celu zmniejszenia tych oddziaływań stosuje się tzw. tłumik dynamiczny, składający się z masy m_2 , sztywności k_2 i tłumienia c_2 tak dobranych, aby realizować zerowe lub minimalne amplitudy drgań podparcia (rys. 5.38).

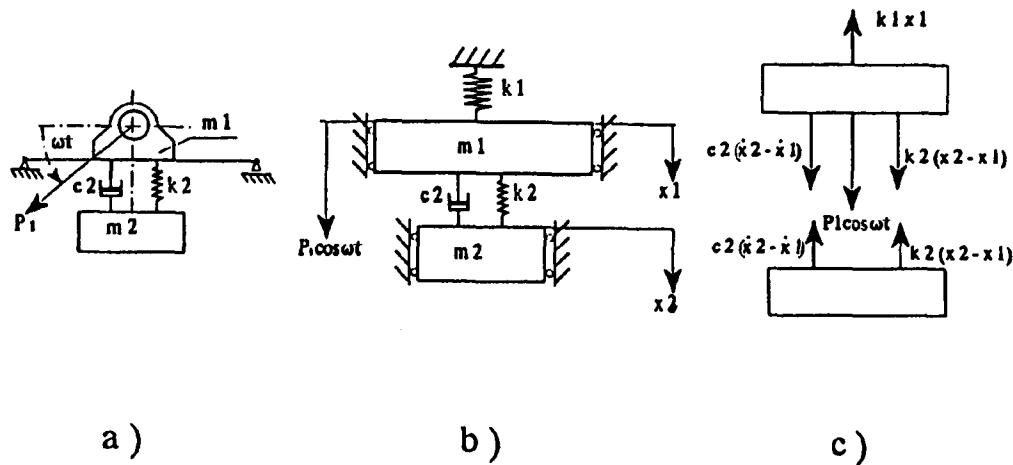
Równania ruchu układu modelowego z rys. 5.38 b) podano poniżej:

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + P_1 \sin \omega t, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2 - x_1) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1).\end{aligned}\quad (5.204)$$

W układzie (5.204) pojawiają się drgania swobodne oraz drgania wymuszone okresowe o częstości wymuszenia ω . Ponieważ pierwsze z nich po pewnym czasie wygasną (wskutek istniejącego tłumienia), to można w przypadku analizy drgań ustalonych ograniczyć się jedynie do rozwiązania szczególnego:

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t = a_1 \sin(\omega t + \beta_1), \\ x_2 &= A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t = a_2 \sin(\omega t + \beta_2).\end{aligned}\quad (5.205)$$

Po podstawieniu (5.205) do (5.204) i przyrównaniu wyrazów stojących przy $\sin \omega t$ i $\cos \omega t$ otrzymujemy układ czterech równań do wyznaczenia czterech niewiadomych A_i , B_i ($i = 1, 2$). Amplitudy drgań a_i oraz kąty przesunięć



Rys. 5.38. Schemat silnika z niewyważonym wirnikiem podpartym na belce o sztywności k_1 i podwieszonym dynamicznym tłumieniem drgań (a); model obliczeniowy jako układ o dwóch stopniach swobody z tłumieniem i wymuszeniem harmonicznym (b); rozkład sił służący do wprowadzenia równań ruchu (c)

fazowych β_i ($i = 1, 2$) na podstawie (5.204) wynoszą:

$$\begin{aligned} a_i &= \sqrt{A_i^2 + B_i^2}, \\ \operatorname{tg} \beta_i &= \frac{B_i}{A_i}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.206)$$

Po wyliczeniach otrzymujemy:

$$\frac{a_1}{P_1} = \left(\frac{(k_2 - m_2 \omega^2)^2 + c_2 \omega^2}{[(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2]^2 + c_2^2 \omega^2 [k_1 - (m_1 + m_2) \omega^2]^2} \right)^{1/2}. \quad (5.207)$$

Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{a_1}{x_{st}} = \frac{a_1}{P_1} k_1, \quad \alpha_1^2 = \frac{k_1}{m_1}, \quad \alpha_2^2 = \frac{k_2}{m_2}, \\ \delta &= \frac{m_2}{m_1}, \quad c_{kr} = 2m_2 \alpha_2, \quad h = \frac{c}{c_{kr}} \end{aligned} \quad (5.208)$$

z równania (5.207) otrzymujemy:

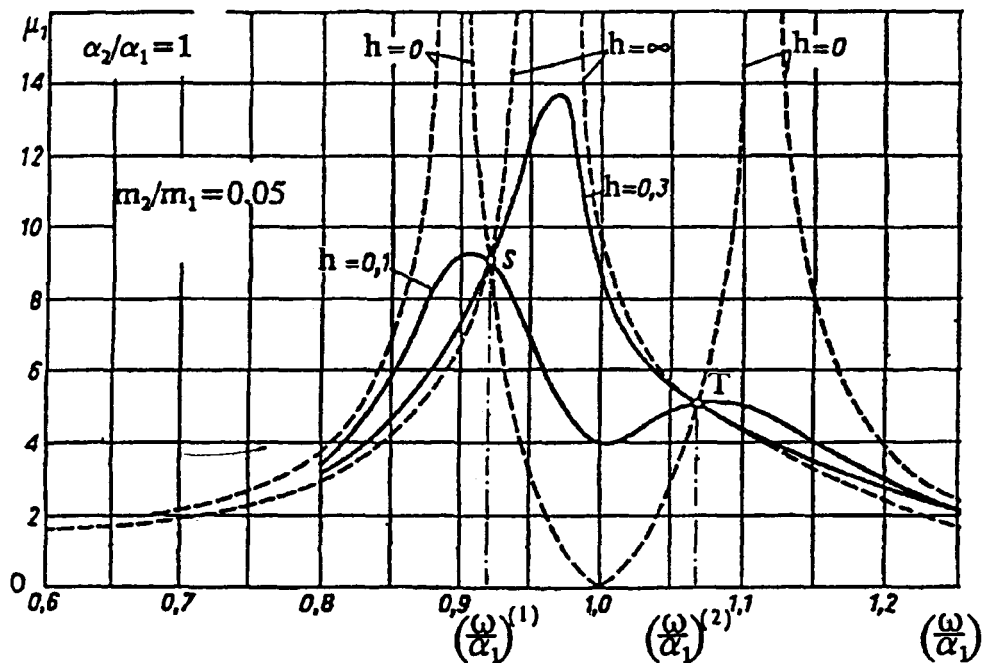
$$\nu = \left(\frac{1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_2}\right)^2 + 2h \frac{\omega^2}{\alpha_2^2}}{\left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_1}\right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_2}\right)^2 - \delta \left(\frac{\omega}{\alpha_1}\right)^2 \right] \right\}^2 + \left(2h \frac{\omega}{\alpha_2} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_1}\right)^2 (1 + \delta) \right]^2} \right)^{1/2}. \quad (5.209)$$

Krzywe rezonansowe wyznaczone w oparciu o równanie (5.208) przedstawiono na rys. 5.39. Z rysunku tego widać, że wszystkie krzywe rezonansowe, niezależnie od tłumienia, przecinają się w dwóch punktach S i T . Oznacza to, że istnieją dwie dyskretne wartości częstości wymuszeń ω (odcięte punktów S i T), dla których amplitudy drgań pomimo zmian współczynnika tłumienia c pozostają bez zmian (zaleca się Czytelnikowi wyznaczenie rzędnych tych punktów).

Bardzo duże tłumienie ($h = \infty$) odpowiada połączeniu sztywnemu obu mas, czyli masie $m = m_1 + m_2$ zawieszanej na sprężynie o sztywności k_1 i wymuszanej harmonicznie i wartość amplitudy drgań może rosnąć do nieskończoności.

Wprawdzie istnieje możliwość całkowitego wygaszenia drgań, ale zachodzi to tylko dla jednej wartości częstości wymuszenia $\omega = \alpha_1$ i dla tłumienia $c = 0$. W praktyce postępuje się więc inaczej. Parametry układu dobiera się w ten sposób, aby styczne w punktach S i T były poziome i aby punkty te miały jednakową rzędną. Aby amplituda nie przekraczała rzędnych tych punktów tłumienie c dobiera się w ten sposób, aby krzywa rezonansowa osiągała maksimum w jednym





Rys. 5.39. Wykres rezonansowy otrzymany na podstawie równań (5.209) dla stałych wartości m_2/m_1 i α_2/α_1

z nich. Całkowita eliminacja drgań w szerokim zakresie zmian częstości jest jednak niemożliwa.

Przedstawiona analiza dotyczy drgań układów o dwóch stopniach swobody z tłumieniem. Otrzymane zależności obowiązują również dla układu bez tłumienia, jeśli przyjąć $c = 0$. W tym przypadku w dwóch punktach odpowiadających częstości wymuszenia równej częstościom drgań własnych, amplituda drgań dąży do nieskończoności.

Przykład 5.6

Dla układu przedstawionego na rys. 5.40 ułożyć równania małych drgań dwóch belek sztywnych o masach m_1 i m_2 , połączonych poprzez sztywności k_1 , k_2 i tłumienie c i wymuszanych siłą pochodzącą od niewyważonego wirnika silnika o masie całkowitej m_3 . Wirnik posiada masę m_0 , niewyważenie e i obraca się z prędkością kątową ω . Pozostałe dane zawiera rysunek.

Jako współrzędne uogólnione przyjmiemy kąty φ_1 i φ_2 zaznaczone na rysunku. Momenty bezwładności B_i dźwigni względem punktów obrotu O_i ($i = 1, 2$) wynoszą odpowiednie:

$$B_1 = \frac{m_1 l^2}{3} + m_3 a^2, \quad B_2 = \frac{m_2 l^2}{3}. \quad (5.210)$$

Pisząc równania momentów sił względem punktów obrotu O_i otrzymujemy (dla małych drgań):

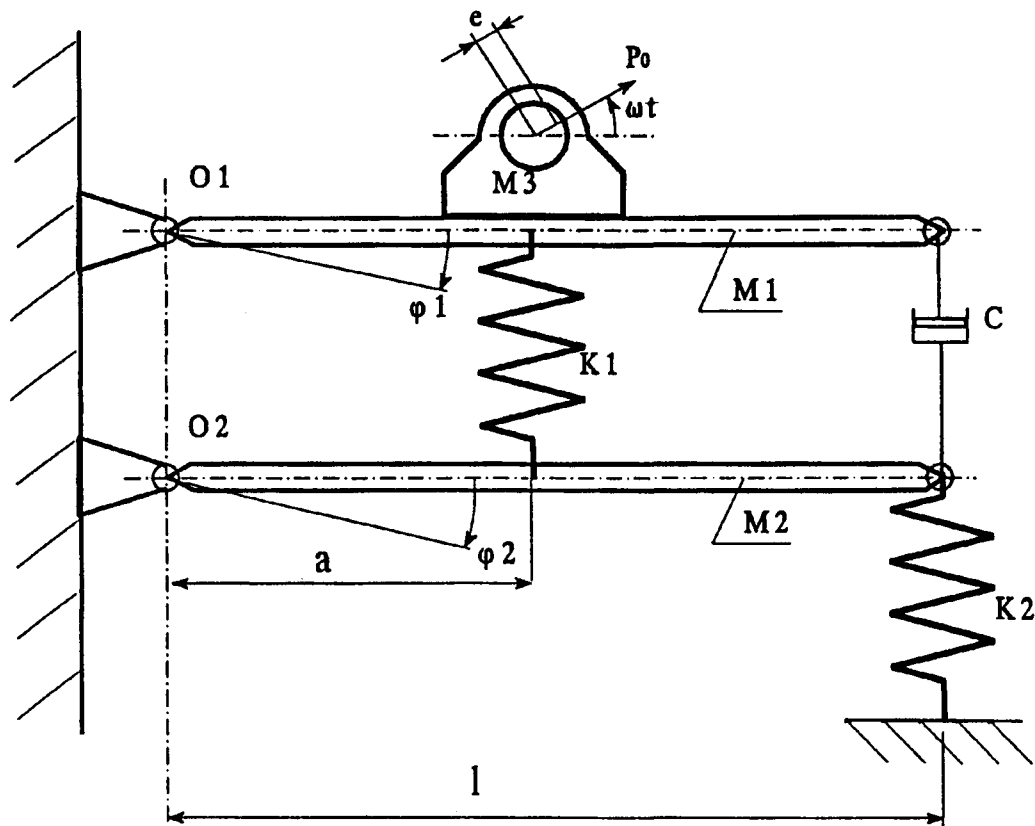
$$\begin{aligned} B_1 \ddot{\varphi}_1 &= -k_1 a^2 (\varphi_1 - \varphi_2) - c l^2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + P_0 a \sin \omega t, \\ B_2 \ddot{\varphi}_2 &= -k_1 a^2 (\varphi_2 - \varphi_1) + k_2 l^2 \varphi_2 - c l^2 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1), \end{aligned} \quad (5.211)$$

gdzie P_0 jest siłą odśrodkową o wartości $P_0 = m_0 e \omega^2$.

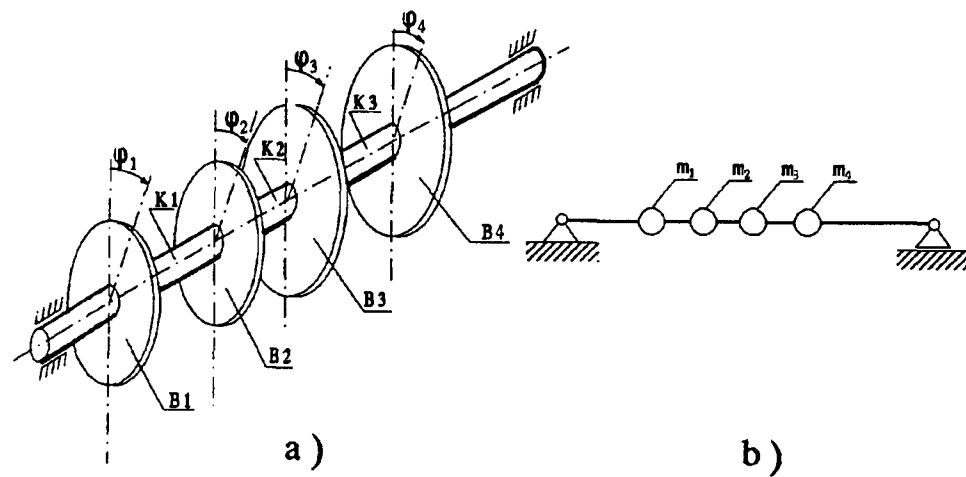
5.3 Wprowadzenie do drgań o wielu stopniach swobody

Ogólna teoria drgań układów liniowych będzie przedstawiona w rozdziale następnym. W tym podrozdziale przedyskutowane zostaną tylko niektóre zagadnienia głównie uwypuklające aspekty spotykane podczas modelowania w technice. W pewnym sensie metody stosowane przy analizie drgań układów o dwóch stopniach swobody mogą być uogólnione również na układy o wielu stopniach swobody.

Bogactwo i różnorodność układów o wielu stopniach swobody występujących w technice uniemożliwia rozpatrzenie wszystkich potencjalnych przypadków. Z



Rys. 5.40. Schemat układu o dwóch stopniach swobody wymuszanych siłą odśrodkową



Rys. 5.41. Drgania skrętne (a) i postępowe (b) układu o czterech stopniach swobody

punktu widzenia rodzajów drgań można wyróżnić układy o drganiach skrętnych, postępowych (rys. 5.41 a, b) lub mieszanych tzn. skrętnych i postępowych.

Na rys. 5.41 a) pokazane zostały cztery cienkie tarcze mogące wykonywać ruchy obrotowe względem osi wału, który jest nieważki, a jego odcinki spełniają rolę sztywności skrętnych. Układy takie mogą modelować maszyny z dużą zmiennością momentu napędowego lub momentu oporu, która jest przyczyną wzbudzenia drgań skrętnych np. maszyn elektrycznych, śrub okrętowych, wałów korbowych silników i sprzęzarek. Wprawdzie układ korbowy np. silnika spaliniowego jest znacznie bardziej skomplikowany od układu z rys. 5.41 a, to jednak da się zastąpić takim modelem.

Układy o ruchu postępowym w kierunku poprzecznym do osi wału mogą być modelowane układami przedstawionymi na rys. 5.41 b. Tarcze lub inne elementy maszynowe mogą być traktowane jako punkty maturalne, a jeśli ich ruchowi postępowemu towarzyszy obrót (układy mieszane), to należy uwzględnić te dodatkowe stopnie swobody. Dotyczy to zwłaszcza wałów z osadzonymi tarczami o dużej średnicy.

Rozpatrzmy bardziej szczegółowo układ z rys. 5.41 a. Przyjmijmy współrzędne uogólnione jako kąty obrotu φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) i w oparciu o drugą zasadę dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego otrzymujemy równania ruchu (moment M_i przyjmujemy jako dodatni, gdy jest on zgodny z założonym kierunkiem φ_i). Równania małych drgań skrętnych mają postać:

$$\begin{aligned} B_1 \ddot{\varphi}_1 &= k_1(\varphi_2 - \varphi_1), \\ B_2 \ddot{\varphi}_2 &= -k_1(\varphi_2 - \varphi_1) + k_2(\varphi_3 - \varphi_2), \\ B_3 \ddot{\varphi}_3 &= -k_2(\varphi_3 - \varphi_2) + k_3(\varphi_4 - \varphi_3), \\ B_4 \ddot{\varphi}_4 &= -k_3(\varphi_4 - \varphi_3). \end{aligned} \quad (5.212)$$

Równania (5.212) opisują drgania własne skrętne układu o czterech stopniach swobody. Postępując analogicznie jak w przypadku diskutowanym w podrozdziale 5.2.1 będziemy poszukiwać rozwiązań o postaci:

$$\varphi_i = \Phi_i \cos \alpha t, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (5.213)$$

po podstawieniu do (5.212) otrzymuje się równanie charakterystyczne:

$$\begin{vmatrix} k_1 - B_1 \alpha^2 & -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & k_1 + k_2 - B_2 \alpha^2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 - B_3 \alpha^2 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 - B_4 \alpha^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.214)$$

Z równania (5.214) wyznaczamy cztery częstości drgań własnych i następnie cztery stosunki amplitud Φ_i , które określają postać drgań odpowiadającą znalezionej częstości. W przypadku wału mającego swobodę ruchu obrotowego jednym z rozwiązań jest $\alpha = 0$. W praktyce pierwiastków równania charakterystycznego poszukujemy za pomocą metod numerycznych.

W podobny sposób możemy dokonać analizy drgań swobodnych z tłumieniem wiskotycznym (patrz podrozdział 5.2.2).

Niech drgania takiego układu opisuje równanie

$$[M]\frac{d^2\{q\}}{dt^2} + [C]\frac{d\{q\}}{dt} + [K]\{q\} = \{0\}. \quad (5.215)$$

Rozwiązań (5.215) będziemy poszukiwać o postaci

$$\{q(t)\} = \{A\}e^{rt}, \quad (5.216)$$

gdzie r jest liczbą zespoloną, oraz $\{A\}$ jest wektorem zespolonym. Często zespolone wartości r nazywamy wykładnikami charakterystycznymi, a wielkości $\pm ir$ - częstościami zespolonymi.

Po podstawieniu (5.216) do (5.215) otrzymujemy równanie charakterystyczne o postaci:

$$\begin{vmatrix} m_{11}r^2 + c_{11}r + k_{11} & m_{12}r^2 + c_{12}r + k_{12} & \dots & m_{1n}r^2 + c_{1n}r + k_{1n} \\ m_{21}r^2 + c_{21}r + k_{21} & m_{22}r^2 + c_{22}r + k_{22} & \dots & m_{2n}r^2 + c_{2n}r + k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1}r^2 + c_{n1}r + k_{n1} & m_{n2}r^2 + c_{n2}r + k_{n2} & \dots & m_{nn}r^2 + c_{nn}r + k_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (5.217)$$

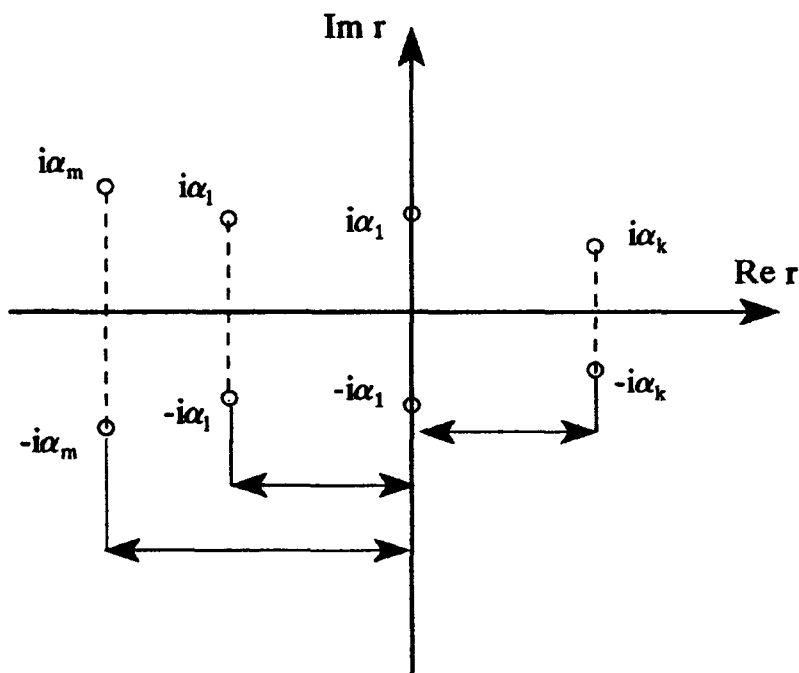
Ponieważ współczynniki równania (5.217) są rzeczywiste, to wykładniki charakterystyczne będą rzeczywiste lub zespolone parami sprzężone. Niech

$$\begin{aligned} r_k &= -h_k + i\alpha_k, \\ r_{k+n} &= -h_k - i\alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.218)$$

gdzie h_k jest współczynnikiem tłumienia ($h_k > 0$), natomiast α_k jest częstością drgań ($\alpha_k > 0$). Przez analogię do rozważań podrozdziału 5.2.2 rozwiązań rzeczywistych układu (5.215) możemy poszukiwać w następującej formie:

$$q_i(t) = \sum_{k=1}^n e^{-h_k t} (u_{ik} \cos \alpha_k t + v_{ik} \sin \alpha_k t), \quad (5.219)$$

gdzie u_{ik} i v_{ik} wyznaczamy z warunków początkowych uwzględniając znajomość ich odpowiednich stosunków. Rozwiązania (5.219) mają charakter drganiowy jeśli $\alpha_k \neq 0$. Dla $h_k = 0$ ($k = 1, \dots, n$) zagadnienie redukuje się do analizy drgań własnych. Jeśli co najmniej jeden z pierwiastków posiada $h_k > 0$, to drgania narastają w czasie. Na koniec jeśli wszystkie $\omega_k = 0$, to ruch układu nie ma charakteru drganiowego. Omówione wyżej możliwe przypadki przedstawiono na rys. 5.42.



Rys. 5.42. Możliwe położenia na płaszczyźnie zespolonej pierwiastków równania charakterystycznego

Przypadek, gdy para pierwiastków przechodzi przez oś urojoną ze zmianą pewnego wybranego parametru kontrolnego wiąże się z tzw. bifurkacją Hopfa.

Ostatni przypadek, który tu omówimy, związany jest z drganiami układów

z tłumieniem i wymuszeniem harmonicznym układów opisanych równaniami:

$$[M] \frac{d^2\{q\}}{dt^2} + [C] \frac{d\{q\}}{dt} + [K]\{q\} = \{F\} \cos \omega t. \quad (5.220)$$

W tym przypadku rozwiązań możemy poszukiwać w postaci

$$\{q(t)\} = \{q_c(t)\} \cos \omega t + \{q_s(t)\} \sin \omega t, \quad (5.221)$$

co po podstawieniu do (5.220) prowadzi do układu równań:

$$\begin{aligned} ([K] - \omega^2[M]) \{q_c\} + \omega[C]\{q_s\} &= \{F\}, \\ -\omega[C]\{q_c\} + ([K] - \omega^2[M]) \{q_s\} &= \{0\}, \end{aligned} \quad (5.222)$$

służących do wyznaczania poszukiwanych wartości $\{q_c\}$ i $\{q_s\}$.

5.4 Podsumowanie i uwagi

W rozdziale tym w sposób systematyczny dokonano analizy drgań liniowych układu o jednym stopniu swobody. Omówione zostały drgania zachowawcze i drgania swobodne z tłumieniem, następnie drgania wymuszone bez tłumienia i z tłumieniem, a na końcu drgania parametryczne. Ponieważ tematyce tej poświęconych jest wiele podręczników, książek czy skryptów uczelnianych to tematyka ta została potraktowana w sposób wybiórczy. Przede wszystkim starano się przedstawić w sposób jasny formalne matematyczne podejście do tej problematyki, często z towarzyszącą możliwą interpretacją mechaniczną. Każdy podrozdział zamyka przykład obliczeniowy z mechaniki, pozwalający na głębsze zrozumienie omawianego zagadnienia i jego interpretację mechaniczną. Starano się ponadto całą problematykę ująć w sposób skrótowy jednak uwzględniający wszystkie jej aspekty. Między innymi zwrócono uwagę na interpretacje geometryczną drgań, na stosowanie zasady superpozycji, na wymuszanie dynamiczne i kinematyczne. W przypadku drgań parametrycznych w sposób poglądowy omówiono równanie Hilla, równanie Meissnera i równanie Mathieu uzupełnione dyskusją dotyczącą granic utraty stateczności.

W układach o dwóch stopniach swobody rozpatrzono drgania własne, drgania swobodne z tłumieniem oraz drgania wymuszone. Dodatkowo przedyskutowane zostały niektóre problemy związane z analizą drgań układów o wielu stopniach swobody.



Rozdział 6

Układy równań różniczkowych liniowych – wprowadzenie do ogólnej teorii drgań

6.1 Układy równań różniczkowych jednorodnych – wiadomości podstawowe

Rozpatrzmy układ równań różniczkowych o postaci

$$\{\dot{y}\} = [P]\{y\}, \quad (6.1)$$

gdzie $[P]$ jest macierzą o wymiarach $n \times n$ i wyrazach p_{ki} , gdzie k oznacza numer wiersza, i oznacza numer kolumny, $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, n$, y jest n -wymiarowym wektorem, a $p_{ik}(t)$ są ciągłymi funkcjami w przedziale $a \leq t \leq b$.

Można dowieść, iż układ (6.1) posiada jedno rozwiązanie ogólne dla zadanych warunków początkowych: $y_1(t_0) = y_1^0, \dots, y_n(t_0) = y_n^0$, gdzie $y_1^0, \dots, y_n^0$ – dowolne liczby.

Twierdzenie

Jeśli mamy m rozwiązań układu (6.1) $y_{k1}, \dots, y_{kn}$ (pierwszy wskaźnik oznacza numer rozwiązania, a drugi numer funkcji w tym rozwiązaniu), gdzie $k = 1, \dots, n$, to i

$$y_l = \sum_{\nu=1}^m C_{\nu} y_{\nu l}, \quad l = 1, \dots, n \quad (6.2)$$

jest rozwiązaniem przy dowolnych stałych $C_1, \dots, C_m$.

Koniecznym warunkiem liniowej niezależności rozwiązań jest aby wyznacznik Wronskiego



$$W(t) = \begin{vmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6.3)$$

Jeśli $W(t_0) = 0$, ($a \leq t_0 \leq b$) i $y_{k1}, \dots, y_{kn}$, $k = 1, \dots, n$ są rozwiązaniami (6.1), to rozwiązania są liniowo zależne.

Koniecznym i dostatecznym warunkiem na to, aby rozwiązania $y_{k1}, \dots, y_{kn}$, $k = 1, \dots, n$ były liniowo niezależne jest by w dowolnym punkcie t_0 spełniony był warunek $W(t_0) \neq 0$, wówczas przy tym założeniu będzie zachodzić również $W(t) \neq 0$.

Pokażemy, że układ (6.1) ma n rozwiązań szczególnych liniowo niezależnych. Na podstawie twierdzenia Picarda istnieje rozwiązanie układu (6.1) spełniające warunek $y_k(t) \rightarrow y_k(t_0)$.

Weźmy n rozwiązań $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ i niech każde z nich spełnia poniższe warunki początkowe:

$$\begin{array}{ccccc} & y_1(t_0) = y_1^0 & y_2(t_0) = y_2^0 & \dots & y_n(t_0) = y_n^0 \\ y^{(1)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ y^{(2)} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ y^{(n)} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \quad (6.4)$$

Wrońskian

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (6.5)$$

Rozwiązania te będą liniowo niezależnymi dla $a \leq t \leq b$.

Istnieje nieskończenie wiele rozwiązań liniowo niezależnych, dla których $W(t_0) \neq 0$.

Zbiór dowolnych liniowo niezależnych rozwiązań $y_{k1}, \dots, y_{kn}$, $k = 1, \dots, n$ nazywamy układem fundamentalnym rozwiązań.

Twierdzenie

Jeśli rozwiązanie $y_{k1}, \dots, y_{kn}$, $k = 1, \dots, n$ są liniowo niezależne, to

$$y_k = \sum_{\nu=1}^n C_{\nu} y_{\nu k}, \quad k = 1, \dots, n \quad (6.6)$$

jest rozwiązaniem ogólnym.

Wzór Ostrogradskiego-Liouville'a

Policzmy pochodną wyznacznika Wronskiego

$$\dot{W}(t) = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} y_{11} & \dots & \dot{y}_{1k} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_{n1} & \dots & \dot{y}_{nk} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}. \quad (6.7)$$

Podstawiając $\dot{y}_{1k}, \dots, \dot{y}_{nk}$ do (6.1) mamy

$$\begin{aligned} \dot{y}_{1k} &= p_{k1}y_{11} + \dots + p_{kk}y_{1k} + \dots + p_{kn}y_{1n} \\ &\vdots \\ \dot{y}_{nk} &= p_{k1}y_{n1} + \dots + p_{kk}y_{nk} + \dots + p_{kn}y_{nn}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Uwzględniając (6.8) w (6.7) można zauważyć, że n -ta kolumna wyraża się sumami (6.8). Otrzymany wyznacznik jest sumą n wyznaczników, kolumny których tworzą kolejne wyrazy prawych stron (6.8). Wszystkie takie wyznaczniki będą równe zero bo zawsze dwie kolumny są jednakowe z dokładnością do stałych współczynników, przez które jedna z nich jest pomnożona. Tylko jeden z tych wyznaczników, a mianowicie, taki gdzie zamiast kolumny $\dot{y}_{1k}, \dots, \dot{y}_{nk}$ stoi kolumna $p_{k1}y_{1k}, \dots, p_{kn}y_{nk}$ jest różny od zera. Wobec tego wartość takiego wyznacznika wynosi $p_{kk} \cdot W(t)$.

Wracając do (6.7) mamy

$$\dot{W}(t) = \sum_{k=1}^n p_{kk}(t)W(t) = W(t) \sum_{k=1}^n p_{kk}(t). \quad (6.9)$$

Z (6.9) mamy

$$\frac{\dot{W}(t)}{W(t)} = \sum_{k=1}^n p_{kk}(t). \quad (6.10)$$

Całkując obie strony (6.10) otrzymujemy:

$$W(t) = C e^{\int_{t_0}^t \sum_{k=1}^n p_{kk}(t) dt} = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \sum_{k=1}^n p_{kk}(t) dt}, \quad (6.11)$$

bo $W(t_0) = C$.

Otrzymujemy wzór Ostrogradskiego-Liouville'a, w którym wartość $W(t)$ nie zależy od wyboru rozwiązań $y_{k1}, \dots, y_{kn}$, $k = 1, \dots, n$.



6.2 Układy równań różniczkowych niejednorodnych

Rozpatrzmy układ

$$\dot{y}_k = \sum_{i=1}^n p_{ki}(t)y_i + f_k(t) = L_k(y) + f_k(t). \quad (6.12)$$

Funkcje $p_{ki}(t)$ i $f_k(t)$ są ciągłymi w przedziale $a \leq t \leq b$ i zgodnie z twierdzeniem Picarda zapewniają istnienie rozwiązania zadania Cauchy'ego przy dowolnych skończonych wartościach warunków początkowych $y_k(t_0) = y_k^0$.

Twierdzenie

Niech $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ będzie rozwiązaniem szczególnym układu (6.12), tj.

$$\dot{\bar{y}}_k = L_k(\bar{y}) + f_k(t), \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.13)$$

Rozwiązanie ogólne układu (6.12) ma postać:

$$y_k = z_k(t) + \bar{y}_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.14)$$

gdzie: $z = (z_1(t), \dots, z_n(t))$ jest rozwiązaniem ogólnym układu jednorodnego odpowiadającego (6.12).

Dowód

Podstawiając (6.14) do (6.12) otrzymujemy:

$$\dot{z}_k(t) + \dot{\bar{y}}_k(t) = L_k(z) + L_k(\bar{y}) + f_k(t), \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.15)$$

Uwzględniając (6.13) w (6.12) mamy:

$$\dot{z}_k(t) = L_k(z) \quad (6.16)$$

c.n.d

Rozwiązanie szczególne układu (6.12) można wyznaczyć metodą Lagrange'a, jeśli tylko mamy układ fundamentalny rozwiązań układu jednorodnego odpowiadającego układowi (6.12).

Założmy, że dysponujemy układem (bazą) fundamentalnych rozwiązań o postaci

$$z_{il}, \dots, z_{in}, \quad l = 1, \dots, n. \quad (6.17)$$

Wobec tego rozwiązaniem ogólnym (6.16) jest



$$z_k = \sum_{\nu=1}^n C_{\nu} z_{\nu k}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.18)$$

Różniczkując (6.18) i po uwzględnieniu, że $\dot{z}_k = L_k(z)$ mamy:

$$\sum_{\nu=1}^n C_{\nu} \dot{z}_{\nu k} = L_k(z), \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.19)$$

Poszukajmy rozwiązań (6.12) o postaci

$$y_k = \sum_{\nu=1}^n C_{\nu}(t) z_{\nu k}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.20)$$

gdzie $C_1(t), \dots, C_n(t)$ są nieznanymi funkcjami czasu.

Różniczkując (6.20) mamy:

$$\dot{y}_k = \sum_{\nu=1}^n \dot{C}_{\nu}(t) z_{\nu k} + \sum_{\nu=1}^n C_{\nu}(t) \dot{z}_{\nu k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.21)$$

Podstawiając (6.21) do (6.12) mamy:

$$\sum_{\nu=1}^n \dot{C}_{\nu}(t) z_{\nu k} + \sum_{\nu=1}^n C_{\nu}(t) \dot{z}_{\nu k} = L_k(z) + f_k(t). \quad (6.22)$$

Ponieważ zgodnie z (6.19) $L_k(z) = \sum_{\nu=1}^n C_{\nu}(t) \dot{z}_{\nu k}$, to

$$\sum_{\nu=1}^n \dot{C}_{\nu}(t) z_{\nu k} = f_k(t). \quad (6.23)$$

Ponieważ $z_{l1}, \dots, z_{ln}$, $l = 1, \dots, n$ jest układem fundamentalnym, to wyznacznik główny układu (6.23) jest różny od zera. Wobec tego z (6.23) znajdujemy

$$\dot{C}_k(t) = \Phi_k(t), \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.24)$$

6.3 Układy równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach

Rozpatrzmy układ równań o postaci:

$$\dot{y}_k = \sum_{i=1}^n p_{ki} y_i, \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.25)$$

gdzie p_{ki} są stałymi rzeczywistymi.

