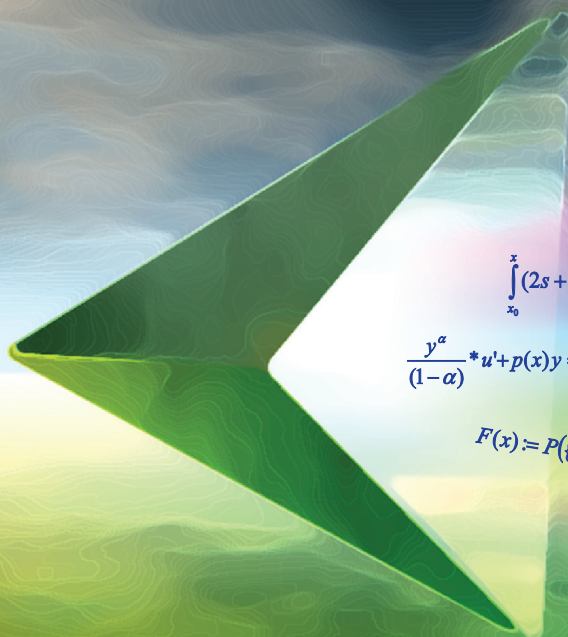


JASNA STRONA MATEMATYKI

Jakub Szczepaniak



$$y' + p(x) \cdot y = q(x); (*)$$

$$\int_{x_0}^x (2s + y) ds + \int_{y_0}^y (x_0 + 2t) dt = 0$$

$$\frac{y^\alpha}{(1-\alpha)} \cdot u' + p(x)y = q(x) \cdot y^\alpha \quad y = C(x)e^{-\int p(x) dx}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot (B / A_i)$$

$$F(x) = P(\{e \in \Omega : X(e) < x\}) = P(X < x)$$

Jakub Szczepaniak

JASNA STRONA MATEMATYKI

**Politechnika Łódzka
Łódź 2014**

Recenzent: **doc. dr Andrzej Just**

Projekt okładki: **Mariusz Karolczyk**

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223
tel. 42-631-20-87, fax 42-684-07-93
e-mail: zamowienia@info.p.lodz.pl
www.wydawnictwa.p.lodz.pl

© Copyright by Politechnika Łódzka 2014

ISBN 978-83-7283-626-7

Nakład 200 egz. Ark druk. 11,0. Papier offset. 80 g 70 x 100
Druk ukończono w lipcu 2014 r.
Wykonano w drukarni „Quick-Druk” s.c. 90-562 Łódź, ul. Łąkowa 11
Nr 2112

KATOI

SPIS TREŚCI

Zamiast wstępu.....	7
Egzaminy, zaliczenia i codzienność dziekanatów	26
Wybieramy dziekana	53
Habemus Papam	65
Tajemne przekazy.....	74
Matematyka dzieciństwa i wyjątkowych dni.....	79
Sprawy codzienne.....	86
Prawa Murphy'ego	96
Matematyka w sądzie	100
Matematyka gier i zabaw.....	108
6 stopni oddalenia	128
Overbooking	132
Sztuczki i magia	135
Bibliografia	165

ZAMIAST WSTĘPU

Dark side of the moon – najsłynniejsza płyta rockowa. Utwory grupy Pink Floyd składające się w monumentalny, przenikający szczerością album od 30 lat łączą pokolenia dzieci i rodziców, wspólnie słuchających muzyki. Zainspirowany tekstami, ośmieliłem się strawestować tytuł płyty tak, by zachęcić nie tylko fanów muzyki do spotkania z matematyką.

Matematyka i muzyka to moje dwie pasje. Wydaje się, że przenikają się wzajemnie, są obecne w każdej, codziennej chwili życia. Wyznaczają rytm i tempo naszych działań, sumują doświadczenia, analizują sukcesy, a czasami mnożą porażki.

Książka, którą Czytelniku trzymasz w ręku, zawiera kilkanaście przykładów obecności matematyki w naszym życiu codziennym. Każdy rozdział poprzedzony jest fragmentem utworów z *Dark side of the moon*, które szczególnie pasują do poruszanych tematów. Serdecznie zapraszam do lektury, a na początek proponuję kilka krótkich matematycznych wycieczek w krainę alfabetu, liczb, historii i absurdu. Mam nadzieję, że opowiadki te zachęcą Cię do łaskawszego spojrzenia na matematykę.

1. Alfabetyczny spis liczb

Poniżej wypisuję, w pewnym porządku, liczby naturalne nie większe od stu.

40, 44, 42, 49, 41, 48, 45, 47, 46, 43, 14, 4, 2, 20, 24, 22, 29, 21, 28, 25, 27, 26, 23, 12, 9, 90, 94, 92, 99, 91, 98, 95, 97, 96, 93, 19, 10, 1, 11, 8, 80, 84, 82, 89, 81, 88, 85, 87, 86, 83, 18, 5, 50, 54, 52, 59, 51, 58, 55, 57, 56, 53, 15, 7, 70, 74, 72, 79, 71, 78, 75, 77, 76, 73, 17, 16, 6, 60, 64, 62, 69, 61, 68, 65, 67, 66, 63, 100, 3, 30, 34, 32, 39, 31, 38, 35, 37, 36, 33, 13

Po krótkiej analizie listy można dojść do wniosku, że kryterium wyboru, które zadecydowało o takiej kolejności liczb był alfabet. Liczby są ułożone w kolejności alfabetycznej. Pierwszą liczbą na liście jest 40 (czterdzieści), zaś ostatnią jest 13 (trzynaście). Zauważmy, że pierwszą z liczb jednocyfrowych wypisywanych w kolejności alfabetycznej jest 4 (cztery), zaś ostatnią 3 (trzy).

Kilka uwag, które warto poczynić w związku ze spisem.

Otóż:

- a) Liczby o najmniejszej liczbie liter to 2 i 100 (po 3);
- b) Liczba o największej liczbie liter to 99 (24 litery);

- c) Najmniejsza liczba wypowiedziana jedną sylabą to 2, największa to 100;
- d) Najmniejsza liczba wypowiedziana dwiema sylabami to 1, największa to 10;
- e) Najmniejsza liczba wypowiedziana trzema sylabami to 12, największa to 60;
- f) Najmniejsza liczba wypowiedziana czterema sylabami to 11, największa to 90;
- g) Najmniejsza liczba wypowiedziana pięcioma sylabami to 21, największa to 96;
- h) Najmniejsza liczba wypowiedziana sześcioma sylabami to 71, największa to 99;
- i) Nie ma liczb wypowiedzianych z użyciem większej liczby sylab niż 6.

Zauważmy, że pomijając liczbę 1, ilość sylab potrzebna na wypowiedzenie danej liczby jest zawsze mniejsza od wartości tej liczby. Prowadzi to do następującego wniosku:

Biorąc dowolną liczbę naturalną n , licząc sylaby potrzebne na jej wypowiedzenie i powtarzając operację, dojdziemy zawsze do pętli składającej się z 2 i 1.

Na przykład startując z liczbą 997 (*dzieńcieśet dzieńćdziesiąt siedem*), otrzymamy ciąg:

997 (dzieńcieśet dzieńćdziesiąt siedem $\rightarrow$ 9 sylab), 9 (dzieńć $\rightarrow$ 2 sylaby), 2 (dwa $\rightarrow$ 1 sylaba), 1 (jeden $\rightarrow$ 2 sylaby) 2, 1, 2,... Zatem otrzymujemy ciąg: 997, 9, (2, 1).

Gdy zaczniemy z liczbą np. 19715, otrzymamy ciąg: 19715, 13, 3, (1, 2). Liczba 223 generuje natomiast ciąg: 223, 6, 1, 2, (1, 2). 666 wyznacza natomiast: 666, 6, 1, 2, (1, 2).

Z podobnych powodów, jeśli powyższe operacje powtórzymy dla liczby liter, zamiast sylab, potrzebnych na zapisanie danej liczby, to otrzymamy ciąg kończący się pętlą (5, 4, 6). Zobaczmy:

997 generuje ciąg: 997, 33, 15, 10, 8, 5, 4, 6, (5, 4, 6)

19715 daje: 19715, 40, 11, 10, 8, 5, 4, 6, (5, 4, 6)

223 daje 223, 21, 11, 10, 8, 5, 4, 6, (5, 4, 6)

666 wyznacza 666, 26, 16, 10, 8, 5, 6, 4, (5, 4, 6)

Gdy język polski zamienimy na angielski, wówczas lista alfabetyczna liczb naturalnych nie większych od 100 będzie wyglądać następująco:

8, 18, 80, 85, 84, 89, 81, 87, 86, 83, 82, 11, 50, 58, 55, 54, 59, 51, 57, 56, 53, 52, 5, 15, 4, 14, 40, 48, 45, 44, 49, 41, 47, 46, 43, 42, 100, 9, 19, 90, 19, 98, 95, 94, 99, 91, 97, 96, 93, 92, 1, 7, 17, 70, 78, 75, 74, 79, 71, 74, 76, 73, 72, 6, 16, 60, 68, 65, 64, 69, 61, 67, 66, 63, 62, 10, 13, 30, 38, 35, 34, 39, 31, 37, 36, 33, 32, 3, 12, 20, 28, 25, 24, 29, 21, 27, 26, 23, 22, 2.

Jedyną liczbą, która zarówno w spisie polskim, jak i angielskim znajduje się na tej samej pozycji jest 3. Zachęcam do podobnych „badań” nad spisem angielskim.

Zauważmy ponadto, że w języku angielskim ciąg liter wyznaczających liczby zawsze kończy się liczbą 4. Wyjaśnienie jest bardzo proste. Oznaczając przez $L(n)$ liczbę liter potrzebnych na wypowiedzenie danej liczby naturalnej w języku angielskim, otrzymamy:

$L(1) = 3$, $L(2) = 3$, $L(3) = 5$, $L(4) = 4$ i $L(n) < n$ dla $n > 4$. Zatem ciąg liter wyznaczających liczby kończy się liczbą 4.

999 generuje: 999, 22, 9, 4, (4)

19715 daje: 19715, 35, 10, 3, 5, 4, (4)

223 wyznacza: 223, 15, 7, 5, 4, (4)

666 daje: 666, 18, 9, 4, (4)

Czytelnik poliglota może z łatwością zaobserwować podobne pętle pojawiające się w innych językach. Kolejną ciekawostką związaną z alfabetycznym spisem liczb naturalnych jest następująca obserwacja: wypisując kolejno liczby naturalne, używając ich zapisu w języku angielskim, pierwsze a pojawiłoby się dopiero przy liczbie 1000 (thousand)!

2. Klub z selekcją

Stoimy przed eleganckim klubem, obserwując wchodzących klientów. Osoba przeprowadzająca selekcję podaje każdemu pewną liczbę, po czym oczekuje odpowiedzi. Jeżeli jest ona zgodna z ustalonym kodem, to wówczas selekcjoner pozwala klientowi na wejście do klubu. W przeciwnym wypadku selekcjoner dziękuje klientowi za fatygę i zamyka przed nim drzwi klubu. Z zainteresowaniem obserwujemy kolejnych wchodzących do klubu gości. Pierwszy z nich na liczbę „9” podaną przez selekcjonera odpowiedział „8”, kolejny na „11” podał odpowiedź „10”, następni na „7” i „5” poprawnie podali odpowiedzi „6” i „4”. Pewni naszej przenikliwości ustawiamy się w kolejce i na podaną liczbę „8” odpowiadamy „7”. Ku naszemu zdumieniu, nie wpuszczono nas, podczas gdy osoba stojąca przed nami na „6” odpowiedziała „5” i została z uśmiechem zaproszona do wejścia. By jeszcze bardziej poczuć się zdezorientowanym okazuje się, że na „3” poprawną odpowiedzią jest „4” a nie „2”. Zastanawiamy się, jaką regułą posługuje się selekcjoner.

Oczywiście mając na uwadze poprzedni fragment rozdziału poświęcony alfabetycznemu spisowi liczb oraz rozważaniom dotyczącym ilości sylab i liter potrzebnych na wyrażenie kolejnych liczb, zauważamy, że regułą jest liczba liter potrzebnych na wyrażenie danej liczby.

9 – (dziewięć) daje 8, 11 – (jedenaście) daje 10. Natomiast poprawną odpowiedzią na 3 – (trzy) jest 4.

3. Liczby największe

Zaproponujmy następującą zabawę:

Liczymy litery potrzebne na opisanie kolejnych liczb naturalnych. Zamiast 2 (dwa) możemy na przykład powiedzieć: *Najmniejsza liczba pierwsza*. Wówczas wyrazimy 2 (dwa) przez 7 sylab. Trójkę możemy wyrazić jako: *liczba, która wygląda jak prawa połowa ósemki ciętej wzdłuż*. W tym wypadku wyrażamy 3 przez 19 sylab.

Zastanówmy się nad znalezieniem największej liczby wypowiedzianej przez 16 sylab.

Otóż po chwili namysłu dojdziemy do wniosku, że:

Największa liczba wypowiedziana przez 16 sylab to: *Największa liczba wypowiedziana przez 16 sylab*, gdyż zdanie to ma dokładnie 16 sylab i opisuje największą liczbę wypowiedzianą przez 16 sylab.

Z kolei, szukamy największej liczby wypowiedzianej przez mniej niż 90 sylab. I tu spotyka nas niespodzianka. Zdanie: *Największa liczba wypowiedziana przez mniej niż 90 sylab*, ma 19 sylab, czyli ono samo opisuje tę liczbę. Zatem proponujemy, aby kandydatem na największą liczbę wypowiedzianą przez mniej niż 19 sylab była właśnie największa liczba wypowiedziana przez mniej niż 90 sylab. I tutaj czeka nas pełne zaskoczenie:

Chociażby zdanie: *Największa liczba wypowiedziana przez mniej niż 90 sylab powiększona o 10*, ma również mniej niż 90 sylab i opisuje liczbę większą od największej wypowiedzianej przez mniej niż 90 sylab. Zatem... taka liczba nie istnieje.

4. Znikająca siódemka

Proszę spojrzeć na następujący ciąg liczb: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9.

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że nie ma w nim 7. Po wnikliwej analizie kolejnych wyrazów tego ciągu dochodzimy do wniosku, że w ciągu tym nie występuje 7. Przepisując kilkanaście razy ten ciąg, cały czas nie zauważamy obecności 7 w tym ciągu. Wydaje się, że 7 nie ma w tym ciągu.

Ale na miłość Boską dlaczego?!

5. Liczby ciekawe

Każdy z nas ma jakieś ulubione liczby naturalne. Liczby te są z nami związane poprzez pewne zdarzenia z naszego życia, zatem są niewątpliwie liczbami ciekawymi. Załóżmy, że wszyscy nasi znajomi wypisują swoje ulubione liczby naturalne, a następnie konstruujemy sumę tych zbiorów. Powstanie zbiór liczb ciekawych, który jest podzbiorem zbioru liczb naturalnych.

Każdy podzbiór zbioru liczb naturalnych posiada element najmniejszy. Zatem możemy znaleźć najmniejszy element w zbiorze liczb ciekawych. Odejmując od niego jeden, otrzymamy największą całkowitą liczbę nieciekawą. I to już jest naprawdę ciekawe!

6. Never odd or even

Zdanie powyższe jest sensowne i poprawne. Zachowuje identyczny kształt czytane zarówno od początku, jak i od końca. Zdania takie nazywamy *palindromami*. Kolejne przykłady takich zdań w języku angielskim to:

Devil Lived

Madam I'm Adam

Najbardziej znani polscy twórcy palindromów to Stanisław Barańczak, Józef Godzic i Tadeusz Morawski.

Najbardziej znane polskie palindromy to pochodzący z XIX w. nieznanego autorstwa:

Kobyła ma mały bok

I co idioci (Józef Godzic)

Ada goła mało gada (Tadeusz Morawski)

I lali masoni wydróm w mordy wino, sami lali (Stanisław Barańczak)

Także liczba 112211 przedstawia taką samą wartość, gdy zapiszemy ją w odwrotnej kolejności. Liczby o tej własności, podobnie jak zdania, również nazywamy *palindromami*.

Zauważmy, że każdy palindrom o parzystej liczbie cyfr:

$$a_{2n-1}10^{2n-1} + a_{2n-2}10^{2n-2} + \dots + a_210^2 + a_110 + a_0 \text{ jest podzielny przez } 11.$$

Rzeczywiście suma:

$$a_0 - a_1 + a_2 + \dots + a_{2n-2} - a_{2n-1} = 0, \text{ gdyż } a_0 = a_{2n-1}, a_1 = a_{2n-2}, a_2 = a_{2n-3} \text{ itd,}$$

co zgodnie z cechą podzielności przez 11 wskazuje, że liczba:

$$a_{2n-1}10^{2n-1} + a_{2n-2}10^{2n-2} + \dots + a_210^2 + a_110 + a_0 \text{ jest wielokrotnością } 11.$$

Zauważmy, że palindromów liczbowych jest nieskończenie wiele.

Chociażby kwadrat każdej liczby typu $10^n + 1$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$ jest palindromem typu 100...00000..001.

Oprócz tego zauważmy, że palindromy możemy tworzyć dokonując następujących mnożeń:

$$\begin{aligned} 11 \cdot 11 &= 121, & 111 \cdot 111 &= 123321, & 1111 \cdot 1111 &= 1234321, \\ 11111 \cdot 11111 &= 123454321, & 111111 \cdot 111111 &= 12345654321 \text{ itp.} \end{aligned}$$

Gdy weźmiemy pod uwagę liczbę naturalną N , to jeśli sama nie jest palindromem, możemy skonstruować z liczby N palindrom, używając następującego algorytmu: Odwracamy kolejność cyfr w liczbie N , tworząc w ten sposób liczbę $\underline{N}$. Dodajemy je do siebie. Jeśli suma jest palindromem, to operację przerywamy. W przypadku gdy $S = N + \underline{N}$ nie jest palindromem, powtarzamy czynności dla $N = S$.

Przykładowo:

$49 + 94 = 143$, $143 + 341 = \mathbf{484}$ (potrzebne były 2 sumowania)

$86 + 68 = 154$, $154 + 451 = 605$, $605 + 506 = \mathbf{1111}$ (potrzebne były 3 sumowania)

$69 + 96 = 165$, $165 + 561 = 726$, $726 + 627 = 1353$, $1353 + 3531 = \mathbf{4884}$ (4 sumowania).

Dla liczb 98 i 89 palindrom uzyskujemy dopiero po wykonaniu 24 sum. Otrzymamy palindrom to **8813200023188**.

Liczba 739 produkuje palindrom **5233333325** po wykonaniu 17 sum.

Procedura ta, stosowana do liczby 196, po przeszło dwu milionach dodawań wciąż nie dawała palindromu. W 2006 roku ogłoszono, że po prawie 750 milionach dodawań otrzymano liczbę z przeszło 300 milionami cyfr wciąż niebędącą palindromem.

Oprócz liczby 196 znane są jeszcze 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, które dotychczas, po wielomilionowych dodawaniach nie dały palindromu.

Kwestia, czy procedura ta zawsze skończy się palindromem pozostaje wciąż otwarta.

W literaturze matematycznej to zagadnienie nazywamy *Hipotezą 196*.

7. Zabawa z kalendarzem

Ten trick jest konsekwencją prostej obserwacji dotyczącej układu zapisu dni miesiąca na każdym ściennym kalendarzu. Prosimy ochotnika o zakreślenie w dowolnym miesiącu kwadratu składającego się z 16 dat.

Po wykonaniu tej czynności będzie miał przed sobą tablicę złożoną z następujących liczb:

x	$x + 1$	$x + 2$	$x + 3$
$x + 7$	$x + 8$	$x + 9$	$x + 10$
$x + 14$	$x + 15$	$x + 16$	$x + 17$
$x + 21$	$x + 22$	$x + 23$	$x + 24$

Następnie prosimy go o wybranie dowolnego dnia miesiąca (zapisanie liczby oznaczającej ten dzień na osobnej kartce), skreślenie dat znajdujących się w tym wierszu i kolumnie gdzie znajduje się wybrana data. Dalej wybiera inny dzień spośród nieskreślonych (zapisuje również tę liczbę) i jak poprzednio skreśla cały wiersz i kolumnę, w której znajduje się kolejna wybrana przez niego data. Operację powtarza jeszcze raz. Po wybraniu trzech dni i skreśleniu

odpowiednich kolumn i wierszy pomagamy mu zauważyć, że pozostaje tylko jeden dzień nieskreślony w całym kwadracie. Prosimy o zapisanie na kartce tej jedynej nieskreślonej daty. Ostatecznie prosimy ochotnika o obliczenie sumy czterech liczb znajdujących się na kartce.

Ku jego zdumieniu okaże się, że suma ta została już dawno przez nas napisana na osobnej kartce, która cały czas leżała na stole.

Tajemnica tej sztuczki jest bardzo prosta. Wybierając w opisany sposób daty z kalendarza, dostajemy ciąg czterech wartości pochodzących z różnych kolumn i wierszy macierzy.

Za każdym razem suma tych wartości równa się sumie liczb z głównej przekątnej, czyli $4x + 48$.

W praktyce, aby poznać sumę, wystarczy krótki rzut oka na wybrany kwadrat dat, by dodać do siebie skrajne wartości (x oraz $x + 24$), a potem pomnożyć wynik przez 2.

8. Orły i reszki

Przedstawię obecnie bardzo prostą, ale jakże zdumiewającą sztuczkę z monetami.

Na stole znajduje się 12 monet. 5 z nich jest odwróconych reszką ku górze, a pozostałe 7 jest zwrócone orłami ku górze. Wykonawca twierdzi, że z zawiązanymi oczami podzieli zbiór monet na dwa zbiory, takie że w każdym z nich będzie taka sama liczba monet zwróconych reszkami ku górze. Oczywiście wykonawca nie zna początkowego układu monet na stole.

Sztuczkę przeprowadzamy w sposób następujący:

Podchodzimy do stołu i rozdzielamy monety na dwa zbiory tak, aby w jednym było 7, a w drugim 5 elementów. Następnie monety w mniejszym zbiorze odwracamy na stronę przeciwną.

Prześledźmy, co jest efektem takiego działania.

Niech w zbiorze 7 monet znajdowało się k -reszek, wówczas w zbiorze 5-elementowym znajdować się musiało $5-k$ reszek (czyli k -orłów). Przewracając na stronę przeciwną monety w mniejszym zbiorze, otrzymamy w nim: $5-k$ orłów i k -reszek.

Cel został osiągnięty!

9. Liczba demoniczna

Apokalipsa według św. Jana w części poświęconej losom Kościoła zawiera fragment dotyczący Fałszywego Proroka – Bestii, której nazwa ukryta jest w następujących słowach:

Tu jest potrzebna mądrość, Kto ma rozum niech liczbę Bestii policzy, liczba to bowiem człowieka. A liczba jego: sześćset sześćdziesiąt sześć.

Zatem liczba 666 symbolizuje diabła, który wciela się w człowieka opisanego w jakiś sposób tą liczbą. Liczbę tę w kulturze masowej zdecydowanie spopularyzował film *Omen* z 1976 roku. Horror ten opowiada o adoptowanym dziecku, które okazuje się potomkiem szatana. Nieświadomi rodzice wychowują chłopca, nie zwracając uwagi na jego niezwykle zdolności. Damien – bo takie było imię chłopca, miał na głowie wyraźną bliznę w kształcie liczby 666. Podczas pracy nad filmem realizatorów prześladowały nieszczęścia: scenarzysta został porażony przez piorun, hotel gdzie mieszkała ekipa został uszkodzony przez bombę podłożoną przez IRA, Gregory Peck – grający główną rolę w ostatniej chwili przesunął swój wylot z planu filmowego i nie odleciał samolotem, który się doszczętnie rozbił w chwili startu. Przez wiele lat *Omen* w światowym rankingu kina, prowadzonym przez największy serwis filmowy IMDB, był notowany na miejscu 666. Remake filmu *Omen*, powstały w roku 2006, miał swoją premierę 6.06. Od lat eksperci od numerologii starają się odszyfrować osobę zakłątą w liczbie 666. Najpopularniejsze teorie wskazują, że Bestią jest Neron, gdyż przypisując literom tworzącym słowa: NERON CAESAR wartości numeryczne dostaniemy sumę 666.

Używając różnych formuł numerologicznych, udało się przypisać wartość 666 następującym osobom i zjawiskom: Adolf Hitler, Marcin Luter, Józef Stalin, Saddam Husajn, Napoleon, papieństwo, internet, faszyzm i wielu innym.

Chciałbym przedstawić w tym miejscu kilka algebraicznych ciekawostek dotyczących tej niezwykłej liczby.

- 1) Otóż w zapisie rzymskim 666 wygląda następująco: DCLXVI. Zawiera wszystkie znaki oznaczające liczby poniżej 1000 ustawione w porządku malejącym: D (500), C (100), L (50), X (10), V (5), I (1).
- 2) 666 jest 36. *liczbą trójkątną*. Liczby trójkątne T_n są postaci: $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Oznacza to, że liczba trójkątna T_n jest sumą kolejnych n liczb naturalnych. Zatem 666 jest sumą kolejnych 36 liczb naturalnych: $666 = 1 + 2 + 3 + \dots + 35 + 36$. Przy okazji, 666 jest sumą liczb z koła klasycznej ruletki.
- 3) 666 jest *repdigitem*, czyli liczbą składającą się z powtarzających się cyfr. Repdigit to skrót od *repeated digit*. 666 to największa liczba trójkątna, która jest repdigitem.
- 4) 666 jest 52. *apokaliptyczną potęgą*. Tak mówimy na każdą liczbę naturalną n , dla której potęga 2^n ma w swym zapisie dziesiętnym trzy powtarzające się cyfry 6. Pierwszą apokaliptyczną potęgą jest 157.
- 5) 666 jest 140. kolejną *liczbą praktyczną*. Liczba praktyczna to taka liczba naturalna, dla której wszystkie liczby naturalne mniejsze od niej dają się zapisać jako suma dzielników tej liczby.

Przykładowo: 16 jest liczbą praktyczną, jej dzielnikami są 1, 2, 4, 8, 16. Mamy również: $3 = 1 + 2$, $5 = 4 + 1$, $6 = 4 + 2$, $7 = 4 + 2 + 1$, $9 = 8 + 1$, $10 = 8 + 2$, $11 = 8 + 2 + 1$, $12 = 8 + 4$, $13 = 8 + 4 + 1$, $14 = 8 + 4 + 2$, $15 = 8 + 4 + 2 + 1$.

- 6) 666 można zapisać w sposób następujący:

$$666 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3$$

$$666 = 3^6 - 2^6 + 1^6$$

$$666 = 6 + 6 + 6 + 6^3 + 6^3 + 6^3$$

- 7) 666 jest również sumą kwadratów pierwszych siedmiu liczb pierwszych:

$$666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2 =$$

$$= 4 + 9 + 25 + 49 + 121 + 169 + 289$$

- 8) Suma cyfr 666 wynosi 18. Suma cyfr rozkładu tej liczby na czynniki pierwsze również wynosi 18. Rzeczywiście: $666 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$; $2 + 3 + 3 + 3 + 7 = 18$. Liczby o takiej własności nazywamy *liczbami Smitha*.

666 jest 34. elementem ciągu liczb Smitha.

Pojęcie liczb Smitha wprowadził do literatury matematycznej w 2004 roku Albert Wilansky, który zauważył, że numer telefonu jego szwagra Harolda Smitha 493 7775, po rozłożeniu na czynniki pierwsze $4937775 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 65837$ posiada własność, że suma cyfr numeru telefonu jest taka sama jak suma cyfr czynników pierwszych tej liczby:

$$4 + 9 + 3 + 7 + 7 + 7 + 5 = 42 = 3 + 5 + 5 + 6 + 5 + 8 + 3 + 7$$

- 9) Dwie kolejne palindromiczne liczby pierwsze: 313 oraz 353 sumują się do 666.

- 10) Niestrudzeni badacze własności tej liczby odkryli, że sumy cyfr liczb: 666^{47} oraz 666^{51} są jednakowe i wynoszą jakżeby inaczej 666.

- 11) Kolejną charakterystyczną własnością tej liczby jest sumowalność sześciątów cyfr jej kwadratu i cyfr sześciannu.

$$\text{Otóż: } 666^2 = 443556, 666^3 = 295408296$$

$$\text{Dalej: } 4^3 + 4^3 + 3^3 + 5^3 + 5^3 + 6^3 + 2 + 9 + 5 + 4 + 0 + 8 + 2 + 9 + 6 = 666$$

- 12) Gdy pomiędzy cyfry 123456789 wstawimy odpowiednio znaki +, to możemy skonstruować liczbę 666 dwoma sposobami:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 567 + 89 = 123 + 456 + 78 + 9 = 666$$

Jeśli odwrócimy kolejność cyfr, otrzymamy 666 tylko w jeden sposób. Mianowicie:

$$9 + 87 + 6 + 543 + 21 = 666$$

- 13) Liczby: 216, 630, 666 stanowią jedną z trójek Pitagorejskich, co oznacza, że:

$$216^2 + 630^2 = 666^2$$

Można tę równość zapisać inaczej, jako:

$$(6 \cdot 6 \cdot 6)^2 + (666 - 6 \cdot 6)^2 = 666^2$$

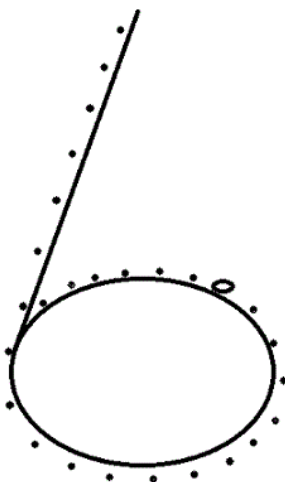
Dla mnie liczba 666 zawsze będzie kojarzyła się z poniższym trickiem.

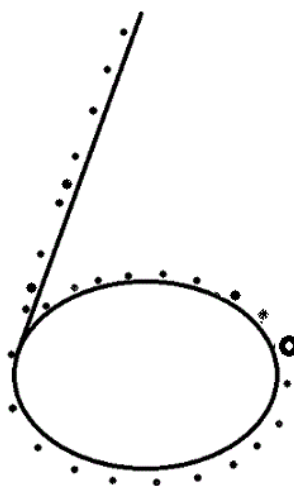
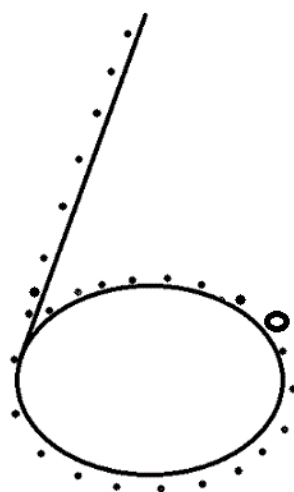
Konstruujemy planszę z zapisaną na niej liczbą 666. Ogonek pierwszej szóstki składa się z 7 punktów, drugiej szóstki z ośmiu, a ostatniej szóstki z dziewięciu punktów. Brzuszek każdej szóstki składa się z 20 elementów. W brzuszku każdej szóstki wyróżniamy jeden element. Jeśli części składowe szóstek są dla przykładu punktami, niech ten element będzie oznaczony kółkiem. W pierwszej szóstce jest to siódmy element na prawo począwszy od połączenia ogonka z brzuszkiem, w drugiej jest to ósmy, a w trzeciej dziewiąty element po prawej stronie liczony od połączenia ogonka z brzuszkiem.

Prosimy dowolną osobę o pomyślenie dowolnych trzech liczb całkowitych tak by pierwsza była większa od 7, druga od 8, a trzecia od 9.

Prosimy o odliczenie tylu elementów każdej z szóstek ile wynosi pomyślana liczba, zaczynając od końca ogonka i poruszając się po brzuszku przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Gdy dojdziemy do ostatniego elementu prosimy o kolejne odliczenie tylu elementów ile wynosiła pomyślana liczba. Poruszamy się tym razem zgodnie z ruchem wskazówek zegara, licząc od elementu, na którym skończyliśmy i nie wychodzimy poza brzuszek.

Za każdym razem liczenie zakończy się na wyróżnionym elemencie.





Ostatnia zabawa związana z 666 przebiega w sposób następujący:

Oznajmiamy, że każdy z nas, być może nieświadomie, ale kryje w sobie element demoniczny i jest związany z diabelską liczbą. Prosimy osoby, które chcą wziąć udział w zabawie o pomyślenie ulubionej liczby trzycyfrowej (może być związana z datą urodzenia danej osoby) N – niebędącej palindromem (tzn. nie typu aba) i wykonanie następujących czynności:

- odwrócenie kolejności cyfr w tej liczbie tak by powstała liczba M ,
- od większej z nich odjęcie mniejszej, czyli $M - N = S$ albo $N - M = S$,
- w otrzymanej sumie S odwrócenie cyfr. W ten sposób powstaje liczba Z ,
- obliczenie sumy $S + Z = A$,
- dodanie do siebie cyfr A . W ten sposób powstaje B ,
- pomnożenie B przez 2 i do wyniku dodanie 1; otrzymujemy C ,
- wykonanie mnożenia BC .

Wynik ostatniego działania zawsze będzie równy 666!

Zanim wytłumaczymy działanie tego tricku prześledźmy jak działa na konkretnych przykładach.

Bierzemy liczbę 578:

- 875
- $875 - 578 = 297 = S$
- $792 = Z$
- $792 + 297 = 1089 = A$
- $1 + 0 + 8 + 9 = 18 = B$
- $2 \cdot 18 + 1 = 37 = C$
- $18 \cdot 37 = 666$

Bierzemy 123:

- 321
- $321 - 123 = 198 = S$
- $891 = Z$
- $891 + 198 = 1089 = A$
- $1 + 0 + 8 + 9 = 18 = B$
- $2 \cdot 18 + 1 = 37 = C$
- $18 \cdot 37 = 666$

Sekretem powodzenia tej sztuczki jest fakt, że liczba A zawsze będzie równa 1089. Suma jej cyfr wynosi 18. Następnie $18 \cdot (2 \cdot 18 + 1) = 18 \cdot 37 = 666$. Udowodnijmy zatem kluczowy fragment sztuczki.

Niech wybraną liczbą będzie abc czyli $100a + 10b + c$. Liczba powstała przez przestawienie cyfr to: cba czyli $100c + 10b + a$. Bez zmniejszenia ogólności zagadnienia założmy, że $a > c$.

Mamy zatem: $100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c =$

$$\begin{aligned} & 99a + a - a - 99c - c + c = 100a - 100c - a + c = \\ & = 100(a - c) - a + c = 100(a - c - 1) + 90 + 10 - (a - c) \end{aligned}$$

bo $a > c$.

Następnie:

$$100[10 - (a - c)] + 90 + a - c - 1 + 100(a - c - 1) + 90 + 10 - (a - c) = 100 \cdot 9 + 180 + 9 = 1089!$$

Liczba 1089 jest również niezwykle ciekawa. Gdy odwrócimy kolejność cyfr otrzymamy liczbę 9801, która daje się zapisać jako $9 \cdot 1089$, czyli jest wielokrotnością oryginalnej liczby. 1089 jest najmniejszą liczbą o tej własności. Kolejną liczbą jest 2178, dla której $8712 = 4 \cdot 2178$. Uwaga! $2178 = 2 \cdot 1089$!

Zauważmy, jeszcze, że:

$$1089 \cdot 1 = 1089$$

$$1089 \cdot 2 = 2178$$

$$1089 \cdot 3 = 3267$$

$$1089 \cdot 4 = 4356$$

$$1089 \cdot 5 = 5445$$

$$1089 \cdot 6 = 6534$$

$$1089 \cdot 7 = 7623$$

$$1089 \cdot 8 = 8712$$

oraz jak pamiętamy:

$$1089 \cdot 9 = 9801$$

Zauważmy, że wyniki pierwszego i ostatniego iloczynu są swoimi lustrzanymi odbiciami. To samo można zaobserwować dla wyniku mnożenia drugiego i przedostatniego, trzeciego i trzeciego od końca itd.

10. System binarny

Kolejny drobiazg z kategorii ciekawych zastosowań matematyki w realiach spotkania towarzyskiego wykorzystuje zapis binarny liczb naturalnych. Rekwizytami są 4 karty z wypisanymi na nich następującymi liczbami.

1)

8	9	10	11
12	13	14	15

2)

4	5	6	7
12	13	14	15

3)

2	3	6	7
10	11	14	15

4)

1	3	5	7
9	11	13	15

Prosimy ochotnika o wybranie jednej spośród tych, które są przedstawione na kartach i wskazanie, na których kartach się znajduje. Po otrzymaniu tej informacji dodajemy do siebie lewe górne wartości tych kart, na których pojawiła się pomyślana przez ochotnika liczba i podajemy wynik.

Gdy pomyślano np. 7; dostajemy informację, że znajduje się ona na kartach: 2, 3, 4. Dodając lewe górne wartości: $4 + 2 + 1$ otrzymujemy wynik: 7.

Zauważmy, że każda liczba naturalna z przedziału $[1, 15]$ daje się zapisać w systemie binarnym jako $a_1a_2a_3a_4$ gdzie wartości $a_i \in \{0,1\}$ i $i = 1, 2, 3, 4$. Otrzymując informację, na których kartach umieszczona jest wybrana liczba, wiemy, gdzie występują jedynki w jej zapisie binarnym.

Dla 7 mamy: $0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 7$ czyli $1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 7$.

11. Koniec świata jest blisko

Obecnie na świecie żyje ponad 7 miliardów ludzi. Problemem zaludnienia naszej planety zajmuje się *Population Reference Bureau (PRB)* z siedzibą w Waszyngtonie. Liczbę mieszkańców Ziemi zaczęto szacować, przyjmując za początkową datę rok 50000 p.n.e., gdyż wtedy na naszej planecie pojawił się Homo Sapiens. Według danych PRB Ziemię dotychczas zamieszkiwało około 107 miliardów ludzi. Zatem na każdą żyjącą obecnie osobę przypada powyżej 15 zmarłych.

Gdyby każdej urodzonej na Ziemi osobie przyporządkować liczbę związaną z kolejnością jej narodzin to obecnie żyjący mieliby numery porządkowe około 107 miliardów. Gdyby ludzkość rozwijała się w takim tempie jak dotychczas, nasze numery porządkowe byłyby raczej małe w porównaniu z numerami tych, którzy jeszcze nadejdą.

Pokażemy jednak, że nasze numery porządkowe są na dosyć wysokich pozycjach, co jak nam się uda dowieść, wskazuje na wcześniejsze nadejście końca świata niż byśmy się spodziewali.

Najpierw chwila dygresji.

Wyobraźmy sobie dwie loterie. *Mała* loteria z dziesięcioma losami i *Duża* loteria, gdzie jest 1000 losów. Losy w każdej loterii wyglądają identycznie, są małymi karteczkami z numerem. Wybieramy w sposób dowolny jedną z loterii i kupujemy jeden los. Powiedzmy, że przypada nam los z numerem 7. Obliczymy prawdopodobieństwo, że los ten pochodzi z *Małej* loterii.

Niech M – oznacza zdarzenie, że mamy do czynienia z loterią *Małą*, natomiast przez D oznaczmy zdarzenie, że mamy do czynienia z loterią *Dużą*.

Mamy:
$$p(M) = p(D) = \frac{1}{2}.$$

Prawdopodobieństwo wylosowania numeru 7 z *Małej* loterii wynosi:

$$p(7/M) = \frac{1}{10}$$

Prawdopodobieństwo wylosowania numeru 7 z *Dużej* loterii wynosi:

$$p(7/D) = \frac{1}{1000}$$

Ostatecznie obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia, że los pochodzi z loterii *Małej*, wiedząc że jest to los z numerem 7.

Dostajemy:

$$\begin{aligned} p(M/7) &= \frac{P(M \cap 7)}{P(7)} = \frac{P(7/M) \cdot P(M)}{P(7/M) \cdot P(M) + P(7/D) \cdot P(D)} = \\ &= \frac{0.1 \cdot 0.5}{0.1 \cdot 0.5 + 0.001 \cdot 0.5} = \frac{0.05}{0.0505} = 0.990099 \end{aligned}$$

Zatem mając w ręku los z numerem 7, jest wielce prawdopodobne, że pochodzi on z loterii *Małej*.

Zajmiemy się obecnie zagadnieniem rychłego nadejścia Końca Świata.

Mamy dwie koncepcje Dnia Zagłady.

Pierwsza – dosyć pesymistyczna, że koniec świata jest bliski. Szacuje się, że około 2075 roku liczba ludności przekroczy 9.5 miliarda. Według niektórych prognoz Ziemia nie przetrwa takiego przeludnienia. Liczba osób żyjących na Ziemi do tego czasu, licząc od daty początkowej (50000 p.n.e.), wzrośnie do 110 miliardów.

Druga koncepcja Końca Świata jest łagodniejsza. Szacuje się, że przed nadejściem Dnia Zagłady liczba osób żyjących kiedykolwiek na Ziemi osiągnie wartość około 10 bilionów (10000 miliardów).

Obecnie, przez analogię z loteriami *Małą* – Koniec Świata jest bliski i *Dużą* – Koniec Świata jest odległy, my, żyjący obecnie mamy przyporządkowane liczby o wartości około 107 miliardów. Zatem z ogromnym prawdopodobieństwem (przeszło 99%) pochodzimy z loterii *Małej*. Zatem Koniec Świata jest bardzo bliski.

12. Czy można przewidzieć we śnie śmierć bliskiej osoby

Według psychologów przeciętny człowiek każdej nocy śni 5 różnych snów, a zapamiętuje średnio co dziesiąty z nich. W Polsce żyje obecnie 38.5 miliona ludzi, z czego 85% to osoby powyżej 15 lat. Zatem osoby niebędące dziećmi śnią w roku: $0.85 \cdot 38500000 \cdot 5 \cdot 365 = 59723125000$ snów. Liczba zapamiętanych snów przez dorosłych Polaków wynosi w roku 5972312500 (prawie 6 miliardów snów). Z drugiej strony socjolodzy twierdzą, że dorosła osoba zna średnio około 150 innych osób (rodzina, znajomi, kontakty z pracy). Oznacza, to, że dorośli Polacy, w liczbie $0.85 \cdot 38500000 = 31025000$ osób, tworzą sieć $31025000 \cdot \frac{150}{2} = 2326875000$ (około 2.3 miliarda) osobistych

znajomości pomiędzy sobą. Oczywiście, w snach przewijają się znajomi, rodzina, osoby z którymi jesteśmy związani. Zauważmy, że sieć powiązań sennych jest gęstsza od sieci znajomości. Wynika to chociażby z faktu, że jeśli osoba A śni o osobie B to wcale nie oznacza to, że B śni o osobie A. Z kolei sieć znajomości jest symetryczna, tzn. zakłada się, że osoby A i B znają się wzajemnie. Zatem sieć połączeń sennych wielokrotnie pokrywa sieć powiązań interpersonalnych. Niektóre połączenia występują więcej niż raz. Obecnie w Polsce współczynnik zgonów wynosi 0.01, co oznacza około 385000 zgonów rocznie. Osoby te w sieci znajomości tworzą podsieć o $385000 \cdot \frac{150}{2} = 28875000$ połączeniach.

Jest zatem niezaprzeczalne stwierdzenie, że wśród prawie 6 miliardów rocznie zapamiętanych snów znajdują się sny o niektórych z 385 tysięcy osób, które w danym roku umrą. Jak widać z porównania liczb powiązań sennych, zdarzenie takie musi zajść wielokrotnie.

Dlatego trudno jest naprawdę dziwić się, że ktoś wyśnił, czy przewidział, śmierć bliskiej osoby. Takie zdarzenia muszą mieć miejsce i nie są niczym nadzwyczajnym, tylko konsekwencją chociażby tzw. *zasady szufladkowej Dirichleta* (sieć snów pokrywa wielokrotnie sieć znajomości, a w szczególności podsieć wytworzoną przez osoby zmarłe).

13. Józef Ignacy Kraszewski

Józef Ignacy Kraszewski (1812-1887) pozostaje najpłodniejszym polskim pisarzem. W jego dorobku znajdujemy 232 powieści, liczne felietony, zbiory wierszy i opowiadania. Za swe dokonania został wpisany do Księgi rekordów Guinnessa jako twórca o największym dorobku literackim. Ostatnio został zdetronizowany przez brazylijskiego pisarza powieści brukowych Ryoki Inoue. Inoue opublikował do 2013 roku ponad 1080 książek.

Jaki mamy powód, aby przypominać Kraszewskiego w książce poświęconej zastosowaniom matematyki. Otóż Kraszewski jest polskim odpowiednikiem Szekspira w wersji słynnego twierdzenia o małpach przy klawiaturze. Rezultat, o którym za chwilę napiszemy zawdzięczamy francuskiemu matematykowi

Emilowi Borelowi (1871-1956). Borel zajmował się teorią miary i prawdopodobieństwem. Będąc w sile wieku poślubił 17-letnią córkę swojego kolegi, również matematyka. Kolejnym z mało znanych faktów jego biografii jest zamiłowanie do hazardu i próby opisania matematycznego modelu gry w pokera podejmowane w latach 1936-1938.

W 1913 roku Borel sformułował twierdzenie o tzw. *nieskończonej małpie*. Gdyby małpa wystarczająco długo siedziała przy klawiaturze maszyny do pisania, uderzając w klawisze to „prawie na pewno” w ciągu znaków, który powstanie w ten

sposób znajdziemy dowolny z góry wybrany tekst. Jako przykład Borel podał zbiór dzieł Szekspira.

My postaramy się wykazać, że gdy siedząca przy klawiaturze komputera małpa wystarczająco długo stukać będzie w klawisze, to w powstałym ciągu znaków pojawi się tekst wszystkich dzieł Józefa Ignacego Kraszewskiego.

Wprowadźmy zatem odpowiednie oznaczenia i przystąpmy do pracy. Na klawiaturze niech dostępnych będzie K znaków. Oczywiście, prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że znak o numerze j , pokryje się ze znakiem stojącym na j -tej pozycji w ciągu znaków dzieł Kraszewskiego wynosi $\frac{1}{K}$. Wszystkie dzieła Kraszewskiego tworzą ciąg znaków Kr . Znaki, które

powstają dzięki małpie podzielimy na kawałki $Kr1, Kr2, Kr3, \dots$. Każdy z nich niech składa się z Kr znaków. Prawdopodobieństwo, że ciąg $Kr1$ pokryje się z ciągiem znaków wszystkich dzieł Kraszewskiego wynosi: $\left(\frac{1}{K}\right)^{Kr}$

Prawdopodobieństwo, że ciąg znaków $Kr1$, nie pokryje się z ciągiem znaków odpowiadającym dziełom Kraszewskiego wynosi: $1 - \left(\frac{1}{K}\right)^{Kr}$.

Weźmy obecnie pod uwagę Z kolejnych ciągów znaków $Kr1, Kr2, Kr3, \dots, KrZ$ powstałych przez naciskanie klawiszy komputera przez małpę. Znaki te powstają w sposób niezależny.

Zatem prawdopodobieństwo, że w łańcuchu Z kolejnych ciągów $Kr1, Kr2, Kr3, \dots, KrZ$ żaden z nich nie będzie odpowiadał dziełom Kraszewskiego wynosi:

$$\left(1 - \left(\frac{1}{K}\right)^{Kr}\right)^Z$$

Prawdopodobieństwo, że choć jeden z ciągów $Kr1, Kr2, Kr3, \dots, KrZ$ pokryje się z dziełami Kraszewskiego wynosi:

$$1 - \left(1 - \left(\frac{1}{K}\right)^{Kr}\right)^Z$$

Zakładając, że małpa siedzi przy klawiaturze, produkując znaki wystarczająco długo to możemy założyć, że ciąg znaków dąży do nieskończoności i wobec tego, mamy:

Prawdopodobieństwo, że choć jeden z ciągów $Kr1, Kr2, Kr3, \dots, KrZ$ pokryje się z dziełami Kraszewskiego wynosi:

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} \left(1 - \left(1 - \left(\frac{1}{K}\right)^{Kr}\right)^Z\right)$$

Z uwagi na fakt, że $K > 1$, powyższa granica wynosi 1.

Aby uwiarygodnić nasze obliczenia przyjmijmy, że średnio książka składa się z 360000 znaków (tak przyjmują wydawnictwa). Zatem zawartość wszystkich dzieł Kraszewskiego to w uproszczeniu ciąg $200 \cdot 360000 = 7,2 \cdot 10^7$ znaków.

Przyjmijmy dalej, że na klawiaturze jest około 40 znaków do wyboru. Wtedy $K^{Kr} = 40^{7,2 \cdot 10^7} \approx 10^{11,52 \cdot 10^7}$. Z elementarnej teorii prawdopodobieństwa pamiętamy, że w przypadku schematu Bernoulliego (n – niezależnych prób, p – prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu) średnia liczba prób, jakie należy przeprowadzić do pojawienia się pierwszego sukcesu wynosi $\frac{1}{p}$. Zatem należy wystukać $K^{Kr} = 40^{7,2 \cdot 10^7}$ łańcuchów ciągów znaków aby pojawił się pierwszy ciąg odpowiadający dziełom Kraszewskiego. Odbędzie się to po wystukaniu $Kr \cdot K^{Kr} = 7,2 \cdot 10^7 \cdot 10^{11,52 \cdot 10^7} = 7,2 \cdot 10^{115200007}$ znaków. Niech małpa wystukuje około 1000 znaków na sekundę. Wówczas spodziewane dzieło Kraszewskiego stworzone przez małpę nastąpi po: $7,2 \cdot 10^{115200004}$ sekundach od chwili rozpoczęcia eksperymentu. Na rok składają $60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 36531536000 \approx 10^{7,5}$ sekundy.

Zatem pierwsze kompletny zbiór dzieł Kraszewskiego powstanie po $7,2 \cdot 10^{115199996,5}$ latach. Jak wiadomo przyjmuje się wiek Ziemi na $4,6 \cdot 10^7$ lat. Zatem otrzymamy dzieła Kraszewskiego w skończonym czasie, tylko zapewne do tego momentu i małp zabraknie, i komputer się zepsuje.

Na zakończenie, nie bądźmy w stosunku do małpy już tak wymagający. Zastanówmy się jak długo czekalibyśmy do chwili pojawienia się słowa MATEMATYKA – wypisanego przez małpę. W tym przypadku $K^{Kr} = 40^{10} \approx 10^{16}$. Następnie $Kr \cdot K^{Kr} = 10 \cdot 10^{16} = 10^{17}$. Zakładając raz jeszcze, że szybkopisząca małpa stawia 1000 znaków na sekundę, słowo MATEMATYKA pojawi się na ekranie komputera po 10^{14} sekundach, czyli po $10^{6,5}$ latach. Będziemy czekać niewiele krócej od wieku Ziemi.

Niech te rozważania z pogranicza absurdu i matematyki rekreacyjnej będą dobrym pretekstem do zwrócenia uwagi Czytelnika na czasami nie całkiem poważny charakter poruszanych w tej książce tematów.

Używając języka Matematyki, mamy przywilej opisanie pewnych zjawisk tak, by wyglądały na dużo groźniejsze i poważniejsze niż są w rzeczywistości. Z drugiej strony o zagadnieniach bardzo złożonych i ważkich można pisać w sposób nieskomplikowany i oby zrozumiały. W tym tkwi niedoceniana potęga Matematyki. Dzięki niej możemy zrozumieć wiele zjawisk otaczającego nas świata. Jednocześnie, jak nie bardzo wiemy co powiedzieć na dany temat, wówczas manipulując wzorami i używając żargonu symboli matematycznych możemy z łatwością zamaskować swoją ignorancję. Zarówno tego pierwszego, jak i drugiego wykorzystania Matematyki życzę życzliwym Czytelnikom i zostawiam pod rozwagę, czy Autor tej książeczki wie, o czym pisze, czy tylko starannie tuszuje swoje niekompetencje w gąszczu aksjomatów, lematów i twierdzeń.