Będziemy poszukiwać rozwiązań o postaci:

$$y_k = a_k e^{\lambda t}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.26)$$

gdzie a_k i λ są stałymi rzeczywistymi.

Po podstawieniu (6.26) do (6.25) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (p_{11} - \lambda)a_1 + p_{12}a_2 + \dots + p_{1n}a_n &= 0 \\ \vdots \\ p_{n1}a_1 + \dots + (p_{nn} - \lambda)a_n &= 0. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Aby istniało rozwiązanie niezerowe $a_1, \dots, a_n$, to wyznacznik główny układu (6.26) musi być równy zeru, czyli

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (6.28)$$

Wobec tego λ musi być wartością własną macierzy

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} - \lambda & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} - \lambda \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Jeśli $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są różnymi między sobą i rzeczywistymi pierwiastkami równania (6.28), to z równań (6.26) można wyznaczyć stałe $a_1, \dots, a_n$.

Dla takich pierwiastków otrzymamy n rozwiązań:

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= (a_1^{(1)} e^{\lambda_1 t}, a_2^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \dots, a_n^{(1)} e^{\lambda_1 t}), \\ y^{(2)} &= (a_1^{(2)} e^{\lambda_2 t}, a_2^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \dots, a_n^{(2)} e^{\lambda_2 t}), \\ \vdots \\ y^{(n)} &= (a_1^{(n)} e^{\lambda_n t}, a_2^{(n)} e^{\lambda_n t}, \dots, a_n^{(n)} e^{\lambda_n t}). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Można dowieść, że rozwiązania te są liniowo niezależne. Rozwiązanie ogólne układu (6.25) ma postać

$$y_k = \sum_{\nu=1}^n C_\nu a_k^{(\nu)} e^{\lambda_\nu t}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.31)$$

Uwaga: Jeśli λ jest pierwiastkiem charakterystycznym wielokrotnym jednorodnego liniowego równania n -tego rzędu ze stałymi współczynnikami, to można przewidzieć jego postać rozwiązania.

W przypadku układu (6.25) nie można tego zrobić. Zależy to bowiem od kanonicznej macierzy Jordana odpowiadającej macierz P .

Jeżeli $y_k = u_k + iv_k$ jest rozwiązaniem zespolonym układu (6.25), to funkcje rzeczywiste $u = (u_1, \dots, u_n)$ i $v = (v_1, \dots, v_n)$ są rozwiązaniami tego układu.

Rozpatrzmy układ n -liniowych równań ze stałymi współczynnikami, który w zapisie wektorowym ma postać:

$$\{\dot{y}\} = [P]\{y\}, \quad (6.32)$$

gdzie

$$y = (y_1, \dots, y_n), \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}, \quad (6.33)$$

lub inaczej:

$$\dot{y}_k = \sum_{\nu=1}^n y_{\nu} p_{\nu k}. \quad (6.34)$$

Jak wiadomo z algebry istnieje pewna stała nieosobliwa macierz S

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

taka, że

$$SPS^{-1} = J, \quad J = [J\rho_1(\lambda_1), \dots, J\rho_m(\lambda_m)], \quad (6.36)$$

gdzie $J\rho$ jest kanoniczną quasidiagonalną macierzą Jordana o postaci:

$$J\rho(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{bmatrix}, \quad (6.37)$$

gdzie $J\rho$ jest macierzą o wymiarach $\rho \times \rho$, tzn. klatką Jordana.

Wartości λ są pierwiastkami równania

$$D(P - \lambda I) = 0, \quad (6.38)$$

przy czym wśród pierwiastków $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mogą być wielokrotne. Wymiar macierzy J wynosi $\rho_1 + \dots + \rho_m = n$ ($m \leq n$), bo niektóre z pierwiastków są krotne.

Niech

$$y = xS \quad (y_k = \sum_{\nu=1}^n x_{\nu} s_{\nu k}). \quad (6.39)$$

Różniczkując (6.39) po uwzględnieniu (6.32) mamy:

$$\dot{y} = \dot{x}S = yP = xSP, \quad (6.40)$$

a z tego wynika:

$$\dot{x} = xSPS^{-1}. \quad (6.41)$$

Czyli po uwzględnieniu (6.36) otrzymujemy

$$\dot{x} = xJ. \quad (6.42)$$

Niech A_m i A_n będą macierzami o wymiarach „ m ” i „ n ” i A jest quasi-diagonalną macierzą o wymiarze $m + n$, tzn. $(A = [A_m, A_n])$. Wektor $x = (x_1, \dots, x_{m+n})$ o wymiarze $m + n$ można przedstawić w postaci $x = (x^{(m)}, x^{(n)})$, gdzie:

$$x^{(m)} = (x_1, \dots, x_m), \quad x^{(n)} = (x_{m+1}, \dots, x_{m+n}). \quad (6.43)$$

Wobec powyższego

$$xA = (x^{(m)}, x^{(n)}) [A_m, A_n] = (x^{(m)} A_m, x^{(n)} A_n). \quad (6.44)$$

Niech $u = (u_1, \dots, u_m)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ są wektorami, Q_m oraz R_n – macierzami o wymiarach odpowiednio m i n . Utwórzmy wektor $w = (u, v)$ i quasidiagonalną macierz $B = [Q_m, R_n]$. Rozpatrzmy układ równań różniczkowych

$$\dot{w} = wB, \quad (6.45)$$

lub inaczej

$$\dot{w} = (u, v)[Q_m, R_n] = (uQ_m, vR_n) = (\dot{u}, \dot{v}). \quad (6.46)$$

Z powyższej równości otrzymujemy:

$$\dot{u} = uQ_m \quad \text{ i } \quad \dot{v} = vR_n . \quad (6.47)$$

Rozwiązaniem układu (6.45) będzie:

$$w = (u, v) , \quad (6.48)$$

jak również $w = (u, 0)$ i $w = (0, v)$.

Wróćmy teraz do układu (6.42). Ze względu na postać macierzy J wektor x przedstawimy w postaci:

$$x = (x^{(\rho_1)}, \dots, x^{(\rho_m)}) , \quad (6.49)$$

gdzie $x^{(\rho)}$ – wektor o wymiarze ρ :

$$x^{(\rho)} = (x_1^{(\rho)}, \dots, x_\rho^{(\rho)}) . \quad (6.50)$$

Równanie (6.42) można zatem przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} (\dot{x}^{(\rho_1)}, \dots, \dot{x}^{(\rho_m)}) &= (x^{(\rho_1)}, \dots, x^{(\rho_m)}) [J_{\rho_1}(\lambda_1), \dots, J_{\rho_m}(\lambda_m)] = \\ &= [x^{(\rho_1)} J_{\rho_1}(\lambda_1), \dots, x^{(\rho_m)} J_{\rho_m}(\lambda_m)] , \end{aligned} \quad (6.51)$$

gdzie wśród wartości własnych $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ mogą być równe między sobą.

Układ (6.51) rozkłada się na m podukładów:

$$\dot{x}^{(\rho_k)} = x^{(\rho_k)} J_{\rho_k}(\lambda_k) , \quad k = 1, \dots, m . \quad (6.52)$$

Rozwiązaniami układu (6.52) są wektory

$$\begin{aligned} x &= (x^{(\rho_1)}, 0, \dots, 0) , \\ x &= (0, x^{(\rho_2)}, \dots, 0) , \\ &\vdots \\ x &= (0, 0, \dots, x^{(\rho_m)}) , \end{aligned} \quad (6.53)$$

a również wektor

$$x = (x^{(\rho_1)}, x^{(\rho_2)}, \dots, x^{(\rho_m)}) . \quad (6.54)$$

Każdy podukład układu (6.52) ma postać:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(\rho)} &= x^{(\rho)} J_\rho(\lambda) , \quad x^{(\rho)} = (x_1^{(\rho)}, \dots, x_\rho^{(\rho)}) , \\ \rho &= \rho_1, \dots, \rho_m , \quad \lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_m . \end{aligned} \quad (6.55)$$

Biorąc pod uwagę (6.37) równania (6.55) mają formę:

$$(\dot{x}_1^{(\rho)}, \dots, \dot{x}_\rho^{(\rho)}) = (x_1^{(\rho)}, \dots, x_\rho^{(\rho)}) \overbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \ddots \\ & & \lambda \end{bmatrix}}^{\rho}. \quad (6.56)$$

Z równości między ρ współzrędnymi otrzymujemy ρ równań o postaci:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^{(\rho)} &= \lambda x_1^{(\rho)} + x_2^{(\rho)}, & \rho &= \rho_1, \dots, \rho_m \\ \dot{x}_2^{(\rho)} &= \lambda x_2^{(\rho)} + x_3^{(\rho)}, & \lambda &= \lambda_1, \dots, \lambda_m \\ &\vdots \\ \dot{x}_{\rho-1}^{(\rho)} &= \lambda x_{\rho-1}^{(\rho)} + x_\rho^{(\rho)}, \\ \dot{x}_\rho^{(\rho)} &= \lambda x_\rho^{(\rho)}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Poszukajmy rozwiązania układu (6.57) o postaci:

$$x_k^{(\rho)} = u_k e^{\lambda t}. \quad (6.58)$$

Wobec tego

$$\dot{x}_k^{(\rho)} = x_k^{(\rho)} \lambda + x_{k+1}^{(\rho)}. \quad (6.59)$$

Po uwzględnieniu (6.56) w (6.59) mamy:

$$\dot{u}_k e^{\lambda t} + \lambda u_k e^{\lambda t} = \lambda u_k e^{\lambda t} + u_{k+1} e^{\lambda t}, \quad (6.60)$$

czyli $\dot{u}_k = u_{k+1}$, dla $k+1 = \rho$.

Natomiast ponieważ

$$x_\rho^{(\rho)} = \lambda x_\rho^{(\rho)} \quad \text{i} \quad x_\rho^{(\rho)} = u_\rho e^{\lambda t}, \quad (6.61)$$

to

$$\dot{u}_\rho e^{\lambda t} + u_\rho \lambda e^{\lambda t} = \lambda u_\rho e^{\lambda t}, \quad \text{czyli} \quad \dot{u}_\rho = 0. \quad (6.62)$$

Tak więc mamy do rozwiązania układ równań o postaci:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= u_3 \\ &\vdots \\ \dot{u}_{\rho-1} &= u_\rho \\ \dot{u}_\rho &= 0. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Poczynając od ostatniego równania układu (6.63) mamy po scałkowaniu:

$$\begin{aligned} u_\rho &= C_\rho, \\ \dot{u}_{\rho-1} &= u_\rho = C_\rho, \end{aligned} \quad (6.64)$$

a wobec tego:

$$\begin{aligned} u_{\rho-1} &= C_\rho t + C_{\rho-1}, \\ &\vdots \\ u_1 &= C_\rho \frac{t^{\rho-1}}{(\rho-1)!} + C_{\rho-1} \frac{t^{\rho-2}}{(\rho-2)!} + \dots + C_2 t + C_1. \end{aligned} \quad (6.65)$$

Wracając do układu (6.18) mamy:

$$\begin{aligned} x_1^{(\rho)} &= u_1 e^{\lambda t} = \left(C_\rho \frac{t^{\rho-1}}{(\rho-1)!} + C_{\rho-1} \frac{t^{\rho-2}}{(\rho-2)!} + \dots + C_2 t + C_1 \right) e^{\lambda t}, \\ x_2^{(\rho)} &= u_2 e^{\lambda t} = \left(C_\rho \frac{t^{\rho-2}}{(\rho-2)!} + C_{\rho-1} \frac{t^{\rho-3}}{(\rho-3)!} + \dots + C_3 t + C_2 \right) e^{\lambda t}, \\ &\vdots \\ x_{\rho-2}^{(\rho)} &= u_{\rho-2} e^{\lambda t} = \left(C_\rho \frac{t^2}{2!} + C_{\rho-1} \frac{t}{1!} + C_{\rho-2} \right) e^{\lambda t}, \\ x_{\rho-1}^{(\rho)} &= u_{\rho-1} e^{\lambda t} = (C_\rho t + C_{\rho-1}) e^{\lambda t}, \\ x_\rho^{(\rho)} &= C_\rho e^{\lambda t}, \end{aligned} \quad (6.66)$$

gdzie $\rho = \rho_1, \dots, \rho_m$, $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_m$, a $C_1, \dots, C_\rho$ są stałymi określonymi przez warunki początkowe. Zatem poszukiwane rozwiązanie ma postać $x^{(\rho)} = (x_1^{(\rho)}, \dots, x_\rho^{(\rho)})$.

Z postaci rozwiązań (6.66) można otrzymać układ ρ -liniowo niezależnych rozwiązań układu (6.55).

Podstawiając $C_1 = 1$, a pozostałe stałe $C_k = 0$, mamy:

$$\begin{aligned} x_1^{(\rho)} &= 1 \cdot e^{\lambda t}, \\ x_2^{(\rho)} &= 0, \\ &\vdots \\ x_{\rho-1}^{(\rho)} &= 0, \\ x_\rho^{(\rho)} &= 0, \end{aligned} \quad , \quad x^{(\rho)} = (1, 0, \dots, 0) e^{\lambda t}. \quad (6.67)$$

Podstawiając $C_2 = 1$, a pozostałe stałe równe zeru, mamy:

$$\begin{aligned} x_1^{(\rho)} &= te^{\lambda t}, \\ x_2^{(\rho)} &= 1 \cdot e^{\lambda t}, \\ &\vdots, \\ x_{\rho-1}^{(\rho)} &= 0, \\ x_{\rho}^{(\rho)} &= 0, \end{aligned} \quad x^{(\rho)} = (t, 1, \dots, 0, 0)e^{\lambda t}. \quad (6.68)$$

Podstawiając $C_3 = 1$, a pozostałe stałe równe zeru, mamy:

$$\begin{aligned} x_1^{(\rho)} &= \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}, \\ x_2^{(\rho)} &= te^{\lambda t}, \\ x_3^{(\rho)} &= 1 \cdot e^{\lambda t}, \\ &\vdots, \\ x_{\rho-1}^{(\rho)} &= 0, \\ x_{\rho}^{(\rho)} &= 0, \end{aligned} \quad x^{(\rho)} = \left(\frac{t^2}{2!}, t, 1, \dots, 0 \right) e^{\lambda t}. \quad (6.69)$$

Podstawiając $C_{\rho} = 1$, a pozostałe stałe równe zeru, mamy:

$$\begin{aligned} x_1^{(\rho)} &= \frac{t^{\rho-1}}{(\rho-1)!}e^{\lambda t}, \\ x_2^{(\rho)} &= \frac{t^{\rho-2}}{(\rho-2)!}e^{\lambda t}, \\ &\vdots, \\ x_{\rho-1}^{(\rho)} &= te^{\lambda t}, \\ x_{\rho}^{(\rho)} &= 1, \end{aligned} \quad x^{(\rho)} = \left(\frac{t^{\rho-1}}{(\rho-1)!}, \frac{t^{\rho-2}}{(\rho-2)!}, \dots, t, 1 \right) e^{\lambda t}. \quad (6.70)$$

Macierz tych rozwiązań ma postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \frac{t^{\rho-1}}{(\rho-1)!} & & & & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda t} = \bar{x}_{\rho}. \quad (6.71)$$

Podstawiając $\rho = \rho_1, \dots, \rho_m$ oraz $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_m$ otrzymamy układ fundamentalny n liniowo niezależnych rozwiązań dla całego układu równań (6.53). Można go przedstawić w postaci quasidiagonalnej macierzy:

$$\bar{x} = [\bar{x}_{\rho_1}, \dots, \bar{x}_{\rho_m}]. \quad (6.72)$$

Fundamentalny układ rozwiązań równania (6.32) otrzymamy z (6.39)

$$Y = \bar{x}S. \quad (6.73)$$

Wyznacznik macierzy trójkątnej typu (6.71) jest równy iloczynowi wyrazów leżących na głównej przekątnej, wobec tego wyznacznik

$$\det(\bar{x}) = e^{\sum_{k=1}^m \lambda_k \rho_k t}. \quad (6.74)$$

Zgodnie z (6.73) mamy:

$$D(Y) = D(\bar{x}) \cdot D(S) = e^{\sum_{k=1}^m \lambda_k \rho_k t} D(S) \neq 0. \quad (6.75)$$

Jeśli wśród pierwiastków $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ są zespolone $\lambda = a + ib$, $\bar{\lambda} = a - ib$, to i macierz S będzie zespoloną. Ponieważ macierz P jest macierzą rzeczywistą, to zawsze jednemu pierwiastkowi zespolonemu towarzyszy zespolony sprzężony. Im odpowiadają jednakowe macierze $\bar{x}_p$. Wobec tego, ponieważ $Y = \bar{x}S$, to układ fundamentalny rozwiązań też będzie macierzą zespoloną. Zapiszmy wiersz rozwiązania w postaci $y_k = u_k(t) + iv_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, to $u = (u_1, \dots, u_n)$ oraz $v = (v_1, \dots, v_n)$ będą rozwiązaniami, gdzie u i v są wektorami rzeczywistymi. Przy czym jeśli $y_k = \varphi_k(t)e^{\lambda t}$, gdzie $\varphi_k(t)$ – wielomian, to $u = \psi_k(t)e^{at} \cos bt$ i $v = \psi_k(t)e^{at} \sin bt$.

Rozwiązanie ogólne otrzymamy ze wzoru $y_k = \sum_{\nu=1}^n C_\nu y_{\nu k}$, $k = 1, \dots, n$. Wartości n stałych C_ν otrzymamy z rzeczywistych warunków początkowych $y_k(t_0) = y_k^0$, stałe te są takie, że w efekcie otrzymamy rzeczywiste rozwiązanie. W rozwiązaniach tych znikną człony urojone – będą one równe zeru.

Rozwiązanie ogólne otrzymać można od razu w postaci analogicznej do (6.73)

$$y = xS = (x^{(\rho_1)}, \dots, x^{(\rho_m)}) S, \quad (6.76)$$

gdzie $(x^{(\rho_1)}, \dots, x^{(\rho_m)})$ – są wektorami będącymi rozwiązaniami układu (6.57) w postaci (6.57). Każdy z wektorów $x^{(\rho_k)}$ ($k = 1, \dots, n$) zawiera ρ_k stałych dowolnych $C_1^{(\rho_k)}, \dots, C_{\rho_k}^{(\rho_k)}$. Wszystkich ich będzie n . Mnożąc skalarnie wektor $(x^{(\rho_1)}, \dots, x^{(\rho_m)})$ przez wektory – kolumny macierzy S , otrzymamy składowe wektora $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Rozpatrzmy układ

$$\dot{Y} = YP, \quad (6.77)$$

gdzie P jest stałą macierzą o wymiarze $n \times n$, a Y jest macierzą złożoną z n wierszy będących rozwiązaniami.

Jeśli Y_1 jest macierzą fundamentalną rozwiązań, to przy dowolnej stałej macierzy A

$$Y = AY_1, \quad (6.78)$$

jest też fundamentalną macierzą rozwiązań.

Podstawiając (6.78) do (6.77) mamy:

$$A\dot{Y}_1 = AY_1P = A(\dot{Y}_1 - Y_1P) = 0, \quad (6.79)$$

bo $\dot{Y}_1 = Y_1P$.

Rozwiązaniem (6.77) jest

$$Y = e^{Pt}, \quad (6.80)$$

i Y jest fundamentalną macierzą rozwiązań. Jeśli

$$P = S^{-1}JS, \quad J = [J_{\rho_1}(\lambda_1), \dots, J_{\rho_m}(\lambda_m)], \quad (6.81)$$

to

$$Y = e^{S^{-1}JSt} = I + \frac{S^{-1}JSt}{1} + \frac{(S^{-1}JSt)^2}{2!} + \dots \quad (6.82)$$

Ponieważ

$$(S^{-1}JSt)^2 = (S^{-1}J \underbrace{SS^{-1}} JS) t^2 = (S^{-1}J^2S) t^2, \quad (6.83)$$

ogólnie

$$(S^{-1}JSt)^n = (S^{-1}J^nS) t^n, \quad (6.84)$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} Y &= I + \frac{(S^{-1}JS)t}{1} + \frac{(S^{-1}J^2S)t^2}{2!} + \dots + \frac{(S^{-1}J^nS)t^n}{n!} = \\ &= I + \frac{S^{-1}(Jt)S}{1} + \frac{S^{-1}(J^2t)S}{2!} + \dots + \frac{S^{-1}(J^n t^n)S}{n!} = S^{-1}e^{Jt}S. \end{aligned} \quad (6.85)$$

Zgodnie z (6.78) dla $A = S$ rozwiązaniem będzie

$$SY = \underbrace{SS^{-1}} e^{Jt}S = e^{Jt}S. \quad (6.86)$$



Macierz $e^{Jt}S$ stanowi fundamentalny układ rozwiązań, ponieważ $\det(e^{J_0}S) = D(S) \neq 0$, co wynika z założenia o nieosobliwości macierzy S .

Rozpatrzmy macierz $Z = e^{Jt}$. Ponieważ $J^k = [J_{\rho_1}^k(\lambda_1), \dots, J_{\rho_m}^k(\lambda_m)]$, (mnożymy przez siebie k macierzy quasideagonalnych o jednakowej strukturze)

$$Z = e^{Jt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t^k}{k!} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{\rho_1}^k t^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{\rho_m}^k t^k}{k!} \right] = \begin{bmatrix} e^{J_{\rho_1} t} & \dots & e^{J_{\rho_m} t} \end{bmatrix}. \quad (6.87)$$

Z powyższego widać, że macierz Z jest quasideagonalną macierzą z elementami macierzowymi $e^{J_{\rho}(\lambda)t}$.

Macierz

$$e^{J_{\rho}(\lambda)t} = e^{(J_{\rho}(0) + \lambda I_{\rho})t} = e^{J_{\rho}(0)t + \lambda I_{\rho}t} = e^{J_{\rho}(0)t} e^{\lambda t}. \quad (6.88)$$

Zauważmy, że

$$J_{\rho}(0) = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \end{bmatrix}}^{\rho}. \quad (6.89)$$

Niech stopień klatki Jordana $\rho = 4$. Obliczmy potęgę macierzy $J_4^k(0)$, dla $k = 0, 1, 2, 3, 4$

$$J_4^0(0) = 1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_4^1(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_4^2(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_4^3(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_4^4(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.90)$$

Dzięki powyższemu przykładowi widać, że

$$J_\rho^k(0) = [a_{\nu l}], \quad \text{gdzie: } a_{\nu l} = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \nu \neq l+k \\ 1, & \text{jeśli } \nu = l+k, \end{cases} \quad (6.91)$$

gdzie ilość wierszy $l+k=\rho$.

Potęgowanie macierzy od $k=0$ do $k=\rho-1$ powoduje przesuwanie diagonalnej składającej się z samych jedynek w dół aż do wartości $k=\rho-1$, jedynym wyrazem niezerowym jest $a_{\rho 1}=1$ (pozostałe są zerami). Potęgi macierzy $J_\rho^k(0)$ dla $k \geq \rho$ dają macierze zerowe.

Zatem

$$e^{J_\rho(0)t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_\rho^k(0)t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\rho-1} \frac{J_\rho^k(0)t^k}{k!}, \quad (6.92)$$

$$e^{J_\rho(\lambda)t} = e^{\lambda t} e^{J_\rho(0)t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & \dots & 0 \\ te^{\lambda t} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{\rho-1}}{(\rho-1)!}e^{\lambda t} & \dots & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{bmatrix}. \quad (6.93)$$

Zgodnie z (6.86) (6.87), fundamentalny układ równań ma postać

$$\left[e^{J\rho_1(\lambda_1)t}, e^{J\rho_2(\lambda_2)t}, \dots, e^{J\rho_m(\lambda_m)t} \right] S. \quad (6.94)$$

Równanie charakterystyczne (6.28) stopnia n ma n pierwiastków (zwanymi pierwiastkami charakterystycznymi lub wartościami własnymi macierzy P), przy czym macierz P została sprowadzona do postaci quasi-diagonalnej Jordana przez przekształcenie (6.36) z m klatkami Jordana o postaci (6.37). Każdemu pierwiastkowi charakterystycznemu λ_p o krotności γ_p odpowiada jedna lub kilka klatek np. "a" klatek Jordana o wymiarach $\rho_p^{(1)} + \dots + \rho_p^{(a)} = \gamma_p$. Stała a zwana stopniem degeneracji rozważanej wartości własnej λ_p jest równa maksymalnej ilości liniowo niezależnych wektorów własnych macierzy P odpowiadających λ_p . Ogólnie jest $a \leq \gamma_p$. Jeżeli stopień degeneracji pierwiastka charakterystycznego λ_p jest równy jego krotności (tzn. $a = \gamma_p$), to wszystkie klatki Jordana są jednoelementowe

$$\rho_p^{(1)} = \dots = \rho_p^{(a)} = 1. \quad (6.95)$$

Równanie charakterystyczne (6.28) ma postać

$$D(\lambda) = \det(\lambda E - P), \quad (6.96)$$

natomiast uwzględniając $P = S^{-1}JS$ oraz $\lambda E = S^{-1}\lambda S$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \det(S^{-1}JS - S^{-1}\lambda S) = \det S^{-1}(JS - \lambda S) = \\ &= \det[S^{-1}(J - \lambda I)S] = \det S^{-1} \det(J - \lambda I) \det S = \\ &= (\det S)^{-1} \det(J - \lambda I) \det S = \det(J - \lambda I) = \\ &= (\lambda - \lambda_1)^{\rho_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{\rho_m}, \end{aligned} \quad (6.97)$$

$$\rho_1 + \dots + \rho_m = n.$$

Jeszcze raz należy podkreślić, że $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ są wartościami własnymi macierzy P odpowiadającymi różnym klatkom macierzy quasi-diagonalnej Jordana J , lecz niekoniecznie pierwiastki te muszą być między sobą różne.

Czynniki $(\lambda - \lambda_k)^{\rho_k}$ ($k = 1, \dots, m$) nazywamy dzielnikami elementarnymi macierzy P , a liczby naturalne ρ_k (tzn. wymiary (stopnie) klatek Jordana) – wykładnikami dzielników elementarnych odpowiadających pierwiastkowi charakterystycznemu λ_k lub czynnikowi $\lambda - \lambda_p$.

Jeśli wszystkim wartościom własnym $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ odpowiadają dzielniki elementarne stopnia 1 ($\rho_k = 1$), to macierz Jordana jest macierzą czysto diagonalną

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n), \quad (6.98)$$

przy czym $\lambda_k (k = 1, \dots, n)$ są niekoniecznie różne.

Układ liniowo niezależnych rozwiązań $J_1(t), \dots, J_n(t)$ można zapisać w postaci

$$J_j(t) = p_j(t)e^{\lambda_j t}, \quad (6.99)$$

gdzie $p_j(t)$ są wielomianami ze stałymi współczynnikami, w których stopnie potęg są mniejsze od krotności pierwiastka λ_j .

Rozwiązania będą zmierzały przy $t \rightarrow \infty$ do zera wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Re}(\lambda_j) < 0$, $j = 1, \dots, n$. Wtedy drgania własne rozważanego układu (6.1) będą gasnącymi.

Jeśli wśród pierwiastków charakterystycznych $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jest tylko k spełniających warunek $\text{Re}(\lambda_j) < 0$, $j = 1, \dots, k$, to istnieje k -wymiarowa podprzestrzeń taka, że drgania własne układu (6.1), zaczynające się w tej podprzestrzeni, dla $t \rightarrow +\infty$, dążą do zera.

Jeśli wśród pierwiastków charakterystycznych λ_j są pierwiastki z zerowymi częściami rzeczywistymi, to możliwe są dwa przypadki. Gdy nie ma czysto urojonych pierwiastków, to układ (6.1) posiada zbiór położeń równowagi, które tworzą l -wymiarową podprzestrzeń, gdzie l -liczba wszystkich zerowych pierwiastków wliczając ich krotność tylko wtedy, gdy tym zerowym pierwiastkom odpowiadają dzielniki elementarne proste.

Jeśli dodatkowo $\text{Re}(\lambda_j)$, to każdemu położeniu równowagi odpowiada k -wymiarowa podprzestrzeń określona ruchami układu (6.1) (z rozwiązaniami dążącymi do tych położeń).

Jeśli są czysto urojone pierwiastki, to wśród ruchów własnych układu (6.1) istnieją okresowe i prawie okresowe ruchy. Te ostatnie pojawiają się, gdy istnieją czysto urojone λ_s i λ_k takie, że $i\lambda$ i $i\lambda_k$ nie są współmierne. Okresowe i prawie okresowe ruchy wypełniają s -wymiarową liniową podprzestrzeń, gdzie s - liczba czysto urojonych pierwiastków. Z każdym okresowym i prawie okresowym ruchem układu (6.1), gdy istnieje $\text{Re}(\lambda_j) < 0$, związana jest k -wymiarowa podprzestrzeń wypełniona przez ruchy, które dążą do drgań własnych układu (6.1).

Przekształcenie (6.39) przeprowadza układ (6.77) w układ (6.42), gdzie J określone jest przez (6.36), przy czym



$$P = S^{-1}JS. \quad (6.100)$$

Pierwiastki charakterystyczne $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ określa się z równania (6.28), które można zapisać w postaci

$$\lambda^n - \sum_{k=1}^n p_{kk} \lambda^{k-1} + \dots + (-1)^n \det P = 0. \quad (6.101)$$

Z (6.101) wynika, że

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \sum_{k=1}^n p_{kk} = S_p P = S_p(J), \quad (6.102)$$

gdzie $S_p(J)$ jest śladem macierzy lub inaczej sumą jej elementów diagonalnych. Natomiast

$$\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det P = \det J. \quad (6.103)$$

Rozpatrzmy klatkę Jordana dla $\lambda = a + ib$

$$J_p(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bi & 0 & 0 \\ 0 & bi & 0 \\ 0 & 0 & bi \end{bmatrix} = \quad (6.104)$$

$$= J_p(a) + bi I_p.$$

Jeśli $\lambda_k = a_k + b_k i$, to macierz $J(\lambda)$ przyjmuje postać

$$J(\lambda) = [J_{\rho_1}(a_1), \dots, J_{\rho_m}(a_m)] + [b_1 I_{\rho_1}, \dots, b_m I_{\rho_m}] i = J(a) + Bi, \quad (6.105)$$

$$J(a) = [J_{\rho_1}(a_1), \dots, J_{\rho_m}(a_m)], \quad B = [b_1 I_{\rho_1}, \dots, b_m I_{\rho_m}].$$

Jeśli P jest macierzą rzeczywistą, to pierwiastki zespolone, muszą być parami sprzężone, dlatego

$$S_p(B) = b_1 \rho_1 + \dots + b_m \rho_m = 0. \quad (6.106)$$

Macierz wykładnicza wyraża się wzorem

$$e^{Bit} = [e^{b_1 I_{\rho_1} t}, \dots, e^{b_m I_{\rho_m} t}] = [e^{b_1 t i} I_{\rho_1}, \dots, e^{b_m t i} I_{\rho_m}] =$$

$$= [I_{\rho_1} (\cos b_1 t + i \sin b_1 t), \dots, I_{\rho_m} (\cos b_m t + i \sin b_m t)] = \quad (6.107)$$

$$= [I_{\rho_1} \cos b_1 t, \dots, I_{\rho_m} \cos b_m t] + i [I_{\rho_1} \sin b_1 t, \dots, I_{\rho_m} \sin b_m t].$$

Ponieważ

$$S_p[B] = 0, \quad \text{to} \quad \det(e^{Bt}) = e^{\text{Sp}(B)t} = e^{at} = 1. \quad (6.108)$$

Podsumujmy w trzech wzorach macierzowych rezultaty tego paragrafu

$$[\dot{Y}] = [Y][P], \quad [Y] = [X][S], \quad [\dot{X}] = [X][J], \quad (6.109)$$

gdzie X, Y, J, S są macierzami. Niech $U = e^{J(a)t}$, ponieważ

$$X = e^{Jt} = e^{J(a)t + Bt} = e^{J(a)t} e^{Bt}, \quad (6.110)$$

to

$$X = U e^{Bt}.$$

Ponieważ $U = e^{J(a)t}$, to

$$\dot{U} = J(a) e^{J(a)t} = J(a) U. \quad (6.111)$$

Rozpatrzmy lewą stronę równania $\dot{X} = XJ$,

$$\dot{X} = \dot{U} e^{Bt} + U e^{Bt} B. \quad (6.112)$$

Prawa strona tej równości

$$XJ = U e^{Bt} J(a) = U e^{Bt} (J(a) + B). \quad (6.113)$$

Porównując lewą i prawą stronę otrzymujemy

$$\dot{U} e^{Bt} = U e^{Bt} J(a), \quad (6.114)$$

czyli

$$\dot{U} = U J(a). \quad (6.115)$$

Tak więc zostało wykazane, że przekształcenie $X = U e^{Bt}$ przekształca wektor U , który jest rozwiązaniem

$$\dot{U} = U J(a), \quad (6.116)$$

w wektor X , który jest rozwiązaniem

$$\dot{X} = XJ. \quad (6.117)$$

Ponieważ



$$Y = XS = Ue^{Bit}, \quad S = UZ(t), \quad (6.118)$$

gdzie

$$Z(t) = e^{Bit} S. \quad (6.119)$$

Tak więc przekształcenie (6.118) przekształca układ z rzeczywistymi współczynnikami $Y = YP$ w układ z rzeczywistymi współczynnikami $\dot{U} = UJ(a)$. Macierz przekształcenia $Z(t)$ jest macierzą zespoloną, przy czym $Z(t)$ jest macierzą ograniczoną, bo e^{Bit} jest funkcją wykładniczą macierzy ograniczonej, a S jest macierzą stałych współczynników.

Łatwo zauważyć, że $Z^{-1}(t)$ jest też macierzą ograniczoną. Macierz odwrotna do $Z(t)$ istnieje, bo

$$\det(Z(t)) = \det e^{Bit} \det(S) = \det e^0 \det(S) \neq 0. \quad (6.120)$$

Można wykazać, że istnieje rzeczywista macierz $Z(t)$, ograniczona razem z $Z^{-1}(t)$ i przekształcająca układ o rzeczywistych współczynnikach $\dot{Y} = YP$ w rzeczywisty układ $\dot{U} = UJ(a)$ za pomocą przekształcenia $Y = UZ(t)$.

Rozpatrzmy teraz układ (6.12), gdy składowe wektora $\{f(t)\}$ są ciągłymi funkcjami, okresowymi względem t z okresem T lub też funkcjami prawie okresowymi.

Podstawową własnością układu (6.12) jest to, że jeżeli wśród ruchów własnych układu (6.1) nie ma drgań ustalonych tego układu i położeń równowagi różnych od zera, to pojawiają się drgania okresowe i prawie okresowe odpowiednio do rodzaju wymuszenia. Przy czym innych ruchów w układzie nie ma.

Stacjonarne drgania własne nie występują wtedy, gdy pierwiastki charakterystyczne λ_j , $j = 1, \dots, n$ mają różne od zera części rzeczywiste.

Wiadomo, że układ $\dot{Y} = YP$ może być sprowadzony do układu $\dot{U} = UJ(a)$ za pomocą pewnej rzeczywistej macierzy $Z(t, \alpha)$, przy czym

$$y = uZ(t, \alpha), \quad (6.121)$$

$$y_k = \sum_{\gamma=1}^n u_{\gamma} z_{\gamma k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.122)$$

Ponieważ $Z(t, \alpha)$ jest macierzą ograniczoną tj. ograniczone są wyrazy $z_{\gamma k}$, to $y \rightarrow 0$, jeśli $u \rightarrow 0$, i wektor y jest ograniczony, jeśli wektor u jest ograniczony.