Dalsze rozdziały tej książki poświęcone będą niektórym aspektom codziennego funkcjonowania Wyższej Uczelni – egzaminy, sesja, wizyty w dziekanacie. Przyjrzę się również różnym sposobom wyboru dziekanów i, ośmielony, w dalszym rozdziale opiszę historię pewnych konklawe.

Trochę z osobistych pobudek zajmę się również obecnością Matematyki w sądzie – jak bardzo błędne wnioski można wyciągać z zeznań przy braku znajomości elementarnych praw Matematyki. Aby złagodzić wydźwięk tych rozważań, poruszę temat praw Murphy’ego, które przekonują nas, że jeśli istnieje nawet małe prawdopodobieństwo, iż coś się nie uda, to z pewnością się nie uda. Spróbuję wyjaśnić ich działanie z punktu widzenia teorii prawdopodobieństwa. Zajmę się również problemem konfliktów partnerskich.

Aby nie psuć humoru Czytelnikom opisem potyczek rodzinnych, wrócę do czasów dzieciństwa, kiedy cały otaczający nas świat był życzliwy, lata i zimy były niezapomniane, a przyjaźnie wyjątkowe.

Na zakończenie skoro nic tak nie przekonuje do Matematyki jak udane przykłady i zastosowania, przedstawię jak wykorzystać wiedzę matematyczną w sztuczkach *magicznych*. Opiszę, wraz z wyjaśnieniem ich działania, pewne towarzyskie gry i zabawy, które zawierają w sobie elementy matematyki. Są łatwe w zastosowaniu i szczerze zachęcam do stosowania ich w praktyce.

Jestem pracownikiem Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki Politechniki Łódzkiej, związanym z międzywydziałowym Centrum Kształcenia Międzynarodowego, zatem w pewnych okolicznościach, dla zwiększenia dramaturgii zdarzeń, wprowadzę do swoich opowieści rzeczywiste miejsca, studentów i postaci z życia akademickiego.

Na zakończenie wstępu, aby wprowadzić Czytelnika w nastrój odpowiadający intencjom autora tej książeczki, proszę przyjrzeć się tym zdaniom:

1) Matematyka jest piękna.

2) Oba zdania są fałszywe.

Zdanie drugie jest albo prawdziwe albo fałszywe.

a) Jeśli jest prawdziwe, to obydwa zdania są fałszywe. W szczególności drugie zdanie też jest fałszywe, co powoduje, że zdanie pierwsze musi być prawdziwe. Zatem *Matematyka jest piękna*.

b) Jeśli zdanie drugie jest fałszywe, to natychmiast dostaniemy, że jest to możliwe wówczas, gdy pierwsze zdanie jest prawdziwe.

Zatem:

Matematyka jest piękna.

Życzę udanej lektury.

Dziękuję za pomoc i liczne cenne uwagi Dyrektorowi Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki Politechniki Łódzkiej, doc. dr. Andrzejowi Justowi.

*All that is now
All that is gone
All that's to come
and everything under the sun is in tune
but the sun is eclipsed by the moon.
"There is no dark side of the moon really. Matter of fact it's all dark."*

R. Waters

EGZAMINY, ZALICZENIA, CODZIENNOŚĆ DZIEKANATU

Rozdział ten poświęcam studentom IFE Politechniki Łódzkiej.

1. Nagła śmierć

Sesja na uczelni wyższej oznacza czas egzaminów i zaliczeń. Oznacza to również intensywne spekulacje nad efektywną formą podejścia do nauki, czy strategii zdawania egzaminu. Niestety wszystkie, nawet najbardziej akrobatyczne, taktyki na nic się zdają przy zasadzie „nagłej śmierci” stosowanej czasami przez egzaminatorów. Egzamin tego typu polega na dobraniu studentów w pary. Zadają sobie wzajemnie pytania. Jeżeli każdy z nich poprawnie odpowie albo każdy poda złą odpowiedź, zadają sobie kolejne. Egzamin trwa do chwili, gdy jeden z nich poda poprawną odpowiedź, drugi zaś udzieli złej odpowiedzi. Zwycięzca otrzymuje pozytywną ocenę o wadze zależnej od ilości poprawnych odpowiedzi jakich udzielił. Ten typ egzaminu jest odporny na wszelkie taktyki i jest impregnowany od manipulacji. Tylko student „kamikaze” może wpłynąć na pozytywną ocenę, ale nie swoją tylko przeciwnika.

Z punktu widzenia wykładowcy system ten ma jednak jedną wadę. Nie wiadomo ile rund pytań odbędzie się do chwili zadania decydującego „złotego pytania”.

Śpieszę z pomocą, choć robię to z mieszanymi uczuciami, gdyż ta forma egzaminowania przypomina trochę występy gladiatorów, z bezdusznym nauczycielem zastępującym widownię Kolosseum.

Założmy, że w egzaminie bierze udział dwóch studentów X i Y . Prawdopodobieństwo zadania takiego pytania przez X , na które Y nie poda poprawnej odpowiedzi wynosi $x \in (0,1)$. Prawdopodobieństwo zadania przez Y takiego pytania, na które X nie odpowie poprawnie wynosi $y \in (0,1)$. Zatem prawdopodobieństwo zdania egzaminu przez X w pierwszej rundzie wynosi $P1(A) = x(1 - y)$. Natomiast prawdopodobieństwo zdania egzaminu przez Y

w pierwszej rundzie wynosi $P_1(B) = (1 - x)y$. Prawdopodobieństwo nierozstrzygnięcia egzaminu w pierwszej rundzie wynosi $P(R) = xy + (1 - x)(1 - y)$.

Zdanie egzaminu przez X po n rundach jest dane przez:

$$P_n(X) = (xy + (1 - x)(1 - y))^{n-1} x(1 - y)$$

Zdanie egzaminu przez Y po n rundach wynosi:

$$P_n(Y) = (xy + (1 - x)(1 - y))^{n-1} y(1 - x)$$

Zatem prawdopodobieństwo zdania egzaminu przez X wynosi:

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n(X) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (xy + (1 - x)(1 - y))^{n-1} x(1 - y) \\ &= \frac{x(1 - y)}{1 - xy - (1 - x)(1 - y)} \end{aligned}$$

Zdanie egzaminu przez Y opisane jest prawdopodobieństwem:

$$\begin{aligned} P(Y) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n(Y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (xy + (1 - x)(1 - y))^{n-1} y(1 - x) \\ &= \frac{y(1 - x)}{1 - xy - (1 - x)(1 - y)} \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo zakończenia egzaminu po n-tej rundzie wynosi:

$$\begin{aligned} P_n(R) &= P_n(X) + P_n(Y) = \\ &= (xy + (1 - x)(1 - y))^{n-1} y(1 - x) \\ &+ (xy + (1 - x)(1 - y))^{n-1} x(1 - y) \\ &= (xy + (1 - x)(1 - y))^{n-1} (1 - xy - (1 - x)(1 - y)) \end{aligned}$$

Najważniejsze, z punktu widzenia nauczyciela, jest przewidzenie średniej ilości rund do zakończenia egzaminu.

Licząc wartość średnią, otrzymamy:

$$\begin{aligned} SR = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(R) &= (1 - xy - (1-x)(1-y)) \sum_{n=1}^{\infty} n (xy + (1-x)(1-y))^{n-1} = \\ &= (1 - xy - (1-x)(1-y)) \frac{1}{(1 - xy - (1-x)(1-y))^2} = \\ &= \frac{1}{1 - xy - (1-x)(1-y)} \end{aligned}$$

Przykładowo, gdy $x = 1/2$, $y = 1/3$, to prawdopodobieństwo zdania egzaminu przez X wynosi $2/3$, przez Y $1/3$. Średnia ilość rund $SR = 2$.

Gdy $x = 3/5$, $y = 4/5$, mamy $P(X) = 3/11$, $P(Y) = 8/11$. Średnia liczba rund $SR = 25/11$.

Zauważmy jeszcze, że gdy wartości x , y są bliskie 1 (przypadek bardzo zdolnych studentów), ewentualnie gdy wartości x , y są bliskie zera (przypadek bardzo słabych), to wówczas średnia liczba rund potrzebnych na rozstrzygnięcie egzaminu rośnie. Już przy $x = y = 0.99$ ($x = y = 0.01$) mamy $SR \approx 50$. Tutaj dopatrywałbym się szansy na zmęczenie wykładowcy.

W przypadku egzaminu *sudden death* jedyną szansą jest chyba być ostatnim nieparzystym, który nie ma partnera do pojedynku na pytania. Ale jak sobie wypracować takie szczęście?

A co jeśli wówczas czeka go klasyczny sparring z wykładowcą?

2. Dylemat wykładowcy

Egzamin testowy, w którym zamiast rozwiązywać poszczególne zadania, wskazujemy poprawną odpowiedź, zawsze niesie ze sobą niebezpieczeństwo, że ktoś kto nie zna zupełnie przedmiotu, po prostu zgadując, otrzyma wystarczającą do zaliczenia liczbę punktów. Czy w takich przypadkach wykładowca jest bezradny? Czy można jakoś oszacować prawdopodobieństwo, że student, który zdał egzamin, rzeczywiście posiada wystarczającą wiedzę i umiejętności z tego przedmiotu?

Oznaczmy przez $p \in (0,1)$ prawdopodobieństwo, że student biorący udział w egzaminie jest kompletnym ignorantem z tego przedmiotu i zda się na los – będzie zgadywał poprawne odpowiedzi. Egzamin składa się z n pytań testowych. Jeśli student nie będzie zgadywać, to prawdopodobieństwo udzielenia przez niego poprawnej odpowiedzi na poszczególne pytania wynosi $u \in (0,1)$. Jeśli będzie zgadywać, to również istnieje dodatnie prawdopodobieństwo $b \in (0,1)$, zwane łutem szczęścia, że udzieli on poprawnej odpowiedzi na poszczególne pytania. Mamy nadzieję, że $u > b$, gdyż w przeciwnym przypadku zachwiałoby to systemem edukacji.

Wiadomo, że student na egzaminie udzielił poprawnej odpowiedzi na k pytań. Jakie jest prawdopodobieństwo, że nie bluffował i nie zgadywał odpowiedzi?

Oznaczmy przez:

Z – zdarzenie, że student zgaduje odpowiedzi,

NZ – student pracuje nad każdym pytaniem i zgodnie ze swoją wiedzą określa właściwe odpowiedzi,

K – student odpowiedział poprawnie na k pytań.

Wówczas:

$$P(K) =$$

$$P(K/NZ)P(NZ) + P(K/Z)P(Z) = \binom{n}{k}u^k(1-u)^{n-k}(1-p) + \binom{n}{k}b^k(1-b)^{n-k}p$$

oraz żądane prawdopodobieństwo liczymy jako:

$$\begin{aligned} P(NZ/K) &= \frac{P(K/NZ)P(NZ)}{P(K)} = \\ &= \frac{\binom{n}{k}u^k(1-u)^{n-k}(1-p)}{\binom{n}{k}u^k(1-u)^{n-k}(1-p) + \binom{n}{k}b^k(1-b)^{n-k}p} = \\ &= \frac{u^k(1-u)^{n-k}(1-p)}{u^k(1-u)^{n-k}(1-p) + b^k(1-b)^{n-k}p} \end{aligned}$$

Przykładowo, gdy: $p = 0.3$, $n = 20$, $k = 10$, $u = 0.7$, $b = 0.25$ to $P(NZ/10) = 0.87$.

Zmieniając wartość b na 0.5 , mamy: $P(NZ/10) = 0.3$.

Jak widać z punktu widzenia wykładowcy, aby się zabezpieczyć przed pokusą zgadywania, należy zwiększyć liczbę możliwych odpowiedzi na pytanie.

Zauważmy jeszcze, że wykładowca może polepszyć swoje samopoczucie, zwiększając liczbę pytań, bo:

$$P(NZ/N) = \frac{(1-p)u^n}{(1-p)u^n + pb^n} = \frac{1-p}{1-p + \frac{p}{1-p}\left(\frac{b}{u}\right)^n}$$

W związku z tym, że $u > b$ dla dużych wartości n , mamy $P(NZ/N) \approx 1$.

Oczywiście oznacza to, że jeśli przy dużej liczbie pytań ktoś odpowiedział na wszystkie pytania poprawnie, to z pewnością zna przedmiot i nie zgadywał odpowiedzi.

Obliczmy jeszcze prawdopodobieństwo następującego zdarzenia:

Student poprawnie odpowiedział na k pytań. Jakie są szanse, że za każdym razem po prostu decydował się na losowe wybieranie poprawnej odpowiedzi.

Chcemy zatem wyliczyć:

$$P(Z/K) = \frac{P(Z \cap K)}{P(K)} = \frac{P(K/Z)P(Z)}{P(K)} = \frac{b^k(1-b)^{n-k}p}{u^k(1-u)^{n-k}(1-p) + b^k(1-b)^{n-k}p}$$

Wykładowca będzie spokojny jeśli $P(NZ/K) > P(Z/K)$. Warunek ten sprowadza się do nierówności:

$$\left(\frac{u(1-b)}{b(1-u)}\right)^k > \frac{p}{1-p} \left(\frac{1-b}{1-u}\right)^n$$

Dla $p = 0.3$, $n = 20$, $k = 10$, $u = 0.7$, $b = 0.25$ warunek ten jest spełniony.

Na egzaminach testowych z matematyki przeprowadzanych w Centrum Kształcenia Międzynarodowego Politechniki Łódzkiej można zatem spodziewać się egzaminów składających się z 20 pytań. Do każdego pytania pasuje jedna z czterech odpowiedzi. Doświadczenie lat poprzednich pozwoliło na oszacowanie, że niestety aż do 30% studentów przychodzi na egzamin tylko z zamiarem zobaczenia pytań. Zadania natomiast są tak sformułowane, by na 70% z nich odpowiedzi były klarowne dla każdego chodzącego na wykłady.

3. Strategia zdawania egzaminu

Wyobraźmy sobie, że jako studenci, jesteśmy na egzaminie pisemnym i właśnie dostaliśmy do ręki zestaw zadań egzaminacyjnych. Mamy przed sobą kartkę z n zadaniami. Jak mamy postępować, aby wykorzystując optymalnie przeznaczony dla nas czas, rozwiązać największą liczbę zadań. Rozwiązywanie każdego zadanie jest podzielone na dwa etapy.

Etap pierwszy to „skanowanie” problemu. Wczytujemy się w treść i zastanawiamy nad sposobami jego rozwiązania. Oceniamy ile czasu będzie nam potrzebne do pracy nad zadaniem.

Etap drugi to praca właściwa. Wówczas dokonujemy obliczeń, formułujemy wnioski, zapisujemy odpowiedzi.

Czas skanowania oznaczmy przez S , czas pracy właściwej przez W .

Żałómy, że zarówno S , jak i W są nieujemnymi zmiennymi losowymi o średnich wartościach $E(S) = s$, $E(W) = w$.

Strategia zdawania egzaminu może być opisana w sposób następujący. Podczas skanowania zadania oceniamy ile wynosić będzie czas pracy W właściwej nad tym zadaniem. Gdy czas ten przekracza z góry ustaloną wartość τ – nazywanej *czasem strategii*, to przerywamy rozwiązywanie i przystępujemy do zmagania z kolejnym zadaniem. Naszym celem będzie znalezienie optymalnej wartości τ , która pozwoli na rozwiązanie maksymalnej liczby zadań.

Zauważmy, że przy małej wartości τ , wiele problemów będzie zeskanowanych, a liczba całkowicie rozwiązanych będzie niewielka. Przy dużej wartości τ , nie wyrobimy się w czasie, by dotrzeć do niektórych zadań, zatem liczba ukończonych zadań również będzie daleka od optymalnej.

Spróbujmy dokonać analizy modelu pracy studenta podczas egzaminu. Niech zmienna losowa W posiada gęstość $g(x)$ określoną dla $x \in (0, \infty)$. Niech τ będzie czasem strategii.

Wówczas prawdopodobieństwo rozwiązania zadania po skanowaniu wynosi:

$$p_\tau = \int_0^\tau g(x)dx$$

Wartość średnia pracy właściwej nad zadaniem wynosi (pamiętajmy o tym, że narzucamy warunek o nieprzekroczeniu wartości czasu strategii):

$$w_\tau = E(W|W \leq \tau) = \frac{\int_0^\tau xg(x)dx}{\int_0^\tau g(x)dx}$$

W przypadku gdy mamy do czynienia z n zadaniami, oczekiwana wartość rozwiązanych zadań wynosi np_τ . Średni czas poświęcony na skanowanie i pracę właściwą przy n zadaniach wynosi:

$$ns + np_\tau w_\tau$$

Zatem czas poświęcony na jedno zadanie daje się wyrazić wzorem:

$$f(\tau) = \frac{ns + np_\tau w_\tau}{np_\tau} = \frac{s + \int_0^\tau xg(x)dx}{\int_0^\tau g(x)dx}$$

Niech $G(x) = \int_0^x g(t)dt$, wówczas G jest dodatnia i rosnąca oraz $G'(x) = g(x)$

Niech $H(\tau) = \int_0^\tau G(x)dx$, wówczas H jest dodatnią, rosnącą funkcją.

Całkując $\int_0^\tau xg(x)dx$, otrzymamy:

$$\int_0^\tau xg(x)dx = \tau G(\tau) - H(\tau)$$

Zatem:

$$f(\tau) = \frac{ns + np_\tau w_\tau}{np_\tau} = \frac{s + \int_0^\tau xg(x)dx}{\int_0^\tau g(x)dx} = \frac{s + \tau G(\tau) - H(\tau)}{G(\tau)} = \tau + \frac{s - H(\tau)}{G(\tau)}$$

Poszukujemy takiej wartości τ , dla której funkcja f osiąga minimum.

$$\begin{aligned} f'(\tau) &= \frac{\tau g(\tau)G(\tau) - g(\tau)(s + \int_0^\tau xg(x)dx)}{(G(\tau))^2} = \frac{\tau g(\tau) - g(\tau)f(\tau)}{G(\tau)} \\ &= \frac{g(\tau)(\tau - f(\tau))}{G(\tau)} = \\ &= \frac{g(\tau)\left(\tau - \left(\tau + \frac{s-H(\tau)}{G(\tau)}\right)\right)}{G(\tau)} = \frac{g(\tau) \cdot \left(\frac{s-H(\tau)}{G(\tau)}\right)}{G(\tau)} = \frac{g(\tau)(s - H(\tau))}{(G(\tau))^2} \end{aligned}$$

Wiemy, że funkcja H jest ciągła, rosnąca oraz $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t) = 0$. Dla dowolnej wartości $c \in (0, \infty)$ istnieje dokładnie jeden argument t_0 , taki że $H(t_0) = c$.

Zatem można znaleźć dokładnie jedną wartość τ_0 , taką że $H(\tau_0) = s$, dla której $f'(\tau_0) = 0$. Z uwagi na monotoniczność funkcji $H(t)$ wnioskujemy, że w punkcie τ_0 , f' zmienia znak z ujemnego na dodatni.

Zauważmy jeszcze, że dla $H(\tau_0) = s$ mamy $f(\tau_0) = \tau_0$, czyli τ_0 jest punktem stałym funkcji f .

Pokazaliśmy, wobec powyższego, że istnieje jedyna taka wartość τ_0 , dla której funkcja $f(\tau)$ osiąga globalne minimum. Wtedy czas poświęcony na rozwiązanie pojedynczego zadania będzie najkrótszy.

Zajmiemy się obecnie konkretnymi przykładami:

Model I (proponowany przez B. Chana (1984))

Załóżmy, że zmienne losowe S , W mają rozkład wykładniczy. Wtedy gęstości rozkładu prawdopodobieństw tych zmiennych zapiszemy odpowiednio, jako $s(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ $g(x) = \beta e^{-\beta x}$. Mamy wówczas $s = \frac{1}{\alpha}$, $w = \frac{1}{\beta}$ oraz

$$w_\tau = E(W|W \leq \tau) = \frac{\int_0^\tau xg(x)dx}{\int_0^\tau g(x)dx} = \frac{\int_0^\tau x\beta e^{-\beta x}dx}{\int_0^\tau \beta e^{-\beta x}dx} = \frac{1}{\beta} \cdot \left(1 - \frac{\beta\tau e^{-\beta\tau}}{1 - e^{-\beta\tau}}\right)$$

Funkcja f ma postać:

$$f(\tau) = \frac{ns + np_\tau w_\tau}{np_\tau} = \frac{s + \int_0^\tau xg(x)dx}{\int_0^\tau g(x)dx} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\tau}} \right) + \frac{1}{\beta} \cdot \left(1 - \frac{\beta\tau e^{-\beta\tau}}{1 - e^{-\beta\tau}} \right)$$

Jak wiemy, poszukiwana wartość τ_0 jest punktem stałym funkcji f . Zatem przekształcając równanie:

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\tau}} \right) + \frac{1}{\beta} \cdot \left(1 - \frac{\beta\tau e^{-\beta\tau}}{1 - e^{-\beta\tau}} \right),$$

dostaniemy warunek:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \tau - \frac{e^{-\beta\tau}}{\beta}$$

Dla danych wartości α, β równanie może być rozwiązane numerycznie. Wówczas:

$$p_{\tau_0} = \int_0^{\tau_0} g(x)dx = 1 - e^{-\beta\tau_0}$$

oraz

$$w_{\tau_0} = \frac{\int_0^{\tau_0} xg(x)dx}{\int_0^{\tau_0} g(x)dx} = \frac{1}{\beta} \cdot \left(1 - \frac{\beta\tau_0 e^{-\beta\tau_0}}{1 - e^{-\beta\tau_0}}\right)$$

Czas przewidywany na rozwiązanie n zadań wynosi:

$$n \cdot \frac{1}{\alpha} + np_{\tau_0} w_{\tau_0}$$

Zaś oczekiwana liczba rozwiązanych zadań to: np_{τ_0} .

Czas rozwiązania jednego zadania wyniesie:

$$f(\tau_0) = \frac{s}{p_{\tau_0}} + w_{\tau_0} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta\tau_0}} \right) + \frac{1}{\beta} \cdot \left(1 - \frac{\beta\tau_0 e^{-\beta\tau_0}}{1 - e^{-\beta\tau_0}}\right)$$

Model II (Proponowany przez O'Briana (1984))

Zakładamy obecnie, że zmienne losowe S oraz W mają rozkłady odpowiednio równe:

$$s(x) = \alpha^2 x e^{-\alpha x} \quad g(x) = \beta^2 x e^{-\beta x}.$$

Mamy wówczas: $s = \frac{2}{\alpha}$, $w = \frac{2}{\beta}$ oraz

$$\begin{aligned} w_{\tau} = E(W|W \leq \tau) &= \frac{\int_0^{\tau} xg(x)dx}{\int_0^{\tau} g(x)dx} = \frac{\int_0^{\tau} x^2 \beta^2 e^{-\beta x} dx}{\int_0^{\tau} x \beta^2 e^{-\beta x} dx} \\ &= \frac{2}{\beta} \cdot \left(1 - \frac{\beta^2 \tau^2 e^{-\beta\tau}}{2(1 - \tau\beta e^{-\tau\beta} - e^{-\beta\tau})}\right) \end{aligned}$$

Funkcja f ma postać:

$$f(\tau) = \frac{ns + np_{\tau} w_{\tau}}{np_{\tau}} = \frac{s + \int_0^{\tau} xg(x)dx}{\int_0^{\tau} g(x)dx} = \frac{2}{\beta} + \frac{2 - \tau^2 \alpha \beta e^{-\beta\tau}}{\alpha(1 - \tau\beta e^{-\tau\beta} - e^{-\beta\tau})}$$

Szukając punktu stałego funkcji f , przekształcając równanie, otrzymujemy:

$$\tau = \frac{2}{\beta} + \frac{2 - \tau^2 \alpha \beta e^{-\beta\tau}}{\alpha(1 - \tau\beta e^{-\tau\beta} - e^{-\beta\tau})}$$

Dostajemy warunek: $\tau + \tau e^{-\beta\tau} + \frac{2e^{-\beta\tau}}{\beta} = \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\alpha}$

Dla danych wartości α, β równanie rozwiązujemy numerycznie.

Na zakończenie podamy przykłady ilustrujące nasze rozważania. Egzamin końcowy z matematyki w Centrum Kształcenia Międzynarodowego składa się z 20 krótkich zadań. Trwa 60 minut. Egzamin będzie zdany, po poprawnym odpowiedzeniu na 10 pytań. Wiemy, że średni czas pracy nad zadaniem wynosi 6. Opracujemy optymalną strategię w tym przypadku. Analizę modelu I przedstawiamy w tabeli.

$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\beta}$	τ_0	Liczba odpowiedzi	Liczba zadań skanowanych
1	5	3.534	16.96	33.52
1.77	4.23	4.561	13.16	20
2	4	4.793	12.5	17.94
3	3	5.524	10.86	12.90
4	2	5.895	10.16	10.74

Jak widzimy, w przypadku modelu I optymalnym wyborem (przy teście godzinny, składającym się z 20 zadań) jest wybranie czasu strategii 4.561. Zatem, podczas skanowania trwającego 1.77 min, szacujemy czas pracy właściwej nad zadaniem. Jeśli okaże się, że czas pracy właściwej przekroczy 4.561 min, przechodzimy do następnego zadania.

Dla modelu II sytuacja wygląda następująco:

$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\beta}$	τ_0	Liczba odpowiedzi	Liczba zadań skanowanych
1	5	4.367	13.73	26.37
1.4	4.6	4.855	12.36	20
2	4	5.358	11.2	14.96
3	3	5.818	10.3	11.48
4	2	5.980	10.0	10.21

Jak widzimy, w przypadku modelu II optymalnym wyborem (przy teście godzinny, składającym się z 20 zadań) jest wybranie czasu strategii 4.855. Zatem, najpierw przez 1.4 min skanujemy problem. Jeśli zdecydujemy, że czas pracy właściwej nad zadaniem przekroczy 4.855 min, przechodzimy do następnego zadania.

4. Egzamin ostatniej szansy

Egzaminy z teorii prawdopodobieństwa zawsze były polem do popisu dla kreatywnych wykładowców. Jeden z moich kolegów, gdy był już zmęczony słuchaniem niepewnych i bzdurnych odpowiedzi na proste pytanie, proponował zadanie ostatniej szansy. Zapisywał na dwóch kartkach dwie różne liczby z przedziału (0,1). Prosił studenta o wskazanie jednej kartki i odczytywał liczbę zapisaną na niej. Zadaniem studenta było wskazanie czy ta liczba jest mniejsza

czy większa od drugiej. Gdy studentowi udawało się odpowiedzieć poprawnie, wychodził z egzaminu z oceną dostateczną.

Zastanowimy się, czy student ma większe szanse niż 50/50, aby zgadnąć poprawnie, z jaką liczbą ma do czynienia.

Wydaje się, że jest to typowa zgadywanka z 50% szansą na zwycięstwo. Spróbuję Czytelnika przekonać, że można zwiększyć szanse na poprawną odpowiedź.

Otóż zanim przystąpimy do wskazania któregoś z numerów, wybieramy sobie pewną liczbę z przedziału (0,1), którą będziemy nazywać *progiem*. Ze względu na liczbę możliwości zakładamy, że próg nie pokrywa się z żadną z zapisanych liczb.

Umówmy się, dla ułatwienia, że liczby na kartkach oznaczamy przez A, B.

Następnie prosimy o wskazanie liczby z kartki A. Znając liczbę A, zakładamy, że liczba progowa znajduje się pomiędzy liczbami A oraz B.

Jeśli A jest mniejsza od progu obstawiamy, że A jest mniejsza od B. Jeśli A jest większa od progu to obstawiamy, że A jest również większa od B.

Przy takiej strategii mamy szanse większe niż 50% na udzielenie poprawnej odpowiedzi!

Prawda, że taktyka jest mało przekonująca? Spróbujmy jednak uwiarygodnić sposób jej działania.

W momencie, gdy poznajemy liczbę A, może zajść jeden z trzech przypadków:

- 1) próg jest większy od A oraz B,
- 2) próg jest mniejszy od A i B,
- 3) próg jest pomiędzy A i B.

Uda nam się wygrać w przypadku 1), gdy A jest mniejszą liczbą, a w przypadku 2), gdy A jest większą z nich. Nasze założenie, że próg jest pomiędzy liczbami A i B jest nieprawdziwe. Zatem, w obydwu zdarzeniach szanse na zwycięstwo wynoszą rzeczywiście 50%.

Natomiast w przypadku 3) zawsze podajemy prawidłową odpowiedź.

Oznacza to, że ostatecznie szanse na zwycięstwo mamy większe niż 50%. Faktycznie, niech P oznacza zdarzenie polegające na podaniu poprawnej odpowiedzi, a Z – zdarzenie oznaczające, że próg leży pomiędzy A i B. Niech $P(Z) = p$.

Wówczas:

$$P(P) = P(P/Z) \cdot P(Z) + P(P/\bar{Z}) \cdot P(\bar{Z}) = 1 \cdot p + \frac{1}{2} \cdot (1 - p) = \frac{1 + p}{2} > \frac{1}{2}$$

W praktyce najlepiej pozwolić, aby próg wybierany był w sposób losowy, chociażby przez generator liczb losowych.

Na zakończenie opowieści przypuśćmy, że wybrano dwie liczby: 0.345 oraz 0.455. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że próg będzie pochodził z tego przedziału wynosi:

$$0.455 - 0.345 = 0.11$$

Oznacza to, że w tym przypadku szanse na podanie poprawnej odpowiedzi wynoszą: $\frac{1+0.11}{2} = 0.555$.

5. Egzamin z matematyki

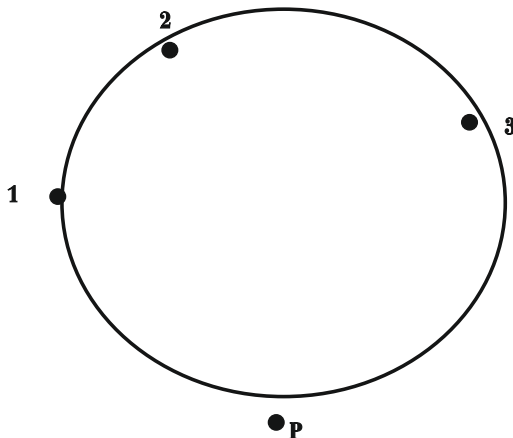
W latach 80. XX wieku na Politechnice Łódzkiej pewien profesor uwielbiał organizować ustne egzaminy z udziałem jednocześnie wszystkich studentów z wybranej grupy. Oznaczało to, że studenci zamiast pojedynczo wchodzić do gabinetu, byli proszeni całą grupą. W przestronnym pokoju wszyscy siadali wkoło fotela profesora. Gdy wszyscy zajęli miejsca, profesor nabijał fajkę i zwracał się z pytaniem do osoby siedzącej po jego lewej albo prawej stronie. Oczywiście to jedno pytanie wystarczyło, by ocenić wartość osoby odpowiadającej. Po wpisaniu oceny do indeksu, lub częściej po wyrzuceniu studenta za drzwi z komentarzem, że niepotrzebnie marnuje cenny czas, który może poświęcić na palenie fajki, profesor znów losowo zwracał się do osoby po swojej lewej albo prawej stronie. Spoglądając na kłębek dymu i kreśląc ręką fantazyjne wzory w gęstej już atmosferze pokoju, pytał: *A powiedz, czy domknięta liniowa podprzestrzeń przestrzeni Banacha sama jest przestrzenią Banacha czy może ktoś zupełnie innego?*

Latami zastanawialiśmy się jak usiąść w kręgu, aby być ostatnim, którego zapyta. Czuliśmy się jak owce stłoczone wokół wygłodniałego wilka. Same uwiązane, bez szansy na ucieczkę, mogąc liczyć tylko na swoją inteligencję (mocno przesadzony pomysł) lub znudzenie wilka. Jednym słowem, warto było być ostatnim, którego zapyta, bo może się znudzi albo fajka się skończy, a wtedy traci humor i zadaje standardowe pytania.

Po latach próbuję rozwiązać ten problem dla ewentualnego wykorzystania przez przyszłe pokolenia.

W przypadku, gdy do pokoju wchodzi dwie osoby, prawdopodobieństwo, że każda z nich będzie drugą, którą zapyta, wynosi oczywiście $\frac{1}{2}$.

Wyobraźmy sobie zatem, że w egzaminie uczestniczą trzy osoby: 1, 2, 3. Zajmują miejsca, jak pokazano na rysunku.



Oznaczmy przez $p_i, i = 1, 2, 3$ prawdopodobieństwa zdarzeń, że osoba kolejno oznaczona przez 1, 2, 3 będzie jako ostatnia zapytana przez profesora.

Mamy: $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Jeśli profesor najpierw spyta osobę 1, model egzaminu będzie podobny do przypadku, w którym najpierw pyta osobę 3.

Z uwagi na to, że profesor z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ kieruje się w lewo lub w prawo mamy:

$$p_2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_3$$

Biorąc pod uwagę symetrię wnioskujemy również, że:

$$p_3 = p_1$$

Rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_3 \\ p_3 = p_1 \end{cases}$$

otrzymujemy: $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$.

Niewiarygodne!

Zobaczmy, co się dzieje przy większej liczbie studentów.

Mamy wówczas:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

Z uwagi na symetrię zagadnienia mamy:

$$p_k = p_{n+1-k}$$

oraz

$$p_k = \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1}$$

Rozwiązując rekurencję drugiego stopnia z równaniem charakterystycznym:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

dostaniemy: $p_k = A + Bk$; mając na uwadze, że $p_k = p_{n+1-k}$, wnioskujemy, że $B = 0$. Natomiast warunek: $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$ pozwala stwierdzić, że $p_k = \frac{1}{n}$.

Zatem stwierdzamy, że w gabinecie wszyscy mamy takie same, marne szanse.

6. Zasada Pareto

Do trudnego egzaminu przystępują dwie osoby: Adam i Ewa.

Adam przygotowuje się, korzystając z notatek zawierających całość wykładów. Uważa, że potrzebuje tygodnia, aby opanować cały materiał. Ewa natomiast zrobiła sobie notatki tylko z kilku wykładów i postanowiła uczyć się tylko jeden dzień przed egzaminem. Adam otrzymał słabą trójkę, a Ewa wypadła tak rewelacyjnie, że wykładowca zaproponował jej nawet dodatkowe pytanie, by ewentualnie podnieść ocenę z czwórki na piątkę. Ewa nie skorzystała z tej szansy.

Różnica między przygotowaniem studentów polegała na tym, że Adam nie wiedział czego powinien się nauczyć i próbował opanować, z marnym skutkiem, całość materiału. Natomiast Ewa świadomie wybrała tylko kluczowe części wykładu, które według niej powinny pojawić się na egzaminie. Adam poświęcił na przygotowania cały tydzień, otrzymując słabą ocenę końcową, a Ewa uczyła się tylko jeden dzień, z dużo lepszymi efektami.

Ewa postępowała zgodnie z tzw. zasadą Pareto, która w przypadku przygotowań do egzaminu głosi, że 20% materiału zajmuje 80% pytań na egzaminie.

Vilfredo Federico Damaso Pareto (1848-1923) był włoskim ekonomistą socjologiem. Uznany jako twórca teorii dobrobytu, był człowiekiem konfliktowym, złośliwym i wybuchowym. Uważano, że było to skutkiem wstrząsu, jakiego doznał, gdy opuściła go żona razem z ich młodym służącym. Od tego czasu cierpiał na bezsenność, a uczuciem obdarzał koty, które przygarniał i otaczał się nimi w ilościach hurtowych.

Pareto w jednej ze swych prac wykazał, że ułamek społeczeństwa, o dochodzie nie mniejszym od pewnej wartości x , daje się zapisać zależnością:

$$\int_x^{\infty} \frac{C}{x^{\alpha}} dx$$

dla pewnych stałych C oraz $\alpha > 1$.

Prowadząc prace nad strukturą i dystrybucją dóbr materialnych, odkrył, że 80% majątku Włoch jest w posiadaniu 20% ludności.

Uogólniając, ogromny procent majątku całego kraju jest zwykle w posiadaniu niewielkiego ułamka społeczeństwa.

Zasada ta doczekała się wielu uogólnień w opisie zjawisk społecznych, ekonomicznych, gospodarczych itp.

W tym miejscu spróbujemy stworzyć matematyczny model i opisać narzędzia potrzebne do wyprowadzenia tego pasjonującego wyniku.

Zauważmy najpierw, że:

$$\int_a^{\infty} \frac{C}{x^{\alpha}} dx = \left. \frac{Cx^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_a^{\infty} = \frac{Ca^{-\alpha+1}}{\alpha-1} = 1, \text{ gdy } C = \frac{\alpha-1}{a^{-\alpha+1}}$$

Zatem:

$$f(x) = \frac{\alpha-1}{a^{-\alpha+1}} \cdot \frac{1}{x^\alpha} \text{ gdy } x \geq a \text{ oraz } f(x) = 0, \text{ gdy } x < a$$

dla ustalonego $a > 0$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa. Oznaczmy $D = \frac{\alpha-1}{a^{-\alpha+1}}$.

Wartość przeciętna tego rozkładu wynosi: $E(x) = D \frac{a^{2-\alpha}}{\alpha-2}$ o ile $\alpha > 2$.

Okazuje się, że wiele zjawisk podlega takiemu rozkładowi. Rozkład o funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ nazywamy *rozkładem Pareto*. Oto kilka przykładów:

1. Częstotliwość występowania słów w danym języku

W dowolnym tekście częstotliwość występowania danego słowa jest odwrotnie proporcjonalna do jego pozycji na liście słów najczęściej używanych w danym języku.

Jest to prawo sformułowane przez Zipfa, który przeprowadził analizę lingwistyczną *Moby Dicka* Hermana Melvilla. **George Zipf (1902-1950) był amerykańskim lingwistą i filologiem. Zajmował się analizą statystyczną języka.**

Najczęściej używanymi słowami w tekstach angielskich są, w kolejności: *the, of, and, a* oraz *to*.

W tym przypadku oczywiście $a = 1$ i otrzymano: $\alpha = 2.2$.

Słowa *of, a, to* zajmują odpowiednio, pozycje drugą, czwartą i piątą na liście rankingowej najczęściej spotykanych słów, natomiast w tekście *of* występuje cztery razy częściej niż *a* i 6.5 raza częściej niż *to*.

2. Indeks cytowań artykułów naukowych

Indeks cytowań podlega rozkładowi Pareto przy $a = 100$, $\alpha = 3$. Oznacza to, że aż 9 razy częściej cytowana jest praca z pierwszej pozycji listy w porównaniu z drugą. Z kolei pozycja 10 jest 1.33 razy częściej cytowana od pozycji 11. Pozycja 100 z kolei jest cytowana 1.03 raza częściej niż pozycja 101.

3. Sprzedaż książek

Na rynku księgarskim w USA w latach 1900-1965, 633 książki osiągały status bestsellerów, sprzedając się w ilości powyżej 2 milionów egzemplarzy. Najczęściej kupowaną pozycją był poradnik wychowawczy *dr. Spocka*. Parametry tego rozkładu to $a = 2000000$, $\alpha = 3.51$.

4. Korzystanie z numerów telefonicznych

Analizowano rozmowy telefoniczne 51 miliona abonentów sieci AT&T wykonane w ciągu jednego powszedniego dnia. Najbardziej oblegany numer

był wybierany 375746 razy. Ograniczono się do numerów, które były wybierane co najmniej 10 razy. Otrzymano $a = 10$, $\alpha = 2.2$.

5. Częstotliwość pojawiania się trzęsień ziemi pomiędzy 1910 a 1992 rokiem, zarejestrowanych przez Berkeley Earthquake Catalog
Ograniczono się tylko do wstrząsów sejsmicznych powyżej 3.8 w skali Richtera, czyli takich, które są nieodczuwalne jeszcze przez ludzi, a już rejestrowane przez sejsmograf, uzyskano $a = 3.8$, $\alpha = 3.04$.

6. Nasilenie wojen

Zbadano 119 konfliktów zbrojnych miejsce w latach 1816-1980. Zdefiniowano nasilenie wojny jako $\frac{a}{b} \cdot 10000$, gdzie a – liczba ofiar poniesionych przez wszystkie kraje konfliktu, b – liczba ludności tych krajów. Przykładowo, nasilenie I wojny światowej wynosi 141.5, nasilenie II wojny światowej wynosi 106.3. Najgorszą pod względem ofiar była wojna pomiędzy Paragwajem i Boliwią (1932-1935), ze wskaźnikiem nasilenia 382.4. Ograniczono się do konfliktów, w których zginęły co najmniej 3 osoby na 10000 wśród stron biorących w nim udział. Zatem $a = 3$, otrzymano $\alpha = 1.8$.

7. Majętność najbogatszych

Według magazynu Forbes najbogatszym obywatelem USA jest *William Gates*. Jego majątek szacowany był na 46 miliardów dolarów. Przyjęto $a = 600$ milionów, uzyskano $\alpha = 2.16$.

8. Występowanie nazwisk

Badania przeprowadzone w USA i Japonii potwierdziły, że częstotliwość występowania nazwisk również podlega rozkładowi Pareto. W USA przebadano pod względem częstotliwości występowania 89000 nazwisk. Przyjęto $a = 10000$, uzyskano $\alpha = 1.94$.

9. Populacje miast

Badania te również dotyczyły populacji USA. Brano pod uwagę miasta powyżej 40000 mieszkańców. Otrzymano $\alpha = 2.3$.

Rozkład Pareto jest wykorzystywany również w opisie procesu przesyłania danych przez Internet, gdyż jak wiadomo jest „dużo małych plików i mało dużych plików” oraz czas pracy mikroprocesorów, bo wykonują one „dużo krótkich obliczeń i mało długich”.

Zajmiemy się obecnie kilkoma własnościami rozkładu Pareto.

Wartość przeciętna wynosi: $E(x) = \int_a^\infty xf(x)dx = D \frac{a^{2-\alpha}}{\alpha-2}$ o ile $\alpha > 2$.

Jeżeli b jest dowolną liczbą $0 \leq b < 1$ możemy wyliczyć taką wartość argumentu x_b , dla którego:

$$\int_{x_b}^{\infty} \frac{\alpha-1}{a^{-\alpha+1}} \cdot \frac{dx}{x^\alpha} = b$$

Otrzymamy: $x_b = a \cdot b^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Przykładowo: $x_{\frac{1}{2}} = a 2^{\frac{1}{\alpha-1}}$

Biorąc pod uwagę na przykład rozkład majątku najbogatszych, możemy interpretować $x_{1/2}$ jako wartość majątku, która rozdziela bogatych na połowy: bogatych i najbogatszych. Oczywiście wartość majątku będąca w posiadaniu tych najbogatszych jest większa od wartości majątku bogatych.

Ułamek całkowitego majątku, który jest w posiadaniu najbogatszych możemy wyrazić wzorem:

$$\frac{\int_{x_{1/2}}^{\infty} xf(x)dx}{\int_a^{\infty} xf(x)dx} = \left(\frac{x_{1/2}}{a}\right)^{2-\alpha} = 2^{\frac{-(\alpha-2)}{\alpha-1}}$$

Zakładając, że $\alpha > 2$.

W tym konkretnym przypadku, mając do czynienia z wartością $\alpha = 2.1$ otrzymujemy:

$$2^{\frac{-(\alpha-2)}{\alpha-1}} = 2^{-0.091} \approx 0.91$$

Zatem 91% całego majątku bogatych ludzi w USA jest w posiadaniu połowy z tych najbogatszych. Połowa bogatych posiada 91% całego majątku bogatych.

Ogólniej, jak wiadomo: ułamek b społeczeństwa o tej własności, że majątek każdego z tej grupy przewyższa wartość majątku x_b , jest związany z rozkładem dóbr ludności następującą relacją:

$$\int_{x_b}^{\infty} \frac{\alpha-1}{a^{-\alpha+1}} \cdot \frac{dx}{x^\alpha} = \int_{x_b}^{\infty} f(x)dx = b$$

Z kolei procent majątku będącego w posiadaniu tej części społeczeństwa możemy wyrazić jako:

$$\frac{\int_{x_b}^{\infty} xf(x)dx}{\int_a^{\infty} xf(x)dx} = \left(\frac{x_b}{a}\right)^{2-\alpha}$$

Wykorzystując fakt, że:

$$x_b = a \cdot b^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Otrzymamy:

$$\frac{\int_{x_b}^{\infty} x f(x) dx}{\int_a^{\infty} x f(x) dx} = \left(\frac{x_b}{a}\right)^{2-\alpha} = b^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}$$

gdzie $0 < b \leq 1$.

Ostatni ułamek przedstawia procent społeczeństwa, w którego rękach spoczywa ułamek b majątku danego kraju.

Funkcję $P(b) = b^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}$ nazwano funkcją Lorentza.

Zauważmy, że $P(0.2) = 0.8$.

Oznacza to, że około 80% dóbr kraju jest w posiadaniu 20% najbogatszej części społeczeństwa! To jest geneza słynnej zasady 80/20.

W przypadku korzystania z sieci internetowej, gdzie mamy do czynienia z parametrem $\alpha = 2.4$, otrzymamy $P(0.2) = 0.64$. Oznacza to, że najpopularniejsze 20% stron uzyskuje około 64% wszystkich odwiedzin użytkowników Internetu.

W lingwistyce gdzie, jak wiadomo, częstotliwość używania słów podlega rozkładowi Pareto, przy $\alpha = 2.2$ dostaniemy $P(0.2) = 0.76$. Zatem 20% najczęściej używanych słów pozwala na wyrażenie 76% wszelkich konwersacji.

7. Po egzaminach

Po udanej sesji siedziałem z kolegą w pubie i snuliśmy plany na najbliższe wolne dni. Studenci mają tydzień przerwy, my wykładowcy też możemy trochę korzystać z wolności. Pomimo że w praktyce mamy do dyspozycji tylko trzy wolne dni, to w miarę upływu czasu i kolejnych zamówień widzieliśmy się już oczami wyobraźni na Karaibach, a w drodze powrotnej mieliśmy jeszcze zamiar odwiedzić Lwów, jako mekkę polskiej szkoły matematycznej.

Nadszedł jednak czas powrotu do domu. Kolega był mniej przezorny i przyjechał na spotkanie samochodem. Wówczas okazało się, że pub ten oferuje usługę odwożenia do domu klientów ich własnymi samochodami. Kelnerzy posiadają prawa jazdy, są ubezpieczeni i za niewielką opłatą chętnie prowadzą auta klientów. Kolega zaczął się wahać, przekonując, że właśnie słyszał w wiadomościach, że *pijani kierowcy powodują 25% wypadków*. Jak słusznie wobec tego zauważył, trzeźwi kierowcy są odpowiedzialni za 75% wypadków.

Uparcie zatem twierdził, że woli sam prowadzić samochód niż oddać ster trzeźwemu kelnerowi. Kelner usłyszawszy argumenty kolegi polecił mu poprosić o przysługę Josę Feliciano lub Stevie Wondera, bo nie notowano w statystykach wypadków samochodowych spowodowanych przez niewidomych kierowców.

Uwaga ta, aczkolwiek rzucona na boku i raczej złośliwie, spowodowała, że kolega ustąpił i dał się odwieźć.

Zobaczmy, czy w tym przypadku matematyka i teoria prawdopodobieństwa przyczyniłyby się do zmiany jego zdania.

Niech W oznacza wypadek, T to trzeźwy kierowca, zaś NT – nietrzeźwy kierujący pojazdem.

Według danych policji 96% kierujących jest trzeźwych. Szacuje się, że ryzyko spowodowania lub uczestnictwa w wypadku drogowym jest w miarę stałe i wynosi 0.8%.

Wobec tego prawdopodobieństwo spowodowania wypadku przez trzeźwego kierującego pojazdem wynosi:

$$\begin{aligned} P(W/T) &= \frac{P(W \cap T)}{P(T)} = \\ &= \frac{P(T/W) \cdot P(W)}{P(T)} = \frac{0.75 \cdot 0.008}{0.96} = 0.00625 \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo spowodowania wypadku przez pijanego kierowcę wynosi:

$$\begin{aligned} P(W/NT) &= \frac{P(W \cap NT)}{P(NT)} = \\ &= \frac{P(NT/W) \cdot P(W)}{P(NT)} = \frac{0.25 \cdot 0.008}{0.04} = 0.05 \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo spowodowania wypadku przez nietrzeźwego kierowcę jest ośmiokrotnie większe od prawdopodobieństwa spowodowania wypadku przez trzeźwego kierującego pojazdem!

8. Spotkania w pubie

Średnio dwa razy w tygodniu przychodzimy z kolegą do pubu, by w zaciszu tego niezwykłego miejsca odpocząć po dniu pracy i porozmawiać o kolejnych wykładach. Wybieramy zadania i układamy problemy, które mają się pojawić na najbliższych kolokwium. Często spotykamy tam również studentów naszego Wydziału. Od pewnego czasu obserwujemy pewną parę, którą spotykamy w pubie. Po dokonaniu obliczeń stwierdziliśmy, że w 75% przypadków zawsze para ta jest obecna, kiedy my jesteśmy w tym pubie.

Zaczęliśmy się wówczas dość długo sprzeczać. Czy fakt, że spotykamy tę parę w 75% przypadków upoważnia nas do stwierdzenia, że przychodzą oni częściej do pubu niż my, rzadziej, czy też trudno na tej podstawie powiedzieć cokolwiek o częstotliwości ich wizyt.

Parę spotykaną oznaczmy przez A , kolega wraz ze mną stanowimy parę B . Para B przychodzi do pubu b razy w tygodniu, para A przychodzi do pubu a razy. Zauważmy, że w przypadku $a + b > 7$ pewne jest, że choć raz w tygodniu się spotkają. Załóżmy zatem, że $a + b \leq 7$. Para B może przyjść do

pubu b razy na $\binom{7}{b}$ możliwości, z których $\binom{7-a}{b}$ pozwala na ominiecie spotkania z parą A. Zatem prawdopodobieństwo spotkania się par wynosi:

$$1 - \frac{\binom{7-a}{b}}{\binom{7}{b}}$$

Tabela poniżej przedstawia prawdopodobieństwa spotkania się par dla danych wartości a oraz b .

a\b	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7	1
2	0	2/7	11/21	5/7	6/7	20/21	1	1
3	0	3/7	5/7	31/35	34/35	1	1	1
4	0	4/7	6/7	34/35	1	1	1	1
5	0	5/7	20/21	1	1	1	1	1
6	0	6/7	1	1	1	1	1	1
7	0	1	1	1	1	1	1	1

Stanowiąc z kolegą parę B i wiedząc z doświadczenia, że parę A spotykamy na 75%, możemy śmiało stwierdzić, że para A przychodzi częściej do pubu niż my. Zauważmy bowiem, że przy wartościach $a = 2$, $b = 2$ prawdopodobieństwo spotkania wynosi $\frac{11}{21} \approx 0.52$, dla $a = 3$, $b = 2$ mamy już $\frac{5}{7} \approx 0.71$, natomiast dla $a = 4$, $b = 2$ prawdopodobieństwo spotkania wynosi $\frac{6}{7} \approx 0.86$. Zatem para A przychodzi do pubu od trzech do czterech razy w tygodniu.

9. Pokrętni studenci

Trzech studentów A, B, C spotkało się, by przedyskutować swoje wrażenia z mijającej sesji. Podczas długiej biesiady potracili tak pewność siebie, że możemy już tylko założyć, że cokolwiek by twierdzili, nie mijają się z prawdą z prawdopodobieństwem $1/3$.

Kończąc spotkanie było wiadomo, że A zaprzeczył B zapewniającemu, że C kłamie.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że C mówi prawdę?

Oznaczmy przez C zdarzenie: *C mówi prawdę*,

zaś przez A zdarzenie: *A przeczy B twierdzącemu, że C kłamie*.

Naszym zadaniem jest wyznaczenie $P(C/A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)}$.

Zauważmy, że zdarzenie A możemy zapisać jako: *A potwierdza, że B twierdzi, że C mówi prawdę*.

Wówczas zdarzenie $C \cap A$ interpretujemy jako: *C mówi prawdę i A potwierdza, że B twierdzi, że C mówi prawdę.*

Stwórzmy tabelkę przedstawiającą wszystkie możliwe kombinacje prawdopodobności A, B, C:

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	P	P	P	K	K	K	P	K
B	P	P	K	P	K	P	K	K
C	P	K	P	P	P	K	K	K

gdzie: P oznacza prawdę, K – kłamstwo. Każde P niezależnie pojawia się z prawdopodobieństwem $1/3$, zaś K z prawdopodobieństwem $2/3$.

Zastanówmy się nad wartością $P(C \cap A)$. Oczywiście C musi mówić prawdę. Zdarzenie to zachodzi w przypadku 1 (gdy wszyscy mówią prawdę). Jednakże zdarzenie to zajdzie również w przypadku podwójnego przeczenia, tzn. wtedy gdy zarówno A i B będą kłamać. Jest to przypadek nr 5.

$$\text{Zatem } P(C \cap A) = P(1) + P(5) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{27}$$

Zastanówmy się obecnie nad wartością $P(A)$.

Oczywiście, zdarzenie A zachodzi w przypadku nr 1. Dalej na zasadzie podwójnego przeczenia, A zachodzić będzie jeszcze w przypadkach: 5, 6, 7.

$$\text{Zatem } P(A) = P(1) + P(5) + P(6) + P(7) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{27}.$$

$$\text{Ostatecznie } P(C/A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{5}{13} = 0.3846.$$

Zatem kombinacja przekłamań i prawd osób A,B,C daje szansę około 38.5% na to, że C mówi prawdę. Przypomnijmy, że C mówi prawdę z prawdopodobieństwem $1/3$, zatem te informacje, pochodzące od jego raczej niewiarygodnych przyjaciół, jakby zwiększyły jego „prawdopodobność”.

10. Roztargnienie

Centrum Kształcenia Międzynarodowego Politechniki Łódzkiej słynie z zajęć prowadzonych w języku angielskim i kursów przedmiotów miękkich, takich jak: *Team Building* i *Communication Skills*. Przedmioty te prowadzone są przez urocze i pełne wdzięku panie, które są bardzo roztargnione. Otóż jedna z pań pewnego dnia po trzech spotkaniach ze studentami w trzech różnych salach zorientowała się, że nie posiada torebki. Obliczmy prawdopodobieństwo pozostawienia torebki w każdej z trzech sal. Z poprzednich doświadczeń wynika, że prawdopodobieństwo pozostawienia torebki w sali, podczas zajęć, wynosi $1/4$.

Niech zdarzenia S_1, S_2, S_3 oznaczają kolejno pozostawienie torebki w sali 1, 2, 3, oraz $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ oznacza prawdopodobieństwo pozostawienia torebki, w którejkolwiek z sal.

Otrzymujemy:

$$P(S_1) = \frac{1}{4}, P(S_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = 3/16, P(S_3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$$
$$P(S) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} = \frac{37}{64}$$

Zatem prawdopodobieństwo pozostawienia torebki w sali S_1 wynosi:

$$P(S_1/S) = \frac{P(S \cap S_1)}{P(S)} = \frac{P(S_1)}{P(S)} = \frac{16}{37} = 0.4324$$

Prawdopodobieństwo pozostawienia torebki w sali S_2 wynosi:

$$P(S_2/S) = \frac{P(S \cap S_2)}{P(S)} = \frac{P(S_2)}{P(S)} = \frac{12}{37} = 0.3243 \text{ i ostatecznie}$$
$$P(S_3/S) = \frac{P(S \cap S_3)}{P(S)} = \frac{P(S_3)}{P(S)} = \frac{9}{37} = 0.2432.$$

Czy to ma jakieś praktyczne znaczenie? Nie wiem, ale tak jak z interesującymi liczbami, samo zagadnienie jest ciekawe.

11. Kolejka przed dziekanatem

Środa jest dniem wyjątkowym w Centrum Kształcenia Międzynarodowego Politechniki Łódzkiej. Na piętrze, gdzie znajduje się sekretariat, panuje błoga cisza, którą od czasu do czasu przerywa delikatne stukanie palców o klawiaturę. Wchodząc na piętro, czujesz się jak na łące latem; wyłapujesz te dźwięki i wytrawnym uchem badacza amatora starasz się zidentyfikować ich pochodzenie. Czy to pani Asia delikatnie muska klawiaturę, czy pani Ewa odważnie wystukuje kolejne ogłoszenie dziekana.

W środę bowiem dziekanat jest zamknięty dla studentów. Najazd oczekujących na obsługę gości odbywa się w każdym innym dniu tygodnia.

W tym miejscu zajmiemy się tzw. teorią kolejek. Z matematycznego punktu widzenia zajmiemy się fenomenem kolejki, czasu oczekiwania, średniej liczby osób w kolejce itd.

Twórcą matematycznego modelu kolejki (nie pociągu!) był Agner Erlang (1878-1929). Pracując w Kopenhaskiej Kompanii Telefonicznej, zajmował się badaniem procentu rozmów, które oczekują na połączenie ze względu na blokadę linii przez inne rozmowy. Wykorzystując elementarne narzędzia rachunku prawdopodobieństwa, wykazał, że połączenia telefoniczne podlegają rozkładowi Poissona. Całkowicie oddany swej pracy, pozostał do końca życia kawalerem. Dzieciństwo spędzał w towarzystwie starszego brata, ogromnie pracowitego, lecz mniej zdolnego. Brat większość dnia siedział przy biurku otoczony książkami. Agner godzinami, siedząc naprzeciw niego, nauczył się płynnie czytać książki odwrócone do góry nogami. Już jako

dorosły ceniony naukowiec nie zwracał uwagi, w jaki sposób trzyma książkę czy artykuł, który czytał.

Wracając do naszego zagadnienia musimy najpierw wprowadzić odpowiednie założenia i umówić się co do oznaczeń.

Otóż w dziekanacie mamy do czynienia z kolejką typu FIFO (first in, first out). O obsłudze decyduje kolejność zgłoszeń. Jeśli klient A pojawił się w kolejce przed klientem B, to A będzie obsłużony wcześniej od B. Zauważmy, że ten proces obsługi, nie jest tak oczywisty w różnego rodzaju kolejkach.

Chociażby na izbie przyjęć w szpitalu, poza kolejnością (wcześniej) przyjmowani są pacjenci przywiezieni przez karetki z wypadku lub reprezentujący cięższy stan zdrowia niż pozostali oczekujący. Na lotnisku przy „bramce” do wejścia do samolotu często nie decyduje pozycja pasażera w kolejce tylko jego status, rodzaj biletu, wiek czy numer rzędu fotela w samolocie.

Zakładamy, na razie dla prostoty problemu, że w dziekanacie jest obecna jedna pani sekretarka, która średnio jest w stanie obsłużyć $\mu = \frac{1}{m}$ studentów na minutę. Z drugiej strony studenci w kolejce pojawiają się średnio w liczbie λ osób na godzinę.

Postaramy się odpowiedzieć na następujące pytania:

- 1) Jaki procent czasu pracy zajmuje pani sekretarce obsługa studentów?
- 2) Ile wynosi prawdopodobieństwo zdarzenia, że w systemie znajduje się dokładnie n studentów? (przez system rozumiemy zbiór osób czekających i obsługiwanych)
- 3) Ile średnio osób przebywa w systemie?
- 4) Jaki jest średni czas oczekiwania w kolejce?
- 5) Jeśli wiadomo, że studenci są raczej zniecierpliwieni i nie są w stanie tolerować stania w kolejce dłużej niż q minut, jakie jest prawdopodobieństwo, że akurat co najmniej tyle czasu poświęcą na przebywanie w systemie?

Oczywiście mamy:

$$\lambda = \frac{k}{60} \text{ (k osób na minutę),}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{60}{k} \text{ (tyle minut wynoszą przerwy pomiędzy pojawieniem się nowych osób w systemie),}$$

$$\mu = \frac{1}{m} \text{ (tyle osób na minutę jest obsługiwanych przez panią sekretarkę),}$$

$$\frac{1}{\mu} = m \text{ (tyle minut pani sekretarka obsługuje średnio przeciętnego studenta).}$$

Część czasu pracy, który pani sekretarka poświęca na obsługę studentów wynosi zatem: $\lambda \cdot \frac{1}{\mu}$. Część czasu pracy, którą może poświęcić na inne czynności,

niezwiązane z zajmowaniem się studentami wynosi: $\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$.

Tu już mamy odpowiedź na pierwsze pytanie:

Pani sekretarka jest wolna od obsługi studentów przez $\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$ swojego czasu.

Oznaczmy przez p_n prawdopodobieństwo zdarzenia, że w systemie znajduje się n studentów.

Zauważmy również, że $p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$. Pusty system oznacza, że pani sekretarka jest wolna.

Prawdopodobieństwo pojawienia się nowej osoby w systemie podczas krótkiego przedziału czasowego Δt wynosi $\lambda \cdot \Delta t$.

Prawdopodobieństwo opuszczenia systemu przez studenta w przedziale czasowym $(t, t + \Delta t)$ o długości Δt wynosi 0, gdy system jest pusty w czasie t . Wynosi $\mu \cdot \Delta t$, gdy w systemie znajduje się co najmniej jedna osoba.

Z drugiej strony, prawdopodobieństwo zdarzenia, że w przedziale czasowym o długości Δt system będzie pusty jest sumą prawdopodobieństw zdarzeń: system był pusty i pozostał pusty przez ten czas lub w systemie była jedna osoba w czasie t i została obsłużona.

Zatem:

$$p_0 = p_0(1 - \lambda \cdot \Delta t) + p_1 \mu \Delta t \rightarrow p_1 = p_0 \frac{\lambda}{\mu}$$

Następnie prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na obecności jednej osoby w systemie możemy obliczyć jako sumę prawdopodobieństw zdarzeń:

- w systemie jest obecna jedna osoba w czasie Δt i nikt nie przybywa oraz nikt nie zostaje w tym czasie obsłużony,
- system jest pusty i jedna osoba przybyła,
- w systemie były dwie osoby i w międzyczasie jedna została obsłużona.

Oznacza to, że:

$$p_1 = p_1(1 - \lambda \Delta t - \mu \Delta t) + p_0 \lambda \Delta t + p_2 \mu \Delta t \rightarrow p_2 = \frac{\lambda + \mu}{\mu} p_1 - \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

Następnie prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na obecności dwóch osób w systemie możemy obliczyć jako sumę prawdopodobieństw zdarzeń:

- w systemie są obecne dwie osoby w czasie Δt i nikt nie przybywa oraz nikt nie zostaje w tym czasie obsłużony,

- b) w systemie jest jedna osoba i jedna osoba przybywa,
- c) w systemie były trzy osoby i w międzyczasie jedna została obsłużona.

Oznacza to, że:

$$p_2 = p_2(1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t) + p_1\lambda\Delta t + p_3\mu\Delta t \rightarrow p_3 = \frac{\lambda + \mu}{\mu} p_2 - \frac{\lambda}{\mu} p_1$$

Postępując analogicznie, otrzymamy:

$$p_{n+2} = \frac{\lambda + \mu}{\mu} p_{n+1} - \frac{\lambda}{\mu} p_n$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Rozwiązując równanie rekurencji, dostaniemy ogólnie:

$$p_n = A + B \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

Natomiast ciąg spełniający warunki początkowe wygląda następująco:

$$p_n = \frac{\mu - \lambda}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n.$$

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na obecności n osób w systemie wynosi:

$$p_n = \frac{\mu - \lambda}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

Obecnie przystąpimy do wyznaczenia średniej liczby osób obecnych w systemie:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \frac{\mu - \lambda}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Jak wiadomo bowiem:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Wobec powyższego średnia liczba osób przebywających w systemie wynosi:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Średni czas spędzony w kolejce: $Ave_{time} = L \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)\mu}$

Prawdopodobieństwo, że student spędzi w kolejce więcej niż $q = r \cdot \frac{1}{\mu}$ minut wynosi:

$$\sum_{k=r+1} p_k = 1 - p_0 - p_1 - \dots - p_r$$

Obecnie wyobrazimy sobie, dla przykładu, że pani sekretarka poświęca średnio 3 minuty na obsługę studenta. Przez godzinę średnio 18 studentów odwiedza dziekanat.

Podstawiając, mamy: $\lambda = 18/60 = 0.3$, $\mu = 1/3$ i dalej otrzymujemy:

- 1) pani sekretarka będzie wolna przez 10% swojego czasu,
- 2) $p_n = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n$,
- 3) liczba osób w systemie $L = 9$,
- 4) średni czas spędzony w kolejce $Ave = 27$ minut.

Dodajmy jeszcze, że w przypadku, gdy liczba sekretarek jest większa, powiedzmy $s > 1$, to do zagadnienia podchodzimy w sposób analogiczny. Jedyna różnica polega na tym, że w powstałym systemie m zastępujemy przez m/s .

Na zakończenie, wróćmy na Politechnikę. Po wykonaniu niezbędnego wywiadu ustaliłem, że dwie panie pomagające studentom Centrum Kształcenia Międzynarodowego przetrwać studia, poświęcają średnio 6 minut na rozmowę z interesantem. Średnio 19 studentów na godzinę pojawia się w dziekanacie, aby zostawić podania, zmienić wybór przedmiotów, podbić legitymację, przeprosić, poprosić lub zwyczajnie się poradzić. Dane te pozwalają na stwierdzenie, że $\lambda = 19/60 = 0.3$, $\mu = 1/3$, i dalej otrzymujemy:

- a) każda z pań będzie wolna od spotkań ze studentami przez $1 - 57/60 = 0.05 = 5\%$ swego czasu,
- b) $p_n = \frac{1}{20} \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^n$,
- c) średnia liczba osób w systemie wynosi 19,

d) średni czas spędzony w kolejce to 57 minut.

Szacuje się, że przeciętny student wytrzymuje w kolejce tyle czasu, ile zajmuje mu wypicie piwa w pubie, czyli około 20-21 minut. Prawdopodobieństwo, że spędzi w kolejce co najmniej tyle czasu wynosi

$$1 - \sum_{n=0}^6 p_n = 1 - \sum_{n=0}^6 \frac{1}{20} \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^n = 0.698 \approx 70\%$$

Wydaje się zatem, że tłumy codziennie spotykane przed dziekanatem spowodowane są raczej rozterkami studentów związanymi z dylematem: czy czekać, czy raczej iść na piwo. A jeśli iść na piwo, to może z kimś z kolejki. Z drugiej strony, jeżeli ktoś z kolejki pójdzie na piwo, to można zająć jego miejsce. Zatem może jeszcze trochę postać. Z kolei takie stanie jest nudne, skoro można iść na piwo. I tak mija czas, a liczba studentów przed drzwiami dziekanatu wcale się nie zmniejsza.

12. Graduation ceremony

Zgodnie z długowieczną tradycją akademicką rokrocznie tuż przed Świętami Bożego Narodzenia w Centrum Kształcenia Międzynarodowego jest urządzana ceremonia wręczania dyplomów absolwentom studiów I i II stopnia, którzy w mijającym roku szczęśliwie napisali prace dyplomowe i obronili tezy swych dyplomów przed komisją egzaminacyjną. Wszyscy absolwenci w tym dniu mają togi (wypożyczane) i czapki akademickie. Po głównej uroczystości następuje wyrzucenie czapek. Każdy student podrzuca swoją czapkę w geście radości ukończenia studiów. Następnie czapki są zabierane na pamiątkę do rodzinnych archiwów. Zastanowimy się nad następującym zagadnieniem. Ile średnio czapek po podniesieniu z ziemi trafia do swoich prawowitych właścicieli?

To znaczy każdy z n studentów podrzuca swoją czapkę, jak upadną na ziemię, są zbierane przez studentów. Każdy podnosi jedną czapkę. Ile średnio czapek, po podniesieniu, trafi do swoich właścicieli?

Zadanie okazuje się jest niezwykle proste. Niech zmienna losowa X przyjmie wartość równą liczbie studentów, którzy podnieśli swoje czapki.

$X = I_1 + I_2 + \dots + I_n$ gdzie:

$$I_k = \begin{cases} 0, & \text{jeśli student } k - \text{ty nie podniósł swojej czapki} \\ 1, & \text{jeśli student } k - \text{ty podniósł swoją czapkę} \end{cases}$$

Oczywiście prawdopodobieństwo, że student k -ty podniesie swoją czapkę wynosi $\frac{1}{n}$.

Obliczamy obecnie:

$$\begin{aligned} E(X) &= E[I_1 + I_2 + \dots + I_n] = E(I_1) + E(I_2) + \dots + E(I_n) = \\ &= \sum_{k=1}^n 1 \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^n 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n} = 1 \end{aligned}$$

Nieważne, czy dany rok akademicki obfitował w dużą liczbę absolwentów, czy nie. Nieważne, czy studenci po ceremonii podrzucają czapki w CKM Politechniki Łódzkiej, czy podrzucają je wiwatujący studenci na Uniwersytecie Warszawskim – to i tak, niezależnie od liczby studentów, średnia liczba czapek, które wrócą do swoich właścicieli wynosi 1.

Rozdział ten zawierał opis kilku zdarzeń, typowych dla kultury akademickiej. Mam nadzieję, że udało mi się pokazać, że nawet tak prozaiczne sytuacje, jak: oczekiwanie w kolejce w dziekanacie, zdawanie egzaminu, różnego rodzaju system odpytywania, rozmowy w pubie mają w sobie ślad matematyki. Obecność matematyki dodaje tym zdarzeniom kolorytu, głębi i powoduje, że patrzymy na nie inaczej w porównaniu z nudnymi lekcjami algebry i analizy. W każdym przedmiocie kryje się pierwiastek zastosowań praktycznych, tylko nie zawsze potrafimy czy chcemy to dostrzec.

*And if the band you're in starts playing different tunes
I'll see you on the dark side of the moon*

R. Waters

WYBIERAMY DZIEKANA

Dziekan wyższej uczelni kieruje działalnością wydziału. Jest przełożonym wszystkich pracowników wydziału i opiekunem studentów. Nazwa dziekan wywodzi się łaciny. *Decanus* to osoba zarządzająca dziesięcioma. W Kościele rzymsko-katolickim dziekan stojący na czele dekanatu ma pod swoją opieką parafie (zwykle jest ich około dziesięciu, stąd nazwa).

Dziekan wyższej uczelni jest wybierany przez kolegium elektorów. Głosowanie jest tajne. Lista kandydatów jest ułożona w porządku alfabetycznym. Z listy kandydatów wyborcy jednoznacznie wyróżniają jedną osobę. Jeżeli w głosowaniu żaden z kandydatów nie uzyska wymaganych co najmniej 50% głosów, to, według procedury podanej w statucie uczelni, skreśla się z listy kandydatów z najmniejszą liczbą głosów i powtarza procedurę.

Ten sposób wyłaniania dziekana jednoznacznie wyłania zwycięzcę w turze kolejnych głosowań. Tryb głosowania jest ściśle określony w statucie uczelni i nie dopuszcza żadnych odstępstw i interpretacji. Głosowanie w taki sposób wymaga podjęcia jednoznacznej decyzji i wskazania, za każdym razem, tej najlepszej, jedynej osoby przewyższającej swymi kompetencjami i umiejętnościami wszystkich pozostałych. Gdy kandydaci, w ocenie elektorów, nie różnią się tak bardzo swymi umiejętnościami, trudno jest wskazać tego jedynego najlepszego.

A przecież można, zamiast wskazywać tylko jednego kandydata, ułożyć listę kandydatów według preferencji głosującego, powiedzmy, w kolejności od najlepszego do najgorszego. Wówczas elektorzy są zwolnieni z trudnego wyboru wskazywania jednego kandydata i zgodnie z sumieniem podają po prostu swoją listę preferencji.

Po przeprowadzonym głosowaniu, następuje liczenie głosów i wygrywa najlepszy.

Z przeprowadzonej argumentacji wynika, że lista preferencji jest sposobem głosowania, łatwiejszym i niezmuszającym elektorów do podejmowania trudnych wyborów.

Dlaczego zatem tak rzadko wybiera się podczas elekcji rodzaj głosowania oparty na liście preferencji? Głosowanie takie, przecież daje większy komfort elektorom i pozwala na postępowanie zgodnie z przekonaniami i sumieniem.

Okazuje się, że wszystko rozbija się o sposób liczenia głosów. Zajmijmy się kilkoma przykładami. Pokażemy jak różne metody liczenia głosów, każda mająca swoich zwolenników i szeroko rozpowszechniona, mogą wpłynąć na ostateczny wynik.

Dla uproszczenia założmy, że w głosowaniu bierze udział siedem osób. Do wyborów staje pięciu kandydatów: A, B, C, D, E. Wyborcy głosują na listę preferencji. Pierwszy na liście jest najbardziej preferowany, dalej w porządku malejącym wypisują kandydatów o coraz mniejszym poparciu.

Listy wyborów są następujące:

Wyborca 1	Wyborca 2	Wyborca 3	Wyborca 4	Wyborca 5	Wyborca 6	Wyborca 7
A	A	A	C	C	B	E
B	D	D	B	D	C	C
C	B	B	D	B	D	D
D	E	E	E	A	A	B
E	C	C	A	E	E	A

1. Ordynacja większościowa

W tej ordynacji zwycięzcą jest ten kandydat, który najczęściej pojawiał się na pierwszym miejscu list preferencji wyborców. Zatem, w tym przypadku zwycięzcą wyborów zostanie kandydat A.

Używając ordynacji większościowej, kandydat A zostanie wyłoniony jako zwycięzca.

2. Metoda Bordy

Wybór każdego z głosujących jest listą n preferencji. Kandydaci, przypominamy, są uszeregowani w porządku malejącego poparcia. Metoda Bordy polega na przyporządkowaniu każdemu kandydatowi punktów, zgodnie z pozycją jaką zajmuje na kartach wyborczych. Za ostatnie miejsce przypisujemy 0 punktów, za przedostatnie 1 punkt, itd. Za pozycję na pierwszym miejscu na liście kandydat otrzymuje $n - 1$ punktów. Wygrywa ten kandydat, który zdobędzie największą liczbę punktów, po zsumowaniu wszystkich punktów z kart wyborczych.

W przypadku naszego głosowania otrzymujemy:

Suma punktów kandydata A: $4+4+4+0+1+1+0 = 14$

Suma punktów kandydata B: $3+2+2+3+2+4+1 = 17$

Suma punktów kandydata C: $2+0+0+4+4+3+3 = 16$

Suma punktów kandydata D: $1+3+3+2+3+2+2 = 16$

Suma punktów kandydata E: $0+1+1+1+0+0+4 = 7$

Zwycięzcą zostaje wtedy kandydat B.

Jean Charles Borda (1733-1799) był francuskim fizykiem i matematykiem, Zasłynął wprowadzeniem nazwy *metr* dla jednostki długości. Nazwa pochodzi od greckiego słowa *metron* – mierzyć.

Metody tej używa się w Słowenii w wyborach parlamentarnych. W corocznym konkursie Eurowizji, na najlepszą piosenkę krajów członkowskich, poszczególne delegacje głosują, przyznając punkty utworom według kryterium Bordy.

3. Metoda Condorceta

Zwycięzcą wyborów według kryterium Condorceta jest ten kandydat, który w bezpośrednim starciu z wszystkimi pozostałymi jest wyżej na listach preferencji wyborczych niż jego kontrkandydaci. Inaczej mówiąc, jest lepszy w bezpośrednich starciach od wszystkich pozostałych.

Zauważmy, że wynik pojedynku A:B wynosi 3:4. Kandydat A jest bardziej preferowany od B u wyborców 1, 2, 3. Natomiast wyborcy 4, 5, 6, 7 wolą B niż A. Zatem A nie może być zwycięzcą, gdyż przegrywa chociażby z kandydatem B. Pojedynek B:E daje wynik 6:1. Eliminuje to kandydata E, natomiast B może pozostać w grze.

Starcie B:C kończy się wynikiem 4:3. Zatem C nie może być zwycięzcą. Z kolei pojedynek D:B skończył się wynikiem 4:3, co eliminuje z gry kandydata B. Jedynym pozostałym w grze jest kandydat D.

Z kolei jednak pojedynek C:D daje wynik 5:2. Zatem D nie może być zwycięzcą.

Zatem, licząc głosy metodą Condorceta, nie wyłonimy w tym głosowaniu zwycięzcy. Należy powtórzyć głosowanie.

Nicolas de Condorcet (1743-1794) był francuski filozofem i matematykiem. Znany jako żarliwy zwolennik równouprawnienia kobiet, występował również za zniesieniem niewolnictwa. Apelował o powszechną edukację poprzez zniesienie opłat za szkoły. Żonaty z przeszło dwadzieścia lat młodszą od siebie Sophie de Grouchy, która była uważana za najpiękniejszą kobietę Francji drugiej połowy XVIII wieku.

Jak widać z powyższego przykładu mankamentem tej metody jest fakt, że nie zawsze daje się wyłonić zwycięzcę. Powtarzane wybory skłaniają do zmiany preferencji i zawiązywania koalicji wyborczych.

4. Metoda Hare'a

Metoda ta polega na eliminacji kandydatów otrzymujących najmniejsze poparcie. Usuwamy tego kandydata, lub kandydatów, którzy najrzadziej pojawiają się na czele list preferencji. W ten sposób otrzymujemy listy preferencji pomniejszone o jedną lub więcej pozycji i powtarzamy procedurę.

Aby wyłonić zwycięzcę zgodnie z opisem, usuwamy kandydata D, który najmniej razy pojawia się na czele list preferencji (Faktycznie D ani razu nie

pojawia się na czele list). Otrzymujemy wówczas okrojone listy, które wyglądają następująco:

Wyborca 1	Wyborca 2	Wyborca 3	Wyborca 4	Wyborca 5	Wyborca 6	Wyborca 7
A	A	A	C	C	B	E
B	B	B	B	B	C	C
C	E	E	E	A	A	B
E	C	C	A	E	E	A

Obecnie usuwamy z list preferencji kandydatów B oraz E, gdyż oni ex-aequo pojawiają się najrzadziej na czele list.

Otrzymujemy nowe listy:

Wyborca 1	Wyborca 2	Wyborca 3	Wyborca 4	Wyborca 5	Wyborca 6	Wyborca 7
A	A	A	C	C	C	C
C	C	C	A	A	A	A

Obecnie usuwamy kandydata A, pozostawiając C jako zwycięzcę wyborów. Ten system wyborczy obowiązuje na przykład w Brazylii w wyborach partyjnych. Po raz pierwszy wybory metodą Hare'a przeprowadzono w 1870 roku w USA na Uniwersytecie Harvarda w wyborach władz wydziałów. Od 1909 roku nieprzerwanie jest używany w Tasmanii w wyborach parlamentarnych.

Thomas Hare (1806-1891) był prawnikiem brytyjskim, który przez całe swoje życie zawodowe pracował nad reformą brytyjskiego systemu wyborczego.

5. Procedura Coombsa

Ten system jest podobny do metody Hare'a. Kolejno eliminujemy kandydatów, którzy najczęściej pojawiają się na ostatnich miejscach list preferencji.

Jako pierwszy zostaje usunięty kandydat E, który 3 razy pojawił się na ostatnim miejscu. Nowe listy preferencji będą wyglądać następująco:

Wyborca 1	Wyborca 2	Wyborca 3	Wyborca 4	Wyborca 5	Wyborca 6	Wyborca 7
A	A	A	C	C	B	C
B	D	D	B	D	C	D
C	B	B	D	B	D	B
D	C	C	A	A	A	A

Następnie usuwamy kandydata A, otrzymując:

Wyborca 1	Wyborca 2	Wyborca 3	Wyborca 4	Wyborca 5	Wyborca 6	Wyborca 7
B	D	D	C	C	B	C
C	B	B	B	D	C	D
D	C	C	D	B	D	B

Teraz zegnamy się z D:

Wyborca 1	Wyborca 2	Wyborca 3	Wyborca 4	Wyborca 5	Wyborca 6	Wyborca 7
B	B	B	C	C	B	C
C	C	C	B	B	C	B

Jak widzimy zwycięzcą zostanie kandydat B.

Clyde Hamilton Coombs (1912-1988) był pionierem zastosowań matematyki w opracowaniu testów psychologicznych.

6. Metoda Copelanda

W metodzie tej, podobnie jak w przypadku procedury Condorceta, obliczamy wyniki bezpośrednich starć między wszystkimi parami kandydatów.

Następnie dla każdego kandydata obliczamy różnicę pomiędzy liczbą zwycięstw i porażek (*win-loss record*). Kandydat o największej różnicy (o ile istnieje) zostaje zwycięzcą.

W naszym przypadku tabela bezpośrednich starć wraz ze współczynnikami win-loss jest następująca:

	A	B	C	D	E	Winn-loss
A	X	3:4	3:4	3:4	5:2	1-3 = -2
B	4:3	X	4:3	3:4	6:1	3-1 = 2
C	4:3	3:4	X	5:2	4:3	3-1 = 2
D	4:3	4:3	2:5	X	6:1	3-1 = 2
E	2:5	1:6	3:4	1:6	X	0-4 = -4

Metoda Copelanda nie wyłoni zwycięzcy. Zauważmy tylko, że współczynnik *win-loss* dla zwycięzcy wyłonionego metodą Condorceta wynosi $n - 1$ (przy n kandydatach). Oczywiście zwycięzca wybrany metodą Condorceta jest jednocześnie zwycięzcą według metody Copelanda. Z drugiej strony zwycięzca wyłoniony metodą Copelanda nie zawsze jest jednocześnie zwycięzcą według procedury Condorceta.

A.H. Copeland (1898-1970) był matematykiem i między innymi twórcą tzw. stałej Copelanda. Jest to nieskończony ułamek dziesiętny 0,23571113171923... Ułamek ten budujemy przez dopisywanie kolejnych liczb pierwszych: 2, 3, 5, 7, 11, 13... W 1946 roku Copeland wykazał, że jest to liczba normalna, tzn. każda cyfra występuje w niej z równą częstotliwością.

7. Wybór większości

Kandydatom przypisujemy pozycje, jakie zajmowali na listach preferencji. Otrzymujemy następujący zbiór danych:

A: 1, 1, 1, 5, 4, 4, 5

B: 2, 3, 3, 2, 3, 1, 5

C: 3, 5, 5, 1, 1, 2, 2

D: 4, 2, 2, 3, 2, 3, 3

E: 5, 4, 4, 4, 5, 5, 1

Ciągi liczb ustawiamy w porządku niemalejącym, otrzymując:

A: 1, 1, 1, 4, 4, 5, 5

B: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 5

C: 1, 1, 2, 2, 3, 5, 5

D: 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4

E: 1, 4, 4, 4, 5, 5, 5

Następnie obliczamy medianę dla każdego ciągu danych:

A: 4, B: 3, C: 2, D: 3, E: 4

Kandydat o najmniejszej medianie wygrywa.

W naszym przypadku zwycięzcą zostaje kandydat C.

Uwaga: Jeśli liczba pozycji w ciągu pozycji zajmowanych przy kandydata jest parzysta, powiedzmy $2n$, to jako medianę przyjmujemy element stojący na pozycji $n + 1$. Jeśli liczba pozycji w ciągu pozycji zajmowanych przy kandydata jest nieparzysta, powiedzmy $2n + 1$, to jako medianę przyjmujemy element stojący na pozycji n .

W przypadku gdy dwóch lub więcej kandydatów osiągnie najniższe mediany (nazwijmy je k), to postępujemy w sposób następujący. Usuujemy z listy pozycji kandydatów po jednym elemencie k i liczymy mediany po raz kolejny.

Przykładowo niech listy pozycji kandydatów X oraz Y są następujące:

X: 1, 1, 2, 2, 3, 4; Y: 1, 2, 2, 2, 3, 5.

Mediany X oraz Y wynoszą 2. Usuujemy po jednej dwójce z list i mamy:

X: 1, 1, 2, 3, 4; Y: 1, 2, 2, 3, 5.

Znowu mediany wynoszą 2, zatem usuwamy z list po kolejnej dwójce, otrzymując:

X: 1, 1, 3, 4; Y: 1, 2, 3, 4.

Teraz wspólne mediany wynoszą 3, czyli usuwamy trójkę z każdego ciągu:

Teraz:

X: 1, 1, 4; Y: 1, 2, 5.

Wygrywa kandydat X, gdyż jego mediana (1) jest obecnie mniejsza od mediany kandydata Y (2).

System ten, opracowany w 2007 roku był używany w trakcie prawyborów prezydenckich we Francji w 2008 roku.

8. Metoda ciągu par z ustalonym porządkiem

Metoda ta jest oparta na pojedynku na głosy pomiędzy parami kandydatów, dla z góry ustalonego porządku.

Powiedzmy, że dla naszych kandydatów z góry ustalonym porządkiem będzie:

A, B, C, D, E.

Procedurę liczenia głosów rozpoczyna badanie zwycięzcy pojedynku na głosy A:B.

(Badamy, kto z nich był więcej razy powyżej drugiego miejsca na listach preferencji). Wiemy, że wynik pojedynku A:B wynosi 3:4.

Na placu boju zostaje B i obliczamy wynik starcia B:C. Ten z kolei wynosi 4:3. Zatem eliminujemy C i dalej przechodzimy do starcia B:D, które kończy się wynikiem 3:4. To powoduje, że B wypada z gry i pozostaje D, który zmierzy się z E. Ten pojedynek kończy się wynikiem 6:1. Zatem E odpada i zwycięzcą zostaje D.

Ta metoda jest krytykowana ze względu na możliwość manipulacji wynikami przez ustalenie porządku wzajemnych starć kandydatów w parach. Aby zilustrować przykładem to zagrożenie, przyjrzyjmy się trzem listom preferencji oddanych na czterech kandydatów:

Wyborca 1	Wyborca 2	Wyborca 3
A	C	B
B	A	D
D	B	C
C	D	A

Wyniki wzajemnych starć podaje tabela:

	A	B	C	D
A	X	2:1	1:2	2:1
B	1:2	X	2:1	3:0
C	2:1	1:2	X	1:2
D	1:2	0:3	2:1	X

Gdy ustalimy porządek C, D, B, A, mamy:

Z pojedynku C:D pozostaje D. Z pojedynku D:B zostaje B. Na końcu B:A daje wynik 1:2. A zostaje zwycięzcą.

Gdy ustalimy porządek A, C, D, B, to wówczas C eliminuje A, D eliminuje C i B wygrywa z D, stając się zwycięzcą wyborów.

Gdy ustalimy porządek B, D, A, C, to wtedy B wygrywa z D, A wygrywa z B i C wygrywa z A, stając się ostatecznym zwycięzcą.

Przy porządku A, B, C, D zwycięzcą zostanie D.

Jak widzimy zastosowanie różnych metod procedur wyborczych doprowadziło do wyłonienia czterech różnych zwycięzców, a dwukrotnie należałoby wybory powtórzyć, jako że wynik był nierozstrzygujący.

Pojawia się natychmiast naturalne pytanie. Która z tych procedur jest najbardziej sprawiedliwa i wiarygodnie oddaje wolę większości wyborców? Wiadomo, że decyzje grupowe powinny podlegać pięciu podstawowym zasadom.

1. Głosowanie w sposób wykluczający losowość ma wyłonić decyzję grupy głosujących, tzw. *Uniwersalność*.
2. W głosowaniu możliwe jest osiągnięcie każdego wyniku, tzw. *Suverenność*.
3. Gdy dowolny wyborca zmieni preferencje i podniesie rangę któregoś z kandydatów, to ostateczny wynik uzyskany przez tego kandydata, dzięki decyzji tego wyborcy, nie może ulec pogorszeniu, tzw. *Monotoniczność*.
4. Wynik głosowania nie może zależeć od głosów wybranych osób, tzw. *Brak Dyktatury*.
5. Jeśli zostanie ustalone, że np. kandydat A ma być przed kandydatem B, to żadne pozycje innych kandydatów nie mogą zmienić relacji A i B, tzw. *Niezależność nieistotnych alternatyw*.

Oczywiście warunki te są intuicyjnie proste, zrozumiałe i akceptowalne. Jednakże jak wykazał w 1950 roku Kenneth Arrow są one wewnętrznie sprzeczne. Nie istnieje procedura wyborcza, która w sprawiedliwy sposób oddałaby wolę większości. Spełnienie wszystkich warunków jednocześnie jest niemożliwe.

Twierdzenie Arrowa o tej niemożności było częścią jego pracy doktorskiej. Kenneth Arrow (1921-) jest laureatem nagrody Nobla z ekonomii. Jest jak do tej pory najmłodszą osobą wyróżnioną tą nagrodą. W chwili ogłoszenia miał 51 lat.

Jak widzimy zatem, nie istnieje uniwersalna procedura wyborcza, która w pełni zagwarantowałaby, że wola większości zostanie spełniona. Może wobec tego zdamy się na ślepy los? Załóżmy, że mamy siedmiu elektorów, którzy spośród siebie chcą wybrać dziekana. Każdy oddaje jeden głos, może nawet zagłosować na siebie. Obliczymy prawdopodobieństwo wybrania dziekana w sytuacji, gdy każdy z elektorów oddaje głos w sposób losowy.

Aby dziekan został wybrany, musi otrzymać cztery, pięć, sześć albo siedem głosów.

Aby otrzymać siedem głosów, każdy z elektorów musi zagłosować na tego jednego kandydata. Jest zatem tylko jedna możliwość otrzymania siedmiu głosów.

Aby otrzymać sześć głosów, jeden z siedmiu elektorów nie będzie głosować na zwycięzcę. Ma do wyboru sześciu innych. Liczba możliwości otrzymania sześciu głosów wynosi zatem: $7 \cdot 6 = 42$.

Aby otrzymać pięć głosów, potrzeba i wystarcza, aby dwóch elektorów nie głosowało na zwycięzcę. Mogą głosować na każdego z sześciu pozostałych. Dwójkę elektorów niegłosujących na zwycięzcę możemy wybrać na $\binom{7}{2}$ sposobów. Oznacza to, że pięć głosów można otrzymać na $\binom{7}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 21 \cdot 6 \cdot 6 = 756$. Aby otrzymać cztery głosy, potrzeba i wystarcza, aby trzech elektorów nie głosowało na zwycięzcę. Mogą głosować na każdego z sześciu pozostałych. Trójkę elektorów niegłosujących na dziekana elektora możemy wybrać na $\binom{7}{3}$ sposobów. Oznacza to, że cztery głosy można otrzymać na $\binom{7}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 35 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 7560$.

Zatem prawdopodobieństwo, że któryś z grona elektorów zostanie wybrany na dziekana, gdy głosowanie przebiega w sposób losowy, wynosi:

$$\frac{7 \cdot (1 + 42 + 756 + 7560)}{7^7} = 0,07105$$

Mamy około 7% na wybranie dziekana w ten sposób. Trudno się zdecydować czy zdać się na ślepy los, czy podejrzewać manipulacje związane z procedurami wyborczymi list preferencyjnych.

Jednak, patrząc na liczbę 7105, aż przechodzą ciarki po plecach. 7105 to *apokaliptyczna potęga*. Tak nazywamy liczbę n , o własności, że 2^n w swym zapisie dziesiętnym zawiera kolejne cyfry 666.

Jest to również tzw. *liczba wstrętna*, czyli zawierająca nieparzystą liczbę jedynek, gdy jest zapisana w systemie binarnym.

Jest to *liczba uboga*. Mówimy, że liczba naturalna n jest uboga, jeśli suma jej dzielników mniejszych od niej jest również mniejsza od tej liczby.

Chętnych namawiam do zweryfikowania poprawności obliczeń dotyczących wyboru dziekana, podczas przypadkowego oddawania głosów, przy założeniu, że nikt nie może głosować na siebie.

Uważam, że wówczas prawdopodobieństwo, że któryś z grona elektorów zostanie wybrany, wynosi:

$$\frac{7(6 + 6 \cdot 5 \cdot 6 + \binom{6}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6)}{6^7} = 0.06091$$

Z prawdopodobieństwem około 6% można w ten sposób wybrać dziekana.

6091 to również apokaliptyczna potęga i zarazem liczba wstrętna oraz uboga. Wraz z liczbą 6131 tworzy parę *liczb bliźniaczych*. Liczby bliźniacze to liczby pierwsze, których różnica wynosi 2. Najpopularniejsze zawieszki do bransoletek Swarovskiego oznaczone są symbolem 6091. To jednocześnie liczba szczęśliwa dla tego, kto może przez następną kadencję kierować wydziałem. Zresztą jak mówił Józef Stalin: *Nieważne kto i jak głosuje. Ważne kto liczy głosy.*

Jeżeli już jesteśmy przy liczeniu głosów, zajmijmy się na zakończenie rozdziału tzw. *zagadnieniem pierwszeństwa*. Otóż zakładamy, że w gorącej atmosferze dochodzi do wyborów dziekana. Ostatecznie walka odbywa się pomiędzy dwoma kandydatami A i B. Każdy z n głosujących oddaje jeden głos na któregoś z kandydatów. Kartki z głosami są wrzucane do urny, a następnie komisja skrutacyjna w skupieniu je liczy, podając po każdym odczytanym głosie aktualny stan pojedynku między kandydatami.

Zajmiemy się rozwiązaniem problemu postawionego w 1887 roku przez francuskiego matematyka Francoisa Bertranda.

Jeżeli na kandydata A oddano p głosów, zaś na kandydata B oddano q głosów, $p > q$, to jakie jest prawdopodobieństwo, że w trakcie odliczenia głosów, w dowolnym momencie, liczba oddanych głosów na kandydata A będzie zawsze większa od liczby głosów oddanych na B.

Oczywiście proces liczenia głosów możemy zilustrować jako odczytywanie kolejnych elementów ciągu binarnego o elementach A i B składającego się z $p + q$ wyrazów.

Zatem wszystkie głosy mogą ułożyć się na $\binom{p+q}{q}$ sposoby.

Przypuśćmy, że $p = 4$ oraz $q = 3$.

Weźmy pod uwagę kilka różnych ciągów głosów:

a) AABBBAA, b) ABABBAA, c) BABABAA, d) AAABABB, e) AABABAB, f) ABABABA

Każdy z tych ciągów głosów wyznacza nam ciąg liczbowy, opisujący o ile w danym momencie liczba głosów oddanych na kandydata A przewyższa liczbę głosów oddanych na B. I tak rozkład:

- a) AABBBAA wyznacza ciąg: 1, 2, 1, 0, -1, 0, 1.
- b) ABABBAA wyznacza 1, 0, 1, 0, -1, 0, 1
- c) BABABAA wyznacza -1, 0, -1, 0, -1, 0, 1
- d) AAABABB wyznacza 1, 2, 3, 2, 3, 2, 1
- e) AABABAB wyznacza 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1
- f) ABABABA wyznacza 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1

Oczywiście wszystkie z nich kończą się 1, gdyż o tyle głosów więcej oddano na A. Zauważmy jeszcze, że w przypadkach d, e kandydat A w dowolnym momencie utrzymywał przewagę w liczbie dotychczas zliczonych głosów nad kandydatem B.

Procedura liczenia głosów tak, by A był zawsze lepszy od B w liczbie zliczanych nań głosów musi zawsze zaczynać się od głosu oddanego na A.

W przypadku ogólnym wyróżnimy $\binom{q+p-1}{p-1}$ takich rozkładów głosów.

Zauważmy jeszcze, że w przypadkach: a, b, f pomimo tego, że zaczynają się od A, to opisują rozkłady głosów, w których w pewnym momencie (od początku liczenia) liczba zwolenników B była równa, bądź większa, od liczby zwolenników kandydata A.

Rozkład, w którym A jest ciągle na czele nazwiemy „dobrym”, zaś układ, w którym pojawia się przewaga B bądź remis nazwiemy „złym” rozkładem. Prawdopodobieństwo, które chcemy obliczyć będzie ułamkiem, którego mianownik zajmie liczba wszystkich rozkładów, zaś w liczniku pojawi się liczba „dobrych” rozkładów.

Aby znaleźć liczbę „dobrych” rozkładów, od wszystkich rozkładów zaczynających się od A odejmiemy liczbę „złych” rozpoczynających się od A.

Pokażemy, że liczba „złych rozkładów zaczynających się od A równa się liczbie rozkładów zaczynających się od B.

Przyjrzyjmy się układom: a) AABBBAA, b) ABABBBAA, f) ABABABA i odpowiadającym im ciągom przewag 1, 2, 1, 0, -1, 0, 1 oraz 1, 0, 1, 0, -1, 0, 1 i 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1. Zauważmy, że rozkłady te stają się „złe” począwszy od pewnego miejsca, tzn. wtedy, kiedy w ciągu numerycznym pojawia się 0.

I tak w „złych” numerycznych ciągach pozamieniamy na przeciwne znaki liczbowe do momentu pojawienia się 0.

Wówczas ciąg: 1, 2, 1, 0, -1, 0, 1 będzie wyglądać: -1, -2, -1, 0, -1, 0, 1.

Ciąg 1, 0, 1, 0, -1, 0, 1 przejdzie w ciąg: -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1.

Ciąg 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1 wyznaczy nam ciąg: -1, 0, 1, 0, 1, 0, 1.

Ciągom tym odpowiadają rozkłady BBAABAA oraz BABABAA i BAABABA. Zauważmy obecnie, że dzięki tej procedurze „zły” rozkład rozpoczynający się od A zostaje utożsamiony z rozkładem rozpoczynającym się od B.

Weźmy obecnie kilka dowolnych rozkładów rozpoczynających się od B i odpowiadające im ciągi numeryczne:

mianowicie: BAAABAB, (-1, 0, 1, 2, 1, 2, 1); BBBAAAA, (-1, -2, -3, -2, -1, 0, 1) oraz BAABBBAA (-1, 0, 1, 0, -1, 0, 1).

Jeżeli zastosujemy do tych rozkładów procedurę odwrotną – wszystkim liczbom stojącym przed zerem zmieniamy znaki na przeciwne, to otrzymamy ciągi: 1, 0, 1, 2, 1, 2, 1, czyli ABAABAB; 1, 2, 3, 2, 1, 0, 1, czyli AAABBBAA oraz 1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, czyli ABABBBAA. Każdy z tych ciągów liczbowych i odpowiadające im rozkłady przedstawiają „złe” drogi rozpoczynające się od A.

Wykazaliśmy zatem, że każda droga „zła” rozpoczynająca się od A wyznacza jednoznacznie drogę rozpoczynającą się od B. Wiedząc, że liczba dróg rozpoczynających się od B wynosi $\binom{q+p-1}{q-1}$, wnosimy, że liczba dróg „dobrych” jest różnicą: $\binom{q+p-1}{p-1} - \binom{q+p-1}{q-1}$.

Zatem prawdopodobieństwo, że podczas prac komisji skrutacyjnej kandydat A zawsze będzie na czele wynosi:

$$\frac{\binom{q+p-1}{p-1} - \binom{q+p-1}{q-1}}{\binom{p+q}{q}} = \frac{p-q}{p+q}.$$

Nie wypada zapomnieć o Bertrandzie, który jako pierwszy zainteresował się tym zagadnieniem.

Joseph Louis Francois Bertrand (1822-1900) zajmował się nie tylko matematyką, ale również ekonomią i termodynamiką. Już w wieku 9 lat biegle posługiwał się łaciną i poznał podstawy geometrii i algebry. Znany jako twórca słynnej hipotezy dotyczącej istnienia liczb pierwszych w przedziale $(n, 2n - 2)$ dla $n \in N$, oraz $n > 3$.

W teorii prawdopodobieństwa Bertrand jest znany jako autor paradoksu monet. W związku z tym, że paradoks ten dotyczył losowania monet z urn, możemy śmiało zamieścić go w tym miejscu jako „deser” rozważań dotyczących wyborów i losowania. Otóż mamy do czynienia z trzema urnami. W każdej z nich są dwie monety. W jednej są dwie złote, w drugiej dwie srebrne, a w trzeciej jedna srebrna i jedna złota moneta. Wybieramy monetę z jednej urny. Okazuje się, że jest złota. Jakie jest prawdopodobieństwo, że druga moneta w tej urnie jest również złota.

W większości przypadków odpowiedź brzmi: $\frac{1}{2}$, gdyż złota moneta pochodzi z jednej z dwóch urn, gdzie mamy dwie złote lub jedną złotą i jedną srebrną. Zatem szansa na to, że druga też będzie złota wynosi 50%. Jest to odpowiedź błędna. Nie uwzględniamy faktu, że, mając w ręku jedną złotą monetę mamy do czynienia z prawdopodobieństwem warunkowym.

Wprowadzimy oznaczenia Z1, Z2 – pierwsza moneta złota, druga moneta złota, ZZ – urna z dwiema złotymi monetami, SS – urna z dwiema srebrnymi, ZS – urna z jedną srebrną i jedną złotą monetą.

Obliczamy:

$$P(Z2/Z1) = \frac{P(Z2 \cap Z1)}{P(Z1)} = \frac{P(Z1/Z2) \cdot P(Z2)}{P(Z1/ZZ) \cdot P(ZZ) + P(Z1/ZS) \cdot P(ZS) + P(Z1/SS) \cdot P(SS)} =$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

Zaskoczenie, prawda?

*Us, and them
And after all we're only ordinary men.
Me, and you.
God only knows it's not what we would choose to do.*

Us and them – R. Waters, R. Wright

HABEMUS PAPAM

W roku 2013 po raz pierwszy w przeszło siedmusetletniej historii papież sam zrezygnował z urzędu i konklawe jeszcze za życia Benedykta XVI zebrało się, aby wybrać jego następcę.

Najwyższy dostojnik Kościoła wybierany jest w tajnym głosowaniu. Każdy elektor oddaje swój głos w sposób tradycyjny, zapisując nazwisko swojego kandydata, na kartce papieru w ten sposób, *aby po charakterze pisma nie można było rozpoznać kim jest głosujący*. Gdy żaden z kandydatów nie otrzyma wymaganych 2/3 głosów ogółu kardynałów, procedurę głosowania powtarza się. Konklawe ma miejsce w Kaplicy Sykstyńskiej w Watykanie. Po głosowaniu, które należy powtórzyć, nad Kaplicą unosi się czarny dym. Natomiast po głosowaniu, w trakcie którego został wybrany papież, nad Kaplicą pojawia się biały dym, a po chwili kardynał diakon obwieszcza wiernym zgromadzonym na Placu Świętego Piotra radosną nowinę słowami: *Habemus papam – Mamy papieża* oraz podaje jego imię. Jako ciekawostkę podajemy, że Jan Paweł II został wybrany w ósmym głosowaniu, Benedykt XVI w czwartym, a Franciszek w piątym.

Jedna z najciekawszych historii wyboru papieża odbyła się na konklawe w 1513 roku. Wśród 25 kardynałów uczestniczących w konklawe, dwóch było uważanych za najpoważniejszych kandydatów na następcę św. Piotra. Wskutek podziałów między frakcjami kardynalskimi, większość z głosujących postanowiła zagłosować na kandydatów z góry skazanych na porażkę, licząc że po kolejnych turach dojdzie do porozumienia pomiędzy najpoważniejszymi pretendentami do tytułu. W ten nieoczekiwany sposób, zupełnie pomijany przez wszystkich, sędziwy kardynał z Hiszpanii dostał aż 13 głosów (17 głosów wystarczyło by zostać wybranym). Zaskoczeni tym wynikiem hierarchowie szybko dogadali się między sobą i wybrali jednego z faworytów, który po wyborze przyjął imię Leon X.

Zastanówmy się nad fenomenem tak zaskakującego wyniku – otrzymania aż 13 głosów przez nieliczącego się kandydata.

Załóżmy, że wśród 25 elektorów, m nie ma najmniejszych szans na wybór. Jednak duża grupa kardynałów postanawia głosować na tych, którzy nie mają praktycznie szans na wybór, tylko po to, aby podczas kolejnych tur dojść do porozumienia i wyłonić wspólnego kandydata. Taka strategia jest dosyć często spotykana podczas wyborów przewodniczących różnych gremiów, gdy liczba chętnych do objęcia stanowiska jest zdecydowanie zbyt duża.