Warto przypomnieć, że $J(a)$ jest rzeczywistą częścią macierzy $J(\lambda)$.

Podstawiając (6.121) do (6.12) mamy

$$\dot{u}Z + u\dot{Z} = uZP + f(t), \quad (6.123)$$

a stąd otrzymujemy

$$\dot{u}Z = uZP - u\dot{Z} + f(t). \quad (6.124)$$

Mnożąc prawostronnie powyższe równanie przez Z^{-1} mamy

$$\dot{u} = u(ZPZ^{-1} - \dot{Z}Z^{-1}) + f(t)Z^{-1}. \quad (6.125)$$

Jeśli $f(t) \equiv 0$, to

$$\dot{u} = uJ(a), \quad (6.126)$$

czyli

$$J(a) = ZPZ^{-1} - \dot{Z}Z^{-1}. \quad (6.127)$$

Zatem (6.125) można zapisać w postaci

$$\dot{u} = uJ(a) + \phi(t), \quad (6.128)$$

gdzie

$$\phi(t) = f(t)Z^{-1} = (\phi_1, \dots, \phi_n). \quad (6.129)$$

Niech

$$Z^{-1}(t, \alpha) = \begin{bmatrix} \bar{z}_{11} & \dots & \bar{z}_{1n} \\ \vdots & & \\ \bar{z}_{n1} & \dots & \bar{z}_{nn} \end{bmatrix}. \quad (6.130)$$

Wtedy

$$\phi_k(t) = \sum_{\gamma=1}^n f_{\gamma}(t) \bar{z}_{\gamma k}(t), \quad (6.131)$$

gdzie

$$\bar{z}_{kl}(t) = \sum_{\gamma=1}^{n \leq \frac{n}{2}} \left(a_{kl}^{(\gamma)} \sin b_{\gamma} t + b_{kl}^{(\gamma)} \cos b_{\gamma} t \right) \quad (6.132)$$

i $a_{kl}^{(\gamma)}$ oraz $b_{kl}^{(\gamma)}$ są stałymi rzeczywistymi współczynnikami.

Macierz $J(a)$ jest rzeczywistą kanoniczną macierzą Jordana o postaci

$$J(a) = [J_{\rho_1}(a_1), \dots, J_{\rho_m}(a_m)]. \quad (6.133)$$

Dlatego odpowiednio do struktury tej macierzy wektor $u = [u^{(\rho_1)}, \dots, u^{(\rho_m)}]$, gdzie $u^{(\rho)} = [u_1^{(\rho)}, \dots, u_\rho^{(\rho)}]$, a wektor $\phi(t) = [\phi^{(\rho_1)}, \dots, \phi^{(\rho_m)}]$.

Układ (6.128) można zatem zapisać

$$\begin{aligned} [\dot{u}^{(\rho_1)}, \dots, \dot{u}^{(\rho_m)}] &= [u^{(\rho_1)}, \dots, u^{(\rho_m)}] \times \\ &\times [J_{\rho_1}(a_1), \dots, J_{\rho_m}(a_m)] + [\phi^{(\rho_1)}, \dots, \phi^{(\rho_m)}]. \end{aligned} \quad (6.134)$$

Układ (6.134) rozkłada się na m podukładów

$$\dot{u}^{(\rho_k)} = u^{(\rho_k)} J_{\rho_k}(a_k) + \phi^{(\rho_k)}(t), \quad k = 1, \dots, m. \quad (6.135)$$

Każdy z powyższych podukładów można przedstawić w postaci rozwiniętej

$$\begin{aligned} \dot{u}_1^{(\rho)} &= u_1^{(\rho)} a + u_2^{(\rho)} + \phi_1^{(\rho)}(t), \\ \dot{u}_2^{(\rho)} &= u_2^{(\rho)} a + u_3^{(\rho)} + \phi_2^{(\rho)}(t), \\ &\vdots \\ \dot{u}_{\rho-1}^{(\rho)} &= u_{\rho-1}^{(\rho)} a + u_\rho^{(\rho)} + \phi_{\rho-1}^{(\rho)}(t), \\ \dot{u}_\rho^{(\rho)} &= u_\rho^{(\rho)} a + \phi_\rho^{(\rho)}(t), \end{aligned} \quad (6.136)$$

Poszukajmy rozwiązań o postaci

$$u_k^{(\rho)} = v_k^{(\rho)} e^{at}, \quad k = 1, \dots, \rho. \quad (6.137)$$

Otrzymamy równanie na $v_k^{(\rho)}$ w postaci

$$\begin{aligned} \dot{v}_k^{(\rho)} &= v_{k+1}^{(\rho)} + \phi_k^{(\rho)}(t) e^{-at}, \quad k = 1, \dots, \rho - 1, \\ \dot{v}_\rho^{(\rho)} &= \phi_\rho^{(\rho)}(t) e^{-at}. \end{aligned} \quad (6.138)$$

Po scałkowaniu (6.138) mamy

$$\begin{aligned} v_k^{(\rho)} &= \int_{t_0}^t (v_{k+1}^{(\rho)} + \phi_k^{(\rho)}(t) e^{-at}) dt, \quad k = 1, \\ u_k^{(\rho)} &= v_k^{(\rho)} e^{at} = e^{at} \int_{t_0}^t (u_{k+1}^{(\rho)} + \phi_k^{(\rho)}(t)) e^{-at} dt, \quad k = 1, \dots, \rho - 1, \\ u_\rho^{(\rho)} &= e^{at} \int_{t_0}^t \phi_\rho^{(\rho)}(t) e^{-at} dt. \end{aligned} \quad (6.139)$$

Z układu (6.138) wynika, że układ (6.12) posiada okresowe bądź prawie okresowe rozwiązanie w zależności od tego, czy funkcja $f(t)$ jest okresowa bądź prawie okresowa, jeśli tylko $\operatorname{Re}(\rho) < 0$.

Ten przypadek nazywamy nierezonansowym, a układ jednorodny $\dot{y} = yP$, który nie posiada pierwiastków z częścią rzeczywistą zerową nazywamy nierezonansowym.

Przypadek rezonansu ma miejsce wtedy, gdy wśród wartości własnych $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ istnieją pierwiastki z zerowymi częściami rzeczywistymi. W związku z tym zbiór wymuszeń można rozdzielić na dwie rozłączne klasy. Do pierwszej klasy zaliczymy wymuszenia powodujące drgania wymuszone stacjonarne, a do drugiej – wymuszenia powodujące rezonans (drgania wymuszone niestacjonarne posiadające człony wiekowe lub drgania z nieograniczoną amplitudą o złożonym charakterze).

Niech wymuszenie zewnętrzne $f(t)$ będzie T -okresową, wektorową funkcją t . Zgodnie z (6.12) mamy

$$y(t) = e^{Pt}y_0 + \int_0^t e^{P(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (6.140)$$

Z (6.140) wynika, iż koniecznym i dostatecznym warunkiem pojawienia się T -okresowego rozwiązania układu (6.12) jest spełnienie równości $y(T) = y(0)$. Podstawiając tę równość do (6.140) otrzymujemy

$$y_0 = e^{PT}y_0 + \int_0^T e^{P(T-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (6.141)$$

Wobec tego warunek początkowy $y(0) = y_0$ musi być taki, aby spełniony był algebraiczny układ równań

$$(I - e^{PT})y_0 = \int_0^T e^{P(T-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (6.142)$$

Przy dowolnym wyborze warunku początkowego y_0 układ (6.142) posiada jedno rozwiązanie, gdy

$$\det(I - e^{PT}) \neq 0. \quad (6.143)$$

Z równań (6.80) i (6.85) wynika, że macierz

$$e^{PT} = S^{-1} e^{JT} S. \quad (6.144)$$

Poszukajmy pierwiastków równania

$$\det(e^{PT} - I) = 0. \quad (6.145)$$

Zgodnie z (6.94)

$$e^{PT} = S^{-1} [e^{J_{p_1}(\lambda_1)T}, e^{J_{p_2}(\lambda_2)T}, \dots, e^{J_{p_m}(\lambda_m)T}] S. \quad (6.146)$$

Zatem

$$\begin{aligned} \det(S^{-1} [e^{J_{p_1}(\lambda_1)T}, e^{J_{p_2}(\lambda_2)T}, \dots, e^{J_{p_m}(\lambda_m)T}] S - I) &= \\ = \det S^{-1} ([e^{J_{p_1}(\lambda_1)T}, e^{J_{p_2}(\lambda_2)T}, \dots, e^{J_{p_m}(\lambda_m)T}] S - SI) &= \\ = \det S^{-1} ([e^{J_{p_1}(\lambda_1)T}, e^{J_{p_2}(\lambda_2)T}, \dots, e^{J_{p_m}(\lambda_m)T}] - S I S^{-1}) S &= \\ = \det S^{-1} \det ([e^{J_{p_1}(\lambda_1)T}, e^{J_{p_2}(\lambda_2)T}, \dots, e^{J_{p_m}(\lambda_m)T}] - S^{-1} I S) \det S &= 0. \end{aligned} \quad (6.147)$$

Wyrażenie to jest równe zeru, gdy

$$\det([e^{J_{p_1}(\lambda_1)T}, e^{J_{p_2}(\lambda_2)T}, \dots, e^{J_{p_m}(\lambda_m)T}] - I) = 0, \quad (6.148)$$

bo

$$\det S \neq 0, \quad \det S^{-1} \neq 0, \quad \text{oraz} \quad S^{-1} I S = I. \quad (6.149)$$

Biorąc pod uwagę (6.112) przy diagonalnej macierzy trójkątnej

$$([e^{J_{p_1}(\lambda_1)T}, e^{J_{p_2}(\lambda_2)T}, \dots, e^{J_{p_m}(\lambda_m)T}] - I)$$

będziemy mieli wyrazy o postaci $e^{\lambda T} - 1$. Iloczyn ich daje wartość wyznacznika. Zatem wystarczy, że jeden czynnik w iloczynie jest zerem, aby cały wyznacznik się zerował.

Niech $\lambda = a + ib$, zatem

$$e^{\lambda T} = e^{aT} e^{ibT} = e^{aT} (\cos bT + i \sin bT). \quad (6.150)$$

Ponieważ $e^{\lambda T} - 1 = 0$, to $a = 0$, natomiast $bT = 2k\pi$, czyli $b = \frac{2k\pi}{T}$ dla $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Zatem dla $\lambda = bi \neq \frac{2k\pi i}{T}$, czyli dla pierwiastków charakterystycznych o częstościach nie pokrywających się z częstościami harmonicznych wchodzących w skład rozwinięć w szereg Fouriera funkcji $f(t)$ wyznacznik będzie różny od zera.

Z przypadkiem rezonansu spotykamy się wtedy, gdy na układ $\dot{y} = yP$ działa wymuszenie zewnętrzne $f(t)$ i wśród pierwiastków charakterystycznych tego układu są pierwiastki $i\frac{2k\pi}{T}$. Przypadek nierezonansowy charakteryzuje się tym, że wśród pierwiastków charakterystycznych tego układu nie występują pierwiastki $i\frac{2k\pi}{T}$. W tym ostatnim przypadku istnieje tylko jedno okresowe rozwiązanie układu (6.12).

Rozwiązanie to ma postać (zgodnie z (6.140), po podstawieniu (6.142))

$$y(t) = e^{Pt}(I - e^{PT})^{-1} \int_0^T e^{P(t-\tau)} f(\tau) d\tau + \int_0^t e^{P(T-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (6.151)$$

Rozpatrzmy przypadek, gdy spełnione jest (6.144). Ustalmy warunki, jakie musi spełniać funkcja $f(t)$, aby w układzie (6.12) pojawiły się drgania okresowe.

Pomnożmy obie strony równania (6.142) przez macierz e^{-PT} . Otrzymujemy

$$(e^{-PT} - I)y_0 = \int_0^T e^{-P\tau} f(\tau) d\tau. \quad (6.152)$$

Z algebry wiadomo, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby układ (6.152) posiadał rozwiązanie jest aby jego prawa strona była ortogonalna do wszystkich rozwiązań jednorodnego układu sprzężonego z lewą stroną (6.152) o postaci

$$(e^{-PT} - I)^* x_0 = 0. \quad (6.153)$$

Jeśli x_0^* jest rozwiązaniem (6.153), to

$$\int_0^T x_0^* e^{-P\tau} f(\tau) d\tau = 0. \quad (6.154)$$

Natomiast funkcja wektorowa

$$x_0^* e^{-P^* t} = x(t), \quad (6.155)$$

jest rozwiązaniem równania

$$\frac{dx}{dt} = -P^* x. \quad (6.156)$$

6.4 Układy równań różniczkowych liniowych o okresowo zmiennych współczynnikach

Niech będzie dany układ

$$\dot{X} = X P(t), \quad (6.157)$$

o macierzy $P(t)$ ciągłej (lub przedziałami ciągłej) na osi $(-\infty, +\infty)$ i okresowej tzn. $P(t+T) = P(t)$.

Twierdzenie Floqueta

Dla układu liniowego (6.157) o macierzy okresowej, macierz fundamentalna $X(t)$, spełniająca warunek $X(0) = I$ (matrycant) ma postać:

$$X(t) = \phi(t)e^{\Lambda t}, \quad (6.158)$$

gdzie $\phi(t)$ jest nieosobliwą macierzą klasy C^1 i $\phi(t) = \phi(t+T)$, oraz $\phi(0) = I$, natomiast Λ jest macierzą stałą.

Udowodnimy, że macierz $X(t+T)$ jest też macierzą fundamentalną.

Na mocy (6.157) mamy:

$$\frac{d}{dt}[X(t+T)] = X(t+T)P(t+T) = X(t+T)P(t), \quad (6.159)$$

wobec tego $X(t+T)$ spełnia (6.157), czyli jest macierzą fundamentalną.

Wobec powyższego, jedna wyraża się przez drugą np. poprzez związek

$$X(t+T) = X(t)C, \quad (6.160)$$

gdzie C jest nieosobliwą macierzą stałą.

Podstawiając do (6.160) $t = 0$ mamy

$$X(T) = C. \quad (6.161)$$

Zatem

$$X(t+T) = X(t)X(T). \quad (6.162)$$

Macierz $X(T)$ nazywamy macierzą monodromii.

Niech

$$X(T) = e^{\Lambda T}, \quad (6.163)$$

czyli

$$\frac{1}{T} \ln X(T) = \Lambda .$$

Wobec tego

$$X(t) \equiv X(t)e^{-\Lambda t}e^{\Lambda t} = \phi(t)e^{\Lambda t} , \quad (6.164)$$

gdzie

$$\phi(t) = X(t)e^{-\Lambda t} \quad (6.165)$$

Wobec tego

$$\phi(t+T) = X(t+T)e^{-\Lambda(t+T)} = X(t+T)e^{-\Lambda t}e^{-\Lambda T} . \quad (6.166)$$

Uwzględniając (6.162) w (6.166) mamy

$$\begin{aligned} \phi(t+T) &= X(t)X(T)e^{-\Lambda t}e^{-\Lambda T} = \\ &= X(t)e^{\Lambda T}e^{-\Lambda t}e^{-\Lambda T} = X(t)e^{-\Lambda t} = \phi(t) , \end{aligned} \quad (6.167)$$

czyli zostało pokazane, że macierz $\phi(t)$ jest okresową o okresie T .

Ponadto prawdziwe są związki

$$\phi(0) = X(0)e^{-\Lambda 0} = I \quad \text{oraz} \quad \det \phi(t) = \det X(t) \det e^{-\Lambda t} \neq 0 .$$

Macierze

$$\Lambda = \frac{1}{T} \ln X(t) \quad (6.168)$$

oraz

$$\phi(t) = X(t)e^{-\Lambda t} , \quad (6.169)$$

są ogólnie biorąc zespolone. Wartości własne λ_j macierzy Λ , tzn. pierwiastki równania charakterystycznego

$$\det(\Lambda - \lambda E) = 0 , \quad (6.170)$$

nazywają się wykładnikami charakterystycznymi układu (6.157).

Równanie

$$|X(T) - \rho I| = 0 \quad (6.171)$$

nazywamy równaniem charakterystycznym układu (6.157).

Równanie charakterystyczne posiada następujące własności:

1° Nie zależy ono od wyboru bazy fundamentalnej

Dowód

Wyberzmy zamiast bazy $X(t)$, bazę $Y(t)$. Wówczas $Y(t+T) = Y(t)C_1$, gdzie C_1 jest pewną stałą.

Dla $t = 0$, $Y(T) = C_1$, bo $Y(0) = I$.

Ponieważ jedną bazę można wyrazić przez drugą, to :

$$Y(t) = X(t)C_2 \quad \text{skąd} \quad X(t) = Y(t)C_2^{-1},$$

gdzie C_2 jest macierzą nieosobliwą.

Z kolei

$$Y(t+T) = X(t+T)C_2 = X(t)X(T)C_2 = Y(t)C_2^{-1}X(T)C_2,$$

a ponieważ $Y(t+T) = Y(t)C_1$, to

$$C_2^{-1}X(T)C_2 = C_1.$$

Obliczmy

$$\begin{aligned} |C_1 - \rho I| &= |C_2^{-1}X(T)C_2 - \rho I| = |C_2^{-1}(X(T) - \rho I)C_2| = \\ &= |C_2^{-1}||X(T) - \rho I||C_2| = |X(T) - \rho I|, \end{aligned}$$

czyli

$$|Y(T) - \rho I| = |X(T) - \rho I|,$$

co kończy dowód.

2° Równanie charakterystyczne nie ulegnie zmianie, jeśli układ (6.157) poddamy nieosobliwemu liniowemu przekształceniu ze współczynnikami okresowymi o okresie T .

Dowód

Przekształćmy (6.157) za pomocą podstawienia

$$Y(t) = Q(t)X(t), \quad \text{gdzie} \quad Q(t) = Q(t+T).$$

Wobec tego $X(t) = Q^{-1}(t)Y(t)$ (z założenia $\det Q(t) \neq 0$). Zatem

$$Y(t+T) = Q(t+T)X(t+T) = Q(t)X(t+T) = X(t)C$$

i po podstawieniu warunków początkowych

$$C(t) = X(T),$$

a stąd

$$X(t+T) = X(t)X(T).$$

Po uwzględnieniu tego równania mamy

$$Y(t+T) = Q(t)X(t)X(T) = Q(t)Q^{-1}(t)Y(t)X(T) = Y(t)X(T).$$

Równanie charakterystyczne $|X(T) - \rho I| = 0$ jest takie samo jak w układzie wyjściowym.

Warto podkreślić, że wykładniki charakterystyczne okresowego układu liniowego nie są identyczne z wykładnikami charakterystycznymi Lapunowa nietrywialnych rozwiązań tego układu. Pierwsze z nich są na ogół liczbami zespolonymi, a drugie liczbami rzeczywistymi, będącymi częściami rzeczywistymi pierwszych.

Wartości własne ρ_j , ($j = 1, \dots, n$) macierzy $X(T)$, czyli pierwiastki charakterystyczne (6.170) nazywają się multiplikatorami.

Twierdzenie

Dla każdego multiplikatora (mnożnika) ρ istnieje nietrywialne rozwiązanie $\eta(t)$ układu okresowego (6.157) spełniające warunek

$$\eta(t+T) = \rho\eta(t). \quad (6.172)$$

Rozwiązania powyższe nazywamy rozwiązaniem normalnym.

Jeśli pewne nietrywialne rozwiązanie $\eta(t)$ spełnia warunek (6.172), to liczba ρ jest multiplikatorem danego układu.

Dowód

1° Niech $\eta(t)$ dla $t = 0$ będzie wektorem własnym macierzy monodromii $X(T)$, odpowiadającym wartości własnej ρ . Mamy więc

$$X(T)\eta(0) = \rho\eta(0)$$

i

$$\eta(t) = X(T)\eta(0).$$



Zatem

$$\begin{aligned}\eta(t+T) &= X(t+T)\eta(0) = X(t)X(T)\eta(0) = \\ &= X(t)\rho\eta(0) = \rho X(t)\eta(0) = \rho\eta(t),\end{aligned}$$

czyli warunek (6.172) jest spełniony.

2° Załóżmy, że pewne nietrywialne rozwiązanie $\eta(t) = X(t)\eta(0)$ spełnia warunek (6.172). Wtedy po podstawieniu $t = 0$ do (6.172) mamy:

$$\eta(T) = \rho\eta(0).$$

Ponieważ

$$\eta(t) = X(t)\eta(0), \quad \text{to} \quad \eta(T) = X(T)\eta(0).$$

Wobec tego

$$X(T)\eta(0) = \rho\eta(0) = \eta(T).$$

Z powyższego widać, że $\eta(0)$ jest wektorem własnym macierzy monodromii $X(T)$, a liczba ρ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego

$$\det[X(T) - \rho I] = 0,$$

co oznacza, że ρ jest multiplikatorem.

Z twierdzenia wynika ważny wniosek, że okresowy układ liniowy (6.157) posiada nietrywialne rozwiązanie okresowe o okresie T wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z jego multiplikatorów ρ jest równy 1.

Jeśli $\rho = 1$, to pewne rozwiązanie $\eta(t) \neq 0$ spełnia warunek $\eta(t+T) = \eta(t)$, czyli $\eta(t)$ jest rozwiązaniem okresowym układu (6.157) o okresie T .

Przyjmijmy $\rho = e^{\lambda T}$ oraz $\eta(t) = e^{\lambda t}\phi(t)$.

Korzystając ze wzoru (6.172) mamy:

$$e^{\lambda(t+T)}\phi(t+T) = \rho e^{\lambda t}\phi(t) = e^{\lambda T}e^{\lambda t}\phi(t),$$

czyli

$$\phi(t+T) = \phi(t). \tag{6.173}$$

Zatem normalne rozwiązanie układu okresowego ma postać $\eta(t) = e^{\lambda t}\phi(t)$, gdzie $\phi(t) = \phi(t+T)$ oraz $\lambda = \frac{1}{T} \ln \rho$ jest wykładnikiem charakterystycznym danego układu.

Jeśli istnieje multiplikator $\rho = -1$, to odpowiada mu tzw. antyokresowe rozwiązanie $\eta \neq 0$ o postaci

$$\eta(t+T) = -\eta(t) .$$

Zatem

$$\eta(t+2T) = -\eta(t+T) = \eta(t) ,$$

czyli $\eta(t)$ jest w tym przypadku rozwiązaniem okresowym o okresie $2T$.

Do tej pory zajmowaliśmy się przypadkiem, kiedy $\rho = \pm 1$, a więc było liczbą rzeczywistą.

Jeśli ρ jest liczbą zespoloną, to można ją przedstawić w postaci:

$$\rho = r e^{\Theta i} , \quad (6.174)$$

gdzie r i Θ oznacza moduł i argument liczby zespolonej ρ . Powyższą postać nazywamy postacią wykładniczą liczby zespolonej.

Logarytmem naturalnym liczby zespolonej $\rho \neq 0$, $(\ln \rho)$ nazywamy liczbę w spełniającą równość

$$e^w = \rho . \quad (6.175)$$

Każda liczba zespolona $\rho \neq 0$ ma nieskończenie wiele logarytmów naturalnych. Określone są one wzorem:

$$\ln \rho = \ln r + \Theta_0 + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots , \quad (6.176)$$

gdzie r oznacza moduł liczby logarytmowanej, zaś Θ_0 - argument główny liczby logarytmowanej $0 \leq \Theta_0 < 2\pi$.

Twierdzenie Jerugina

Układ różniczkowy liniowy (6.157) jest sprowadzalny wtedy i tylko wtedy, gdy pewna jego macierz fundamentalna $[X(t)]$ może być przedstawiona w postaci iloczynu macierzy $[\bar{L}(t)]$ i funkcji wykładniczej zmiennej niezależnej t pomnożonej przez stałą macierz $[A]$, tzn. $[X(t)] = [\bar{L}(t)]e^{t[A]}$.

Twierdzenie

Układ liniowy o okresowych współczynnikach jest sprowadzalny.

Unormowana macierz fundamentalna rozwiązań układu okresowego (6.157) zgodnie z twierdzeniem Floquenty ma postać:

$$X(t) = \phi(t)e^{\Lambda t} , \quad (6.177)$$

przy czym $\phi(t) = \phi(t + T)$ oraz $\phi(t)$ i $\dot{\phi}(t)$ są macierzami ciągłymi i ograniczonymi na osi $(-\infty, +\infty)$.

Zatem $\phi(t)$ jest macierzą $\bar{L}(t)$ i na mocy twierdzenia Jerugina układ okresowy (6.157) jest sprowadzalny.

Podstawiając $x = \phi(t)$, $y = X(t)e^{-\Lambda t}y$ do równania (6.157) mamy

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda y. \quad (6.178)$$

Wykładniki charakterystyczne λ_j są pierwiastkami równania charakterystycznego $|\Lambda - \lambda I| = 0$.



Rozdział 7

Drgania chaotyczne w układach o jednym stopniu swobody

7.1 Wprowadzenie

Rozpatrzmy układ autonomiczny nieliniowy o jednym stopniu swobody. Niech jego potok fazowy (zdefiniowany równaniem ruchu) po osiągnięciu stanu ustalonego znajduje się w pewnym ograniczonym obszarze trójwymiarowej przestrzeni fazowej. Ponieważ trajektorie tego potoku nie mogą się przecinać, to mogą być one albo zamknięte albo dążyć do prostego atraktora jakim jest cykl graniczny lub położenie równowagi. Jednak w przypadku, gdy na taki układ działa harmoniczna siła wymuszająca, możliwa jest taka sytuacja, że każda trajektoria potoku fazowego jest niestateczna, ale jednocześnie ograniczona i nie jest orbitą okresową, quasiokresową lub położeniem równowagi (zdegenerowana orbita). Ponadto układ posiada taką własność, że zadanie warunków początkowych z dowolnie dużą, ale skończoną dokładnością nie pozwala na zdeterminowane określenie jego ruchu. Problematyka ta posiada wymiar większy i sięga zasady Maxa Bohra. Każdy bowiem stan realny układu określony jest zawsze z pewną niedokładnością i dlatego powinien być opisywany nie za pomocą liczb, lecz rozkładu prawdopodobieństwa. Można więc oczekiwać w układzie zdeeterminowanym dynamiki typowej dla układów stochastycznych. Ruch taki, w odróżnieniu od układów ze zmiennymi losowymi, nazywamy deterministycznym chaosem i jego wykrycie dokonało przełomu w nieliniowej dynamice.

Lorenz należy do pierwszych, którzy pokazali, że w układzie autonomicznym trzeciego rzędu pojawia się chaos. Rozważał on problem związany z konwekcją i opisany przez równanie różniczkowe typu Naviera-Stokesa. Stosując metodę Galerкина zredukował równania wyjściowe do układu równań różniczkowych



zwykajnych pierwszego rzędu. Lorenz pokazał numerycznie, że ich rozwiązania były przyciągane do pewnego szczególnego zbioru w trójwymiarowej przestrzeni fazowej, zwanego dziwnym atraktorem chaotycznym. Jego definicję podano niżej.

Definicja 7.1

Podzbiór X przestrzeni fazowej nazywać będziemy atraktorem, jeśli:

- X jest inwariantny (niezmienniczy) względem potoku fazowego;
- istnieje otwarte otoczenie zbioru X i takie, że trajektorie fazowe biorące w nim początek dążą do niego pod działaniem potoku fazowego;
- żadna część zbioru X nie przedstawia stanu przejściowego;
- zbiór X nie da się podzielić na dwa rozłączne podzbiory o powyższych własnościach.

Dziwnym atraktorem nazywamy taki atraktor, który nie składa się ze skończonego zbioru punktów i który nie jest kawałkami różniczkowalnym. Przypomnijmy, że zbiór nazywamy kawałkami różniczkowalny, gdy istnieje część krzywej lub powierzchni, wzdłuż której jest on różniczkowalny, lub wreszcie, gdy jego objętość jest ograniczona dwoma zamkniętymi powierzchniami różniczkowalnymi.

Chaotyczny atraktor charakteryzuje się tym, że każde dwie jego trajektorie odległe o dowolnie małą liczbę, eksponencjalnie się od siebie oddalają z upływem czasu. Zbiór punktów przestrzeni fazowej, będący punktami początkowymi trajektorii fazowych, dla których dążą one do atraktora, nazywamy obszarem przyciągania tego atraktora.

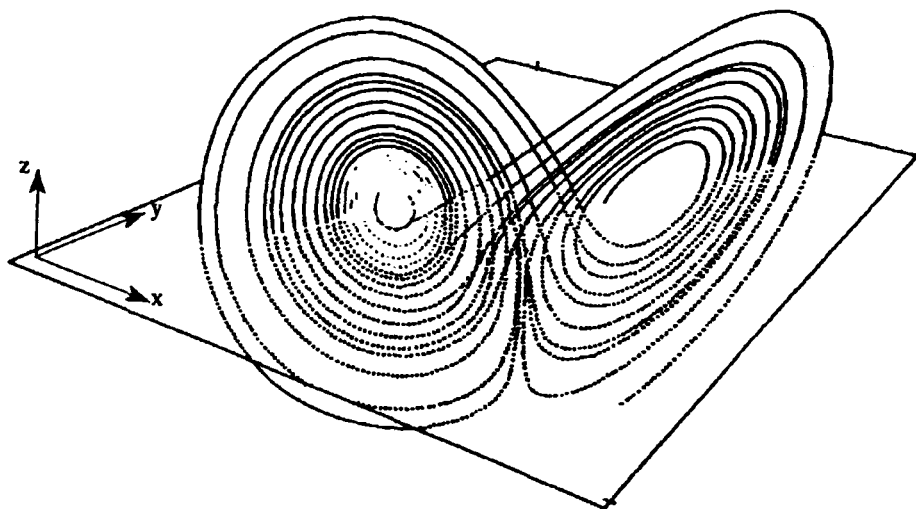
Ponieważ atraktor jest zbiorem niezmienniczym i ograniczonym posiadającym wymiar mniejszy niż rozpatrywana przestrzeń fazowa, to trajektoria zawarta w nim jest rekurentna.

Otrzymany przez Lorenza układ równań ma następującą postać:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma(X + Y), \\ \dot{Y} &= (r - Z)X - Y, \\ \dot{Z} &= -bZ + XY,\end{aligned}\tag{7.1}$$

gdzie X jest amplitudą ruchu wywołanego konwekcją, Y jest różnicą temperatur pomiędzy prądami wstępującymi i zstępującymi oraz Z oznacza odchylenie

spadku temperatury od przebiegu liniowego (szczegółową analizę tego układu i wyprowadzenie równań podane są w pracach [29–32]). Parametry σ , r i b są bezwymiarowe i wyrażają kombinację pewnych stałych fizycznych. Podczas analizy numerycznej układu (7.1) Lorenz zauważył, że dla pewnego zbioru tych parametrów odpowiedź układu była szczególnie wrażliwa na zmianę warunków początkowych, co w efekcie prowadziło do dużych i nieprzewidywalnych zmian podczas długiego czasu obserwacji. Jednakże daje się zauważyć, że trajektoria przy $t \rightarrow \infty$ tworzy pewien dziwny atraktor chaotyczny, zwany atraktorem Lorenza. Jego projekcję przedstawiono na rys. 7.1.



Rys. 7.1. Atraktor Lorenza dla $r = 28, \sigma = 10, b = 8/3$

Trajektoria ze wzrostem czasu przeskakuje w sposób stochastyczny (nieprzewidywalny) pomiędzy dwoma widocznymi na rys. 7.1 częściami atraktora. Układ Lorenza jest już szeroko opisany w literaturze (patrz np. Sparrow [32], Argyris i in. [33]). Przyjmijmy w równaniach Lorenza $\sigma = 10, b = 8/3$, nato-

miast jako parametr kontrolny przyjmiemy r . Dla $0 < r < 1$ jedynym atraktorem jest stateczne położenie równowagi R_0 (patrz rys. 7.2). Odpowiadające mu wartości własne wynoszą

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= -\frac{\delta+1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\delta+1)^2 + 4\delta(r-1)}, \\ \sigma_3 &= -b.\end{aligned}\tag{7.2}$$

Dla parametru r z rozważanego przedziału wszystkie trzy wartości własne σ_i posiadają ujemne części rzeczywiste i położenie równowagi R_0 jest statecznym węzłem. Dla $r = 1$ otrzymujemy punkt krytyczny, bo wówczas $\sigma_1 \geq 0$. Dalszy wzrost r powoduje, że σ_1 przyjmuje wartość dodatnią, podczas gdy pozostałe dwie wartości własne są ciągle ujemne. We wspomnianym punkcie krytycznym zachodzi bifurkacja typu widły i pojawiają się dwa stateczne położenia równowagi R_1 i R_2 (położenie równowagi R_0 istnieje nadal, chociaż jest niestateczne - staje się siodłem). Nowe gałęzie równowagi we współrzędnych $\{X, Y, Z\}$ posiadają wartości $\{\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, (r-1)\}$. Odpowiadające im równanie charakterystyczne posiada postać

$$\sigma^3 + \sigma^2(\delta + b + 1) + \sigma(\delta + r)b + 2\delta b(r-1) = 0.\tag{7.3}$$

Jak można sprawdzić dla $r < 1,346$ położenia równowagi R_1 i R_2 są węzłami statecznymi (wszystkie σ_i są rzeczywiste i ujemne). Dla $r = 1,346$ następuje bifurkacja, w wyniku której dwie z wartości własnych pokrywają się, a następnie przy dalszym wzroście r ulegają rozszczepieniu w kierunku pionowym (odbywa się to symetrycznie na obu gałęziach równowagi) tworząc dwie wartości zespolone sprzężone o ujemnej części rzeczywistej. Węzeł po bifurkacji przeszedł w stateczne ognisko. Dalej rozważmy zachowanie układu dla $1,346 < r < 13,926$. Jak już wspomniano środkowe położenie równowagi jest siodłem, którego niestateczna rozmaitość jest przyciągana przez dwa symetrycznie położone stateczne ogniska. Numeryczna analiza pokazuje, że stateczna rozmaitość siodła tworzy powierzchnię, która ulega skręceniu i rozprzestrzenia się wokół dwóch niestatecznych gałęzi siodła obejmując R_1 i R_2 . Po „zakręcie” wokół położen równowagi R_1 i R_2 powierzchnia wyznaczona przez potok rozmaitości statecznej siodła zmierza znowu w kierunku środkowego położenia równowagi. Różnica polega teraz na tym, że po takim skręceniu powierzchnia która była na dole znajduje się teraz na górze (wykazuje to analogię do wstęgi Möbiusa). Zgodnie z twierdzeniem Cauchy'ego o jednoznaczności, trajektorie fazowe nie mogą się przecinać i jedynym możliwym kompromisem jest taki ruch potoku leżącego

na dolnej powierzchni, że dąży on do jednego z wyróżnionych położen R_1 i R_2 . Zakładając, że będzie to R_1 , to wówczas trajektorie należące do drugiej strony powierzchni będą dążyć do R_2 . Do takich wniosków prowadzą obserwacje numeryczne polegające na równoczesnym śledzeniu wielu punktów początkowych i przy czasie $t \rightarrow \infty$ (patrz Argyris et. al. [33]).

Dla wartości parametru $r = 13,926$ zachodzi znowu bifurkacja. Wokół punktów R_1 i R_2 powstają cykle graniczne utworzone przez niestateczną rozmaitość siodłową, które są niestateczne i dla tej wartości krytycznej r przechodzą one przez środkowe położenie równowagi R_0 . Są to tzw. orbity homokliniczne przedstawione linią przerywaną na rys. 7.2 i dodatkowo na rys. 7.3.