Zatem m kardynałów uznajemy jako tych, którzy nie mają szans by zostać wybranymi na papieża. W strategii polegającej na głosowaniu na kandydata, który z pozoru nie ma szans na wybór na papieża uczestniczy r kardynałów. $17 \leq r \leq 25$. Głosują oni losowo na któregoś spośród m kandydatów bez szans. Obecnie zastanowimy się na ile sposobów r kardynałów może głosować na grupę m kardynałów uznanych za kandydatów straconych i bez szans na wybranie.

Wyobraźmy sobie, że każdy z r kandydatów dysponuje jedną piłką, którą może włożyć do jednej z m szuflad – oznaczających kardynałów bez szans. Jeśli na przykład założymy, że $r = 10$, natomiast $m = 3$, to problem głosowania na grupę *czarnych koni* równa się ilości sposobów na ile 10 nierozróżnialnych kul można włożyć do trzech szuflad.

Poniżej przedstawiamy kilka możliwych układów. Pierwszy obrazek pokazuje układ 3, 3, 4, następne modelują rozkład 0, 1, 9 oraz 10, 0, 0.

```

O O O I O O O I O O O O
I O I O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O I I

```

Zauważmy obecnie, że każdy z układów kul w szufladach odpowiada ciągowi binarnemu składającemu się z 12 elementów i posiadającemu 10 zer oraz dwie jedynki. Odwrotnie, każdy 12-elementowy ciąg binarny o 10 zerach modeluje pewien układ kul w szufladach.

Liczbę ciągów binarnych n -elementowych zawierających k jedynek ($n-k$ zer) możemy obliczyć w sposób następujący: losujemy spośród n wszystkich pozycji te miejsca, które będą zajmowały jedynki, a pozostałe $n-k$ miejsc oczywiście wypełnią zera. Możemy również zacząć od losowania $n-k$ miejsc do wypełnienia ich przez zera. Zatem liczba takich ciągów jest równa:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Oznacza to, że możliwych układów kul w szufladach jest:

$$\binom{12}{2} = \binom{10+3-1}{3-1} = \binom{12}{10} = \binom{10+3-1}{10}$$

Ogólnie, liczba sposobów, na które r kardynałów może zagłosować na grupę m kardynałów bez szans wynosi:

$$\binom{m+r-1}{m-1} = \binom{m+r-1}{r}$$

Obecnie zastanowimy się, jak obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że któryś z grupy m kandydatów bez szans otrzymał aż 13 głosów.

Ilość sposobów otrzymania przez któregoś z grupy m kardynałów 13 głosów, oddanych przez grupę r kardynałów – tych trzymających władzę, równa się ilości sposobów na ile pozostałych $r - 13$ głosów zostanie rozdysponowanych pomiędzy $m - 1$ pozostałymi kandydatami bez szans.

Zatem liczba tych możliwości wynosi;

$$\binom{m-1+r-13-1}{r-13} = \binom{m+r-15}{r-13}$$

Oznacza to, że prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że któryś z grupy m kandydatów bez szans otrzyma 13 głosów wynosi:

$$\frac{m \binom{m+r-15}{r-13}}{\binom{m+r-1}{r}}$$

Prawdopodobieństwa te, dla różnych wartości m oraz r , przedstawia tabela:

	r = 17	r = 18	r = 19	r = 20
m = 2	0.1111	0.1053	0.1000	0.0952
m = 4	0.0526	0.0632	0.0727	0.0813
m = 6	0.0159	0.0225	0.0296	0.0373
m = 8	0.0048	0.0077	0.0112	0.0155
m = 10	0.0016	0.0028	0.0043	0.0065

Jak widzimy, szanse na zaistnienie takiego zdarzenia są bardzo małe. Zanim przejdziemy do komentarzy, obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia, że któryś z kandydatów z grupy bez szans otrzyma co najmniej 17 głosów, czyli liczbę wystarczającą, aby zostać papieżem.

Zastanawiamy się nad podziałem głosów, jaki nastąpi przy głosowaniu r kandydatów biorących udział w tej strategii.

Przypomnijmy, że:

- ilość sposobów na ile któryś z grupy m kardynałów otrzyma 14, 15, 16... głosów z grupy r kardynałów – tych trzymających władzę, równa się ilości sposobów na ile pozostałych $r - 14$, $r - 15$, $r - 16$... głosów zostanie rozdysponowanych pomiędzy $m - 1$ pozostałymi kandydatami bez szans,
- liczba sposobów otrzymania 14 głosów przez któregoś z „czarnych koni” wynosi zatem:

$$\binom{m-1+r-14-1}{r-14} = \binom{m+r-16}{r-14} = \binom{m+r-15-1}{r-13-1}$$

c) liczba sposobów na otrzymanie 15 głosów przez któregoś z „czarnych koni” wynosi:

$$\binom{m-1+r-15-1}{r-15} = \binom{m+r-17}{r-15} = \binom{m+r-15-2}{r-13-2}$$

d) liczba sposobów na otrzymanie $13+i$ głosów przez któregoś z „czarnych koni” wynosi zatem:

$$\binom{m+r-15-i}{r-13-i}$$

W przypadku, gdy chcemy by liczba głosów wynosiła co najmniej 17, zauważamy, że $i = 4, 5, 6, \dots$. Wobec powyższego, liczba sposobów na otrzymanie $17 + k$ głosów, $k = 0, 1, 2, \dots$ przez któregoś z listy m kandydatów bez szans wynosi:

$$\binom{m+r-19-k}{r-17-k}$$

Zauważmy, że $k = 0, 1, 2, \dots, r-17$.

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że któryś z m kardynałów marionetek zostanie wybrany na papieża (to znaczy uzyska co najmniej 17 głosów) wynosi:

$$\frac{m}{\binom{m+r-1}{r}} \cdot \sum_{k=0}^{r-17} \binom{m+r-19-k}{r-17-k}$$

Obecnie, zanim przejdziemy do dalszych wyliczeń, przez chwilę zajmiemy się własnościami współczynników dwumianowych $\binom{n}{k}$, gdyż pewne ich własności pozwolą nam na znaczne uproszczenie wzoru na prawdopodobieństwo wyboru papieża spośród grupy *niemających szans na wybór*.

Własność 1:

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{c} = \binom{n+1}{c+1}, c \geq 0$$

Dowód tej własności przeprowadzimy przez indukcję:

Dla $n = 1$ mamy:

$$\binom{0}{c} + \binom{1}{c} = 1 + 1 = \binom{2}{c+1} = \binom{2}{1} = 2$$

Następnie zakładamy, że $\sum_{k=0}^n \binom{k}{c} = \binom{n+1}{c+1}$, $c \geq 0$ oraz badamy zachowanie sumy: $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{k}{c}$.

Chcielibyśmy, aby $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{k}{c} = \binom{n+2}{c+1}$

Faktycznie:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{k}{c} &= \binom{n+1}{c+1} + \binom{n+1}{c} = \frac{(n+1)!}{c!(n-c)!} \left(\frac{1}{c+1} + \frac{1}{n+1-c} \right) \\ &= \frac{(n+2)!}{(c+1)!(n+1-c)!} = \\ &= \binom{n+2}{c+1} \end{aligned}$$

Własność 2:

$$\sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

Dowód:

Oczywiście $\binom{r+k}{k} = \binom{r+k}{r}$. Zatem korzystając z własności 1, mamy:

$$\sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{r+k}{r} = \binom{r+n+1}{r+1} = \binom{r+n+1}{n}$$

Własność 3: Dla $0 \leq m \leq n$ mamy:

$$\sum_{k=0}^m \binom{n-k}{m-k} = \binom{n+1}{m}$$

Dowód:

Wykorzystując własność 2, mamy:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \binom{n-k}{m-k} &= \binom{n-0}{m-0} + \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-2}{m-2} + \dots + \binom{n-m+1}{1} \\ &\quad + \binom{n-m}{0} = \\ &= \binom{n-m}{0} + \binom{n-m+1}{1} + \dots + \binom{n-2}{m-2} + \binom{n-1}{m-1} + \binom{n}{m} \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{n-m+k}{k} = \\ &= \binom{n-m+m+1}{m} = \binom{n+1}{m} \end{aligned}$$

Obecnie powrócimy do prawdopodobieństwa wyboru papieża, zauważając, że zgodnie z własnością 3 mamy:

$$\sum_{k=0}^{r-17} \binom{m+r-19-k}{r-17-k} = \binom{m+r-18}{r-17}$$

Zatem:

$$\begin{aligned} \frac{m}{\binom{m+r-1}{r}} \cdot \sum_{k=0}^{r-17} \binom{m+r-19-k}{r-17-k} &= \frac{m}{\binom{m+r-1}{r}} \cdot \binom{m+r-18}{r-17} \\ &= \frac{m(m+r-18)!r!}{(r-17)!(m+r-1)!} \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwa te przedstawiono w tabeli poniżej.

m, r	r = 17	r = 18	r = 19	r = 20
m = 2	0.0556	0.1053	0.1500	0.1905
m = 4	0.0035	0.0120	0.0260	0.0452
m = 6	0.0	0.0	0.0	0.0063
m = 8	0.0	0.0	0.0	0.0011

Podobnie jak obliczyliśmy prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej 17 głosów, możemy (używając tej samej metody) dokonać kalkulacji prawdopodobieństwa otrzymania co najmniej 13 głosów przez któregoś z kardynałów z grupy *m czarnych koni*.

Otrzymamy wówczas:

$$\begin{aligned} \frac{m}{\binom{m+r-1}{r}} \cdot \sum_{k=0}^{r-13} \binom{m+r-15-k}{r-13-k} &= \frac{m}{\binom{m+r-1}{r}} \cdot \binom{m+r-14}{r-13} \\ &= \frac{m(m+r-14)!r!}{(r-13)!(m+r-1)!} \end{aligned}$$

Następnie podamy kilka przykładowych wartości dla różnych m oraz r .

	r = 17	r = 18	r = 19	r = 20
m = 2	0.5556	0.6316	0.7000	0.7619
m = 4	0.1228	0.1684	0.2182	0.2710
m = 6	0.0287	0.0449	0.0652	0.0895
m = 8	0.0076	0.0132	0.0209	0.0309

Zastanówmy się, czy rzeczywiście kardynałowie na konklawe w 1513 roku postąpili właściwie. Przypomnijmy, że po pierwszym głosowaniu, w którym jeden z figurantów dostał 13 głosów (bo początkowo nikt nie chciał głosować na faworyta), kardynałowie przestraszyli się. Szybko porozumieli się między sobą i wybrali papieża spośród najbardziej liczących się eminencji.

W tabelce przedstawiamy prawdopodobieństwa otrzymania co najmniej 17 głosów, przy założeniu otrzymania co najmniej 13 głosów.

	r = 17	r = 18	r = 19	r = 20
m = 2	0.1000	0.1667	0.2142	0.2500
m = 4	0.0285	0.0712	0.1191	0.1667
m = 6	0.0	0.0	0.0	0.0703
m = 8	0.0	0.0	0.0	0.0365

Jak widzimy, istniałoby pewne zagrożenie, rzędu 25%, że któryś z dwójki nieliczących się kardynałów zostanie wybrany, gdyby w strategii głosowania na figurantów uczestniczyło 20 kardynałów. Zagrożenie zwiększa się wraz ze wzrostem głosujących kardynałów. Zatem możemy pogratulować elektorom wyczucia. Zmieniając strategię już w następnym głosowaniu, wybrali papieża spośród grona szanowanych faworytów. Leon X kierował Kościołem przez 8 lat.

Kolejne, ciekawe z punktu widzenia teorii prawdopodobieństwa konklawe miały miejsce w 1334 i 1431 roku.

Podczas konklawe 1334 roku dwudziestu czterech kardynałów przez pierwsze siedem dni klóciło się i nie doszło wtedy do ani jednego głosowania. Kardynałowie podzielili się na różne frakcje i na znak protestu, że nie mogą dojść do kompromisu, postanowili – niezależnie od siebie – zagłosować na kardynała zupełnie nieliczącego się i niemającego żadnych szans na wybór. Wydawało się wówczas, że w grupie 24 kardynałów, pięciu jest absolutnymi figurantami i nie mają szans na wybór. Ku zdumieniu wszystkich zebranych, kardynał Fournier zdobył maksymalną liczbę głosów i został ogłoszony papieżem. On sam był tak zdumiony, że powiedział słynne słowa: „wybrałście osła”. Tak dokonano wyboru Benedykta XII.

Podobna historia zdarzyła się podczas konklawe 1431 roku. Dwóch najpoważniejszych kandydatów zabiegało o głosy kardynałów, którzy w pierwszej turze chytrze postanowili głosować na kogoś zupełnie bez szans. W tym przypadku 14 kardynałów już w pierwszym głosowaniu zgodnie i przypadkowo wybrało papieża – niewiele znaczącego kardynała z Sienny. W ten sposób wyłoniono Eugeniusza IV. W tej części rozdziału omówimy, jakie były szanse na zajście takiego zdarzenia, że kardynałowie niezależnie od siebie oddali głosy na kolegów absolutnie niespodziewających się wyboru, a nie na godnych *papabili*, bo tak określa się pewnych kandydatów, godnych pozycji papieża.

Użyjemy metody prostszej niż w pierwszej części rozdziału, zakładając dodatkowo, że nikt nie może głosować sam na siebie. Dodatkowo, jeżeli kilku kandydatów głosowało na tę samą osobę, to wyniki te będziemy uważali za różne, choć nie różnią się w ilości głosów oddanych na danego kandydata.

Wyobraźmy sobie zatem, że w konklawe uczestniczy n kardynałów. W tej grupie mamy k kardynałów zupełnie bez szans, określanych jako grupa „czarnych koni”. Kardynałowie głosują przypadkowo na jednego kandydata. Obliczymy prawdopodobieństwo, że któryś kardynał z grupy nieliczących na wybór otrzyma głosy wszystkich pozostałych.

Każdy spośród grupy k „czarnych koni” ma do wyboru $k - 1$ kandydatów. Natomiast każdy z pozostałych $n - k$ kandydatów może głosować na każdego z grupy k -osobowej. Zatem liczba sposobów na oddanie głosów na kogoś z grupy nieliczących się kardynałów, wynosi:

$$(k - 1)^k \cdot k^{n-k}$$

Spośród tych głosów, oddanych na grupę k osobową, policzmy na ile sposobów można zagłosować w ten sposób, aby wyłonić zwycięzcę największą liczbą głosów. Najpierw zauważmy, że największa liczba głosów, jaką można otrzymać wynosi $n - 1$ (nie można głosować na siebie). Maksymalną liczbę głosów może otrzymać każdy z k kardynałów. On sam jednocześnie głosuje na jednego z $k - 1$ kandydatów. Zatem liczba sposobów gwarantujących, że jeden z listy nieliczących się kardynałów dostanie maksymalną liczbę głosów wynosi:

$$k(k - 1)$$

Prawdopodobieństwo, że ktoś z grupy kardynałów bez poparcia otrzyma maksymalną liczbę głosów wynosi wobec tego:

$$\frac{k(k - 1)}{(k - 1)^k \cdot k^{n-k}} = \frac{1}{k^{n-k-1} \cdot (k - 1)^{k-1}}$$

Dla konklawe z 1334 roku mamy $n = 24$ oraz $k = 5$.

Wtedy opisane prawdopodobieństwo wynosi:

$$\frac{1}{5^{18} \cdot 4^4} = 1.02 \cdot 10^{-15}$$

W przypadku konklawe z 1431 roku mamy $n = 14$, $k = 12$ i prawdopodobieństwo wybrania czarnego konia maksymalną liczbą głosów wynosi:

$$\frac{1}{12 \cdot 11^{11}} = 2.92 \cdot 10^{-13}$$

Prawdopodobieństwa te są tak małe, że aż trudno uwierzyć, że historie te wydarzyły się naprawdę. Pozostaje zatem samemu rozstrzygnąć, czy wspomniane historie wyboru papieży są prawdziwe, czy może w wyborze pośredniczyła wówczas faktycznie jakaś nadprzyrodzona siła.

Na zakończenie dodajmy tylko, że wszystkie informacje dotyczące przebiegu konklawe pochodzą z wielotomowej *Historii papieży od końca średniowiecza* napisanej przez Ludwiga von Pastora (1854-1928). Pastor był pierwszym historykiem, który otrzymał od papieża pozwolenie na korzystanie z zasobów Tajnego Archiwum Watykańskiego.

*There is no dark side
of the moon really.
Matter
of fact it's all dark.*

R. Waters

TAJEMNE PRZEKAZY

W 1997 roku pojawił się na rynku księgarskim – *Kod Biblii*, autorstwa amerykańskiego dziennikarza Michaela Drosnina, który zainspirowany pracami izraelskiego matematyka Eliyahu Ripsa opisał ukryte w Biblii przepowiednie wojen, zamachów a także rozwój współczesnego świata.

Elijah Rips (1948-) jest matematykiem Uniwersytetu Hebrajskiego w Jerozolimie. Urodzony w Rydze był cudownym dzieckiem i geniuszem matematycznym. W wieku 20 lat w proteście przeciwko inwazji wojsk Układu Warszawskiego na Czechosłowację próbował dokonać samospalenia w swojej rodzinnej Rydze. Uratowany, przymusowo leczony psychiatrycznie, wyemigrował do Izraela w 1972 roku.

Rips odkrył kod w oryginalnej hebrajskiej wersji Starego Testamentu. Po wyeliminowaniu w tekście Pięcioksięgu wszystkich spacji otrzymał nieprzerwany ciąg liter. Następnie Rips napisał program komputerowy skanujący ów długi ciąg liter w poszukiwaniu nowych informacji poprzez odczytywanie słów złożonych z liter pojawiających się w jednakowych odstępach. W ten sposób powstawały wyrazy i zdania tajemnego przekazu.

W tym rozdziale dokonamy krótkiego eksperymentu.

Poniżej przytaczamy pierwszy rozdział Księgi Rodzaju dotyczący Stworzenia Świata.

Wybermy losowo jedno słowo z pierwszego zdania, powiedzmy słowo **ziemię**. Wyznaczamy liczbę liter w tym słowie (6) i, przeskakując 6 słów, docieramy do kolejnego słowa: **pustkowiem**. Następnie powtarzamy procedurę, tzn. liczymy litery w słowie (10) i przeskakujemy 10 słów, by otrzymać **unosil**. Tak postępując, wyznaczamy ciąg słów w tekście zaznaczonych pogrubioną czcionką.

Na początku Bóg stworzył niebo i **ziemię**. Ziemia zaś była bezładem i **pustkowiem**: ciemność była nad powierzchnią bezmiaru wód, a Duch Boży **unosil** się nad wodami. Wtedy Bóg **rzekł**: «Niechaj się stanie światłość!» **I stała** się światłość. Bóg widząc, **że** światłość **jest** dobra, oddzielił ją **od** ciemności. **I nazwał** Bóg światłość dniem, a ciemność **nazwał** nocą. I tak upłynął wieczór i **poranek** – dzień pierwszy. A potem Bóg **rzekł**: «**Niechaj**

powstanie sklepienie w środku wód i **niechaj** ono oddzieli jedno wody od drugich!» **Uczyniwszy** to sklepienie, Bóg oddzielił wody pod sklepieniem od wód **ponad** sklepieniem; a gdy tak **się** stało, Bóg **nazwał** to sklepienie niebem. I tak **upłynął** wieczór i poranek – dzień drugi. A **potem** Bóg rzekł: «Niechaj zbiorą **się** wody spod **nieba** w jedno miejsce i **niech** się ukaże powierzchnia sucha!» A **gdy** tak się **stało**, Bóg nazwał tę suchą **powierzchnię** ziemią, a zbiorowisko wód nazwał morzem. Bóg widząc, że były dobre, **rzekł**: «Niechaj ziemia wyda rośliny **zielone**: trawy dające nasiona, drzewa owocowe rodzące **na** ziemi **według** swego gatunku owoce, w których **są** nasiona». I **stało** się tak. Ziemia wydała **rośliny** zielone: trawę dającą nasienie według swego **gatunku** i drzewa rodzące owoce, w których **było** nasienie według ich **gatunków**. A Bóg widział, że były dobre. I **tak** upłynął wieczór i **poranek** – dzień trzeci.

A potem Bóg rzekł: «**Niechaj** powstaną ciała niebieskie, świecące na sklepieniu **nieba**, aby oddzielały dzień od **nocy**, aby wyznaczały pory **roku**, dni i lata; **aby** były ciałami **jaśniejącymi** na sklepieniu nieba, aby świeciły nad ziemią». I stało się tak. **Bóg** uczynił dwa **duże** ciała jaśniejące: większe, **aby** rządziło dniem, i **mniejsze**, aby rządziło nocą, oraz gwiazdy. I umieścił **je** Bóg **na** sklepieniu **nieba**, aby świeciły nad ziemią; **aby** rządziły dniem i **nocą** i oddzielały światłość **od** ciemności. A **widział** Bóg, że były dobre. I tak **upłynął** wieczór i poranek – dzień czwarty.

Potem **Bóg** rzekł: «Niechaj **się** zaroją wody **od** roju **istot** żywych, a ptactwo niechaj **lata** nad ziemią, pod **sklepieniem** nieba!» Tak stworzył Bóg wielkie potwory morskie i wszelkiego rodzaju **plywające** istoty żywe, którymi zaroily się wody, oraz wszelkie **ptactwo** skrzydlate różnego rodzaju. Bóg widząc, że **były** dobre, pobłogosławił je **tymi** słowami: «Bądźcie płodne i **mnóżcie** się, abyście zapełniały wody morskie, a **ptactwo** niechaj się rozmnaża na ziemi». I **tak** upłynął wieczór i **poranek** - dzień piąty. Potem Bóg rzekł: «Niechaj **ziemia** wyda istoty żywe różnego rodzaju: **bydło**, zwierzęta pełzające i dzikie **zwierzęta** według ich rodzajów!» I stało się tak. Bóg **uczynił** różne rodzaje dzikich zwierząt, bydła i **wszelkich** zwierząt pełzających po ziemi. I widział Bóg, że **były** dobre. A wreszcie **rzekł** Bóg: «Uczyńmy człowieka na **Nasz** obraz, podobnego Nam. **Niech** panuje nad rybami morskimi, **nad** ptactwem powietrznym, **nad** bydłem, nad **ziemią** i nad wszystkimi zwierzętami pełzającymi **po** ziemi!» **Stworzył** więc Bóg człowieka na swój obraz, na **obraz** Boży go stworzył: stworzył **mężczyznę** i niewiastę. Po czym Bóg im błogosławił, mówiąc **do** nich: «Bądźcie płodni i rozmnażajcie się, abyście zaludnili **ziemię** i uczynili ją sobie poddaną; **abyście** panowali nad rybami morskimi, nad ptactwem **powietrznym** i nad wszystkimi zwierzętami pełzającymi po ziemi». I rzekł jeszcze **Bóg**: «Oto wam **daję** wszelką roślinę przynoszącą **ziarno** po całej ziemi i wszelkie **drzewo**, którego owoc ma w sobie **nasienie**: dla was będą one pokarmem. A dla **wszelkiego** zwierzęcia polnego i dla wszelkiego ptactwa w powietrzu, i **dla** wszystkiego, co **się** porusza po **ziemi** i ma w sobie **pierwiastek** życia, będzie

pokarmem wszelka trawa zielona». I stało się tak. **A Bóg** widział, że **wszystko**, co uczynił, było bardzo dobre. I tak **upłynął** wieczór i poranek – dzień szósty. Tak otrzymaliśmy ciąg wyrazów, w którym kilkakrotnie pojawia się słowo **Bóg** oraz na przykład zdanie: **Bóg nad ziemią stworzył mężczyznę dla ziemi**.

Ostatnie zdanie może w zależności od intencji i siły wiary mieć przeróżne interpretacje.

Zauważmy obecnie, że gdybyśmy wybrali w pierwszym zdaniu zamiast słowa **ziemię** spójnik **i**, to wówczas ciąg wyrazów odpowiadający słowu kluczowemu **i**, zacząłby się pokrywać z poprzednio wyznaczonym ciągiem już przy słowie **ziemię** w tym samym zdaniu.

Wybierając jako kluczowe słowo **Bóg**, w pierwszym kroku już otrzymamy **i**, co powoduje, że ciąg wyrazów będzie wspólny od słowa **ziemię**. Słowo **na** w pierwszym kroku daje **Bóg** potem **i**, dalej ciąg jest taki sam. Ciąg wyrazów rozpoczynający się od **niebo** do wyrazu **nazwał** jest inny od pierwszego wybranego ciągu, potem ciągi już się pokrywają. Rozpoczynając wędrówkę od słowa **stworzył** już w drugim zdaniu, przy wyrazie **pustkowie**m, wpadamy w ciąg wyznaczony przez słowo **ziemię**. Słowo **początku**, też prowadzi nas do drugiego zdania i wyrazu **pustkowie**m.

Powyższe przykłady pozwalają na zastanowienie się, czy przypadkiem przy odpowiednio długim tekście, dwa różne słowa kluczowe nie generują ciągów, które od pewnego elementu się pokrywają. Dlatego bardziej od treści przekazu zainteresuje nas problem wyliczenia **prawdopodobieństwa** następującego zdarzenia: *dwa różne słowa kluczowe (początkowe) wyznaczają ciągi znaków, pokrywające się od pewnego miejsca*.

Spróbujmy wyobrazić sobie matematyczny model przekazu Księgi Rodzaju. Dysponujemy zbiorem n liczb naturalnych $T = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ niekoniecznie różnych. Każda z tych liczb odpowiada ilości liter w kolejnym słowie tekstu. W naszym przypadku dla pierwszego rozdziału Księgi Rodzaju mamy $n = 589$. Wybieramy losowo słowo s_i ; $i \geq 2$, i traktując je jako kluczowe, generujemy ciąg wyrazów S_i .

Następnie (dla uproszczenia) wybieramy słowo s_1 wyznaczające ciąg słów S_1 . Naszym zadaniem będzie obliczenie prawdopodobieństwa pokrycia się elementów tych ciągów na słowie ze zbioru T .

Niech s będzie średnią długością słowa w tekście: $s = \frac{\sum_{k=1}^n s_k}{n}$. W języku polskim średnia długość wyrazu wynosi 5,4 litery. W języku angielskim 4,2 litery.

Można wykazać, że dwa nieskończone ciągi o dowolnych słowach kluczowych i o takim samym średnim skoku spotkają się w pewnym elemencie z prawdopodobieństwem: $p = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia opisującego pokrycie się dwóch ciągów na słowie k-tym wynosi:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p = q^{k-1}p$$

Zmienna losowa X oznacza numer słowa, przy którym następuje pokrycie dwóch ciągów.

Z własności ciągów geometrycznych wynika natychmiast, że $P(X > k) = q^k$. Wobec powyższego, dla $k > r$ mamy:

$$P(X > k/X \geq r) = \frac{P(X > k \cap X \geq r)}{P(X \geq r)} = \frac{P(X > k)}{P(X \geq r)} = \frac{q^k}{q^{r-1}} = q^{k-r+1} = P(X > k - r + 1)$$

Obecnie przypominamy, że mamy do czynienia z dowolnym ciągiem wyrazów generowanym przez słowo kluczowe $s_i; i \geq 2$ oraz z ciągiem wybranym od początku ze słowem kluczowym s_1 .

Pokrycie się tych nieskończonych ciągów następuje z prawdopodobieństwem $1/s$, gdyż tylko jeden z nich ma dowolny punkt startowy.

Prawdopodobieństwo, że ciągi te spotkają się poza zbiorem T wynosi:

$$P(X > n/\text{wybrano ciągi o kluczach } s_i, i \geq 2; s_1) \cdot \left(1 - \frac{1}{s}\right) = P(X > n - 1) \cdot \left(1 - \frac{1}{s}\right) = q^{n-1} \left(1 - \frac{1}{s}\right)$$

Zatem prawdopodobieństwo, że ciągi wyrazów spotkają się wewnątrz zbioru T wynosi:

$$1 - \left(1 - \frac{1}{s}\right) \left(1 - \frac{1}{s^2}\right)^{n-1}$$

W naszym przypadku otrzymamy:

$$1 - \left(1 - \frac{1}{5.4}\right) \left(1 - \frac{1}{5.4^2}\right)^{588} = 0,99999999900000957581581335761551$$

Okazuje się zatem, że ciąg wyrazów generowany przez dowolny wyraz tekstu z pewnością pokryje się z ciągiem wyznaczonym przez pierwsze słowo tekstu.

Zatem odczytywanie z Biblii tajemnych przekazów metodą skoków słownych prowadzi do tych samych rezultatów bez względu na miejsce startu.

Rezultat ten został z powodzeniem wykorzystywany przez iluzjonistę Alexandra F. Krausa, do sztuczki z kartami, którą sam opisał w 1957 roku w czasopiśmie *Ibidem*.

Wybieramy z widowni ochotnika i prosimy go o dokładne potasowanie talii kart. Następnie prosimy go o rozłożenie wszystkich kart kolejno, tak by były widoczne ich wartości. Kolejno prosimy o sekretne wybranie którejś z początkowych kart. Zgodnie z jej wartością przesuwamy się w ciągu kart o tyle pozycji,

ile ona sama wskazuje. Docierając do kolejnej karty, postępujemy analogicznie. W ten sposób ochotnik wybiera następne karty w talii, aż do momentu gdy zabraknie kart do wykonania kolejnego skoku zgodnego z wartością karty. Karta ta jest ostatnią w jego ciągu i powinien ją zapamiętać. Iluzjonista zgodnie z procedurą „Kodu Biblii”, postępując analogicznie i rozpoczynając z pierwszą kartą jako słowem kluczowym, ma duże szanse na to, by dwa ciągi kart pokryły się. Obliczymy obecnie prawdopodobieństwo pokrycia się ciągów kart w zależności od wartości im przypisywanych.

- a – Gdy kartom przypisujemy wartości: As = 1, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, W = 11, D = 12, K = 13 to wówczas średnia długość skoku wynosi:

$$\frac{4(1+2+3+\dots+13)}{52} = 7, n = 52.$$

Zatem prawdopodobieństwo pokrycia się ciągów kart wynosi:

$$1 - \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{7^2}\right)^{51} = 0,7005.$$

- b – Gdy kartom przypisujemy wartości: As = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, W = 10, D = 10, K = 10 to wówczas średnia długość kroku wynosi

$$\frac{4(1+2+3+\dots+9+4+10)}{52} = \frac{85}{13}, n = 52.$$

Prawdopodobieństwo pokrycia się ciągów kart wynosi:

$$1 - \left(1 - \frac{13}{85}\right) \left(1 - \frac{13^2}{85^2}\right)^{51} = 0,7467.$$

- c – Gdy kartom przypisujemy wartości: As = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, W = 5, D = 5, K = 5, wówczas średnia wartość skoku wynosi 70/13 i prawdopodobieństwo pokrycia ciągów wynosi: 0.8641.

- d – Gdy kartom przypisujemy wartości: As = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, W = 1, D = 1, K = 1, wówczas średnia wartość skoku wynosi 58/13 i prawdopodobieństwo pokrycia ciągów wynosi: 0.9440.

- e – Gdy kartom przypisujemy wartości równe liczbie liter określających ich numery i figury, tzn.:

As (2), dwa (3), trzy (4), cztery (6), pięć (4), sześć (5), siedem (6), osiem (5), dziewięć (8), dziesięć (8), walet (5), dama (4), król (4) to wtedy średni krok wynosi 70/13 i prawdopodobieństwo pokrycia ciągów wynosi: 0.8641. Gdy kartom przyporządkowujemy wartości równe liczbie liter określających ich numery i figury w języku hiszpańskim, to wtedy średni krok wynosi 56/13 i prawdopodobieństwo pokrycia ciągów wynosi: 0.9544.

Gdy kartom przyporządkowujemy wartości równe liczbie liter określających ich numery i figury w języku angielskim, to wtedy średni krok wynosi 4 i prawdopodobieństwo pokrycia ciągów wynosi: 0.9721.

Jak widzimy powodzenie sztuczki zależy tylko od umiejętnego stopniowania napięcia przez iluzjonistę, gdyż np. liczenie wartości kart w języku angielskim gwarantuje zawsze pozytywny rezultat.

*Tired of lying in the sunshine staying home to watch the rain.
You are young and life is long and there is time to kill today.
And then one day you find ten years have got behind you.
No one told you when to run, you missed the starting gun.*

D. Gilmour, M. Mason, R. Waters, R. Wright

MATEMATYKA DZIECIŃSTWA I WYJĄTKOWYCH DNI

Lata młodości zapisują się na trwałe w naszej pamięci. Wówczas każda zima była rekordowo zimna, a miasta były zasypane śniegiem. Każde lato było gorące z wyjątkowymi temperaturami lipca i sierpnia. Wakacje spędzane z rodzicami. Nauka wędkowania i wysłuchiwanie tłumaczeń podczas wycieczek do lasu, które grzyby są jadalne, a których należy unikać. Wtedy prawie każda złowiona ryba była większa od poprzedniej, a kolejny prawdziwek bardziej okazały od poprzedniego. A dziewczyny, a chłopaki, przyjaciele, przyjaciółki... Wtedy wydawało się, że silniejszej przyjaźni już nie będzie.

Niedawno usłyszałem rozmowę dwóch dojrzałych, eleganckich pań, które wymieniały się swoimi spostrzeżeniami dotyczącymi atrakcyjności otaczających ich, na przestrzeni lat, mężczyzn. Wspólnie doszły do wniosku, że dawniej podczas obozów, kolonii, wycieczek, wyjazdów wakacyjnych czy wręcz pobytów na potańcówkach (tak kiedyś nazywano zabawy przy muzyce organizowane w publicznych lokalach – świetlice wiejskie, domy kultury, remizy itp.) za każdym prawie razem spotykały olśniewająco przystojnych chłopaków. Każde wyjście, czy wyjazd był okazją na spotkanie czarującego mężczyzny. Bardzo często okazywało się również, że właśnie poznany chłopiec przewyższał swą urodą i wdziękiem swych poprzedników.

Natomiast obecnie, gdy liczba okazji na zawarcie nowych znajomości wcale się tak radykalnie nie zmniejszyła, coraz trudniej jest poznać przystojnego mężczyznę, który oczarowałby swym urokiem i przewyższał swych poprzedników.

Przysłuchiwałem się tej rozmowie na tyle niezręcznie, że moja obecność została zauważona. Wówczas, mobilizując wszystkie siły i zmysły, starałem się zatuszować swoje zmieszanie, jednocześnie próbując z wdziękiem się uśmiechać. Panie, wzruszając ramionami, wymieniły porozumiewawcze spojrzenia, które jednoznacznie wskazywały, że jest nawet gorzej niż się spodziewały. Swym wyglądem nie tylko potwierdzałem regułę, ale równocześnie zdałem sobie sprawę, że w rankingu atrakcyjności, gdyby odwrócić tabelę – byłbym na czele.

Czy faktycznie panie mają rację i czy rzeczywiście dawniej zimy były bardziej srogie a lata gorętsze? Czy w młodości łowione ryby były częściej rekordowe niż obecnie? Czy przyjaźnie były silniejsze, a znajomości bardziej atrakcyjne?

W tym rozdziale spróbujemy odpowiedzieć na te pytania.

Na początku skonstruujemy model zagadnienia i analitycznie zastanowimy się nad problemem. Zakładamy zatem co następuje:

Każdy przedmiot naszej oceny ma swoją wartość w pewnej mierze. Może być to długość (w przypadku ryb), średnie temperatury w styczniu, lutym (srogie zimy), średnie temperatury lipca i sierpnia (upalne lata), ciężar (grzyby), atrakcyjność mężczyzny.

Dysponujemy zatem n -elementowym ciągiem (wartości ocen) liczb rzeczywistych: $x_1, x_2, \dots, x_n$. **Mówimy, że wartość x_k jest rekordowa (x_k jest rekordem) jeżeli x_k jest większy od wszystkich liczb go poprzedzających tzn $x_k > \max \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$ dla $k \geq 2$.**

Dla ułatwienia postępowania zakładamy, że $x_i \neq x_j$, dla $i \neq j$.

Opiszemy kilka własności rekordowych wartości w ciągu. Następnie zaś dokonamy interpretacji tych rezultatów z punktu widzenia wrażeń z młodości i lat minionych.

Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia, że w ciągu $x_1, x_2, \dots, x_n$, liczba x_n jest rekordowa. Otóż n liczb może być ustawione w ciąg na $n!$ możliwości. Aby x_n była rekordowa, na ostatnim miejscu w ciągu ustawiamy największą z tych n liczb, a pozostałe $n-1$ liczb mogą w dowolny sposób być permutowane. Zatem p_n – prawdopodobieństwo zdarzenia, że liczba stojąca na n -tej pozycji jest rekordowa – wynosi:

$$p_n = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Wyznamy obecnie średnia liczbę rekordowych wartości w ciągu o długości n . Niech zmienna losowa:

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x_k \text{ jest rekordowa} \\ 0, & \text{gdy } x_k \text{ nie jest rekordowa} \end{cases}$$

wówczas:

$$E(X_k) = 1 \cdot p_k + 0 \cdot (1 - p_k) = p_k$$

Zatem liczba rekordowych wartości w ciągu o długości n – wynosi: $X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Natomiast średnią liczbę rekordowych wartości w ciągu o długości n wyliczamy jako:

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = H_n$$

W tabeli poniżej podajemy zaokrąglone w dół, do liczby całkowitej, średnie liczby rekordowych wartości dla ciągów o długości n .

n	1	4	11	31	83
SR_n	1	2	3	4	5

Zauważmy zatem, że na przykład dla ciągów o długościach od 11 do 31, średnia liczba rekordów waha się pomiędzy 3 a 4, dla ciągów o długościach pomiędzy 4 a 10 średnia liczba rekordów jest mniejsza od 3. Jak łatwo zauważyć liczba rekordów w ciągu rośnie bardzo wolno.

Zatem wśród pierwszych zanotowanych miar łatwiej o rekordowe wartości. Gdy ciąg miar robi się dłuższy, coraz trudniej jest natknąć się na rekordy, czyli wśród lat i zim, które pamiętamy z młodości na pewno łatwiej było o rekordy niż teraz, rozpatrując ciąg kilkunastu lub nawet kilkudziesięciu pór roku. Podobnie wśród pierwszych kilku przyjaciół czy sympatii łatwo było trafić na tych najwspanialszych i najpiękniejszych. Obecnie, gdy dysponujemy długim ciągiem wartości ocen naszych przyjaciół i atrakcyjności naszych sympatii, coraz rzadziej i trudniej spotykamy osobę o największej ocenie. Nie robimy się wcale bardziej wybredni ani nie bardziej tolerancyjni, tylko rekordowe wartości pojawiają się rzadziej wraz ze wzrostem ciągu doświadczeń i doznań.

Piszącemu ten tekst głęboko zapadł w pamięci dzień 14 XI 2008 roku. Wtedy postanowił zmienić swoje życie. I wcale nie dlatego, że obudził się nagle o godz. 1:11, co jest powodem (jak twierdzą matematycy) podjęcia radykalnych zmian w swoim systemie wartości. Niech przyczyna tego kroku pozostanie niewyjawiona.

Pamiętam, że tego dnia padał lekki deszczyk i pomimo jesiennej słoty było bardzo ciepło. Zabawimy się – ile średnio lat musi upłynąć, aby 14 XI spadło więcej deszczu niż pamiętnego (dla mnie) 2008 roku. Do dzisiaj (2013), każdego roku tego dnia troszkę padało, ale opady były zdecydowanie mniejsze niż w 2008 roku.

Oznaczmy zatem przez x_0 ilość deszczu, która spadła w okolicach Łodzi 14 XI 2008 roku. Przez x_n oznaczmy ilość deszczu, która spadła (spadnie) w okolicach Łodzi 14 XI po upływie n lat od 2008 roku. Niech N oznacza najmniejszą liczbę lat, która upłynie od 14 XI 2008, by ilość deszczu x_N była większa od x_0 . Zakładamy, że zdarzenia są niezależne, podlegają takiemu samemu rozkładowi oraz, że $x_i \neq x_k$ o ile $i \neq k$. W związku z tym, że N jest najmniejszą wartością, dla której $x_N > x_0$ mamy dzięki symetrii:

$$\begin{aligned} p(N > n) &= p(x_0 > x_1, x_0 > x_2, x_0 > x_3, \dots, x_0 > x_n) = \\ &= p(\max(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = x_0) = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

zatem:

$$p(N = n) = p(N > n - 1) - p(N > n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1} = \frac{1}{n(n + 1)}$$

Mając $p(N = n)$, możemy obliczyć ile średnio lat będziemy czekać w województwie łódzkim, na opady większe niż sławetnego 2008 roku.

$$E(N) = \sum_{n=1}^{\infty} np(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(n + 1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 1} = \infty!$$

To rzeczywiście był wyjątkowy dzień!

Wyścig Pokoju

Wiosny mojego dzieciństwa upływały sennie do maja, kiedy to wszyscy koledzy zaczynali się szykować do Wyścigu Pokoju. Zbieraliśmy kapsle, by starannie wypełniać je koszulkami, czyli kolorowymi papierkami w barwach flag państw uczestników Wyścigu. Każda koszulka miała również nazwisko i numer rzeczywistego kolarza biorącego udział w imprezie. Zazwyczaj każdy z nas miał po kilka reprezentacji 7-kapslowych odpowiadających prawdziwym uczestnikom Wyścigu. Zdobycie gazety ze składem wyścigu graniczyło z cudem. Numer *Przeglądu Sportowego* zawierający dane kolarzy był najcenniejszym fantem podczas szkolnych giełd. Osobiście musiałem za niego dać dwa unikatowe kapsle o 22 ząbkach. (Każdy kapsel ma 21 ząbków przywierających do butelki. Odpowiednie odginanie ząbków podczas zdejmowania pozwala na zachowanie oryginalnie płaskiej części wierzchniej kapsla). Kapsel 22 ząbkowy, tak jak i odpowiednio „kancerowany” znaczek jest gratką dla kolekcjonera.

Używając kapsli, graliśmy w nasz podwórkowy Wyścig Pokoju, wytaczając butami na ziemi trasy i pstrykając co sił w palcach, by pierwszym wpaść na stadion w piaskownicy.

Kilkakrotnie etap Wyścigu Pokoju kończył się w Łodzi. Kolarze przejeżdżali ulicą Strykowską, gdzie mieszkała moja ciocia. Pamiętam, że nigdy nie lubiłem do niej chodzić ze względu na dziwny zapach mieszkania. Natomiast tej wiosny uprosiłem babcię, byśmy zaraz po obiedzie, w krótkich kolarskich spodenkach i czapce z daszkiem zsuniętym do tyłu, wybrali się do cioci, by czatować na jej balkonie na kolarzy. Wierzyłem, że będzie to niezapomniane przeżycie – patrzeć na kolejne grupki przemykających kolorowych kolarzy, każdy z numerem na plecach. Ten rok, o którym piszę był szczególny. Nie miałem listy startujących w Wyścigu kolarzy! Naiwnie wierzyłem, że, stojąc na balkonie razem z babcią i ciocią, policzymy szybkoitko przejeżdżających zawodników.

I tu już wkracza matematyka, albowiem pojawia się problem, który postaram się rozwiązać w tym rozdziale. Czy na podstawie numerów kolarzy w poszczególnej grupie peletonu można oszacować liczbę osób biorących udział w wyścigu.

Podobnie, czy na podstawie obserwacji numerów biegaczy w pewnej grupie maratonu można oszacować liczbę zawodników biorących udział w imprezie.

Okazuje się również, że problem ten ma poważniejszą genezę.

W czasie drugiej wojny światowej alianci próbowali różnymi sposobami ustalić liczbę czołgów, którymi dysponuje armia niemiecka. Dane wywiadu, przesłuchiwanie jeńców, nasłuchy przekazów armii niemieckiej wzajemnie sobie przeczyły i zdawały się być mocno zawyżone. Gdy dokonano precyzyjnego przeglądu kilku unieruchomionych na polach bitewnych czołgów niemieckich, odkryto, że każdy z nich ma wybity unikatowy numer seryjny skrzyni biegów. Numer seryjny pozwalał na znalezienie numeru porządkowego czołgu w procesie produkcji. Dysponując pewną partią przechwyconych czołgów, próbowano oszacować wielkość całkowitej produkcji. Stosując metodę, którą opiszę niebawem, obliczono, że miesięczna produkcja czołgów w III Rzeszy wynosiła 246. Po wojnie, ujawniono, że rzeczywista produkcja miesięczna wynosiła 245 czołgów. Szacowania były doskonałe!!

Warto jeszcze na zakończenie dodać, że metody obliczeniowe były oparte na założeniu, że żaden czołg nie jest wyróżniony i, że numery seryjne reprezentują próbkę losową spośród wszystkich czołgów z produkcji. Założenia te były możliwe na podstawie działania tzw. uogólnionej zasady kopernikańskiej, opracowanej w XV wieku przez Mikołaja Kopernika!

Przystąpmy zatem do wyliczeń.

Załóżmy, że pobieramy losową próbkę $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ zawierającą n elementów pochodzących ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, N\}$. Spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, w jaki sposób możemy szacować N , na podstawie analizy próbki $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$.

Oznaczmy najpierw przez $Y = \max_{i=1,2,\dots,n} x_i$. Obliczymy $p(Y = k)$, prawdopodobieństwo, że maksymalna wartość próbki n -elementowej wynosi k . (Oczywiście $k = n, n + 1, n + 2, \dots, N$)

$$p(Y = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$

gdyż na $\binom{N}{n}$ sposobów możemy wybrać próbkę n elementową ze zbioru liczącego N elementów oraz $\binom{k-1}{n-1}$ oznacza liczbę sposobów wyboru $k - 1$

elementów ze zbioru $n - 1$ elementowego, co gwarantuje, że maksymalnym elementem w próbce $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ będzie pewien $x_p = k$.

Zatem:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=n}^N k p(Y = k) = \sum_{k=n}^N k \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \\ &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^N \frac{k(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} = \frac{n}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^N \frac{k!}{n!(k-n)!} = \frac{n}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^N \binom{k}{n} \end{aligned}$$

Wiadomo, że $\binom{k+1}{n+1} = \binom{k}{n} + \binom{k}{n+1}$. Możemy to wykazać, używając prostego kombinatorycznego argumentu.

Mamy k kul czarnych i jedną białą. Spośród tych kul losujemy $n + 1$ kul. Możemy to zrobić na $\binom{k+1}{n+1}$ sposobów. Z drugiej strony, wszystkie wybory możemy podzielić na dwie rozdzielne grupy. W jednej umieścimy te, które zawierają kulę białą. Jest tych możliwości $\binom{k}{n}$ – odkładamy białą kulę i z pozostałych losujemy n kul. W drugiej grupie umieszczamy te wybory, które nie zawierają białej kuli. Usuwamy białą i z pozostałych losujemy $n + 1$ kul – $\binom{k}{n+1}$. Wobec tego mamy:

$$\binom{k}{n} = \binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1}$$

Wykorzystując ostatnią równość, dostajemy:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^N \binom{k}{n} &= \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{N}{n} = \\ &= \binom{n}{n} + \binom{n+2}{n+1} - \binom{n+1}{n+1} + \binom{n+3}{n+1} - \binom{n+2}{n+1} + \dots + \binom{N+1}{n+1} - \binom{N}{n+1} = \\ &= \binom{N+1}{n+1} \end{aligned}$$

zatem:

$$E(Y) = \frac{n \binom{N+1}{n+1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n(N+1)}{n+1}$$

Przekształcając ostatnie równanie, dostaniemy:

$$N = \frac{(n+1)E(Y)}{n} - 1$$

W konkretnym przypadku, jeżeli założymy, że $E(Y)$ jest w przybliżeniu równa maksimum z próbki, czyli że $E(Y) \approx Y$, możemy na podstawie analizy próbki n -elementowej szacować liczebność populacji N jako:

$$N \approx \frac{n+1}{n} Y - 1$$

Gdy wreszcie dotarliśmy z babcią do mieszkania cioci, okazało się oczywiście, że peleton w Wyścigu Pokoju już kilka minut temu przejechał naszą ulicą i jedyną pociechą była grupka 10 maruderów wytrwale goniących peleton. Kolarzem o największym numerze – 103 – był Holender. Na podstawie tych danych można oszacować całkowitą liczbę uczestników Wyścigu jako:

$$N \approx \frac{11}{10} \cdot 103 - 1 = 112,3$$

Wówczas w Wyścigu brało udział 116 zawodników. Szacowanie na podstawie próby maruderów było wręcz znakomite.

*The lunatic is on the grass.
The lunatic is on the grass.
Remembering games and daisy chains and laughs.
Got to keep the loonies on the path.*

R. Waters

SPRAWY CODZIENNE

1. Męskie koszmary

Koszmarnym snem każdego dorosłego mężczyzny jest wyobrażenie sobie powrotu do domu nocą po spotkaniu z kolegami.

Wieczór upływał w znakomitym nastroju, zabawa była przednia, sypano żartami, opowiadano sobie anegdoty z życia małżeńskiego. Panowie razem czuli się silni, odważni, pewni siebie i wyśmiewali się z tych, którzy po telefonie od zaniepokojonej żony pośpiesznie się zegnali i bez ceremonii „strzeмиennego” – pożegnającego toastu łapali taksówkę, by wrócić do domu.

Otóż wyobraźmy sobie, że jesteśmy tym ostatnim Mohikaninem, który pożegnał wszystkich kolegów i bladym świtem cicho szpera po kieszeniach w poszukiwaniu klucza, by bezszelestnie wślizgnąć się do mieszkania. Oczywiście, robi przy tym mnóstwo niepotrzebnych, hałaśliwych ruchów i gdy wreszcie zadowolony zapala światło w dużym pokoju, ku jego zdumieniu dostrzega centralnie, w ostrym świetle lampy, groźną postać małżonki, przy której w jednej chwili czuje się jak niewinny chrześcijanin na arenie Koloseum rzucony ku ucieście gawiedzi na pożarcie wygłodniałego lwa. Jak możemy uciec, jaką strategię obrać, by nie zostać dopadniętym, by ujść cało.

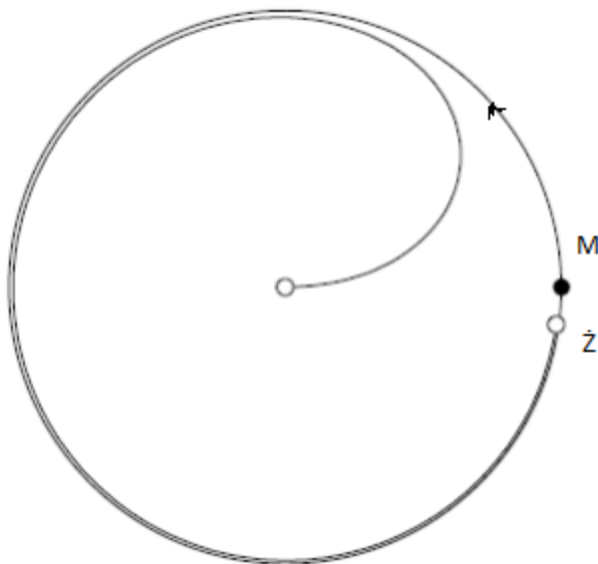
Zagadnienie to po raz pierwszy sformułował niemiecki matematyk **Richard Rado (1906-1989)**. Wprowadzając różne założenia początkowe, podał dwa rozwiązania, zupełnie rozbieżne w swoich konkluzjach. Jedno z nich, pozwalające ściganemu na wieczną ucieczkę, drugie zaś kończące się źle dla ściganego.

Otóż założmy, że pokój jest kołem o promieniu 1 (żeby trzymać się analogii z Koloseum) i jest pozbawiony mebli. Maksymalna prędkości męża i żony są takie same. W chwili początkowej mąż znajduje się na obwodzie koła. Osoby te uznajemy za punkty materialne i oznaczamy je przez M oraz Z. M ucieka, zaś Z goni M.

Strategia 1

Mężczyzna ucieka z maksymalną prędkością wzdłuż obwodu pokoju, natomiast żona biegnie cały czas, również z maksymalną prędkością, w jego kierunku, wyznaczając tzw. krzywą pościgu. Od pewnej chwili obie osoby będą poruszać się wzdłuż obwodu, w ten sposób, że M będzie zawsze w pewnej odległości od ścigającego go Z.

Wniosek: M zdoła zbiec.



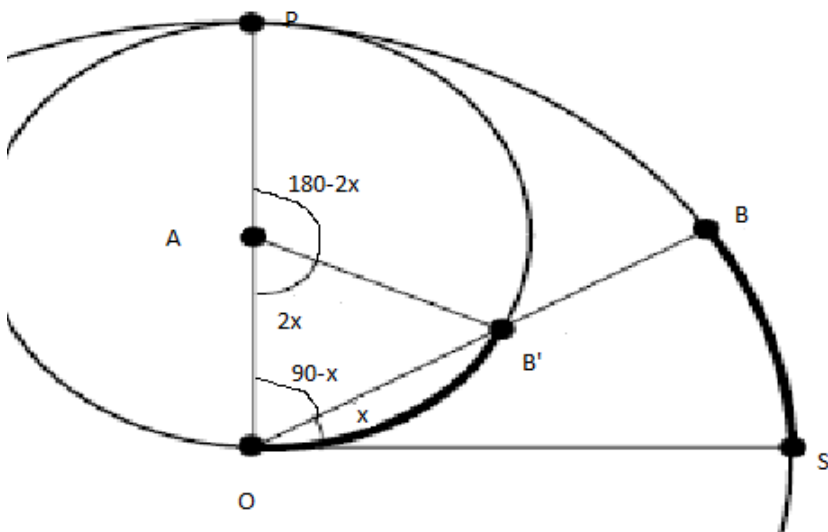
Strategia 2

M ucieka z maksymalną prędkością wzdłuż obwodu. Startuje w punkcie S i biegnie w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Z znajduje się w chwili początkowej w środku pokoju O. Tym razem Z wybiera inną strategię niż poprzednia. Otóż nie biegnie w kierunku M tylko zmierza wzdłuż łuku okręgu o promieniu $|OA| = 1/2$, również w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

$\overline{OA}$ jest prostopadłe do $\overline{OS}$.

Zauważmy, że dla dowolnego kierunku wyznaczonego przez punkt B na dużym okręgu mamy:

długość łuku OB' jest taka sama jak długość łuku SB.



Rzeczywiście: oznaczając miarę kąta BOS przez x , mamy, że miara kąta POB wynosi $\frac{\pi}{2} - x$, oraz, że miara kąta PAB' jest równa $\pi - 2x$, (kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt wpisany POB'). Zatem miara kąta OAB' jest równa $2x$. Długość łuku SB dużego okręgu wynosi x (przypominamy, że promień okręgu jest równy 1), natomiast długość łuku OB' małego okręgu wynosi $2x \cdot \frac{1}{2} = x$. Jako że maksymalne prędkości M oraz Z są takie same, w chwili gdy M znajdzie się w punkcie P, dopadnie go Z.

Strategia 3

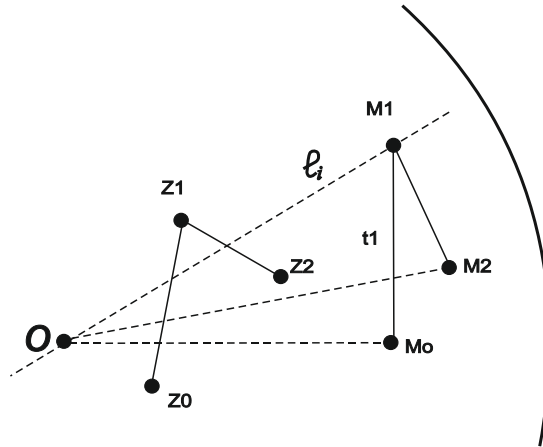
Tym razem założmy, że w chwili początkowej M znajduje się wewnątrz koła w punkcie M_0 , a początkową pozycję Z nazwijmy $Z_0 \neq M_0$. Oznaczmy również odległość $|OM_0| = r_0 < 1$. Załóżmy, że w czasie t_1 mężczyzna (biegnie do miejsca M_1) w kierunku prostopadłym do prostej OM_0 tak, by punkty Z_0, M_1 pozostały w różnych półpłaszczyznach wyznaczonych przez prostą OM_0 . Gdy Z_0 znajduje się na odcinku OM_0 , kierunek ucieczki jest prostopadły a zwrot jest dowolny. Dla ułatwienia (bez straty ogólności), możemy założyć, że maksymalne prędkości, zarówno M jak i Z, są równe 1. Zatem odległość pomiędzy M_0 i M_1 wynosi t_1 . Zatem po czasie t_1 mężczyzna znajduje się w pozycji M_1 , takiej, że $|OM_1|^2 = r_0^2 + t_1^2$.

Oczywiście, w tym czasie Z porusza się również z maksymalną prędkością 1, aż do osiągnięcia pozycji Z_1 . Jasne, że $Z_1 \neq M_1$, gdyż trójkąt $Z_0M_0M_1$ jest rozwartokątny lub prostokątny.

Następnie w czasie t_2 mężczyzna biegnie do miejsca M_2 w kierunku prostopadłym do prostej OM_1 tak, by punkty Z_1, M_2 pozostały w różnych półpłaszczyznach wyznaczonych przez prostą OM_1 . Gdy Z_1 znajduje się na odcinku OM_1 , kierunek ucieczki jest prostopadły, a zwrot jest dowolny.

Odległość pomiędzy M_2 i M_1 wynosi t_2 . Zatem po czasie t_2 mężczyzna znajduje się w pozycji M_2 , takiej że:

$|OM_2|^2 = |OM_1|^2 + t_2^2 = r_0^2 + t_1^2 + t_2^2$. Oczywiście, w tym czasie Z porusza się również z maksymalną prędkością 1, aż do osiągnięcia pozycji Z_2 . Jasne, że $Z_2 \neq M_2$, gdyż trójkąt $Z_1M_1M_2$ jest rozwartokątny lub prostokątny.



Następnie w czasie t_k mężczyzna biegnie do miejsca M_k w kierunku prostopadłym do prostej OM_{k-1} tak, by punkty Z_{k-1}, M_k pozostały w różnych pół-płaszczyznach wyznaczonych przez prostą OM_{k-1} . Gdy Z_{k-1} znajduje się na odcinku OM_{k-1} , kierunek ucieczki jest prostopadły, a zwrot jest dowolny. Odległość pomiędzy M_k i M_{k-1} wynosi t_k . Zatem po czasie t_k mężczyzna znajduje się w pozycji M_k , takiej że:

$|OM_k|^2 = |OM_{k-1}|^2 + t_k^2 = r_0^2 + t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \dots + t_{k-1}^2 + t_k^2$. Oczywiście, w tym czasie Z porusza się również z maksymalną prędkością 1, aż do osiągnięcia pozycji Z_k . Jasne, że $Z_k \neq M_k$, gdyż trójkąt $Z_{k-1}M_{k-1}M_k$ jest rozwartokątny lub prostokątny.

Ostatecznie uda nam się udowodnić, że tak kluczący mężczyzna będzie w stanie ubiec ścigającej go osobie, jeśli tylko jego pozycja będzie zawsze znajdować się wewnątrz pokoju. Czyli dla każdego n powinno zachodzić: $|OM_n|^2 = r_0^2 + t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \dots + t_n^2 < 1$ dla dodatnich liczb $r_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ takich, że $r_0, t_1, t_2, \dots, t_n < 1$.

Zatem musimy tak dobrać wartości t_k , aby $\sum_{k=1}^{\infty} t_k^2 < 1 - r_0^2$.

Wiadomo, że szereg harmoniczny $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ jest rozbieżny, natomiast szereg

harmoniczny rzędu drugiego jest zbieżny i $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Zatem dla odpowiednio dobranej dużej wartości $p \in \mathbb{N}$ możemy na przykład wziąć:

$t_k = \frac{1}{k+p}$. Oczywiście $t_k \rightarrow 0$ i $0 < t_k < 1$.

Wówczas mamy: $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} t_k^2 = \frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \dots - \frac{1}{p^2} < 1 - r_0^2$.

Zatem strategia umykania, kluczenia i ciągłej zmiany kierunków ucieczki wyznacza nieskończoną długą trasę pościgu, w trakcie którego mężczyzna zawsze będzie przed kobietą.

Z drugiej zaś strony, taktyka wiecznego zmieniania frontu, umykania przed podejmowaniem trudnych decyzji, sprowadza życie każdego z nas do ucieczki przed odpowiedzialnością. Niby wolni, swobodni, a jednak w napięciu i jak pokazuje szereg harmoniczny, zmiany kierunku muszą w miarę upływu czasu następować coraz szybciej i coraz częściej musimy zmieniać fronty, zdanie, poglądy, by zachować swoją – czy aż tak cenną w takim przypadku – swobodę. Być wolnym i jednocześnie bez własnego zdania i poglądu to żadna sztuka.

2. Koleżeńska pomoc

Problem ten dedykujemy tym wszystkim, którzy twierdzą, że nie mają szczęścia w konkursach i losowaniach.

Od dobrego kolegi, bywalca miejsc, w których on – skromny pracownik ekipy sprzątającej w nocy przystanki tramwajowe – jest traktowany jak przybysz niosący blichtr i zapach salonów eleganckiego świata, usłyszałem wzruszającą historię. Otóż w barze o wdzięcznej nazwie PUB, czy też pubie o nazwie BAR, który mieści się w okolicach rynku miejskiego, w dni targowe – czyli wtorki i piątki, spotykała się zawsze grupa znajomych. Byli to panowie znużeni całodziennym handlem nowalijkami i ziemniakami. Umorusani, raczyli się piwem lub kieliszkiem czegoś mocniejszego, zawsze solidarnie, stojąc wkoło – licząc głośno kolejne wypite porcje. Następnie, gdy przychodził czas na płacenie, odbywało się misterium wyłaniania osoby, która tym razem będzie zwolniona z dorzucania się do puli. Otóż ustawiali się wkoło i odliczali poczynając od tego, który stał najbliżej baru do liczby kolejek, które wypili. Następnie ta osoba wypadła z kręgu i szykowała się do płacenia, a odliczanie zaczynało się od nowa, eliminując kolejne osoby, które pokornie płaciły. Ostatecznie wyłaniano jedną osobę pominiętą przy wszystkich wyliczankach. To on był zwolniony tym razem z płacenia za wypite drinki.

Mój kolega zauważył, że ten sam woźnica dwukrotnie został zwolniony z płacenia. Za pierwszym razem kompania liczyła 8 osób, następnie 11 osób. Wypito tylko dwie kolejki. Woźnica ustawiał się w pierwszym przypadku jako pierwszy do liczenia, a w drugim na siódmej pozycji.

Rzeczywiście było to intrygujące pytanie, zwłaszcza, że po kilku dniach mój przyjaciel po wizycie w Barze oświadczył, że nasz rezolutny woźnica znowu nie płacił, ustawiając się jako trzeci w grupie dziewięciu osób przy jak zwykle dwóch kolejkach wypitych.

Postanowiłem sprawdzić, jakie pozycje są wygrywające dla grup n osobowych. Powstała następująca tabelka: w pierwszym wierszu mamy liczbę osób, w drugim odpowiednie wygrywające pozycje dla dwóch drinków.

Liczba osób	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Wygrywana pozycja	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3	5	7	9

Ośmielony tymi wynikami, próbowałem dokonać bardziej ogólnych spostrzeżeń. Załóżmy na początku, że liczba osób jest parzysta. Zatem $n = 2k$. W trakcie pierwszej rundy eliminujemy wszystkie osoby o numerach parzystych. Pozostaje krąg k osób i możemy założyć, że znów rozpoczynamy odliczanie od osoby z numerem 1. Osoby te oznaczone są numerami 1, 3, 5, ..., $2k - 1$. Osoba stojąca w nowym kółku po pierwszym odliczaniu na pozycji p , oryginalnie stała na pozycji $2p - 1$. Zatem osoba stojąca na pozycji wygrywającej w , dla kręgu n osób, w kole składającym się z $2n$ osób stała na pozycji $2w - 1$. Zatem $W(2n) = 2W(n) - 1$, gdzie $W(n)$ oznacza pozycję wygrywającą dla kręgu n osób.

Obecnie zobaczmy, co się dzieje w przypadku, gdy n jest nieparzyste ($n = 2k + 1$). Pierwsza runda eliminuje wszystkie osoby o numerach parzystych. Ostatnia wyrzucona osoba to typ z numerem $2k$. Druga runda zostaje rozpoczęta przez wyrzucenie osoby z numerem 1. W tej chwili możemy powiedzieć, że zaczynamy odliczanie dla kręgu k osób o numerach 3, 5, 7, ..., $2k + 1$. Osoba stojąca na pierwszej pozycji w nowym kole była trzecią w oryginalnym, osoba druga była piątą. Osoba na miejscu. Zatem w szczególności:

$$W(2n + 1) = 2W(n) + 1.$$

W tej chwili zaryzykujemy następujące twierdzenie:

$$W(2^a + t) = 2t + 1, \quad 0 \leq t \leq 2^a$$

Jak wiemy, z tabeli powyżej:

dla $a = 1$, gdy $t = 0$, mamy $W(2) = 1 = 2 \cdot 0 + 1$,

gdy zaś $t = 1$, zachodzi $W(3) = 3 = 2 \cdot 1 + 1$.

Założmy, że wzór jest prawdziwy dla pewnego $a - 1$ i wszystkich odpowiadających jej wartości t .

Gdy n jest parzyste, to wówczas:

$$n = 2^a + t = 2k \Rightarrow W(2^a + t) = 2W(2^{a-1} + \frac{t}{2}) - 1 = 2\left(2\frac{t}{2} + 1\right) - 1 = 2t + 1$$

Gdy n jest nieparzyste, mamy:

$$\begin{aligned} n = 2^a + t = 2k + 1 &\Rightarrow W(2^a + t) = 2W(2^{a-1} + \frac{t-1}{2}) + 1 = \\ &= 2\left(2\frac{t-1}{2} + 1\right) + 1 = 2t + 1 \end{aligned}$$

Zatem na mocy indukcji matematycznej wykazaliśmy, że:

$$W(2^a + t) = 2t + 1, \quad 0 \leq t \leq 2^a$$

Na przykład:

$$100 = 64 + 36 \text{ czyli } W(100) = 2 \cdot 36 + 1 = 73$$

$$20 = 16 + 4 \text{ czyli } W(20) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$$

Obecnie zastanowimy się nad bardziej złożonym, a z punktu widzenia kolegów z baru PUB, bardziej atrakcyjnym zagadnieniem. Mianowicie chcielibyśmy znaleźć pozycję wygrywającą przy liczbie wypitych drinków większej niż 2. Oznaczmy dla przyszłych potrzeb przez $W(n, q)$ pozycję wygrywającą dla kompanii n kolegów i przy q wypitych drinkach.

Wykażemy, że $W(n + 1, q) = [W(n, q) + q] \bmod (n + 1)$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$, $q = 1, 2, 3, \dots$

Faktycznie, weźmy pod uwagę krąg złożony z $n + 1$ osób i w każdej rundzie usuwamy co q -tą osobę. W trakcie pierwszej rundy usuwamy osobę na pozycji $q \bmod (n + 1)$ i wówczas rozpoczynamy poszukiwanie $W(n, q)$, ale z pozycji o q dalszej w modulo $(n + 1)$.

Zatem: $W(n + 1, q) = [W(n, q) + q] \bmod (n + 1)$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$, $q = 1, 2, 3, \dots$

Obserwacja i bezpośrednie obliczenie pozwala na skonstruowanie następującej tabeli:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
W(n,3)	1	2	2	1	4	1	4	7	1	4	7	10	13	2	5	8	11	14	17	20	2

Dla potrzeb zadania umawiamy się, że $n \bmod n = n$

Dalej mamy:

$$W(22, 3) = [W(21, 3) + 3] \bmod 22 = 5$$

$$W(23, 3) = [W(22, 3) + 3] \bmod 23 = 8$$

Kolejne wartości wynoszą:

n	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
W(n,3)	11	14	17	20	23	26	29	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31

Tym samym (aby nie być posądzonym o zachęcanie do nadmiernego spożywania napojów alkoholizowanych) poprzestaniemy z jednej strony na dosyć dużej grupie osób (41) i tylko trzech kolejkach drinków. W tej sytuacji ustawiamy się na 31 pozycji i zaoszczędzamy pieniądze na kwiaty dla dziewczyny, by nie stać się opisanym wcześniej obiektem pościgu.

Z poszukiwaniem W(41,3) wiąże się legenda sięgająca swą historią aż do I wieku naszej ery. Oto ona:

Żydowski historyk Józef Flawiusz urodził się w Jerozolimie w 37 roku n.e. Brał udział w powstaniu Żydów przeciw Rzymianom. Wzięty do niewoli, po dwóch latach ułaskawiony, poświęcił się pisarstwu. Jego najważniejszym dziełem była *Wojna żydowska*, napisana po grecku, gdyż był to wówczas międzynarodowy język dzieł uczonych. Był również twórcą Dekalogu, spisując relacje Mojżesza. W *Dawnych dziejach Izraela*, jego autorstwa, znajduje się sławny ustęp:

„Pierwsze słowo poucza nas, że Bóg jest jeden i że tylko Jemu należy oddawać cześć. Drugie zabrania nam czynić wizerunków jakichkolwiek żywych stworzeń dla oddawania im czci. Trzecie nakazuje, byśmy nigdy nie przysięgali na Boga w błahej sprawie, czwarte – byśmy święcili każdy siódmy dzień powstrzymując się od wszelkiej pracy, piąte – byśmy szanowali rodziców, szóste zabrania nam morderstwa, siódme – cudzołóstwa, ósme – kradzieży, dziewiąte – dawania fałszywego świadectwa, a dziesiąte nakazuje, byśmy nie pożądali żadnej rzeczy, która należy do innego człowieka”

W IV wieku grecki tłumacz Hegesippos przetłumaczył *Wojnę Żydowską* Flawiusza na łacinę i wzbogacił ją o biografię autora. Wspomina tam o krwawym epizodzie z tej wojny.

Flawiusz wraz z czterdziestoma wojownikami został wpędzony w pułapkę, czekało ich pojmanie i niewola u Rzymian. Towarzysze bronili, ale woleli popełnić samobójstwo niż oddać się w ręce Rzymian. Flawiusz przeciwny temu pomysłowi szybko zmienił zdanie, gdy jego żołnierze zagrozili mu, że on pierwszy, jako dowódca, powinien się zabić, a w przypadku gdy nie będzie do tego czynu zdolny, to chętnie mu pomogą.

Przy takim obrocie spraw Flawiusz zaakceptował pomysł zbiorowego samobójstwa. Ustawił wszystkich w kole i stwierdził, że zabijany będzie co trzeci żołnierz. Po kolejnej rundzie dalej będzie zabijana co trzecia osoba, aż do chwili gdy wszyscy zostaną wyeliminowani. Pomysł zaakceptowano. On, ustawivszy się na pozycji W(41,3) = 31, przeżył. Następnie oddał się w niewolę u Rzymian, z której, jak wiemy, po dwóch latach został zwolniony.

Kolejną wersją tego problemu jest zadanie o chrześcijanach i Turkach. Znane już w średniowieczu, brzmi następująco: *Statek wiozący 30 pasażerów: 15 chrześcijan i 15 Turków przechyla się niebezpiecznie podczas sztormu. Zdecydowano, by uratować choć część osób i załogę, należy połowę pasażerów wyrzucić za burtę. Zatem wszystkich 30 pasażerów ustawiono w kręgu i zaczynając odliczanie od pewnej osoby oznaczonej liczbą porządkową 1, co dziewiąta była wrzucano do morza, aż do chwili, gdy w kręgu pozostało tylko 15 osób.*

Jak mają ustawić się chrześcijanie, by do morza zostali wrzuceni tylko Turcy? Zadanie to przypisywane jest Niccolò Tartaglii. **Niccolò Tartaglia (1500-1557) był włoskim matematykiem, który wsławił się odkryciem metody rozwiązywania równań trzeciego stopnia. W historii matematyki znany jest długoletni konflikt pomiędzy nim a Gerolamo Cardano (1501-1576), który**

uprosił Tartaglię o wyjawienie mu sekretu rozwiązywania tych równań, a później nie dotrzymał tajemnicy i publicznie z niej korzystał. W tym czasie publiczne pojedynki matematyków na rozwiązywanie równań były ozdobą jarmarków i publicznych zabaw, zatem wspomniana umiejętność była przydatna tak samo jak posiadanie nowej skutecznej broni. Przebojowi Tartaglia i Cardano często brali udział w pojedynkach na rozwiązywanie równań, byli celebrytami tamtych czasów, przeznaczając znaczną część wygranych na hazard i huczne świętowanie swoich zwycięstw. Spotkali się bezpośrednio tylko raz. Pojedynek na zadania Tartaglia sromotnie przegrał. Podczas gdy uczeni dumnie obnosili się ze znajomością sekretu rozwiązywania równań trzeciego stopnia okazało się, że skromny nauczyciel arytmetyki na Uniwersytecie Bolońskim, Scipiano del Ferro (1465-1526) odkrył tę metodę wiele lat wcześniej przed nimi. Rozwiązanie zadania przedstawiają tabele:

Numer w kręgu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Osoba	ch	ch	ch	ch	t	t	t	t	t	ch	ch	t	ch	ch	ch

Numer w kręgu	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Osoba	t	ch	t	t	ch	ch	t	t	t	ch	t	t	ch	ch	t

Zadanie to zostało opublikowane między innymi w 2004 roku w zeszycie *Miniatur Matematycznych dla szkół podstawowych* toruńskiego wydawnictwa Aksjomat jako cykl przygotowań do międzynarodowego konkursu Kangur Matematyczny.

Niebawem w „Tygodniku Powszechnym” ukazał się długi artykuł zatytułowany *Wzór na topienie Turka* („TP”. 09.04.2004). Autorzy zarzucali wydawcy propagowanie przemocy i nawoływanie do prześladowań religijnych. Potępiono recenzentów książki i apelowano do MEN o interwencję. Na nic zdały się wyjaśnienia, że zadanie to, właśnie o takiej oryginalnej treści, znane jest od co najmniej XVI wieku i publikowane w podręcznikach całego świata.

Chociażby znakomita książka Stanisława Kowala *Przez rozrywkę do wiedzy* (Wydawnictwa Naukowo-Techniczne 1970) zawiera szczegółowe omówienie tego zadania. Książka ta do tej pory miała osiem wydań. Ostatnie z nich ukazało się drukiem w 1991. Wychowało się na niej kilka pokoleń polskich matematyków. Nigdy nie zarzucano autorowi nawoływania do przemocy i nienawiści religijnej.

Jak widać, fala źle zrozumianej poprawności politycznej zaczyna podmywać jasność widzenia niektórych dziennikarzy, którzy postanowili tropić wypaczenia w świecie kombinatoryki i arytmetyki.

3. Sprawy sąsiedzkie

Mieszkańcy Łodzi twierdzą, że pojawienie się łodzianina w Warszawie powoduje zwiększenie średniego ilorazu inteligencji w obu miejscach: Łodzi i Warszawie. Czy jest to możliwe, i jak oceniają z kolei warszawiacy wizytę ich mieszkańca w Łodzi.

Ten pozorny paradoks daje się bardzo łatwo wytłumaczyć. Aby zilustrować przykładem nasz problem założmy, dla uproszczenia (co wcale nie zmienia ogólności zagadnienia), że zarówno Warszawa, jak i Łódź liczą po trzech mieszkańców.

Z punktu widzenia mieszkańca Łodzi problem wygląda następująco:

W tabeli podajemy ilorazy inteligencji mieszkańców Łodzi i Warszawy.

W1	W2	W3	Ł1	Ł2	Ł3
100	110	117	118	120	122

Wówczas średni iloraz inteligencji mieszkańca Warszawy wynosi 109, a mieszkańca Łodzi 120. Oczywiście, jeśli ktoś z Łodzi przeprowadza się do Warszawy, to musi być osobą o niskim IQ. Zatem do Warszawy przeprowadza się Ł1. Wówczas średnie IQ w Warszawie będzie wynosić:

$$\frac{100 + 110 + 117 + 118}{4} = 111.25$$

w Łodzi zaś zmieni się na $\frac{120+122}{2} = 121$.

Średnie ilorazy zwiększają się w obu miastach.

Z punktu widzenia mieszkańców Warszawy rozkład ilorazu inteligencji wygląda oczywiście odwrotnie.

W1	W2	W3	Ł1	Ł2	Ł3
118	120	122	100	110	117

Oczywiście do Warszawy może przeprowadzić się tylko zdolny i bystry łodzianin. Zatem do Warszawy przeprowadza się Ł3. Wówczas średni iloraz inteligencji w Warszawie zmienia się ze 120 na $\frac{118+120+122+117}{4} = 119.25$, a w Łodzi zmienia się ze 109 na 105.

Wykazaliśmy, że w zależności od punktu widzenia, przeprowadzenie się mieszkańca Łodzi do Warszawy może zwiększyć średni poziom inteligencji w obu miastach (tak twierdzą łodzianie) albo zmniejszyć (tak pewnie powiedzą warszawiacy).

I've always been mad, I know I've been mad, like the most of us...very hard to explain why you're mad, even if you're not mad...

M. Mason

PRAWA MURPHY'EGO

Jeżeli coś może się nie udać, to się nie uda – w tym zdaniu kryje się cała filozofia praw Murphy'ego. Zasada ta, uzupełniona o 10 twierdzeń, opisuje trafnie świat w którym żyjemy.

1. *Nic nie jest takie proste, jak się wydaje.*
2. *Wszystko zabiera znacznie więcej czasu, niż by się wydawało.*
3. *Jeżeli istnieje prawdopodobieństwo, że coś może pójść źle, to na pewno będzie to właśnie to, co spowoduje największe szkody.*
4. *Jeżeli przewidzisz cztery możliwe sytuacje, w których coś może się nie udać i zdołasz je obejść, natychmiast wyłoni się piąta.*
5. *Sprawy pozostawione samym sobie mają tendencję, aby zamieniać się ze złych na jeszcze gorsze.*
6. *Zawsze, kiedy masz właśnie coś zrobić, okazuje się, że najpierw musisz zrobić coś innego.*
7. *Każde rozwiązanie rodzi nowe problemy.*
8. *Głupcy są tak pomysłowi, że niemożliwe jest stworzenie czegoś, z czym każdy głupi by sobie nie poradził.*
9. *Natura jest zawsze po stronie ukrytych wad.*
10. *Matka natura jest suką.*

(Artur Bloch, *Prawa Murphy'ego*, Wyd. Zysk 2000)

W tym rozdziale opiszemy działanie praw Murphy’ego z punktu widzenia Matematyki. Spróbujemy wyjaśnić niektóre z tych praw, stosując metody teorii prawdopodobieństwa.

Opiszemy działanie praw Murphy’ego na prostych przykładach.

W okresie świątecznym w pokoju wykładowców IFE Politechniki Łódzkiej pojawia się zawsze, jak feniks z popiołów, paskudna choinka z tworzywa. Jest to piramida nylonowych nici i sztucznego materiału używanego do produkcji tzw. *ruskich toreb bazarowych*, tak misternie splątana, że do złudzenia może przypominać kształtem drzewko, chociaż mnie kojarzy się z gigantyczną torebką na frytki. Konstrukcja ta, by jeszcze bardziej wprowadzić w pokój świąteczny nastrój, upiększona jest zaschniętymi plasterkami cytryn i pomarańczy.

Aby poprawić wizerunek pokoju, przynieśliśmy z kolegą krótki sznur lampek (każda w kształcie owocu) i zabraliśmy się do zawieszania ich na drzewku z żyłek. Oczywiście okazało się, po zawieszeniu lampek na choince, że niektóre są przepalone. Wykręciliśmy z powrotem wszystkie 20 lampek i starannie je sprawdziliśmy. Znaleźliśmy 3 przepalone. Odłożyliśmy je na bok i postanowiliśmy, że następnego dnia dokupimy brakujące żaróweczki. Jakie było nasze zdziwienie, gdy nazajutrz okazało się, że ktoś życzliwy umieścił przepalone żaróweczki z powrotem w sznurze światełek.

Znów należy kolejno sprawdzać lampki, jedna po drugiej, aby spośród 20 wybrać te 3 przepalone.

Jak myślicie, jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba żaróweczek, które trzeba będzie sprawdzić, aby wybrać te nieszczęsne trzy przepalone?

Musimy sprawdzić co najmniej 3 żarówki i co najwyżej 19.

Tylko 3 żarówki sprawdzimy wtedy, gdy te przepalone będą na pierwszych trzech miejscach. Generalnie sprawdzimy k żarówek $3 \leq k \leq 16$, gdy pierwsze dwie przepalone będą gdzieś wśród $k - 1$ pierwszych lampek, a trzecia będzie na pozycji k .

Sprawdzimy 17 lampek, gdy pierwsze dwie spalone będą gdzieś pośród pierwszych 16 lampek a trzecia na miejscu 17 lub gdy wszystkie 17 sprawdzone są sprawne (wtedy przepalone są na pozycjach 18, 19, 20).

Sprawdzimy 18 lampek, gdy pierwsze dwie przepalone są wśród pierwszych 17, a trzecia przepalona jest na pozycji 18 lub gdy jedna niesprawna żarówka jest gdzieś wśród pierwszych 17 pozycji i na 18 miejscu jest dobra żarówka (Wówczas pozostałe przepalone są na miejscach 19 i 20).

Ostatecznie, sprawdzimy 19 żarówek, gdy pierwsze dwie przepalone są wśród pierwszych 18 (Wówczas stan żarówki 19 wyznacza jednoznacznie stan 20).

Oznaczmy przez $p_k, k = 3, 4, \dots, 19$ – prawdopodobieństwo sprawdzenia stanu k żarówek do znalezienia pozycji trzech przepalonych. Najpierw zauważmy, że 3 żarówki wśród 20 mogą być rozmieszczone na $\binom{20}{3} = 1140$ sposobów.

Zatem:

$$\begin{aligned}
 p_3 &= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{1}{1140} < p_4 = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{3}{1140} < p_5 = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{6}{1140} < \dots < p_k \\
 &= \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}{1140} < \dots \\
 &< p_{16} = \frac{\binom{15}{2}}{1140} = \frac{105}{1140} < p_{17} = \frac{\binom{16}{2}}{1140} + \frac{1}{1140} = \frac{121}{1140} < p_{18} \\
 &= \frac{\binom{17}{2}}{1140} + \frac{\binom{17}{1}}{1140} = \frac{153}{1140} < \\
 &< p_{19} = \frac{2\binom{18}{2}}{1140} = \frac{306}{1140}
 \end{aligned}$$

Oczywiście, jak wykazaliśmy z matematyczną precyzją, aby znaleźć wszystkie trzy przepalone żarówki, najprawdopodobniej trzeba będzie przejrzeć cały sznur lampek.

Zatem: jeśli jakiś proces może trwać dłużej, ewentualnie jeśli jakieś działanie może się nie udać, to z pewnością będzie trwał dłużej lub się nie uda.

W dalszej części tego krótkiego rozdziału zastanowimy się nad prawdziwością kolejnego Prawa Murphy'ego. Czy faktycznie zawsze *nieszczęścia występują parami*?

Weźmy pod uwagę model składający się z 24 równych okresów czasowych (miesiące) i pewne nieszczęśliwe zdarzenia, które zajądą w tym czasie. Zakładamy, że każde z tych zdarzeń jest tak samo przykre i bolesne. Nieszczęścia w swej naturze są niezależne, tzn. występowanie jednego nie ma wpływu na pojawienie się drugiego.

Każde nieszczęście może nastąpić w każdym z 24 okresów czasowych.

Przyjrzyjmy się najpierw modelowi zakładającemu, że w przeciągu tych 24 okresów czasowych można spodziewać się trzech nieszczęśliwych zdarzeń ($k = 3$).

Wówczas prawdopodobieństwo pojawienia się takiego okresu, w którym zdarzą się dwa lub więcej nieszczęścia wynosi:

$$P(2+) = 1 - \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{24 \cdot 24 \cdot 24} = 0.1215$$

Dla $k = 4$ mamy:

$$P(2+) = 1 - \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24} = 0.2314$$

Dla $k = 5$ mamy:

$$P(2+) = 1 - \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24} = 0.35945$$

Dla $k = 6$ mamy:

$$P(2+) = 1 - \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24} = 0.49289$$

Dla $k = 7$ mamy:

$$P(2+) = 1 - \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18}{24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24} = 0.61967$$

Jak widzimy, już przy siedmiu nieszczęściach w ciągu dwóch lat, prawdopodobieństwo pojawienia się miesiąca z co najmniej dwoma następującymi po sobie niefortunnymi zdarzeniami wynosi przeszło 60%.

Dalsze wartości to 73% dla $k = 8$, 82% dla $k = 9$ i 89% dla $k = 10$.

Jak widzimy, w zasadzie powinniśmy zmodyfikować nieprecyzyjne prawo Murphy'ego do bardziej przekonującego, że *nieszczęścia chodzą co najmniej parami*.

*Us, and them
And after all we're only ordinary men.*

R. Waters, R. Wright

MATEMATYKA W SĄDZIE

W tym rozdziale przedstawię słynne przykłady, które zasłynęły przed laty, jako błędne zastosowanie naiwnego rozumienia matematyki w decyzjach podejmowanych przez sądy.

1. Świadek daltonista

W pewnym mieście są dwie firmy taksówkarskie: *Niebiescy* dysponujący 15 niebieskimi wozami i *Czarni* mający 85 czarnych samochodów. W nocy doszło do wypadku samochodowego, który z pewnością spowodowany został przez kierującego taksówką. Niestety, sprawca zbiegł. Tej nocy wszystkie 90 taksówek operowało w mieście. Na miejscu zdarzenia był świadek, który stwierdził, że wypadek spowodowała taksówka firmy *Niebiescy*. W czasie przesłuchania na komendzie okazało się, że świadek w 80% właściwie rozróżnia niebieski kolor (tzn. w 80% przypadków widzi niebieski, gdy faktycznie pokazuje mu się przedmiot w niebieskim kolorze i w 20% przypadków twierdzi, że przedmiot jest niebieski pomimo tego, że faktycznie okazany mu kolor jest inny).

Jakie jest prawdopodobieństwo, przy takich zeznaniach świadka, że wypadek rzeczywiście spowodowała taksówka niebieska?

Niedoświadczeni w teorii prawdopodobieństwa twierdzą, że prawdopodobieństwo to wynosi 0.8. W rzeczywistości jest dużo mniejsze.

Oznaczmy przez N, C, ZN odpowiednio zdarzenia: taksówka niebieska, taksówka czarna, świadek zeznał, że taksówka była niebieska.

Faktycznie: prawdopodobieństwo, że świadek rozpoznał taksówkę jako niebieską wynosi:

$$P(ZN) = P(ZN/N) \cdot P(N) + P(ZN/C) \cdot P(C) = 0.8 \cdot \frac{15}{90} + 0.2 \cdot \frac{75}{90} = \frac{27}{90}$$

Następnie:

$$P(N/ZN) = \frac{P(N \cap ZN)}{P(ZN)} = \frac{P(ZN/N) \cdot P(N)}{P(ZN)} = \frac{0.8 \cdot \frac{15}{90}}{\frac{27}{90}} = \frac{12}{27} = 0.44$$

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia, że taksówka była niebieska pod warunkiem, że świadek zeznał, że była niebieska wynosi poniżej 50%! Drastycznie mniej od naiwnie spodziewanych 80%.

2. Zbieg okoliczności

W 1968 roku w Los Angeles w USA toczył się wyjątkowy, z punktu widzenia zastosowań matematyki, proces. Juanita Brooks została okradziona, gdy wychodziła ze sklepu. Ktoś wyrwał jej z ręki torebkę i zbiegł. Krzyk pani Brooks zaalarmował pana Bassa, który po drugiej stronie ulicy podlewał właśnie trawnik. Jak potem zeznał, zauważył młodą blondynkę, z włosami upiętymi w koński kucyk, biegnącą w poprzek ulicy i wskazującą do żółtego auta, które z zapalonym silnikiem stało przy skraju drogi. Kierowca natychmiast ruszył z miejsca, przejechali tuż obok pana Bassa, mógł więc spostrzec, że auto prowadził czarnoskóry mężczyzna z brodą i wąsami.

Po tygodniu zaaresztowano mieszane małżeństwo państwa Collins, którzy odpowiadali rysopisom sporządzonym po zeznaniach świadka. Pomimo tego, że w czasie procesu pan Bass nie potrafił się zdecydować, czy faktycznie tego dnia widział oskarżoną i oskarżonego jako kierowcę tego pojazdu, oskarżyciel był pewny wygranej. Opierał bowiem swoją mowę o niepodważalną teorię prawdopodobieństwa.

Aresztowane osoby odpowiadały dokładnie opisowi. Oskarżyciel poprosił znajomego matematyka o oszacowanie prawdopodobieństwa, że w pewnym miejscu dojdzie do następującego zdarzenia:

Pojawi się:

- a) czarnoskóry mężczyzna,
- b) mężczyzna z brodą,
- c) mężczyzna z wąsami,
- d) biała blondynka,
- e) kobieta z włosami upiętymi w koński kucyk,
- f) mieszana rasowo para,
- g) żółty samochód.

Używając podstawowych danych statystycznych oszacowano, że 1 na 10 mężczyzn jest czarnoskórym z brodą, co czwarty mężczyzna nosi wąsy, co trzecia kobieta jest blondynką białej rasy, co dziesiąta kobieta nosi włosy upięte w koński kucyk. W tym czasie szacowano prawdopodobieństwo pojawienia się mieszanej rasowo pary w aucie na 0.001, oraz że co dziesiąte auto jest koloru żółtego.

Matematyk wówczas obliczył prawdopodobieństwo zajścia tych wszystkich zdarzeń jednocześnie jako: $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{12000000}$.

Według prokuratora, w związku z tym, że szansa na zajście tych wszystkich zdarzeń wynosiła jeden na dwanaście milionów (sic!), a oskarżeni spełniają wszystkie te cechy, zatem muszą być winni.

Prokurator dokonał następującego procesu myślowego. Jeśli te osoby są niewinne, to prawdopodobieństwo, że spełnią wszystkie warunki opisane przez naocznego świadka jest bardzo małe. Zatem nie mogą być niewinni. Zakładając, że są niewinni, fakt, że spełniają wszystkie warunki, robi się bardzo podejrzany, bo na spełnienie wszystkich warunków są przecież bardzo małe szanse. Wobec tego muszą być winni!

Małżeństwo Collinsów na podstawie siły przedstawionych argumentów zostało uznane za winne popełnionego czynu.

Decyzja ta znana jest jako jeden z przykładów *prosecutor's fallacies* – błędnych decyzji opartych na fałszywym rozumowaniu. Podczas wyliczeń potraktowano zdarzenia jako niezależne i dokonano mnożenia prawdopodobieństw. Nie wzięto pod uwagę zależności pomiędzy zdarzeniami oraz błędnie interpretowano pojęcie prawdopodobieństwa warunkowego.

Aby wyjaśnić błąd popełniony przez oskarżyciela i jego kolegę, weźmy pod uwagę prosty przykład.

Załóżmy, że w milionowym mieście dokonano morderstwa i zeznania świadków doprowadziły do wytypowania 10 podejrzanych. Spośród tej dziesiątki jeden został zaaresztowany.

Prokurator myśli podobnie jak w przypadku małżeństwa Collinsów. Jeśli ten osobnik jest niewinny, to prawdopodobieństwo, że spełnia on wszystkie warunki opisane przez naocznych świadków jest bardzo małe. Zatem nie może być niewinny. Zakładając, że podejrzany jest niewinny, a spełnia wszystkie warunki opisane przez świadków, na co jak wiadomo są bardzo małe szanse, dochodzimy do wniosku, że musi być winny!

Oznaczmy przez S – zdarzenie, że podejrzany spełnia warunki opisane przez świadków oraz przez N – zdarzenie, że podejrzany jest niewinny. Prokurator wobec tego twierdzi, że w związku z tym, że $P(S/N)$ jest bardzo małe, należy uznać podejrzanego winnym.

Faktycznie w naszym przypadku mamy: $P(S/N) = \frac{9}{999999} = 0.00009$.

Błąd polega na niezrozumieniu pojęcia prawdopodobieństwa warunkowego. Zamiast zastanawiać się, jakie są szanse, że podejrzany spełnia warunki opisu przy założeniu, że jest niewinny, prokurator powinien zastanowić się nad prawdopodobieństwem zdarzenia, że jest niewinny, choć wiadomo, że spełnia warunki opisu.

Zatem należy raczej zastanowić się nad wartością: $P(N/S)$, która w tym przypadku wynosi $\frac{9}{10} = 0.9$!

Zatem nawet zakładając, że podejrzany spełnia warunki opisu podane przez naocznych świadków, w dalszym ciągu mamy 90% szans na to, że jest niewinny. To całkowicie zmienia podejście do problemu winy i kary.

3. Testy DNA

Kolejnym przykładem wykorzystania teorii prawdopodobieństwa w sądzie są testy DNA. Testy DNA są obecnie bardzo często używane do potwierdzenia lub wykluczenia winy podejrzanych. Chociażby w głośnym procesie Jakuba T. – Polaka oskarżonego o brutalny gwałt na 50-letniej Angielce – wykorzystanie testów DNA dowiodło niezbitcie o jego winie. Trzeba jednak pamiętać, że i w tym przypadku należy bardzo ostrożnie podchodzić do interpretacji wyników.

Słynny proces, który doprowadził do sporów co do użycia testów DNA jako dowodów odbył się w 1993 w USA. Chodziło o apelację A. Deana, skazanego na podstawie testu DNA za usiłowanie gwałtu. Test DNA polega na porównaniu DNA podejrzanej osoby z przypadkowo wybrana próbką. W trakcie apelacji obrońca przekonywał, że pomyłono w trakcie procesu prawdopodobieństwo warunkowe różnych zdarzeń. Tak jak w przypadku poprzedniej historii korzystano z prawdopodobieństwa zdarzenia, że próbka DNA podejrzanego pokryje się z losową próbką przy założeniu, że jest niewinny zamiast obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że jest niewinny mając pokrycie próbek DNA.

Spróbujmy wyjaśnić, na czym polegają pomyłki z wykorzystaniem testów DNA. Obecnie wiadomo, że prawdopodobieństwo, aby dwie niespokrewnione ze sobą osoby będą miały taki sam wynik badania kodu DNA wynosi $\frac{1}{10^9}$ (jedna miliardowa).

Zatem, jeśli pobierzemy próbki DNA z ciała ofiary, to prawdopodobieństwo, że niewinny człowiek będzie miał taki sam profil DNA jak sprawca wynosi $\frac{1}{10^9}$. Innymi słowy:

$$P(\text{DNA takie samo/niewinny}) = \frac{1}{10^9}$$

Dokonano aresztowania pewnej osoby, dokonano badania kodu DNA i wynik okazał się taki sam jak kod sprawcy. Na tej podstawie sąd stwierdza, że:

$$P(\text{niewinny/DNA takie samo}) = \frac{1}{10^9}$$

i wysnuwa wniosek, że prawdopodobieństwo

$$P(\text{winny/DNA takie samo}) = \frac{999999999}{10^9},$$

co praktycznie dowodzi jego winy.

Faktycznie, używamy następującego ciągu argumentów:

$$P(\text{niewinny /DNA takie samo}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{P(\text{niewinny i DNA takie samo})}{P(\text{DNA takie samo})} \\
 &= \frac{P(\text{DNA takie samo/niewinny}) \cdot P(\text{niewinny})}{P(\text{DNA takie samo})}
 \end{aligned}$$

Z kolei:

$$P(\text{DNA takie samo}) = P(\text{DNA takie samo/niewinny}) \cdot P(\text{niewinny}) + P(\text{DNA takie samo/winny}) \cdot P(\text{winny})$$

Ostatnie statystyki podają, że policja skłania się do brania pod uwagę $P(\text{winny}) \approx P(\text{niewinny}) = 0.5$

$$\begin{aligned}
 \text{Wtedy mamy: } P(\text{DNA takie samo}) &= 0.000000001 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 \text{ i} \\
 P(\text{niewinny/DNA takie samo}) &= \frac{0.000000001 \cdot 0.5}{0.000000001 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5} \\
 &\approx 0.000000001
 \end{aligned}$$

Zatem, według sądu, prawdopodobieństwa:

$P(\text{DNA takie samo/niewinny})$ i $P(\text{niewinny/DNA takie samo})$ są prawie identyczne i bardzo małe. Wobec powyższego, wysnucie wniosku, że:

$$P(\text{winny/DNA takie samo}) = \frac{999999999}{10^9} \approx 1$$

wyduje się uzasadnione.

W rzeczywistości, nie można przypisywać dowolnej osobie wartości prawdopodobieństwa winny/niewinny na zasadzie rzutu monetą. Wśród siedmiu miliardów ludzi żyjących obecnie na świecie, tylko jedna jest sprawcą zbrodni. Trudno sobie wyobrazić aby rdzenny Indianin z dorzecza Amazonki spełniał założenia prawdopodobieństwa winny/niewinny, oparte na rzucie monetą, zbrodni popełnionej w Brzezinach koło Łodzi.

Zatem, aby urealnić rozważania – przypominamy, że sprawca był ścigany międzynarodowym listem gończym – założymy, że mamy do czynienia z miliardem potencjalnych sprawców. Wtedy:

$$P(\text{winny}) = 0.000000001, P(\text{niewinny}) = 0.999999999$$

$$P(\text{niewinny/DNA takie samo}) = \frac{0.000000001 \cdot 0.999999999}{0.000000001 \cdot 0.999999999 + 1 \cdot 0.000000001} \approx 0.5$$

Widać obecnie, że przesądzanie o jego winie na podstawie badań DNA jest mocno przesadzone.

W 1997 roku Sąd Apelacyjny USA wydał oświadczenie, w którym nalega na bardzo ostrożne podejście do wniosków wysnuwanych z nieuświadomionego zastosowania teorii prawdopodobieństwa.

4. „Równouprawnienie” kobiet i mężczyzn

Obecnie przedstawię przykład ilustrujący jak, używając teorii prawdopodobieństwa warunkowego, można manipulować wnioskami i rezultatami badań.

Weźmy pod uwagę następującą tabelę opisującą udział kobiet i mężczyzn skazanych za pospolite przestępstwa drobnych kradzieży:

	Wyrok powyżej 1 roku	Wyrok poniżej 1 roku
Kobieta skazana za udział w przestępstwie	190	1410
Mężczyzna skazany za udział w przestępstwie	170	1490

Oznacza to, że prawdopodobieństwo skazania kobiety na karę więzienia powyżej 1 roku wynosi: $\frac{190}{1600} = 0.11875$, natomiast prawdopodobieństwo skazania mężczyzny na karę więzienia powyżej 1 roku wynosi: $\frac{170}{1660} = 0.1024$. Możemy zatem stwierdzić, że wyroki powyżej 1 roku zapadają bez względu na płeć z prawdopodobieństwem około 11%.

Gdy jednak przyjrzymy się kolejnym zestawieniom, określającym rozkład wyroków z uwzględnieniem płci ofiar i sprawców, dostaniemy dość niespodziewane wyniki.

Kobiety ofiarami przestępstwa:

	Wyrok powyżej 1 roku	Wyrok poniżej 1 roku
Kobieta skazana za udział w przestępstwie	190	1320
Mężczyzna skazany za udział w przestępstwie	110	520

Mężczyźni ofiarami przestępstw:

	Wyrok powyżej 1 roku	Wyrok poniżej 1 roku
Kobieta skazana za udział w przestępstwie	0	90
Mężczyzna skazany za udział w przestępstwie	60	970

Obecnie zauważmy, że:

$$P(\text{wyrok powyżej 1 roku} / \text{kobieta skazana i mężczyzna ofiara}) = \frac{0}{90} = 0$$

$$P(\text{wyrok powyżej 1 roku} / \text{kobieta skazana i kobieta ofiara}) = \frac{190}{1510} = 0.1258 \approx 12.6\%$$

$$P(\text{wyrok powyżej 1 roku} / \text{mężczyzna skazany i mężczyzna ofiara}) = \frac{60}{1030} = 0.05825 \approx 6\%$$

$$P(\text{wyrok powyżej 1 roku} / \text{mężczyzna skazany i kobieta ofiara}) = \frac{110}{630} = 0.1746 \approx 17.5\%$$

Analizując te wyniki, trudno jest mówić o równomiernej dystrybucji wyroków powyżej 1 roku w przypadku rozbicia ich na płeć ofiar.

Twierdzenia o prawdopodobieństwie warunkowym są niebezpiecznym narzędziem w rękach laika lub bezwzględnego cynika, który potrafi, manipulując danymi, naciągnąć wyniki do obrony swojej tezy.

Teorię prawdopodobieństwa warunkowego zawdzięczamy angielskiemu matematykowi **Thomasowi Bayesowi (1702-1761)**. W 1742 roku został przyjęty do Królewskiej Akademii Nauk pomimo tego, że za jego życia nie ukazała się żadna praca podpisana jego nazwiskiem. Na liście rekomendującym go do przyjęcia widnieją ówczesne sławy nauki. Do dzisiaj biografowie spierają się, w jaki sposób Bayes dał się wówczas poznać jako znakomity matematyk.

5. Trudny proces decyzyjny

Na zakończenie rozdziału zajmiemy się problemem decyzyjnym. Sędziowie, z natury rzeczy, muszą podejmować decyzje na podstawie pewnych przesłanek, niepełnych informacji. Powinni zawsze być obiektywni i dążyć do prawdy.

Postawmy ich przed poniższym problemem, który dla uproszczenia opiszemy prostym językiem zadania z probablistyki na poziomie szkoły średniej.

Otóż w skrzynce jest 10 kul, 5 białych i 5 czarnych. Ze skrzyni usuwamy jedną kulę, nie oglądając jej. Następnie przeprowadzamy dwa eksperymenty. Pierwszy polega na 9-krotnym losowaniu ze zwrotem jednej kuli do skrzyni, a drugi losujemy 209 razy ze zwrotem po jednej kuli do skrzyni. Okazało się, że w pierwszym przypadku wszystkie 9 losowań dało kulę czarną, a w drugim eksperymencie uzyskano 109 czarnych i 100 białych. I teraz nadchodzi czas decyzji. Mianowicie, w związku z tym, że w pierwszym doświadczeniu wszystkie wylosowane kule były czarne, to zapewne było ich więcej, zatem pierwsza usunięta kula była biała. W drugim doświadczeniu kul czarnych też było nieznacznie więcej, co prowadzi do wniosku, że być może pierwszą usuniętą kulą była kula biała. Który z tych dwóch eksperymentów daje większe prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na wyjęciu na początku kuli białej? Intuicja podpowiada, że wynik pierwszego doświadczenia niezbicie świadczy o tym, że usunięta została kula biała, jednak drugie doświadczenie już nie tak jednoznacznie dowodzi o wyjęciu kuli białej jako pierwszej.

Dokonajmy wymaganych obliczeń.