Z dalszym wzrostem r amplitudy ruchów okresowych zaczynają maleć i orbity te nie zawierają już punktu środkowego położenia równowagi. Trajektorie fazowe na zewnątrz tych orbit są odpychane od powstałych orbit okresowych niestatecznych i zaczynają przeskakiwać w taki sposób, że te biorące początek np. przy R_1 przeskakują w okolice R_2 i odwrotnie. Odpowiada to pewnej globalnej bifurkacji. Okazuje się, że teraz w nowej sytuacji potok fazowy utworzony przez stateczną rozmaitość nie jest w stanie całkowicie spełnić warunku ruchu opisanego wcześniej dla $r < 13,926$.

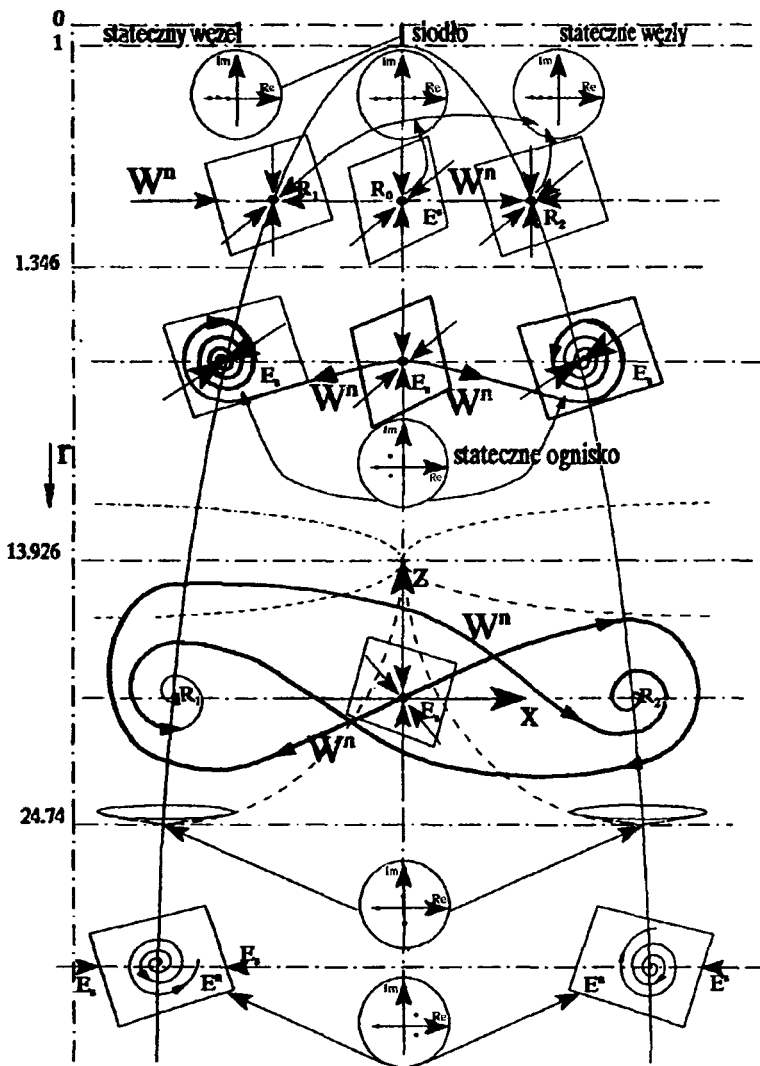
Dalszy wzrost parametru r powoduje malenie amplitud niestatecznych orbit okresowych wzdłuż gałęzi parabol. W punkcie krytycznym $r = 24,7$ poprzez subkrytyczną bifurkację Hopfa zaczynają one znikać, a towarzyszy temu zmiana stateczności położen równowagi R_1 i R_2 , które stają się teraz ogniskami niestatecznymi (w punkcie krytycznym dla każdego z położen równowagi R_1 i R_2 jedna wartość własna jest ujemna, a dwie pozostałe są sprzężone czysto urojone). Ostatecznie chaotyczna wędrówka trajektorii fazowych wokół punktu siodłowego związana jest z istnieniem dwóch innych położen równowagi typu niestatecznych ognisk. Punkt krytyczny układu Lorenza, po przekroczeniu którego pojawia się chaos, odpowiada zniknięciu dwóch niestatecznych orbit okresowych.

Drugim bardzo ważnym dziwnym atraktorem chaotycznym jest tzw. atraktor japoński, wykryty przez Ueda [34] w oscylatorze o równaniu

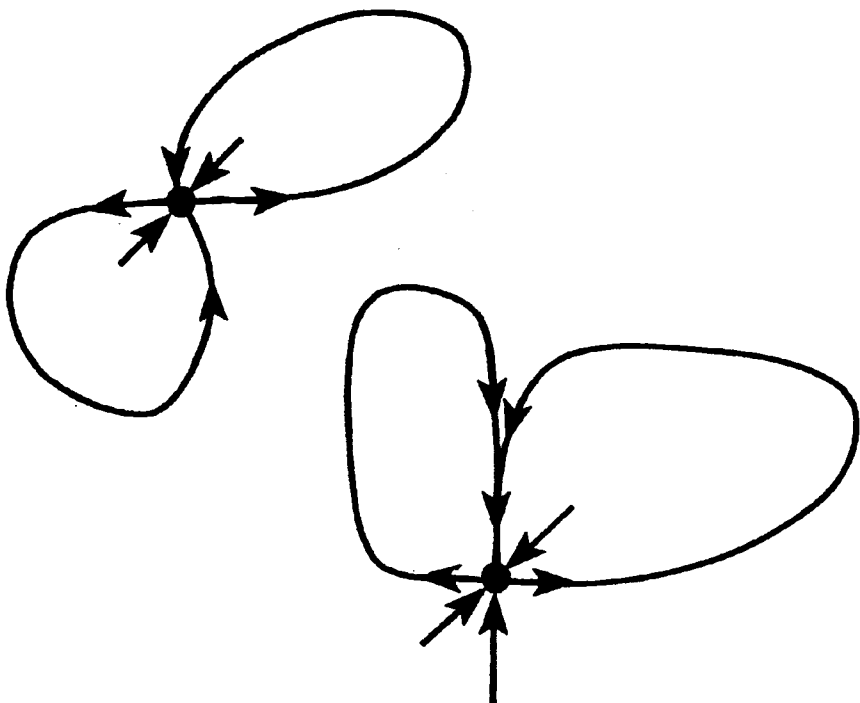
$$\ddot{x} + c\dot{x} + x^3 = P \cos t. \quad (7.4)$$

Typowy przebieg czasowy dla $c = 0,05$ i $P = 7,5$ został przedstawiony na rys. 7.4. Widać z niego, że wprawdzie daje się zauważyć pewną jakościową powtarzalność struktury na tym przebiegu, to generalnie ruch nie jest ani ruchem okresowym ani quasiokresowym i jest nieprzewidywalny w długim okresie czasu.





Rys. 7.2. Wykres bifurkacyjny prowadzący do pojawienia się atraktora Lorenza



Rys. 7.3. Przykładowe przebiegi orbit homoklinicznych wychodzących z położenia równowagi typu siodło



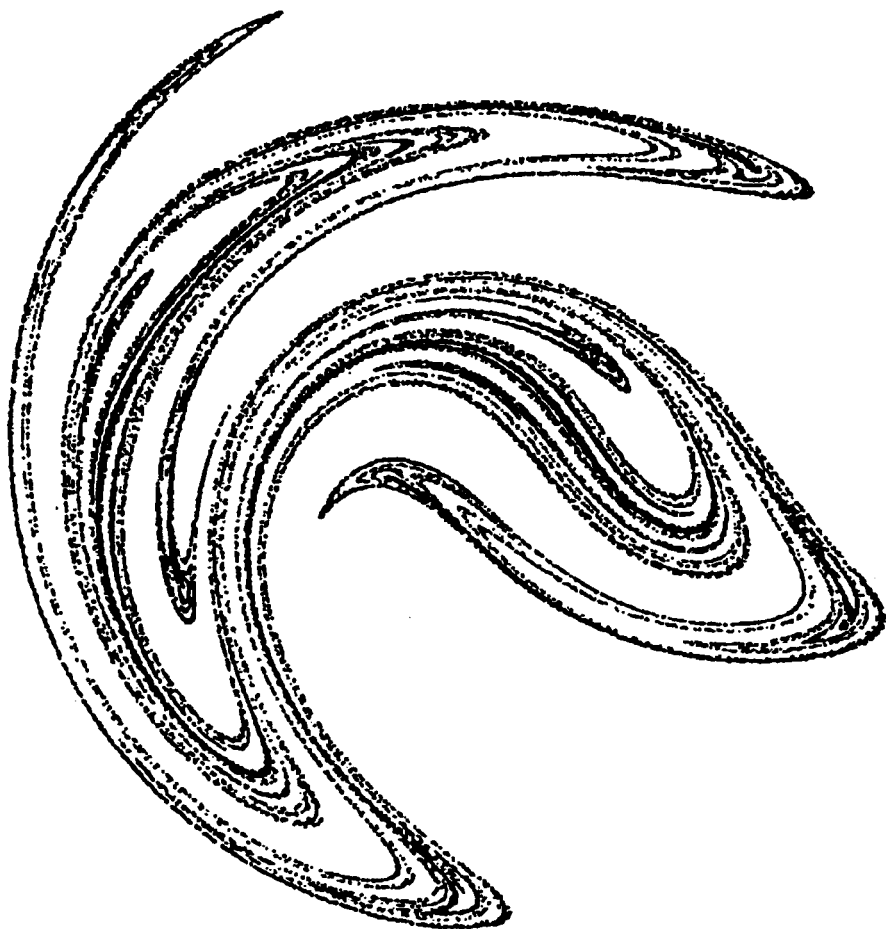
Rys. 7.4. Przebieg czasowy otrzymany z równania (7.4) po scałkowaniu numerycznym

Tylko dokładnie te same warunki początkowe gwarantują powtarzalność ruchu, co praktycznie jest niemożliwe. Niewielka różnica w zadaniu warunków początkowych, powoduje wykładniczą rozbieżność trajektorii fazowych startujących z bardzo niewiele odbiegających od siebie warunków początkowych.

Prowadzi to w efekcie do chaotycznej dynamiki oscylatora opisanego równaniem (7.4). Ponadto, obserwując stroboskopową płaszczyznę fazową $(\dot{x}, x)$ w punktach czasowych odległych o 2π otrzymamy specyficzną strukturę przedstawioną na rys. 7.5. Struktura taka jest wynikiem wielokrotnego procesu rozciągania i składa nia przestrzeni fazowej. Proces ten przypomina wałkowanie ciasta, następnie jego składanie i znowu wałkowanie itd. Transformacja taka bywa nazywana transformacją piekarza.

7.2 Identyfikacja atraktorów chaotycznych

Ruchy chaotyczne stanowią obecnie nieodłączną część nieliniowej dynamiki. Mogą się one pojawiać nie tylko jako efekt symulacji cyfrowej równań różniczkowych nieliniowych dla pewnych szczególnych parametrów, ale pojawiają się również w realnych obiektach fizycznych, w tym również mechanicznych [35–40]. Zachodzi więc naturalne pytanie, jakie narzędzia służą do diagnozy, czy układ jest układem ruchu regularnym lub chaotycznym. W przypadku analizy atraktorów chaotycznych pojawia się kolejne pytanie; na jakiej podstawie możemy takie dziwne atraktory chaotyczne klasyfikować? Problematyce tej poświęcony jest niniejszy rozdział.



Rys. 7.5. Dziwny atraktor Uedy na płaszczyźnie fazowej $(\dot{x}, x)$

7.2.1 Mapy Poincaré

Rozpatrzmy układ równań różniczkowych

$$\{\dot{x}\} = \{X\{x\}\}, \quad (7.5)$$

określonych na rozmaitości M , która tworzy jego przestrzeń fazową. Rozważmy potok fazowy $g(t, \{x\}) \equiv g^t(\{x\})$ taki, że generuje on pole wektorowe $\{X(\{x\})\}$ określone na rozmaitości M :

$$[X(\{x\})] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g^t(\{x\}) - g^0(\{x\})}{t} = \frac{d}{dt} (g^t(\{x\}))|_{t=0}. \quad (7.6)$$

I odwrotnie, jeśli pole wektorowe $[X(\{x\})]$ jest określone na rozmaitości M , to wyznacza ono potok g^t określony przez (7.6) (patrz Chillingworth [41]).

Orbitę potoku stanowi podzbiór punktów

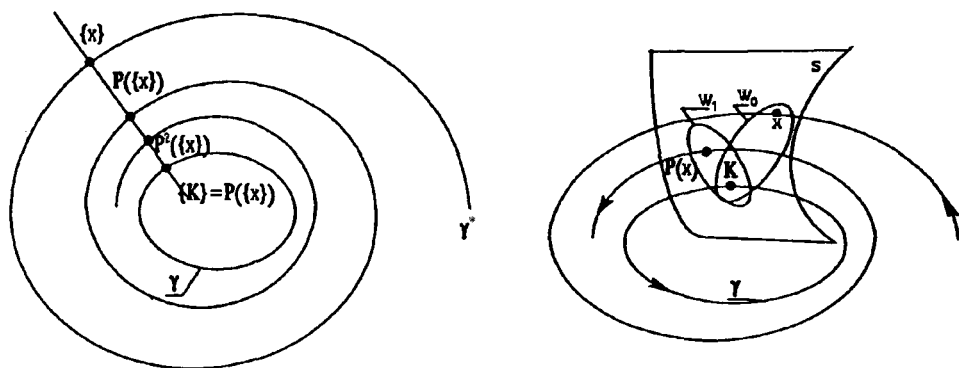
$$\gamma = \{ \{K\} \in M ; \{K\} = g^t(\{x\}) ; t \in \mathbb{R}^1 \}, \quad (7.7)$$

gdzie $\{x\}$ jest wartością stałą, a t zmienną. Orbita jest krzywą leżącą na rozmaitości M i jest trajektorią układu (7.5). Jeśli (7.5) posiada rozwiązanie okresowe o okresie T , to $g^{t+T}(\{x\}) = g^t(\{x\})$, $t \in \mathbb{R}^1$ i orbita (7.7) jest zamknięta. Orbitami potoku g^t są krzywe całkowite pola wektorowego $[X(\{x\})]$.

Rozpatrzmy krzywą zamkniętą potoku fazowego g^t . Wybierzmy dowolny punkt $\{K\}$ należący do tej krzywej i niech S przecina ją transwersalnie w tym punkcie (rys. 7.6).

Mapa powstaje z orbit potoku fazowego g^t w sposób następujący. Weźmy punkt $\{x\} \in S$ i oznaczmy przez γ^* orbitę potoku g^t przechodzącą przez $\{x\}$. Oznaczmy pierwsze przecięcie orbity γ^* z S przez $P(\{x\})$. $P(\{x\})$ jest wartością mapy Poincaré w punkcie $\{x\}$. Własność mapy Poincaré (tzn. czy $P(\{x\})$ jest odwzorowaniem zwięzającym czy rozszerzającym) determinuje zachowanie się orbit bliskich γ i analiza ich zachowania pozwala stwierdzić, czy γ jest zbiorem przyciągającym czy odpychającym. Punkt $\{K\}$ jest punktem stałym mapy Poincaré i istnieje jednoznaczny związek pomiędzy stałymi punktami mapy i zamkniętymi orbitami potoku g^t . Niech γ będzie orbitą zamkniętą potoku g^t i niech istnieje $T > 0$ takie, że $g^{t+T}(\{K\}) = g^t(\{K\})$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}^1$. Wówczas T jest okresem orbity γ . Niech S będzie transwersalną powierzchnią tnącą γ w punkcie $\{K\} \in \gamma$. Odwzorowanie Poincaré jest to taka mapa P przekształcająca $W_0 \rightarrow W_1$, gdzie W_0 i W_1 są otwartymi otoczeniami punktu $\{K\} \in S$,





Rys. 7.6. Tworzenie map Poincaré

$$P(\{x\}) = g^{\tau(\{x\})}(\{x\}) = g(\tau(\{x\}), \{x\}), \quad (7.8)$$

gdzie $\tau : W_0 \rightarrow R^1$, $\tau(\{K\}) = T$ i τ jest takie, że dla $t \in (0, \tau(\{x\}))$, $g^t(\{x\}) \notin S$ (patrz rys. 7.6). Warunek $\tau(\{K\}) = T$ powoduje, że $P(\{K\}) = \{K\}$, ponieważ $P(\{K\}) = g^{\tau(\{K\})}(\{K\}) = g^T(\{K\}) = g^0(\{K\}) = \{K\}$. Obecność funkcji τ w (7.8) wyraża fakt, że dla $\{x\} \in S$ i $\{x\} \in \{K\}$ punkt $g^T(\{x\})$ leży albo przed albo za powierzchnią S .

Rozpatrzmy teraz aplikacyjne własności mapy Poincaré (patrz Moon [42]). Rozważmy ruch w układzie dwuwymiarowym na płaszczyźnie fazowej. Obserwację takiego ruchu można prowadzić dla pewnych dyskretnych wartości czasu. Wtedy ruch reprezentowany jest przez zbiór punktów na płaszczyźnie fazowej. Jeśli $x_n \equiv x(t_n)$ i $y_n \equiv y(t_n)$, to zbiór punktów na płaszczyźnie fazowej reprezentuje dwuwymiarową mapę

$$\begin{aligned} x_n &= f_1(x_n, y_n), \\ y_n &= f_2(x_n, y_n). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Rozważmy ruch układu o jednym stopniu swobody z siłą wymuszającą posiadającą okres T . Wówczas pojawia się naturalna reguła wyznaczania punktów mapy poprzez przyjęcie $t_n = nT + t_0$. Jeżeli ruch jest czysto okresowy o okresie T , to na mapie otrzymujemy jeden punkt. Ruch z trzecią subharmoniczną jest zbiorem trzech punktów (powiadamy wówczas, że mapa posiada trzy stałe

punkty). W przypadku występowania w układzie dwóch niewspółmiernych częstości (ruchy quasiokresowe) punkty mapy układają się w krzywe zamknięte. Pozostałe bardziej skomplikowane zbiory punktów mapy mogą być interpretowane jako ruchy nieregularne (chaotyczne).

7.2.2 Wykładniki Lapunowa

Do oceny zbieżności lub rozbieżności trajektorii potoku fazowego służą wykładniki Lapunowa (patrz Oseledec [43], Benettin, Galgani i Strelcyn [44], Shimada i Nagashima [45]) i są ważnym narzędziem służącym do wykrywania chaosu. Dodatkowo wartości wykładników świadczą o rozbieżności orbit i chaosie.

Wykładnik Lapunowa zdefiniujemy w oparciu o równanie

$$\lambda = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\xi(t)|. \quad (7.10)$$

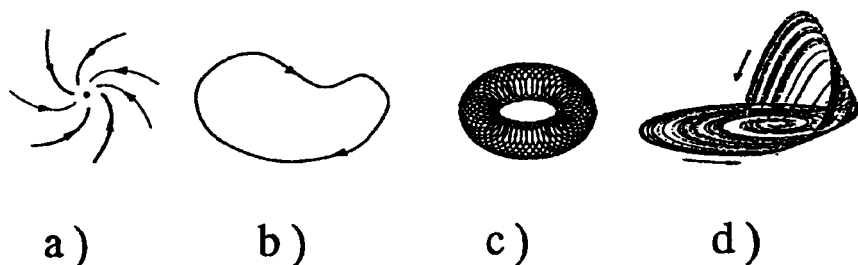
gdzie $\{\xi(t)\}$ jest trajektorią fazową i t oznacza czas.

Tak zdefiniowany wykładnik charakteryzuje eksponencjalną rozbieżność lub zbieżność trajektorii otaczających trajektorię badaną.

Dla układów o wymiarze większym od jednego istnieje zbiór albo spektrum wykładników Lapunowa z których każdy charakteryzuje orbitalną rozbieżność w pewnym kierunku. Na przykład trójwymiarowa przestrzeń fazowa atraktora Lorenza posiada trzy wykładniki Lapunowa, z których każdy opisuje zachowanie się pewnych wybranych dwóch sąsiednich trajektorii. Ogólnie istnieje tyle wykładników Lapunowa, jaki jest wymiar przestrzeni fazowej. Wszystkie dziwne atraktory w trójwymiarowej przestrzeni fazowej posiadają ten sam typ spektrum $(+, 0, -)$: dodatni wykładnik świadczy o chaosie, wykładnik zerowy opisuje wolniejszy od eksponencjonalnego ruch wzdłuż trajektorii, a ujemny wykładnik świadczy o istnieniu w przestrzeni fazowej regularnego atraktora. W trójwymiarowych układach dysypatywnych jedynymi możliwymi typami spektrum są: $(+, 0, -)$ - dziwny atraktor; $(0, 0, -)$ - dwuwymiarowy torus; $(0, -, -)$ - cykl graniczny; $(-, -, -)$ - punkt równowagi. Schematycznie przedstawiono to na rys. 7.7.

Już w układach czterowymiarowych mogą się pojawić trzy rodzaje dziwnych atraktorów chaotycznych o następujących typach spektrum: $(+, +, 0, -)$, $(+, 0, -, -)$ i $(+, 0, 0, -)$.

Rozważmy układ dynamiczny w n -wymiarowej przestrzeni fazowej i prześledźmy ewolucję n nieskończenie małych otoczeń kulistych każdego z n warunków początkowych. Ze względu na deformacje potoku, deformacji ulegają



Rys. 7.7. Atraktory i odpowiadające im spektra wykładników Lapunowa: a) położenie równowagi $\{-, -, -\}$; b) orbita okresowa $\{0, -, -\}$; c) orbita quasiokresowa $\{0, 0, -\}$; d) atraktor chaotyczny $\{+, 0, -\}$

po pewnym czasie kule i przyjmują kształty elipsoid. Weźmy pod uwagę jedną z kul i założmy, że jej środek związany jest z warunkiem początkowym. Środek kuli porusza się wzdłuż trajektorii wyznaczonej przez zadany warunek początkowy, podczas gdy punkty z wnętrza kuli należą do sąsiednich trajektorii. Ponieważ jeden z wykładników Lapunowa rośnie eksponencjalnie, to objętość kuli eksponencjalnie szybko maleje. Te dwa procesy powodują, że kształt kuli ulega deformacjom polegającym na rozciąganiu, zwijaniu i skręcaniu, co prowadzi do bardzo skomplikowanej struktury.

Można dowiedzieć, że suma wykładników Lapunowa charakteryzuje rozbieżność przestrzeni fazowej i że dla układów dysypatywnych wartość ta jest ujemna (Wolf [46]). Benettin et. al. [44] oraz Shimada, Nagashima [45] przedstawili metodę wyznaczania wykładników Lapunowa dla układu równań różniczkowych nieliniowych polegającą na jednoczesnym rozwiązywaniu dodatkowego układu równań różniczkowych liniowych powstałych w wyniku linearyzacji wokół przemieszczającego się punktu wzdłuż badanej trajektorii.

Opis wyznaczania wykładników Lapunowa w przypadku analizy ruchu za pomocą map dyskretnych jak np. mapa Hénona podaje Wolf [46]. Wolf i in. [47] opisują sposób wyznaczania wykładników dysponując danymi wyznaczonymi eksperymentalnie (patrz również Abraham, Gollub i Swinney [48], gdzie podano bogaty zestaw literatury dotyczący tej tematyki).

Schemat obliczeń numerycznych prowadzących do wyznaczenia wykładni-

ków Lapunowa bazuje na następującym rozumowaniu.

Jeśli rozpatrzmy dwie trajektorie fazowe odległe w chwili t_0 o małą wartość w_0 , tj. trajektorię niezaburzoną wyznacza wektor $\{x_0\}$, podczas gdy trajektoria zaburzona zdeterminowana jest przez warunek początkowy $\{x_0\} + \{w_0\}$. Równanie zlinearyzowane ruchu zaburzonego przyjmie postać

$$\frac{d\{w\}}{dt} = [A(\{x(t)\})] \{w(t)\}, \quad (7.11)$$

gdzie macierz $[A]$ powstaje po linearyzacji prawej strony układu równań różniczkowych pierwszego rzędu.

Jeśli zdefiniujemy wskaźnik średniej wykładniczej zbieżności takich dwóch trajektorii według równania

$$\lambda(\{x_0\}, \{w\}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\{w(t)\}\|}{\|\{w_0\}\|}, \quad (7.12)$$

to okazuje się, że λ określone powyższym wzorem istnieje i posiada skończoną wartość. Istnieje n kierunków głównych $\{e_i\}$ wyznaczających wektor $\{w\}$ i takich, że związane są one z n wykładnikami charakterystycznymi Lapunowa zdefiniowanymi poniżej:

$$\lambda_i(\{x_0\}) = \lambda(\{x_0\}, \{e_i\}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.13)$$

Największy wykładnik Lapunowa określa rozbieżność dwóch trajektorii dla prawie wszystkich zaburzeń $\{w_0\}$.

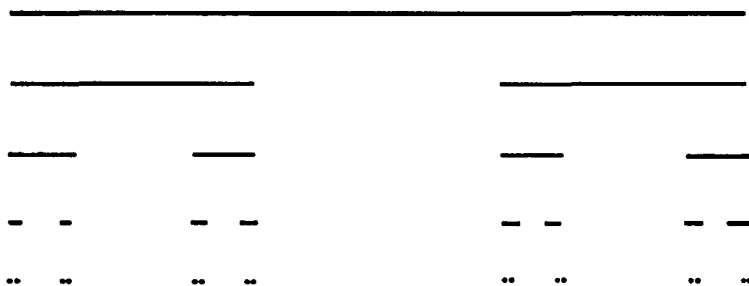
Suma wszystkich wykładników Lapunowa wyznacza zmianę objętości prostopadłościanu o wymiarze n znajdującego się w chwili początkowej w punkcie $\{x_0\}$

$$\lambda_1(\{x_0\}) + \dots + \lambda_n(\{x_0\}) = \Lambda_0(\{x_0\}), \quad (7.14)$$

gdzie Λ_0 jest wartością średnią wskaźnika zmiany objętości potoku fazowego. Najczęściej spotykane w układach fizycznych układy zwane dysypatywnymi, charakteryzuje zmniejszanie się objętości potoku fazowego ze wzrostem czasu. Układ autonomiczny nazywać będziemy dysypatywnym, jeśli jego rozwiązania są nieskończenie przedłużalne w czasie oraz jeśli poczynając od pewnej chwili czasowej znajdują się w pewnej kuli, której już nie opuszczają. Można pokazać, że wskaźnik zmiany objętości $\Lambda(\{x\})$ jest dla układów nieliniowych wielkością lokalną, jest równy dywergencji pola wektorowego i może być dodatni lub ujemny. W układach dysypatywnych potok fazowy zmniejsza swą objętość, wobec tego średnia wartość wskaźnika Λ_0 musi być ujemna dla wszystkich warunków początkowych $\{x_0\}$ i wobec tego z równania (7.14) wynika, że dla układów dysypatywnych suma wszystkich wykładników Lapunowa jest ujemna.

7.2.3 Wymiar ułamkowy

Wymiar atraktora jest wygodną miarą wskazującą na liczbę stopni swobody punktu leżącego na tym atraktorze. Klasyczne atraktory posiadają wymiary całkowite i tak np. punkt równowagi posiada wymiar zero, orbita okresowa posiada wymiar 1, a orbita quasiokresowa posiada wymiar 2. Dziwny atraktor chaotyczny nie pokrywa jednak w sposób gęsty rozmaitości o wymiarze całkowitym w przestrzeni fazowej. Reprezentuje on twór bardziej złożony niż orbita quasiokresowa, a jednocześnie wymiar jego musi być mniejszy od wymiaru odpowiadającemu atraktorowi przestrzennemu, który jest równy liczbie 3. Można więc oczekiwać, że atraktor chaotyczny posiada wymiar ułamkowy $2 < d < 3$. Posiada on ponadto własności zbioru Cantora. Konstrukcję takiego zbioru (fraktalu) opisano poniżej. Weźmy odcinek o długości 1 i usuńmy z niego część środkową o długości $1/3$. W podobny sposób postąpimy z dwoma pozostałymi odcinkami. Kontynuując w podobny sposób dalszą konstrukcję (patrz rys. 7.8) przy ilości operacji dążącej do nieskończoności w efekcie otrzymujemy zbiór punktów granicznych o długości zero.



Rys. 7.8. Ilustracja procesu tworzenia zbioru Cantora

W celu geometrycznej ilustracji pojęcia wymiaru atraktora pokryjmy badany zbiór w przestrzeni R^n za pomocą n -wymiarowych sześcianów o boku ϵ i obliczmy ich minimalną liczbę $N(\epsilon)$ potrzebną do pokrycia całego zbioru. Liczba takich sześcianów konieczna do pokrycia d -wymiarowego zbioru jest w przybliżeniu (dla małych ϵ) proporcjonalna do $1/\epsilon^d$. Można łatwo zauważyć, że dla punktu, linii i powierzchni ich liczba jest proporcjonalna do $1/\epsilon^0, 1/\epsilon^1$ i

$1/\varepsilon^2$, skąd automatycznie otrzymujemy ich wymiary.

Wymiar ułamkowy podzbioru n -wymiarowej przestrzeni fazowej definiujemy jako

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}. \quad (7.15)$$

Dla układu Lorenza wymiar ten wynosi $d = 2,06$. Procedura obliczeniowa przeprowadzona według wzoru (7.15) jest jednak kłopotliwa w bezpośrednim użyciu. Grassberger i Procaccia [49] zaproponowali inną metodę opartą na użyciu funkcji korelacji $C(r)$. Jeśli $\{x_i\}$ reprezentuje wektor w przestrzeni fazowej w chwili czasu t , to dla zbioru N próbek ($N \sim 10^3 \div 10^4$) konstruujemy kule o promieniach r leżące w każdym punkcie x_i i zliczamy punkty należące do każdej z tych kul. Funkcję korelacji definiujemy jako

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_i \sum_j H(r - \|x_i - x_j\|), \quad (7.16)$$

gdzie $H(s) = 1$ dla $s \geq 0$ i $H(s) = 0$ dla $s < 0$. Grassberger i Procaccia pokazali, że

$$\lim_{r \rightarrow 0} C(r) = r^d, \quad (7.17)$$

skąd otrzymujemy

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln C(r)}{\ln r}. \quad (7.18)$$

Funkcja korelacji $C(r)$ jest miarą prawdopodobieństwa, że dwa punkty atraktora znajdują się w odległości nie większej niż r . Pomiedzy wprowadzonym wcześniej pojęciem wykładników charakterystycznych, a pojęciem wymiaru ułamkowego istnieje związek

$$d = m = \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i}{|\lambda_m + 1|}, \quad (7.19)$$

gdzie m jest największym indeksem dla którego $\sum_{i=1}^m \lambda_i \geq 0$, jeśli $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$.

7.2.4 Widmo częstości i funkcja autokorelacji

Analiza widma częstości należy do najbardziej popularnych narzędzi stosowanych w pracy inżynierskiej. Widmo takie może być otrzymane na drodze symulacji numerycznej przy użyciu szybkiego przekształcenia Fouriera (FFT), lub też otrzymuje się je na ekranie analizatora widma podczas analizy realnego obiektu w warunkach laboratoryjnych.

Transformacja danego przebiegu z dziedziny czasu w dziedzinę częstości może być opisana wzorem

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| 2 \int_{-T}^{+T} x(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2. \quad (7.20)$$

Wszystkie atraktory regularne posiadają widmo częstości dyskretne. W odróżnieniu od nich, dziwne atraktory chaotyczne charakteryzują się „rozmytym” widmem częstości.

Inną metodą testującą chaotyczność trajektorii jest funkcja korelacji przebiegu $x(t)$ o postaci

$$K(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t+T)x(t) dt. \quad (7.21)$$

Funkcja ta w przypadku, gdy badany sygnał jest okresowy jest również okresowa. Dla trajektorii chaotycznej $K(\tau) \rightarrow 0$, jeśli $\tau \rightarrow \infty$.

7.2.5 Uwagi ogólne

Podsumowując rozważania tego podrozdziału należy podkreślić, że aby dokonać pełnej identyfikacji dziwnego atraktora chaotycznego należy wykorzystywać możliwie wiele różnych testów numerycznych pozwalających uzyskiwać przebiegi czasowe, portrety fazowe (projekcje atraktora na wybrane osie współrzędnych), widma częstości, funkcje autokorelacji, wykładniki Lapunowa czy wymiary ułamkowe.

W tabeli 7.1 zestawiono wymienione wyżej charakterystyki dla czterech podstawowych atraktorów, jakimi są: położenie równowagi, orbita okresowa, orbita quasiokresowa oraz dziwny atraktor chaotyczny.

Niech wymiar układu odpowiada liczbie opisujących go równań różniczkowych pierwszego rzędu. Układ jednowymiarowy dysypatywny opisany jest tylko

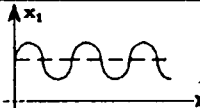
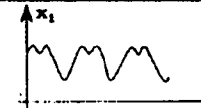
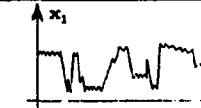
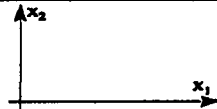
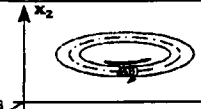
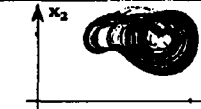
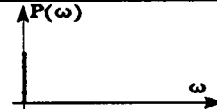
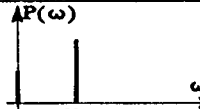
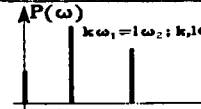
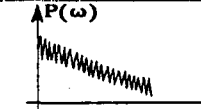
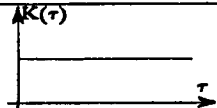
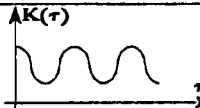
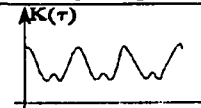
Rodzaj atraktora charakterystyka	Punkt	Orbita okresowa	Orbita quasiokresowa	Dziwny atraktor chaotyczny
Przebieg czasowy				
Portret fazowy				
Widmo częstotliwości				
Funkcja autokorelacji				
Wykładniki Lapunowa	$(-, -, -)$	$(0, -, -)$	$(0, 0, -)$	$(+, 0, -)$
Wymiar ułamkowy	0	1	2	$2 < d < 3$

Tabela 7.1.

jedną zmienną $x(t)$, która przy $t \rightarrow \infty$ dąży do położenia równowagi statecznej, które jest węzłem statecznym. Wykładnik charakterystyczny jest wówczas mniejszy od zera, bo z założenia o dysypatywności wynika $\Lambda_0 < 0$.

Układy dwuwymiarowe odpowiadają autonomicznym układom o jednym stopniu swobody, czyli opisanym równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu. Atraktorami możliwymi do pojawienia się w takich układach są położenia równowagi i orbity okresowe. Jeśli założymy, że układ jest dysypatywny, to zgodnie ze wzorem (7.14) mamy

$$\Lambda_0 = \lambda_1 + \lambda_2 < 0. \quad (7.22)$$

Jeśli oba wykładniki charakterystyczne są ujemne, to atraktorem jest asymptotycznie stateczne (w sensie Lapunowa) położenie równowagi. Jeśli $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 < 0$, to atraktorem jest asymptotycznie stateczna (w sensie Lapunowa) orbita okresowa.

Wreszcie przypadek układów dysypatywnych trójwymiarowych wprowadza jakościowe nowe elementy. Zgodnie z założeniami o dysypatywności suma wykładników charakterystycznych

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0. \quad (7.23)$$

Takie układy generalnie posiadają cztery topologicznie różne atraktory (Rudowski [50]). Jeśli $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ i $\lambda_1 < 0$, to wówczas atraktorem jest asymptotycznie stateczne położenie równowagi. Jeśli $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ i $\lambda_1 = 0$, to wówczas atraktorem jest asymptotycznie stateczna orbita okresowa. Jeśli $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ i $\lambda_3 < 0$, to wówczas atraktorem jest stateczna orbita quasiokresowa. I wreszcie jeśli $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 < 0$ i $|\lambda_3| > \lambda_1$ to potok fazowy, pomimo że jeden z wykładników charakterystycznych jest dodatni zmniejsza swą objętość ze względu na dysypatywność układu i trajektorie powracają w okolice swych początkowych obszarów tworząc w efekcie specyficzny atraktor, zwany dziwnym atraktorem chaotycznym.

7.3 Metoda Mielnikowa

Podstawowe założenia tej metody podane zostały przez Mielnikowa [51]. Ostatnio Chow, Hale i Mallet-Paret [52] stosując inne podejście otrzymali podobne rezultaty. Holmes i Marsden [53] stosowali ją z powodzeniem do pewnych nieskończone wymiarowych potoków generowanych przez cząstkowe równania



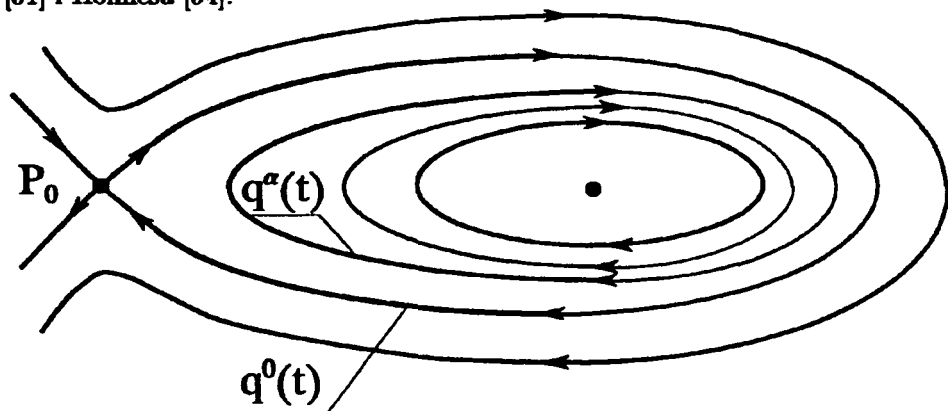
różniczkowe i do autonomicznych układów Hamiltona o wielu stopniach swobody. Podstawową ideą tej metody jest wykorzystanie rozwiązania całkowalnego niezaburzonego układu równań do rozwiązania układu zaburzonego. Rozważmy układ

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t), \quad x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in R^2, \quad (7.24)$$

gdzie:

$$\{f\} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \quad \{g\} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}, \quad (7.25)$$

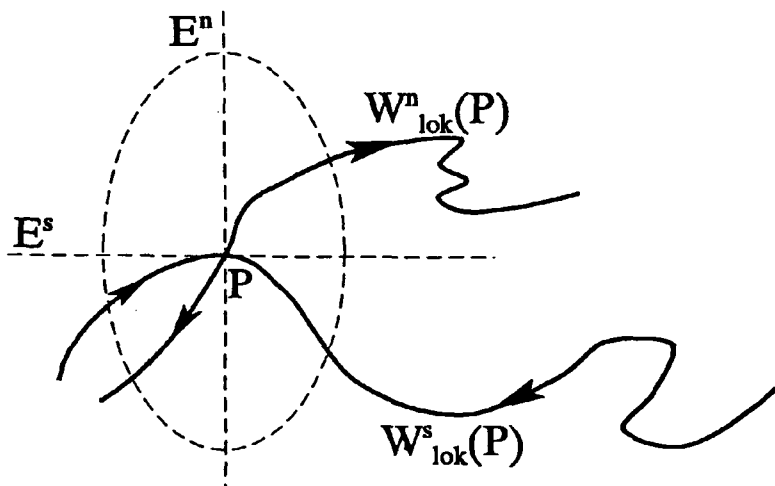
są funkcjami dostatecznie gładkimi i ograniczonymi oraz g posiada okres T ze względu na t . Zakładamy, że układ niezaburzony jest hamiltonowskim z $f_1 = \frac{\partial H}{\partial v}$ i $f_2 = -\frac{\partial H}{\partial u}$. Układ niehamiltonowski rozważany był przez Mielnikowa [51] i Holmesa [54].



Rys. 7.9. Rodzina rozwiązań okresowych z punktem siodłowym p_0

Generalnym założeniem tej metody jest to, że układ (7.24) posiada punkt hiperboliczny (siodłowy) p_0 z homokliniczną orbitą $\Gamma^0 = \{q^0(t) | t \in R\}$ taki, że $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} q^0(t) = p_0$. Załóżmy dalej, że wewnątrz Γ^0 znajduje się rodzina rozwiązań okresowych $\Gamma^\alpha = \{q^\alpha(t) | \alpha \in (-1, 0), t \in [0, T_\alpha]\}$, gdzie T_α jest okresem orbity $q^\alpha(t)$ oraz $\lim_{\alpha \rightarrow 0} q^\alpha(t) = q^0(t)$ i $\lim_{\alpha \rightarrow -1} q^\alpha(t) = q^{-1}$ jest punktem eliptycznym lub centrum (rys. 7.9).

Założmy, że mapa Poincaré posiada punkt hiperboliczny stały P . Z twierdzenia o centralnej rozmaiłości wynika, że w otoczeniu $U(P)$ istnieją lokalnie gładkie rozmaiłości $W_{\text{lok}}^s(P)$, $W_{\text{lok}}^u(P)$ styczne do E^s i E^u (gładkość lokalna rozmaiłości nie oznacza ich gładkości globalnej - rys. 7.10).



Rys. 7.10. Lokalnie gładkie rozmaiłości w otoczeniu punktu hiperbolicznego P

Homoklinicznym punktem q do hiperbolicznego siodłowego punktu P nazywać będziemy punkt należący jednocześnie do rozmaiłości statecznej i niestatecznej punktu siodłowego ($q \in W^u(p) \cap W^s(p)$). Okazuje się, że istnienie jednego punktu przecięcia $W^u(p)$ i $W^s(p)$ powoduje, że istnieje ich nieskończenie wiele (patrz Palis [55]). Prawdziwe są również twierdzenia:

Twierdzenie 7.1

Dla ε dostatecznie małych układ równań (7.24) posiada jedną hiperboliczną okresową orbitę $\gamma_\varepsilon(t) = p_0 + O(\varepsilon)$. Odpowiednio mapa Poincaré posiada jeden punkt hiperboliczny siodłowy $p_\varepsilon^0 = p_0 + O(\varepsilon)$.

Twierdzenie 7.2

Lokalnie stateczne i niestateczne rozmaiłości $W_{\text{lok}}^s(\gamma_n)$, $W_{\text{lok}}^n(\gamma_\epsilon)$ orbity okresowej zaburzonej są bliskie do niezaburzonej. Co więcej, orbity $q_\epsilon^s(t, t_0)$ i $q_\epsilon^n(t, t_0)$ leżące na rozmaiłościach $W^s(\gamma_\epsilon)$ i $W^n(\gamma_n)$ mogą być przedstawione w postaci:

$$\begin{aligned} q_\epsilon^s(t, t_0) &= q^0(t - t_0) + \varepsilon q_1^s(t, t_0) + O(\varepsilon^2), \quad t \in (t_0, \infty), \\ q_\epsilon^n(t, t_0) &= q^0(t - t_0) + \varepsilon q_1^n(t, t_0) + O(\varepsilon^2), \quad t \in (-\infty, t_0), \end{aligned} \quad (7.26)$$

przy czym $q_1^*(n)$ są rozwiązaniami następujących równań różniczkowych:

$$q_1^{s(n)}(t, t_0) = Df[q^0(t - t_0)] q_1^{s(n)}(t, t_0) + g[q^0(t - t_0), t]. \quad (7.27)$$

Odległość rozmaiłości $W^n(p_\epsilon^0)$ i $W^s(p_\epsilon^0)$ dla $t = t_0$ w punkcie $q^0(0)$ wynosi

$$d(t_0) = q_\epsilon^n(t_0) - q_\epsilon^s(t_0), \quad (7.28)$$

gdzie: $q_\epsilon^{n(s)}(t_0) = q_\epsilon^{n(s)}(t_0, t_0)$ i są to punkty na rozmaiłościach $W^n(p_\epsilon^0)$ i $W^s(p_\epsilon^0)$ leżące w pobliżu p_ϵ^0 i na normalnej do Γ przechodzącej przez punkt $q_0(0)$ (rys. 7.11).

Odległość ta wyraża się wzorem

$$d(t_0) = \varepsilon \frac{f(q_0) \cap [q_\epsilon^n(t_0) - q_1^s(t_0)]}{|f[q_0(0)]|} + O(\varepsilon^2), \quad (7.29)$$

przy czym przyjęto, że $a \cap b = a_1 b_2 - a_2 b_1$ i $f \cap (q_1^n - q_1^s)$ jest rzutem $q_1^n - q_1^s$ na $f^\perp$.

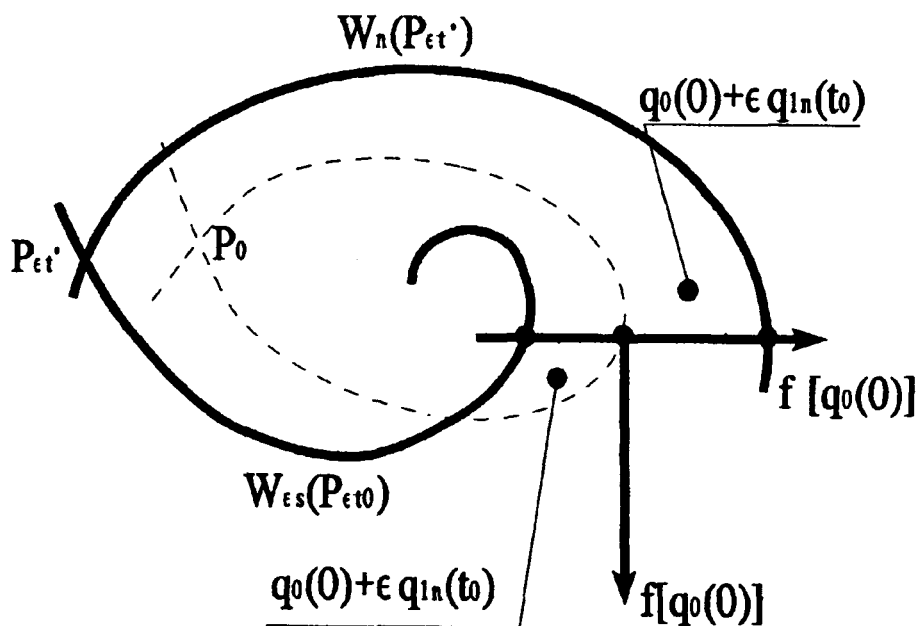
Funkcja Mielnikowa jest zdefiniowana następująco:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f[q_0(t - t_0)] \cap g[q^0(t - t_0), t] dt \quad (7.30)$$

i jest dobrą miarą rozdzielczości rozmaiłości w punkcie $q^0(0)$.

Twierdzenie 7.3

Jeśli $M(t_0)$ posiada proste zera, to dla dostatecznie małych ε rozmaiłości $W^n(p_\epsilon^0)$ i $W^s(p_\epsilon^0)$ przecinają się poprzecznie. Jeśli $M(t_0) \neq 0$, to $W^n(p_\epsilon^0) \cap W^s(p_\epsilon^0) = \emptyset$, gdzie $\emptyset$ oznacza zbiór pusty.



Rys. 7.11. Ilustracja graficzna metody Mielnikowa

Dowody podanych wyżej twierdzeń można znaleźć u Guckenheimera i Holmesa [56] oraz Greenspana i Holmesa [57].

Istnienie orbit homoklinicznych obserwowanych przy użyciu map Poincaré dla różnych układów dynamicznych pociąga za sobą istnienie zbiorów w kształcie podkowy Smale'a (patrz Greenspan i Holmes [57]). Podkowa Smale'a stanowi zbiór policzalny nieskończenie wielu orbit okresowych niestatecznych i zbiór niepoliczalny orbit okresowych statecznych. Istnienie takich podków powoduje dużą wrażliwość na warunki początkowe.

Moon, Cusumano i Holmes [58] na przykładzie wahadła pokazują, że obecność orbit homoklinicznych powoduje powstanie podkowy Smale'a i chaosu.

7.4 Drogi prowadzące do drgań chaotycznych

7.4.1 Wprowadzenie

Istnieje wiele różnorodnych układów dynamicznych nieliniowych, występujących w różnych dziedzinach nauki takich jak mechanika, chemia czy fizyka. Wiele z nich wykazuje dla pewnych parametrów chaotyczną dynamikę. Nasuwa się wobec tego pytanie czy bez względu na różnorodność takich układów dynamicznych istnieją pewne uniwersalne drogi prowadzące do pojawienia się ruchów chaotycznych. W tym podrozdziale dokonano takiej klasyfikacji w oparciu o ogólny przegląd literatury i pracę Swinneya [59]. Warto uczulić tu jednak Czytelnika na to, że przegląd ten ma charakter niepełny i otwarty. Wiąże się to z faktem, że wiele problemów chaotycznej dynamiki nie jest jeszcze w pełni wyjaśnionych i wiele pytań ciągle pozostaje jeszcze otwartych (Abraham i in. [48]). Dotyczy to na przykład przejścia od ruchu prawieokresowego z dwiema częstościami do chaosu. Okazuje się, że ma ono charakter uniwersalny tylko przy pewnych szczególnych warunkach realizacji tego procesu przejścia (Ostlund i in. [60], Feigenbaum i in. [61], Aronson i in. [62]).

7.4.2 Proces nieciągły

Pomeau-Manneville [63] oraz Hirsch i in. [64] analizują przejście do chaosu przy zmianie pewnego parametru bifurkacyjnego R . Przy $R < R_k$ pojawia się ruch okresowy, natomiast dla R niewiele większych od R_k istnieją długie przedziały okresowego ruchu układu poprzedzielane krótkimi zakłóceniami. Ze wzrostem R odległość pomiędzy kolejnymi zakłóceniami maleje, obserwacja ruchu regularnego staje się coraz trudniejsza, aż w końcu niemożliwa. Przykłady takiego

przejścia do chaosu podane są w pracach Pomeau i in. [65], Jeffries-Perez [66], Bergé i in. [67].

7.4.3 Prawieokresowość, okresowość, chaos

W niektórych układach ze wzrostem pewnych wybranych parametrów bifurkacyjnych następuje przejście od ruchu prawie okresowego do okresowego i następnie do chaosu. Przejście takie analizowane było przez Glassa-Pereza [70] czy Steena-Davisa [69].

7.4.4 Okresowość, prawieokresowość, chaos

Możliwość takiego przejścia pokazali najpierw Ruelle i Takens [70]. Natomiast Swinney i Gollub [59] podali przykład układu fizycznego, w którym ten mechanizm przejścia się pojawia. Według schematu Ruella-Takensa (patrz również Newhouse, Ruelle, Takens [71]) jeśli układ przechodzi od ruchu prawie okresowego z dwiema częstościami do ruchu prawie okresowego z trzema niewspółmierzalnymi częstościami, to w rezultacie potok może być niestacyczny w tym sensie, że dowolnie małe perturbacje mogą doprowadzić do powstania dziwnego atryktora. Należy jednak podkreślić, że ta prawidłowość nie zawsze jest słuszna. Grebogi, Ott i Yorke [72] badali układ dynamiczny na trójwymiarowym torusie i okazało się, że o ile duże perturbacje czasami powodują powstanie chaosu, to jeśli amplituda zaburzeń jest mała zachodzi to bardzo rzadko i tylko przy pewnych specjalnie wybranych parametrach.

Inne alternatywne teoretyczne diagramy przejścia od ruchu prawie okresowego do chaosu zostały przedstawione ostatnio przez Randa i in. [75] i Shenkera [74].

7.4.5 Bifurkacje prowadzące do dwojenia okresu

Teoretyczne podstawy przejścia do chaosu poprzez dwojenie okresu podane zostały przez Feigenbauma [75], Colleta-Eckmana [76] i Lanforda [77]. Ten pierwszy pokazał, że jeśli przy zmianie pewnego parametru δ następują kolejne bifurkacje, to jeśli przez Λ_n oznaczymy wartość parametru, dla którego okres podwaja się, to $\delta_n = \frac{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n}{\Lambda_{n+2} - \Lambda_{n+1}}$ i wartość δ_n dąży do pewnej uniwersalnej stałej. Takie przejście obserwowane było w układach rzeczywistych podczas konwekcji Reyleigha-Benarda (Giglio i in. [78], Gollub i Benson [79], Libchaber i in. [80]), w nieliniowych oscylatorach elektrycznych (Linsay [81], Testa i in. [82]),

w układach akustyki (Lauteborn-Cramer [83]), czy podczas reakcji Belousova - Zhabotinskiego (Simoyi i in. [84]).

7.4.6 Proces typu U

Jednowymiarowe mapy z pojedynczym ekstremum wykazują pewne uniwersalne własności dynamiczne w funkcji parametru bifurkacyjnego. Oprócz kolejnego procesu podwajania okresu (przy czym w każdym nowo powstałym okresie występuje tylko jedna oscylacja) możliwe są również stany okresowe z k -oscylacjami w ciągu okresu i każdy k -ty cykl ulega kolejnemu podwajaniu okresu aż do nieskończoności (patrz Collet i Eckmann [76], czy Guckenheimer [85]).

7.4.7 Proces przemienny typu: ruch okresowy – chaos

Tego typu proces obserwowalny był w reakcji Belousova-Zhabotinskiego (Roux-Swinney [86]). Proces taki może zachodzić również w układach mechanicznych podczas drgań, jak wahadła (P'Humiers i in. [87]), czy w oscylatorze van der Pola (Levi [88]). Roux i in. [89] podaje przykład jednowymiarowej mapy, gdzie jest obserwowalny taki proces. Charakteryzuje się on tym, że: a) jest skończony w pewnym zakresie zmian parametrów, b) stany okresowe są proste, c) ruchy chaotyczne występują łącznie z ruchami okresowymi, d) każdy reżim chaotyczny może zawierać wiele podprzedziałów, które są okresowe.

7.4.8 Zjawisko kryzysu

Grebogi i Ott [90] dokonali analizy i zilustrowali przykładami pojawianie się nagłych jakościowych zmian w chaotycznej dynamice układu przy zmianie parametru bifurkacyjnego. Pokazano, że takie zmiany mogą powstawać w wyniku kolizji niestatecznej orbity okresowej i istniejącego chaotycznego atraktora. Kolizję tę określono mianem kryzysu. Zjawiska towarzyszące kryzysowi powodują nagłe zmiany rozmiarów chaotycznych atraktorów lub też ich gwałtowne pojawianie się albo znikanie.

7.5 Podsumowanie i uwagi końcowe

Niniejszy rozdział uwypukla i ilustruje najważniejsze cechy dynamiki chaotycznej. Na przykładzie układu Lorenza przeprowadzono dość szczegółową analizę

zjawisk towarzyszących lub poprzedzających ruch chaotyczny w jednym z najstarszych i najprostszych układów mechanicznych. Omówione zostały również metody numeryczne służące do testowania chaosu takie jak mapy Poincaré, wykładniki Lapunowa, wymiary ułamkowe, widmo częstości, funkcje autokorelacji i metoda Mielnikowa. Przedyskutowano również główne analizowane dotąd drogi prowadzące do ruchów chaotycznych. Ze względu na stosunkowo skrócone omówienie problematyki dotyczącej ruchów chaotycznych rozdział ten został uzupełniony w bogatą literaturę, co z pewnością pozwoli Czytelnikowi na głębsze zapoznanie się z poruszonym zagadnieniem.



Rozdział 8

Wstęp do teorii katastrof

8.1 Wprowadzenie

Przedmiotem zainteresowań teorii katastrof jest jakościowa analiza wpływu parametrów układu na rozwiązania równań różniczkowych opisujących ich dynamikę [93]. Jeśli parametry tego układu mogą w sposób istotny (jakościowy) wpływać na własności rozwiązania, to będziemy nazywać je parametrami kontrolnymi. Rozważania w tym rozdziale ograniczymy do autonomicznych układów dynamicznych

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x, \Lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n, \Lambda \in \mathbb{R}^k, \quad (8.1)$$

gdzie $\{x\}$ jest wektorem stanu układu, a Λ zbiorem parametrów kontrolnych (dalej zakładamy będziemy $k \leq n$). Dla układów zachowawczych istnieje możliwość znacznego uproszczenia rozważań. Wówczas prawe strony (8.1) mogą być zadane w postaci potencjału

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i(x, \Lambda), \quad (8.2)$$

i dla takich układów równanie (8.1) przyjmie postać

$$\dot{x} = \nabla_x V, \quad (8.3)$$

gdzie $\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}$.

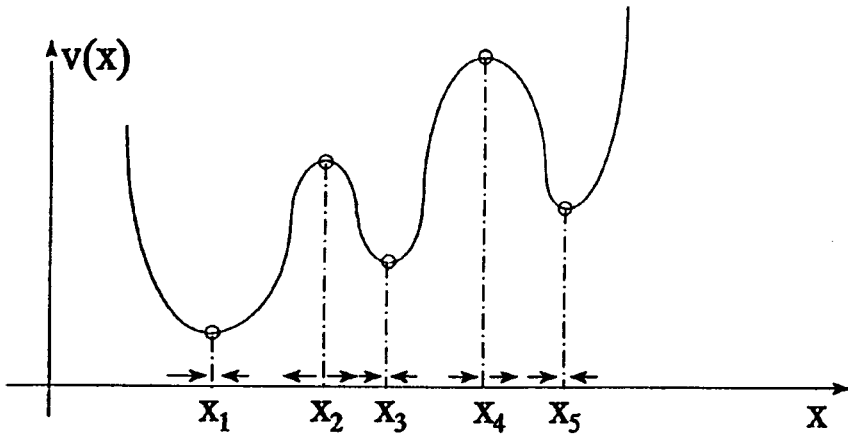
Kolejnym uproszczeniem jest prowadzenie analizy tylko zmian jakościowych położenia równowagi układu (8.3) i wówczas zagadnienie redukuje się do analizy układów równań algebraicznych



$$\nabla_x V(x, \Lambda) = 0. \quad (8.4)$$

Układy równań (8.4) mogą nie mieć żadnego rozwiązania, mogą mieć jedno lub mogą mieć ich kilka. Zależy to od rodzaju potencjału i od wartości parametrów $\lambda_i \in \Lambda$.

Rozpatrzmy typowy potencjał $V(x)$ przedstawiony na rys. 8.1.



Rys. 8.1. Przykład potencjału $V(x)$ z zaznaczeniem stateczności położenia równowagi

Dla dowolnego punktu hiperpowierzchni $V(x)$ zachodzi związek $\nabla V \neq 0$. Punkty krytyczne, w których $\nabla V = 0$ spotyka się bardzo rzadko (na rys. 8.1 jest ich pięć). Jednak właśnie one mają bardzo duże znaczenie, bo oddzielają obszary o jakościowo odmiennym przebiegu $V(x)$ w ich otoczeniu. Widać to wyraźnie na przykładzie układu jednowymiarowego z rysunku, przy czym położenia x_1 , x_2 i x_3 odpowiadają atraktorom, natomiast x_2 i x_4 są siodłami.

Bardziej złożona sytuacja powstaje w przypadku $x \in \mathbb{R}^2$. Odpowiada to sytuacji spotykanej na terenach pofałdowanych (górzskich). Krajobraz górski charakteryzuje się szczytami, dolinami, ścieżkami prowadzącymi po szczytach

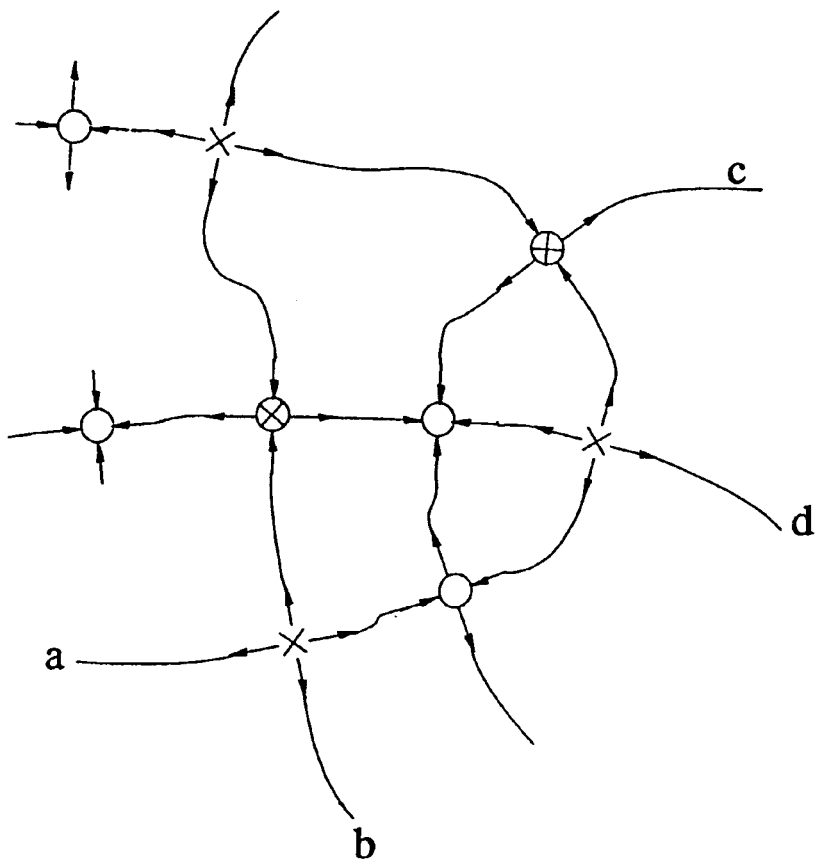
itd. Ta analogia znajduje zastosowanie w teorii układów dynamicznych (rys. 8.2).

Zamiast rysowania skomplikowanych kształtów powierzchni zagadnienie znacznie się upraszcza, jeśli zaznaczymy na schemacie tylko istotne punkty i możliwe szlaki. Na rysunku jest ich cztery i oznaczono je małymi literami a, b, c, d. Kółkami oznaczono dna jezior leżących w dolinach zwanych również basenami przyciągania (lokalne minima), do których prowadzą szlaki za szczytów oznaczonych krzyżykami (lokalne maksima). Kółka z krzyżykami w środku oznaczają przełęcze (lokalne siodła). Dodatkowo schemat ten może być uzupełniony o wykresy warstwicy otrzymane w wyniku przecięć powierzchni $V(x_1, x_2) = \text{const}$ równoległymi płaszczyznami [93]. Kierunki strzałek w danym punkcie określa się na podstawie analizy stateczności w rozważanym punkcie, tj. lokalnej linearyzacji w oparciu o macierz $[V_{ij}]$. Diagonalizacja tej macierzy pozwala określić kierunki osi głównych (np. kierunek, w którym należy się poruszać, aby osiągnąć maksimum lub minimum). Wartości własne odpowiadają wielkości wartości siły działającej w tym punkcie w kierunku głównym określonym przez odpowiadający danej wartości własnej wektor własny (zaznacza się to strzałką, a długość strzałki jest proporcjonalna do wartości siły).

Jeśli wyobrazimy sobie teraz teren górzisty w dużym zmniejszeniu i wykonamy np. jego model z plasteliny oraz napelnimy go wodą, to będzie ona gromadzić się na dnach dolin. Minima, które będą wodę przyciągać, nazywać będziemy atraktorami (przyciągaczami). Każdy z atraktorów znajduje się w niecce zwanej basenem przyciągania. Linie siodła i szczyty oddzielają od siebie baseny przyciągania.

Rozpatrzmy rodzinę potencjałów $V(x, \Lambda)$ i niech dla pewnego zbioru parametrów kontrolnych Λ° funkcja $V(x, \Lambda^\circ)$ posiada tylko punkty krytyczne izolowane tj. rozwiązania x_0 równania (8.4). Zbadajmy zmianę położenia tych punktów towarzyszące zmianom parametrów kontrolnych. W tym celu rozpatrzmy rozwinięcie funkcji $V(x, \Lambda)$ w szereg Taylora wokół punktu x_0, Λ° . Jednak w celu uproszczenia dalszych rozważań po przyjęciu $x_0 \in \mathbb{R}^2$ i $\Lambda^\circ \in \mathbb{R}^2$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2) = & V(x_{10}, x_{20}, \lambda_1^0, \lambda_2^0) + (x_1 - x_{10}) \frac{\partial V}{\partial x_1} + \\ & (x_2 - x_{20}) \frac{\partial V}{\partial x_2} + (\lambda_1 - \lambda_1^0) \frac{\partial V}{\partial \lambda_1} + (\lambda_2 - \lambda_2^0) \frac{\partial V}{\partial \lambda_2} + \\ & \frac{1}{2!} (x_1 - x_{10})(x_2 - x_{20}) \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2!} (\lambda_1 - \lambda_1^0)(\lambda_2 - \lambda_2^0) \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} + \end{aligned} \quad (8.5)$$



Rys. 8.2. Interpretacja potencjału $V(x_1, x_2)$ w języku teorii układów dynamicznych

$$(x_1 - x_{10})(\lambda_1 - \lambda_1^0) \frac{\partial V}{\partial x_1 \partial \lambda_1} + (x_2 - x_{20})(\lambda_2 - \lambda_2^0) \frac{\partial V}{\partial x_2 \partial \lambda_2} + \\ (x_1 - x_{10})(\lambda_2 - \lambda_2^0) \frac{\partial V}{\partial x_1 \partial \lambda_2} + (x_2 - x_{20})(\lambda_1 - \lambda_1^0) \frac{\partial V}{\partial x_2 \partial \lambda_1} ,$$

gdzie pochodne obliczne są w punkcie x_0, Λ^0 oraz pozostałe wyrazy szeregu zostały pominięte.

Założmy, że zbiór parametrów został nieco zmieniony

$$\Lambda = \Lambda^0 + \delta \Lambda^0 , \quad (8.6)$$

i postaramy się określić jak ta zmiana wpłynęła na położenie równowagi x_0 .

W położeniach równowagi (patrz rozdział 7.3) $V = 0$ i $\partial V / \partial x_i = 0$ ($i = 1, 2$), wobec tego różniczkując (8.5) i ograniczając się tylko do członów liniowych otrzymujemy

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = (x_2 - x_{20}) \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} + (\lambda_1 - \lambda_1^0) \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda_1 \partial x_1} + (\lambda_2 - \lambda_2^0) \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda_2 \partial x_1} = 0 , \quad (8.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = (x_1 - x_{10}) \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} + (\lambda_1 - \lambda_1^0) \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda_1 \partial x_2} + (\lambda_2 - \lambda_2^0) \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda_2 \partial x_2} = 0 .$$

Jeśli wprowadzamy znaczne zmiany parametrów λ_1 i λ_2 , to odpowiada im zmiana położenia równowagi. Nowe położenia równowagi mogą być znalezione z równań (8.7)

8.2 Katastrofy elementarne

8.2.1 Katastrofa typu A_2

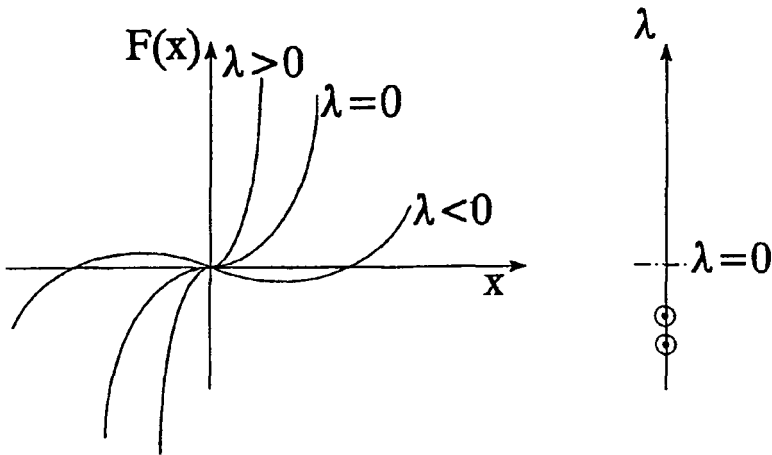
Niech $x \in \mathbb{R}^1$ i $\Lambda \subset \mathbb{R}^1$, wówczas mamy do czynienia tylko z jednym kontrolnym parametrem. Katastrofę tę określa się następującym równaniem

$$F(x, \lambda) = \frac{1}{3} x^3 + \lambda x . \quad (8.8)$$

Różniczkując kolejno (8.8) otrzymujemy

$$x^2 + \lambda = 0 , \quad 2x = 0 . \quad (8.9)$$

Z (8.9) widać, że punkt krytyczny o stopniu degeneracji dwa posiada współrzędne $x = \lambda = 0$. Wobec tego punkt o wartości parametru krytycznego $\lambda = 0$ będzie rozdzielał dwa jakościowo różne przebiegi funkcji $F(x, \lambda)$. Wystarczy więc wziąć dowolną wartość parametru $\lambda \neq 0$ i sporządzić dwa wykresy, aby wyrobić sobie pogląd na możliwe, jakościowo różne, przebiegi tej funkcji. Przedstawiono je na rys. 8.3.



Rys. 8.3. Przykład katastrofy typu A_2 . Krzywa $\lambda = 0$ jest krzywą rozdzielającą obszary z dwoma punktami krytycznymi do obszarów z jednym punktem krytycznym

8.2.2 Katastrofa typu A_3

Zależy ona od dwóch parametrów kontrolnych i jest opisana funkcją

$$F(x, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\lambda_1x^2 + \lambda_2x. \quad (8.10)$$

Katastrofa ta charakteryzuje się istnieniem punktu krytycznego o stopniu degeneracji jeden, dwa i trzy. Odpowiada to kolejnemu różniczkowaniu (8.10):

$$x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2 = 0, \quad (8.11)$$

$$3x^2 + \lambda_1 = 0, \quad (8.12)$$

$$6x = 0. \quad (8.13)$$

Określmy parametry odpowiadające parametrowi krytycznemu o stopniu degeneracji trzy. Z (8.13) otrzymujemy $x = 0$, z (8.12) otrzymujemy $\lambda_1 = 0$ i z (8.11) otrzymujemy $\lambda_2 = 0$.