Doświadczenie pierwsze:

$$\begin{aligned}
 &P(\text{wylosowania 9 kul czarnych}) = \\
 &= P(\text{wylosowano 9 czarnych/usunięto czarną}) \cdot P(\text{usunięto czarną}) + \\
 &+ P(\text{wylosowania 9 czarnych/usunięto białą}) \cdot P(\text{usunięto białą}) = \\
 &= \left(\frac{4}{9}\right)^9 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{9}\right)^9 \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{P(\text{usunięto kulę białą / wylosowano 9 czarnych}) = \\
 &= \frac{P(\text{wylosowania 9 czarnych/usunięto białą}) \cdot P(\text{usunięto białą})}{P(\text{wylosowania 9 kul czarnych})} = \\
 &= \frac{\left(\frac{5}{9}\right)^9 \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{5}{9}\right)^9 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{4}{9}\right)^9 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{5}\right)^9} = 0,88
 \end{aligned}$$

Doświadczenie drugie:

$$\begin{aligned}
 &P(\text{wylosowania 109 kul czarnych i 100 białych}) = \\
 &= P(\text{wylosowano 109 czarnych i 100 białych/usunięto czarną}) \cdot P(\text{usunięto czarną}) + \\
 &+ P(\text{wylosowania 109 czarnych i 100 białych/usunięto białą}) \cdot P(\text{usunięto białą}) = \\
 &= \binom{209}{109} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{109} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{100} \cdot \frac{1}{2} + \binom{209}{109} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{109} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{100} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{P(\text{usunięto kulę białą / wylosowano 109 czarnych i 100 białych}) = \\
 &= \frac{P(\text{wylosowania 109 czarnych i 100 białych/usunięto białą}) \cdot P(\text{usunięto białą})}{P(\text{wylosowania 109 kul czarnych i 100 białych})} = \\
 &= \frac{\binom{209}{109} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{109} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{100} \cdot \frac{1}{2}}{\binom{209}{109} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{109} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{100} \cdot \frac{1}{2} + \binom{209}{109} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{109} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{100} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{5}\right)^9} = 0,88
 \end{aligned}$$

Niewiarygodne! Prawdopodobieństwa są takie same, a intuicja wskazywała, że w drugim przypadku szanse na usunięcie białej kuli jako pierwszej były dużo mniejsze niż w pierwszym przypadku.

Zauważmy jeszcze, że chodzi tylko i wyłącznie o różnicę w liczbie wylosowanych czarnych w stosunku do białych. Gdy różnica ta wynosi 9, to zawsze szukane prawdopodobieństwo wynosić będzie: $\frac{1}{1 + \left(\frac{4}{5}\right)^9}$.

Zatem, gdy w trzecim eksperymencie wylosujemy 1999 kul czarnych i 1990 kul białych, to również szanse na początkowe usunięcie białej wynosić będą 88%.

Widać, jak łatwo dać się zwieść, jeśli zaufamy tylko intuicji i zdrowemu rozsądkowi, a pominiemy obiektywną i prostą matematykę.

Money, get back.
I'm all right Jack keep your hands off of my stack.
Money, it's a hit.

R. Waters

MATEMATYKA GIER I ZABAW

W rozdziale tym zajmiemy się opisem kilku gier w kości, przyjrzymy się zdrapcę proponowanej przez sieć McDonald`s, wyjaśnimy co matematyka ma do powiedzenia podczas jedzenia makaronu i zajmiemy się sekretami hazardu. *Kości zostały rzucone* – to słynne powiedzenie Juliusza Cezara odnosiło się do gry w kości, której był wielbicielem. Kości były znane już w starożytności, a wśród miłośników rozrywek z nimi związanych na przełomach wieków należy wymienić jeszcze: cesarza Klaudiusza, Marka Antoniusza, Konstantyna VII, króla Ryszarda Lwie Serce, króla Jerzego i Henryka VIII. W Polsce zapalonym graczem był Kazimierz Sprawiedliwy. Liczba różnych gier, w których używa się tylko kości jest już większa od 200. W tym rozdziale omówimy kilka z nich.

1. Craps

Craps to obecnie najpopularniejsza na świecie gra w kości. Znana w Europie już od czasów wypraw krzyżowych, w końcu wieku XVIII przywędrowała do Ameryki, gdzie stała się ulubionym zajęciem niewolników. Obecnie w kasynach grywana jest wersja o nazwie *craps pass line bet*. Popularność swoją zawdzięcza temu, że jest wprost stworzona do zakładów i obstawiania wyników kolejnych układów.

Zasady gry są następujące:

Liczba graczy: co najmniej dwóch,

Rekwizyty: 2 zwykle kości do gry.

Gracz rzuca kośćmi i oblicza sumę oczek uzyskanych w rzucie. Gdy suma wynosi 7 lub 11, wygrywa określoną z góry stawkę. Gdy suma wynosi: 2, 3 lub 12 – traci prawo ruchu i przekazuje kości kolejnemu graczowi. Gdy suma wynosi: 4, 5, 6, 8 lub 9, to suma oczek staje się tzw. *punktem* i uzyskuje prawo do kolejnych rzutów. Obecnie rzuca kośćmi do momentu wyrzucenia „punktu” – wtedy wygrywa, albo sumy oczek 7 – wtedy przegrywa.

Reguły gry w Craps są smakowicie przedstawione w filmie gangsterskim *Prawo Bronxu* z 1993 roku w reżyserii Roberta de Niro. Również w filmie *Diamenty są wieczne* (1971) – ostatnim z przygód agenta Jamesa Bonda, którego grał Sean Connery, jest zabawna scena z kasyna, w której główny bohater gra

w kości i próbuje się niezdarnie uwolnić od natrętnej zafascynowanej nim dziewczyny o wiele znaczącym przezwisku – Plenty.

W filmie *Cooler* (2003), William H. Macy gra tytułowego pechowca zatrudnionego w kasynie, tylko po to, by przynosić nieszczęście graczom. Jest takim straceńcem, że sama jego obecność przynosi złą passę podczas gry. W momencie kiedy się zakochuje i to z wzajemnością, jego los się odменя i staje się bezużyteczny w kasynie. Natomiast sam zaczyna wierzyć w swoją dobrą gwiazdę i rozpoczyna wielką grę w Craps.

Spróbujemy wyliczyć, jakie są szanse na wygraną w tej grze.

Najpierw obliczmy, ile wynoszą prawdopodobieństwa uzyskania poszczególnych sum oczek na kościach.

W tabelce wypisujemy wszystkie możliwe sumy uzyskane przy poszczególnych rozkładach oczek na kościach:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Niech $p_i, i = 2, 3, \dots, 11, 12$ oznacza prawdopodobieństwo uzyskania sumy i oczek. Mamy zatem:

p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}
1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	3/36	2/35

Prawdopodobieństwo wygrania w pierwszym rzucie wynosi zatem: $p_7 + p_{11} = \frac{8}{36}$.

Gracz może wygrać również wtedy, gdy w pierwszym rzucie uzyska „punkt” (suma oczek: 4, 5, 6, 8, 9, 10), a w kolejnych rzutach wyrzuci „punkt” zanim wypadnie suma równa 7.

Zatem prawdopodobieństwo wygrania w serii rzutów wynosi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_i (1 - p_i - p_7)^k p_i \text{ dla } i = 4, 5, 6, 8, 9, 10$$

W pierwszym rzucie wyrzucono punkt, następnie serię sum różnych od punktu oraz 7 i w końcu sumę oczek równą punktowi.

Oczywiście:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_i (1 - p_i - p_7)^k p_i = \frac{p_i^2}{p_i + p_7}$$

Wygrana w serii rzutów wynosi więc:

$$\sum_{i=4, i \neq 7}^{10} \frac{p_i^2}{p_i + p_7} = \frac{\left(\frac{3}{36}\right)^2}{\frac{9}{36}} + \frac{\left(\frac{4}{36}\right)^2}{\frac{10}{36}} + \frac{\left(\frac{5}{36}\right)^2}{\frac{11}{36}} + \frac{\left(\frac{5}{36}\right)^2}{\frac{11}{36}} + \frac{\left(\frac{4}{36}\right)^2}{\frac{10}{36}} + \frac{\left(\frac{3}{36}\right)^2}{\frac{9}{36}} = 0.270709$$

Prawdopodobieństwo wygranej wynosi: $0.270709 + \frac{8}{36} = 0.492929$.

Mamy zatem prawie 50% szans na wygraną w tej grze.

Chyba że stoi przy nas Cooler i wtedy nawet zdolności do obliczania prawdopodobieństwa i prawa wielkich liczb oraz statystyka nam nie pomogą.

W Stanach Zjednoczonych miarą bezwzględnej uczciwości jest stwierdzenie, że z daną osobą można *play craps over the phone*.

2. Gra w 12

Liczba 12 ma wiele ukrytych własności i znaczeń. Wymieńmy kilka z nich.

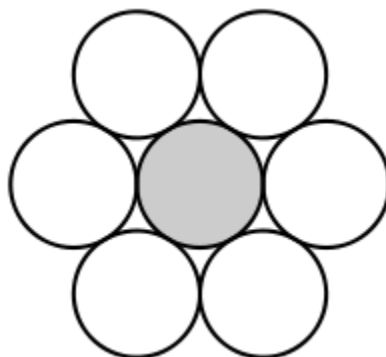
1) Jest tzw. *liczbą całującą w trzecim wymiarze*.

Liczbą całującą w n-tym wymiarze nazywamy maksymalną ilość kul jednostkowych n-wymiarowych, które dotykają kuli jednostkowej.

W przestrzeni jednowymiarowej liczbą całującą jest 2:

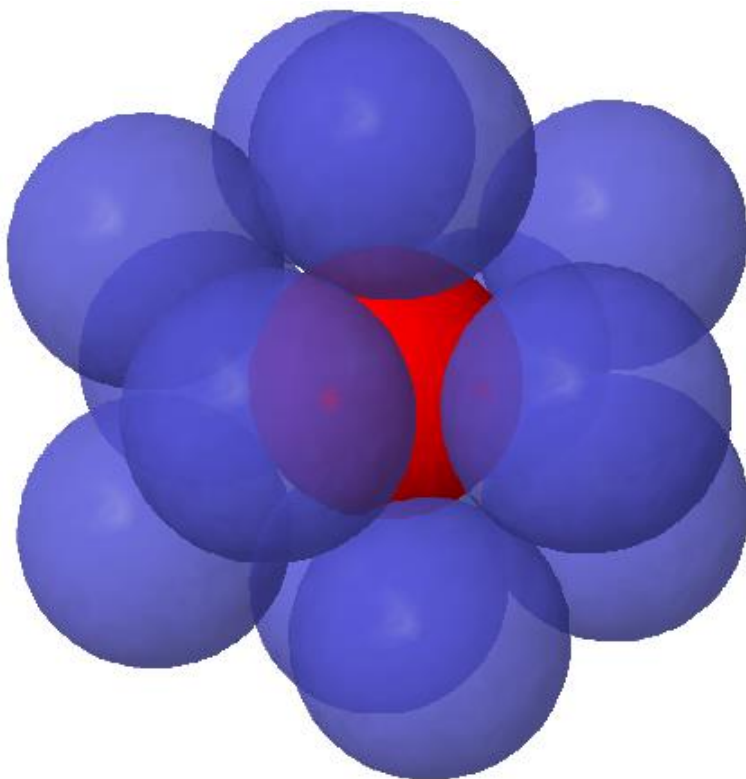


W dwóch wymiarach:



liczbą całującą jest 6.

Natomiast w trzech wymiarach liczba całująca to 12:



Od 2004 roku znana jest liczba caująca w czterech wymiarach. Jest to 24. Dla pozostałych wymiarów nieznane są dokładne wartości liczb caujących, tylko ograniczenia dolne i górne.

- 2) 12 jest najmniejszą liczbą *szczodłą*. Liczbę naturalną n nazywamy *szczodłą*, jeżeli suma wszystkich jej właściwych dzielników jest większa od n . Rzeczywiście, dzielnikami właściwymi 12 są: 1, 2, 3, 4, 6. Z kolei $1 + 2 + 3 + 4 + 6 > 12$. 12 jest najmniejszą liczbą o tej własności. Oto lista liczb *szczodrych* mniejszych od 100. 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 70, 72, 78, 80, 84, 88, 90, 96.
- 3) 12 jest tzw. liczbą *podłużną*, czyli taką, która jest iloczynem kolejnych liczb naturalnych. Faktycznie $12 = 3 \cdot 4$.
- 4) 12 jest liczbą *diabelską*, bo w zapisie binarnym ma parzystą liczbę jedynek.
 $12 = 1100_2$.
- 5) 12 jest liczbą *praktyczną*, bo każda liczba mniejsza od niej jest jej dzielnikiem lub da się zapisać jako sumę jej różnych dzielników.

Zobaczmy: 1, 2, 3, 4, 6 to dzielniki 12. A dalej: $5 = 3 + 2$, $7 = 4 + 3$, $8 = 6 + 2$, $9 = 6 + 3$, $10 = 6 + 4$, $11 = 6 + 4 + 1$.

- 6) Liczbę 12 można zapisać jako sumę jej cyfr i sześcianów jej cyfr. $12 = 1 + 2 + 1^3 + 2^3$. Jest najmniejszą liczbą o tej własności.
- 7) Liczba 12 jest jedyną liczbą naturalną, która można zapisać jako sumę potęg trójki, gdzie potęgami są cyfry tworzące 12, tzn. $12 = 3^1 + 3^2$.
- 8) Liczba 12 jest podzielna przez sumę swoich cyfr i przez iloczyn cyfr ją tworzących.
- 9) Iloczyn właściwych dzielników 12 wynosi: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 12^2$. Zauważmy jeszcze, że mając $12^2 = 144$, odwracając kolejność cyfr, otrzymamy również $21^2 = 441$.
- 10) Rok składa się z 12 miesięcy.
- 11) Mamy 12 znaków zodiaku.
- 12) Zarówno dzień, jak i noc składają się z 12 godzin.
- 13) Skala wiatru według Beauforta składa się z 12 stopni. Najsilniejszy wiatr o sile 12 stopni to huragan.
- 14) Było 12 apostołów.
- 15) Stopa składa się z 12 cali.
- 16) W Wielkiej Brytanii do roku 1971, w którym dokonano decymalizacji szylinga był monetą składającą się z 12 pensów i był 1/20 funta szterlinga.
- 17) Podstawą terapii wspólnoty AA Anonimowych Alkoholików jest program 12 kroków, 12 tradycyjnych reguł.

Po przedstawieniu niektórych własności i osobliwości liczby 12, omówimy kolejną grę w kości, znaną jako „dwunastka”.

Gracz biera liczbę z przedziału $[13, 18]$. Następnie rzuca kostką i sumuje liczby oczek. Przestaje rzucać w momencie, kiedy suma oczek po raz pierwszy przekroczy 12. Gdy otrzymana suma jest zgodna z deklarowaną na początku liczbą, wówczas wygrywa stawkę. W przeciwnym wypadku stawka przechodzi do puli, do której następny gracz dokłada swoją stawkę i rozpoczyna grę. Zastanówmy się, jaka liczba z przedziału $[13, 18]$ ma największe prawdopodobieństwo pojawienia się jako pierwsza przekraczająca 12.

Najpierw rozważmy następujące zagadnienie. Rzucamy kolejno kostką i sumujemy liczbę oczek. Niech p_n oznacza, że po pewnej ilości rzutów dotarliśmy do sumy n .

Wówczas:

$$p_1 = \frac{1}{6}$$

$p_2 = \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}$ – bo sumę 2 możemy otrzymać rzucając 1 z pozycji sumy 1 lub rzucając 2 od razu.

$p_3 = \frac{1}{6}p_2 + \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}$ – bo sumę 3 możemy uzyskać rzucając 1 z pozycji sumy 2, rzucając 2 z pozycji sumy 1 lub rzucając 3 od razu. Podobnie mamy:

$$p_4 = \frac{1}{6}p_3 + \frac{1}{6}p_2 + \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}$$

$$p_5 = \frac{1}{6}p_4 + \frac{1}{6}p_3 + \frac{1}{6}p_2 + \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}$$

$$p_6 = \frac{1}{6}p_5 + \frac{1}{6}p_4 + \frac{1}{6}p_3 + \frac{1}{6}p_2 + \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{6}$$

$$p_n = \frac{1}{6}p_{n-1} + \frac{1}{6}p_{n-2} + \frac{1}{6}p_{n-3} + \frac{1}{6}p_{n-4} + \frac{1}{6}p_{n-5} + \frac{1}{6}p_{n-6} \text{ dla } n \geq 7$$

Znając wartość $p_1 = \frac{1}{6}$, możemy kolejno wyliczyć:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_n	0.1666	0.1944	0.2268	0.2646	0.3087	0.3602	0.2536	0.2680	0.2803	0.2892

n	11	12	13	14	15	16	17	18
p_n	0.2933	0.2908	0.2792	0.2835	0.2861	0.2871	0.2867	0.2855

Obecnie wracamy do gry w 12.

Zauważmy, że gra zakończy się wynikiem 18, gdy po dotarciu w dowolny sposób do 12 (z prawdopodobieństwem p_{12}) wyrzucimy 6.

Zatem $P(18) = \frac{1}{6}p_{12} = 0.0487$.

Gra zakończy się wynikiem 17, gdy po dotarciu w dowolny sposób do 11 (z prawdopodobieństwem p_{11}) wyrzucimy 6 lub po dotarciu do 12 (z prawdopodobieństwem p_{12}) wyrzucimy 5. Oznacza to, że:

$$P(17) = \frac{1}{6}p_{12} + \frac{1}{6}p_{11} = 0.1455$$

Analogicznie dostaniemy:

$$P(16) = \frac{1}{6}p_{12} + \frac{1}{6}p_{11} + \frac{1}{6}p_{10} = 0.1455$$

$$P(15) = \frac{1}{6}p_{12} + \frac{1}{6}p_{11} + \frac{1}{6}p_{10} + \frac{1}{6}p_9 = 0.1923$$

$$P(14) = \frac{1}{6}p_{12} + \frac{1}{6}p_{11} + \frac{1}{6}p_{10} + \frac{1}{6}p_9 + \frac{1}{6}p_8 = 0.2369 \text{ oraz}$$

$$P(13) = \frac{1}{6}p_{12} + \frac{1}{6}p_{11} + \frac{1}{6}p_{10} + \frac{1}{6}p_9 + \frac{1}{6}p_8 + \frac{1}{6}p_7 = p_{13} = 0.2792$$

W tej grze najlepiej stawiać na zakończenie na sumie 13. O własnościach tej liczby nie mam odwagi pisać, gdyż mam *triskaidekafobię* – lęk przed liczbą 13, przynoszącą nieszczęście i pech.

Proszę zwrócić uwagę, że w niektórych hotelach brak pokoi o numerach 13, 113 itd. W wieżowcach po piętrze 12 następuje 14. Hiszpańskie i włoskie linie lotnicze nie mają w swojej flocie samolotów o numerach zawierających 13. Modele samochodów firmy Renault oznaczone są liczbami od 3 do 25 z pominięciem 13.

Debiut płytowy amerykańskiego wokalisty Johna Mayera *Room for squares* z 2001, za który otrzymał Nagrodę Grammy i jest do tej pory jego największym osiągnięciem zawierał 14 utworów. Nagranie 13 było dwusekundowym brzmieniem ciszy.

Pomińmy zatem milczeniem 13, jako najbardziej prawdopodobne zakończenie tej gry i obstawiamy inaczej. Kto wie, czy wygrana nie przyniosłaby nam pecha.

3. Makaron

Najpopularniejszy makaron to produkt wytwarzamy z jaj, mąki i wody. *Encyklopedia żywienia* wyróżnia 93 rodzajów makaronu. Długie, około 50 centymetrowe makaronowe rurki produkowane z maki pszenicznej nazywamy spaghetti. Fachowcy rozróżniają jeszcze spaghettini i spaghettoni. Różnią się one długością promienia rurki. Danie spaghetti to odpowiednio ugotowany makaron tego rodzaju, polany sosem i posypany tartym serem.

Tego rodzaju danie, osoby niewprawione w konsumpcji makaronu spożywają dosyć długo. Biorąc na widelec stos makaronu, obserwujemy, że podczas transportu do buzi nitki zsuwają się z widelca. Niestety, okruszyny sera nie zwiększają tarcia nitek o widelec. Gładkość makaronu powoduje, że prędkość zsuwania się nitek z widelca jest większa, niż prędkość pochylania głowy nad talerzem. Z kolei maksymalne pochylenie głowy nad talerzem nie jest możliwe ze względu na wysoką temperaturę potrawy i ostry zapach cebuli oraz czosnku wydobywający się z talerza.

Zatem osoby mniej zdolne manualnie z reguły spędzają długi czas nad talerzem spaghetti, oczekując albo na ostygnięciu potrawy, albo na litościwego kelnera, który zabierze ten koktajl zapachów sprzed nosa.

Zdecydowanie ze wszystkich rodzajów spaghetti wolę *spaghetti westerny*.

Wielokrotnie, siedząc nad talerzem makaronu, z nudów próbowałam widelcem łączyć końcówki rurek. Dwie końcówki mogą pochodzić od tej samej nitki bądź od różnych nitek. W pierwszym przypadku tworzymy pętelkę, w drugim zaś zwiększamy dwukrotnie długość nitki. Ideałem byłoby połączyć wszystkie końcówki. Co byłoby wówczas efektem końcowym?

Zakładając, że na talerzu mamy n nitek, każda o długości d , w skrajnych przypadkach mielibyśmy do czynienia z jedną ogromną pętlą (długości nd) albo z rodziną n pętelek, każda o długości d .

Zastanówmy się, jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba pętelek, gdy połączymy wszystkie końce rurek makaronu?

Oczywiście, przy n nitkach, wybierając jeden z końców, prawdopodobieństwo zdarzenia, że kolejny wybrany z płataniny spaghetti koniec będzie należał do tej samej nitki wynosi $p_n = \frac{1}{2n-1}$.

Wybieramy zatem dwa końce spaghetti. Z prawdopodobieństwem $p_n = \frac{1}{2n-1}$ tworzą one pętlę o długości d . Jeśli tak się zdarzy, odkładamy pętlę na bok i zostaje nam $n - 1$ nitek. Jeśli nie tworzą one pętli, to pozostaje nam również $n - 1$ nitek. Niech $E(n)$ oznacza średnią liczbę pętelek skonstruowanych z n nitek.

Otrzymujemy następującą relację:

$$\begin{aligned} E(n) &= (1 + E(n-1))p_n + E(n-1)(1 - p_n) = E(n-1) + p_n \\ &= E(n-1) + \frac{1}{2n-1} \end{aligned}$$

Mając $E(1) = 1$, po zastosowaniu indukcji matematycznej dostaniemy:

$$E(n) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

Zauważmy, że: $E(n) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$

Używając wzoru Eulera:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln n + \gamma$, gdzie $\gamma \approx 0.5772$ to tzw. stała Eulera.

Zatem $E(n) \approx \ln 2n + \gamma - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) = \ln 2 + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\ln n \approx 0.98175 + \frac{1}{2}\ln n$

Funkcja $E(n)$ rośnie bardzo wolno. Z dania składającego się ze 100 nitek spodziewamy się dostać średnio $E(100) = 3.28$ pętelek.

5 pętelek otrzymamy dopiero z talerza o 3092 nitkach!

4. Star Raiders

Star Raiders to klasyczna gra komputerowa wyprodukowana w 1979 na Atari. Wpisana na listę 10. najważniejszych gier komputerowych w historii. Przez miłośników gier uważana za podstawę dla wszystkich kosmicznych gier akcji. W latach 80. ubiegłego wieku była tak popularna, że firma McDonald's, zainspirowana jej powodzeniem, do swoich produktów dorzucała grę zdrapkę nawiązującą do *Star Raiders*.

Otóż po zakupieniu produktu w sieci McDonald's klient dostawał kartkę z ciągiem zamalowanych 10 kratek. Należało kolejno zdrapywać kratki, a pokazywały się na nich kolejne symbole. Wśród 10 symboli 2 oznaczały

nagrodę jaką można wygrać (nagrody były różne: od kolejnego hamburgera po komputer Atari). Dwa symbole przedstawiały znak ZAP (zastrzelić), zaś pozostałych 6 kratek było pustych.

Gdy kolejno zdrapując kratki otrzymano dwa obrazki zanim pojawił się symbol ZAP, to kupon upoważniał do odebrania nagrody.

Zakładając, że układ symboli w ciągu jest zupełnie przypadkowy, obliczmy prawdopodobieństwo wygrania w zdrapce.

Niech N oznacza kratkę z symbolem nagrody, Z – to kratka z symbolem ZAP, zaś P – to kratka pusta.

Zatem ilość możliwych ułożeń symboli N wynosi: $\binom{10}{2}$.

Ilość możliwych pozycji symboli Z to: $\binom{8}{2}$.

Ilość wszystkich możliwych ułożeń symboli N, Z oraz P to: $\binom{10}{2}\binom{8}{2} = 1260$.

Obecnie zajmiemy się obliczeniem ilości takich ułożeń symboli w kratkach, które gwarantują wygranę:

- 1) Pierwszy symbol ZAP znajduje się w kratce nr 3 (wówczas N zajmują pozycje 1 i 2, zaś drugi symbol Z jest w jednej z pozostałych 7 krater). Daje to $\binom{2}{2}\binom{7}{1}$ możliwości.
- 2) Pierwszy symbol ZAP znajduje się w kratce nr 4 (wówczas N zajmują dwie pozycje z pierwszych trzech, zaś drugi symbol Z jest w jednej z pozostałych 6 krater). Daje to $\binom{3}{2}\binom{6}{1}$ możliwości.

Postępując analogicznie, obliczmy liczbę możliwych ułożeń w przypadkach, gdy pierwszy symbol Z znajduje się w kratce nr 5, 6, 7, 8, 9.

Zatem liczba ułożeń pozycji wygrywających wynosi:

$$\binom{2}{2}\binom{7}{1} + \binom{3}{2}\binom{6}{1} + \binom{4}{2}\binom{5}{1} + \binom{5}{2}\binom{4}{1} + \binom{6}{2}\binom{3}{1} + \binom{7}{2}\binom{2}{1} + \binom{8}{2}\binom{1}{1} = 210$$

Prawdopodobieństwo wygrania nagrody wynosi $\frac{210}{1260} = 1/6$

Zainteresowanego Czytelnika namawiamy do obliczenia prawdopodobieństwa wygranej, w przypadku gdy zdrapka zawiera n krater z symbolem nagrody, p – krater z symbolem ZAP oraz r – krater pustych.

5. Kasje

W grze biorą udział dwie osoby. Gra polega na wyrzuceniu jak największego układu otrzymanego z trzech kości. Każdy gracz ma do wykorzystania co najwyżej dwa rzuty i rzuca co najwyżej trzema kostkami. Celem gry jest uzyskanie jak najwyższego układu oczek na wyrzuconych kostkach. Najwyższym układem jest 4, 4, 4. Kolejnymi są 4, 1, 6; 4, 1, 5; 4, 1, 4; 4, 1, 3; 4, 1, 2 i 4, 1, 1. Wygrywa ten gracz, który uzyskał wyższy układ. Zasady gry są następujące: Gracz A rzuca trzema kośćmi.

Gdy w pierwszym rzucie otrzyma układ 4, 4, 4, to przekazuje kości graczowi B i on ma szansę jedynie na remis, jeśli w pierwszym rzucie wyrzuci układ 4, 4, 4. Jeśli w pierwszym rzucie gracza A wypadnie jedna lub dwie czwórki, to wówczas zostawia jedną z nich, rzuca jeszcze raz dwoma kostkami, aby otrzymać któryś z wygrywających układów.

Jeżeli w pierwszym rzucie gracza A nie pojawi się żadna czwórka, to rzuca jeszcze raz trzema kostkami.

Strategia wykorzystywana przy drugim rzucie jest następująca:

Jeżeli za pierwszym razem gracz A otrzymał któryś z wygrywających układów, tzn.: 4, 1, k, gdzie $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, to z reguły przy $k = 1, 2, 3$ gracz zatrzymuje na stole dwie kostki z oczkami 4, 1 i rzuca trzecią, aby uzyskać wyższy wynik. W przypadku $k = 4, 5, 6$ gracz zadowolą się wynikiem otrzymanym w pierwszym rzucie i rezygnuje z przywileju kolejnego rzutu.

Po opisie gry trudno jest zdecydować, czy ta gra jest fair, czy warto być pierwszym, czy drugim.

Dlatego z uwagą prześledzimy szanse na zwycięstwo w tej grze, z punktu widzenia gracza B. Oczywiście, zdarzenia polegające na wyrzuceniu określonego układu są niezależne i takie same dla obydwu graczy. Nas interesować będzie zagadnienie ciekawsze, tzn. wyliczymy szanse na wygraną gracza B, w każdej okoliczności, kiedy zna już wynik gracza A.

Najpierw jednak obliczmy kilka prawdopodobieństw użytecznych w tej grze.

Prawdopodobieństwo wyrzucenia układu 4, 4, 4 w jednym rzucie wynosi $P(4, 4, 4) = 1/216$.

Prawdopodobieństwo wyrzucenia jednej czwórki przy rzucie trzema kostkami wynosi:

$$3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$$

Prawdopodobieństwo wyrzucenia dwóch czwórek w rzucie trzema kostkami wynosi:

$$3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$$

Prawdopodobieństwo niewyrzucenia czwórki w rzucie trzema kostkami wynosi:

$$\frac{216 - 1 - 75 - 15}{216} = \frac{125}{216}$$

Prawdopodobieństwo wyrzucenia za pierwszym razem jednej lub dwóch czwórek bez jedynki obliczymy odejmując od prawdopodobieństwa układów zawierających jedną lub dwie czwórki prawdopodobieństwa wyrzucenia układów: 4, 1, 1; 4, 1, 2; 4, 1, 3; 4, 1, 5; 4, 1, 6; oraz 4, 4, 1.

Mamy:

$$P(4, 1, 1) = 3/216, P(4, 1, 2) = 6/216, P(4, 1, 3) = 6/216$$

$$P(4, 1, 5) = 6/216, P(4, 1, 6) = 6/216, P(4, 4, 1) = 3/216$$

Zatem prawdopodobieństwo otrzymania w jednym rzucie trzema kostkami jednej lub dwóch czwórek bez jedynki wynosi:

$$\frac{75 + 15 - 3 - 6 - 6 - 6 - 6 - 3}{216} = \frac{60}{216}$$

Prawdopodobieństwo, że gracz A zakończy swoją rundę z wynikiem 4, 1, 1 wynosi:

$$\frac{3}{216} \cdot \frac{1}{6} +$$

(za pierwszym razem wyrzucił 4, 1, 1 i potem, chcąc poprawić wynik, rzucił jeszcze raz jedną kostką, ale otrzymał 1)

$$\frac{6}{216} \cdot \frac{1}{6} +$$

(za pierwszym razem wyrzucił 4, 1, 2 i, chcąc poprawić wynik, rzucił jeszcze raz jedną kostką, ale otrzymał 1)

$$\frac{6}{216} \cdot \frac{1}{6} +$$

(za pierwszym razem wyrzucił 4, 1, 3 i, chcąc poprawić wynik, rzucił jeszcze raz jedną kostką, ale otrzymał 1)

$$\frac{60}{216} \cdot \frac{1}{36} +$$

(za pierwszym razem wypadła jedna lub dwie czwórki, bez jedynek. Gracz A zatrzymuje jedną czwórkę i rzuca dwiema kostkami, aby otrzymać dwie jedynki).

$$\frac{125}{216} \cdot \frac{3}{216}$$

(za pierwszym razem nie wypadła ani jedna czwórka i przy drugim rzucie trzema kostkami pojawił się układ 4, 1, 1)

Gracz A zakończy rundę wynikiem 4, 1, 1 z prawdopodobieństwem:

$$P(A411) = \frac{3}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{60}{216} \cdot \frac{1}{36} + \frac{125}{216} \cdot \frac{3}{216} = 0.02733$$

Podobnie obliczamy prawdopodobieństwa ukończenia rundy przez gracza A z wynikiem 412 i 413, otrzymując:

$$P(A412) = P(413) = \frac{3}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{60}{216} \cdot \frac{2}{36} + \frac{125}{216} \cdot \frac{6}{216} \\ = 0.04308$$

Następnie obliczymy prawdopodobieństwo zakończenia rundy przez gracza A wynikiem 4, 1, 4:

$$\frac{3}{216} \cdot \frac{1}{6} +$$

(wyrzucił 4, 1, 1 i poprawiał wynik rzucając jedną kostką – wypadła 4)

$$\frac{3}{216} +$$

(wyrzucił za pierwszym razem 4, 1, 4 i zadowolił się wynikiem)

$$\frac{6}{216} \cdot \frac{1}{6} +$$

(wyrzucił za pierwszym razem 4, 1, 2 i poprawiał wynik rzucając jedną kostką – wypadła 4)

$$\frac{6}{216} \cdot \frac{1}{6} +$$

(wyrzucił za pierwszym razem 4, 1, 3 i poprawiał wynik rzucając jedną kostką – wypadła 4)

$$\frac{60}{216} \cdot \frac{2}{36} +$$

(za pierwszym razem wypadła jedna lub dwie czwórki, bez jedynek. Gracz A zatrzymuje jedną czwórkę i rzuca dwiema kostkami otrzymując 4 i 1)

$$\frac{125}{216} \cdot \frac{3}{216}$$

(za pierwszym razem nie wypadła ani jedna czwórka i przy drugim rzucie trzema kostkami pojawił się układ 4, 4, 1)

Ostatecznie:

$$P(A414) = \frac{3}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{216} + \frac{6}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{60}{216} \cdot \frac{2}{36} + \frac{125}{216} \cdot \frac{3}{216} \\ = 0.04893$$

Podobnie możemy obliczyć:

$$\begin{aligned} P(A415) &= P(416) \\ &= \frac{3}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{216} + \frac{6}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{60}{216} \cdot \frac{2}{36} + \frac{125}{216} \cdot \frac{6}{216} \\ &= 0.07086 \end{aligned}$$

Przypomnijmy jeszcze, że:

$$P(A444) = \frac{1}{216} = 0.00463$$

Zauważmy jeszcze, że gracz A zakończy rundę wynikiem niepremiowanym z prawdopodobieństwem:

$$\frac{60}{216} \cdot \frac{25}{36} +$$

(za pierwszym razem wyrzucił jedną lub dwie czwórki, natomiast w drugim rzucie dwiema kostkami nie dostał ani jednej czwórki)

$$\frac{125}{216} \cdot \frac{(216 - 4 \cdot 6 - 2 \cdot 3)}{216}$$

(za pierwszym razem nie było czwórki, zaś w drugim rzucie trzema kostkami nie otrzymał premiowanego układu).

Zatem prawdopodobieństwo zakończenia rundy przez gracza A z układem niepremiowanym, zerowym wynosi:

$$P(A0) = \frac{60}{216} \cdot \frac{25}{36} + \frac{125}{216} \cdot \frac{186}{216} = 0.69123$$

Obecnie zajmiemy się szansami gracza B na odniesienie zwycięstwa w pojedynczej rundzie. Oczywiście, ze względu na niezależność zdarzeń, prawdopodobieństwa otrzymania poszczególnych wyników są takie same zarówno dla gracza A, jak i B. Ważne są natomiast prawdopodobieństwa warunkowe:

Oczywiście, jeżeli A osiągnie wynik zerowy, to B z prawdopodobieństwem 0.69123 zremisuje, z prawdopodobieństwem $1 - 0.69123 = 0.30877$ wygra i z prawdopodobieństwem 0 przegra.

Zapisując symbolicznie, otrzymujemy:

$$P(BR/A0) = 0.69123, P(BZ/A0) = 0.30877, P(BP/A0) = 0$$

gdzie: BR oznacza zdarzenie – gracz B remisuje, BZ – gracz B zwycięża, BP – gracz B przegrywa.

Jeżeli A osiągnie wynik 411, to B zremisuje z prawdopodobieństwem:

$$\frac{125}{216} \cdot \frac{3}{216} +$$

(za pierwszym razem nie wypadła ani jedna czwórka i przy drugim rzucie trzema kostkami pojawił się układ 4, 1, 1)

$$\frac{60}{216} \cdot \frac{1}{36} +$$

(za pierwszym razem wypadła jedna lub dwie czwórki, bez jedynek. Zatrzymuje jedną czwórkę, rzuca dwiema kostkami i otrzymuje dwie jedynek)

$$\frac{3}{216} \cdot \frac{1}{6}$$

(za pierwszym razem wyrzucił 4, 1, 1 i potem, chcąc poprawić wynik, rzucił jeszcze raz jedną kostką i wypadła 1)

Zatem:

$$P(BR/A411) = \frac{125}{216} \cdot \frac{3}{216} + \frac{60}{216} \cdot \frac{1}{36} + \frac{3}{216} \cdot \frac{1}{6} = 0.01807$$

Oczywiście: $P(BP/411) = 0.69123$, zatem $P(BZ/A411) = 0.29070$.

Następnie ocenimy szanse gracza B w przypadku osiągnięcia przez A wyniku 412.

Szanse na remis wynoszą:

$$\frac{3}{216} \cdot \frac{1}{6} +$$

(za pierwszym razem wyrzucił 4, 1, 1 i potem, chcąc poprawić wynik, rzucił jeszcze raz jedną kostką i otrzymał 2)

$$\frac{6}{216} \cdot \frac{1}{6} +$$

(za pierwszym razem wyrzucił 4, 1, 2 i, chcąc poprawić wynik, rzucił jeszcze raz jedną kostką, ale otrzymał znowu 2)

$$\frac{60}{216} \cdot \frac{2}{36} +$$

(za pierwszym razem wypadła jedna lub dwie czwórki, bez jedynek. Gracz A zatrzymuje jedną czwórkę i rzuca dwiema kostkami, otrzymując 4 i 2)

$$\frac{125}{216} \cdot \frac{6}{216}$$

(za pierwszym razem nie wypadła ani jedna czwórka i przy drugim rzucie trzema kostkami pojawił się układ 4, 1, 2)

Zatem:

$$P(BR/A412) = \frac{3}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{60}{216} \cdot \frac{2}{36} + \frac{125}{216} \cdot \frac{6}{216} = 0.03845$$

Z kolei szanse na porażkę gracza B przy wyniku 412 gracza A liczymy jako:

$$\frac{3}{216} \cdot \frac{1}{6} +$$

(za pierwszym razem wyrzucił 4, 1, 1 i potem, chcąc poprawić wynik, rzucił jeszcze raz jedną kostką i otrzymał 1)

$$\frac{6}{216} \cdot \frac{1}{6} +$$

(za pierwszym razem wyrzucił 4, 1, 2 i, chcąc poprawić wynik, rzucił jeszcze raz jedną kostką, ale otrzymał znowu 1)

$$\frac{60}{216} \cdot \frac{26}{36} +$$

(za pierwszym razem wypadła jedna lub dwie czwórki, bez jedynek. Gracz A zatrzymuje jedną czwórkę i rzuca dwiema kostkami, otrzymując wynik gorszy bądź równy 4 i 2, czyli nie wyrzuci: 42, 24, 43, 34, 45, 54, 46, 64)

$$\frac{125}{216} \cdot \frac{(3 + 186)}{216}$$

(za pierwszym razem nie wypadła ani jedna czwórka i przy drugim rzucie trzema kostkami pojawił się układ gorszy bądź równy 4, 1, 2, czyli w drugim rzucie pojawi się układ niepremiowany lub 4, 1, 1).

Zatem:

$$P(BP/A412) = \frac{3}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6}{216} \cdot \frac{1}{6} + \frac{60}{216} \cdot \frac{26}{36} + \frac{125}{216} \cdot \frac{(3 + 186)}{216} = 0.71393$$

Oczywiście wtedy:

$$P(BZ/A412) = 0.24762$$

Bardzo podobnie możemy obliczyć:

$$\begin{aligned} P(BR/A413) &= 0.04308, P(BP/A413) = 0.76164, P(BZ/A413) = 0.19528 \\ P(BR/A414) &= 0.04893, P(BP/A414) = 0.80472, P(BZ/A414) = 0.14635 \\ P(BR/A415) &= 0.07317, P(BP/A415) = 0.84902, P(BZ/A415) = 0.07780 \end{aligned}$$

$$P(BR/A416) = 0.07780, P(BP/A416) = 0.91757, P(BZ/A416) = 0.00463$$

Przy wyniku A444 mamy:

$$P(BR/A444) = 0.00463, P(BP/A444) = 0.99537, P(BZ/A444) = 0$$

Ostatecznie:

$$\begin{aligned} P(BZ) &= P(BZ/A0) \cdot P(A0) + P(BZ/A411) \cdot P(A411) + P(BZ/A412) \cdot P(A412) + \\ &+ P(BZ/A413) \cdot P(A413) + P(BZ/A415) \cdot P(A415) + P(BZ/A416) \cdot P(A416) + P(BZ/A444) \cdot P(A444) = \\ &= 0.30877 \cdot 0.69123 + 0.29070 \cdot 0.02733 + 0.24762 \cdot 0.04308 + 0.19528 \cdot 0.04308 + \\ &+ 0.14635 \cdot 0.04893 + 0.07780 \cdot 0.07086 + 0.00463 \cdot 0.07086 = 0.25346 \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo porażki obliczymy jako:

$$\begin{aligned} P(BP) &= P(BP/A0) \cdot P(A0) + P(BP/A411) \cdot P(A411) + P(BP/A412) \cdot P(A412) + \\ &+ P(BP/A413) \cdot P(A413) + P(BP/A415) \cdot P(A415) + P(BP/A416) \cdot P(A416) + \\ &+ P(BP/A444) \cdot P(A444) = 0.25162 \end{aligned}$$

Wówczas: $P(BR) = 0.49492$.

Zatem prawdopodobieństwo wygrania przez gracza B jest minimalnie większe od prawdopodobieństwa przegrania. $P(BZ) - P(BP) = 0.00184$.

Gdyby w każdej rundzie gracze stawiali po 1 PLN i w przypadku remisu wycofywali stawkę, a w przypadku zwycięstwa jednej ze stron otrzymywałyby ona stawkę strony przeciwnej, to po 1000 rund średnia wygrana gracza B wynosiłaby 1.84 PLN. Zatem gra jest *prawie fair* i fakt, że drugi gracz zna wynik uzyskany przez gracza A, wpływa oczywiście na jego zachowanie, ale nie zwiększa znacząco jego szans na zwycięstwo.

Na zakończenie rozdziału pozostała krótka historia o tajemnicach hazardu.

6. Tajemnice hazardu

Do przeprowadzenia tricku potrzebne jest 5 kart: 2 czerwone (kiery, kara), 2 czarne (piki i trefle) oraz joker.

Prosimy kogoś z widowni o dokładne potasowanie 5 kart i informujemy, że właśnie wczoraj poznaliśmy tajemnicę optymalnego obstawiania w grach hazardowych.

Niech ktoś z widowni losuje kolejno karty. Niech kartą wygrywającą będzie czerwona, zaś każda czarna lub joker będą kartami przegrywającymi.

Za każdym razem przed losowaniem będę płacić za udział w grze, powiedzmy x PLN. Jeśli wygram, następnym razem stawiam $0.5x$, jeśli przegram stawiam $1.5x$.

Powiedzmy, że stawiam 16 PLN. Jak zostanie wylosowana karta czerwona, wygrywam je i w następnej rundzie obstawiam za 8 PLN, gdy wylosowana zostanie karta czarna lub joker, przegrywam i w następnej rundzie stawiam $16 + 0.5 \cdot 16 = 24$.

Na kartce zapisuję, jaką kwotę wygram lub przegram po pięciu rundach. Okazuje się, że niezależnie od kolejności i wartości losowania kart, zawsze wygram ostatecznie $\frac{5}{16}$ stawki.

Zatem zaczynając obstawianie od 16 PLN, zawsze ostatecznie wygram 5 PLN.

Zobaczmy, na razie na przykładzie, jak układają się wygrane przy losowaniu:

C(czerwona), Ca(czarna), Ca, J(Joker), C:

Obstawiam	Wygrywam	Przegrywam
16	16	
8	–	8
12	–	12
18	–	18
27	27	–
	43	38

$$43 - 38 = 5!$$

Przypuśćmy, że układ losowań jest następujący:

Ca, C, C, Ca, J

Obstawiam	Wygrywam	Przegrywam
16	–	16
24	24	–
12	12	–
6	–	6
9	9	9
	36	31

$$36 - 31 = 5!$$

Wyjaśnimy, dlaczego ten trick zawsze działa.

Przyjmujemy następujące oznaczenia. Stawiamy przed grą x PLN, po przegranej stawiamy ax PLN, po wygranej stawiamy bx PLN.

Zatem w przypadku układu (C, Ca), najpierw wygrywamy x PLN, potem przegrywamy ax PLN. Ostatecznie zostaje nam: $x(1 - a)$ PLN.

W przypadku układu (Ca, C), najpierw przegrywamy x PLN, potem wygrywamy bx PLN. Ostatecznie zostaje nam: $x(b - 1)$ PLN.

Zauważmy, że w przypadku gdy $a + b = 2$, czyli $1 - a = b - 1$, kolejność wygranych i przegranych nie ma znaczenia. W naszym przypadku $a = 0.5$, $b = 1.5$; zatem zachodzi właśnie ten przypadek.

Zauważmy, że karta J odpowiada karcie Ca.

Zatem układ C, C, Ca, Ca, Ca jest równoznaczny z układem C, Ca, C, Ca, Ca.

Oczywiście, każdy z możliwych dziesięciu układów jest równoznaczny z punktu widzenia ostatecznej wygranej. Zatem, aby obliczyć sumę wygranej w grze, wystarczy ją znaleźć dla jednego z możliwych układów. I tak, dla układu kart: C, C, Ca, Ca, Ca, mamy:

$$x \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{16} x$$

W przypadku: Ca, Ca, Ca, C, C wygrana wynosi:

$$W = x \left(-1 - \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2} \right)^2 + \left(\frac{3}{2} \right)^3 + \left(\frac{3}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{16} x$$

W ogólnym przypadku, gdy dysponujemy talią n kart, spośród których jest k wygrywających, ostateczna suma wygranej wynosi:

$$\begin{aligned} & x(1 + b + \dots + b^{k-1} - b^k - b^k a - b^k a^2 - \dots - b^k a^{n-k-1}) = \\ & = x \left(\frac{1 - b^k}{1 - b} - b^k \frac{(1 - a^{n-k})}{1 - a} \right) = x \frac{1 - b^k a^{n-k}}{1 - b} \end{aligned}$$

bo $a + b = 2$.

Wstawiając w miejsce $b = 0.5$, $a = 1.5$, $n = 5$, $k = 2$, otrzymamy $W = x \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{27}{32} \right) = x \cdot \frac{5}{16}$.

Biorąc $x = 16$, otrzymamy $W = 5$.

Ustalając $k = 2$ oraz pamiętając, że $a = 2 - b$, otrzymujemy $W = W(b, n)$.

Analiza tej funkcji pozwala nam stwierdzić, że dla każdej wartości n maksymalna wygrana jest osiągalna dla $b \approx 0.07$; wtedy $W(0.077, n) \cong 1.0377x$.

Ogólnie, dla $b \in [0, 0.15]$ mamy $W(b, n) > x$. Następnie dla $b \in (0.15, 0.61)$ wygrana jest mniejsza od stawki x , ale wciąż dodatnia, dla pozostałych wartości b wygrana jest ujemna.

7. Czy gra jest fair?

Potasowaną talię 52 kart rozkładamy na 3 stosy koszulkami do spodu. Odkrywamy pierwsze karty każdej z kupek i zapisujemy. Następnie karty znowu są tasowane i operację powtarzamy 10 razy. Stawiamy 10 PLN, że co najmniej 5 razy na spodzie któregoś z trzech stosików pojawi się as, dziewiątka lub walet. Oczywiście, karty mogą być tasowane dowolnie długo i przez dowolną osobę, a rozkładu na 3 stosiki może dokonywać ktokolwiek.

Kto ma większą szansę na wygraną. Okazuje się, że szansa na sukces w pojedynczym doświadczeniu wynosi:

$$\frac{12}{52} + \frac{40}{52} \cdot \frac{12}{51} + \frac{40}{52} \cdot \frac{39}{51} \cdot \frac{12}{50} \approx 0,5529$$

Zgodnie ze schematem Bernoulliego zwycięstwo w co najmniej pięciu próbach wynosi około 0.7445, czyli prawie 75%.

Zatem prowadzący wygrywa w 3 partiach na każde 4.

Na zakończenie podam krótki trick – zabawę, podczas której możemy zbadać stopień skłonności do podejmowania ryzykownych decyzji przez osoby biorące udział w eksperymencie. Zaczynamy!

8. Odgadujemy skłonność do ryzyka

Do przeprowadzenia tricku potrzebujemy 24 monety o nominale 1 PLN oraz trzy różne banknoty powiedzmy 10 PLN, 20 PLN oraz 50 PLN. Wybieramy z widowni 3 osoby, prosząc je o przedstawienie się (umówmy się, że są to osoby A, B, C) i informujemy je, że zostaną poddane eksperymentowi, który wyjawia ich skłonność do ryzyka.

Ze stołu, na którym leżą monety, niby niedbale zgarniamy kilka złotych i wręczamy kolejno wybranym osobom odpowiednio 1, 2 i 3 monety jednozłotowe w ten sposób, aby nie zorientowały się, ile kto dostał. Następnie opowiadamy, że 3 banknoty leżące na stole symbolizują kredyty, które można zaciągnąć. Prosimy, aby ochotnicy podchodzili kolejno do stołu i wybierali po jednym kredycie, oczywiście pierwsza osoba ma do wyboru aż 3, druga 2, a trzeciej pozostaje tylko jeden banknot.

Następnie ta osoba, która wybrała kredyt 10 PLN ma ze stołu zabrać taką samą liczbę monet, jaką poprzednio dostała – jest to ustalona spłata kredytu. Osoba, która wzięła 20 PLN proszona jest o to, by ze stołu zebrać dwa razy więcej monet niż dostała na początku – to jej kredyt. Ta osoba, która zaciągnęła kredyt 50 PLN, zabiera 4 razy więcej monet niż dostała na początku.

Odwracamy się i krótki rzut oka na stół, gdzie znajduje się reszta monet, pozwoli nam na odgadnięcie, kto wziął jaki banknot.

Tabela poniżej przedstawia wszystkie możliwe wybory:

A	B	C	ze stołu ubyło	zostało na stole
dostał 1 PLN	dostał 2 PLN	dostał 3 PLN		
zabrał 10 PLN	zabrał 20 PLN	zabrał 50 PLN	$1 \text{ PLN} + 4 \text{ PLN} + 12 \text{ PLN} = 17 \text{ PLN}$	1 PLN
zabrał 10 PLN	zabrał 50 PLN	zabrał 20 PLN	$1 \text{ PLN} + 8 \text{ PLN} + 6 \text{ PLN} = 15 \text{ PLN}$	3 PLN
zabrał 20 PLN	zabrał 10 PLN	zabrał 50 PLN	$2 \text{ PLN} + 2 \text{ PLN} + 12 \text{ PLN} = 16 \text{ PLN}$	2 PLN
zabrał 20 PLN	zabrał 50 PLN	zabrał 10 PLN	$2 \text{ PLN} + 8 \text{ PLN} + 3 \text{ PLN} = 13 \text{ PLN}$	5 PLN
zabrał 50 PLN	zabrał 10 PLN	zabrał 20 PLN	$4 \text{ PLN} + 2 \text{ PLN} + 6 \text{ PLN} = 12 \text{ PLN}$	6 PLN
zabrał 50 PLN	zabrał 20 PLN	zabrał 10 PLN	$4 \text{ PLN} + 4 \text{ PLN} + 3 \text{ PLN} = 11$	7 PLN

Można zatem po liczbie monet, które pozostały na stole, wydedukować kto wziął jaki banknot:

Zostało na stole	A zabrał	B zabrał	C zabrał
1	10	20	50
2	20	10	50
3	10	50	20
5	20	50	10
6	50	10	20
7	50	20	10

*Black and blue and who
knows which is which and
who is who. Up and down.*

R. Waters

6 STOPNI ODDALENIA

W czerwcu 2006 roku pracownicy firmy Microsoft analizowali nadawców i odbiorców 30 mld wiadomości mailowych krążących w sieci pomiędzy 240 mln komputerów, użytkowników Internetu. Jak sami sprawdzili zajmowali się więcej niż połową wiadomości krążących pomiędzy tymi komputerami tego miesiąca. Ich celem było sprawdzenie hipotezy postawionej w 1967 roku przez Stanleya Milgrama z Harvard University, że dowolne dwie osoby na kuli ziemskiej łączy tzw. *sześć stopni oddalenia*.

Stanley Milgram (1933-1984), amerykański psycholog społeczny. Po obronie pracy doktorskiej w 1967 roku na Uniwersytecie Harvarda, zaproponowano mu etat, a następnie w atmosferze skandalu wyrzucono go z uczelni. Bezpośrednim powodem takiej reakcji władz uczelni było przeprowadzenie przez Milgrama szokującego eksperymentu *posłuszeństwa wobec władzy*.

W tym rozdziale opiszemy najśłynniejszy eksperyment Milgrama, znany w literaturze jako wspomniane *6 stopni oddalenia* lub *Świat jest mały*.

Milgram wybrał losowo kilka osób mieszkających w Bostonie, a następnie wysłał kilkaset listów do mieszkańców stanów Nebraska i Kansas (wybierając ich adresy z książki telefonicznej) prosząc, aby listy te przesłali adresatom w Bostonie, jeśli ich osobiście znają. Jeżeli ich nie znają, wówczas mieli za zadanie przesłanie tych listów znajomym, którzy być może znają adresata. Ci znajomi mieli postąpić podobnie. Warunkiem było, za każdym razem, przekazywanie listów osobom, które są znane nadawcom.

Prawie wszystkie listy zawsze docierały do adresatów. Średnia liczba nadań listu w łańcuchu wynosiła 6. To upoważniło Milgrama do stwierdzenia, że dowolne dwie osoby dzieli sześć stopni oddalenia w łańcuchu znajomych.

Jak wspomniałem wcześniej, w 2006 roku sprawdzono, że pomiędzy dwoma dowolnymi użytkownikami Internetu komunikującymi się ze znajomymi mailowo, istnieje średnio 6,6 pośrednich ogniw. Wniosek taki powstał na podstawie analizy przeszło 30 mld listów mailowych wysyłanych z setek tysięcy komputerów. Badania ogniw połączeń dokonano przez zbudowanie grafu komunikacji. Wierzchołkami byli użytkownicy wysyłający maile. Dwa wierzchołki były połączone krawędzią, jeśli ich użytkownicy wymieniali między sobą wiadomości

mailowe. W ten sposób otrzymano spójny graf połączeń (dowolne dwa wierzchołki były połączone drogą, składającą się z krawędzi).

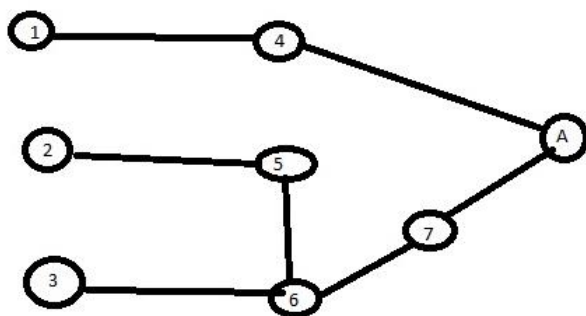
Okazało się, że średnia długość drogi łączącej dowolne dwa wierzchołki to 6,6 krawędzi. To upoważniło badaczy do potwierdzenia tezy o sześciu stopniach oddalenia w sieci komputerowej.

Zwróćmy tylko uwagę, że analizowano listy wysyłane z własnej, nieprzymuszonej woli, do znajomych. Natomiast w eksperymencie Milgrama celem było dotarcie do konkretnej osoby poprzez znajomych.

Potwierdzenia eksperymentu Milgrama o „małym świecie” z użyciem poczty elektronicznej podjęto się w 2003 roku w Columbia University. Wybrano 18 celów z 13 krajów świata, a 24163 osoby rozpoczynały wysyłanie listów (każda do jednego celu) Oczywiście kierowano się zasadą, że list ma trafić do celu tylko poprzez osoby, które są znane nadawcy. Wysłać listy możemy tylko do osoby, którą znamy licząc, że ona może zna kogoś kto przybliży ją do ostatecznego odbiorcy. Tylko 384 listy z początkowych 24163 dotarły do celu. Większość osób biorących udział w zabawie, rezygnowała z udziału, tracąc zainteresowanie, ewentualnie zapominając o wysłaniu listu. Potwierdzono, jednakże, hipotezę Milgrama o około sześciu stopniach oddalenia pomiędzy dwoma osobami na świecie.

Przyjrzyjmy się w jaki sposób dokonano wyliczeń potwierdzających hipotezę Milgrama.

Dla ułatwienia przypuścmy, że mamy trójkę początkowych nadawców (1, 2, 3), jednego finalnego odbiorcę (A), połączonych ze sobą siecią jak na rysunku.



1 jest połączona z A łańcuchem o długości 2, 2 o długości 4, zaś 3 o długości 3. Łańcuchy te pozwalają na przypuszczenie, że średnia długość łańcucha znajomości wynosi 3.

W tym miejscu zaczynamy czuć się mało komfortowo, gdyż każdy z ewentualnych nadawców przekazuje dalej list z pewnym prawdopodobieństwem. Nie można założyć, że każdy z pewnością przekaże list dalej. Różne powody składają się na prawdopodobieństwo przekazania listu dalej. Załóżmy zatem, dla uproszczenia, że każdy z nadawców wysła list dalej ze stałym prawdopodobieństwem p . Zatem prawdopodobieństwo pojawienia się w sieci łańcucha

o długości k wynosi $P(k) = p^k$. Jeżeli każdy z początkowej trójki miał do nadania N listów, to spodziewamy się średnio: Np^2 – ukończonych łańcuchów o długości 2, i odpowiednio Np^3 , Np^4 łańcuchów o długości 3 oraz 4.

Średnia długość łańcucha wynosić będzie:

$$\frac{2Np^2 + 3Np^3 + 4Np^4}{Np^2 + Np^3 + Np^4} = 4 - \frac{p + 2}{p^2 + p + 1}$$

Średnia długość będzie wynosić 3 tylko dla $p = 1$ i maleje wraz ze zmniejszeniem się wartości p . Przykładowo dla $p = 0,5$ wynosi 2,57.

Z drugiej strony, jak widać z rysunku, oczywiście średni stopień oddalenia wynosi 3. Zatem należy zmodyfikować obliczenia dotyczące długości średniego łańcucha.

Niech $N(k)$ oznacza liczbę rzeczywistych łańcuchów o długości k w sieci (liczonych dla $p = 1$), natomiast $O(k)$ to liczba łańcuchów o długości k , które pojawiły się w trakcie eksperymentu.

Mamy zatem:

$$O(k) = N(k) \cdot P(k)$$

wtedy:

$$N(k) = \frac{O(k)}{P(k)}$$

Wówczas średnia długość łańcucha będzie liczona według wzoru:

$$\frac{\frac{O(2)}{p^2} \cdot 2 + \frac{O(3)}{p^3} \cdot 3 + \frac{O(4)}{p^4} \cdot 4}{\frac{O(2)}{p^2} + \frac{O(3)}{p^3} + \frac{O(4)}{p^4}}$$

Dla rzeczywistych zaobserwowanych łańcuchów $O(2) = 6$, $O(3) = 2$ oraz $O(4) = 1$ nawet przy $p = \frac{1}{2}$ otrzymujemy średnią długość łańcucha 2.86.

Zatem ta poprawka urealnia eksperyment. Zauważmy jeszcze, że obliczeń dokonano przy uproszczonym założeniu o stałym prawdopodobieństwie wysyłania listu. Z praktyki wiadomo, że wraz ze wzrostem długości łańcucha maleje prawdopodobieństwo pojawienia się kolejnego ogniwa w łańcuchu, co sugerowałoby wprowadzenie pojęcia p_k – prawdopodobieństwa pojawienia się ogniwa o numerze k w łańcuchu (prawdopodobieństwo, że k -ty odbiorca prześle list dalej).

Wówczas: $P(k) = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$.

Najważniejsze, że ten eksperyment potwierdził tezę Milgrama o 6 stopniach oddalenia.

Sześć stopni oddalenia łączy ogniwami dowolne pary ludzi łańcuchem znajomości. Podobną zabawę wymyślili matematycy przy definiowaniu tzw. liczb Erdosa.

Paul Erdos (1913-1966) – wybitny węgierski matematyk, był specjalistą z teorii liczb, kombinatoryki i grafów. Nie miał stałego miejsca zamieszkania, przemieszczał się pomiędzy Instytutami Matematyki całego świata, goszczony z honorami godnymi największej gwiazdy. Opublikował ponad 1000 wspólnych artykułów z matematykami całego świata.

Dwa lata po jego śmierci powstało pojęcie *liczby Erdosa*. Otóż przyjmuje się, że sam Erdos posiada liczbę Erdosa równą 0. Liczbą 1 oznaczeni są matematycy, którzy opublikowali pracę wspólnie z Erdosem. Liczbą 2 wyróżnieni są ci, którzy opublikowali prace wspólnie z matematykami o Liczbie Erdosa równej 1. Ogólnie; liczbę Erdosa $k + 1$ posiadają ci, którzy mają napisaną choć jedną wspólną pracę z osobami o liczbie Erdosa k . Obecnie wartości liczby Erdosa dochodzą do 17.

Odpowiednikiem liczby Erdosa w świecie filmu jest *liczba Kevina Bacona*. Sam Bacon posiada liczbę 0. Jedynekami są ci, którzy występowali wspólnie z Baconem. Dwójki to aktorzy, którzy grali w choć jednym filmie z aktorami, którzy są obdarzeni wartością 1 liczby Bacona, itd. Obecnie (2014) najwyższa odnotowana wartość liczby Bacona to 9. Daniel Olbrychski poprzez grę w filmie *Salt* (2010) z Frankiem Hartsem jest posiadaczem liczby Bacona 2, gdyż Harts grał z Baconem w filmie *In the cut* (2003).

W świecie muzyki odpowiednikiem liczby Erdosa jest *liczba Black Sabbath* odzwierciedlająca stopień oddalenia muzyków, którzy grali koncerty wspólnie z hard rockową grupą Black Sabbath. Zespół ten powstał w 1969 roku i wciąż koncertuje. W roku 2014 po raz pierwszy odbył się koncert tego legendarnego zespołu w naszym kraju.

*I'm in the high-fidelity first class
traveling set
And I think I need a Lear jet.*

R. Waters

OVERBOOKING

Hotele, aby zwiększyć zyski, stosują tzw. *overbooking*. Tzn. pozwalają na dokonanie rezerwacji na większą liczbę miejsc niż jest w rzeczywistości dostępna. Z doświadczenia bowiem wiadomo, że pewna część podróżnych z różnych powodów, pomimo dokonania rezerwacji miejsc, nie pojawia się. Zatem ich pokoje pozostają niewykorzystane.

Zarządzający, wobec powyższego, decydują się na to, aby chętni rezerwowali pokoje hotelowe w liczbie przewyższającej rzeczywiste możliwości hotelu. Oczywiście liczą się jednocześnie z możliwością wypłaty rekompensaty każdej osobie, która wcześniej dokonała rezerwacji, a z braku miejsc nie została umieszczona w hotelu.

Podobne działania stosuje się w kinach, teatrach czy też przy dystrybucji biletów lotniczych. Linie lotnicze pozwalają na dokonanie rezerwacji, a nawet na sprzedaż większej liczby miejsc niż jest faktycznie dostępna w samolocie na konkretny lot, licząc się z tym, że w przypadku gdy wszyscy pasażerowie stawią się na odprawie, niektórzy będą niewpuszczeni na pokład i otrzymają dużą rekompensatę w związku z przełożonym lotem.

W praktyce, podczas odprawy pracownicy danej linii grzecznie pytają się czy są wśród pasażerów tacy, którzy nie mieliby nic przeciwko temu, aby za dodatkową opłatą przełożyć swój lot na następny możliwy. Jest to zasada powszechnie stosowana przez wszystkie linie lotnicze. Jedyną linią, która odżegnuje się od tego rodzaju działań jest Ryanair, który z kolei, jak wiadomo, rozważa wprowadzenie opłat za korzystanie z toalety na pokładzie i zlikwidowanie (na trasach do 3 godzin) 10 foteli z ostatnich rzędów, by tak wygospodarowane miejsce zajęło 15 pasażerów stojących podczas lotu.

Zajmiemy się obecnie matematycznym modelem problemu typu *overbooking* z punktu widzenia, powiedzmy, właściciela kina, który w ten sposób chce powiększyć swoje zyski z każdego seansu. Spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, jaka jest optymalna liczba rezerwacji, które należy dokonać na konkretny seans, aby pomimo *overbookingu* i ewentualnych rekompensat dla kinomanów zmaksymalizować zysk.

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

liczba miejsc w kinie – n ,

cena biletu – c ,

rekompensata dla osoby, która nie została wpuszczona na seans z braku miejsc – r (z reguły $r = mc$, gdzie $m \geq 1$),

prawdopodobieństwo, z którym osoby mające rezerwację przychodzą do kina – p .

Zatem prawdopodobieństwo, że dokładnie k osób spośród R osób, które dokonały rezerwacji, pojawi się w kinie wynosi:

$$\binom{R}{k} p^k (1-p)^{R-k}$$

gdy liczba dokonanych rezerwacji wynosi $R < n$, to spodziewany zysk właściciela kina wynosi:

$$\sum_{k=0}^R \binom{R}{k} p^k (1-p)^{R-k} kc$$

Gdy liczba rezerwacji równa się liczbie miejsc, to spodziewany zysk wynosi:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} kc = cnp$$

W sytuacji, gdy liczba dokonanych rezerwacji będzie wynosić $n + 1$, to właściciel kina wypłaci odszkodowanie jednemu widzowi tylko w przypadku, gdy wszyscy, którzy dokonali rezerwacji, pojawią się w kinie. Spodziewany zysk wyniesie wówczas:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} kc + \binom{n+1}{n+1} p^{n+1} (1-p)^0 (nc - r)$$

W sytuacji, gdy liczba dokonanych rezerwacji będzie wynosić $n + 2$, to właściciel kina wypłaci odszkodowanie jednemu widzowi tylko w przypadku, gdy $n + 1$ widzów pojawi się w kinie, ewentualnie wypłaci dwa odszkodowania w przypadku, gdy wszyscy, którzy dokonali rezerwacji, pojawią się w kinie. Spodziewany zysk wyniesie wówczas:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k} p^k (1-p)^{n+2-k} kc + \binom{n+2}{n+1} p^{n+1} (1-p)^1 (nc - r) \\ + \binom{n+2}{n+2} p^{n+2} (1-p)^0 (nc - 2r) \end{aligned}$$

Analogicznie możemy wyliczyć zysk przy dokonaniu dowolnej liczby rezerwacji. Początkowo, gdy liczba dokonanych rezerwacji rośnie, to wzrasta również spodziewany zysk. Do pewnego momentu zysk rośnie, a później rekompensaty zmniejszają wpływy i zysk zaczyna maleć. Należy, wobec powyższego, znaleźć optymalną liczbę dostępnych rezerwacji, przy której zysk jest maksymalny. Załóżmy, że małe kino dysponuje tylko 6 miejscami i bilet kosztuje n PLN. Z doświadczenia wiadomo, że widz dokonujący rezerwacji pojawia się, aby obejrzeć film i wykupić bilet z prawdopodobieństwem 0,7. Rekompensata dla widza, który nie dostał się na seans z braku miejsc wynosi tyle ile cena biletu. Spodziewane zyski dla $n = 1, 2, \dots, 10$ pokazuje tabela:

Liczba rezerwacji	Spodziewany zysk
0	0
1	$0.7n$
2	$1.4n$
3	$2.1n$
4	$2.8n$
5	$3.5n$
6	$4.2n$
7	$4.74n$
8	$4.97n$
9	$4.9n$
10	$4.58n$

Dla $n > 8$ zyski zaczynają maleć.

Właściciel kina powinien zatem pozwalać na dokonanie 8 rezerwacji, gdyż wtedy spodziewany zysk jest maksymalny. Zauważmy jeszcze, że im większa jest rekompensata tym optymalna liczba możliwych rezerwacji maleje. Przy zmniejszającej się rekompensacie liczba optymalnie dokonywanych rezerwacji nieograniczenie rośnie. Przy braku rekompensaty należałoby pozwalać na dokonanie nieograniczonej liczby rezerwacji, i każdy seans kończyłby się maksymalnym zyskiem nc .

Zadaniem każdego właściciela kina jest takie dobranie liczby możliwych do dokonania rezerwacji, aby zysk z każdego seansu był możliwie największy.

Należy również wspomnieć o prawdopodobieństwie z jakim osoby, które dokonały rezerwacji pojawiają się w kinie, aby wykupić bilet. Założyliśmy, że jest to około 0,7. Wartości tego prawdopodobieństwa oczywiście są zmienne i zależą od atrakcyjności filmu, dnia tygodnia, pogody itp.

Sugerowano, aby osoba dokonująca rezerwacji była obciążana małymi kosztami, tzw. manipulacyjnymi, które miałyby zdopingować ją do przyścia do kina. Przeprowadzono nawet próby z tak dokonywanymi rezerwacjami. Okazało się, ku zdumieniu właścicieli kin, że wzrosła liczba osób rezerwujących bilety i niepojawiających się w kinie, by wykupić bilet, a zyski kin z malały. Najwyraźniej cenimy sobie wolność dokonywania wyboru i prawo do zmiany decyzji tak bardzo, że skłonni jesteśmy zapłacić za te przywileje.

*The tolling of the iron bell
Calls the faithful to their knees
To hear the softly spoken magic spells.*

D. Gilmour, R. Waters, R. Wright

SZTUCZKI I MAGIA

W ostatnim rozdziale opiszę jak zgrabnie można wykorzystać matematykę przy konstrukcji prostych *sztuczek magicznych*. Pewne zasady operujące w teorii liczb są bowiem bardzo przydatne w dokonywaniu różnego typu tricków polegających na odgadywaniu wieku, numeru telefonu, ukrytego przedmiotu itp. W rozdziale tym pojawią się zatem gotowe przepisy na sztuczki wraz z opisem i wytłumaczeniem zasady ich działania. Gorąco zachęcam do wykorzystania choć części z nich przy nadarzającej się okazji. Przecież nic tak nie przekonuje do matematyki jak udane przykłady.

Magia kart

1. Najlepszy w historii trick karciany

W 1927 roku w Massachusetts Institute of Technology po raz pierwszy przyznano tytuł doktora nauk matematycznych. Zdobył go **William Fitch Cheney (1894-1974)**, który zasłynął w świecie jako twórca najoryginalniejszej sztuczki związanej z odgadywaniem kart. Trick ten został przedstawiony po raz pierwszy w 1950, a spopularyzowany przez Arta Benjamina – mistrza w wykonywaniu obliczeń w pamięci. Benjamin, jak iluzjonista, w swoich przedstawieniach, posługując się metodami arytmetyki modulo potrafi zaskakiwać zdumionych słuchaczy odgadywaniem np. dnia tygodnia, w którym się urodzili czy pominiętej cyfry w iloczynach liczb wielocyfrowych.

W zabawie biorą udział 3 osoby. Mistrz ceremonii, jego asystent i ochotnik, który uwiarygodni popis magii. Prosimy ochotnika o wybranie z talii 5 kart i pokazaniu ich asystentowi. Asystent z kolei pokazuje 4 z nich iluzjoniście, który odgaduje wartość piątej karty wybranej przez ochotnika.

Po wybraniu przez ochotnika 5 kart, asystent musi w ustalonym porządku wyłożyć 4 karty tak, aby zgadujący mógł wyliczyć jakiego koloru i wartości jest pominięta piąta.

Przede wszystkim, wśród pięciu kart co najmniej dwie są tego samego koloru. Zatem pierwsza wyłożona karta będzie tego samego koloru co pominięta piąta.

Następnie zauważmy, że pozostałe 3 karty mogą być ułożone na 6 różnych sposobów, zatem mogą opisać tylko jedną z sześciu wartości.

Te 3 karty mogą być jednoznacznie ułożone w trzejelementowy ciąg rosnący, gdyż w przypadku równych wartości kart decyduje kolejność kolorów, tak jak w brydżu: trefle, kara, kiery trefle.

Zatem, oznaczając 3 karty przez: 1, 2, 3 – najmłodsza, średnia, najstarsza, możemy przez ich położenie wyznaczyć 6 wartości:

powiedzmy 1 przez: 123, 2 – 132, 3 – 213, 4 – 231, 5 – 312, 6 – 321.

Oznaczmy obecnie wartości kart odpowiednio przez:

A (1), 2(2), 3 (3), ..., 10(10), W(11), D(12), K(0) zauważamy, że biorąc dowolne dwa elementy x, y z ciągu: 0, 1, 2, ..., 11, 12 zawsze można wybrać jedną z nich, powiedzmy x w taki sposób, aby:

$$y = x + k(\text{mod})13, \text{ gdzie } k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Na tym polega cały sekret tego tricku. Pierwsza karta określa kolor. Pozostałe 3 wyznaczają liczbę naturalną z przedziału $[1, 6]$, która po dodaniu do wartości pierwszej karty daje nam wartość brakującej ukrytej piątej.

Na zakończenie zobaczymy, jak w praktyce działa ta sztuczka. Powiedzmy, że ochotnik wybrał:

$$2\spadesuit, 3\spadesuit, A\spadesuit, 7\heartsuit, 9\heartsuit$$

Wówczas jako pierwsza pojawi się $2\spadesuit$ i należy trzema pozostałymi przekazać wartość 1, bo brakująca $3\spadesuit$ da się przedstawić jako $2 + 1 \pmod{13}$.

Zatem układ na stole będzie wyglądał następująco: $2\spadesuit, 7\heartsuit, 9\heartsuit, A\spadesuit$, czyli $2\spadesuit$ oraz układ 123.

Niech dany będzie układ:

$$10\heartsuit, A\heartsuit, 3\clubsuit, 6\clubsuit, 7\heartsuit.$$

W tym wypadku asystent sam decyduje, którą kartę opisać przez pierwsze cztery z nich.

Jeśli zdecyduje się na opisanie $A\heartsuit$, to sekwencja czterech kart jest następująca:

$10\heartsuit$ a pozostałe muszą opisać liczbę 4, bo $A\spadesuit(1) = 10 + 4 \pmod{13}$.

Zatem mamy: $10\heartsuit, 6\clubsuit, 7\heartsuit, 3\clubsuit$

Gdy zdecyduje się opisać $7\heartsuit$, to wyklada $A\heartsuit, 10\heartsuit, 6\clubsuit, 3\clubsuit$ (trzy ostatnie karty wyznaczają 6, bo $7\heartsuit = A\heartsuit(1) + 6 \pmod{13}$).

Na zakończenie zauważmy, że asystent pokazuje „mistrzowi” uporządkowaną 4 z talii 52 kart. Takich porządków jest $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 = 6497400$. Natomiast osoba biorąca udział w zabawie losuje 5 kart z 52, co daje $\binom{52}{5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} = 2598960$ kombinacji. Zatem mamy aż 2,5 raza więcej

możliwych przekazów w porównaniu z możliwymi wylosowanymi układami kart. Niestety, do tej pory nie są znane konstruktywne algorytmy na odgadywanie pozostałej karty z talii o większej liczbie elementów.

2. Odgadywanie karty

Sztuczka wykorzystuje znaną własność podzielności przez 9 różnicy danej liczby oraz sumy jej cyfr. Prosimy ochotnika o wybranie sobie jakiejś liczby naturalnej z przedziału $[10, 30)$. Następnie ochotnik tasuje dokładnie talię kart i wybiera z niej liczbę kart równą pomyślanej liczbie.

Obecnie prosimy ochotnika o dodanie cyfr wybranej liczby i z grupy wybranych kart prosimy o usunięcie liczby kart odpowiadającej sumie cyfr oryginalnej liczby.

Następnie prosimy o rozłożenie kart na dwie nierówne ilościowo grupy i obliczenie ile jest kart w mniejszej stosie. Liczbę tę spróbujemy odgadnąć.

Mniejszy ilościowo zbiór kart prosimy o schowanie do kieszeni i kolejne odczytanie publiczności wartości kart znajdujących się w większym zbiorze kart. Sztukmistrz twierdzi, że po odczytaniu wszystkich kart odgadnie, która karta, odczytywana przez ochotnika, odpowiadała liczbie kart mniejszej grupki.

Po zakończeniu odczytywania kart jednoznacznie jesteśmy w stanie stwierdzić, która karta odpowiada liczbie kart w mniejszej grupie, gdyż:

- dla liczb z przedziału $(10, 30)$ wartość różnicy wartości liczby i sumy jej cyfr wynosi 9 lub 18,
- ochotnik, odczytując karty w większej grupie, jednocześnie informuje nas jak liczna jest ta grupa (powiedzmy m),
- zatem liczba kart w mniejszej grupie to $9 - m$ lub $18 - m$,
- w trakcie odczytywania wartości kart przez ochotnika zapisujemy je sobie, aby potem wyjaśnić, jaka karta jest tą występującą na pozycji $9 - m$ ($18 - m$).

3. Odgadywanie karty

Początkujący mago-matematyk – tak będziemy nazywać osobę zajmującą się sztuczkami „magicznymi” wykorzystującymi własności arytmetyczne i teorię liczb do tego typu zabaw – powinien spróbować swoich sił w następujących prostych trickach.

Odgadywanie karty (wersja podstawowa)

Prosimy ochotnika o wybranie dowolnej karty z talii kart. Następnie do wartości wybranej karty prosimy o dodanie liczby o jeden większej. Numeracja jest następująca:

As – 1, 2, 3, 4..., 10, W-11, D-12, K-13.

Rezultat prosimy o pomnożenie przez 5. Następnie, biorąc pod uwagę przyporządkowanie: Trefl – 1, Karo – 2, Kier – 3, Pik – 4, ochotnik do otrzymanego wyniku dodaje wartość koloru wybranej karty i podaje wynik.

Mago-matematyk po otrzymaniu końcowego wyniku natychmiast podaje wartość i kolor wybranej karty.

Faktycznie, oznaczając przez x – wartość wybranej karty, a przez y – wartość jej koloru, otrzymujemy w kolejnych operacjach:

x

$$x + x + 1 = 2x + 1$$

$$5(2x + 1) = 10x + 5,$$

$$10x + 5 + y$$

Zauważmy, że $5 + y < 10$, zatem po otrzymaniu ostatecznej sumy wyniku odejmujemy od niej 5. Uzyskany wynik jest liczbą postaci $\overline{xy}$, gdzie cyfra jedności oznacza wartość karty, a pozostała(e) cyfra(y) pokazuje jej wartość.

4. Odgadywanie karty – wersja zaawansowana

a – Ochotnik wybiera kartę.

b – Dowolna osoba z widowni podaje liczbę naturalną, mniejszą od 25, którą ochotnik dodaje do wartości wybranej karty.

c – Prosimy o pomnożenie sumy przez 10.

d – Prosimy o dodanie do wyniku wartości koloru karty (według schematu z poprzedniego zadania).

e – Kolejna, dowolnie wybrana osoba z widowni podaje liczbę naturalną z przedziału (25, 85), którą ochotnik dodaje do ostatniej sumy.

f – Ochotnik wyjawia wynik.

Mago-matematyk po chwili zastanowienia podaje jaka karta została wybrana.

Rzeczywiście: niech wartością karty i koloru będą x oraz y , zaś wybrane liczby to n i m .

Wówczas kolejne operacje możemy opisać:

a) x

b) $x + n$

c) $10x + 10n$

d) $10x + 10n + y$

e) $10x + 10n + y + m$

Odejmując od sumy liczbę $10n + m$, otrzymamy wynik $\overline{xy}$, gdzie y jest cyfrą koloru, zaś x cyfrą(ami) wyznaczającą (ymi) wartość karty.

5. Odgadywanie ostatniej karty

Kolejnym łatwym trickiem karcianym jest odgadywanie ostatniej karty. Bierzymy z talii 7 kart. Tasujemy je dokładnie, prosimy ochotnika o kolejne potasowanie i przełożenie. W którymś momencie dyskretnie musimy

zaobserwować, jaka karta jest ostatnią wśród tych siedmiu. Powiedzmy, że ostatnią kartą jest As pik. Następnie prosimy ochotnika o pomyślenie sobie liczby naturalnej mniejszej od siedmiu (załóżmy, że jest to 3).

Kolejny krok, o którego wykonanie prosimy ochotnika, to przełożenie dwóch kart z wierzchu na spód, a następnie kolejną (trzecią) też ma przełożyć z wierzchu na spód, ale wartością do góry. Operację powtarzamy, tzn. znowu dwie karty z wierzchu przekładamy na spód, a kolejną odwracamy wartością do góry i również przekładamy na spód. Za każdym razem informujemy widownię i ochotnika, że kartą odkrytą nie będzie As pik. Dopiero za siódmym razem stwierdzimy, że przekładający odsłoni Asa pik. Ku zdumieniu obecnych, faktycznie, dopiero przy siódmym odsłonięciu trzeciej karty okaże się, że jest to As pik.

Sztuczka ta wykorzystuje wprost własności liczb pierwszych i działania modulo. Otóż, gdy N jest liczbą pierwszą, zaś k dowolną liczbą naturalną $k < N$, to biorąc kolejne jej wielokrotności: $1 \cdot k, 2 \cdot k, 3 \cdot k, \dots$ dopiero Nk jest podzielne przez N .

Zatem trick działa, gdy wybrana liczba kart N jest liczbą pierwszą. Niezależnie, jaką liczbę z przedziału $[1, N - 1]$ ochotnik wybierze, ostatnią nieprzełożoną kartą w kroku N -tym będzie ostatnia karta w talii.

6. Krótki trick

Prosimy ochotnika o wybranie z talii dwa razy po n kart. Trzyma po n kart w każdej ręce. Następnie 4 karty z lewej dłoni przekłada do prawej. Obecnie przelicza ile ma kart w lewej dłoni, odkłada je na stół. Obecnie tyle kart ile jest na stole ma odłożyć z prawej dłoni. Ostatecznie do lewej dłoni dobiera 5 kart i przelicza karty w obu dłoniach. Okazuje się, razem zawsze będzie miał 13 kart Rzeczywiście:

Lewa dłoń	Prawa dłoń
n	n
$n - 4$	$n + 4$
0	$n + 4 - (n - 4) = 8$
5	8

7. Krótki trick 2

Prosimy ochotnika o wybranie z talii n kart. Ochotnik informuje nas o liczbie wybranych kart. Następnie dzieli je na dwie kupki, oblicza ile jest kart w każdej z nich i wykonuje mnożenie tych liczb. Dalej jedną z dwóch kupek rozdziela na kolejne dwie. Oblicza ile jest kart w każdej z nich, mnoży te dwie liczby i dodaje do wcześniejszego iloczynu. Procedurę powtarza do chwili, gdy będzie miał n grup po jednej karcie. Zapisuje otrzymaną sumę. My, po chwili zastanowienia, odgadujemy ją.

Zostawiamy Czytelnikowi do wykazania, że otrzymana suma zawsze będzie wynosić $\frac{n(n-1)}{2}$.

8. 30 kart

Na stół wykładamy 30 kart. Odwracamy się i prosimy kogoś o usunięcie dowolnej liczby kart, ale co najmniej 1 i co najwyżej 10. Następnie prosimy o przeliczenie pozostałych na stole kart i obliczenie sumy cyfr tej liczby.

Dalej prosimy o usunięcie tylu kart, ile wynosiła suma cyfr tej liczby.

Ostatecznie prosimy o zabranie ze stołu dowolnej liczby kart i zatrzymanie ich w rękę. Wreszcie odwracamy się i, patrząc na ilość kart pozostających na stole, odgadujemy ile kart trzyma w rękę osoba wykonująca nasze polecenia.

Zauważmy, że po pierwszym usunięciu k kart $k = 1, 2, 3, \dots, 10$ pozostaje na stole $20 + b$ kart, $b = 0, 1, \dots, 9$.

Kolejno usuwane jest $2 + b$ kart i zostaje 18.

Odwracając się i widząc x kart, decydujemy, że w ostatnim ruchu usunięto $18 - x$ kart.

9. Odgadujemy wybraną kartę

Wykładamy 21 kart w trzech kolumnach po 7 kart.

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21

Prosimy ochotnika o wybranie dowolnej karty i wskazanie nam kolumny, w której ona się znajduje. Powiedzmy, że wskazano nam pierwszą kolumnę. Zbieramy ze stołu karty kolumnami w ten sposób, by pierwsza kolumna była zebrana jako druga i znów wykładamy karty w trzech kolumnach po 7 wierszy. Wykładamy je kolejno wierszami. Powiedzmy, że zebraliśmy karty kolumnami w kolejności: druga, pierwsza, trzecia. Wykładając je kolejno, otrzymamy następujący układ kart:

2	5	8
11	14	17
20	1	4
7	10	13
16	19	3
6	9	12
15	18	21

Pogrubione numery oznaczają karty z pierwszej kolumny.

Znów prosimy o wskazanie kolumny, gdzie znajduje się wybrana karta. Po jej wskazaniu zbieramy karty ze stołu kolumnami w ten sposób, aby wskazana kolumna była usunięta jako druga. Następnie kolejno, jedna po drugiej, wierszami, układamy karty na stół.

Popatrzymy na wszystkie możliwe przypadki.

1. Wybrana karta jest w drugiej kolumnie. Zabieramy karty kolumnami w kolejności, np.: pierwsza, druga, trzecia.

Otrzymujemy po wyłożeniu układ:

2	11	20
7	16	6
15	5	14
1	10	19
9	18	8
17	4	13
3	12	21

2. Wybrana karta jest w pierwszej kolumnie. Zabieramy karty kolumnami w kolejności, np.: druga, pierwsza, trzecia.

Otrzymujemy po wyłożeniu układ:

5	14	1
10	19	9
18	2	11
20	7	16
6	15	8
17	4	13
3	12	21

3. Wybrana karta jest w trzeciej kolumnie. Zabieramy karty kolumnami w kolejności, np.: druga, trzecia, pierwsza.

Otrzymujemy po wyłożeniu układ:

2	11	20
7	16	6
15	8	17
4	13	3
12	21	5
14	1	10
19	9	18

Znów prosimy o wskazanie, w której kolumnie znajduje się wybrana karta. Usuwamy karty ze stołu kolumnami, pamiętając by jak zwykle kolumna, w której jest wskazana karta, była usunięta jako druga.

Zauważmy, że poszukiwana karta jest zawsze w czwartym wierszu. Usuwając karty kolumnami, powodujemy, że w talii 21 kart, które trzymamy w ręku, jest ona na 11 pozycji. Możemy więc spektakularnie rzucać kolejno karty na stół, a przy karcie jedenastej stwierdzić, że to właśnie jest ta szukana karta. Dla wzmocnienia efektu możemy przy każdej rzucanej karcie wymawiać jedną literę zaklęcia ABRAKADABRA. Zaklęcie ma 11 liter, zatem wskaże nam poszukiwaną kartę.

10. 7 kart

Prosimy ochotnika o wybranie z talii co najmniej 30 kart i umieszczenie ich w trzech kupkach (A,B,C) tak, aby w każdej była taka sama liczba kart. Zatem liczba wybranych kart musi być podzielna przez 3. Poprosimy go o wykonanie pewnych operacji z kartami, aby później, w konsekwencji, zgadnąć ile będzie kart w poszczególnych kupkach.

- 1) Prosimy o przełożenie trzech kart z kupki A do B i również trzech kart z C do B.
- 2) Odłożenie na bok kart z kupki A.
- 3) Obliczenie ile jest kart w C.
- 4) Zabranie z B tylu kart ile jest w C i odłożenie ich na bok.
- 5) Odłożenie na bok kart z kupki C.
- 6) Prosimy go o podanie nam dwóch najwyższych kart z kupki B.

Oglądając karty pochodzące ze zbioru B, dochodzimy do wniosku, że pozostało jeszcze na stole 7 kart!!

Rzeczywiście, spójrzmy na tabelkę pokazującą jak zmieniała się liczba kart w poszczególnych zbiorach:

A	B	C
n	n	n
$n - 3$	$n + 6$	$n - 3$
–	$n + 6 - (n - 3) = 9$	$n - 3$
–	9	–
–	7	–

Magia działań matematycznych

11. Matematyka w miłości

Ta arytmetyczna perełka jest bardzo frywolna, odpowiednio opowiedziana z pewnością może nawet zmotywować do zainteresowania matematyką nawet największych ignorantów. Oto kolejne etapy „miłosnej sztuczki”. Prosimy widznię o wykonanie poniższych kroków.

- a – Pomyśl o liczbie dni tygodnia, które chciałbyś spędzić z ukochaną osobą.
- b – Pomnóż tę liczbę przez 50, bo *seksapil składa się w 50% z tego co masz, i w 50% z tego co ludzie myślą, że posiadasz*, jak mówiła Sophia Loren. 50 jest liczbą Harshada, czyli dającą radość. Dzieli się przez sumę swych cyfr. Harsa – radość, da – daje – z sanskrytu hinduskiego. Zawdzięczamy je hinduskiemu matematykowi Ramczandrze Kaprekarowi. 50 jest jedenastą liczbą dającą radość, gdy pominiemy liczby jednocyfrowe.
- c – Dodaj do wyniku magiczną liczbę 44, byś zawsze był sprawny jak „magnum 44”. 44 to liczba uboga, bo suma jej dzielników różnych od niej samej jest od niej mniejsza. Pierwsza bogata liczba to 12. Następnie mamy 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48.
To liczba szczęśliwa, bo proces sumy kwadratów cyfr ją tworzących daje 1. Jest to 10 liczba szczęśliwa: 1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44.
- d – Pomnóż wynik przez 200. Dodajmy, że 200 jest bardzo specjalną liczbą, jest mianowicie najmniejszą liczbą *pozapierwszą*, pozostaje złożona po zamianie dowolnej cyfry na każdą inną.
(201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 220, 230, 240, 250, 260, 270, 280, 290, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 – te wszystkie liczby, powstałe przez zastąpienie jednej z cyfr liczby przez dowolną inną są złożone). 200 jest jednak nieszczęśliwa.
- e – Jeśli już miałeś w tym roku urodziny, dodaj 112 – tak na wszelki wypadek, bo 112 to uznany przez Unię Europejską numer alarmowy. Jeśli nie miałeś urodzin, dodaj 111. 111 jest bardzo ciekawą liczbą. W języku angielskim jest to najmniejsza liczba, na której wypowiedzenie potrzebne jest 6 sylab. W języku polskim liczba o tej własności jest 71. Może to świadczyć o oszczędności języka angielskiego lub o bogactwie języka polskiego – w zależności od interpretacji lingwistycznej. Kto o 1:11 spojrzy na zegarek temu odmieni się życie. Gdy ubrudzisz sobie palec jakimś paskudztwem i wycierasz go o tablicę czy ścianę, to zauważ, że obtarcia te tworzą na ścianie kreski w postaci liczby 111.
- f – Od wyniku odejmij rok urodzenia.

Następnie oznajmiamy widowni, że każda osoba otrzymała ostatecznie wynik pięciocyfrowy postaci: $\underline{x69ab}$, gdzie x – to liczba dni tygodnia, które zamierzają spędzać razem ze swoją ukochaną osobą, $\underline{ab}$ – oznacza ich obecny wiek. Osobna historia to pojawienie się liczby 69. No cóż, jest to jedyna liczba naturalna, której kwadrat i sześcián wspólnie zawierają wszystkie cyfry użyte dokładnie raz.

Rzeczywiście: $69^2 = 4761$, $69^3 = 328509$.

Inne znaczenie tej liczby zawdzięczamy jednej z liderek Francuskiej Rewolucji, której przypisuje się autorstwo *Katechizmu Kurtyzany* (1790), gdzie tą liczbą nazywa jedną z popularnych pozycji miłosnych.

Faktycznie, prześledźmy kolejne etapy wyliczeń:

- a) x
- b) $50x$
- c) $50x + 44$
- d) $200(50x + 44) = 10000x + 8800$
- e) $10000x + 8800 + 112 = 10000x + 8912$
- f) $10000x + 8912 - (2012 - 10a - b) = 10000x + 6900 + 10a + b = \underline{x69ab}$

Uwaga: Zakładamy, że nasza zabawa odbywa się w roku 2012, w następnych latach kolejno zamiast 111 lub 112 dodawać będziemy: (112 lub 113), (113 lub 114) itd.

12. Odgadujemy wiek

Opisany trick jest jednym z wielu, w którym z góry można przewidzieć ostateczny wynik działań, pomimo tego, że osoba wykonująca operacje matematyczne używa do obliczeń liczb znanych tylko sobie: wiek, wzrost, numer telefonu itp.

Prosimy o wykonanie poniższych działań.

- a – Do roku urodzenia dodać liczbę oznaczającą rok, w którym nastąpiło ważne wydarzenie w życiu ochotnika (powiedzmy roku, w którym został uświadomiony).
- b – Do tej sumy prosimy o dodanie wieku wyrażonego w latach.
- c – Dodanie do otrzymanego wyniku liczby lat, które minęły od czasu, kiedy został uświadomiony.
- d – Prosimy o podanie wyniku.

Natychmiast jesteście w stanie podać ostateczną sumę jaką otrzymała osoba biorąca udział w tricku.

Faktycznie: niech a – oznacza rok urodzenia ochotnika, b – rok, w którym został uświadomiony, c – aktualny rok; to wówczas ostateczna suma wynosi:

$$a + b + (c - a) + (c - b) = 2c$$

Zatem wynik jest zawsze podwojoną wartością liczby oznaczającej aktualny rok.

13. Odgadywanie numeru banknotu

Ta sztuczka była bardzo popularna w latach 40. ubiegłego wieku. Wymyślona przez brytyjskiego iluzjonistę Royal V. Heatha świadczyła o jego rzekomych fenomenalnych zdolnościach obliczeniowych w rozwiązywaniu układów równań z ośmioma niewiadomymi.

Pytamy, czy ktoś na widowni dysponuje jakimkolwiek banknotem. Twierdzimy że, uzyskując pewne informacje od ochotnika, będziemy w stanie odtworzyć ten numer.

Przypominamy, że obecnie w Polsce numery serii banknotów są siedmiocyfrowe. Załóżmy, że nieznany numer banknotu jest następujący:

$$\underline{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7}$$

Prosimy o podanie kolejno następujących sum:

$$S_1 = x_1 + x_2, S_2 = x_2 + x_3, S_3 = x_3 + x_4$$

$$S_4 = x_4 + x_5, S_5 = x_5 + x_6, S_6 = x_6 + x_7$$

Dodajemy, że mamy tylko 6 równań i 7 niewiadomych, dlatego prosimy jeszcze o podanie na przykład sumy: $S_7 = x_1 + x_7$.

W trakcie podawania przez ochotnika wartości sum zapisujemy w dwóch kolumnach sumy o indeksach nieparzystych i parzystych i kolejno je dodajemy tak, by otrzymać sumę wyników o indeksach nieparzystych: $A = S_1 + S_3 + S_5 + S_7$ oraz parzystych: $B = S_2 + S_4 + S_6$.

Następnie w pamięci obliczamy różnicę $A - B$. Wynik odejmowania daje nam $2x_1$. Dzieląc przez 2 i wykorzystując kolejno sumy:

$$S_1 = x_1 + x_2, S_2 = x_2 + x_3, S_3 = x_3 + x_4$$

$$S_4 = x_4 + x_5, S_5 = x_5 + x_6, S_6 = x_6 + x_7$$

Otrzymujemy kolejno wartości: $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$

Faktycznie $A - B = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_1 + x_7 - (x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) = 2x_1$

Sztuczka ta również może być wykorzystywana do odgadywania numerów telefonów stacjonarnych. W przypadku numeru telefonu komórkowego, który składa się z dziewięciu cyfr, postępujemy w sposób następujący. Prosimy o sumy:

$$S_1 = x_1 + x_2, S_2 = x_2 + x_3, S_3 = x_3 + x_4, S_4 = x_4 + x_5, S_5 = x_5 + x_6, S_6 = x_6 + x_7, S_7 = x_7 + x_8, S_8 = x_8 + x_9 \text{ oraz } S_9 = x_1 + x_9$$

W tym przypadku różnica:

$$A - B = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_1 - (x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9) = 2x_1$$

Nawet bez uprzedniego ćwiczenia, sztuczka ta jest łatwa w wykonaniu, a wrażenie związane z naszymi kompetencjami jako mistrza pamięciowych rachunków jest nie do przecenienia.

14. Odgadujemy pomyślany przedmiot

Prosimy ochotnika o nazwanie przedmiotów, które ma w tej chwili przy sobie. Zapisujemy je na tablicy. Następnie szybko obliczamy sumę liter w nazwach przedmiotów, które ochotnik nam pokazał. Na przykład: telefon – 7 liter, portfel – 7 liter, moneta – 6 liter, zegarek – 7 liter, chusteczka – 10 liter, karta – 5 liter itp. Wybieramy 3 lub 4 z nich, które są opisane różną liczbą liter. Prosimy ochotnika, by pomyślał o którymś z tym przedmiotów, a my po chwili koncentracji powiemy, który przedmiot wybrał.

Zanim odgadniemy przedmiot prosimy, by liczbę liter opisujących ten przedmiot pomnożył przez 5. Następnie do wyniku prosimy o dodanie 3, bo dopiero trzeci raz wykonujemy tę sztuczkę. Wynik prosimy o pomnożenie przez 2. Ostatecznie prosimy o dodanie do wyniku dowolnej liczby naturalnej z przedziału [1, 9].

Prosimy o podanie wyniku.

Natychmiast podamy przedmiot o jakim pomyślano i liczbę, którą dodano.

Oznaczmy liczbę liter przedmiotu przez a ($a < 10$), liczbę dodaną przez b . Kolejne operacje możemy zapisać następująco:

$5a$, $5a + 3$, $10a + 6$, $10a + 6 + b$.

Zatem, odejmując od wyniku 6, otrzymamy liczbę dwucyfrową $10a + b = \underline{ab}$, gdzie cyfra dziesiątek opisuje przedmiot, a cyfra jedności to dodana liczba.

15. Odgadujemy imiona pań

Na tablicy notujemy 7 imion pań: Beata, Bogumiła, Dagmara, Kaja, Katarzyna, Joasia, Ula. Prosimy o wybranie 4 imion i dokonanie następujących czynności.

Liczbę liter imienia pierwszej dziewczyny mnożymy przez 2 i do tego iloczynu dodajemy 5. Sumę tę mnożymy przez 5 i do wyniku dodajemy 10. Potem dodajemy do sumy liczbę liter imienia drugiej dziewczyny i wynik mnożymy przez 10. Ostatecznie dodajemy do wyniku liczbę liter imienia trzeciej dziewczyny. Podajemy ostateczny wynik.

Dysponując ostatecznym wynikiem, łatwo odgadniemy o jakich dziewczynach pomyślano. Otóż zwróćmy uwagę, że imię każdej z pań jest wyznaczone przez inną liczbę liter, mniejszą od 10. Jeśli oznaczymy przez a , b , c liczby liter imion trzech wybranych dziewcząt, to wykonywane operacje można zapisać w postaci: $2a$, $2a + 5$, $5(2a + 5)$, $5(2a + 5) + 10$, $5(2a + 5) + 10 + b$, $10[5(2a + 5) + 10 + b]$, $10[5(2a + 5) + 10 + b] + c$

Ostatecznie: $10[5(2a + 5) + 10 + b] + c = 100a + 250 + 100 + 10b + c = 100a + 10b + c + 350$.

Od wyniku odejmujemy 350 i otrzymujemy liczbę trzycyfrową $\underline{abc}$, gdzie każda z cyfr określa imię kolejnej dziewczyny.

16. Odgadujemy wiek

Aby odgadnąć wiek dowolnej osoby (co najmniej dziesięcioletniej) wyrażony w pełnych latach, wystarczy poprosić o wykonanie poniższych działań.

a – Pomnóż liczbę swoich lat przez 10.

b – Wybierz dowolną liczbę naturalną mniejszą od 10.

c – Od otrzymanego wcześniej iloczynu odejmij iloczyn wybranej liczby i 9.

d – Podaj wynik.

Natychmiast możemy podać wiek osoby biorącej udział w zabawie.

Oznaczając wiek przez x , zaś wybraną liczbę przez k , mamy:

$$10x - 9k = 10x - 10k + k = 10(x - k) + k.$$

Otrzymany wynik ma cyfrę jedności równą k . Po odrzuceniu cyfry jedności otrzymany liczbę dwu lub jednocyfrową o wartości $x - k$. Dodając do niej k , otrzymamy wiek x .

Przykład

Osoba ma 23 lata, wybrana liczba to 7.

Otrzymamy wynik to $230 - 63 = 167$. Zatem $k = 7$, zaś wiek to $16 + 7 = 23$.

Osoba ma 64 lata, wybrana liczba to 3

Otrzymany wynik to $640 - 27 = 613$. Zatem $k = 3$, zaś wiek to $61 + 3 = 64$.

17. Odgadujemy wiek i skłonności do jedzenia poza domem

Prosimy ochotnika o wyobrażenie sobie ile razy w tygodniu chciałby jeść poza domem w restauracji lub ile razy chciałby wyjść ze znajomymi do pubu. Następnie prosimy o pomnożenie tej liczby przez 2 i dodanie do sumy 5. Pomnożenie wyniku przez 50. Jeśli ochotnik miał już w tym roku (2012) urodziny, niech doda do iloczynu 1762, jeśli jeszcze nie miał, niech doda 1761. Ostatecznie niech odejmie od wszystkiego rok urodzenia i poda nam ostateczny wynik.

Natychmiast odgadujemy ile razy w tygodniu ma zamiar wychodzić z domu i w jakim jest wieku, gdyż wynik jest postaci $\underline{abc}$, gdzie a – liczba wyjść, zaś $\underline{bc}$ to wiek osoby biorącej udział w sztuczce.

Rzeczywiście: niech a – liczba wyjść, $10b + c$ – wiek danej osoby.

Kolejne operacje możemy opisać następująco:

$$a, 2a, 2a + 5, 50(2a + 5) = 100a + 250, 100a + 250 + 1762 = 100a + 2012,$$

$$100a + 2012 - (2012 - 10b - c) = 100a + 10b + c.$$

18. Jeszcze raz odgadujemy wiek wybranej osoby

- a – Prosimy o zapisanie wieku na kartce papieru.
- b – Następnie prosimy o dodanie do swojego wieku naszej magicznej liczby, czyli 90. Tłumaczymy, że 90 jest niezwykłą liczbą, chociażby ze względu na to, że jest *liczbą podłużną*. Liczba podłużna to każda liczba, która jest iloczynem kolejnych liczb naturalnych $90 = 9 \cdot 10$. 90 jest również *liczbą praktyczną*, czyli liczbą naturalną, dla której każda liczba naturalna od niej mniejsza da się zapisać jako suma jej dzielników. Oto lista liczb praktycznych mniejszych od 100: 1, 2, 4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 64, 66, 72, 78, 80, 84, 88, 90, 96. Dla przykładu zauważmy, że dzielnikami 12 (mniejszymi od 12) są: 1, 2, 3, 4, 6. Mamy: $1 = 1$, $2 = 2$, $3 = 3$, $4 = 1 + 3$, $5 = 2 + 3$, $6 = 6$, $7 = 6 + 1$, $8 = 6 + 2$, $9 = 6 + 3$, $10 = 6 + 4$, $11 = 6 + 4 + 1$. 90 jest *liczbą szczodłą i diabelską*. Liczba diabelska to liczba naturalna, która w zapisie binarnym posiada parzystą liczbę jedynek. Jest *liczbą dającą radość*, bo dzieli się przez sumę cyfr ją tworzących. 90 to liczba stopni w kącie prostym. 90 to liczba geniuszu – gdyż jak twierdził Thomas Edison: *Geniusz to 10% inspiracji i 90% potu*. 90 to ulubiona liczba statystyków, bo jak uważają złośliwi, *aż 90% statystyk jest zmyślonych*.
- c – Obecnie prosimy o dodanie wieku do naszej magicznej liczby.
- d – Otrzymana suma jest liczbą trzycyfrową. Prosimy o usunięcie z niej cyfry setek i dodanie jej do tak powstałej liczby dwucyfrowej.
- e – Ostatecznie prosimy o podanie wyniku.
Po uzyskaniu ostatniej informacji natychmiast odgadujemy wiek, przez dodanie 9 do podanej liczby.
Rzeczywiście; Niech wiek wybranej osoby wynosi $\underline{xy}$, czyli $10x + y$.
Wówczas kolejne operacje opisane są następująco:
 $10x + y + 90 = 10x + y + 100 - 10 = 100 + 10(x - 1) + y = \underline{1(x - 1)y}$
 $10(x - 1) + y + 1 = 10x - 10 + y + 1 = 10x + y - 9 = \underline{xy} - 9$.