W podobny sposób określimy parametry odpowiadające punktowi krytycznemu o stopniu degeneracji dwa. Z (8.12) i (8.11) otrzymujemy:

$$\lambda_1 = -3x^2, \quad \lambda_2 = 2x^3. \quad (8.14)$$

Równania (8.14) mogą być interpretowane w ten sposób, że dla dowolnie wybranego punktu x_0 pozwalają wyznaczyć parametry λ_i ($i = 1, 2$) tak, aby x_0 posiadało stopień degeneracji równy dwa. W płaszczyźnie parametrów (λ_1, λ_2) równanie odpowiadające zbiorom takich punktów (punkt taki traktowany jest jako parametr kontrolny) ma postać:

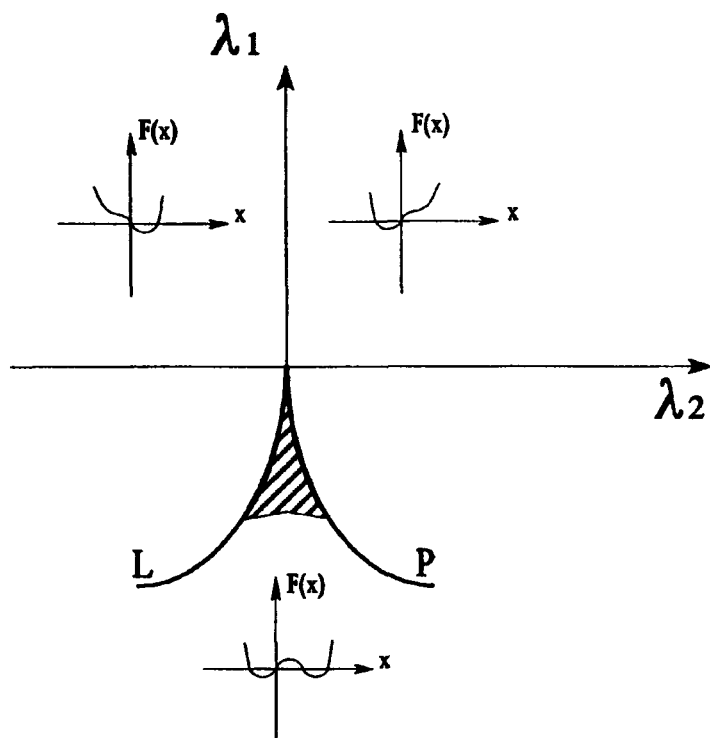
$$\left(\frac{\lambda_1}{3}\right)^3 + \left(\frac{\lambda_2}{2}\right)^2 = 0. \quad (8.15)$$

Podsumowując, w płaszczyźnie parametrów (λ_1, λ_2) mamy jeden punkt $(0, 0)$ o stopniu degeneracji trzy i punkty o stopniu degeneracji dwa leżące na krzywej (8.15). Przedstawiono to na rys. 8.4.

Krzywa określona równaniem (8.15) rozdziela obszar płaszczyzny (λ_1, λ_2) na dwa podobszary. Obszarowi zakreskowanemu odpowiadają funkcje $F(x)$ z trzema punktami krytycznymi, a obszarowi niezakreskowanemu - z jednym punktem krytycznym. Podobnie jak i dla przypadku przedstawionego na rys. 8.3, aby zorientować się w charakterze przebiegu funkcji $F(x)$ w obydwu wyróżnionych obszarach wystarczy wziąć dowolny punkt z tego obszaru i narysować wykres funkcji, który będzie jakościowo podobny i dla innych punktów tego obszaru.

8.2.3 Katastrofa typu A_4

Katastrofę tę charakteryzuje równanie:



Rys. 8.4. Przykład katastrofy typu A_3 z zaznaczeniem krzywej rozdzielającej. Na wykresie zaznaczono również typowe przebiegi $F(x)$

$$F(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}\lambda_1 x^3 + \frac{1}{2}\lambda_2 x^2 + \lambda_3 x. \quad (8.16)$$

Dla tej funkcji istnieją również punkty krytyczne o stopniu degeneracji cztery. Różniczkując kolejno (8.16) otrzymujemy:

$$x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3 = 0, \quad (8.17)$$

$$4x^3 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0, \quad (8.18)$$

$$6x^2 + \lambda_1 = 0, \quad (8.19)$$

$$x = 0. \quad (8.20)$$

Określmy najpierw położenie i parametry odpowiadające punktowi krytycznemu o stopniu degeneracji cztery. Z (8.19) biorąc pod uwagę (8.20) otrzymujemy $\lambda_1 = 0$, a dalej z równań (8.18) i (8.17) $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Wobec funkcja $F(x, 0, 0, 0)$ posiada punkt krytyczny o stopniu degeneracji cztery dla $x = 0$.

Rozpatrzmy teraz krzywe będące zbiorem punktów krytycznych o stopniu degeneracji trzy. Z równań (8.19), (8.18) i (8.17) otrzymujemy:

$$\lambda_1 = -6x^2, \quad (8.21)$$

$$\lambda_2 = 8x^3, \quad (8.22)$$

$$\lambda_3 = -3x^4, \quad (8.23)$$

Z kolei z równań (8.18) i (8.17) można wyznaczyć powierzchnię $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ odpowiadającą punktom krytycznym o stopniu degeneracji dwa:

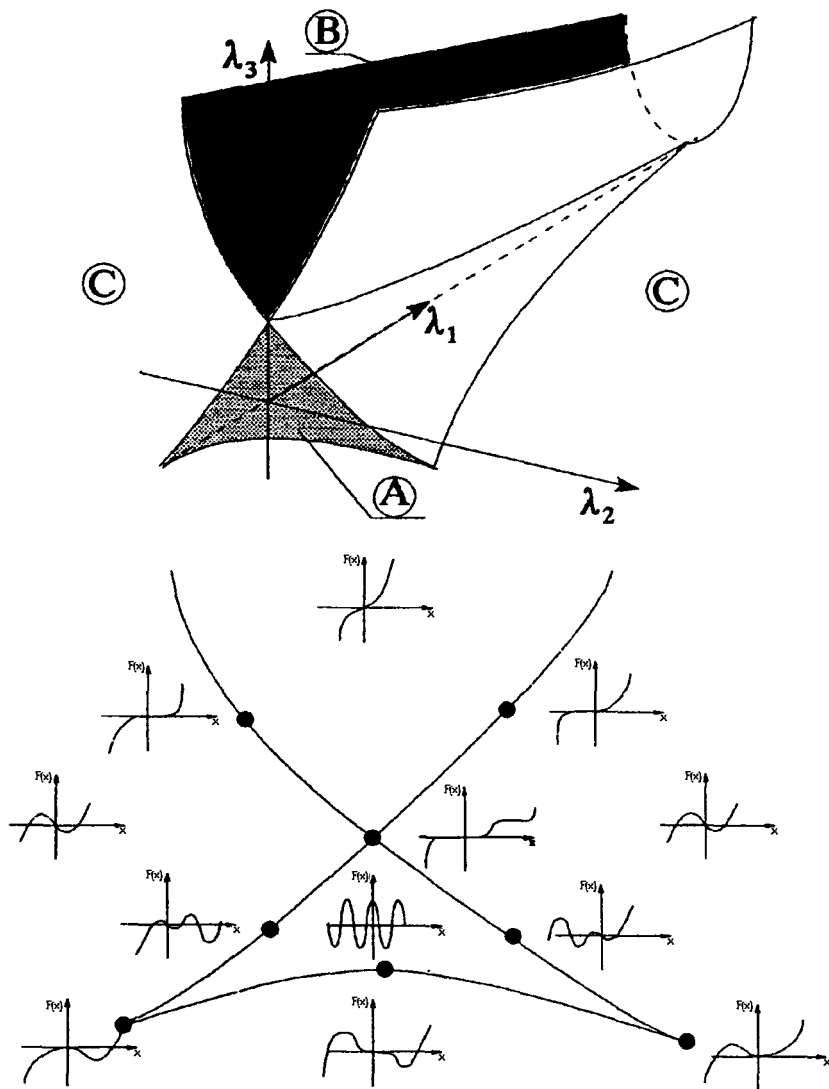
$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -4x^3 - 2\lambda_1 x, \\ \lambda_3 &= -8x^4 + \lambda_1 x^2. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Jak widać z powyższego równania λ_2 i λ_3 są funkcjami x i λ_1 . Przykładowy kształt powierzchni odpowiadających (8.24) przedstawiono na rys. 8.5.

Szczegółowo metodę wyznaczania przedstawionych na rysunku 11.5 powierzchni oraz jakościowy charakter przebiegu krzywych $F(x)$ podano w pracy [93]. Powierzchnie rozdzielające pozwalają na wyróżnienie trzech przestrzeni A, B, C, które charakteryzują jakościowo różne przebiegi funkcji $F(x)$.

W celu określenia charakteru przebiegów funkcji $F(x)$ wystarczy rozpatrzyć trzy reprezentatywne punkty należące do obszarów A, B i C i leżące w płaszczyźnie (λ_3, λ_1) . Wobec tego z równania (8.17) otrzymujemy następujące pierwiastki:

$$x_0 = \pm \left[-(\lambda_1/2) \pm \sqrt{(\lambda_1/2)^2 - \lambda_3} \right]^{1/2}. \quad (8.25)$$



Rys. 8.5. Powierzchnie rozdzielające dla katastrofy typu A_4 i różne jakościowo przebiegi $F(x)$ odpowiadające różnym punktom obszaru $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ [93]

Jeśli $\lambda_1 > 0$, to wówczas mamy dwa przypadki: a) jeśli $\lambda_3 < 0$, to istnieją dwa pierwiastki; b) jeśli $\lambda_3 > 0$, to nie ma pierwiastka rzeczywistego. Jeśli $\lambda_1 < 0$, to wówczas mamy trzy przypadki: a) jeśli $\lambda_3 < 0$, to istnieją dwa pierwiastki rzeczywiste; b) jeśli $0 < \lambda_3 < (\lambda_1/2)^2$, to istnieją cztery pierwiastki rzeczywiste; c) jeśli $\lambda_3 > (\lambda_1/2)^2$, to nie istnieją pierwiastki rzeczywiste.

Przeprowadzając tego typu analizę bardziej szczegółowo otrzymujemy charakterystyczne przebiegi funkcji przedstawione na rys. 8.5 b.

8.2.4 Katastrofa typu D_{+4}

Funkcja opisująca tę katastrofę rozszerza katastrofę typu A_4 o dodatkową zmienną y i ma postać:

$$F(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = x^2y + \frac{1}{3}y^3 + \lambda_1(y^2 - x^2) + \lambda_2x + \lambda_3y. \quad (8.26)$$

Punkty krytyczne tej funkcji obliczymy różniczkując ją względem x i y i otrzymując:

$$2xy - 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad (8.27)$$

$$x^2 + y^2 + 2\lambda_1y + \lambda_3 = 0. \quad (8.28)$$

Równania te pozwalają na określenie punktów krytycznych w funkcji parametrów λ_1, λ_2 i λ_3 .

Na podstawie równań (8.27) i (8.28) możemy wyznaczyć macierz decydującą o stateczności rozwiązania x, y .

W tym celu rozpatrzmy rozwiązanie zaburzone $x + \delta x, y + \delta y$ i po podstawieniu do wyżej wymienionych równań otrzymujemy:

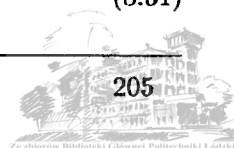
$$\begin{bmatrix} y - \lambda_1 & x \\ x & y + \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{Bmatrix} = 0. \quad (8.29)$$

Jeśli wszystkie elementy macierzy występującej w (8.29) są równe zero, to wówczas punkty krytyczne posiadają stopień zdegenerowania cztery. Otrzymujemy wówczas:

$$x = y = \lambda_1 = 0. \quad (8.30)$$

Następnie z równań (8.28) i (8.29) otrzymujemy:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0. \quad (8.31)$$



Wobec tego dla wartości parametrów $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ równych $(0, 0, 0)$ funkcja

$$F(x, y) = x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \quad (8.32)$$

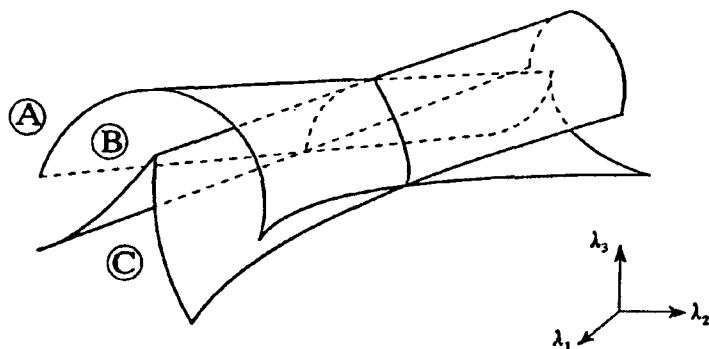
posiada punkt krytyczny $(0, 0)$ o stopniu degeneracji cztery.

Punkty krytyczne o stopniu degeneracji dwa lub trzy otrzymuje się wówczas, jeśli wyznacznik macierzy decydującej o stateczności przyrównamy do zera:

$$y^2 - x^2 = \lambda_1^2. \quad (8.33)$$

Zbiór takich punktów krytycznych tworzy hiperbole. Czytelnika zainteresowanego dalszą szczegółową analizą katastrofy typu D_{+4} odsyłamy do pracy [93].

Powierzchnie oddzielające jakościowo różne przebiegi funkcji (8.26) przedstawiono na rys. 8.6.



Rys. 8.6. Powierzchnie oddzielające (bifurkacyjne) dla katastrofy typu D_{+4}

Obszar parametrów $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ zostaje podzielony na cztery obszary o jakościowo różnym przebiegu funkcji $F(x)$. Okazuje się ([93]), że aby określić te

jakościowo różne zachowania wystarczy wybrać odpowiednie punkty leżące na prostej $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$. Równania (8.27) i (8.28) przyjmują wtedy postać:

$$x(y - 1) = 0, \quad (8.34)$$

$$x^2 + y^2 + 2y + \lambda_3 = 0. \quad (8.35)$$

Z pierwszego z dwóch powyższych równań wynika, że współrzędne takich punktów krytycznych wynoszą $x = 0$ lub $y = 1$. Dla $x = 0$ z równania (8.35) znajdujemy:

$$y = -1 \pm \sqrt{1 - \lambda_3}, \quad (8.36)$$

i wtedy istnieje para rozwiązań, jeśli tylko $\lambda_3 < 1$. Z kolei dla $y = 1$ z równania (8.35) wynika:

$$x = \pm \sqrt{-(3 + \lambda_3)}, \quad (8.37)$$

czyli para rozwiązań rzeczywistych istnieje tylko dla $\lambda_3 < -3$.

Jeśli znaleźliśmy położenie punktów krytycznych, to ich stateczność możemy określić w oparciu o macierz w równaniu (8.29). Dla punktu $x = 0, y = -1 \pm \sqrt{1 - \lambda_3}$ macierz decydująca o stateczności wynosi:

$$[F] = \begin{bmatrix} y - 1 & 0 \\ 0 & y + 1 \end{bmatrix}, \quad (8.38)$$

a jej wartości własne obliczone z równania

$$[(y - 1) - \sigma][(y + 1) - \sigma] = 0 \quad (8.39)$$

wynoszą $\sigma_1 = y - 1$ i $\sigma_2 = y + 1$ i główne kierunki pokrywają się z osiami x i y , bo macierz jest diagonalna.

W podobny sposób można dokonać analizy stateczności punktów krytycznych $y = 1, x = \pm \sqrt{-(3 + \lambda_3)}$. W tym przypadku jednak aby określić kierunki główne należy dokonać diagonalizacji macierzy decydującej o stateczności. Pełną analizę tego rodzaju katastrofy przeprowadzono w pracy [93].

8.2.5 Katastrofa typu D_{-4}

Jest to katastrofa o równaniu podobnym do rozważanej w poprzednim rozdziale (D_{+4}), przy czym przy drugim i czwartym członie wielomianu znak jest zmieniony. Opisuje je równanie:

$$F(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = x^2 y - \frac{1}{3} y^3 + \lambda_1 (y^2 - x^2) + \lambda_2 x + \lambda_3 y. \quad (8.40)$$

Punkty krytyczne znajdujemy z równań:

$$2xy + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0, \quad (8.41)$$

$$x^2 - y^2 + 2\lambda_1 y + \lambda_3 = 0. \quad (8.42)$$

Macierz decydująca o stateczności otrzymana w oparciu o dwa powyższe równania ma postać:

$$[F] = \begin{bmatrix} y + \lambda_1 & x \\ x & -y + \lambda_1 \end{bmatrix}. \quad (8.43)$$

Jeśli wszystkie elementy powyższej macierzy są zerami, to stopień degeneracji analizowanego punktu krytycznego wynosi cztery. Zachodzi to wówczas, gdy $x = y = \lambda_1 = 0$, a dodatkowo z równań (8.41) i (8.42) znajdujemy $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

A zatem dla wartości parametrów $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ funkcja

$$\tilde{F}(x, y) = x^2 y - \frac{1}{3} y^3, \quad (8.44)$$

posiada w punkcie $(x, y) = (0, 0)$ stopień degeneracji równy cztery. Jeśli jedna z wartości własnych macierzy (8.43) jest równa zeru, to wówczas punkty krytyczne posiadają stopień degeneracji dwa lub trzy. Zbiór takich punktów otrzymujemy przyrównując wyznacznik macierzy (8.43) do zera, otrzymując równanie okręgu:

$$x^2 + y^2 = \lambda_1^2. \quad (8.45)$$

Jeśli promień tego okręgu jest równy zeru, to punkt krytyczny posiada stopień degeneracji równy cztery. Natomiast jeśli $\lambda_1 \neq 0$, to punkt krytyczny posiada stopień degeneracji dwa lub trzy. Przyjmijmy do dalszych rozważań punkty x, y jako parametry. Wówczas równanie (8.45) parametryzuje $\lambda_1(x, y)$. Z równań (8.41) i (8.42) znajdujemy:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -2xy - 2\lambda_1(x, y)x, \\ \lambda_3 &= y^2 - x^2 - 2\lambda_1(x, y)y. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Okazuje się [93], że dla $\lambda_1 > 0$ po wprowadzeniu nowych zmiennych

$$x = \lambda_1 \sin \theta, \quad y = -\lambda_1 \cos \theta,$$



można określić, w jaki sposób zbiór punktów okręgu parametryzuje krzywą rozdzielającą (λ_2, λ_3). Z (8.46) otrzymujemy:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2} = \sin 2\theta - 2 \sin \theta, \quad \frac{\lambda_3}{\lambda_1^2} = \cos 2\theta + 2 \cos \theta. \quad (8.47)$$

Wzajemne zależności pomiędzy krzywymi (8.45) i (8.46) przedstawia rys. 8.7.

Pełny obraz płaszczyzn rozdzielających różne zachowanie jakościowe dla rozpatrywanej katastrofy przedstawiono na rys. 8.8.

8.3 Przykłady katastrof w układach mechanicznych

Przykład 8.1

Rozpatrzmy układ mechaniczny składający się z dwóch bezmasowych belek tworzących kąt α_0 z pionem i obciążonych siłą P (rys. 8.9). Belki traktowane są jako ciała sprężyste.

Układ jest symetryczny i składowe sił wzdłuż osi prętów wynoszą:

$$2N = \frac{P}{\cos \alpha}, \quad (8.48)$$

gdzie α jest kątem odpowiadającym sile P . Dla $P = 0$ kąt $\alpha = \alpha_0$.

Zgodnie ze schematem z rys. 8.9 b otrzymujemy:

$$\sin \alpha (l_0 - \Delta l) = \sin \alpha_0 l_0, \quad a = l_0 \sin \alpha_0, \quad (8.49)$$

a z równań tych znajdujemy skrócenie Δl każdego z prętów:

$$\Delta l = \frac{a}{\sin \alpha_0} - \frac{a}{\sin \alpha}. \quad (8.50)$$

Zgodnie z prawem Hooke'a siła normalna w pręcie wynosi:

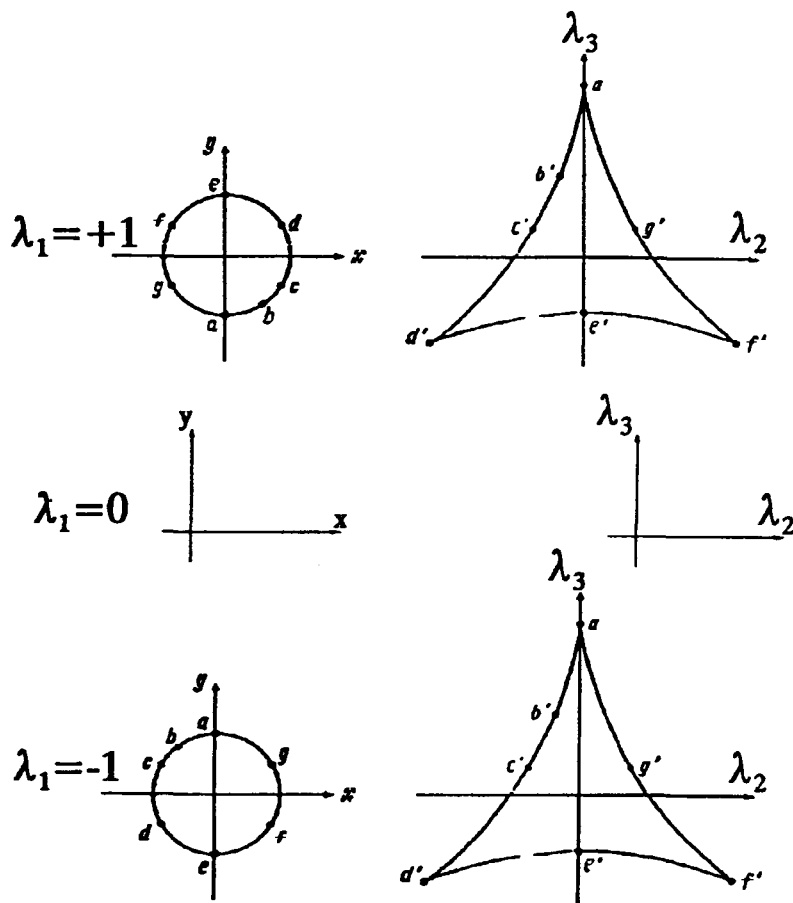
$$N = EF \frac{\Delta l}{l_0} = EF \left(1 - \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} \right). \quad (8.51)$$

Teraz na podstawie rys. 8.9 b i wprowadzając zmienną x otrzymujemy:

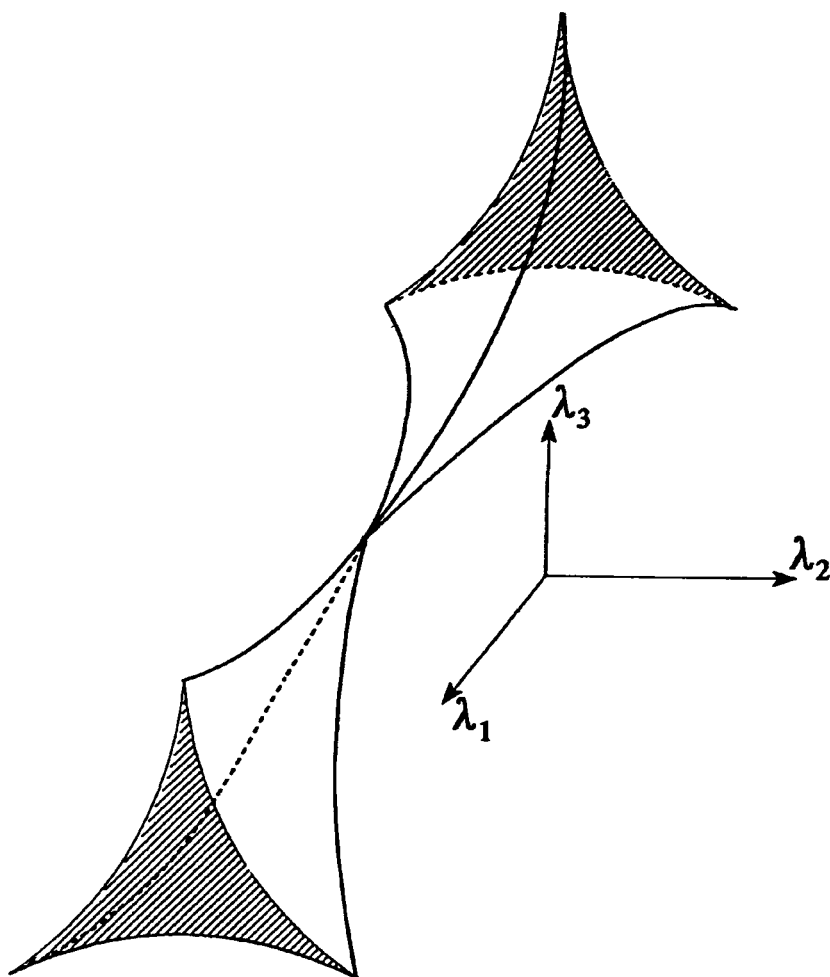
$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_0} - \frac{x}{a}. \quad (8.52)$$

Korzystając ze znanych związków trygonometrycznych mamy:

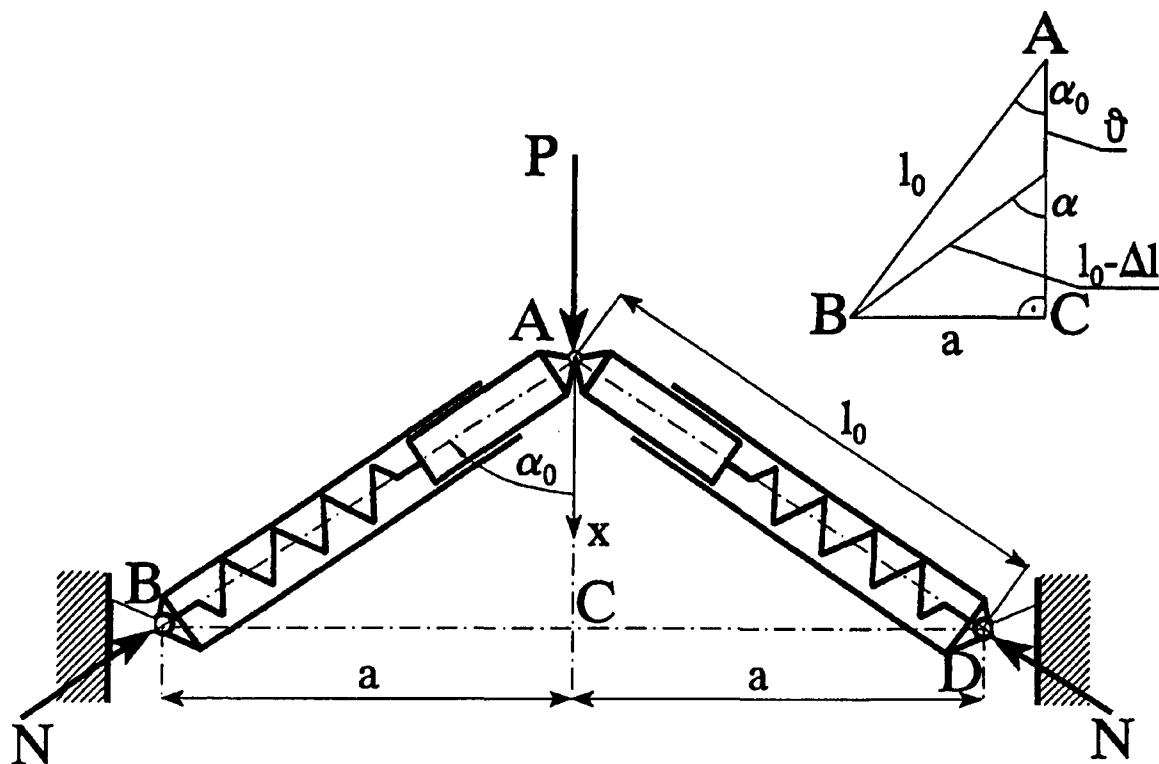
$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}}}, \quad \cos \alpha = \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}}}. \quad (8.53)$$



Rys. 8.7. Zależność pomiędzy zbiorami punktów krytycznych o stopniu degeneracji dwa lub trzy [93]



Rys. 8.8. Powierzchnie rozdzielające dla katastrofy typu D_{-4} [93]



Rys. 8.9. Układ dwóch podatnych belek obciążonych siłą P (a) i schemat geometrii układu (b)

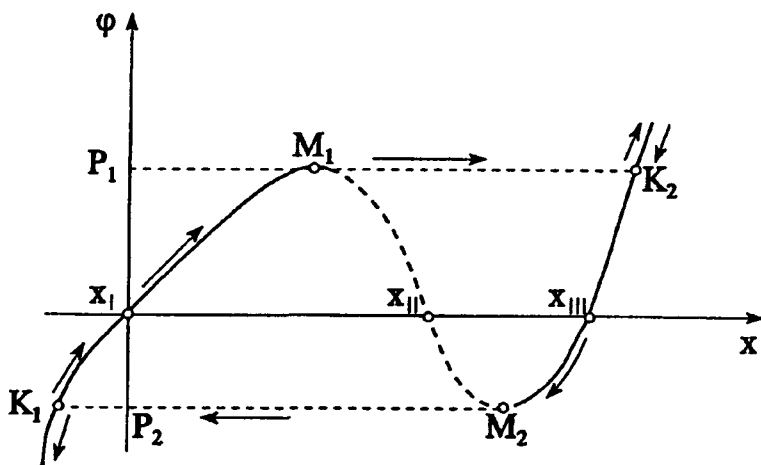
Z równań (8.48), (8.51), (8.52) i (8.53) po przekształceniach otrzymujemy:

$$P = 2EF \left(1 - \frac{x}{a} \operatorname{tg} \alpha_0 \right) \left[\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha_0 + \left(1 - \frac{x}{a} \operatorname{tg} \alpha_0 \right)^2}} - \cos \alpha_0 \right]. \quad (8.54)$$

Punkty przecięcia z osią x funkcji $P(x)$ obliczone na podstawie (8.54) mają odcięte:

$$x_I = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha_0}, \quad x_{II} = 0, \quad x_{III} = \frac{2a}{\operatorname{tg} \alpha_0}. \quad (8.55)$$

Typowy przebieg $P(x)$ przedstawiono na rys. 8.10.



Rys. 8.10. Przebieg funkcji (8.64) z zaznaczeniem miejsc zerowych i ekstremów

Niech siła P rośnie stopniowo poczynając od zera. Odpowiada temu wzrost przemieszczenia x aż do osiągnięcia maksimum M_1 . Wartość siły odpowiadająca punktowi M_1 jest wartością krytyczną, jej dalszy wzrost nie spowoduje stopniowego wzrostu x , a nastąpi „katastrofa”. Tej samej wartości P_1 odpowiada odcięta punktu K_2 i układ w sposób gwałtowny przeskoczy do nowego położenia o wychyleniu x znacznie większym. Dalszym stopniowym

wzrostom obciążenia P aż do $+\infty$ będzie towarzyszyć stopniowy wzrost przemieszczenia x . Prześledźmy teraz, jakie zjawiska będą towarzyszyć zmniejszaniu siły P poczynając od $P = +\infty$. Ze zmniejszaniem stopniowym P będzie maleć wychylenie x , przy czym tym razem przekroczenie wartości P_1 nie spowoduje gwałtownego skoku przemieszczenia x . Dla siły $P = 0$ układ jest w położeniu równowagi x_{III} . Oznacza to, że jeśli układ obciążać siłą P od położenia równowagi $x = 0$ do wartości $P > P_1$, to po odjęciu obciążenia układ nie wróci do stanu wyjściowego równowagi, bo jego położenie będzie określone odciętą $x = x_{III} \neq 0$. Aby dalej następowało zmniejszanie się wychylenia x poczynając od punktu x_{III} , siła P musi być mniejsza od zera, co oznacza, że musimy zmienić jej zwrot, a więc zgodnie z rys. 8.9 zwrot P musi być tym razem skierowany do góry. Ze wzrostem P wychylenie x zmniejsza się, a w momencie osiągnięcia wartości P_2 (punkt minimum M_2) następuje znowu „katastrofa”. Układ gwałtownie przeskakuje do góry, aż za pierwotną wartość $x = 0$, czyli znajduje się w położeniu ujemnym określonym odciętą punktu K_1 . Dalszy wzrost siły P spowoduje monotoniczny bezwzględny wzrost przemieszczenia x . Zmniejszanie obciążenia powoduje zmniejszanie bezwzględnej wartości wychylenia i dla $P = 0$ układ osiąga $x = 0$.

Warto zauważyć, że jak dotąd nie była wykorzystywana część krzywej $P(x)$ pomiędzy punktami M_1 i M_2 , zaznaczona na rys. 8.10 linią przerywaną. Odpowiada ono położeniom $P(x)$ niestatecznym, a więc nierealizowanym fizycznie. Teoretycznie istnieje nawet położenie równowagi dla $P = 0$ określone odciętą x_{II} , ale jest ono również niestateczne. Aby przekonać się o tym określmy wartość energii potencjalnej V zależną od zmian x przyjmując wartość siły P jako stałą. Energia potencjalna pochodząca od odkształceń prętów wynosi:

$$V_1 = \Delta l N = \frac{N^2 l_0}{EF} . \quad (8.56)$$

Uwzględniając (8.51), (8.52) i (8.53) w (8.56) otrzymujemy:

$$V_1 = EFl_0 \left[1 - \cos \alpha_0 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha_0 + \left(1 - \frac{x}{a} \operatorname{tg} \alpha_0 \right)^2} \right]^2 . \quad (8.57)$$

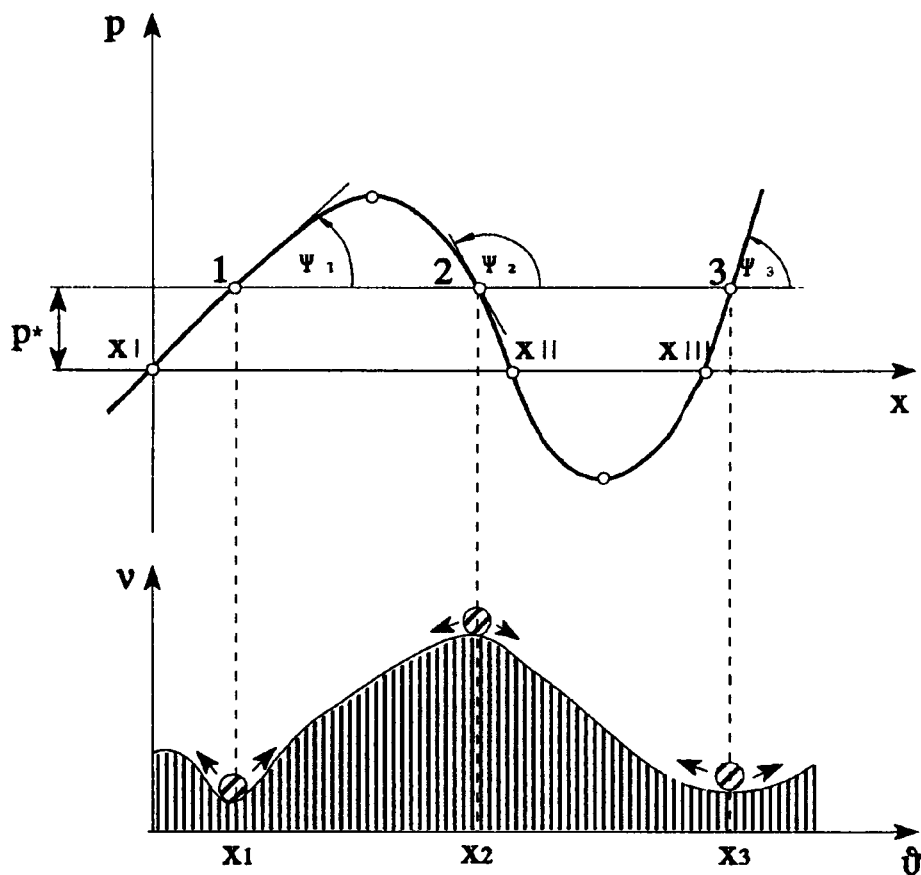
Energia potencjalna V_2 odpowiadająca sile skupionej P wynosi:

$$V_2 = -Px , \quad (8.58)$$

i wobec tego całkowita energia potencjalna układu wynosi:

$$V = V_1 + V_2 = EFl_0 \left[1 - \cos \alpha_0 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha_0 + \left(1 - \frac{x}{a} \operatorname{tg} \alpha_0 \right)^2} \right]^2 - Px . \quad (8.59)$$

Poszukując ekstremów energii należy $\partial V / \partial x$ przyrównać do zera, uzyskując tym samym wartości x odpowiadające tym minimom. Otrzymujemy wówczas dla ustalonej P związek



Rys. 8.11. Wykres $P(x)$ i $V(x)$ z uwzględnieniem ekstremów dla ustalonej (dowolnie przyjętej) siły P^* . Położeniu 2 odpowiada niestateczne położenie równowagi

$P(x)$ opisany równaniem (8.54). Obierając dowolną wartość siły P^* (rys. 8.11) mamy więc odpowiadające jej trzy możliwe wartości przemieszczenia x_1 , x_2 i x_3 .

Aby określić rodzaj położenia równowagi w punktach x_i ($i = 1, 2, 3$) należy obliczyć $\partial^2 V / \partial x^2$ w tych punktach. Oznacza to, że należy określić pierwsze pochodne funkcji $P(x)$ w tych punktach, co łatwo jest zrobić w oparciu o wykres $P(x)$ (widać, że punktem gałęzi krzywej $M_1 M_2$ odpowiada $\tan \psi_2 < 0$, co oznacza niestateczność tego punktu).

Na koniec warto dodać, że położenie równowagi niestateczne jest nierealizowane fizycznie. Dowolnie małe wychylenie kulki 2 spowoduje (w zależności od kierunku wychylenia) przejście jej do położenia x_1 lub x_3 o niższej energii potencjalnej. Wiąże się to więc z utratą energii. W układzie rzeczywistym energia ta przekształca się w energię kinetyczną - przejściu z położenia równowagi niestatecznej do położenia równowagi statecznej towarzyszą drgania.

Przykład 8.2

Siła P przyłożona jest do pionowej belki, posiadającej w punkcie przyłożenia przesuwą podpórę mogącą przemieszczać się bez tarcia po pionowej ścianie (rys. 8.12). Do drugiego końca pręta przymocowana jest sprężyna o sztywności k znajdująca się w obudowie uniemożliwiającej jej wyboczenie.

W poprzednim przykładzie katastrofy miały miejsce tylko dla pewnych dyskretnych wartości sił. Ten przykład pokaże, że są również układy mechaniczne umożliwiające katastrofy dla dowolnych wartości sił w ich pewnym przedziale $P_1 < P < P_2$. Zwiększając siłę P koniec pręta nie ulega przemieszczeniu. Jednak jeśli siła P osiągnie wartość

$$P_1 = kl, \quad (8.60)$$

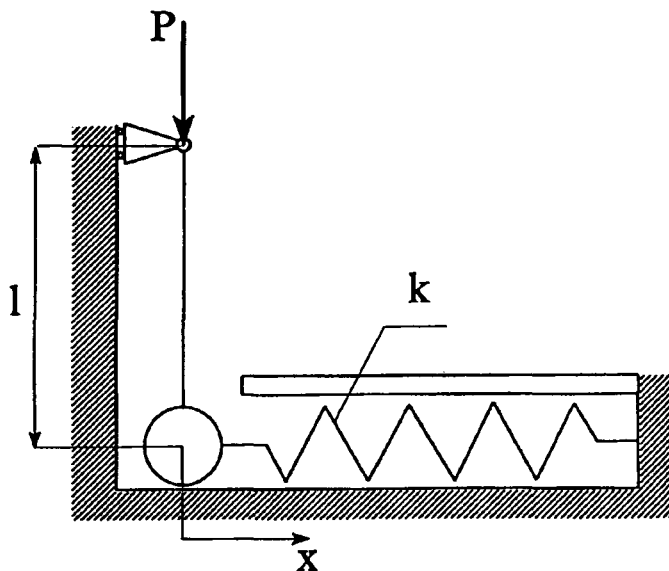
to położenie równowagi układu przestaje być stateczne i układ skokowo przechodzi do nowego położenia równowagi i pręt zajmuje pionowe położenie równowagi. Oprócz wymienionych dwóch położań równowagi jest również nieskończenie wiele położań równowagi niestatecznych dla $0 < P < P_1$, i konfigurację jednego z nich przedstawiono schematycznie na rys. 8.13.

Zwiększając siłę stopniowo, po przekroczeniu wartości P_1 , można realizować dalej pionowe przemieszczanie pręta, ale położenia te będą niestateczne. Drugim możliwym położeniem (statecznym) jest położenie poziome pręta. Zwiększanie w tym położeniu siły P nie zmienia konfiguracji układu. Dla $P < P_1$ (np. P_2) możliwe są trzy położenia układu - dwa stateczne i jedno niestateczne. To ostatnie jest punktem należącym do elipsy o równaniu:

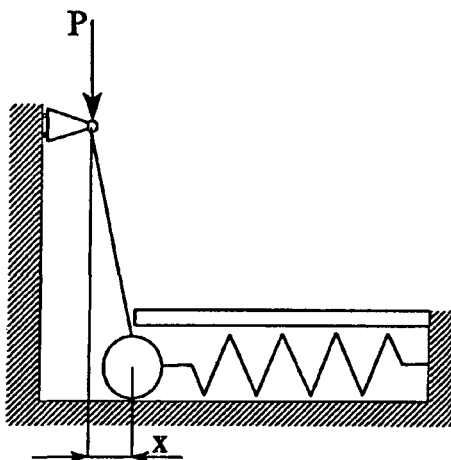
$$\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{P}{P_*}\right) = 1. \quad (8.61)$$

Aby prześledzić możliwą katastrofę układu weźmy dowolne położenie pręta odpowiadające rys. 8.13 a, czyli dla $0 < P_2 < P_*$. Realizuje się to np. przez przyłożenie poziomej siły. Jeśli skutek tej siły przemieszczenie obliczone z (8.61) wynosi:

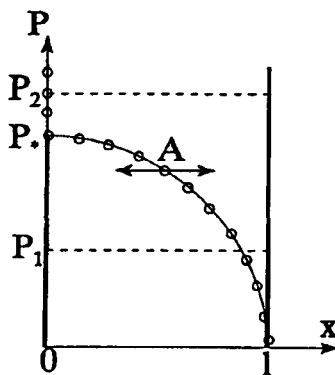




Rys. 8.12. Schemat badanego układu



a)



b)

Rys. 8.13. Położenie pręta niestateczne (a) oraz krzywa zależności $P(x)$ (b), gdzie położenia niestateczne zaznaczono kółkami

$$x_2 < l\sqrt{1 - (P_2/P_*)^2}, \quad (8.62)$$

to pręt powróci do położenia równowagi. Jeśli znak nierówności (8.62) się zmieni, to pręt przyjmie nowe poziome położenie.



Rozdział 9

Metody numeryczne globalnej analizy drgań

9.1 Wprowadzenie do metod numerycznych

Dynamika układów opisanych równaniami różniczkowymi rzędu drugiego może być sprowadzona do analizy układów opisanych równaniami rzędu pierwszego o postaci

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \dots, y_N), \quad i = 1, \dots, N, \quad (9.1)$$

przy warunkach początkowych

$$y_i(t_0) = y_{i0}. \quad (9.2)$$

Numeryczne całkowanie równań (9.1) polega na zastąpieniu różniczek przez przyrosty Δy oraz Δt i jeśli są one odpowiednio dobrze dobrane (małe), to wówczas otrzymane równania algebraiczne dobrze aproksymują wyjściowe równania różniczkowe.

9.1.1 Metoda Runge-Kutty

Schemat tej metody opisują równania

$$y_{n+1} = y_n + k_2 + O(h^3), \quad (9.3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, y_n), \\ k_2 &= hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right), \end{aligned} \quad (9.4)$$



i h jest krokiem (przyrostem) zmiennej niezależnej t , a metoda oparta na powyższym schemacie nazywana jest metodą Runge - Kuty rzędu drugiego. Obecnie klasyczną metodą stosowaną przy całkowaniu równań różniczkowych i bardziej dokładną jest metoda oparta na schemacie metody Runge-Kuty czwartego rzędu:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, y_n), \\ k_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(t_n + h, y_n + k_3), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5). \end{aligned} \quad (9.5)$$

O ile metoda rzędu drugiego daje dokładność do $O(h^3)$, to metoda czwartego rzędu poprawia dokładność do $O(h^5)$. Jednym z istotnych problemów tej metody jest określenie błędu obliczeń Δ i znalezienie związku $\Delta(h)$. Jeśli krok h_1 powoduje powstanie błędu Δ_1 , wobec tego inny krok h_0 powoduje powstanie innego błędu Δ_0 , który może być oszacowany za pomocą wzoru

$$h_0 = h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{0.2}. \quad (9.6)$$

Powyższe równanie może być wykorzystywane na dwa sposoby. Jeśli $|\Delta_1| > |\Delta_0|$, to na podstawie (9.6) można dobrać inny krok h_1 , aby błąd nie był zbyt duży. Jeśli $|\Delta_1| < |\Delta_0|$, to na podstawie (9.6) można oszacować zwiększenie kroku obliczeń.

W praktyce używa się bardziej subtelnego równania:

$$h_0 = \begin{cases} Sh_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{0.20}, & \Delta_0 \geq \Delta_1; \\ Sh_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{0.25}, & \Delta_0 < \Delta_1, \end{cases} \quad (9.7)$$

przy czym S jest liczbą kilka procent mniejszą niż jedność. Obecnie używa się zmodyfikowanej metody Runge-Kutta z adaptacyjną kontrolą kroku całkowania.

9.1.2 Zmodyfikowana metoda punktu środkowego

Aby wyznaczyć zmienną niezależną $y(t)$ do punktu $t + H$ dobieramy krok h ,

$$h = \frac{H}{n} . \quad (9.8)$$

Metoda wymaga $n + 1$ przekształceń prawej strony równań (9.1) według wzorów:

$$\begin{aligned} z_0 &\equiv y(t) , \\ z_1 &= z_0 + hf(t, z_0) , \\ z_{m+1} &= z_{m-1} + 2hf(t + mh, z_m) , \quad m = 1, 2, \dots, n-1 , \\ y(t + H) &\cong y_n \equiv \frac{1}{2} [z_n + z_{n-1} + hf(t + H, z_n)] . \end{aligned} \quad (9.9)$$

Współrzędna z jest średnią aproksymacją wartości funkcji, natomiast y_n jest końcową aproksymacją do $y(t + H)$. Generalnie metoda ta „przegrywa” w zastosowaniach ze zmodyfikowaną metodą Runge-Kutty z adaptacyjną kontrolą kroku całkowania.

9.1.3 Metoda Bulirscha-Stoera

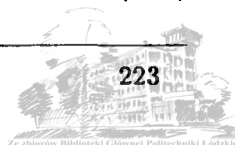
Metoda ta pozwala osiągnąć najwyższą dokładność, jeśli rozwiązaniami analizowanych równań są gładkie funkcje.

Najpierw, jako jedną z trzech głównych idei tej metody, omówimy ekstrapolację Richardstone'a. Zakłada się analityczną funkcję będącą rozwiązaniem i testowana jest ona dla różnych kroków h , z których żaden nie daje żądanej dokładności. Jeśli wiemy wystarczająco dużo o formie poszukiwanej funkcji, to w rezultacie znajdujemy jej postać dla $h = 0$. Następnym krokiem jest ekstrapolacja funkcji wielomianami. Wreszcie trzecia idea polega na wyborze takich funkcji, które dają błędy rzędu h^2 . Wszystkie wymienione wyżej elementy znane są pod nazwą metody Bulirscha-Stoera.

9.1.4 Całkowanie układów zachowawczych

W tym przypadku nie ma potrzeby sprowadzania równań do rzędu pierwszego. Opisana wyżej metoda umożliwia otrzymanie bardzo efektywnych rezultatów dla równań typu:

$$\ddot{x} = f(t, x) , \quad x(t_0) = x_0 , \quad \dot{x}(t_0) = z_0 . \quad (9.10)$$



Stoermer jako pierwszy zaproponował, nadal popularną metodę polegającą na następującej formule:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + h \left[z_0 + \frac{1}{2} h f(t_0, x_0) \right], \\x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1} &= h^2 f(t_0 + kh, x_k), \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \\z_m &= \frac{(x_m - x_{m-1})}{h} + \frac{1}{2} h f(t_0 + H, x_m),\end{aligned}\quad (9.11)$$

gdzie

$$\begin{aligned}h &= \frac{H}{m}, \\z_m &= \dot{y}(t_0 + H).\end{aligned}\quad (9.12)$$

9.1.5 Sztywne układy równań

Jeśli w układach równań różniczkowych zmienna niezależna zmienia się według różnych skal wpływając na wartości zmiennej zależnej, to takie układy równań nazywamy sztywnymi. Rozpatrzmy następujący układ równań [120]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 998x + 1998y, \\\dot{y} &= -999x - 1999y,\end{aligned}\quad (9.13)$$

z warunkami początkowymi

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \quad (9.14)$$

Wprowadzając transformację

$$\begin{aligned}x &= 2u - v, \\y &= -u + v,\end{aligned}\quad (9.15)$$

otrzymujemy rozwiązanie o postaci:

$$\begin{aligned}x &= 2e^{-u} - e^{-1000u}, \\y &= -e^{-u} + e^{-1000u}.\end{aligned}\quad (9.16)$$

Obecność członów e^{-1000u} wymaga kroku $h \ll 10^{-3}$, aby metoda była stabilna. Obecnie istnieją trzy zasadnicze metody prowadzące do rozwiązania sztywnych układów równań różniczkowych:

- Zmodyfikowane metody Runge-Kutty (np. metoda Rosenbrocka).
- Zmodyfikowana metoda Bulirsch-Stoera.
- Metoda predykcyjno-korekcyjna oparta na metodzie Geara.

9.1.6 Metoda Rosenbrocka

Metoda ta polega na poszukiwaniu rozwiązania o postaci

$$\mathbf{y}(t_0 + h) = \mathbf{y}_0 + \sum_{i=1}^s \mathbf{c}_i \mathbf{k}_i, \quad (9.17)$$

gdzie poprawki $\mathbf{k}_i$ są znalezione poprzez rozwiązanie s liniowych równań o postaci

$$(\mathbf{I} - \gamma h \mathbf{f}') \mathbf{k}_i = h \mathbf{f} \left(\mathbf{y}_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \mathbf{k}_j \right) + h \mathbf{f}' \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} \mathbf{k}_j, \quad i = 1, \dots, s. \quad (9.18)$$

Współczynniki $\gamma, \mathbf{c}_i, \alpha_{ij}$ i γ_{ij} są pewnymi stałymi niezależnymi od rodzaju problemu. Jeśli $\gamma = \gamma_{ij} = 0$, to metoda redukuje się do metody Runge - Kutta. Równania (9.18) pozwalają na rekurencyjne wyznaczenie $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots$.

Kluczowym algorytmem potrzebnym przy całkowaniu sztywnego układu równań jest metoda oparta na automatycznym doborze kroku całkowania. Na podstawie (9.19) szacuje się dwie wartości y , jedną rzeczywistą i drugą szacunkową y^* z różnymi współczynnikami $\mathbf{c}_i^*, i = 1, 2, \dots, s^*$, gdzie $s^* < s$, ale dla takich samych $\mathbf{k}_i$. Różnica $y - y^*$ pozwala na oszacowanie błędu, który dalej jest używany do kontroli kroku. W celu redukcji mnożenia występującego po prawej stronie (9.18) wprowadzamy wielkość

$$\mathbf{g}_i = \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_{ik} \mathbf{k}_k \gamma \mathbf{k}_i. \quad (9.19)$$

Równania przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathbf{I}}{\gamma h} - \mathbf{f}' \right) \mathbf{g}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{y}_0), \\ \left(\frac{\mathbf{I}}{\gamma h} - \mathbf{f}' \right) \mathbf{g}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{y}_0 + a_{21} \mathbf{g}_1) + \frac{\mathbf{c}_{21} \mathbf{g}_1}{h}, \\ \left(\frac{\mathbf{I}}{\gamma h} - \mathbf{f}' \right) \mathbf{g}_3 &= \mathbf{f}(\mathbf{y}_0 + a_{31} \mathbf{g}_1 + a_{32} \mathbf{g}_2) + \frac{\mathbf{c}_{31} \mathbf{g}_1 + \mathbf{c}_{32} \mathbf{g}_2}{h}, \\ \left(\frac{\mathbf{I}}{\gamma h} - \mathbf{f}' \right) \mathbf{g}_4 &= \mathbf{f}(\mathbf{y}_0 + a_{41} \mathbf{g}_1 + a_{42} \mathbf{g}_2 + a_{43} \mathbf{g}_3) + \frac{\mathbf{c}_{41} \mathbf{g}_1 + \mathbf{c}_{42} \mathbf{g}_2 + \mathbf{c}_{43} \mathbf{g}_3}{h}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

9.1.7 Metoda predykcyjno-korekcyjna wielokrokowa i wielowartościowa

Przy okazji omawiania tej metody należy podkreślić, że jeszcze kilka lat temu uważano ją za najbardziej efektywną. Okazuje się, że do obliczeń o bardzo wysokiej dokładności zaleca się raczej metodę Bulirscha-Stoera. Dla zapewnienia obliczeń o „średniej” dokładności służą metody adaptacyjne typu Runge-Kutty. Metoda korekcyjno-predykcyjna sytuuje się raczej pośrodku stosowanych metod, ale w przypadku wymaganej bardzo wysokiej dokładności całkowanie typowych równań różniczkowych o skomplikowanych prawych stronach zdecydowanie dominuje.

Metoda wielokrokowa zastosowana do przykładowego równania

$$y' = f(t, y), \quad (9.21)$$

to określenie rozwiązania od t_n do t polega na całkowaniu

$$y(t) = y_n + \int_{t_n}^t f(t', y) dt'. \quad (9.22)$$

O ile w metodach jednokrokowych Runge-Kutty lub Bulirscha-Stoera wartości y_{n+1} w punkcie t_{n+1} zależały tylko od t_n , to w metodzie wielokrokowej aproksymuje się funkcję $f(t, y)$ wielomianami przechodzącymi przez punkty $t_n, t_{n-1}, \dots$ i również t_{n+1} (jeśli jest to możliwe). W punkcie $t = t_{n+1}$ (9.22) ma postać:

$$y_{n+1} = y_n + h(\beta_0 y'_{n+1} + \beta_1 y'_n + \beta_2 y'_{n-1} + \beta_3 y'_{n-2} + \dots), \quad (9.23)$$

gdzie y'_n zależy od $f(t_n, y_n)$. W celu rozwiązania (9.23) stosuje się dwie metody: iterację funkcyjną i metodę Newtona. Pierwsza z nich polega na początkowym wyborze y_{n+1} (predyktor), wstawieniu go do równań (9.23), aby otrzymać poprawioną (korektor) wartość y_{n+1} i dalej postępować w sposób podobny. Najbardziej efektywne metody predykcyjno-korekcyjne oparte są na algorytmie Adamsa-Bashforth-Moultona, który wyróżnia się dużą stabilnością. Jeśli znamy informacje w punktach t_{n-2}, t_{n-1}, t_n , to pozwalają one na uzyskanie informacji w punkcie t_{n+1} (jest to metoda predykcyjna oparta na schemacie Bashforth-Moultona)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23y'_n - 16y'_{n-1} + 5y'_{n-2}) + O(h^4). \quad (9.24)$$

Korekcję przeprowadza się w oparciu o równanie

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5y'_{n+1} + 8y'_n - y'_{n-1}) + O(h^4). \quad (9.25)$$

Metody wielokrokowe, pomimo wielu zalet posiadają następujące wady:

- a) ustalenie efektywnych kroków w metodzie jest dosyć trudne;
- b) punkt startu i końca metody jest trudny do ustalenia.

Obydwa wyżej wymienione mankamenty mogą być usunięte przy użyciu metody wielowartościowej. W metodzie tej korzysta się z rozwinięć w szereg Taylora w punkcie t_n . Rozważmy ideę tej metody na przykładzie danych

$$y_n \equiv \begin{pmatrix} y_n \\ hy'_n \\ \frac{h^2}{2}y''_n \\ \frac{h^3}{6}y'''_n \end{pmatrix}, \quad (9.26)$$

gdzie $h \equiv t_{n+1} - t_n$. W oparciu o (9.26) rozwiązanie w punkcie $y(t)$ może być aproksymowane równaniem

$$y(t) = y_n + (t - t_n)y'_n + \frac{(t - t_n)^2}{2}y''_n + \frac{(t - t_n)^3}{6}y'''_n. \quad (9.27)$$

Podstawiając do równania (9.27) $t = t_{n+1}$ możemy obliczyć y_{n+1} . Następnie różniczkując (9.27) $t = t_{n+1}$ można otrzymać y'_{n+1} i kolejno y''_{n+1} , y'''_{n+1} . W efekcie otrzymujemy aproksymację y^*_{n+1} , przy czym

$$y^*_{n+1} = Ay_n, \quad (9.28)$$

gdzie macierz A ma postać

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.29)$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$y_{n+1} = y^*_{n+1} + \alpha r, \quad (9.30)$$

gdzie r jest wektorem stałych liczb. Współczynnik α określamy z równania

$$\dot{y}_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}) . \quad (9.31)$$

Biorąc pod uwagę (9.26), drugie z równań (9.30) ma postać

$$h\dot{y}_{n+1} = h\dot{y}_{n+1}^* + \alpha r_2 \quad (9.32)$$

i biorąc pod uwagę (9.32) otrzymujemy

$$r_2 = 1 , \quad \alpha = hf(t_{n+1}, y_{n+1}) - h\dot{y}_{n+1}^* . \quad (9.33)$$

Pozostałe wartości r_i wybieramy dowolne.

Metody numeryczne są obecnie powszechnie stosowane w obliczeniach naukowych i inżynierskich. Z konieczności bardzo skrótowy ich opis został dokonany w oparciu o prace [112–120].

9.2 Systematyczna numeryczna analiza drgań

Na podstawie rozważań poprzednich rozdziałów można wyciągnąć wniosek, że drgania układów liniowych są w bardzo dużym stopniu poznane i zbadane. W przypadku układów dynamicznych nieliniowych (zwłaszcza silnie nieliniowych) bardzo rzadko udaje się choćby jakościowo przewidzieć zachowanie układu. Ogólnie rzecz biorąc w układach takich daje się wyróżnić położenia równowagi stateczne lub niestateczne, rozwiązania okresowe lub quasiokresowe stateczne lub niestateczne lub też rozwiązania chaotyczne (były one przedmiotem rozważań rozdziału 7). Ustalenie dla jakich parametrów układu (i zbiorów warunków początkowych) istnieją poszczególne, wyżej wymienione, rozwiązania (a może być ich kilka lub mogą one na siebie oddziaływać) jest w układach o wielu stopniach swobody praktycznie niemożliwe. Pojawia się więc inna kompromisowa metoda analizy takich układów. Jeśli wymiar rozważanego układu wynosi $2n$ (n oznacza liczbę stopni swobody) i nie jest duży oraz w układzie nieliniowości są małe lub też drgania są małe, to istnieje możliwość zastosowania analitycznych metod przybliżonych do co najmniej jakościowej oceny dynamiki układu. Metody te często podparte rachunkiem symbolicznym przy użyciu komputera (takich jak Medyna, Reduce, Mathematica itd) stanowią mogą dobre przybliżenie (punkt startu) dla metod numerycznych. Te ostatnie chociaż również należą do metod przybliżonych, dają przy obecnym ich rozwoju tak wysokie dokładności obliczeń, że ich rozwiązania są zbliżone do rzeczywistych.

Załóżmy, że znamy położenia równowagi (rozwiązania osobliwe) analizowanego układu równań

$$\{\dot{q}\} = F\{q\}, \quad (9.34)$$

określone równaniem

$$F(q) = 0. \quad (9.35)$$

Założmy również, że pierwiastków układu równań algebraicznych nieliniowych jest kilka. Zaburzając znalezione rozwiązania rozpatrujemy równania różniczkowe liniowe opisujące zachowanie się tych zaburzeń. W oparciu o teorię równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach możemy określić, czy zaburzenia te narastają w czasie, czy maleją w czasie. Prowadzi to do określenia stateczności analizowanych położań równowagi. Niech przy zmianie pewnego parametru układu (dla jego wartości krytycznej) para pierwiastków zespolonych sprzężonych znajdzie się na osi urojonej, a przy dalszej zmianie tego parametru przetnie tę oś i części rzeczywiste tych pierwiastków staną się dodatnie. Wówczas mamy do czynienia z bifurkacją Hopfa, rozwiązanie traci stateczność i odgałęzia się od niego rozwiązanie okresowe. Wobec tego istnieją teraz dwa rozwiązania: niestateczne położenie równowagi i rozwiązanie okresowe. Obydwa można śledzić dalej ze zmianą parametru kontrolnego. Aby śledzić zachowanie tego drugiego, musimy przede wszystkim określić jego stateczność. Postępujemy w sposób podobny jak w przypadku analizy stateczności położań równowagi, tzn. rozwiązania te zaburzamy i rozpatrujemy równania zaburzeń. Równania zaburzeń są wprawdzie opisane równaniami różniczkowymi liniowymi, ale o okresowych współczynnikach. Takie równania były już dokładnie analizowane w rozdziale 6, gdzie podano jak określać ich stateczność. Od nich również (przy dalszej zmianie parametru kontrolnego) mogą odgałęziać się nowe rozwiązania okresowe, o okresach większych lub mniejszych od okresu analizowanego rozwiązania. Rodzaj ich bifurkacji wiąże się z rodzajem przejścia mnożnika charakterystycznego przez okrag jednostkowy płaszczyzny zespolonej. Istnieje tu również możliwość pojawienia się ruchu quasiokresowego lub chaotycznego. Możliwości powstawania chaosu były już szczegółowo dyskutowane w rozdziale 7. Orbitsy quasiokresowe powstają wówczas, gdy w układzie istnieją częstości niewspółmierne.

W przypadku orbit okresowych zagadnienie ich systematycznego śledzenia upraszcza się bardzo po zastosowaniu odwzorowania punktowego, tzw. map Poincaré. Zamiast śledzić całą orbitę wystarczy obserwować jeden jej punkt, tzn. jeśli zmienną niezależną jest czas t , to w punktach $t_n = t_0 + kT$, gdzie T jest okresem analizowanego rozwiązania, k jest kolejną liczbą naturalną, a t_0 oznacza czas początkowy. O ile w przypadku układów nieautonomicznych okres



rozwiązania okresowego jest znany (jest on równy okresowi siły wymuszającej), to w układach autonomicznych podlega on wyznaczeniu za pomocą jednej z metod numerycznych, np. metody strzelania.

9.3 Metody numeryczne stosowane przy systematycznej analizie drgań

Aby określić rozwiązania równań (9.34), musimy mieć zadane warunki początkowe $\{q(t_0)\} = \{q_0\}$, tzw. wektor stanu. Po numerycznym całkowaniu równań ruchu (wykorzystując jedną z metod opisanych w 9.1) w czasie równym przybliżonemu (lub dokładnemu) okresowi T_0 , znajdujemy inny wektor stanu $\{q(T_0)\}$, który zależy od punktu startu, czyli $\{q_0\}$. Zamiast obserwować cały przebieg od t_0 do T_0 , wystarczy ograniczyć się do analizy tylko dwóch punktów (wektorów stanu) odpowiadającym tym odcietym. Przedstawiono to schematycznie na rys. 9.1, dla $n = 1$.

W przypadku rozwiązania okresowego o okresie T_0 oba wektory musiałyby spełniać warunek

$$\{q\}(T_0, \{q_0\}) - \{q_0\} = \{0\}. \quad (9.36)$$

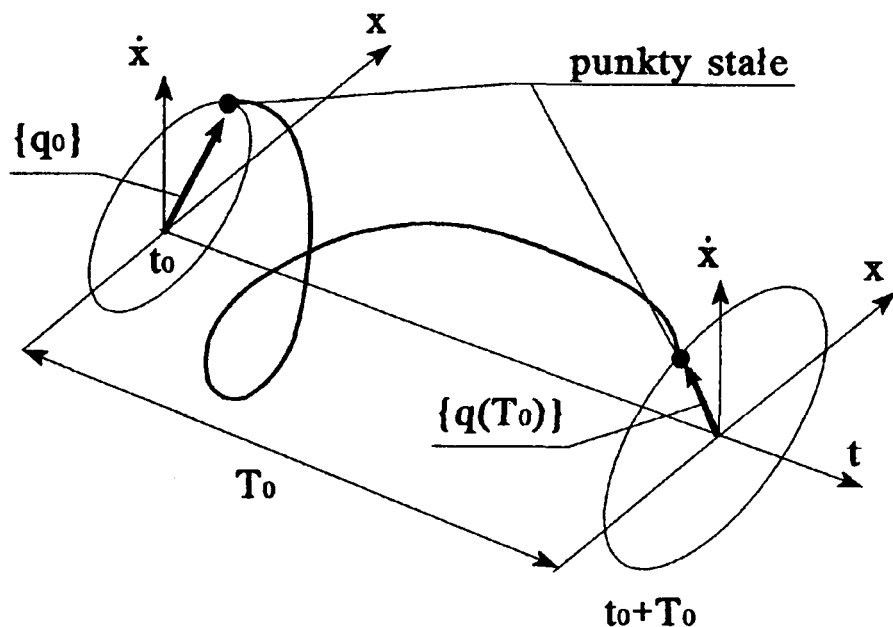
Równanie powyższe służy do numerycznego określenia $\{q_0\}$ przy pomocy metody Newtona. Stosując metodę Newtona rozwijamy w szereg Taylora wokół k -tego przybliżenia rozwiązania $\{q_0^{(k)}\}$ i ograniczamy się w rozwinięciu tylko do członów liniowych. Po przyrównaniu tego rozwinięcia do zera otrzymujemy równanie liniowe do wyznaczenia poprawki $\Delta q_0^{(k)}$. Jakobian metody Newtona określony jest wzorem

$$[J] = \frac{\partial \{q\}(T_0, \{q_0\})}{\partial \{q_0\}} - [I] = [N] - [I], \quad (9.37)$$

gdzie $[I]$ jest macierzą jednostkową. Po zakończeniu iteracji Newtona bierzemy otrzymaną w ostatnim kroku tej metody macierz $[N]$, której wartości własne są charakterystycznymi multiplikatorami. One określają stateczność i bifurkacje analizowanej orbity. Opisana metoda nosi nazwę metody strzelania (shooting).

Drugim konkurencyjnym sposobem jest metoda podana przez Urabe i Reitera [121] i oparta na algorytmie Galerkin.

Jak wiadomo w oparciu o szereg Fouriera możemy przybliżać każde z rozwiązań T -okresowych



Rys. 9.1. Zmiana wektora stanu w czasie na przykładzie układu o jednym stopniu swobody

$$y_k = a_0 + \sum_{k=1}^K a_{c_k} \cos k\omega t + a_{s_m} \sin m\omega t, \quad (9.38)$$

gdzie K jest najwyższą harmoniczną tego szeregu, a podstawową częstotliwością jest ω . Założone rozwiązanie różniczkujemy dwukrotnie i podstawiamy do układu równań różniczkowych rzędu drugiego opisujących dynamikę takich układów. Równania te, w których wszystkie wielkości stojące po lewej stronie ze względu na skończony szereg (9.38) nie są tożsamościowo spełnione, a po prawej ich stronie, pojawi się niezerowy wektor r , który spełnia równanie:

$$r(a_0, a_{c_k}, a_{s_k}, t) = r(a_0, a_{c_k}, a_{s_k}, t + T). \quad (9.39)$$

Jeśli liczba K jest wystarczająco duża, to $r \cong 0$. Resztę r rozwijamy również w szereg Fouriera:

$$r = s_0 + \sum_{k=1}^K s_{c_k} \cos k\omega t + s_{s_k} \sin k\omega t, \quad (9.40)$$

przy czym $r \equiv 0$ implikuje $s_0 = s_{c_k} = s_{s_k} = 0$, co prowadzi do równań:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T r(a_0, a_{c_k}, a_{s_k}, t) dt &= 0, \\ \frac{2}{T} \int_0^T r(a_0, a_{c_k}, a_{s_k}, t) \cos n\omega t dt &= 0, \\ \frac{2}{T} \int_0^T r(a_0, a_{c_k}, a_{s_k}, t) \sin n\omega t dt &= 0, \end{aligned} \quad (9.41)$$

$$k, n = 1, 2, 3, \dots, K.$$

Wprowadzając wektory

$$s = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_{c_k} \\ s_{s_k} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_{c_k} \\ a_{s_k} \end{pmatrix}, \quad (9.42)$$

równania (9.41) przyjmują postać

$$s(a) = 0, \quad (9.43)$$

i mogą być rozwiązane przy użyciu iteracyjnej metody Newtona.

W praktyce wykorzystuje się przy obliczaniu s metodę szybkiej transformacji Fouriera (*FFT*) [122, 123]. Po wybraniu punktu startu jako wektora $\mathbf{a}$ obliczamy kolejno:

$$\dot{\mathbf{y}}_K = \sum_{k=1}^K (k\omega \mathbf{a}_{s_k} \cos k\omega t - k\omega \mathbf{a}_{c_k} \sin k\omega t) , \quad (9.44)$$

$$\ddot{\mathbf{y}}_K = \sum_{k=1}^K (-k^2\omega^2 \mathbf{a}_{c_k} \cos k\omega t - k^2\omega^2 \mathbf{a}_{s_k} \sin k\omega t) . \quad (9.45)$$

Metoda odwrotna (*FFT*)⁻¹ pozwala na znalezienie (9.44) i (9.45) w dyskretnych punktach czasu, a po wstawieniu do równań ruchu otrzymujemy $\mathbf{r}$ i co za tym idzie również równanie (9.43).

Jeśli weźmiemy dowolną funkcję $F(t)$, to jest ona identyczna z funkcją dyskretną otrzymaną przy użyciu (*FFT*) tylko wtedy gdy:

- a) jest okresowa i ograniczona;
- b) ilość punktów próbkowania musi być dwukrotnie większa od najwyższej częstotliwości szeregu.