19. Zgadujemy usuniętą cyfrę

Prosimy o wykonanie następujących operacji:

- a – zanotuj dowolną liczbę naturalną (powiedzmy 5-cyfrową),
b – oblicz sumę jej cyfr,
c – skreśl jedną z cyfr oryginalnej liczby i od otrzymanej liczby (4-cyfrowej) odejmij sumę cyfr, którą otrzymałeś poprzednio,
d – podaj wynik.

Potrafimy natychmiast podać wartość skreślonej cyfry.

Jak wiadomo, gdy od liczby naturalnej odejmiemy sumę jej cyfr, to otrzymamy liczbę podzielną przez 9. Zatem, gdy dowiadujemy się ile wynosi różnica podana przez ohotnika, wystarczy obliczyć sumę jej cyfr, a poszukiwaną cyfrą będzie najmniejsza, której dodanie do sumy da liczbę

podzielną przez 9. W przypadku, gdy suma ta jest podzielna przez 9, niestety nie wiemy, czy skreśloną cyfrą było 0 czy 9. Możemy uniknąć tej niedogodności prosząc, by nie skreślać zera w pomyślanej oryginalnie liczbie 5-cyfrowej.

Sztuczkę ilustrujemy przykładem:

- a) wybieramy 78946,
- b) suma cyfr $7 + 8 + 9 + 4 + 6 = 34$,
- c) usuwamy 8 w liczbie 78946, otrzymując 7946,
- d) $7946 - 34 = 7912$.

Suma cyfr liczby 7912 wynosi $7 + 9 + 1 + 2 = 19$. Najmniejsza liczba większa od 19, która jest podzielna przez 9 to 27.

$19 + 8 = 27$.

Zatem brakującą cyfrą jest 8.

20. Odgadujemy 3 liczby

Prosimy osobę chętną do udziału w sztuczce o wybranie trzech kolejnych liczb naturalnych mniejszych od 60. Następnie prosimy inną osobę o publiczne wskazanie liczby podzielnej przez 3 i mniejszej od 100. Osoba biorąca udział w sztuczce wykonuje następujące działania:

- a – znajduje sumę trzech wybranych przez siebie liczb naturalnych i tej wielokrotności liczby 3, która była publicznie podana,
- b – otrzymany wynik mnoży przez 67,
- c – podaje ostatnie dwie cyfry wyniku.

Ostatnie dwie cyfry wskażą nam pełny wynik oraz pomyślane wcześniej kolejne liczby naturalne.

Sztuczka ta rzeczywiście daje niewiarygodną satysfakcję, gdyż zdumiewa skutecznością. Strzępy informacji, tylko dwie cyfry dużego iloczynu pozwalają na odgadnięcie składników sumy będącej jednym z jego czynników.

Wytłumaczymy sekret jej działania. Oznaczamy nieznane liczby przez n , $n + 1$, $n + 2$. Znaną wielokrotność trójki oznaczmy przez $3k$.

W pierwszej części wykonywane jest działanie:

a) $n + n + 1 + n + 2 + 3k = 3(n + k + 1)$

w drugiej części zadania obliczmy iloczyn:

b) $67 \cdot 3(n + k + 1) = 201(n + k + 1) = 200(n + k + 1) + (n + k + 1)$.

Zauważmy, że $n + k + 1 < 100$, gdyż $n + 2 < 60$ oraz $3k < 100$ daje nam $k < 34$. Zatem $n + k + 1$ jest liczbą co najwyżej dwucyfrową. Liczba $200(n + k + 1)$ jest podzielna przez 100, czyli kończy się co najmniej dwoma zerami. Ostatecznie, okazuje się, że ostatnie dwie cyfry iloczynu tworzą liczbę $n + k + 1$.

Od podanej nam liczby dwucyfrowej odejmujemy $k + 1$, otrzymując n . Następnie odtwarzamy kolejne liczby: $n + 1$, $n + 2$. Możemy również podać

wartość otrzymanego iloczynu, przez dodanie do znanej liczby dwucyfrowej jej iloczynu przez 200.

Przykład

Pomyślano o 13, 14, 15. Wskazano 81 jako liczbę podzielną przez 3.

Suma: $13 + 14 + 15 + 81 = 123$. Iloczyn: $123 \cdot 67 = 8241$. Informacja uzyskana 41.

$81 : 3 = 27$, $41 - (27 + 1) = 13$. Pomyślane liczby to: 13, 14, 15.

Następnie $200 \cdot 41 = 8200$, $8200 + 41 = 8241$.

21. Odgadujemy trzy kolejne liczby naturalne

Prosimy ochotnika o dodanie do siebie trzech kolejnych liczb naturalnych. Po wykonaniu kilku operacji z tymi liczbami, zapewniamy go, że uda nam się je odgadnąć.

Przystępujemy do działania.

a – Prosimy o dodanie trzech kolejnych dowolnych liczb naturalnych.

Zwracamy uwagę, by dla prostoty działań, żadna z nich nie była większa od 50.

b – Następnie prosimy o wybranie pewnej wielokrotności liczby 3 mniejszej bądź równej 150. Ochotnik w tym wypadku podaje nam do wiadomości liczbę, którą wybrał. Dalej prosimy o dodanie tej liczby do otrzymanej wcześniej sumy trzech kolejnych liczb naturalnych.

c – Obecnie zastanawiamy się głośno, czy raczej poprosić ochotnika o pomnożenie rezultatu przez 6, gdyż jest to liczba kojarzona z ogniskiem domowym i zdrowym trybem życia jako iloczyn najmniejszej liczby parzystej (liczby żeńskiej) i najmniejszych liczb nieparzystych (liczb męskich). Jest liczbą doskonałą – jest równa sumie swoich dzielników mniejszych od niej – $6 = 1 + 2 + 3$.

Po chwili wahania zastanawiamy się głośno, czy prosić o pomnożenie wyniku przez 7, gdyż 7 jest najbardziej popularną liczbą w otaczającej nas rzeczywistości: *7 dni tygodnia, 7 mórz, 7 grzechów głównych, 7 cnót, 7 cudów świata, 7 szczytów siedmiu kontynentów, siódme niebo itd.* Jednak dochodzimy do wniosku, że dla utrudnienia zadania poprosimy ochotnika o pomnożenie wyniku przez 67.

67 jest niezwykłą liczbą, gdyż zapisując ją używając symboli rzymskich LXVII i obliczając jej wartość numeryczną (literom alfabetu przypisujemy wartości według wzoru $A = 1, B = 2, C = 3 \dots$) otrzymamy: $12 (L) + 24 (X) + 22 (V) + 9 (I) + 9 (I) = 76$ – odbicie lustrzane liczby 67.

d – Prosimy o podanie cyfr dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Korzystając z tych cyfr, podamy trzy kolejne liczby naturalne, które ochotnik wybrał na początku.

Opis symboliczny zadania pozwoli nam na wyjaśnienie zasad działania tricku.

Oznaczmy trzy nieznane liczby przez $n, n + 1, n + 2$, zatem:

- a) $n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3$,
- b) $3n + 3 + 3k$,
- c) $(3n + 3 + 3k)67 = 201n + 201 + 201k = 200n + 200k + 200 + n + k + 1$.

Liczba $200n + 200k + 200$ kończy się dwoma zerami. Zatem w liczbie $200n + 200k + 200 + n + k + 1$, ostatnie dwie cyfry dają nam sumę $n + k + 1$. Znając liczbę jaką tworzą ostatnie dwie cyfry wyniku, wystarczy odjąć od niej k , by otrzymać $n + 1$ – środkową liczbę spośród trzech nieznanach: $n, n + 1, n + 2$.

Oznacza to, że w momencie podania przez ochotnika wielokrotności liczby 3, dzielimy ją przez 3 (otrzymując k) i cierpliwie czekamy na dalszy rozwój wypadków. Mając liczbę dwucyfrową, którą tworzą ostatnie dwie cyfry ostatecznego wyniku, odejmujemy od niej k , otrzymując $n + 1$.

Przykład

Pomyślane liczby to 19, 20, 21. Kolejne etapy przedstawiają się następująco:

- a) $19 + 20 + 21 = 60$,
- b) ochotnik wybiera 33 (czyli $k = 11$) $60 + 33 = 93$,
- c) $93 \cdot 67 = 62$, otrzymujemy informację: cyfra dziesiątek 3, cyfra jedności 1. Obliczamy $31 - 11 = 20$. Poszukiwane liczby to 19, 20, 21.

22. Odgadujemy hurtowo pomyślane liczby

Prosimy kilka osób o pomyślenie liczby naturalnej większej od 50 i mniejszej od 100.

Wyróżniamy w ten sposób liczbę 50, bo zasługuje na to chociażby dlatego, że jest najmniejszą liczbą naturalną, której kwadrat da się zapisać jako suma kwadratów liczb naturalnych dwoma sposobami: $50 = 5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2$. Jest to niestety *liczba ohydna*, bo w jej zapisie binarnym występuje nieparzysta liczba jedynek. Pozostałe własności 50 były opisane w tricku (matematyka w miłości). Oprócz tego, jak śpiewał Paul Simon:

*She said it's really not my habit to intrude
Furthermore, I hope my meaning won't be lost or misconstrued
But I'll repeat myself at the risk of being crude
There must be fifty ways to leave your lover
Fifty ways to leave your lover*

Prowadzący całe przedstawienie zapisuje na kawałku papieru pewną liczbę, tak aby zwrócić uwagę widowni na wykonywaną czynność. Oczywiście udaje, że nie zdaje sobie sprawy, że jest obserwowany. Wybrana przez niego liczba naturalna jest mniejsza od 50. Nikt z widowni nie może tej liczby zobaczyć. Następnie prowadzący odejmuje tę zapisaną przez siebie liczbę od 99. Głośno prosi, aby każdy z widowni do wybranej przez siebie liczby dodał tę wartość.

Kolejno informuje, aby w otrzymanym wyniku skreślić pierwszą cyfrę (liczoną od lewej) i dodać ją do otrzymanej liczby. Ostatecznie prosi o odjęcie tej liczby od oryginalnie wybranej liczby.

Gdy wszyscy na widowni wykonają działania, pokazujemy liczbę zapisaną na kartce. Okazuje się, że każdy otrzymał ten sam wynik. Pokrywa się on z liczbą zapisaną przez prowadzącego.

Prowadzący potrafił przewidzieć wynik działań prowadzonych na różnych liczbach i doprowadzić do wspólnego ustalonego przez niego wyniku.

Prześledźmy historię działań. Niech liczba wybrana przez uczestnika z widowni to $50 + y$. Liczba wybrana przez prowadzącego to $50 - x$. Oczywiście $x, y \in N, x, y < 50$.

Prowadzący w myśli przeprowadza działanie: $99 - (50 - x) = 49 + x$, uczestnik z widowni dodaje:

$50 + y + 49 + x = 99 + x + y = 100 + x + y - 1$. (Jest to liczba trzycyfrowa. Cyfra setek jest 1). Po skreśleniu 1 i dodaniu do tak otrzymanej liczby dwucyfrowej otrzyma się: $x + y$. Ostatecznie, odejmując tę liczbę od oryginalnie wybranej: $50 + y$, otrzyma się: $50 + y - (x + y) = 50 - x$, liczbę zapisaną przez prowadzącego na kartce!

23. Odgadywanie 4 niewiadomych

W tej sztuczce wykorzystamy rekwizyty, jakimi będą kartki papieru imitujące banknoty o wartościach:

25 PLN, 10 PLN, 5 PLN oraz 1 PLN. Na stole kładziemy 4 banknoty o nominałach 25 PLN. Prosimy cztery osoby z widowni o wzięcie udziału w zabawie. Każda z nich ma zabrać ze stołu po 1 banknocie, o innych nominałach. Następnie osoba, która pierwsza wzięła banknot dla siebie jest proszona, by wziąć jeszcze raz tyle ile ma. Druga osoba zabiera ze stołu 2 razy więcej niż wzięła oryginalnie dla siebie. Osoba trzecia bierze ze stołu 3 razy więcej, a czwarta bierze ze stołu 4 razy więcej niż wzięła oryginalnie.

Oznaczmy osoby przez A, B, C, D oraz przypiszmy im wartości: $A = 4, B = 3, C = 2, D = 1$.

Sztukmistrz oczywiście nie widzi, kto wziął jaką ilość pieniędzy. Dopiero gdy wszyscy wzięli dla siebie banknoty, mistrz ceremonii odwraca się (stał cały czas plecami do widowni i wydawał polecenia) i analizując pozostałe na stole banknoty, odgadnie, kto wziął ile pieniędzy ze stołu.

Na początku na stole było 196 PLN. Gdy uczestnicy zabawy wzięli dla siebie banknoty, to pozostała na stole suma wynosi S.

Opiszemy, w jaki sposób można obliczyć ile i jakich banknotów wzięli dla siebie uczestnicy zabawy.

W pierwszej fazie wzięto ze stołu: $1 + 5 + 10 + 25 = 41$ PLN. Podczas drugiej fazy usunięto j banknotów 1 PLN, p banknotów 5 PLN, dz banknotów 10 PLN i dw banknotów o nominałach 25 PLN. Zatem:

$$S = 196 - 41 - j - 5p - 10dz - 25dw = 155 - j - 5p - 10dz - 25dw$$

Następnie wiadomo, że podczas drugiej fazy tricku uczestnicy brali ze stołu po 1, 2, 3 lub 4 banknoty. Jeśli ktoś podczas drugiej fazy wziął x banknotów, to tę osobę oznaczmy przez $5 - x$.

Obliczamy obecnie:

$$S(mod)5 \equiv (155 - j - 5p - 10dz - 25dw)(mod)5 \equiv -j(mod)5$$

Zatem $j \equiv -S(mod)5$. Oznacza to, że osoba, która oryginalnie wzięła 1 PLN, to osoba oznaczona przez $5 - j$.

Obliczamy obecnie:

$$\begin{aligned} S(mod)4 &\equiv (155 - j - 5p - 10dz - 25dw)(mod)4 \\ &\equiv (3 - j - p - 2dz - dw)(mod)4 \end{aligned}$$

Zauważmy, że $j + p + dz + dw = 10$, czyli

$$S(mod)4 \equiv (3 - 2 - dz)(mod)4 \equiv (1 - dz)(mod)4$$

czyli $dz \equiv (1 - S)(mod)4$. Oznacza, to, że osoba, która oryginalnie wzięła 10 PLN to osoba o numerze $5 - dz$.

Postępujemy w sposób następujący, aby obliczyć niewiadomą p :

$$\frac{S}{5} = \frac{155 - j - 5p - 10dz - 25dw}{5} = 31 - \frac{j}{5} - p - 2dz - 5dw$$

W związku z tym, że $j = 1, 2, 3, 4$ mamy, $\left\lfloor \frac{S}{5} \right\rfloor = 30 - p - 2dz - 5dw$

czyli: $\left\lfloor \frac{S}{5} \right\rfloor \equiv (-p - 2dz)(mod)5$

co oznacza, że: $p \equiv \left(-\left\lfloor \frac{S}{5} \right\rfloor - 2dz \right)(mod)5$

Zatem osoba, która oryginalnie wzięła banknot o nominale 5 PLN to osoba o kodzie $x - p$.

Pozostała osoba wzięła banknot o nominale 25 PLN.

Zilustrujmy przykładem powyższe rozważania.

Pamiętajmy, że przyjęliśmy oznaczenia: A – 4, B – 3, C – 2, D – 1.

Powiedzmy, że w pierwszej fazie osoba A wzięła 5 PLN, B – 10 PLN, C – 25 PLN, D – 1 PLN. W drugiej fazie A zabiera 5 PLN, B – 20 PLN, C – 75 PLN, D – 4 PLN.

Na stole zostaje $S = 51$ PLN,

wówczas: $j \equiv -51(mod)5 \equiv 4(mod)5$. $5 - 4 = 1$, zatem banknot 1 PLN wzięła osoba D.

Następnie: $dz \equiv (1 - S)(mod)4 \equiv (1 - 51)(mod)4 \equiv -50(mod)4 \equiv 2(mod)4$
 $5 - 2 = 3$, co oznacza, że banknot 10 PLN wzięła osoba B.

Ostatecznie liczymy: $p \equiv \left(-\left\lfloor\frac{5}{5}\right\rfloor - 2dz\right) (mod)5 \equiv \left(-\left\lfloor\frac{51}{5}\right\rfloor - 2 \cdot 2\right) (mod)5 = (-14)(mod)5 \equiv 1(mod)5$,

bo $\left\lfloor\frac{51}{5}\right\rfloor = [10.2] = 1$. Obecnie, licząc różnicę: $5 - 1 = 4$, wnioskujemy, że banknot 5 PLN zabrała osoba A. W konsekwencji banknot 25 PLN zabrała osoba C.

Niezwykłe dodawanie i odejmowanie

24. Odgadywanie w pamięci sum liczb wielocyfrowych

Ta sztuczka jest bardzo prosta, jednakże robi duże wrażenie na uczestnikach. Spopularyzowana została również przez Art'a Benjamina – *mistrza szybkich, pamięciowych obliczeń*.

Informujemy publiczność, że potrafimy w pamięci dodawać liczby pięciocyfrowe dużo szybciej niż każdy kalkulator.

Prosimy kogoś z widowni o podanie dowolnych dwóch liczb pięciocyfrowych. Następnie informujemy, że są one zbyt łatwe do dodania i dopisujemy kolejną – *wymyśloną* przez nas. Możemy znów poprosić kolejne osoby o podanie kolejnych liczb i krzywić się, że są zbyt proste w dodawaniu, za każdym razem dopisujemy po jednej swojej „trudnej” liczbie.

Ostatecznie na tablicy mamy wypisaną nieparzystą $(2n + 1)$ ilość liczb, z których $n + 1$ było zaproponowanych przez publiczność, zaś n z nich dopisał prowadzący zabawę.

W tym momencie, po podkreśleniu tych liczb i postawieniu znaku +, natychmiast podajemy wynik.

Zanim wytłumaczymy działanie tricku, podamy konkretny przykład:

oto 2 pierwsze liczby podane przez publiczność

46328, 51792,

do tych dwóch liczb dodajemy swoją *trudną*: **53671**,

kolejne liczby podane przez widownię i nasze *trudne* są następujące:

41508, 62132, **58491**, 37867,

wypisane w kolumnie i dodane dają wynik:

46328

51729

53671

41508

62132

58491

37867

+ _____

351789

Zauważmy, że podane przez prowadzącego *trudne* liczby są tak konstruowane, by wraz z liczbami wskazanymi przez widownię tworzyły pary, których suma wynosi: 99999.

Zauważmy teraz, że: $46328 + 53671 = 41508 + 58491 = 62132 + 37867 = 99999$. Jedna z liczb podana przez publiczność, mianowicie: 51792 pozostaje bez swojej pary.

Zatem suma wynosi: $51792 + 3 \cdot 99999 = 51792 + 300000 - 3 = 351792 - 3 = 351789$.

Powyższe wyliczenia pokazują co następuje:

Prowadzący zostawia jedną z liczb, (oznaczymy ją przez N) podanych przez publiczność bez pary, a do pozostałych dobiera swoje trudne liczby w ten sposób, by sumowały się do 99999. Niech będzie n takich par.

Otrzymujemy wtedy sumę postaci: $N + n \cdot 99999 = N + n \cdot 10^5 - n$.

W praktyce, aby otrzymać wynik dodawania, dopisujemy z lewej strony do liczby bez pary ilość otrzymanych 99999-ek i odejmujemy od niej ilość tych 99999-ek.

W naszym przypadku liczbą bez pary jest 51792 i mamy 3 pary 99999-ek. Dopisujemy z lewej strony 51792 trójkę i odejmujemy trójkę, otrzymując $351792 - 3 = 351789$.

Zauważmy również, że trick ten możemy wykonywać biorąc pod uwagę liczby niekoniecznie pięciocyfrowe, ale i posiadające dowolną inną liczbę cyfr. Dla dwu- trzycyfrowych liczb sztuczka wydaje się jednak łatwa do rozszyfrowania.

25. Szybkie dodawanie

Z liczbami Fibonacciego wiąże się również pewien trick, który z powodzeniem można stosować podczas lekcji matematyki czy podczas każdej innej okazji, by uczestników zabawy przekonać do naszych niebywałych zdolności w pamięciowym dodawaniu. Otóż prosimy chętną do wzięcia udziału w tym eksperymencie osobę do podania dwóch liczb l_1, l_2 . Następnie prosimy o zapisanie kolejnych liczb, które powstają w sposób następujący:

$$l_3 = l_1 + l_2$$

$$l_4 = l_2 + l_3$$

$$l_5 = l_3 + l_4$$

$$l_6 = l_4 + l_5$$

$$l_7 = l_5 + l_6$$

$$l_8 = l_6 + l_7$$

$$l_9 = l_7 + l_8$$

$$l_{10} = l_8 + l_9$$

Na zakończenie prosimy o pokazanie nam wszystkich liczb: $l_1, l_2, l_3, \dots, l_{10}$.

Twierdzimy, że potrafimy w pamięci obliczyć sumę wszystkich dziesięciu liczb. Faktycznie w ciągu kilku sekund podajemy właściwy wynik.

Rzeczywiście, najpierw pokażmy ile wynosi suma $l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{10}$, a następnie podpowiemy, jak w pamięci można szybko ją wyliczyć.

Mamy:

$$\begin{aligned} & l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{10} = \\ & = l_1 + l_2 + (l_1 + l_2) + (l_1 + 2l_2) + (2l_1 + 3l_2) + (3l_1 + 5l_2) + (5l_1 + 8l_2) \\ & + (8l_1 + 13l_2) + (13l_1 + 21l_2) + (21l_1 + 34l_2) = 55l_1 + 88l_2 = 11(5l_1 + 8l_2) = 11l_7 \end{aligned}$$

Zatem suma to $11l_7$.

Pozostaje nam przekonać Czytelnika, że mnożenie przez 11 można również bardzo szybko wykonać w pamięci.

Przy mnożeniu liczby dwucyfrowej xy przez 11 wystarczy zsumować jej cyfry i powstały wynik (jeśli jest mniejszy od 10) wstawić pomiędzy jej cyfry. Jeśli wynik sumowania cyfr jest większy od 9, to zwiększamy o jeden cyfrę dziesiątek oryginalnej liczby, a pozostałą cyfrę wstawiamy pomiędzy cyfrę x oraz y .

Przykład

$$11 \cdot 14 = 154, \text{ bo } 1 + 4 = 5 < 10$$

$$11 \cdot 54 = 594, \text{ bo } 5 + 4 = 9 < 10$$

$$11 \cdot 67 = 737, \text{ bo } 6 + 7 = 13 \geq 10$$

$$11 \cdot 55 = 605, \text{ bo } 5 + 5 = 10 \geq 10$$

Mnożenie liczb trzycyfrowych przez 11 oparte jest na tej samej zasadzie:

$$11 \cdot 231 = 2541, \text{ bo } 1 + 3 = 4 < 10 \text{ i } 2 + 3 = 5 < 10$$

$$11 \cdot 223 = 2453, \text{ bo } 2 + 3 = 5 < 10 \text{ i } 2 + 2 = 4 < 10$$

$$11 \cdot 562 = 6182, \text{ bo } 6 + 2 = 8 < 10 \text{ i } 5 + 6 = 11 \geq 10$$

$$11 \cdot 789 = 8679, \text{ bo } 9 + 8 = 17 \geq 10 \text{ i } 7 + 8 + 1 = 16 \geq 10$$

$$11 \cdot 555 = 6105, \text{ bo } 5 + 5 = 10 \geq 10 \text{ i } 5 + 5 + 1 = 11 \geq 10$$

Mnożenie przez 11 liczb o większej ilości cyfr odbywa się na tej samej zasadzie. Jak widzimy trick z szybkim dodawaniem jest spektakularny i można wykonać go w pamięci w ciągu kilku sekund.

26. Fibonacci modulo 7 i modulo 9

Bierzemy pod uwagę dowolne dwie liczby naturalne $a_1, a_2 \leq 7$. Dodajemy je do siebie, tworząc liczbę: $a_3 = a_2 + a_1 \pmod{7}$, z drobną uwagą, że w przypadku sumy podzielnej przez 7 bierzemy jako wynik 7. Postępując dalej tworzymy liczby: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \pmod{7}$.

Załóżmy na przykład, że zaczynamy od 1,1. Wówczas kolejne liczby skonstruowane według podanego schematu są następujące:

1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 7, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 7, 1, 1, 2, 3, ...

Zauważmy, że ciąg ten po szesnastu wyrazach się powtarza, tworząc nieskończony ciąg okresowy o okresie równym 16.

Gdybyśmy zaczęli wyznaczanie ciągu od par: (1,2), (2,3), (3,5), (5,1), (1,6), (6,7), (7,6), (6,6), (6,5), (5,4), (4,2), (2,6), (6,1), (1,7), (7,1) otrzymalibyśmy taką samą sekwencję cykliczną o okresie 16.

Jak wiadomo dysponujemy 49 możliwościami wyboru pierwszych dwóch liczb. Jak widzimy dla 16 par: (1,1), (1,2), (2,3), (3,5), (5,1), (1,6), (6,7), (7,6), (6,6), (6,5), (5,4), (4,2), (2,6), (6,1), (1,7), (7,1) otrzymujemy taki sam okresowy ciąg o okresie 16 i sumie wyrazów okresu równej: $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 1 + 6 + 7 + 6 + 6 + 5 + 4 + 2 + 6 + 1 + 7 = 63$.

Weźmy pod uwagę początkowe liczby (1,3).

Para ta generuje następujący ciąg:

1, 3, 4, 7, 4, 4, 1, 5, 6, 4, 3, 7, 3, 3, 6, 2, 1, 3, ...

Ciąg ten jest również wyznaczany przez pary: (1,3), (3,4), (4,7), (7,4), (4,4), (4,1), (1,5), (5,6), (6,4), (4,3), (3,7), (7,3), (3,3), (3,6), (6,2), (2,1). Suma elementów okresu wynosi również 63.

Początkowe liczby (5,5) wyznaczają ciąg 5, 5, 3, 1, 4, 5, 2, 7, 2, 2, 4, 6, 3, 2, 5, 7, 5, 5, ..., który jest wspólny dla każdej z par: (5,5), (5,3), (3,1), (1,4), (4,5), (5,2), (2,7), (7,2), (2,2), (2,4), (4,6), (6,3), (3,2), (2,5), (5,7), (7,5). Suma elementów okresu jest równa 63.

Ostatnia para, która może być wzięta pod uwagę to (7,7).

Zauważmy obecnie, że każde dwie liczby różne od pary (7,7) generują w podany sposób ciąg 16 elementów o sumie zawsze równej 63.

Jest to podstawą do sztuczki, w której po krótkim wprowadzeniu do wykonywania dodawania z punktu widzenia dzielenia przez 7, proponujemy w prawe górne rogi tablicy 4x4 wpisanie dowolnych dwóch liczb naturalnych mniejszych od 7. Na przykład startujemy od liczb 4,5.

4	5		

Następnie prosimy o wypełnianie kolejnych okienek tablicy zgodnie z opisaną regułą. Otrzymujemy tabelę:

4	5	2	7
2	2	4	6
3	2	5	7
5	5	3	1

Ostatecznie prosimy o obliczenie zwykłej sumy wszystkich liczb. Suma zawsze będzie wynosić 63, a my ten wynik będziemy mieli wcześniej zapisany na kartce, którą pokażemy widzowi, ku jej zdumieniu.

Podobna sztuczka również jest stosowana przy dzieleniu przez 9. Wówczas długość okresu wynosi 25, a suma jego elementów to $117 + a_1$. Oznacza to, że prosimy o wpisywanie elementów do tablicy 5x5, a suma elementów w tablicy będzie wynosić zawsze 117 plus element stojący w lewym, górnym rogu.

Przykładowo, rozpoczynając od 4,5, otrzymamy:

4	5	9	5	5
1	6	7	4	2
6	8	5	4	9
4	4	8	3	2
5	7	3	1	4

Oczywiście suma elementów w tablicy wynosi 121, czyli $4 + 117$.

27. Suma sześciu liczb trzycyfrowych

Prosimy o zanotowanie liczby trzycyfrowej o różnych cyfrach. Następnie prosimy o wypisanie wszystkich możliwych liczb, które możemy utworzyć, mając do dyspozycji cyfry tworzące liczbę oryginalną. Ostatecznie prosimy o obliczenie sumy tych wszystkich liczb. Podczas gdy wykonywane są obliczenia, notujemy na kartce wynik dodawania, który obliczamy w pamięci.

Zauważmy, że wybierając liczbę abc, mamy sześć permutacji: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Wówczas suma tych sześciu liczb wynosi:

$$100a + 10b + c + 100a + 10c + b + 100b + 10a + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b + 100c + 10b + a = 222a + 222b + 222c = 222(a + b + c).$$

Zatem wybierając przykładowo liczbę 123 suma wszystkich sześciu permutacji wynosić będzie: $123 + 132 + 231 + 213 + 321 + 312 = 222 \cdot (1 + 2 + 3) = 1332$.

28. Niezwykłe dodawanie

Trick będzie polegał na odgadnięciu sumy dowolnych czterech trzycyfrowych liczb. Do wykonania sztuczki są potrzebne trzy plansze. Na każdej planszy znajduje się 9 czterocyfrowych liczb.

Na planszy A będą zapisane: 4286, 5771, 9083, 6518, 2396, 6860, 2909, 5546, 8174.

Na planszy B znajdują się: 5792, 6881, 7547, 3299, 7187, 6557, 7097, 5288, 6548.

Na planszy C umieścimy: 2708, 5435, 6812, 7343, 1286, 5237, 6470, 8234, 5129.

Wybieramy trzy osoby i każdej z nich wręczamy jedną z plansz. Prosimy o wybranie jednej z liczb z każdej z plansz. Następnie prosimy kolejne osoby o podanie nam jednej cyfry z wybranych przez nich liczb. Zapisujemy te cyfry na tablicy tak, by tworzyły liczbę trzycyfrową $A_1B_1C_1$. Zauważamy, że jest tu pełna dowolność w wybieraniu cyfr i nie ma mowy o jakimkolwiek ustawieniu.

Dalej prosimy te trzy osoby o podanie nam kolejnych cyfr z wybranych przez siebie liczb. W ten sposób budujemy drugą liczbę trzycyfrową: $A_2B_2C_2$.

Dalej prosimy o podanie kolejnych cyfr z wybranych przez siebie liczb, tworząc trzycyfrowe liczby: $A_3B_3C_3$ oraz $A_4B_4C_4$. Wyrażamy nadzieję, że wszyscy uczestnicy eksperymentu wierzą, że cyfry zostały podane w kolejności, o której zdecydowali sami widzowie, zatem nie ma mowy o żadnej manipulacji.

Na tablicy widnieją cztery trzycyfrowe liczby:

$A_1B_1C_1$

$A_2B_2C_2$

$A_3B_3C_3$

$A_4B_4C_4$

Prosimy o chwilę na koncentrację, gdyż obwieszczamy widzowi, że suma tych liczb jest nam doskonale znana i w tym momencie wyjmujemy z kieszeni kartkę, na której widnieje suma tych czterech liczb – mianowicie 2247!

Zanim przystąpimy do wyjaśnienia klucza tej sztuczki, prześledźmy na przykładzie jej działanie. Otóż powiedzmy, że osoby wybrały liczby 9083, 6548 oraz 5129.

Kolejne cyfry podane przez widzów tworzą liczby:

$$\begin{array}{r}
 951 \\
 865 \\
 389 \\
 042 \\
 +----- \\
 2247
 \end{array}$$

Zasada działania sztuczki jest bardzo prosta. Otóż w zestawie A suma cyfr każdej z liczb wynosi 20, w zestawie B suma cyfr każdej z liczb wynosi 23, zaś w zestawie C 17. Zatem, obliczając sumę:

$$\begin{aligned} &A_1B_1C_1 \\ &A_2B_2C_2 \\ &A_3B_3C_3 \\ &A_4B_4C_4 \end{aligned}$$

mamy: suma cyfr kolumny jedności wynosi 17. Cyfra sumy jedności będzie wynosić zatem 7, a 1 przesuwamy do kolumny dziesiątek, której suma cyfr wynosić będzie $23 + 1 = 24$. Oznacza to, że cyfra sumy dziesiątek to 4, zaś 2 przenosimy do kolumny setek, której suma cyfr będzie wynosić 22. Ostatecznie suma zawsze będzie równa 2247.

Zainteresowany Czytelnik sam może tworzyć swoje własne magiczne sumy. Chociażby zestaw:

A: 1239, 8601, 2643, 5118, 8441, 3381

B: 4286, 5771, 9083, 6518, 2396, 8174

C: 9090, 7245, 3276, 1836, 5355, 6660

zawsze da sumę 2015.

29. Odgadujemy różnicę liczb czterocyfrowych

Prosimy ochotnika o zapisanie liczby czterocyfrowej, w której cyfry zapisane od lewej do prawej są w porządku malejącym i różnią się – następną od poprzedniej o jeden. Następnie prosimy o napisanie liczby, w której jest odwrócony porządek cyfr; prosimy o odwrócenie cyfr tej liczby. Ostatecznie prosimy o obliczenie różnicy tych liczb. Ku zdumieniu widowni, okazuje się, że wcześniej poprawnie przewidzieliśmy rezultat. Możemy mieć na przykład w kieszeni karteczkę z wynikiem.

Zanim wytłumaczymy działanie sztuczki, spójrzmy jak postępujemy przy wyborze np. 7654:

$$7654 \rightarrow 4567 \rightarrow 7654 - 4567 = 3097$$

Obecnie zauważmy, że:

$$\begin{aligned} &a10^3 + (a-1)10^2 + (a-2)10 + (a-3) + \\ &-(a-3)10^3 - (a-2)10^2 - (a-1)10 - a = \\ &= 3 \cdot 10^3 + 10^2 - 10 - 3 = 3 \cdot 10^3 + 97 = 3097 \end{aligned}$$

Arytmetyka po chińsku

30. Chińskie twierdzenie o resztach

Najsłynniejszy chiński matematyk Sun Tzu w V wieku n.e. napisał traktat matematyczny, w którym pojawiło się tzw. chińskie twierdzenie o resztach. Pozwala ono na poszukiwanie nieznanej liczby naturalnej, gdy znane są reszty z dzielenia jej przez liczby pierwsze.

Zilustrujmy rezultaty tego twierdzenia i algorytmu znajdowania rozwiązania na przykładzie.

Wiemy, że nieznana liczba x daje resztę a przy dzieleniu przez 3, resztę b przy dzieleniu przez 5, oraz c przy dzieleniu przez 7. Znajdź x .

Czytelnikom, którzy znają arytmetykę modulo dedykujemy:

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{3} \\ x \equiv b \pmod{5} \\ x \equiv c \pmod{7} \end{cases}$$

Zatem $x = 3k + a$, gdzie k jest liczbą całkowitą, dalej:

$$3k + a \equiv b \pmod{5},$$

$$3k \equiv b - a \pmod{5},$$

$$6k \equiv 2(b - a) \pmod{5},$$

$$k \equiv 2b - 2a \pmod{5},$$

$$k = 5n + 2b - 2a \text{ gdzie } n \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

Wobec tego:

$$x = 3(5n + 2b - 2a) + a = 15n + 6b - 5a$$

$$15n + 6b - 5a \equiv c \pmod{7},$$

$$n \equiv c + 5a - 6b \pmod{7},$$

$$n \equiv c + 5a + b \pmod{7},$$

$$n = 7m + c + 5a + b, \text{ gdzie } m \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

$$\text{Zatem: } x = 15(7m + c + 5a + b) + 6b - 5a = 105m + 15c + 70a + 21b.$$

Prosimy ochotnika o wybranie sobie liczby naturalnej z przedziału $[1; 100]$. Następnie prosimy o podanie reszty z dzielenia tej liczby przez 3 (oznaczamy ją przez a), przez 5 (b) i przez 7 (c). Po chwili zastanowienia odgadujemy wybraną liczbę x jako $105m + 15c + 70a + 21b$, tak dobierając liczbę całkowitą m , aby $x \in [1; 100]$.

Przykładowo, gdy pomyślaną liczbą jest 92, otrzymujemy $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$.

Mamy zatem: $x = 105m + 15 \cdot 1 + 70 \cdot 2 + 21 \cdot 2 = 105m + 197$. Biorąc $m = -1$, dostajemy $x = 92$.

Ciekawe własności liczb

31. Trick liczbowy 123

Prosimy o pomyślenie sobie dowolnej liczby naturalnej i obliczenie ile w niej jest cyfr parzystych (a), nieparzystych (b) i wszystkich razem (c). Liczby te piszemy obok siebie, tworząc nową liczbę, abc , dla której powtarzamy procedurę: tzn. obliczamy, ile jest w niej cyfr parzystych a_1 , nieparzystych b_1 i wszystkich razem c_1 , tworząc w konsekwencji liczbę $a_1b_1c_1$. Dla tej liczby znów powtarzamy procedurę, i tak kolejno tworzymy liczby typu $a_nb_nc_n$.

Dając widowni trochę czasu, po chwili pełnej koncentracji ogłaszamy, że każdy otrzymał już wynik 123.

Rzeczywiście, jeżeli dowolnej liczbie naturalnej n przyporządkujemy $f(n) = a_nb_nc_n$, gdzie $a_nb_nc_n$ to liczba naturalna powstała przez dopisanie kolejno po sobie liczby cyfr parzystych w liczbie n (a_n), liczby cyfr nieparzystych liczby n (b_n) oraz liczby wszystkich cyfr tej liczby (c_n), można zauważyć co następuje:

$$f(123) = 123$$

Dla $n < 1000$ wartości a , b , c mogą przyjmować tylko następujące wartości: $(0,3,3)$, $(1,2,3)$, $(2,1,3)$, $(3,0,3)$, które w kolejnych iteracjach dadzą nam wynik 123 zaś $f(123) = 123$.

Dla $n \geq 1000$ zauważamy, że $f(n) < n$, co powoduje, że powtarzając procedurę skończoną liczbę razy, otrzymamy $f(k) < 1000$ – przypadek, który już rozpatrywaliśmy.

32. Suma sześciaków

Prosimy ochotników z widowni o wzięcie pod uwagę dowolnej liczby naturalnej podzielnej przez 3. Następnie obliczmy sześciaki tworzących ją cyfr i dodajmy te wyniki do siebie. Z tak otrzymaną liczbą powtarzamy poprzednią procedurę. Kolejne iteracje dadzą nam w konsekwencji liczbę 153, dla której suma sześciaków cyfr $1^3 + 3^3 + 5^3 = 153$.

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że definiując $f(n)$ = suma sześciaków cyfr liczby n , otrzymujemy $f(n) < n$ oraz $f(153) = 153$.

33. Stałe Kaprekara

Weź dowolną liczbę trzycyfrową różną od wielokrotności 111. Skonstruuj największą i najmniejszą liczbę trzycyfrową z cyfr ją tworzących i oblicz różnicę. Dla różnicy postępuj analogicznie. Po skończonej liczbie takich operacji otrzymasz 495, dla której zastosowana procedura da znów 495.

Przykład. Bierzemy pod uwagę 265:

$$652 - 256 = 396$$

$$963 - 369 = 594$$

$$954 - 459 = 495$$

$$954 - 459 = 495 \dots$$

Dla dowodu załóżmy, że $a > c$. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c - 100c - 10b - a &= 100(a - c) + (c - a) = 100(a - c) - 10 + \\ [10 - (a - c)] &= 100(a - c - 1) + 100 - 10 + [10 - (a - c)] = 100(a - c - 1) + 90 + \\ [10 - (a - c)]. \end{aligned}$$

Zauważmy, że cyfrą dziesiątek tej liczby jest 9, zaś cyfry jednośc i setek sumują się do 9. Zatem możliwe wartości tej różnicy to: 099, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891, 990. Liczby te tworzą następujące pary: 990, 099/981, 189/972, 279/963, 369/954, 459.

Obecnie wystarczy obliczyć:

$$990 - 99 = 891$$

$$981 - 189 = 792$$

$$972 - 279 = 693$$

$$963 - 369 = 594$$

$$954 - 459 = 495$$

Jak widać do stałej 495 dotrzemy najpóźniej po 6 krokach.

Dla liczb czterocyfrowych algorytm ten również działa i najpóźniej po 7 krokach kończy się na 6174.

Przykładowo: bierzemy 5472:

$$7542 - 2457 = 5085$$

$$8550 - 0558 = 7992$$

$$9972 - 2799 = 7173$$

$$7731 - 1377 = 6354$$

$$6543 - 3456 = 3087$$

$$8730 - 0378 = 8352$$

$$8532 - 2358 = 6174$$

$$7641 - 1467 = 6174 \dots$$

Gdy zastosujemy tę procedurę dla liczb dwucyfrowych, za każdym razem utknijemy w pętli składającej się z pięciu elementów.

Weźmy na przykład 71:

$$71 - 17 = 54, 54 - 45 = 9 = 09, 90 - 09 = 81, 81 - 18 = 63, 63 - 36 = 27, 72 - 27 = 45,$$

$$54 - 45 = 9 = 09$$

W przypadku liczb trzycyfrowych algorytm zawsze skończy się na liczbie 495.
Startując z liczbą 198, otrzymamy:

$$981 - 189 = 792, 972 - 279 = 693, 963 - 369 = 594, 954 - 459 = 495, 954 - 459 = 495 \dots$$

Dla liczb o większej ilości cyfr algorytm ten nie jest zbieżny.

Liczby 495, 6147 nazywamy stałymi Kaprekara. **Hinduski matematyk D.R. Kaprekar (1905-1986) odkrył te własności liczb cztero- i trzycyfrowych w 1955 roku.**

Kaprekar również w swoich pracach poszukiwał tzw. liczb Kaprekara. Liczba Kaprekara to liczba naturalna, której kwadrat możemy rozbić na dwie dodatnie liczby, których suma daje oryginalną liczbę:

$$9^2 = 81, 8 + 1 = 9, 45^2 = 2025, 20 + 25 = 45, 297^2 = 88209, 88 + 209 = 297 \\ 703^2 = 494209, 494 + 209 = 703, 4879^2 = 23804641, 238 + 4641 = 4879$$

34. Ulubiona cyfra

Zapisujemy na tablicy liczbę 12345679 i prosimy widza o podanie swojej ulubionej cyfry. Powiedzmy, że ta cyfra to x .

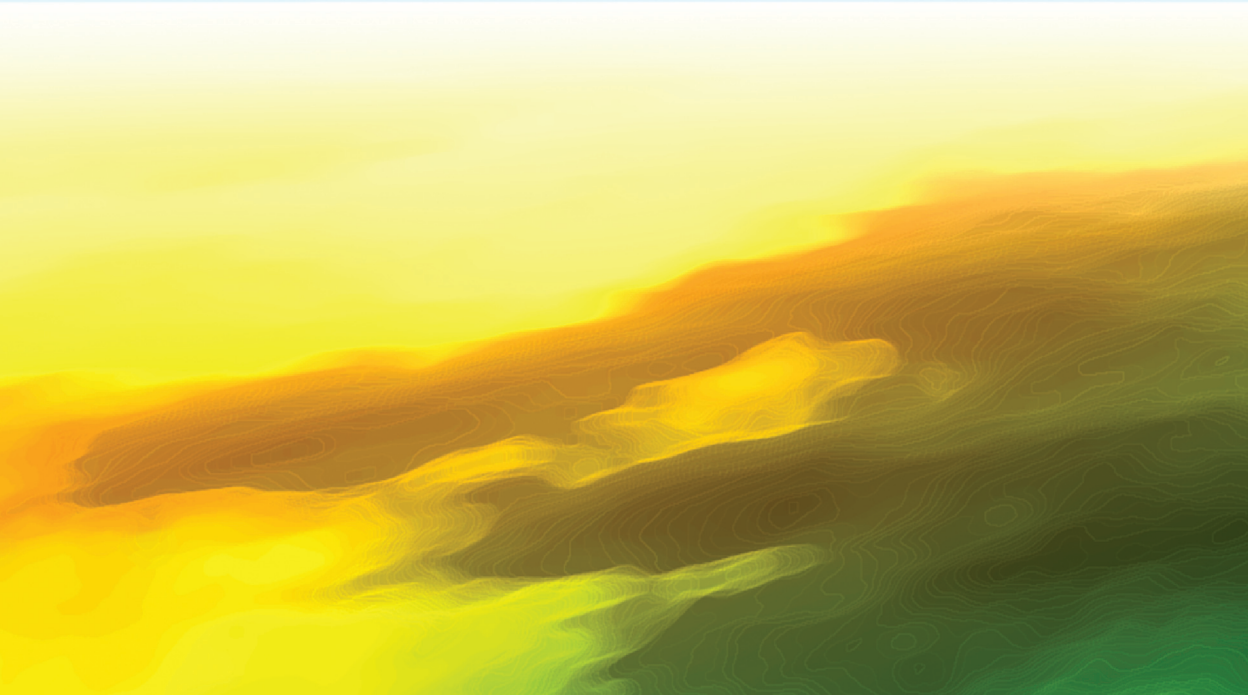
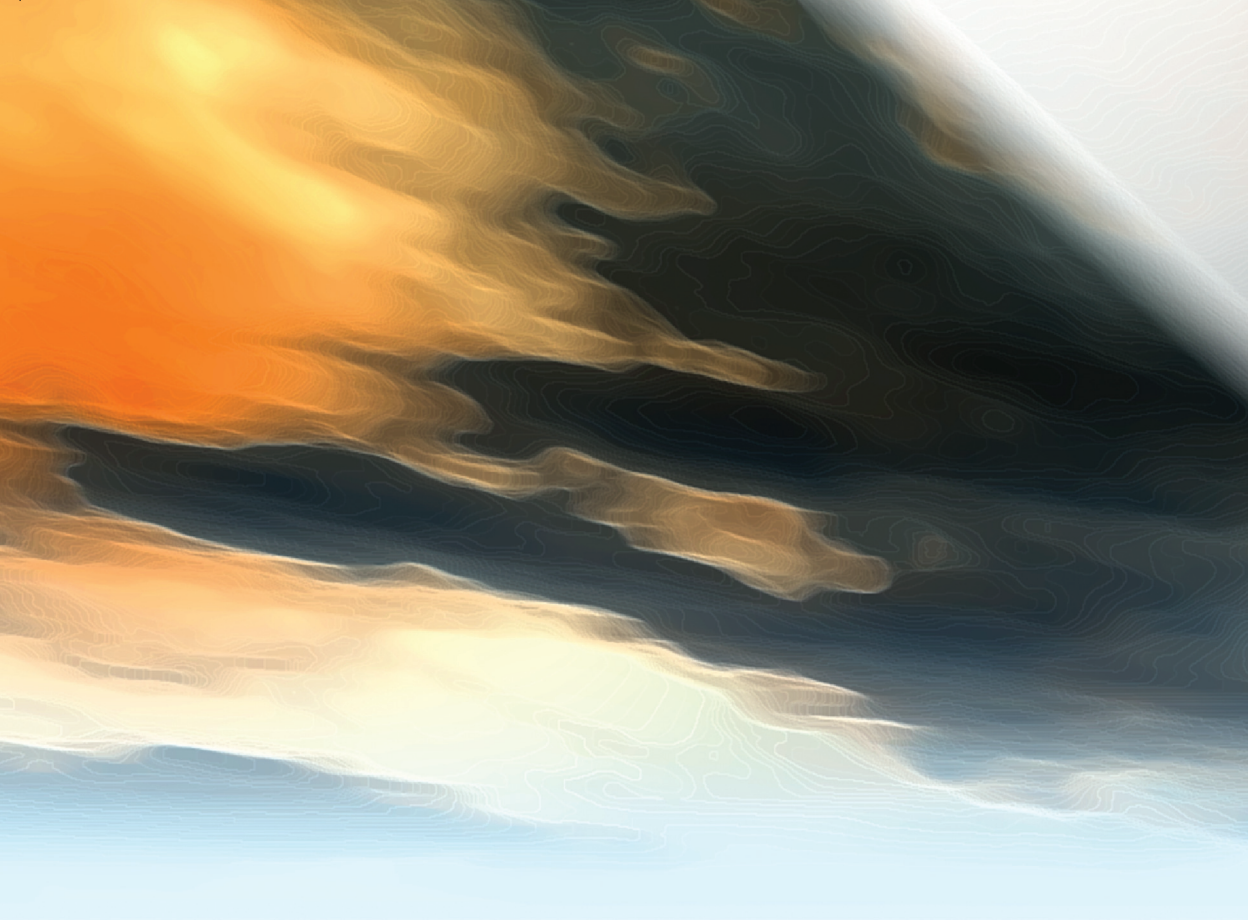
Obiecujemy widzowi rozmnożenie jego ulubionej cyfry. Prosimy go o pomnożenie liczby 12345679 przez $9 \cdot x$. Wynik będzie zawsze równy xxxxxxxxx.

Życząc udanej zabawy i przepraszając za wszystkie błędy, które pojawiły się na kartach tej książki, żegnam wytrwałego Czytelnika, obiecując, że jeśli tylko będzie miał ochotę na spotkania z Matematyką, to dołożę wszelkich starań, by mógł sięgnąć po kolejne opowieści z cyklu Akademii Zastosowań Matematyki.

Do zobaczenia

Bibliografia

1. B. Chan, *Moving on*, The Actuary, Vol. 18, No. 1, 1984, pp. 4-5.
2. B. Chan, *A sequel to "moving on"*, The Actuary, Vol. 18, No. 9, 1984, pp. 4-5.
3. T. O'Brien, *Fixed points and exam taking strategy*, The American Mathematical Monthly, Vol. 92, No. 9, 1985, pp. 659-661.
4. B. Bollobás, *The art of mathematics*, Cambridge University Press, New York 2006.
5. W.W. Rouse Ball, *Mathematical Recreations and Essays*, Dover, 1892.
6. W.W. Rouse Ball and H.S.M. Coxeter, *Mathematical Recreations and Essays*, Dover, 1987.
7. A. Lo Bello, *A papal Conclave: Testing the plausibility of a historical account*, Mathematics Magazine, Vol. 55, No. 4, 1982, pp. 230-232.
8. A. Lo Bello, *An unlikely history story*, The Mathematical Gazette, Vol. 70, No. 454, 1986, pp. 289-290.
9. P. Nahin, *Digital dice: Computational Solutions to Practical Probability Problems*, Princeton University Press, 2008.
10. Ludwig von Pastor *The history of the Popes*, www.archive.org
11. Jan Paweł II *Konstytucja Apostolska Universi Domicini Gregis o wakacie Stolicy Apostolskiej i wyborze biskupa rzymskiego* Watykan 1996.
12. L. Wallace, *Math Miracles*, Seeman Printery, Durham, N.C. 1950.
13. M. Kleber, *The best card trick*, Mathematical Intelligencer, Vol. 24, No. 1, 1-5, 2002.
14. M. Gardner, *Mathematics, Magic and mystery*, Dover Publications 1956.
15. Księga Rodzaju, Pismo Święte, Biblia Tysiąclecia, Wyd. Pallotinum, Poznań 2003.
16. J. Lagarias, E. Rains, R. Vanderbei, The Kruskal Count 2001.
Front.math.ucdavis.ed
17. J.B. Estoup, *Games Stenographiques*, Institut Stenographique de France, Paris, 1916.
18. L.A. Adamic, B.A. Huberman, *The nature of markets in the World Wide Web*, Quarterly Journal of Electronic Commerce, 512, 2000.
19. S. Redner, *How popular is your paper?* Eur. Phys. J.B. 4, 131-134, 1998.
20. A.P. Hackett, *70 years of Best Sellers* R.R. Bowker Company, New York, 1967.
21. D.C. Roberts, D.L. Turcotte, *Fractality and self-organized criticality of wars*, Fractals 6, 351-357, 1998.
22. www.ngdc.noaa.gov



ISBN 978-83-7283-626-7