Szybkie przekształcenie Fouriera jest szczególnie ekonomiczne, gdy liczba próbek N

$$N_{FFT} = 2^M > 4K . \quad (9.46)$$

Błąd szacowany jest poprzez normę

$$\Delta = \left(\sum_{n=k+1}^{N_{FFT}/2} s_{c_{nk}}^2 + s_{s_{nk}}^2 \right)^{1/2} . \quad (9.47)$$

Stateczność znalezionej rozwiązania $\mathbf{y}_0^*$ określa się na podstawie równań zaburzeń, które są liniowe ze względu na zaburzenie $\delta \mathbf{y}$ o współczynnikach zależnych od $\mathbf{y}$, $\dot{\mathbf{y}}$ i mogą być przedstawione w postaci

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{S}(t)\mathbf{z} , \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \delta \mathbf{y} \\ \delta \dot{\mathbf{y}} \end{pmatrix} . \quad (9.48)$$

Po podstawieniu rozwiązania $\mathbf{y}_0$ do (9.48) i otrzymaniu macierzy $\mathbf{S} = \mathbf{S}(t_k)$, $t_k = kT/N_{FFT}$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, N_{FFT}\}$. Macierz przejścia $[\mathbf{N}]$ może być znaleziona w oparciu o numeryczne całkowanie w czasie jednego okresu. Metoda ta



wymaga dodatkowo użycia interpolacji i często jest kłopotliwa w użyciu przy dużym wymiarze analizowanych równań różniczkowych. Inna metoda oparta jest na schemacie zaproponowanym w pracy [124]. Algorytm ten składa się z następujących elementów:

$$\begin{aligned} N(0) &= I, \\ N(k\Delta t) &= e^{S_0 \Delta t} N((k-1)\Delta t), \\ N(T) &= N, \end{aligned} \quad (9.49)$$

gdzie

$$e^{S_0 \Delta t} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} S_0^p (\Delta t)^p. \quad (9.50)$$

Przykład 9.1

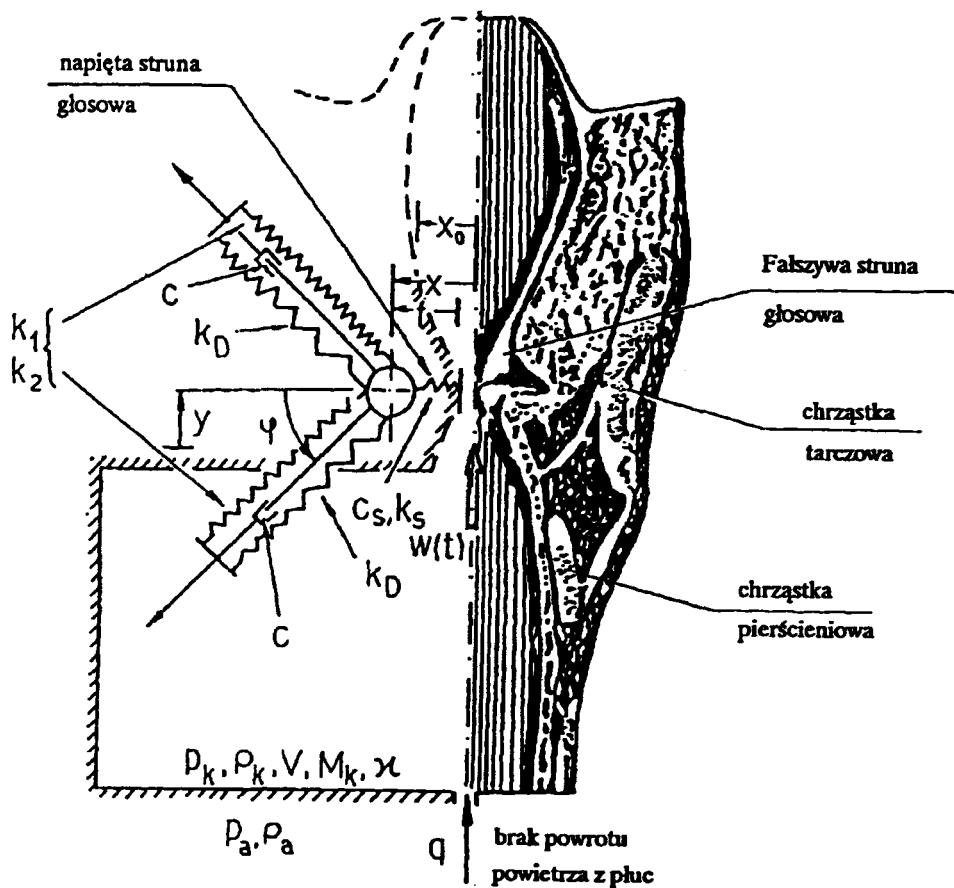
Jako przykład systematycznej analizy numerycznej rozpatrzmy drgania ludzkich strun głosowych. Tematyce tej poświęcono rozdział w pracy [125] i tutaj zagadnienie to przedstawione będzie bardzo skrótowo. Ludzkie płuca wytwarzają ciśnienie powietrza powodujące otwarcie krtani. Wskutek bezwładności struny głosowe otwierają się i potem własności sprężyste tych strun powodują ich przymykanie. Strumień powietrza opuszcza krtani i zjawisku temu towarzyszy efekt ssania Bernoulliego. Następnie wymieniony cykl powtarza się. Strunę głosową zamodelowano jako nieliniowy oscylator o dwóch stopniach swobody i masie punktowej sprężyste podpartej (rys. 9.2).

Masa punktowa może poruszać się w kierunku x i y . W celu opisanego zjawiska zbliżania się strun (nie mogą się one zetknąć), dodatkowo wprowadzono podparcie o współczynniku tłumienia c_s i sztywności k_s . Sztywność k_s jest tak dobrana, że przy zbliżaniu się do początku przyjętego układu współrzędnych siła w sprężynie rośnie do nieskończoności. Płuca i tchawica zamodelowana została jako zbiornik o sztywnych ściankach, a własności podatne płuc zostały uwzględnione poprzez modyfikację parametrów powietrza.

Ponieważ ciśnienie pochodzące z płuc generuje takie same siły działające na struny głosowe, które poruszają się symetrycznie (bez obrotu), to do dalszych rozważań, ze względu na wspomnianą symetrię, wystarczy ograniczyć się do analizy drgań tylko jednej ze stron. W przypadku rozważań zjawisk patologicznych tj. zmian prowadzących do zaburzenia symetrii ruchu, ilość równań opisujących dynamikę zjawiska dwukrotnie wzrasta.

Równanie ruchu struny głosowej w formie bezwymiarowej opisują równania [125]:

$$\begin{aligned} \ddot{X} + C\dot{X} + \{K_X + K_D[(X - X_0)^2 + Y^2]\}(X - X_0) - K_{xy}Y \\ - K_s X^{-s}(1 - C_s \dot{X}) = EP, \\ \ddot{Y} + C\dot{Y} + \{K_X + K_D[(X - X_0)^2 + Y^2]\}Y - K_{xy}(X - X_0) = EP, \end{aligned}$$



Rys. 9.2. Model struny głosowej [125]

$$\dot{P} = Q - \begin{cases} (x-1)P^{0.5}, & \text{dla } x > 1; \\ 0, & \text{dla } x \leq 1. \end{cases} \quad (9.51)$$

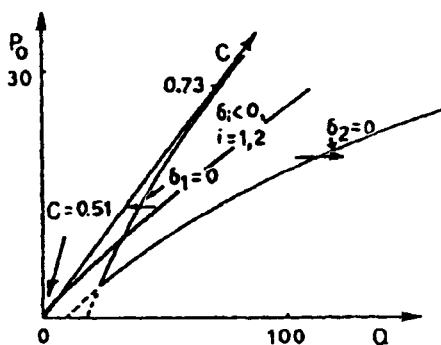
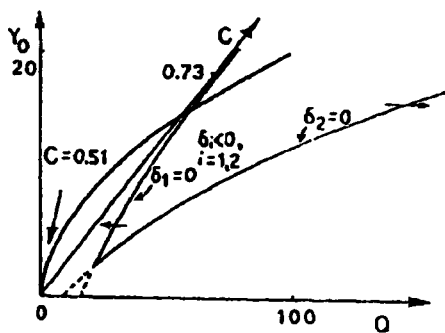
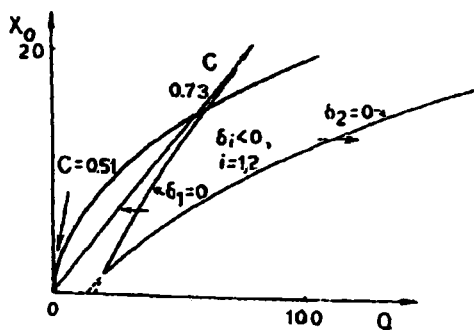
W powyższych równaniach C odpowiada tłumiącym własnościom strun głosowych (< 1). K_y jest pionową sztywnością struny głosowej ($K_y \in (0.7, 0.9)$), $K_x = 1$, K_{xy} jest sztywnością sprzęgającą ruch dwóch głównych kierunków ($K_{xy} \in (0.3, 0.5)$), K_D jest sztywnością typu Duffinga (< 1), K_s jest sztywnością typu hiperbolicznego (< 0.1), $s = 4$, c_s jest tłumieniem (< 1), X_0 jest współrzędną położenia równowagi struny głosowej, E jest średnią powierzchnią struny głosowej ($E \in (0.1, 10.0)$) oraz Q jest wydatkiem strumienia powietrza ($Q \in (0.0, 100.0)$).

Układ równań (9.51) jest układem autonomicznym i silnie nieliniowym (sztywnym), bo jeśli X jest w pobliżu początku układu współrzędnych, to małe zmiany tej współrzędnej powodują bardzo duże zmiany siły w członie równania odpowiadającego sztywności typu hiperbolicznego. Rozważmy najpierw położenie równowagi układu (9.51) - otrzymujemy je po przyjęciu zmiennych zależnych od czasu jako równych zeru. Jako stałe przyjmujemy parametry: $K_y = 0.9$, $K_{xy} = 0.3$, $K_D = 0.001$, $K_s = 0.001$, $c_s = 0.5$, $E = 1$. Rezultat obliczeń podano na rys 9.3. Linia grubą ciągłą w płaszczyznach (X_0, Q) , (Y_0, Q) , (D_0, Q) zaznaczono położenie równowagi. Nie zmieniają się one ze zmianą współczynnika tłumienia C , ale ulega zmianie ich stateczność. Granicą utraty stateczności odpowiadają dwie krzywe ciągle leżące w płaszczyźnie (C, Q) .

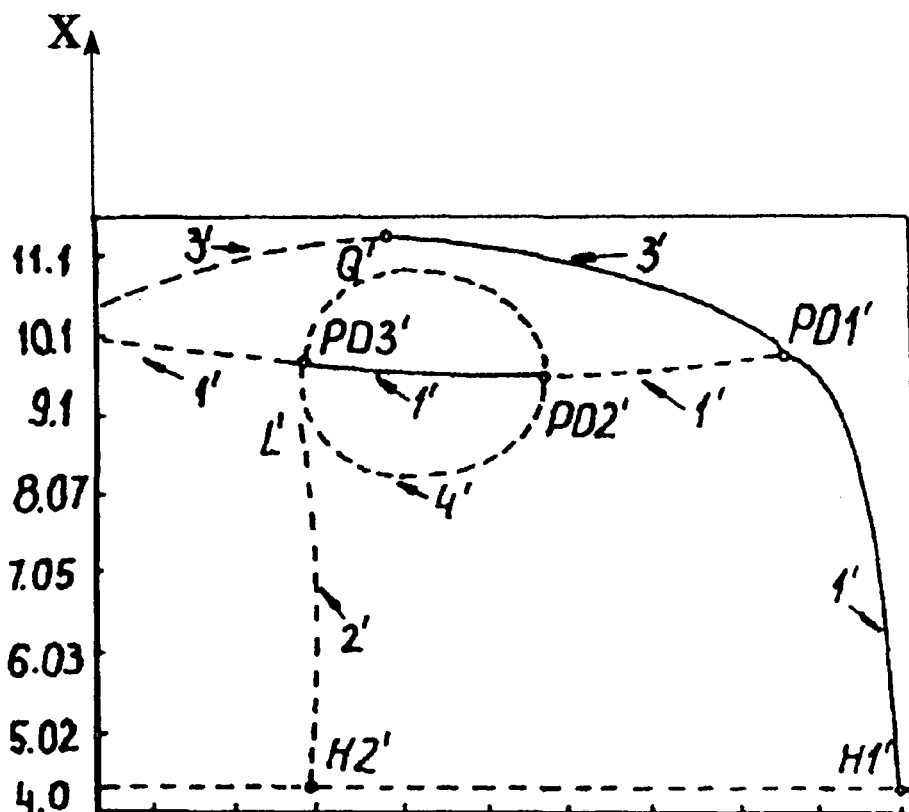
Oznaczmy wartości własne odpowiadające wybranemu położeniu równowagi jako $\lambda_{1,2} = \delta_1 \pm i\omega_1$, $\lambda_{3,4} = \delta_2 \pm i\omega_2$ (można udowodnić, że piąta wartość własna jest rzeczywista i ujemna). Jeśli $\delta_i = 0$ ($i = 1, 2$), to dla ustalonego c ze wzrostem lub zmniejszaniem parametru kontrolnego Q zachodzi bifurkacja Hopfa (na rysunku zaznaczono to poziomymi strzałkami). Punkty przecięcia tych krzywych odpowiadają jednoczesnemu pojawieniu się orbit okresowych o częstościach podstawowych ω_1 i ω_2 i jeśli są one niewspółmierne, to pojawi się ruch quasiokresowy.

Przykład systematycznej analizy numerycznej obejmującej ruch regularny przedstawiono dla układu o następujących parametrach [125]: $K_y = 0.3$, $K_D = 0.001$, $K_s = 0.001$, $D_s = 0.5$, $K_{xy} = 0.3$, $X_0 = E = 0.4$, $Q = 7.0$. Obliczeń dokonano przy użyciu metody strzelania, a ich rezultaty przedstawiono na rys. 9.4.

Jako parametr kontrolny przyjęto współczynnik tłumienia c . Jego zmniejszanie powoduje pojawienie się bifurkacji Hopfa, w wyniku której rodzi się nowe rozwiązanie okresowe (jest to przykład drgań samowzbudnych). Niewielkie dalsze zmniejszanie c powoduje, że amplituda drgań rośnie wzdłuż gałęzi a (warto dodać, że wspomniane wyżej położenie równowagi staje się potem niestateczne - na rysunku zaznaczono to linią przerywaną). W punkcie $PD1$ następuje kolejna bifurkacja (jeden z mnożników charakterystycznych przecina okrąg jednostkowy przechodząc przez punkt -1) i powstaje nowe rozwiązanie okresowe subharmoniczne o okresie dwa razy większym niż poprzednie. Rozwiązanie to jest dalej śledzone wzdłuż gałęzi c i w punkcie Q traci ono stateczność. Jak pokazuje symulacja numeryczna [125] w okolicy tego punktu pojawia się rozwiązanie quasiokresowe. Gałąź a ,

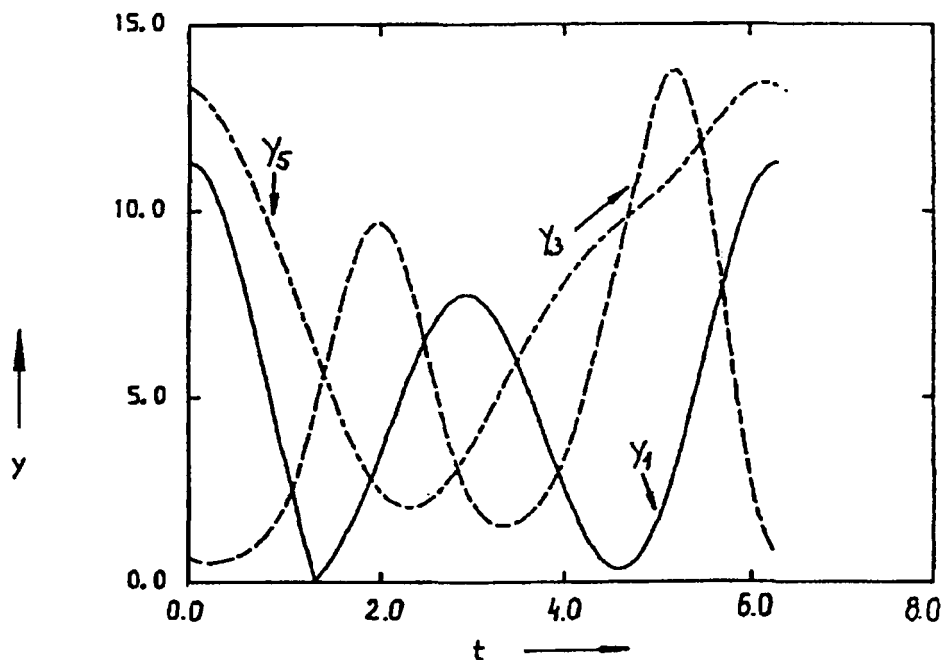


Rys. 9.3. Położenia równowagi i ich stateczność



Rys. 9.4. Portret bifurkacyjny ludzkich strun głosowych [125]

po przekroczeniu punktu $PD1$ staje się niestateczne, chociaż w pewnych zakresach zmian c istnieje rozwiązanie okresowe stateczne (odcinek krzywej pomiędzy punktami $PD2$ i $PD3$). Interesującym przykładem bifurkacji jest punkt $H2$, od którego odgałęzia się rozwiązanie okresowe, które jest niestateczne.



Rys. 9.5. Drgania okresowe strun głosowych dla $c = 0.16$

Dla każdego z punktów należących do krzywej bifurkacyjnej można sporządzić portrety fazowe lub przebiegi czasowe badanej orbity okresowej. Na przykład na rys. 9.5 podano takie przebiegi czasowe dla $c = 0.16$.

Podczas obliczeń okres został znormalizowany do 2π , i wobec tego, z rys. 9.5 widać, że jest to rozwiązanie subharmoniczne stateczne należące do gałęzi c . Widoczne jest ostrze przebiegu X w pobliżu położenia równowagi, co jest zgodne z wcześniejszymi przewidywaniami. Przy tej okazji warto podkreślić, że w tym przypadku użyta metoda strzelania jest bardziej efektywna w porównaniu z metodą Urabe - Reitera, ponieważ należałoby uwzględnić

wiele harmonicznych, aby dobrze aproksymować tego typu zjawisko, co znacznie wydłuża obliczenia. Dla metody strzelania nie ma to większego znaczenia.

Literatura cytowana i uzupełniająca

Rozdziały 1, 2, 3

- [1] D.R. Arrowsmith, C.M. Place, *Ordinary Differential Equations: A Qualitative Approach with Applications*. Chapman and Hall, London, New York, 1982.
- [2] R.S. Guter, A.R. Janpolski, *Równania różniczkowe*. PWN, Warszawa, 1989.
- [3] I.G. Jerugin, *Kniga dla čtenia po obščemu kursu differencialnyh urawnienij*. Nauka i Technika, Minsk, 1979.
- [4] J.S. Bogdanow, J.B. Syroid, *Differencialnyje urawnienia*. Minsk, Wyssaja Škola, 1983.
- [5] A.M. Samoilenko, S.A. Kriuoszeia, N.A. Derestiuk, *Differencjalnyje urawnienia: primery i zadači*. Wyssaja Škola, Moskwa, 1989.
- [6] M. Roszkowski, *Teoria sterowania automatycznego*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 1979.
- [7] R.S. Guter, A.R. Janpolski, *Równania różniczkowe*. PWN, Wydanie drugie, Warszawa, 1989.

Rozdziały 4, 5, 6

- [8] J. Osiecki, *Elementy modelowania w dynamice maszyn*. Rozdział w pracy zbiorowej, Ossolineum, Wydawnictwo PAN, Warszawa, 1974.
- [9] W.W. Bołotin, *Wibracjii w tiechnike. Sprawocznik. T1. Koliebanija linijnych sistjem*. Maszynostrojenije, Moskwa, 1978.
- [10] J.P. Den Hartog, *Drgania mechaniczne*. PWN, Warszawa, 1971.



- [11] Z. Osiński, *Teoria drgań*. WNT, Warszawa, 1979.
- [12] Z. Osiński, *Thumienie drgań mechanicznych*. WAT, Warszawa, 1971.
- [13] K. Piszczek, J. Walczak, *Drgania w budowie maszyn*. PWN, Warszawa, 1967.
- [14] K. Magnus, *Eine Einführung in die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen*. Teubner, Stuttgart, 1976.
- [15] U.M. Babakow, *Tjeorija koljebanij*. Nauka, Moskwa, 1968.
- [16] S. Kaliski, *Drgania i fale*. PWN, Warszawa, 1966.
- [17] Z. Parszewski, *Drgania i dynamika maszyn*. WNT, Warszawa, 1982.
- [18] J.I. McDuff, J. Curreri, *Drgania w technice*. PWN, Warszawa, 1960.
- [19] P. Ganiev, W. Kononienko, *Koljebanija twiordych tel*. Nauka, Moskwa, 1976.
- [20] J. Kozesznik, *Dinamika maszin*. Maszgiz, Moskwa, 1961.
- [21] U. Fischer, W. Stephan, *Mechanische Schwingungen*. Fachbuchverlag, Leipzig-Koln, 1993.
- [22] V.I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer-Verlag, New York 1984.
- [23] H. Goldstein, *Klassische Mechanik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt, 1963.
- [24] K. Klotter, *Technische Schwingungslehre I, II*. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [25] K. Magnus, *Schwingungen*, Teubner Studienbucher. B.G. Teubner, Stuttgart, 1976.
- [26] L. Meirovitch, *Analytical methods in vibrations*. The Mac-Millan Company, New York, 1967.
- [27] F. Pfeiffer, *Einführung in die Dynamik*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.

Rozdział 7

- [28] E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Science*, Vol. 20, 1963, str. 130–141.
- [29] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Calderon Press, Oxford, 1961.
- [30] B. Saltzman, Finite amplitude free convection as an initial value problem I. *Journal of Atmospheric Science* 19, 1981, str. 329–340.
- [31] H.G. Schuster, *Deterministic chaos. An introduction*. VCH Verlagsgesellschaft GmbH, Weinheim, 1989.
- [32] C. Sparrow, *The Lorenz equations*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [33] J. Argyris, G. Faust, M. Haase, An adventure in chaos. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 19, 1991, str. 997–1091.
- [34] Y. Ueda, N. Akamatsu, Chaotically transitional phenomena in the forced negative-resistance oscillator. *IEEE Transactions of Circuits and Systems*, Vol. CAS-28, 1981, str. 217–224.
- [35] P.J. Holmes, F.C. Moon, Strange attractors and chaos in nonlinear mechanics. *Journal of Applied Mechanics* 50, 1983, str. 1021–1032.
- [36] A. Meawall, Chaos in harmonically excited elastic beam. *Transactions of the ASME Journal of Applied Mechanics* 53, 1986, str. 625–632.
- [37] Ch. Kaas-Petersen, Chaos in railway bogie. *Acta Mechanica* 61, 1986, str. 89–107.
- [38] W. Szemplińska-Stupnicka, The behaviour of nonlinear vibrating systems. Volume 1,2. Kluwer Academic Publisher, London, 1992.
- [39] J. Awrejcewicz, *Bifurcation and chaos in coupled oscillators*. World Scientific, Singapore, 1991.
- [40] J. Awrejcewicz (Editor), *Bifurcation and chaos. Theory and Application*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1994.
- [41] D.R.J. Chillingworth, *Differentiable topology with a view to applications*. Pitman, London, 1976.

- [42] F.C. Moon, *Chaotic vibrations*. Wiley-Interscience, New York, 1978.
- [43] V.I. Oseledec, A multiplicative ergodic theorem: Liapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Transactions Moscow Mathematical Society* 19, 1968, str. 197–231.
- [44] G. Benetin, M. Casartelli, L. Galgani, A. Giorgilli, J.M. Strelcyn, On the reliability of numerical studies of stochasticity, II: Identification of time averages. *Il. Nuovo Cimento* 50B, 1979, str. 211–232.
- [45] I. Shimada, T. Nagashima, A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. *Progress of Theoretical Physics* 61, 1979, str. 1605–1616.
- [46] A. Wolf, Quantifying chaos with Lyapunov exponents, str 273 290. W pracy pod redakcją A.V. Holden, *Chaos*. Manchester University Press, 1986.
- [47] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano, Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica* 16D, 1985, str. 285–317.
- [48] A.B. Abraham, J.D. Gollub, H.L. Swinney, Testing nonlinear dynamics. *Physica* 11D, 1984, str. 252–264.
- [49] P. P. Grassberger, I. Procaccia, Measuring the strangeness of strange attractor. *Physica* 9D, 1983, str. 189–200.
- [50] J. Rudowski, Ruch chaotyczny w zdeterminowanych układach drgających – wprowadzenie. Praca zbiorowa pod redakcją W. Szemplińskiej-Stupnickiej, *Chaos w nieliniowej mechanice*. Prace IPPT, Warszawa, 1985.
- [51] V.K. Mielnikov, On the solvability of the center for time periodic perturbations. *Transactions Moscow Mathematical Society* 12, 1963, str. 1–57.
- [52] S.N. Chow, J.K. Hale, J. Mallet-Paret, An example of bifurcation to homoclinic orbits. *Journal of Differential Equations* 37, 1980, str. 351–373.
- [53] P. Holmes, J. Marsden, Melnikov's method and Arnold diffusion for perturbations of integrable Hamiltonian systems. *Journal of Mathematical Physics* 23, 1982, str. 669–675.

- [54] P. Holmes, Unfolding a degenerate oscillator. *Annals of New York Academy of Sciences* **357**, 1980, str. 437–450.
- [55] J. Palis, On Morse-Smale dynamical systems. *Topology* **8**, 1969, str. 385–405.
- [56] J. Guckenheimer, P.J. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [57] B.D. Greenspan, P.J. Holmes, Subharmonic and global bifurcations in forced oscillations. W pracy pod redakcją: G. Barenblatt, G. Iooss, P.P. Joseph, *Nonlinear Dynamics and Turbulence*. Pitman, London, 1983.
- [58] F.C. Moon, J. Cusumano, P.J. Holmes, Evidence for homoclinic orbits as a precursor to chaos in a magnetic pendulum. *Physica* **24D**, 1987, str. 383–390.
- [59] H.L. Swinney, J.P. Gollub, *Hydrodynamic instabilities and transition to turbulence*. Springer-Verlag, 1981.
- [60] S. Ostlund, D. Rand, J. Sethna, Universal properties of the transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems. *Physica* **8D**, 1983, str. 303–315.
- [61] M. Feigenbaum, Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics* **19**, 1978, str. 25–36.
- [62] D.G. Aronson, H.A. Chory, G.R. Hill, R.D. McGehee, Bifurcations from an invariant circle for two-parameter families of maps of the plane. *Communications in Mathematical Physics* **83**, 1982, str. 303–309.
- [63] Y. Pomeau, P. Manneville, Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Communications in Mathematical Physics* **74**, 1980, str. 189–201.
- [64] J.E. Hirsch, B.A. Hubermann, P.J. Scalapino, Theory of intermittency. *Physics Review A* **25**, 1982, str. 519–525.
- [65] Y. Pomeau, J.C. Roux, A. Rossi, S. Bachelart, C. Vidal, Intermittent behaviour in the Belousov-Zhabotinsky reaction. *Journal of Physics Letters* **42**, 1981, L271–L274.

- [66] C. Jeffries, J. Perez, Observation of the Pomeau-Manneville intermittent route to chaos in a nonlinear oscillator. *Physics Review A* **26**, 1982, str. 2112-2121.
- [67] P. Bergé, M. Dubois, P. Manneville, Y. Pomeau, Intermittency in Rayleigh-Benard convection. *Journal of Physics Letters*, 1981, L341-L346.
- [68] L. Glass, R. Perez, Finite structure of phase locking. *Physical Review Letters* **48**, 1982, str. 1772-1774.
- [69] P.H. Steen, S.H. Davies, Quasiperiodic bifurcation in nonlinearly coupled oscillators near a point of strong resonance. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **42**, 1982, str. 1345-1352.
- [70] D. Ruelle, F. Takens, On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics* **20**, 1971, str. 167-192.
- [71] S. Newhouse, D. Ruelle, F. Takens, Occurrence of strange axiom A attractors near quasiperiodic flows on T^m , $m \geq 3$. *Communications in Mathematical Physics* **64**, 1978, str. 35-41.
- [72] C. Grebogi, E. Ott, J. Yorke, Attractors on an N-torus: Quasiperiodicity versus chaos. *Physica* **15D**, 1985, str. 354-373.
- [73] D. Rand, S. Ostlund, J. Sethna, E. Siggia, A universal transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems. *Physics Review Letters* **49**, 1982, str. 132-138.
- [74] S.J. Shenker, Scaling behaviour in a map of a circle onto itself-empirical result. *Physica* **5D**, 1982, str. 405-418.
- [75] M. Feigenbaum, The universal metric properties of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics* **21**, 1979, str. 669-706.
- [76] P. Collet, J.P. Eckmann, *Iterated maps of the interval as dynamical systems*. Birkhäuser, Boston, 1980.
- [77] O. Lanford, Periodic doubling in one and several dimensions. *Physica* **70**, 1983, str. 124-135.

- [78] M. Giglio, S. Musazzi, U. Perini, Transition to chaotic behaviour via a reproducible sequence of a period doubling bifurcations. *Physical Review Letters* **47**, 1981, str. 243–251.
- [79] J.P. Gollub, S.V. Benson, Chaotic response to periodic perturbation of convecting fluid. *Physics Review Letters* **41**, 1978, str. 948–956.
- [80] A. Libchaber, C. Laroche, S. Fauve, Periodic doubling cascade in a mercury, a quantitative measurement. *Journal of Physics Letters* **43**, 1982, str. L211–L216.
- [81] D.S. Lindsay, Period doubling and chaotic behaviour in a driven oscillator. *Physics Review Letters* **47**, 1981, str. 1349–1357.
- [82] J.S. Testa, J. Perez, C. Jeffries, Evidence for universal chaotic behaviour of a driven nonlinear oscillator. *Physics Review Letters* **48**, 1982, str. 714–725.
- [83] W. Lauteborn, E. Cramer, Subharmonic route to chaos observed in acoustics. *Physics Review Letters* **47**, 1981, str. 1445–1452.
- [84] R.H. Simoy, A Wolf, H.L. Swinney, One dimensional dynamics in a multicomponent chemical reaction. *Physics Review Letters* **49**, 1982, str. 245–247.
- [85] J. Guckenheimer, On the bifurcation of maps of the interval. *Inventiones Mathematicae* **39**, 1979, str. 165–180.
- [86] J.C. Roux, H.L. Swinney, Topology of chaos in a chemical reaction. Praca wydana pod redakcją: C. Vidal, A. Pecault, *Nonlinear phenomena in chemical dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [87] D. D'Humiers, M.R. Beasley, B.A. Huberman, A. Libchaber, Chaotic states and routes to chaos in the forced pendulum. *Physics Review* **A26**, 1982, str. 3483–3492.
- [88] M. Levi, Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations. *Memoirs of American Mathematical Society* **244**, 1981.
- [89] J.C. Roux, J.S. Turner, W.P. McCormick, H.L. Swinney, Experimental observations of complex dynamics in a chemical reaction. W pracy pod

redakcja: A.R. Bishop, D.K. Campbell, B. Niedaenko, *Nonlinear Problems: Present and future*. North Holland, Amsterdam, 1982, str. 409–420.

- [90] C. Grebogi, E. Ott, Crises, sudden changes in chaotic attractors and transient chaos. *Physica* **70**, 1983, str. 181–200.
- [91] W. Szemplińska-Stupnicka, Secondary resonances and approximate models of routes to chaotic motion in non-linear oscillations. *Journal of Sound and Vibrations* **113**, 1987, str. 155–168.
- [92] W. Szemplińska-Stupnicka, Cross-well chaos and escape phenomena in driven oscillations, *Nonlinear Dynamics* **3**, 1992, str. 225–243.

Rozdział 8

- [93] R. Gilmore, *Catastrophe theory for scientists and engineers*. A. Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, New York, Chichester, Birsbane, Toronto, 1981.
- [94] I.G. Panovko, I.I. Gubanowa, *Ustojčivost i kolebanija uprugich sistem*. Moskwa, Nauka, 1979.
- [95] W.I. Fedosiew, *Uprugije elementy točnogo priborostroienia*. Moskwa, Oborongiz, 1949.
- [96] V.I. Arnold, Kritičeskie točki gladih funkcji i ich normalnyje formy. *Uspiechi matematičeskich nauk* **30**, 5, 1975, s. 3–65.
- [97] J. Callahan, Singularities and plane maps II: Sketching catastrophes. *Math. Monthly* **84**, 1977, s. 765–803.
- [98] E.C. Zeeman, *Catastrophe Theory, Selected Papers, 1971–1977*, Reading: Addison-Wesley, 1977, s. 18.
- [99] J.M.T. Thompson, G.W. Hunt, *Towards a Unified Bifurcation Theory*. *Journal of Applied Mathematical Phisics* **26**, 1975, s. 581–603.
- [100] M. Golubitsky, D. Schaeffer, *A Theory for Imperfect Bifurcation via Singularity Theory*. *Communication in Pure and Applied Mathematics* **32**, 1979, s. 21–98.

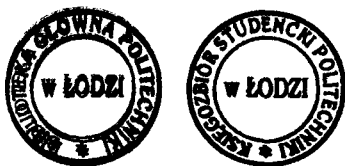
- [101] T. Poston, I.N. Stewart, *Catastrophe Theory and Its Applications*. Pitman, London, San Francisco, Melbourne, 1978.
- [102] A. Anon, Catastrophes in action. *Manifold* 14, 1973, s. 26–31.
- [103] R.R. Chillingworth, *Elementary catastrophe theory*. *Bull. Int. Math. Appl* 11, 1975, s. 155–159.
- [104] M. Golubitsky, An introduction to catastrophe theory and its applications. *Lecture Notes*, Queens College, New York, 1976.
- [105] I.N. Stewart, The seven elementary catastrophes. *New Scientists* 68, 1975, s. 447–454.
- [106] H.J. Sussman, Catastrophe theory. *Synthese* 31, 1975, s. 229–270.
- [107] R. Thom, The two-fold way of catastrophe theory. In *Structural Stability, the Theory of Catastrophes and Applications in the Sciences*. *Lecture Notes in Mathematics* (R.J. Hilton, ed.), Springer, Berlin and New York, 1976, s. 235–252.
- [108] E.C. Zeeman, Catastrophe theory i brain modelling. *Int. J. Neurosci.* 6, 1973, s. 39–41.
- [109] E.C. Zeeman, Applications of catastrophe theory. *Manifolds*, Tokyo, 1973.
- [110] R.J. Magnus, T. Poston, A strictly infinite-dimensional “fold catastrophe”. *Mathematics Report* 110, Battelle, Geneva, 1977.
- [111] D.A. Rand, P.J. Holmes, The bifurcations of Duffing’s equation: an application of catastrophe theory. *Journal of Sound and Vibrations* 44, 1976, s. 237–253.

Rozdział 9

- [112] L. Lapidus, J. Seinfeld, *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. New York, Academic Press, 1971.
- [113] F.S. Acton, *Numerical Methods That Work*. Washington, Mathematical Association of America, 1990.

- [114] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*. New York, Springer-Verlag, 1980.
- [115] C.W. Gear, *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*. Englewood Cliffs, NJ Prentice Hall, 1971.
- [116] J.R. Rice, *Numerical Methods, Software and Analysis*. New York, McGraw Hill, 1983.
- [117] G.E. Forsythe, M.A. Malcolm, C.B Moler, *Computer Methods for Mathematical Computations*. Englewoods Cliffs, NJ Prentice-Hall, 1983.
- [118] L.F. Schampine, M.K. Gordon, *Computer Solution of Ordinary Differential Equations. The Initial Value Problem*. W.H. Freeman, San Francisco, 1975.
- [119] D. Kahaner, C. Moler, S. Nash, *Numerical Methods and Software*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1989.
- [120] W.H. Press, S.A. Tenkolsky, W.T. Vettering, B.P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran. The Art of Scientific Computing*. Second Edition, Cambridge University Press, 1992.
- [121] M. Urabe, A. Reiter, Numerical Computation of Nonlinear Forced Oscillations by Galerkins Procedure. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 14, 1966, str. 107–140.
- [122] J.W. Cooley, J.W. Tukay, An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Mathematical Computations* 19, 90, 1965, str. 297–301.
- [123] E.O. Birgham, *FFT - Schuella Fourier - Transformation*. Oldenburg-Verlag, München, Wien, 1987.
- [124] C.S. Hsu, On Aproximating a General Linear Periodic System. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 45, 1974, str. 234–251.
- [125] J. Awrejcewicz, *Bifurcation and Chaos in Coupled Oscillators*. World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1991.
- [126] J. Awrejcewicz, *Bifurcation and Chaos in Simple Dynamical Systems*. World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1989.

- [127] J. Awrejcewicz (Ed.), *Bifurcation and chaos: Theory and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [128] J. Awrejcewicz, *Dynamika nieliniowych maszyn*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 1994.



76004/5